

B. Metody numeryczne i graficzne całkowania

§ 62. Szacowanie błędu. Szacowanie błędu całkowania przybliżonego jest na ogół prostsze, niż szacowanie błędów przybliżonego różniczkowania. Niech np. funkcja $f(x)$ przybliży funkcję $F(x)$ w przedziale $[a, b]$ i niech dokładność tego przybliżenia będzie określona nierównością

$$(34) \quad |F(x) - f(x)| \leq B \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b,$$

gdzie B jest pewną stałą. Niech funkcje $F(x)$ i $f(x)$ będą całkowalne w przedziale $[a, b]$. Wtedy

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [F(x) - f(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |F(x) - f(x)| dx \leq B \int_a^b dx = B(b-a). \end{aligned}$$

Jeżeli zatem spełniona jest nierówność (34), to $\int_a^b f(x) dx$ przybliża $\int_a^b F(x) dx$ z dokładnością do $B(b-a)$, czyli

$$(35) \quad \left| \int_a^b F(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq B(b-a).$$

Jeżeli dokładność, z jaką funkcja $f(x)$ przybliża funkcję $F(x)$ w przedziale $[a, b]$, jest określona nierównością

$$(36) \quad |F(x) - f(x)| \leq \varphi(x),$$

gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją całkowalną w przedziale $[a, b]$, to otrzymujemy

$$(37) \quad \left| \int_a^b F(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |F(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

§ 63. Metoda szeregów potęgowych. Niech będzie dana funkcja $F(x)$ rozwijalna w szereg potęgowy w otoczeniu punktu x_0

$$(38) \quad F(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

zbieżny w przedziale $x_0 - r < x < x_0 + r$. Niech a, b będą liczbami spełniającymi nierówność $x_0 - r < a < b < x_0 + r$. Zadanie polega na obliczeniu wartości przybliżonej całki $\int_a^b F(x) dx$.

Niech $s_n(x)$ będzie n -tą sumą częściową szeregu (38), tj.

$$(39) \quad s_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n.$$

Metoda szeregów potęgowych polega na przyjęciu, że

$$\int_a^b F(x) dx \approx \int_a^b s_n(x) dx.$$

Oszacujemy błąd tego przybliżenia. Całkując szereg (38) wyraz po wyrazie otrzymujemy

$$\begin{aligned} (40) \quad \Phi(x) &= \int F(x) dx = \\ &= C + a_0(x-x_0) + \frac{1}{2} a_1(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1} + \dots = \\ &= C + a_0(x-x_0) + \frac{1}{2} a_1(x-x_0)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1} + \frac{\Phi^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} (x-x_0)^{n+2} = \\ &= C + a_0(x-x_0) + \frac{1}{2} a_1(x-x_0)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1} + \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)!} (x-x_0)^{n+2}, \end{aligned}$$

gdzie C jest dowolną stałą, a ξ liczbą dobraną do x i zawartą między x_0 i x . Zatem

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \left[C + a_0(b-x_0) + \frac{1}{2} a_1(b-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n(b-x_0)^{n+1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{F^{(n+1)}(\xi_b)}{(n+2)!} (b-x_0)^{n+2} \right] - \\ &\quad - \left[C + a_0(a-x_0) + \frac{1}{2} a_1(a-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n(a-x_0)^{n+1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{F^{(n+1)}(\xi_a)}{(n+2)!} (a-x_0)^{n+2} \right] = \\ &= \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1(x-x_0) dx + \dots + \int_a^b a_n(x-x_0)^n dx + \\ &\quad + \frac{F^{(n+1)}(\xi_b)}{(n+2)!} (b-x_0)^{n+2} - \frac{F^{(n+1)}(\xi_a)}{(n+2)!} (a-x_0)^{n+2} = \\ &= \int_a^b s_n(x) dx + \frac{1}{(n+2)!} [F^{(n+1)}(\xi_b)(b-x_0)^{n+2} - F^{(n+1)}(\xi_a)(a-x_0)^{n+2}]. \end{aligned}$$

Jeżeli $M_{n+1}^- \leq F^{(n+1)}(x) \leq M_{n+1}^+$, gdzie M_{n+1}^- i M_{n+1}^+ są stałymi, dla wartości zmiennej x zawartych między najmniejszą i największą z liczb x_0, a, b , to mamy

$$(41) \quad \int_a^b F(x) dx = \int_a^b s_n(x) dx + \frac{B_{n+1}}{(n+2)!},$$

gdzie

$$(42) \quad D_1 - D_3 \leq B_{n+1} \leq D_2 - D_4,$$

a

$$(42a) \quad \begin{aligned} D_1 &= \min [M_{n+1}^-(b-x_0)^{n+2}, M_{n+1}^+(b-x_0)^{n+2}], \\ D_2 &= \max [M_{n+1}^-(b-x_0)^{n+2}, M_{n+1}^+(b-x_0)^{n+2}], \\ D_3 &= \max [M_{n+1}^-(a-x_0)^{n+2}, M_{n+1}^+(a-x_0)^{n+2}], \\ D_4 &= \min [M_{n+1}^-(a-x_0)^{n+2}, M_{n+1}^+(a-x_0)^{n+2}]. \end{aligned}$$

