

ROZDZIAŁ VII

METODY NUMERYCZNE I GRAFICZNE RÓŻNICZKOWANIA I CAŁKOWANIA

§ 57. Wstęp. Metody numeryczne różniczkowania i całkowania polegają zazwyczaj na aproksymacji danej funkcji $F(x)$ inną funkcją $f(x)$, na różniczkowaniu lub całkowaniu funkcji aproksymującej $f(x)$ i uzyskiwaniu w ten sposób wartości przybliżonych dla pochodnych lub całek funkcji $F(x)$. Z takim postępowaniem związana jest nierozdzielnie konieczność szacowania błędów aproksymacji. Fakt, że trudności związane z oszacowaniem błędu aproksymacji są nieraz wielokrotnie większe, niż trudności obliczenia samej wartości przybliżonej pochodnej czy całki, nie uwalnia bynajmniej od konieczności szacowania błędów.

Przy numerycznym różniczkowaniu i całkowaniu najczęściej korzystamy z aproksymacji danych funkcji wielomianami uzyskiwanymi ze wzoru Taylora albo wielomianami interpolacyjnymi.

Obliczanie przybliżonych wartości całek oznaczonych nosi nazwę *kwadratury mechanicznej*.

A. Metody numeryczne i graficzne różniczkowania

§ 58. Szacowanie błędu. Jeżeli pochodną $F'(x)$ funkcji $F(x)$ aproksymujemy funkcją $f'(x)$, będącą pochodną funkcji $f(x)$ przybliżającej funkcję $F(x)$, to można odróżnić dwa sposoby szacowania błędu takiej aproksymacji. W pierwszym z nich nie korzystamy z faktu, że funkcje $F'(x)$ i $f'(x)$ są pochodnymi. Mamy tu do czynienia po prostu z aproksymacją jednej funkcji przez drugą, a więc przypadek omówiony w rozdziale IV. Drugi sposób polega na oszacowaniu błędu aproksymacji funkcji $F'(x)$ przez funkcję $f'(x)$ na podstawie znajomości błędu, z jakim funkcja $F(x)$ jest aproksymowana przez $f(x)$. Zastanowimy się nad drugim z tych sposobów.

Jeżeli

$$(1) \quad |F(x) - f(x)| < B \quad (a \leq x \leq b),$$

gdzie B jest pewną stałą, to z tej nierówności nie można uzyskać żadnego oszacowania typu

$$|F'(x) - f'(x)| < C \quad (a \leq x \leq b),$$

gdzie C jest stałą, ponieważ z nierówności (1) wynika jedynie fakt, że krzywa $y = F(x)$ przebiega w pasie między krzywymi $y = f(x) - B$ i $y = f(x) + B$, natomiast współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej $F(x)$, a więc pochodna $F'(x)$, może się dowolnie różnić od współczynnika kierunkowego stycznej do krzywej $f(x)$, a więc od pochodnej $f'(x)$, choćby liczba B była bardzo mała.

Analogicznie, ze znajomości oszacowania

$$\int_a^b [F(x) - f(x)]^2 dx < B,$$

gdzie B jest stałą, nie można podać oszacowania dla

$$\int_a^b [F'(x) - f'(x)]^2 dx.$$

Jeżeli jednak dla przybliżenia $f(x)$ funkcji $F(x)$ mamy oszacowanie typu

$$(2) \quad |F(x) - f(x)| \leq |\varphi(x)| \quad (a \leq x \leq b),$$

gdzie funkcja $\varphi(x)$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b) i taka, że

$$\varphi(x_0) = 0 \quad (a < x_0 < b),$$

to z tego oszacowania wynika, iż

$$(3) \quad |F'(x_0) - f'(x_0)| \leq |\varphi'(x_0)|.$$

Istotnie, niech h będzie taką liczbą, aby $a < x_0 + h < b$. Wtedy z nierówności

$$|F(x_0 + h) - f(x_0 + h)| \leq |\varphi(x_0 + h)|$$

i z równości

$$F(x_0) - f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$$

wynika nierówność

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - f(x_0 + h) + f(x_0)| \leq |\varphi(x_0 + h)| = |\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)|,$$

a stąd — nierówność

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \leq \left| \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} \right|.$$

Przechodząc po obu stronach nierówności do granicy przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy nierówność (3).

Nierówność (3) pozwala oszacować błąd przybliżenia funkcji $F'(x)$ przez $f'(x)$ tylko w pewnych ustalonych punktach, w których funkcja $\varphi(x)$ staje się równa zero.

Można jednak nieraz oszacować błąd przybliżenia pochodnej $F^{(k)}(x)$ dowolnego rzędu k przez pochodną $f^{(k)}(x)$ w dowolnym punkcie określonego przedziału, gdy mamy pewne informacje dodatkowe o pochodnych funkcji $F(x)$, np. gdy wiemy, że w rozpatrywanym przedziale jakaś inna pochodna funkcji $F(x)$, np. $F^{(n)}(x)$ ($n > k$), jest ograniczona i znamy kres górny jej modułu. Metody szacowania w takich przypadkach poznamy w następnych paragrafach.

§ 59. Metoda szeregów potęgowych. Chcemy obliczyć pochodną $F^{(k)}(x)$ funkcji $F(x)$ będącej w przedziale $|x - x_0| < r$ sumą szeregu potęgowego

$$(4) \quad F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

gdzie

$$(4a) \quad a_i = \frac{F^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (F^{(0)}(x_0) = F(x_0), \quad 0! = 1).$$

Niech $s_n(x)$ oznacza n -tą sumę częściową szeregu (4), tzn.

$$(5) \quad s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

i niech $n \geq k$.

Jak wiadomo¹⁾ szereg pochodny

$$(6) \quad k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1}(x - x_0) + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2}(x - x_0)^2 + \dots$$

jest zbieżny w przedziale $|x - x_0| < r$. Jego suma jest równa $F^{(k)}(x)$. Pochodną $F^{(k)}(x)$ będziemy aproksymować k -tą pochodną funkcji $s_n(x)$ danej wzorem (5), tzn. funkcją

$$(7) \quad s_n^{(k)}(x) = k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1}(x - x_0) + \dots + \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x - x_0)^{n-k}.$$

Na mocy wzoru Taylora jest

$$F^{(k)}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_{n-k}(x - x_0)^{n-k} + \frac{[F^{(k)}(x)]_{x=x_0}^{(n-k+1)}}{(n-k+1)!} (x - x_0)^{n-k+1},$$

gdzie

$$b_i = \frac{[F^{(k)}(x)]_{x=x_0}^{(i)}}{i!} = \frac{F^{(k+i)}(x_0)}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots, n-k,$$

a ξ jest liczbą dobraną do x i zawartą między x i x_0 .

