

ROZDZIAŁ II

WSTĘPNE WIADOMOŚCI Z RACHUNKU RÓŻNICOWEGO

§ 11. Wstęp. Rachunek różnicowy jest działem matematyki wykazującym liczne analogie z rachunkiem różniczkowym i całkowym. Pojęciu różniczki odpowiada w rachunku różnicowym — na co zresztą sama nazwa wskazuje — pojęcie różnicy skończonej. Przez przejście do granicy można z wielu wzorów rachunku różnicowego otrzymywać wzory rachunku różniczkowego lub całkowego. Śledzenie wspomnianych analogii może czytelnikowi znającemu rachunek różniczkowy i całkowy ułatwić w dużym stopniu zapoznanie się z rachunkiem różnicowym.

Rachunek różnicowy ma bardzo liczne i ważne zastosowania. Stosuje się go do interpolacji, do rozwiązywania numerycznego równań różnych typów, do obliczania wartości całek oznaczonych, do wykrywania błędów w tablicach matematycznych, do wyrównywania spostrzeżeń itd.

Ograniczymy się tylko do podania najważniejszych, wstępnych wiadomości z rachunku różnicowego w dziedzinie liczb rzeczywistych.

§ 12. Różnice. Dana jest funkcja $y=f(x)$ określona w punktach $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, o których zakładamy, że następują po sobie w równych odstępach, tj. że

$$(1) \quad x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = h,$$

gdzie h jest pewną stałą dodatnią. Niech

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n).$$

Przyrost

$$(2) \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = \Delta f(x_i),$$

gdzie $i=0, 1, 2, \dots, n-1$, nazywamy *pierwszą różnicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_i* . Zauważmy, że wskaźnik przy symbolu różnicy stawiamy tu taki, jaki występuje w odjemniku tej różnicy. Różnice pierwszych różnic

funkcji $f(x)$ w punktach x_{i+1} i x_i nazywamy *drugą różnicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_i* . Oznaczamy ją przez $\Delta^2 y_i$ lub $\Delta^2 f(x_i)$. A zatem

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

gdzie $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$.

Ogólnie: różnicę $(k-1)$ -szych różnic funkcji $f(x)$ w punktach x_{i+1} i x_i nazywamy *k -tą różnicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_i* . Oznaczamy ją przez $\Delta^k y_i$ lub $\Delta^k f(x_i)$. Umawiamy się, że $\Delta^1 y_i = \Delta y_i$, a $\Delta^0 y_i = y_i$. Mamy wtedy ogólnie:

$$(3) \quad \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad k=1, 2, \dots, n; \quad i=0, 1, \dots, n-k.$$

Można wykazać (dowód pomijamy), że jeżeli funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 pochodną k -tego rzędu $f^{(k)}(x_0)$, to

$$f^{(k)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k y_0}{h^k}.$$

Ten właśnie wzór kładzie pomost między rachunkiem różnicowym i rachunkiem różniczkowym.

Udowodnimy teraz metodą indukcji, że

$$(4) \quad \Delta^k y_i = \binom{k}{0} y_{i+k} - \binom{k}{1} y_{i+k-1} + \binom{k}{2} y_{i+k-2} - \dots - (-1)^k \binom{k}{k-1} y_{i+1} + (-1)^k \binom{k}{k} y_i,$$

co można napisać krócej

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} y_{i+k-j}.$$

Otóż dla $k=1$ wzór (4) jest prawdziwy, gdyż ma postać

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

identyczną ze wzorem (2). Należy jeszcze wykazać, że jeżeli wzór (4) jest prawdziwy dla $k=m$, to jest również prawdziwy dla $k=m+1$.

Rzeczywiście, na mocy (3) jest

$$(5) \quad \Delta^{m+1} y_i = \Delta^m y_{i+1} - \Delta^m y_i.$$

$$1) \quad \binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \quad \binom{k}{0} = 1.$$

Ponieważ założyliśmy, że wzór (4) jest prawdziwy dla $k=m$, więc

$$\begin{aligned}\Delta^m y_i &= \binom{m}{0} y_{i+m} - \binom{m}{1} y_{i+m-1} + \binom{m}{2} y_{i+m-2} - \dots - \\ &\quad - (-1)^m \binom{m}{m-1} y_{i+1} + (-1)^m \binom{m}{m} y_i, \\ \Delta^m y_{i+1} &= \binom{m}{0} y_{i+m+1} - \binom{m}{1} y_{i+m} + \binom{m}{2} y_{i+m-1} - \dots - \\ &\quad - (-1)^m \binom{m}{m-1} y_{i+2} + (-1)^m \binom{m}{m} y_{i+1}.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\Delta^{m+1} y_i &= \binom{m}{0} y_{i+m+1} - \left[\binom{m}{1} + \binom{m}{0} \right] y_{i+m} + \left[\binom{m}{2} + \binom{m}{1} \right] y_{i+m-1} - \dots + \\ &\quad + (-1)^m \left[\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1} \right] y_{i+1} - (-1)^m \binom{m}{m} y_i.\end{aligned}$$