Jeśli w szczególności $|F^{(n+1)}(x)| \leq M$, gdzie M jest stałą, to

$$(43) \quad |B_{n+1}| \leq M [|b-x_0|^{n+2} + |a-x_0|^{n+2}].$$

Jeśli szereg (40) jest przemienny, to można szacować jego resztę pierwszym opuszczonym wyrazem. Jest wtedy

$$(44) \quad \frac{B_{n+1}}{(n+2)!} \leq \frac{|a_{n+1}|}{n+2} [|b-x_0|^{n+2} + |a-x_0|^{n+2}],$$

czyli

$$(43a) \quad |B_{n+1}| \leq |F^{(n+1)}(x_0)| [|b-x_0|^{n+2} + |a-x_0|^{n+2}].$$

PRZYKŁAD 5. Obliczyć całkę

$$\int_0^{0,3} e^{-x^2} dx$$

z dokładnością do 0,00001.

Szukamy odpowiedniej sumy częściowej (39) szeregu Maclaurina funkcji $F(x) = e^{-x^2}$. W tym celu obliczamy

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{-x^2}, & F(0) &= 1, & a_0 &= F(0) = 1, \\ F'(x) &= -2xe^{-x^2}, & F'(0) &= 0, & a_1 &= \frac{F'(0)}{1!} = 0, \\ F''(x) &= (4x^2 - 2)e^{-x^2}, & F''(0) &= -2, & a_2 &= \frac{F''(0)}{2!} = -1, \\ F'''(x) &= (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}, & F'''(0) &= 0, & a_3 &= \frac{F'''(0)}{3!} = 0, \end{aligned}$$

$$F^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}, \quad F^{(4)}(0) = 12, \quad a_4 = \frac{F^{(4)}(0)}{4!} = 0,5,$$

$$F^{(5)}(x) = (-32x^5 + 160x^3 - 120x)e^{-x^2}, \quad F^{(5)}(0) = 0, \quad a_5 = \frac{F^{(5)}(0)}{5!} = 0,$$

$$F^{(6)}(x) = (64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120)e^{-x^2}, \quad F^{(6)}(0) = -120, \quad a_6 = \frac{F^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{1}{6}.$$

.....

Próbujemy, czy można będzie przyjąć we wzorach (39) i (41) $n=5$:

Dla $0 \leq x \leq 0,3$ jest

$$(45) \quad -120 \leq 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120 < -59.$$

Istotnie, funkcja $64u^3 - 480u^2 + 720u - 120$ nie ma ekstremów w przedziale $(0, 0,09)$, więc przybiera wartości ekstremalne na krańcach tego przedziału. Dla $u=0$ otrzymujemy wartość najmniejszą -120 , dla $u=0,09$ wartość największą $-59,041344$.

Jest dalej

$$(46) \quad 0,91 \leq e^{-x^2} \leq 1 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 0,3.$$

Na mocy (45) i (46) jest

$$-120 \leq F^{(6)}(x) < -53 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 0,3,$$

a stąd na mocy (42) dla $a=x_0=0$ i $b=0,3$

$$-0,0263 < -120 \cdot 0,3^7 \leq B_6 < -53 \cdot 0,3^7 < -0,0115.$$

Jeżeli przyjąć $B_6 = -0,0189 \pm 0,0074$, to

$$\frac{B_{n+1}}{(n+2)!} = \frac{B_6}{7!} = -0,000004 \pm 0,000002.$$

Błąd jest dostatecznie mały, więc przyjmujemy $n=5$. Zatem funkcja (39) przybiera postać

$$s_5(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2} x^4$$

i

$$\int_0^{0,3} s_5(x) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^{0,3} = 0,291243.$$

Zatem ostatecznie

$$\int_0^{0,3} e^{-x^2} dx = 0,291243 - 0,000004 \pm 0,000002 = 0,29124 \pm 0,000003.$$

Zadanie powyższe można rozwiązać jeszcze inaczej. Podstawiając $z = -x^2$ do znanego rozwinięcia funkcji e^z w szereg Maclaurina

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

otrzymujemy

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Szereg ten jest zbieżny dla każdej wartości zmiennej x^1 . Całkując go wyraz po wyrazie dostajemy

$$\Phi(x) = \int e^{-x^2} dx = C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots,$$

gdzie C jest stałą.