¹⁾ Patrz np. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1954, str. 189.

Na mocy (4a) i (7) jest zatem

$$(8) \quad F^{(k)}(x) = s_n^{(k)}(x) + \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n-k+1)!} (x-x_0)^{n-k+1}.$$

Jeżeli wiadomo, że dla ξ zawartych między x i x_0 jest

$$M_{n+1}^- \leq F^{(n+1)}(\xi) \leq M_{n+1}^+,$$

gdzie M_{n+1}^- i M_{n+1}^+ są stałe, i jeżeli

$$F_{n+1} = \frac{M_{n+1}^+ + M_{n+1}^-}{2}, \quad M_{n+1} = \frac{M_{n+1}^+ - M_{n+1}^-}{2},$$

to na mocy (8)

$$(8a) \quad F^{(k)}(x) = s_n^{(k)}(x) + \frac{F_{n+1}}{(n-k+1)!} (x-x_0)^{n-k+1} \pm \frac{M_{n+1}}{(n-k+1)!} |x-x_0|^{n-k+1}.$$

Jeżeli szereg (6) jest przemieniczny¹⁾, jego resztę można szacować pierwszym opuszczonym wyrazem i zamiast (8a) można korzystać ze wzoru

$$(8b) \quad F^{(k)}(x) = s_n^{(k)}(x) \pm \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!} a_{n+1} |x-x_0|^{n-k+1},$$

czyli na mocy (4a)

$$F^{(k)}(x) = s_n^{(k)}(x) \pm \frac{|F^{(n+1)}(x_0)|}{(n-k+1)!} |x-x_0|^{n-k+1}.$$

PRZYKŁAD 1. Obliczyć z dokładnością do 0,0001 pochodną funkcji

$$(9) \quad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

dla $x=2$ (szereg (9) jest zbieżny dla wszystkich x).

Szereg pochodny

$$J'_0(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} - \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots$$

jest także zbieżny dla wszystkich x , zatem

$$J'_0(2) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{144} - \frac{1}{2880} + \frac{1}{86400} - \dots$$

¹⁾ Szeregiem przemienicznym nazywamy szereg

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

gdzie

$$a_i > a_{i+1} > 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{ i } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ponieważ szereg ten jest przemienny, jego resztę szacuje się pierwszym opuszczonym wyrazem. Zatem

$$J'_0(2) \approx -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{144} - \frac{1}{2880} = -\frac{1661}{2880}$$

z błędem mniejszym niż $\frac{1}{86400}$, a zatem mniejszym niż 0,000012. Stąd

$$J'_0(2) = -0,5767 \pm 0,00005.$$

Doszedł tu błąd spowodowany zastąpieniem ułamka zwykłego przybliżeniem dziesiętnym.

§ 60. Metoda interpolacyjna. Dana jest funkcja $y = F(x)$, która w punktach x_0, x_1, \dots, x_n ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) przybiera wartości y_0, y_1, \dots, y_n . Funkcję $F(x)$ aproksymujemy wielomianem interpolacyjnym $f(x)$ stopnia n i takim, że $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, ..., $f(x_n) = y_n$. Wielomian taki — jak wiemy z twierdzenia 1 z rozdziału III — zawsze istnieje i to tylko jeden.

Zakładamy, że funkcja $F(x)$ ma w przedziale $[a, b]$, gdzie $a < x_0$ i $b > x_n$, pochodne do rzędu $n+1$ włącznie i że w tym przedziale jest

$$(10) \quad M_{n+1}^- \leq F^{(n+1)}(x) \leq M_{n+1}^+,$$

gdzie M_{n+1}^-, M_{n+1}^+ są stałe. Niech

$$(10a) \quad F_{n+1} = \frac{M_{n+1}^+ + M_{n+1}^-}{2} \quad \text{i} \quad M_{n+1} = \frac{M_{n+1}^+ - M_{n+1}^-}{2}.$$

Pochodną $F^{(k)}(x)$ ($k \leq n$) funkcji $F(x)$ będziemy aproksymować przez pochodną $f^{(k)}(x)$ wielomianu interpolacyjnego $f(x)$. Zajmiemy się sprawą oszacowania błędu takiego przybliżenia. W tym celu wprowadzimy funkcję pomocniczą

$$(11) \quad \varphi(x) = F(x) - f(x) - K(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

gdzie K jest stałą.

Funkcja $\varphi(x)$ ma co najmniej $n+1$ różnych pierwiastków x_0, x_1, \dots, x_n . Na mocy twierdzenia Rolle'a jej pochodna ma w przedziale (x_0, x_n) co najmniej n różnych pierwiastków, które ponadto są różne od x_0, x_1, \dots, x_n . Na mocy tegoż twierdzenia Rolle'a pochodna $\varphi''(x)$ — jako pochodna pochodnej $\varphi'(x)$ — ma co najmniej $n-1$ różnych pierwiastków w przedziale (x_0, x_n) . Stosując k -krotnie twierdzenie Rolle'a dochodzimy do wniosku, że pochodna

$$\varphi^{(k)}(x) = F^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) - K \frac{d^k}{dx^k} [(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)]$$

ma w przedziale (x_0, x_n) co najmniej $n-k+1$ różnych pierwiastków, a w przypadku, gdy $k=1$, co najmniej $n-k+1=n$ pierwiastków różnych od liczb x_0, x_1, \dots, x_n . Niech \bar{x} będzie dowolną liczbą nie większą od x_0 albo nie mniejszą od x_n , a w przypadku $k=1$ może być również $\bar{x}=x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Niech

$$K = \frac{F^{(k)}(\bar{x}) - f^{(k)}(\bar{x})}{\left(\frac{d^k}{dx^k} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] \right)_{x=\bar{x}}}.$$