Ale

$$\binom{m}{0} = 1 = \binom{m+1}{0},$$

$$\begin{aligned}(6) \quad \binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} &= \frac{m!}{j!(m-j)!} + \frac{m!}{(j-1)!(m-j+1)!} = \\ &= \frac{m!}{j!(m-j+1)!} (m-j+1+j) = \\ &= \frac{(m+1)!}{j!(m+1-j)!} = \binom{m+1}{j} \quad \text{dla } j=1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

oraz

$$-(-1)^m \binom{m}{m} y_i = (-1)^{m+1} y_i = (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} y_i.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\Delta^{m+1} y_i &= \binom{m+1}{0} y_{i+m+1} - \binom{m+1}{1} y_{i+m} + \binom{m+1}{2} y_{i+m-1} - \dots - \\ &\quad - (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m} y_{i+1} + (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} y_i,\end{aligned}$$

a to jest właśnie wzór (4) w przypadku $k=m+1$.

Pokażemy teraz, że odwrotnie każdą wartość y_k ($k=1, 2, \dots, n$) można obliczyć z różnic $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^k y_0$ i wartości y_0 . Udowodnimy mianowicie — jak poprzednio metodą indukcji — że

$$(7) \quad y_k = y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \dots + \binom{k}{k} \Delta^k y_0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Dla $k=1$ wzór ten jest prawdziwy, gdyż ma postać

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \quad \text{czyli} \quad \Delta y_0 = y_1 - y_0$$

zgodnie ze wzorem (2).

Wykażemy jeszcze, że jeżeli wzór (7) jest prawdziwy dla $k=m$, to jest również prawdziwy dla $k=m+1$.

Jeżeli bowiem wzór (7) jest prawdziwy dla $k=m$, to

$$(8) \quad y_{m+1} = y_1 + \binom{m}{1} \Delta y_1 + \binom{m}{2} \Delta^2 y_1 + \dots + \binom{m}{m} \Delta^m y_1.$$

Ale na mocy wzoru (5) jest

$$\Delta^j y_1 = \Delta^j y_0 + \Delta^{j+1} y_0 \quad \text{dla} \quad j=0, 1, 2, \dots$$

Zatem wzór (8) można napisać w postaci

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_0 + \Delta y_0 + \binom{m}{1} (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + \binom{m}{2} (\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0) + \dots + \\ + \binom{m}{m} (\Delta^m y_0 + \Delta^{m+1} y_0), \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_0 + \left[\binom{m}{1} + \binom{m}{0} \right] \Delta y_0 + \left[\binom{m}{2} + \binom{m}{1} \right] \Delta^2 y_0 + \left[\binom{m}{3} + \binom{m}{2} \right] \Delta^3 y_0 + \\ + \dots + \left[\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1} \right] \Delta^m y_0 + \binom{m}{m} \Delta^{m+1} y_0, \end{aligned}$$

skąd na mocy wzoru (6) i równości $\binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$

$$(9) \quad y_{m+1} = y_0 + \binom{m+1}{1} \Delta y_0 + \binom{m+1}{2} \Delta^2 y_0 + \dots + \binom{m+1}{m+1} \Delta^{m+1} y_0,$$

a to jest właśnie wzór (7) dla $k=m+1$.

Wzór (7) wygodnie jest zapisywać w postaci symbolicznej

$$y_k = (1 + \Delta)^k y_0.$$

Rozwijając pierwszy czynnik prawej strony według wzoru dwumiennego Newtona tak, jakbyśmy to uczynili, gdyby Δ było symbolem liczby, otrzymujemy formalnie wzór (7).