Jest zatem

$$\int_0^{0,3} e^{-x^2} dx = \Phi(0,3) - \Phi(0) = 0,3 - \frac{0,3^3}{3 \cdot 1!} + \frac{0,3^5}{5 \cdot 2!} - \frac{0,3^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

Ponieważ szereg ten jest przemienny, jego resztę szacuje się pierwszym opuszczonym wyrazem. Zatem

$$\int_0^{0,3} e^{-x^2} dx = 0,3 - \frac{0,3^3}{3 \cdot 1!} + \frac{0,3^5}{5 \cdot 2!} \pm \frac{0,3^7}{7 \cdot 3!} = 0,29124 \pm 0,00001.$$

§ 64. Metoda trapezów. Dana jest funkcja $F(x)$ mająca w przedziale $[a, b]$ drugą pochodną. Niech dla $a \leq x \leq b$ będzie $M_2^- \leq F''(x) \leq M_2^+$, gdzie M_2^- , M_2^+ są stałe, czyli

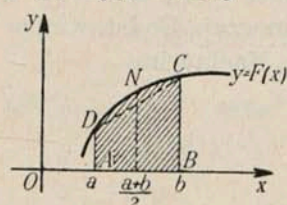
$$(47) \quad |F''(x) - F_2| \leq M_2, \quad \text{gdzie} \quad F_2 = \frac{M_2^+ + M_2^-}{2}, \quad M_2 = \frac{M_2^+ - M_2^-}{2}.$$

Chcąc obliczyć całkę $I = \int_a^b F(x) dx$ możemy skorzystać z interpretacji geometrycznej tej całki. Jak wiadomo, całka I jest polem obszaru ograniczonego krzywą $y = F(x)$, osią x i rzędnymi w punktach $x = a$ i $x = b$ (rys. 13).

¹⁾ Patrz np. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1954, str. 191.

Metoda trapezów polega na przyjęciu pola P trapezu $ABCD$ za wartość przybliżoną całki I .

Oszacujemy błąd, jaki popełniamy stosując tę metodę. Niech $F(a) = y_0$, $F(b) = y_1$. Wtedy



Rys. 13

Z drugiej strony

$$P = \frac{b-a}{2} (y_0 + y_1).$$

$$P = \int_a^b f(x) dx,$$

gdzie $y=f(x)$ jest prostą, przechodzącą przez punkty (a, y_0) i (b, y_1) . Funkcja $f(x)$ jest wielomianem interpolacyjnym pierwszego stopnia dla funkcji $F(x)$, więc na mocy wzoru (8) z rozdziału IV jest

$$\begin{aligned} F(x) - f(x) &= \frac{F''(\xi)}{2} (x-a)(x-b) = \\ &= \frac{F''(\xi) - F_2}{2} (x-a)(x-b) + \frac{F_2}{2} (x-a)(x-b), \end{aligned}$$

gdzie $a \leq x \leq b$, ξ jest liczbą dobraną do x i leżącą wewnątrz przedziału $[a, b]$, a F_2 — liczbą określoną wzorem (47). Zatem na mocy (47)

$$\left| F(x) - f(x) - \frac{F_2}{2} (x-a)(x-b) \right| \leq \frac{M_2}{2} (x-a)(b-x),$$

a na mocy (36) i (37)

$$(48) \quad \left| \int_a^b F(x) dx - \int_a^b f(x) dx - \frac{F_2}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_a^b (x-a)(b-x) dx.$$

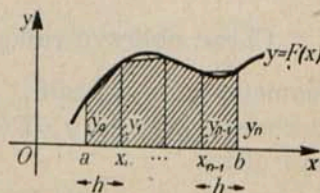
Stąd otrzymujemy

$$(48a) \quad \int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} (y_0 + y_1) - \frac{F_2}{12} (b-a)^3 \pm \frac{M_2}{12} (b-a)^3.$$

Jeżeli błąd $\frac{1}{12} M_2 (b-a)^3$ wypada zbyt duży, można przedział $[a, b]$

podzielić na części i zastosować wyżej opisane postępowanie do każdej części z osobna. Geometrycznie postępowanie takie polega na zastąpieniu łuku krzywej $y=F(x)$ w przedziale $[a, b]$ linią łamaną $y=f(x)$ (rys. 14).

Załóżmy dla prostoty, że przedział $[a, b]$ został podzielony na n równych części punktami x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$).



Rys. 14

Niech każda z tych części ma długość h . Zatem

$$(49) \quad h = (b - a) / n.$$

Niech $y_0 = F(a)$, $y_1 = F(x_1)$, $y_2 = F(x_2)$, ..., $y_{n-1} = F(x_{n-1})$, $y_n = F(b)$. Mamy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx$$

i na mocy (48)

$$(50) \quad \int_a^b F(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) - \frac{1}{12} n F_2 h^3 \pm \frac{1}{12} n M_2 h^3,$$

gdzie h jest liczbą określoną wzorem (49).

PRZYKŁAD 6. Metodą trapezów obliczyć całkę

$$I = \int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$$

z dokładnością do 0,001.