Liczba K zawsze istnieje, ponieważ wielomian

$$\frac{d^k}{dx^k} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)]$$

ma wszystkie pierwiastki w przedziale (x_0, x_n) , a w przypadku $k=1$ pierwiastki te są różne od liczb x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Przy tak dobranej stałej K jest $\varphi^{(k)}(\bar{x})=0$. Zatem funkcja $\varphi^{(k)}(x)$ ma co najmniej $n-k+2$ różnych pierwiastków, gdyż — jak poprzednio wykazaliśmy — ma ona $n-k+1$ różnych pierwiastków w przedziale (x_0, x_n) , które ponadto w przypadku $k=1$ są różne od liczb x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , i pierwiastek \bar{x} , który nie leży w tym przedziale, albo w przypadku $k=1$ może się równać jednej z liczb x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Stosujemy $n-k+1$ razy twierdzenie Rolle'a i dochodzimy do wniosku, że funkcja

$$\varphi^{(n+1)}(x) = F^{(n+1)}(x) - K(n+1)!$$

ma co najmniej jeden pierwiastek ϑ leżący między najmniejszą a największą spośród liczb x_0, x_n, \bar{x} . Zatem

$$\varphi^{(n+1)}(\vartheta) = F^{(n+1)}(\vartheta) - K(n+1)! = 0,$$

skąd

$$K = \frac{F^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}$$

i

$$\varphi^{(k)}(x) = F^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) - \frac{F^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)].$$

Ponieważ $\varphi^{(k)}(\bar{x})=0$, więc

$$(12) \quad F^{(k)}(\bar{x}) - f^{(k)}(\bar{x}) = \frac{F^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!} \left(\frac{d^k}{dx^k} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] \right)_{x=\bar{x}}.$$

Ponieważ \bar{x} było dowolną liczbą, spełniającą jedynie warunek

$$\bar{x} \leq x_0 \quad \text{albo} \quad \bar{x} \geq x_n,$$

a w przypadku $k=1$ mogło być ponadto $\bar{x}=x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, więc można

napisać ogólnie, że dla $a \leq x \leq x_0$, $x_n \leq x \leq b$, a w przypadku $k=1$, czyli pochodnych pierwszego rzędu, również dla $x=x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, jest na mocy (10) i (12)

$$(13) \quad F^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) + \frac{F_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] \pm \\ \pm \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \frac{d^k}{dx^k} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] \right|.$$

Dla $x_0 < x < x_n$ wzór (13) nie jest na ogół prawdziwy. Gdy $k=1$, można również na innej drodze wykazać, że wzór (13) jest prawdziwy dla $x=x_0, x_1, \dots, x_n$. Mianowicie na mocy wzoru (8) z rozdziału IV

$$\left| F(x) - f(x) - \frac{F_{n+1}}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right| \leq \\ \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

na mocy (3) dla $x=x_0, x_1, \dots, x_n$ jest

$$\left| F'(x) - f'(x) - \frac{F_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{d}{dx} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] \right| \leq \\ \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \frac{d}{dx} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] \right|.$$

Ale dla $x=x_i$ ($i=0, 1, \dots, n$) jest

$$\frac{d}{dx} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] = \\ = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n).$$

Zatem

(13a)

$$\left| F'(x_i) - f'(x_i) - \frac{F_{n+1}}{(n+1)!} (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n) \right| \leq \\ \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)|,$$

skąd wzór (13) dla $k=1$. Dla $x \neq x_0, x_1, \dots, x_n$ nierówność (13a) nie jest na ogół spełniona.

Obliczenie k -tej pochodnej funkcji $F(x)$ metodą interpolacyjną sprowadza się zatem do:

1° znalezienia wielomianu interpolacyjnego $f(x)$, który w punktach x_0, x_1, \dots, x_n ma te same wartości, co dana funkcja $F(x)$,

2° obliczenia $F^{(k)}(x)$ ze wzoru (13).

PRZYKŁAD 2. O funkcji $y=F(x)$ wiadomo, że

1° w punktach $x=-2, 1, 2, 4$ przybiera wartości $y=4, 2, -1, 10$,

2° ma pochodne do czwartego rzędu włącznie,

3° $|F^{(4)}(x)| < 0,1$ w przedziale $-5 \leq x \leq 5$.

Należy obliczyć pochodną $y'=F'(x)$ w punktach $-2, 1, 2, 4$.

W przykładzie 2 z rozdziału III obliczono wielomian $f(x)$ możliwie niskiego stopnia, który w punktach $x=-2, 1, 2, 4$ przybiera wartości $4, 2, -1, 10$. Otrzymano

$$f(x) = \frac{41}{72}x^3 - \frac{83}{72}x^2 - \frac{127}{36}x + \frac{55}{9}.$$

Stąd

$$f'(x) = \frac{41}{24}x^2 - \frac{83}{36}x - \frac{127}{36},$$

$$F'(-2) \approx f'(-2) = \frac{95}{12}, \quad F'(1) \approx f'(1) = -\frac{33}{8},$$

$$F'(2) \approx f'(2) = -\frac{47}{36}, \quad F'(4) \approx f'(4) = \frac{175}{12}.$$

Oszacujemy błędy uzyskanych przybliżeń ze wzoru (13a):

$$|F'(-2) - f'(-2)| \leq \left| \frac{0,1}{24}(-2-1)(-2-2)(-2-4) \right| = 0,3,$$

$$|F'(1) - f'(1)| \leq \left| \frac{0,1}{24}(1+2)(1-2)(1-4) \right| = 0,0375,$$

$$|F'(2) - f'(2)| \leq \left| \frac{0,1}{24}(2+2)(2-1)(2-4) \right| < 0,0334,$$

$$|F'(4) - f'(4)| \leq \left| \frac{0,1}{24}(4+2)(4-1)(4-2) \right| = 0,15.$$

Możemy zatem napisać rozwiązanie zadania następująco:

$$F'(-2) = \frac{95}{12} \pm 0,3, \quad F'(1) = -\frac{33}{8} \pm 0,0375,$$

$$F'(2) = -\frac{47}{36} \pm 0,0334, \quad F'(4) = \frac{175}{12} \pm 0,15.$$

Metoda interpolacyjna numerycznego różniczkowania bardzo się upraszcza, gdy punkty x_0, x_1, \dots, x_n następują po sobie w równych odstępach, tzn. gdy