Kolejne różnice $\Delta^k y_i$ obliczamy podług następującego schematu:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
x_0	y_0	Δy_0					
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$			
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$	$\Delta^5 y_1$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\Delta^4 y_{n-4}$		
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$				
x_n	y_n						

PRZYKŁAD 1. Sporządzimy tablicę różnic dla funkcji $y = \sin x$ — przybliżenie dziesiętne $\sin x$ z dokładnością do 0,000005 i $x = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
10°	0,17365	16837					
20°	0,34202	15798	-1039				
30°	0,50000	14279	-1519	-480			
40°	0,64279	12325	-1954	-435	45		
50°	0,76604	9999	-2326	-372	63	18	
60°	0,86603	7366	-2633	-307	65	2	-16
70°	0,93969						

Ze względu na wygodę zapisu pomijaliśmy w różnicach przecinek i zera początkowe. Jak widzimy z otrzymanej tabeli, drugie, trzecie i szóste

różnice są ujemne. Jest w tym analogia do faktu, że dla $0 < x < 90^\circ$ druga, trzecia i szósta pochodne funkcji $y = \sin x$ są ujemne.

Funkcję

$$(11) \quad \Delta^k y = \Delta^k f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f[x + (k-j)h], \quad k=0, 1, \dots, n,$$

określoną dla $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-k}$, gdzie $x_i = x_0 + ih$, a h jest pewną stałą dodatnią, nazywać będziemy *k-tą różnicą funkcji $f(x)$* . Zatem *k*-ta różnica funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest wartością funkcji $\Delta^k y$ w tym punkcie. *k*-te różnice nazywać będziemy również *różnicami k-tego rzędu*.

Można łatwo sprawdzić rachunkiem, że na przykład

$$\Delta c = 0 \quad (c = \text{const}),$$

$$\Delta[cf(x)] = c \Delta f(x),$$

$$\Delta[f(x) \pm g(x)] = \Delta f(x) \pm \Delta g(x),$$

$$\Delta^k[\Delta^l f(x)] = \Delta^{k+l} f(x),$$

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x+h)\Delta f(x),$$

$$\Delta \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x+h)g(x)},$$

$$g(x+h)g(x) \neq 0.$$

Spostrzegamy tu analogie ze znanymi wzorami rachunku różniczkowego. A oto pierwsze różnice niektórych funkcji:

$$\Delta e^x = e^x(e^h - 1),$$

$$\Delta \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right),$$

$$\Delta \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta \operatorname{tg} x = \frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}.$$

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Różnica rzędu $n+1$ wielomianu stopnia n jest równa zeru.*

Dowód. Niech dany będzie wielomian

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Wtedy

$$\Delta f(x) = a_n [(x+h)^n - x^n] + a_{n-1} [(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \dots + a_1 h.$$

Zatem $\Delta f(x)$ jest wielomianem stopnia $n-1$. Przyjmując, że $\Delta f(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$, mamy

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = b_{n-1} [(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + b_{n-2} [(x+h)^{n-2} - x^{n-2}] + \dots + b_1 h.$$

Zatem $\Delta^2 f(x)$ jest wielomianem stopnia $n-2$. Postępując dalej analogicznie dochodzimy do wniosku, że $\Delta^n f(x)$ jest wielomianem zerowego stopnia, czyli stałą. Zatem różnica $\Delta^{n+1} f(x) = \Delta[\Delta^n f(x)]$ jest równa zero, co należało wykazać.

Wynika stąd, że wszystkie różnice $\Delta^{n+1} f(x_0 + kh)$, gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$, a x_0 jest dowolnie obranym punktem, są równe zero.

Zauważmy, że twierdzenie 1 odpowiada twierdzeniu z rachunku różniczkowego, że różniczka rzędu $n+1$ wielomianu stopnia n jest równa zero.

Jeżeli różnice rzędu $n+1$ funkcji $f(x)$ są równe zero, to funkcja $f(x)$ może nie być wielomianem stopnia n , gdyż do obliczenia różnic zostały użyte jedynie wartości funkcji $f(x)$ w punktach x_0, x_1, \dots , a między tymi punktami funkcja $f(x)$ może przebiegać dowolnie. Można jednak wykazać, że jeżeli różnice rzędu $n+1$ funkcji $f(x)$ są równe zero dla każdej liczby dodatniej h ($h = x_{i+1} - x_i$ dla $i = 0, 1, \dots$), to funkcja ta jest wielomianem. Dowód pomijamy.