Musimy najpierw ustalić liczbę n części, na jakie należy podzielić przedział $[2, 3]$, aby można było ze wzoru (50) uzyskać przybliżenie szukanej całki I z dokładnością żadaną. W tym celu przyjmujemy, że obliczenia pomocnicze nie dadzą łącznie błędu większego niż 0,0005. W takim razie wystarczy przyjąć tak duże n , aby

$$\frac{1}{12} n M_2 h^3 < 0,0005.$$

Na mocy (49) i (50) ma być zatem

$$\frac{1}{12} \frac{M_2}{n^2} < 0,0005, \quad \text{czyli } n^2 > \frac{500}{3} M_2.$$

Ale

$$F''(x) = \left(\frac{1}{\ln x} \right)'' = \frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}$$

i

$$F'''(x) = \left(\frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^3 x} \right)' = -\frac{2}{x^3 \ln^4 x} (\ln^2 x + 3 \ln x + 3).$$

Ponieważ $F'''(x) < 0$ dla $2 \leq x \leq 3$, więc

$$0,25 < \frac{\ln 3 + 2}{3^2 \ln^3 3} \leq F''(x) \leq \frac{\ln 2 + 2}{2^2 \ln^3 2} < 2,03$$

i we wzorze (47) można przyjąć

$$F_2 = \frac{0,25 + 2,03}{2} = 1,14 \quad \text{oraz} \quad M_2 = \frac{2,03 - 0,25}{2} = 0,89.$$

Mamy zatem dobrać takie n , aby $n^2 > \frac{500}{3} \cdot 0,89$. Stąd $n^2 > 149$ i $n > 12,2$.

Przyjmujemy $n = 13$. Zatem $a = x_0 = \frac{26}{13}$, $x_1 = \frac{27}{13}$, $x_2 = \frac{28}{13}$, ..., $x_{12} = \frac{38}{13}$,

$b = x_{13} = \frac{39}{13}$ i, aby można było użyć wzoru (50), należy obliczyć wartości

y_0, y_1, \dots, y_{13} funkcji $\frac{1}{\ln x}$ w tych punktach. Wartości funkcji $\ln x$ odczytujemy w tablicach. Wygodnie jest prowadzić obliczenia według następującego schematu:

i	$13x_i$	$\ln 13x_i$	$\ln x_i = \ln 13x_i - \ln 13$	$y_i = \frac{1}{\ln x_i}$	Suma
0	26	3,258097	0,693148	1,44269	1,44269
1	27	3,295837	0,730888	1,36820	13,36795
2	28	3,332205	0,767256	1,30335	
3	29	3,367296	0,802347	1,24634	
4	30	3,401197	0,836248	1,19582	
5	31	3,433987	0,869038	1,15070	
6	32	3,465736	0,900787	1,11014	13,36795
7	33	3,496508	0,931559	1,07347	
8	34	3,526361	0,961412	1,04014	
9	35	3,555348	0,990399	1,00969	
10	36	3,583519	1,018570	0,98177	
11	37	3,610918	1,045969	0,95605	0,91024
12	38	3,637586	1,072637	0,93228	
13	39	3,663562	1,098613	0,91024	
$S = y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{12}) + y_{13} = 29,08883$					

Wartości y_0, y_1, \dots, y_{13} były liczone z dokładnością do 0,000005, więc sumę S możemy zapisać jako równą $29,08883 \pm 0,00013$.

Na mocy (49) jest $h = 1/13$. Ze wzoru (50) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_2^3 \frac{dx}{\ln x} &= \\
 &= \frac{1}{26} \cdot 29,08883 \pm \frac{1}{26} \cdot 0,00013 - \frac{1}{12} \cdot 13 \cdot 1,14 \cdot \frac{1}{13^3} \pm \frac{1}{12} \cdot 13 \cdot 0,89 \cdot \frac{1}{13^3} = \\
 &= 1,11880 \pm 0,00001 \pm 0,000005 - 0,00056 \pm 0,000005 \pm 0,00044 = \\
 &= 1,118 \pm 0,0007.
 \end{aligned}$$

§ 65. Metoda Simpsona. Dana jest funkcja $F(x)$, mająca w przedziale $[a, b]$ pochodne do czwartego rzędu włącznie. Niech dla $a \leq x \leq b$

$$M_3^- \leq F^{(3)}(x) \leq M_3^+, \quad M_4^- \leq F^{(4)}(x) \leq M_4^+,$$

gdzie $M_3^-, M_3^+, M_4^-, M_4^+$ są stałe. Stąd

$$(51) \quad |F^{(3)}(x) - F_3| \leq M_3, \quad |F^{(4)}(x) - F_4| \leq M_4,$$

$$\text{gdzie } F_i = \frac{M_i^+ + M_i^-}{2}, \quad M_i = \frac{M_i^+ - M_i^-}{2} \quad (i=3,4).$$

Zadanie polega, jak w poprzednich metodach, na obliczeniu wartości przybliżonej całki $I = \int_a^b F(x) dx$. Korzystamy, jak w metodzie trapezów, z interpretacji geometrycznej całki I . Pole obszaru zakreskowanego na rysunku 13 jest właśnie równe I , a obszar ten zastąpimy obszarem ograniczonym osią x , rzędnymi w punktach $x=a$, $x=b$ oraz parabolą $y=f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, przechodzącą przez punkty D , N i C krzywej $y=F(x)$. Pole tego obszaru

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

jest przybliżeniem pola I . Wyrazimy pole P jako funkcję rzędnych punktów D , N , C i oszacujemy błąd, z jakim liczba P przybliża liczbę I .