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

gdzie h jest pewną stałą dodatnią. Wprowadzając nową zmienną

$$\xi = (x - x_0)/h$$

i pisząc

$$\xi_i = (x_i - x_0)/h, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

otrzymujemy wtedy

$$\xi_i = i.$$

Wielomian interpolacyjny $\bar{y} = f(x)$ można teraz na mocy wzoru (23) z rozdziału III napisać w postaci

$$\bar{y} = y_0 + \Delta y_0 \xi + \Delta^2 y_0 \binom{\xi}{2} + \Delta^3 y_0 \binom{\xi}{3} + \dots + \Delta^n y_0 \binom{\xi}{n},$$

skąd

$$\frac{d^k \bar{y}}{d\xi^k} = \Delta^k y_0 + \Delta^{k+1} y_0 \frac{d^k}{d\xi^k} \binom{\xi}{k+1} + \Delta^{k+2} y_0 \frac{d^k}{d\xi^k} \binom{\xi}{k+2} + \dots + \Delta^n y_0 \frac{d^k}{d\xi^k} \binom{\xi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Ale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{d\xi}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\xi^2}$$

i ogólnie

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{d^k y}{d\xi^k},$$

więc

$$(14) \quad \bar{y}^{(k)} = \frac{d^k \bar{y}}{dx^k} = \frac{1}{h^k} \left[\Delta^k y_0 + \Delta^{k+1} y_0 \frac{d^k}{d\xi^k} \binom{\xi}{k+1} + \Delta^{k+2} y_0 \frac{d^k}{d\xi^k} \binom{\xi}{k+2} + \dots + \Delta^n y_0 \frac{d^k}{d\xi^k} \binom{\xi}{n} \right].$$

Mamy dalej

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} [(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)] &= \frac{1}{h^k} \cdot \frac{d^k}{d\xi^k} [\xi h (\xi - 1) h \dots (\xi - n) h] = \\ &= h^{n-k+1} \frac{d^k}{d\xi^k} [\xi (\xi - 1) \dots (\xi - n)] \end{aligned}$$

i wzór (13) może być napisany w postaci

$$(14a) \quad y^{(k)} = \bar{y}^{(k)} + \frac{F_{n+1} h^{n-k+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{d^k}{d\xi^k} [\xi(\xi-1)\dots(\xi-n)] \pm \\ \pm \frac{M_{n+1} h^{n-k+1}}{(n+1)!} \left| \frac{d^k}{d\xi^k} [\xi(\xi-1)\dots(\xi-n)] \right|.$$

Wzór (14) jest dlatego wygodny, że jeżeli wypiszemy go dla $n=m$, mamy go tym samym dla $n=k, k+1, \dots, m-1$, wystarczy bowiem uwzględnić tylko odpowiednią liczbę pierwszych wyrazów.

Zajmiemy się najpierw przypadkiem, gdy $k=1$, tzn. przypadkiem obliczania pochodnych pierwszego rzędu.

Dla $n=8$ oraz $i=0, 1, 2, \dots, 8$ otrzymujemy ze wzoru (14), pisząc $\bar{y}'_i = f'(x_i)$

$$\begin{aligned} \bar{y}'_0 &= \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \Delta^5 y_0 - \frac{1}{6} \Delta^6 y_0 + \frac{1}{7} \Delta^7 y_0 - \frac{1}{8} \Delta^8 y_0 \right], \\ \bar{y}'_1 &= \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 - \frac{1}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{1}{12} \Delta^4 y_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{20} \Delta^5 y_0 + \frac{1}{30} \Delta^6 y_0 - \frac{1}{42} \Delta^7 y_0 + \frac{1}{56} \Delta^8 y_0 \right], \\ (15) \quad \bar{y}'_2 &= \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{3}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{12} \Delta^4 y_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{30} \Delta^5 y_0 - \frac{1}{60} \Delta^6 y_0 + \frac{1}{105} \Delta^7 y_0 - \frac{1}{168} \Delta^8 y_0 \right], \\ \bar{y}'_3 &= \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{5}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{11}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{20} \Delta^5 y_0 + \frac{1}{60} \Delta^6 y_0 - \frac{1}{140} \Delta^7 y_0 + \frac{1}{280} \Delta^8 y_0 \right], \\ \bar{y}'_4 &= \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{7}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{13}{3} \Delta^3 y_0 + \frac{25}{12} \Delta^4 y_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \Delta^5 y_0 - \frac{1}{30} \Delta^6 y_0 + \frac{1}{105} \Delta^7 y_0 - \frac{1}{280} \Delta^8 y_0 \right], \end{aligned}$$

$$\bar{y}'_5 = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{9}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{47}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{77}{12} \Delta^4 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{137}{60} \Delta^5 y_0 + \frac{1}{6} \Delta^6 y_0 - \frac{1}{42} \Delta^7 y_0 + \frac{1}{168} \Delta^8 y_0 \right],$$

$$(15 \text{ c.d.}) \quad \bar{y}'_6 = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{11}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{37}{3} \Delta^3 y_0 + \frac{171}{12} \Delta^4 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{87}{10} \Delta^5 y_0 + \frac{49}{20} \Delta^6 y_0 + \frac{1}{7} \Delta^7 y_0 - \frac{1}{56} \Delta^8 y_0 \right],$$

$$\bar{y}'_7 = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{13}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{107}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{319}{12} \Delta^4 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{459}{20} \Delta^5 y_0 + \frac{223}{20} \Delta^6 y_0 + \frac{363}{140} \Delta^7 y_0 + \frac{1}{8} \Delta^8 y_0 \right],$$

$$\bar{y}'_8 = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{15}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{73}{3} \Delta^3 y_0 + \frac{533}{12} \Delta^4 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{743}{15} \Delta^5 y_0 + \frac{341}{10} \Delta^6 y_0 + \frac{481}{35} \Delta^7 y_0 + \frac{761}{280} \Delta^8 y_0 \right].$$

Współczynniki takich wzorów najwygodniej obliczać rekurencyjnie. Niech mianowicie a_{im} oznacza współczynnik we wzorze na \bar{y}'_i stojący przy $\Delta^m y_0$ ($i=0,1,2,\dots,n$; $m=1,2,\dots,n$). Łatwo jest sprawdzić, że wówczas

$$(16) \quad a_{0m} = \frac{(-1)^{m-1}}{m}, \quad a_{i1} = 1, \quad a_{im} = a_{i-1,m-1} + a_{i-1,m}.$$