PRZYKŁAD 2. Sporządzimy tabelkę różnic dla wielomianu $y = 3x^4 - x^2 + 5x - 9$ i $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
-2	25	-37				
-1	-12	3	40			
0	-9	7	4	-36	72	
1	-2	47	40	36	72	0
2	45	195	148	108	72	0
3	240	523	328	180	72	0
4	763	1103	580	252		
5	1866					

§ 13. Wielomiany czynnikowe. Wielomian stopnia n

$$x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h),$$

gdzie h jest pewną stałą dodatnią, nazywać będziemy *wielomianem czynnikowym* stopnia n i oznaczać symbolem $x^{(n)}$. Jest zatem

$$(12) \quad x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h).$$

Ponadto przyjmujemy, że

$$(13) \quad x^{(0)} = 1.$$

Łatwo zauważyć, że dla $x=kh$ jest

$$x^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k=0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{k!}{(k-n)!} h^n, & \text{gdy } k=n, n+1, n+2, \dots \end{cases}$$

Różnice wielomianów czynnikowych oblicza się bardzo prosto, o ile się przyjmie, że liczba h występująca w definicji wielomianu czynnikowego (12) jest identyczna z liczbą h występującą w definicji różnic (11). Mamy wtedy

$$\begin{aligned} \Delta x^{(n)} &= (x+h)^{(n)} - x^{(n)} = \\ &= (x+h)x(x-h)\dots(x-(n-2)h) - x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h) = \\ &= [x+h-x+(n-1)h]x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-2)h) = \\ &= nhx^{(n-1)} = (nh)^{(1)}x^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Następnie

$$\Delta^2 x^{(n)} = \Delta(\Delta x^{(n)}) = nh \Delta x^{(n-1)} = nh(nh-h)x^{(n-2)} = (nh)^{(2)}x^{(n-2)}.$$

Można łatwo dowieść metodą indukcji, że jest ogólnie

$$(14) \quad \Delta^k x^{(n)} = (nh)^{(k)} x^{(n-k)}, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Zauważmy, że wzór (14) odpowiada wzorowi z rachunku różniczkowego na różniczkę rzędu k funkcji $y=x^n$ przy założeniu stałości różniczki dx :

$$d^k(x^n) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}dx^k.$$

Analogię tę widać najwyraźniej, gdy wzór (14) napiszemy w postaci

$$\Delta^k x^{(n)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{(n-k)}h^k.$$

Na podstawie wzoru (14) mamy

$$\begin{aligned} x^{(n)}h &= \frac{(x+h)^{(n+1)} - x^{(n+1)}}{n+1}, \\ (x+h)^{(n)}h &= \frac{(x+2h)^{(n+1)} - (x+h)^{(n+1)}}{n+1}, \\ (x+2h)^{(n)}h &= \frac{(x+3h)^{(n+1)} - (x+2h)^{(n+1)}}{n+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ (x+kh)^{(n)}h &= \frac{(x+(k+1)h)^{(n+1)} - (x+kh)^{(n+1)}}{n+1}, \end{aligned}$$

skąd po zsumowaniu stronami otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^k (x+jh)^{(n)}h = \frac{(x+(k+1)h)^{(n+1)} - x^{(n+1)}}{n+1}.$$

Przyjmując oznaczenia wzoru (1) można to zapisać w postaci

$$(15) \quad \sum_{j=0}^k x_j^{(n)}h = \frac{x_{k+1}^{(n+1)} - x_0^{(n+1)}}{n+1},$$

gdzie symbolem $x_j^{(n)}$ oznaczyliśmy wartość wielomianu czynnikowego $x^{(n)}$ w punkcie $x=x_j$. Spostrzegamy analogię wzoru (15) ze wzorem z rachunku całkowego

$$\int_{x_0}^{x_{k+1}} x^n dx = \frac{x_{k+1}^{n+1} - x_0^{n+1}}{n+1},$$

który można otrzymać z (15) przez przejście do granicy, gdy $h \rightarrow 0$ i $(k+1)h = \text{const.}$

Każdy wielomian czynnikowy — jak to wynika z jego definicji — daje się przedstawić w postaci

$$(16) \quad x^{(n)} = S_0^n x^n + S_1^n h x^{n-1} + S_2^n h^2 x^{n-2} + \dots + S_{n-1}^n h^{n-1} x.$$

Liczby S_i^n ($i=0, 1, \dots, n-1$) noszą nazwę *liczb Stirlinga pierwszego rodzaju*. Obliczać je najwygodniej ze wzoru rekurencyjnego

$$(17) \quad S_i^{n+1} = S_i^n - n S_{i-1}^n, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

jaki otrzymujemy od razu, korzystając z oczywistej równości

$$x^{(n+1)} = x^{(n)}(x-nh)$$

i przyjmując, że $S_n^n = 0$. Na końcu książki w Tablicy IIA podano liczby Stirlinga pierwszego rodzaju dla $n=1, 2, \dots, 10$.