Punkt D ma odcięta a , punkt N odcięta $\frac{a+b}{2}$, punkt C odcięta b .

Niech $y_0 = F(a)$, $y_1 = F\left(\frac{a+b}{2}\right)$ i $y_2 = F(b)$. Zatem punkty D , N i C mają współrzędne

$$D(a, y_0), \quad N\left(\frac{a+b}{2}, y_1\right), \quad C(b, y_2).$$

Parabola $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ przechodzi przez te punkty, gdy

$$\alpha = \frac{2y_0 - 4y_1 + 2y_2}{(b-a)^2}, \quad \beta = \frac{(-3b-a)y_0 + (4b+4a)y_1 + (-b-3a)y_2}{(b-a)^2},$$

$$\gamma = \frac{(b^2+ab)y_0 - 4aby_1 + (ab+a^2)y_2}{(b-a)^2}.$$

Alte

$$P = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (ax^2 + \beta x + \gamma) dx = \frac{a}{3}(b^3 - a^3) + \frac{\beta}{2}(b^2 - a^2) + \gamma(b-a).$$

Podstawiając tu obliczone wartości α , β i γ , otrzymujemy po uporządkowaniu

$$(52) \quad P = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Oszacujemy błąd, z jakim liczba P przybliża liczbę I . W tym celu zauważmy, że parabola $y=f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ jest dla funkcji $F(x)$ wielomianem interpolacyjnym drugiego stopnia. Zatem na mocy wzoru (8) z rozdziału IV jest

$$\begin{aligned} F(x)-f(x) &= \frac{F^{(3)}(\xi)}{6} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) = \\ &= \frac{F^{(3)}(\xi) - F_3}{6} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) + \frac{F_3}{6} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b), \end{aligned}$$

gdzie $a \leq x \leq b$, ξ jest liczbą dobraną do x i leżącą w przedziale (a, b) , a F_3 jest liczbą określoną wzorem (51). Na mocy (51) otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} \left| F(x) - f(x) - \frac{F_3}{6} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) \right| &\leq \\ &\leq \frac{M_3}{6} (x-a) \left|x - \frac{a+b}{2}\right| (b-x), \end{aligned}$$

a na mocy (36) i (37)

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(x) dx - \int_a^b f(x) dx - \frac{F_3}{6} \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx \right| &\leq \\ &\leq \frac{M_3}{6} \int_a^b (x-a) \left|x - \frac{a+b}{2}\right| (b-x) dx, \end{aligned}$$

skąd po wykonaniu obliczeń, po uporządkowaniu i po podstawieniu (52) jest

$$(53) \quad \int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) \pm \frac{M_3(b-a)^4}{192}.$$

Oszacowanie błędu można jeszcze poprawić. W tym celu wprowadzamy obszar o polu S ograniczony osią x , rzędnymi w punktach $x=a$, $x=b$ oraz krzywą $y=g(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, przechodzącą przez 4 punkty krzywej $y=F(x)$, a mianowicie: (a, y_0) , $\left(\frac{a+b}{2} - z, \bar{y}_1\right)$, $\left(\frac{a+b}{2} + z, \bar{y}_1\right)$,

(b, y_2) , gdzie $y_0 = F(a)$, $\bar{y}_1 = F\left(\frac{a+b}{2} - z\right)$, $\bar{\bar{y}}_1 = F\left(\frac{a+b}{2} + z\right)$, $y_2 = F(b)$, a z jest liczbą spełniającą nierówność $0 < z < \frac{b-a}{2}$.

Krzywa $y = g(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ przechodzi przez te punkty, gdy