Istotnie,

$$\frac{d}{d\xi} \binom{\xi}{m} = \frac{d}{d\xi} \frac{\xi(\xi-1)\dots(\xi-m+1)}{m!} = \\ = \frac{1}{m!} [(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-m+1) + \\ + \xi(\xi-2)\dots(\xi-m+1) + \dots + \xi(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-m+2)],$$

skąd

$$a_{0m} = \left[\frac{d}{d\xi} \binom{\xi}{m} \right]_{\xi=0} = \frac{1}{m!} (-1)(-2)\dots(-m+1) = \frac{(-1)^{m-1}}{m}.$$

Mamy dalej $\binom{\xi}{1} = \xi$, skąd $\alpha_{i1} = \left[\frac{d}{d\xi} \binom{\xi}{1} \right]_{\xi=i} = 1$. Z drugiej strony na mocy wzoru (6) z rozdziału II

$$\binom{\xi}{m} = \binom{\xi-1}{m-1} + \binom{\xi-1}{m},$$

skąd

$$\begin{aligned} \alpha_{im} &= \left[\frac{d}{d\xi} \binom{\xi}{m} \right]_{\xi=i} = \left[\frac{d}{d\xi} \binom{\xi-1}{m-1} \right]_{\xi=i} + \left[\frac{d}{d\xi} \binom{\xi-1}{m} \right]_{\xi=i} = \\ &= \left[\frac{d}{d\xi} \binom{\xi}{m-1} \right]_{\xi=i-1} + \left[\frac{d}{d\xi} \binom{\xi}{m} \right]_{\xi=i-1} = \alpha_{i-1, m-1} + \alpha_{i-1, m}, \quad \text{c. b. d. d.} \end{aligned}$$

Niech teraz $F(x)$ będzie — jak poprzednio — funkcją aproksymowaną wielomianem $f(x)$ i niech

$$F'(x_i) = y'_i \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Na mocy (14a) mamy

$$\begin{aligned} y'_i &= \bar{y}'_i + \frac{F_{n+1} h^n}{(n+1)!} i(i-1) \dots 1(-1)(-2) \dots (i-n) \pm \\ &\quad \pm \frac{M_{n+1} h^n}{(n+1)!} |i(i-1) \dots 1(-1)(-2) \dots (i-n)|, \end{aligned}$$

czyli

$$y'_i = \bar{y}'_i + (-1)^{n-i} \frac{F_{n+1} h^n}{(n+1) \binom{n}{i}} \pm \frac{M_{n+1} h^n}{(n+1) \binom{n}{i}}.$$

Możemy zatem w przypadku $k=1$ zastąpić wzór (14) wzorem

$$\begin{aligned} (17) \quad y'_i &= \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \left(\frac{d}{d\xi} \binom{\xi}{2} \right)_{\xi=i} + \dots + \Delta^n y_0 \left(\frac{d}{d\xi} \binom{\xi}{n} \right)_{\xi=i} \right] + \\ &\quad + (-1)^{n-i} \frac{F_{n+1} h^n}{(n+1) \binom{n}{i}} \pm \frac{M_{n+1} h^n}{(n+1) \binom{n}{i}}, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} (18) \quad y'_i &= \frac{1}{h} [\Delta y_0 + \alpha_{i2} \Delta^2 y_0 + \alpha_{i3} \Delta^3 y_0 + \dots + \alpha_{in} \Delta^n y_0] + \\ &\quad + (-1)^{n-i} \frac{F_{n+1} h^n}{(n+1) \binom{n}{i}} \pm \frac{M_{n+1} h^n}{(n+1) \binom{n}{i}}, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki $\alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \dots, \alpha_{in}$ obliczamy albo ze wzoru

$$\alpha_{im} = \left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi}{m} \right) \right]_{\xi=i},$$

albo rekurencyjnie ze wzorów (16), albo w przypadku $n \leq 8$ odczytujemy ze wzorów (15).

Niech będzie np. $n=4$. Na mocy (18), gdzie współczynniki odczytujemy z tabeli (15), mamy

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{12h} (12\Delta y_0 - 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta^3 y_0 - 3\Delta^4 y_0) + \frac{1}{5} F_5 h^4 \pm \frac{1}{5} M_5 h^4, \\ y'_1 &= \frac{1}{12h} (12\Delta y_0 + 6\Delta^2 y_0 - 2\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0) - \frac{1}{20} F_5 h^4 \pm \frac{1}{20} M_5 h^4, \\ (19) \quad y'_2 &= \frac{1}{12h} (12\Delta y_0 + 18\Delta^2 y_0 + 4\Delta^3 y_0 - \Delta^4 y_0) + \frac{1}{30} F_5 h^4 \pm \frac{1}{30} M_5 h^4, \\ y'_3 &= \frac{1}{12h} (12\Delta y_0 + 30\Delta^2 y_0 + 22\Delta^3 y_0 + 3\Delta^4 y_0) - \frac{1}{20} F_5 h^4 \pm \frac{1}{20} M_5 h^4, \\ y'_4 &= \frac{1}{12h} (12\Delta y_0 + 42\Delta^2 y_0 + 52\Delta^3 y_0 + 25\Delta^4 y_0) + \frac{1}{5} F_5 h^4 \pm \frac{1}{5} M_5 h^4. \end{aligned}$$

Wzory (18) można przekształcić wprowadzając w miejsce różnic różnice wsteczne lub centralne za pośrednictwem wzorów (28) albo (37) z rozdziału II.