Mamy na przykład

$$x^{(6)} = x^6 - 15hx^5 + 85h^2x^4 - 225h^3x^3 + 274h^4x^2 - 120h^5x.$$

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. *Każdy wielomian stopnia n*

$$W_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci

$$(18) \quad W_n = A_n x^{(n)} + A_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + A_1 x^{(1)} + A_0,$$

gdzie A_n, A_{n-1}, \dots, A_0 są współczynnikami liczbowymi.

Dowód.

$$(19) \quad W_n = a_n x^{(n)} + R_1,$$

gdzie R_1 jest resztą z podzielenia W_n przez $x^{(n)}$, czyli przez wielomian stopnia n określony wzorem (16). Jeśli R_1 jest stałą, to postać (18) jest już określona wzorem (19). W przeciwnym razie R_1 jest wielomianem stopnia k_1

$$R_1 = a_{1k_1} x^{k_1} + a_{1,k_1-1} x^{k_1-1} + \dots + a_{10},$$

gdzie $1 \leq k_1 < n$. Zatem

$$(20) \quad R_1 = a_{1k_1} x^{(k_1)} + R_2,$$

gdzie R_2 jest resztą z podzielenia wielomianu R_1 przez $x^{(k_1)}$. Jeśli R_2 jest stałą, to postać (18) jest już określona wzorami (19) i (20). W przeciwnym razie R_2 jest wielomianem stopnia k_2

$$R_2 = a_{2k_2} x^{k_2} + a_{2,k_2-1} x^{k_2-1} + \dots + a_{20},$$

gdzie $1 \leq k_2 < k_1$.

Postępując dalej analogicznie otrzymujemy ciąg liczb naturalnych $k_1 > k_2 > k_3 > \dots \geq 1$. Ciąg ten musi być skończony. A zatem musi się pojawić reszta R_g będąca stałą. Podstawiając do wzoru (19) kolejno reszty R_1, R_2, \dots, R_g otrzymujemy postać (18). W ten sposób udowodniliśmy, że wielomian W_n można przedstawić w postaci (18). Pozostaje do udowodnienia, że istnieje tylko jedno takie przedstawienie.

Gdyby wielomian W_n można było przedstawić w postaci (18) na dwa sposoby:

$$W_n = A_n x^{(n)} + A_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + A_1 x^{(1)} + A_0$$

oraz

$$W_n = B_n x^{(n)} + B_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + B_1 x^{(1)} + B_0,$$

mielibyśmy

$$A_n x^{(n)} + A_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + A_1 x^{(1)} + A_0 = B_n x^{(n)} + B_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + B_1 x^{(1)} + B_0.$$

Podstawiając $x=0, h, 2h, \dots, nh$ otrzymujemy kolejno

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad \dots, \quad A_n = B_n.$$

Każdemu wielomianowi odpowiada zatem tylko jedno przedstawienie postaci (18), czego należało dowieść.

PRZYKŁAD 3. Wyrażmy wielomian $3x^3 - x^2 + 2x - 1$ za pomocą wielomianów czynnikowych, dla których $h=1$. Mamy

$$x^{(1)} = x,$$

$$x^{(2)} = x^2 - x,$$

$$x^{(3)} = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

a dalej

$$\begin{aligned} 3x^3 - x^2 + 2x - 1 &= 3(x^3 - 3x^2 + 2x) + 8x^2 - 4x - 1 = 3x^{(3)} + 8x^2 - 4x - 1 = \\ &= 3x^{(3)} + 8(x^2 - x) + 4x - 1 = 3x^{(3)} + 8x^{(2)} + 4x^{(1)} - 1. \end{aligned}$$

W rozdziale III poznamy łatwiejszy sposób znajdowania postaci (18) dla dowolnego wielomianu W_n .