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4z(y_0 - y_2) - 2(b-a)(\bar{y}_1 - \bar{\bar{y}}_1)}{z(b-a)[4z^2 - (b-a)^2]}, \\
 B &= \frac{-4z(2b+a)y_0 + [2z(b-a) + 3(b^2 - a^2)]\bar{y}_1}{z(b-a)[4z^2 - (b-a)^2]} + \\
 &\quad + \frac{[2z(b-a) - 3(b^2 - a^2)]\bar{\bar{y}}_1 + 4z(b+2a)y_2}{z(b-a)[4z^2 - (b-a)^2]}, \\
 C &= \frac{[-4z^3 + z(5b^2 + 6ab + a^2)]y_0}{z(b-a)[4z^2 - (b-a)^2]} + \\
 (54) \quad &\quad + \frac{[-2z(b^2 - a^2) - (b-a)(b^2 + 4ab + a^2)]\bar{y}_1}{z(b-a)[4z^2 - (b-a)^2]} + \\
 &\quad + \frac{[-2z(b^2 - a^2) + (b-a)(b^2 + 4ab + a^2)]\bar{\bar{y}}_1}{z(b-a)[4z^2 - (b-a)^2]} + \\
 &\quad + \frac{[4z^3 - z(b^2 + 6ab + 5a^2)]y_2}{z(b-a)[4z^2 - (b-a)^2]}, \\
 D &= \frac{[4z^3b - zb(b+a)^2]y_0 + [2zab(b-a) + ab(b^2 - a^2)]\bar{y}_1}{z(b-a)[4z^2 - (b-a)^2]} + \\
 &\quad + \frac{[2zab(b-a) - ab(b^2 - a^2)]\bar{\bar{y}}_1 + [-4z^3a + za(b+a)^2]y_2}{z(b-a)[4z^2 - (b-a)^2]}.
 \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$S = \int_a^b g(x) dx = \frac{A}{4}(b^4 - a^4) + \frac{B}{3}(b^3 - a^3) + \frac{C}{2}(b^2 - a^2) + D(b-a);$$

a po podstawieniu wzorów (54) i po uporządkowaniu —

$$\begin{aligned}
 (55) \quad S &= \frac{b-a}{6[4z^2 - (b-a)^2]} \{ [12z^2 - (b-a)^2]y_0 - 2(b-a)^2(\bar{y}_1 + \bar{\bar{y}}_1) + \\
 &\quad + [12z^2 - (b-a)^2]y_2 \}.
 \end{aligned}$$

Oszacujemy błąd, z jakim liczba S przybliża liczbę I . W tym celu zauważmy, że funkcja $y=g(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ jest dla funkcji $F(x)$ wielomianem interpolacyjnym trzeciego stopnia. Zatem na mocy wzoru (8) z rozdziału IV mamy dla $a \leq x \leq b$

$$F(x) - g(x) = \frac{F^{(4)}(\xi) - F_4}{24} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} + z\right) \left(x - \frac{a+b}{2} - z\right) (x-b) + \\ + \frac{F_4}{24} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} + z\right) \left(x - \frac{a+b}{2} - z\right) (x-b),$$

gdzie ξ jest liczbą z przedziału (a, b) dobraną do x , a F_4 — liczbą określoną wzorem (51). Na mocy tegoż wzoru jest

$$\left| F(x) - g(x) - \frac{F_4}{24} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} + z\right) \left(x - \frac{a+b}{2} - z\right) (x-b) \right| \leq \\ \leq \frac{M_4}{24} \left| (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} + z\right) \left(x - \frac{a+b}{2} - z\right) (x-b) \right|,$$

a stąd na mocy (36) i (37)

$$\left| \int_a^b F(x) dx - \int_a^b g(x) dx - \right. \\ \left. - \frac{F_4}{24} \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} + z\right) \left(x - \frac{a+b}{2} - z\right) (x-b) dx \right| \leq \\ \leq \frac{M_4}{24} \left\{ \int_a^{\frac{a+b}{2}-z} (x-a) \left(\frac{a+b}{2} - z - x\right) \left(\frac{a+b}{2} + z - x\right) (b-x) dx + \right. \\ + \int_{\frac{a+b}{2}-z}^{\frac{a+b}{2}+z} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} + z\right) \left(\frac{a+b}{2} + z - x\right) (b-x) dx + \\ \left. + \int_{\frac{a+b}{2}+z}^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} + z\right) \left(x - \frac{a+b}{2} - z\right) (b-x) dx \right\}.$$

Po obliczeniu całek, po uporządkowaniu i po podstawieniu $\int_a^b g(x) dx = S$ ze wzoru (55) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (56) \quad \int_a^b F(x) dx = & \frac{b-a}{6[4z^2 - (b-a)^2]} \{ [12z^2 - (b-a)^2] y_0 - 2(b-a)^2 (\bar{y}_1 + \bar{\bar{y}}_1) + \\
 & + [12z^2 - (b-a)^2] y_2 \} - \frac{1}{2880} F_4 [(b-a)^5 - 20z^2(b-a)^3] \pm \\
 & \pm \frac{1}{2880} M_4 [(b-a)^5 - 20(b-a)^3 z^2 + 80(b-a)^2 z^3 - 64z^5].
 \end{aligned}$$

Przechodzimy teraz do granicy, gdy $z \rightarrow 0$. Krzywa $y = g(x)$ przechodzi w granicy przez 3 punkty krzywej $y = F(x)$:

$$(a, y_0), \quad \left(\frac{a+b}{2}, y_1 \right), \quad (b, y_2),$$

gdzie $y_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{y}_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{\bar{y}}_1 = F\left(\frac{a+b}{2}\right)$, i w środkowym z tych trzech punktów jest styczna do krzywej $y = F(x)$. W miejsce wzoru (56) otrzymujemy

$$(57) \quad \int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) - \frac{1}{2880} F_4 (b-a)^5 \pm \frac{1}{2880} M_4 (b-a)^5.$$

Niech $\bar{S} = \lim_{z \rightarrow 0} S$. Ze wzoru (55) mamy

$$\bar{S} = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Z porównania pola \bar{S} z polem P obliczonym ze wzoru (52) widać, że pola te są równe, choć są polami różnych obszarów. Możemy zatem uważać oszacowanie błędu, z jakim liczba \bar{S} przybliża liczbę $I = \int_a^b F(x) dx$, równocześnie za oszacowanie błędu, z jakim liczba P przybliża liczbę I . Oszacowanie błędu we wzorze (57) jest na ogół lepsze niż we wzorze (53).