Najczęściej stosowane są jednak wzory, w których zamiast różnic występują wartości y_0, y_1, \dots, y_n funkcji $F(x)$ w punktach x_0, x_1, \dots, x_n . Wzory te uzyskujemy podstawiając do (18) na mocy wzoru (4) z rozdziału II

$$\Delta^m y_0 = \binom{m}{0} y_m - \binom{m}{1} y_{m-1} + \binom{m}{2} y_{m-2} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m} y_0.$$

Np. w przypadku $n=4$ podstawiamy do wzorów (19) wzory

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0, \\ \Delta^2 y_0 &= y_2 - 2y_1 + y_0, \\ \Delta^3 y_0 &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0, \\ \Delta^4 y_0 &= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 \end{aligned}$$

i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 y'_0 &= \frac{1}{12h}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{1}{5}F_5h^4 \pm \frac{1}{5}M_5h^4, \\
 y'_1 &= \frac{1}{12h}(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{1}{20}F_5h^4 \pm \frac{1}{20}M_5h^4, \\
 (20) \quad y'_2 &= \frac{1}{12h}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{1}{30}F_5h^4 \pm \frac{1}{30}M_5h^4, \\
 y'_3 &= \frac{1}{12h}(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) - \frac{1}{20}F_5h^4 \pm \frac{1}{20}M_5h^4, \\
 y'_4 &= \frac{1}{12h}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{1}{5}F_5h^4 \pm \frac{1}{5}M_5h^4.
 \end{aligned}$$

W tablicy VII na końcu książki podane są zarówno wzory (20), jak i analogiczne dla $n=1, 2, 3, 5$ i 6 . Ogólnie mamy

$$(21) \quad y'_i = \frac{1}{h}[A_{i0}y_0 + A_{i1}y_1 + \dots + A_{in}y_n] + \frac{(-1)^{n-i}F_{n+1}h^n}{(n+1)\binom{n}{i}} \pm \frac{M_{n+1}h^n}{(n+1)\binom{n}{i}},$$

gdzie

$$A_{ij} = \sum_{m=j}^n (-1)^{m-j} a_{im} \binom{m}{j} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

oraz

$$A_{i0} = \sum_{m=1}^n (-1)^m a_{im}.$$

PRZYKŁAD 3. Obliczyć wartości pochodnej $y' = F'(x)$ funkcji $F(x)$ w punktach $0,5$, $0,7$, $0,9$, jeżeli wiadomo, że funkcja $F(x)$ ma w tych punktach wartości $1,3$, $1,7$, $1,2$ oraz że dla $0,5 \leq x \leq 0,9$ zachodzi nierówność $2,6 < F'''(x) < 4,2$.

Mamy zatem $y_0=1,3$, $y_1=1,7$ i $y_2=1,2$, a w tablicy VII odnajdujemy wzory

$$\begin{aligned}
 y'_0 &= \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{1}{3}F_3h^2 \pm \frac{1}{3}M_3h^2, \\
 y'_1 &= \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2) - \frac{1}{6}F_3h^2 \pm \frac{1}{6}M_3h^2, \\
 y'_2 &= \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{1}{3}F_3h^2 \pm \frac{1}{3}M_3h^2.
 \end{aligned}$$

W danym przypadku jest $h=0,2$ i można przyjąć

$$M_3^- = 2,6, \quad M_3^+ = 4,2,$$

skąd

$$F_3 = \frac{4,2+2,6}{2} = 3,4, \quad M_3 = \frac{4,2-2,6}{2} = 0,8.$$

Zatem

$$y'_0 = \frac{1}{0,4} (-3,9 + 6,8 - 1,2) + \frac{1}{3} \cdot 3,4 \cdot 0,04 \pm \frac{1}{3} 0,8 \cdot 0,04 = 4,295 \pm 0,011,$$

$$y'_1 = \frac{1}{0,4} (-1,3 + 1,2) - \frac{1}{6} \cdot 3,4 \cdot 0,04 \pm \frac{1}{6} \cdot 0,8 \cdot 0,04 = -0,273 \pm 0,006,$$

$$y'_2 = \frac{1}{0,4} (1,3 - 6,8 + 3,6) + \frac{1}{3} \cdot 3,4 \cdot 0,04 \pm \frac{1}{3} 0,8 \cdot 0,04 = -4,705 \pm 0,011.$$

Oszacowanie błędów we wzorach (18) czy (21) bywa niekiedy trudne, gdyż musimy znać liczby M_{n+1}^- i M_{n+1}^+ ograniczające pochodną $F^{(n+1)}(x)$ danej funkcji $F(x)$, a obliczenie tych liczb może nastęrczać dużo trudności. Można niekiedy ograniczyć się do niedokładnych informacji o błędach, które to informacje można uzyskać drogą następującego rozumowania.

Niech funkcja $F(x)$ będzie dana w przedziale $[a, b]$, gdzie $a < x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < b$, oraz $x_i = x_0 + ih$ ($i=0, 1, \dots, 2n$). Niech $\bar{x} = x_{2j}$ ($j=0, 1, \dots; j \leq n/2$). Niech $f(x)$ będzie wielomianem co najwyżej stopnia n , który w punktach $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ przybiera te same wartości co funkcja $F(x)$. Na mocy (12) jest

$$(22) \quad F'(\bar{x}) - f'(\bar{x}) = \frac{F^{(n+1)}(\vartheta) (-h)^n}{(n+1) \binom{n}{2j}} = B_j,$$

gdzie ϑ jest liczbą dobraną do \bar{x} i zawartą w przedziale (x_0, x_{2n}) . Niech $g(x)$ będzie wielomianem stopnia co najwyżej n , który w punktach $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}$ przybiera te same wartości co funkcja $F(x)$. Na mocy (12) jest

$$(23) \quad F'(\bar{x}) - g'(\bar{x}) = (-1)^{n-j} \frac{F^{(n+1)}(\zeta) (2h)^n}{(n+1) \binom{n}{j}} = B_j^*,$$

gdzie ζ jest liczbą dobraną do \bar{x} i zawartą w przedziale (x_0, x_{2n}) . Odejmujemy stronami równość (22) od (23) i dostajemy

$$f'(\bar{x}) - g'(\bar{x}) = B_j^* - B_j = B_j \left(\frac{B_j^*}{B_j} - 1 \right),$$

czyli

$$f'(\bar{x}) - g'(\bar{x}) = B_j \left(\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{F^{(n+1)}(\theta)} (-1)^j 2^n \frac{\binom{n}{2j}}{\binom{n}{j}} - 1 \right).$$

Jeżeli zatem można przyjąć, że

$$(24) \quad F^{(n+1)}(x) \approx \text{const} \quad \text{dla} \quad x_0 \leq x \leq x_{2n},$$

to

$$(25) \quad B_j \approx \frac{f'(\bar{x}) - g'(\bar{x})}{(-1)^j 2^n \frac{\binom{n}{2j}}{\binom{n}{j}} - 1} = \frac{\binom{n}{j}}{(-1)^j 2^n \frac{\binom{n}{2j}}{\binom{n}{j}} - \binom{n}{j}} [f'(\bar{x}) - g'(\bar{x})].$$

Metoda szacowania błędu ze wzoru (25) polega zatem na:

1° obliczeniu wartości pochodnej $f'(x)$ wielomianu interpolacyjnego, skonstruowanego na punktach $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$,

2° obliczeniu wartości pochodnej $g'(x)$ wielomianu interpolacyjnego, skonstruowanego na punktach $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}$,

3° oszacowaniu błędu przybliżenia danego przez wartość pochodnej pierwszego z tych wielomianów ze wzoru (25).