Jeśli błąd obliczony ze wzoru (57) wypada za duży, możemy — podobnie jak w metodzie trapezów — podzielić przedział $[a, b]$ na części i zastosować wzór (57) do każdej części z osobna.

Załóżmy, że przedział $[a, b]$ został podzielony na n równych części punktami x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$). Niech każda z tych części ma długość h . Zatem

$$(58) \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Niech dalej $y_0 = F(a)$, $y_1 = F(x_1)$, ..., $y_{n-1} = F(x_{n-1})$, $y_n = F(b)$. Zakła-

damy, że n jest liczbą parzystą, i stosujemy wzór (57) kolejno do przedziałów $[a, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{n-2}, b]$. Mamy

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^{x_2} F(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} F(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^b F(x) dx$$

i na mocy (57)

$$(59) \quad \int_a^b F(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n] - \frac{1}{180} n F_4 h^5 \pm \frac{1}{180} n M_4 h^5,$$

gdzie h jest liczbą określoną wzorem (58).

Opisany wyżej sposób obliczania całek oznaczonych nosi nazwę *metody Simpsona*.

Szacowanie błędu ze wzoru (59) bywa nieraz bardzo żmudne ze względu na konieczność szacowania czwartej pochodnej funkcji $F(x)$ w przedziale $[a, b]$. Można niekiedy otrzymać informacje o błędzie przybliżenia obliczanego ze wzoru (59), stosując metodę podobną do użytej przy wyprowadzaniu wzorów (25) czy (33) dla pochodnych.

W tym celu rozumiemy następująco. Niech I_1 będzie przybliżeniem całki $I = \int_a^b F(x) dx$, obliczonym ze wzoru (59), tzn.

$$(60) \quad I_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

i niech

$$I - I_1 = B_1.$$

Załóżmy dalej, że we wzorze (51) jest

$$(61) \quad F^{(4)}(x) \approx \text{const} = F_4, \quad \text{skąd} \quad M_4 \approx 0.$$

Wtedy na mocy (59) możemy napisać

$$(62) \quad I \approx I_1 - \frac{1}{180} n F_4 h^5, \quad B_1 \approx -\frac{1}{180} n F_4 h^5.$$

Niech n będzie liczbą podzieloną przez 4 i niech I_2 będzie przybliżeniem całki I obliczonym ze wzoru (59) przy podziale przedziału $[a, b]$ na dwa razy mniej części, ale za to dwa razy większych. Jest więc

$$(63) \quad I_2 = \frac{2h}{3} (y_0 + 4y_2 + 2y_4 + 4y_6 + \dots + 4y_{n-2} + y_n)$$

oraz

$$I \approx I_2 - \frac{1}{180} \cdot \frac{n}{2} F_4(2h)^5,$$

czyli

$$(64) \quad I \approx I_2 - 16 \cdot \frac{1}{180} n F_4 h^5.$$

Na mocy (62) i (64) jest

$$I_1 - I_2 \approx 15 B_1,$$

skąd

$$(65) \quad B_1 \approx \frac{I_1 - I_2}{15}.$$

Dokładność oszacowania błędu B_1 ze wzoru (65) zależy od dokładności, z jaką spełniona jest równość (61). Gdy funkcja $F(x)$ jest wielomianem stopnia czwartego, wzór (65) pozwala obliczyć błąd B_1 zupełnie dokładnie.

Wzór (65) daje na ogół grube oszacowanie błędu B_1 , lecz jest bardzo prosty. W przypadku jego stosowania metoda Simpsona sprowadza się do:

1° obliczenia przybliżenia I_1 ze wzoru (60) dla liczby n podzielnej przez 4,

2° obliczenia przybliżenia I_2 ze wzoru (63); zauważyć tu należy, iż wszystkie potrzebne wartości $y_0, y_2, y_4, \dots, y_n$ zostały już obliczone dla przybliżenia I_1 ,

3° oszacowania błędu ze wzoru (65).

Porównując ze sobą wzory (50) i (59) łatwo zauważyć, że metoda Simpsona pozwala przy takim samym nakładzie pracy obliczać przybliżone wartości całek oznaczonych na ogół ze znacznie większą dokładnością niż metoda trapezów. Metoda Simpsona jest jedną z najczęściej używanych metod numerycznego całkowania.

PRZYKŁAD 7. Obliczymy metodą Simpsona z dokładnością do 0,001 całkę z przykładu 6, tzn. całkę $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$.