Oszacowanie (25) jest zupełnie dokładne dla funkcji $F(x)$ będących wielomianami $n+1$ stopnia, gdyż wtedy $F^{(n+1)}(x) = \text{const}$. Można zatem z grubsza powiedzieć, że dla dowolnej funkcji $F(x)$ oszacowanie (25) daje zmianę błędu przybliżenia $F'(\bar{x})$ przez pochodną $f'(\bar{x})$ wielomianu $f(x)$ aproksymującego funkcję $F(x)$, gdy stopień tego wielomianu powiększymy o jedność.

Oszacowanie (25) jest na ogół niedokładne, ale odznacza się wielką prostotą i dlatego często bywa stosowane w praktyce. Wymaga jednak zawsze przyjęcia założenia (24).

Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem wzorów na pochodne wyższych rzędów. Ograniczymy się do przypadku obliczenia pochodnej $F^{(k)}(x)$ dowolnego rzędu k w jednym tylko punkcie $x = x_0$, tzn. obliczenia wartości $y_0^{(k)} = F^{(k)}(x_0)$. Wartością przybliżoną dla $y_0^{(k)}$ jest wartość $\bar{y}_0^{(k)} = f^{(k)}(x_0)$ pochodnej $f^{(k)}(x)$ wielomianu interpolacyjnego $f(x)$

aproksymującego funkcję $F(x)$. Błąd przybliżenia określony jest wzorem (12) lub (13). Niech teraz będą spełnione równości $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ ($n \geq k$), wtedy na mocy (14) jest

$$(26) \quad \bar{y}_0^{(k)} = \frac{1}{h^k} \left[\Delta^k y_0 + \Delta^{k+1} y_0 \frac{d^k}{d\xi^k} \left(\frac{\xi}{k+1} \right) + \Delta^{k+2} y_0 \frac{d^k}{d\xi^k} \left(\frac{\xi}{k+2} \right) + \dots + \right. \\ \left. + \Delta^n y_0 \frac{d^k}{d\xi^k} \left(\frac{\xi}{n} \right) \right]_{\xi=0}.$$

Ale

$$\left(\frac{\xi}{m} \right) = \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-m+1)}{m!} = \frac{\xi^{(m)}}{m!},$$

gdzie $\xi^{(m)}$ oznacza wielomian czynnikowy stopnia m zmiennej ξ . Zatem na mocy wzorów (12) i (16) z rozdziału II jest

$$(27) \quad \left(\frac{\xi}{m} \right) = \frac{1}{m!} (S_0^m \xi^m + S_1^m \xi^{m-1} + S_2^m \xi^{m-2} + \dots + S_{m-1}^m \xi),$$

gdzie $S_0^m, S_1^m, \dots, S_{m-1}^m$ są liczbami Stirlinga pierwszego rodzaju (patrz tablica II na końcu książki).

Na mocy (27) jest

$$\frac{d^k}{d\xi^k} \left(\frac{\xi}{m} \right) = \frac{1}{m!} [m(m-1)\dots(m-k+1) S_0^m \xi^{m-k} + \\ + (m-1)(m-2)\dots(m-k) S_1^m \xi^{m-k-1} + \dots + k! S_{m-k}^m],$$

skąd

$$(28) \quad \frac{d^k}{d\xi^k} \left(\frac{\xi}{m} \right)_{\xi=0} = \frac{k!}{m!} S_{m-k}^m.$$

Zatem wzór (26) można napisać w postaci

$$(29) \quad \bar{y}_0^{(k)} = \frac{1}{h^k} \left[\Delta^k y_0 + \frac{1}{k+1} S_1^{k+1} \Delta^{k+1} y_0 + \frac{1}{(k+1)(k+2)} S_2^{k+2} \Delta^{k+2} y_0 + \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots n} S_{n-k}^n \Delta^n y_0 \right].$$

Dla $n=8$ i $k=2, 3, \dots, 8$ otrzymujemy stąd wzory

$$\bar{y}_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \frac{137}{180} \Delta^6 y_0 - \frac{7}{10} \Delta^7 y_0 + \frac{363}{560} \Delta^8 y_0 \right],$$

$$\bar{y}_0^{(3)} = \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2} \Delta^4 y_0 + \frac{7}{4} \Delta^5 y_0 - \frac{15}{8} \Delta^6 y_0 + \frac{29}{15} \Delta^7 y_0 - \frac{469}{240} \Delta^8 y_0 \right],$$

$$(30) \quad \bar{y}_0^{(4)} = \frac{1}{h^4} \left[\Delta^4 y_0 - 2\Delta^5 y_0 + \frac{17}{6}\Delta^6 y_0 - \frac{7}{2}\Delta^7 y_0 + \frac{967}{240}\Delta^8 y_0 \right],$$

$$\bar{y}_0^{(5)} = \frac{1}{h^5} \left[\Delta^5 y_0 - \frac{5}{2} \Delta^6 y_0 + \frac{25}{6} \Delta^7 y_0 - \frac{35}{6} \Delta^8 y_0 \right],$$

$$\bar{y}_0^{(6)} = \frac{1}{h^6} \left[\Delta^6 y_0 - 3 \Delta^7 y_0 + \frac{23}{4} \Delta^8 y_0 \right],$$

$$\bar{y}_0^{(7)} = \frac{1}{h^7} \left[\Delta^7 y_0 - \frac{7}{2} \Delta^8 y_0 \right],$$

$$\bar{y}_0^{(8)} = \frac{1}{h^8} \Delta^8 y_0.$$

Wzory dla $n < 8$ można z łatwością otrzymać ze wzorów (30) uwzględniając w nich tylko wyrazy z różnicami aż do $\Delta^n y_0$ włącznie.