W tym celu musimy najpierw ustalić liczbę n części, na które podzielimy przedział $[2,3]$. Dobieramy n tak, aby na mocy (59) było

$$(66) \quad \frac{1}{180} n M_4 h^5 < 0,0005,$$

przeznaczając resztę dopuszczalnego błędu na zaokrąglenie wyników w obliczeniach pomocniczych.

Obliczamy, że

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{(4)} = \frac{2}{x^4 \ln^5 x} (3 \ln^3 x + 11 \ln^2 x + 18 \ln x + 12).$$

Ponieważ piąta pochodna

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{(5)} = \frac{-2}{x^5 \ln^6 x} (12 \ln^4 x + 50 \ln^3 x + 105 \ln^2 x + 120 \ln x + 60)$$

jest ujemna dla $2 \leq x \leq 3$, więc w tym przedziale jest

$$0,7 < \left(\frac{1}{\ln x}\right)_{x=3}^{(4)} \leq \left(\frac{1}{\ln x}\right)^{(4)} \leq \left(\frac{1}{\ln x}\right)_{x=2}^{(4)} < 24,1.$$

Na mocy wzoru (51) mamy

$$F_4 = \frac{24,1 + 0,7}{2} = 12,4 \quad \text{oraz} \quad M_4 = \frac{24,1 - 0,7}{2} = 11,7.$$

Jest dalej

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{n} = \frac{1}{n},$$

więc nierówność (66) możemy napisać w postaci

$$\frac{11,7}{180n^4} < 0,0005,$$

skąd $n > 3,3$. Przyjmujemy $n=4$.

Mamy $x_0 = 2,00$, $x_1 = 2,25$, $x_2 = 2,50$, $x_3 = 2,75$, $x_4 = 3,00$, oraz

$$y_0 = \frac{1}{\ln 2,00} = 1,44270 \pm 0,000005,$$

$$y_1 = \frac{1}{\ln 2,25} = 1,23315 \pm 0,000005,$$

$$y_2 = \frac{1}{\ln 2,50} = 1,09136 \pm 0,000005,$$

$$y_3 = \frac{1}{\ln 2,75} = 0,98853 \pm 0,000005,$$

$$y_4 = \frac{1}{\ln 3,00} = 0,91024 \pm 0,000005.$$

Ponadto $h = \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ i na mocy (59)

$$\begin{aligned} & \int_2^3 \frac{dx}{\ln x} = \\ &= \frac{1}{12} (1,44270 + 4 \cdot 1,23315 + 2 \cdot 1,09136 + 4 \cdot 0,98853 + 0,91024) + \\ &+ \frac{1}{12} (\pm 0,000005 \pm 4 \cdot 0,000005 \pm 2 \cdot 0,000005 \pm 4 \cdot 0,000005 \pm 0,000005) - \\ &- \frac{1}{180} \cdot 4 \cdot 12,4 \cdot \frac{1}{4^5} \pm \frac{1}{180} \cdot 4 \cdot 11,7 \cdot \frac{1}{4^5} = \\ &= 1,11853 \pm 0,000002 \pm 0,000005 - 0,00027 \pm 0,000001 \pm 0,00026 = \\ &= 1,1183 \pm 0,00031. \end{aligned}$$

Zobaczmy jeszcze, jak wypadłoby oszacowanie błędu ze wzoru (65). Na mocy (60) jest $I_1 = 1,11853$, a na mocy (63)

$$I_2 \approx \frac{1}{6} (1,44270 + 4 \cdot 1,09136 + 0,91024) \approx 1,11973.$$

Ze wzoru (65) otrzymujemy wtedy błąd B_1 przybliżenia I_1

$$B_1 \approx \frac{1,11853 - 1,11973}{15} = \frac{-0,0012}{15} = -0,00008.$$

§ 66. Metoda Newtona-Cotesa. Zarówno w metodzie trapezów, jak i w metodzie Simpsona całkowanie przybliżone polegało na zastąpieniu funkcji podcałkowej $F(x)$ jej wielomianem interpolacyjnym $f(x)$, który w metodzie trapezów był pierwszego, a w metodzie Simpsona — drugiego stopnia. Naturalnym uogólnieniem tamtych dwóch metod jest metoda, polegająca na zastąpieniu pod znakiem całki funkcji $F(x)$ jej wielomianem interpolacyjnym n -tego stopnia $f(x)$, który w różnych pomiędzy sobą punktach x_0, x_1, \dots, x_n przybiera wartości $y_0 = F(x_0)$, $y_1 = F(x_1)$, ..., $y_n = F(x_n)$. Wtedy przyjmuje się jak w poprzednich metodach, że

$$(67) \quad \int_a^b F(x) dx \approx \int_a^b f(x) dx.$$

Zanim przejdziemy do oszacowania błędu takiego przybliżenia, zwróćmy uwagę, że przez analogię do poprzednich metod wolno się spo-