Na mocy wzoru (4) z rozdziału II

$$(31) \quad \begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= y_2 - 2y_1 + y_0, \\ \Delta^3 y_0 &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^8 y_0 &= y_8 - 8y_7 + 28y_6 - 56y_5 + 70y_4 - 56y_3 + 28y_2 - 8y_1 + y_0, \end{aligned}$$

oraz na mocy (14a)

$$y_0^{(k)} = \bar{y}_0^{(k)} + F_{n+1} h^{n-k+1} \left[\frac{d^k}{d\xi^k} \left(\frac{\xi}{n+1} \right) \right]_{\xi=0} \pm M_{n+1} h^{n-k+1} \left| \frac{d^k}{d\xi^k} \left(\frac{\xi}{n+1} \right) \right|_{\xi=0},$$

czyli na mocy (28)

$$(32) \quad y_0^{(k)} = \bar{y}_0^{(k)} + F_{n+1} h^{n-k+1} \frac{k!}{(n+1)!} S_{n-k+1}^{n+1} \pm M_{n+1} h^{n-k+1} \frac{k!}{(n+1)!} |S_{n-k+1}^{n+1}|.$$

Podstawiając (31) do wzorów (30) i korzystając z oszacowań (32) otrzymujemy wzory

Dla $n=2$:

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) - F_3 h \pm M_3 h.$$

Dla $n=3$:

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12} F_4 h^2 \pm \frac{11}{12} M_4 h^2,$$

$$y_0^{(3)} = \frac{1}{h^3} (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) - \frac{3}{2} F_4 h \pm \frac{3}{2} M_4 h.$$

Dla $n=4$:

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{35}{12} y_0 - \frac{26}{3} y_1 + \frac{19}{2} y_2 - \frac{14}{3} y_3 + \frac{11}{12} y_4 \right) - \frac{5}{6} F_5 h^3 \pm \frac{5}{6} M_5 h^3,$$

$$y_0^{(3)} = \frac{1}{h^3} \left(-\frac{5}{2} y_0 + 9y_1 - 12y_2 + 7y_3 - \frac{3}{2} y_4 \right) + \frac{7}{4} F_5 h^2 \pm \frac{7}{4} M_5 h^2,$$

$$y_0^{(4)} = \frac{1}{h^4} (y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4) - 2F_5 h \pm 2M_5 h.$$

Te i analogiczne wzory dla $n=5,6$ umieszczone są w tablicy VII na końcu książki.

Podkreślić należy, że gdy funkcja $F(x)$ jest wielomianem stopnia n , to we wzorach podanych w tablicy VII błąd jest równy zeru, ponieważ w tym przypadku wielomian interpolacyjny jest identyczny z funkcją $F(x)$.

Błędy można szacować jeszcze inaczej. Przeprowadzając analogiczne rozumowania, jak w przypadku wyprowadzania wzoru (25), otrzymujemy

$$(33) \quad B \approx \frac{\bar{y}_0^{(k)} - \bar{\bar{y}}_0^{(k)}}{2^{n-k+1} - 1},$$

gdzie B jest błędem przybliżenia szukanej wartości $y_0^{(k)} = F^{(k)}(x_0)$ przez wartość $\bar{y}_0^{(k)} = f^{(k)}(x_0)$ pochodnej wielomianu interpolacyjnego $f(x)$, zbu-

dowanego na punktach $x_0, x_0+h, \dots, x_0+nh$, a $\bar{y}_0^{(k)} = g^{(k)}(x_0)$ jest wartością pochodnej wielomianu interpolacyjnego $g(x)$, zbudowanego na punktach $x_0, x_0+2h, x_0+4h, \dots, x_0+2nh$.

Oszacowanie (33) jest dokładne dla wielomianów stopnia $n+1$. Dla dowolnej funkcji $F(x)$ oszacowanie (33) daje — z grubsza mówiąc — zmianę błędu przy zwiększeniu stopnia wielomianu interpolacyjnego o jedność.

PRZYKŁAD 4. Obliczyć wartość drugiej pochodnej funkcji $F(x)$ w punkcie $x_0 = -3,5$, jeżeli wiadomo, że funkcja ta jest wielomianem trzeciego stopnia i przyjmuje w punktach $x_0 = -3,5$, $x_1 = -3,1$, $x_2 = -2,7$, $x_3 = -2,3$ wartości $y_0 = 3,18$, $y_1 = 2,83$, $y_2 = 2,49$, $y_3 = 1,51$.

W tablicy VII odnajdujemy dla $n=3$ i $k=2$ wzór

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12} F_4 h^2 \pm \frac{11}{12} M_4 h^2.$$

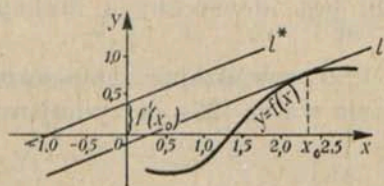
Ponieważ dana funkcja jest wielomianem trzeciego stopnia, więc $F^{(4)}(x) = 0$ i można przyjąć $F_4 = M_4 = 0$. W danym przypadku $h = 0,4$, więc

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{0,4^2} (2 \cdot 3,18 - 5 \cdot 2,83 + 4 \cdot 2,49 - 1,51) = 4,125.$$

Jest to wartość dokładna, bo $M_4 = 0$.

§ 61. Różniczkowanie graficzne. Różniczkowanie graficzne opiera się na znanym fakcie, że wartość pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie $x=x_0$ jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do krzywej $y=f(x)$ w tymże punkcie.

Jeżeli znamy wykres funkcji $f(x)$, możemy z łatwością odczytać na wykresie wartość pochodnej tej funkcji w dowolnym punkcie $x=x_0$.



Rys. 12

W tym celu wystarczy przez punkt o współrzędnych $(-1,0)$ poprowadzić równoległą l^* do stycznej l do krzywej $y=f(x)$ w punkcie $x=x_0$. Równoległa ta przecina oś rzędnych w punkcie o rzędnej równej szukanej wartości $f'(x_0)$ (rys. 12).

Istotnie, współczynnik kierunkowy prostej l^* , jako równy współczynnikowi kierunkowemu prostej l , jest równy $f'(x_0)$.

Prosta l^* przechodzi ponadto przez punkt $(-1,0)$, więc ma równanie $y = f'(x_0)(x+1)$. Dla $x=0$ mamy stąd $y = f'(x_0)$, c. b. d. d.