Można obliczyć, że

$$\begin{aligned} (21) \quad x &= x^{(1)}, \\ x^2 &= x^{(2)} + hx^{(1)}, \\ x^3 &= x^{(3)} + 3hx^{(2)} + h^2x^{(1)}, \\ x^4 &= x^{(4)} + 6hx^{(3)} + 7h^2x^{(2)} + h^3x^{(1)}. \end{aligned}$$

Ogólnie

$$(22) \quad x^n = \mathcal{S}_0^n x^{(n)} + \mathcal{S}_1^n h x^{(n-1)} + \mathcal{S}_2^n h^2 x^{(n-2)} + \dots + \mathcal{S}_{n-1}^n h^{n-1} x^{(1)}.$$

Liczby \mathcal{S}_i^n noszą nazwę *liczb Stirlinga drugiego rodzaju*. Tabelka tych liczb dla $n=1, 2, \dots, 10$ jest zamieszczona na końcu książki (Tablica IIB). Tabelkę taką najłatwiej sporządzić używając wzoru rekurencyjnego

$$(23) \quad \mathcal{S}_i^n = \mathcal{S}_i^{n-1} + (n-i) \mathcal{S}_{i-1}^{n-1}, \quad 1 \leq i \leq n-2,$$

który można wyprowadzić z tożsamości

$$(24) \quad (x+h)^n = (x+h)(x^{n-1} + Ax^{n-1}).$$

Mianowicie na podstawie (22) jest

$$\begin{aligned} (x+h)^n &= \mathcal{S}_0^n (x+h)^{(n)} + \mathcal{S}_1^n h (x+h)^{(n-1)} + \\ &\quad + \mathcal{S}_2^n h^2 (x+h)^{(n-2)} + \dots + \mathcal{S}_{n-1}^n h^{n-1} (x+h)^{(1)}, \end{aligned}$$

a według (12)

$$(x+h)^{(n-i)} = (x+h)x^{(n-i-1)}, \quad i=0,1,\dots,n-1.$$

Zatem

$$(25) \quad (x+h)^n = (x+h)[\mathcal{S}_0^n x^{(n-1)} + \mathcal{S}_1^n h x^{(n-2)} + \mathcal{S}_2^n h^2 x^{(n-3)} + \dots + \mathcal{S}_{n-1}^n h^{n-1}].$$

Ponadto na podstawie (22) jest

$$(26) \quad x^{n-1} = \mathcal{S}_0^{n-1} x^{(n-1)} + \mathcal{S}_1^{n-1} h x^{(n-2)} + \mathcal{S}_2^{n-1} h^2 x^{(n-3)} + \dots + \mathcal{S}_{n-2}^{n-1} h^{n-2} x^{(1)},$$

skąd wobec (14)

$$(27) \quad \Delta x^{n-1} = (n-1) \mathcal{S}_0^{n-1} h x^{(n-2)} + (n-2) \mathcal{S}_1^{n-1} h^2 x^{(n-3)} + \\ + (n-3) \mathcal{S}_2^{n-1} h^3 x^{(n-4)} + \dots + \mathcal{S}_{n-2}^{n-1} h^{n-1}.$$

Wstawiamy następnie wzory (25), (26) i (27) do wzoru (24), upraszczamy obie strony przez $(x+h)$ i przez przyrównanie współczynników przy wyrazach $h^i x^{(n-i-1)}$ otrzymujemy wzór (23).

Z definicji wielomianu czynnikowego wynika, że $\mathcal{S}_0^n = 1$ ($n=1,2,\dots$). Przyjmujemy ponadto, że $\mathcal{S}_n^n = 0$. Wszystkie pozostałe liczby Stirlinga dają się wtedy kolejno obliczyć ze wzoru (23).

Podamy teraz przykład zastosowania wzoru (22).

PRZYKŁAD 4. Wyprowadzimy wzór na sumę sześciątów n kolejnych liczb naturalnych.

Niech $x_i = i+1$. Wtedy

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^3.$$

Stosujemy wzór (22) przyjmując $h=1$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{(3)} + 3 \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{(2)} + \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{(1)},$$

a następnie do każdej sumy po prawej stronie stosujemy wzór (15)

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i^3 = \frac{x_n^{(4)} - x_0^{(4)}}{4} + 3 \frac{x_n^{(3)} - x_0^{(3)}}{3} + \frac{x_n^{(2)} - x_0^{(2)}}{2}.$$

Ponieważ $x_n^{(4)} = (n+1)n(n-1)(n-2)$, $x_n^{(3)} = (n+1)n(n-1)$, $x_n^{(2)} = (n+1)n$, $x_0^{(4)} = 1 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2) = 0$ i podobnie $x_0^{(3)} = x_0^{(2)} = 0$, więc

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \\ = \frac{1}{4} [(n+1)n(n-1)(n-2) + 4(n+1)n(n-1) + 2(n+1)n] = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

§ 14. Różnice wsteczne. Trzymając się nadal oznaczeń przyjętych w poprzednim paragrafie określamy *pierwszą różnicę wsteczną funkcji* $f(x)$ w punkcie x_i jako pierwszą różnicę funkcji $f(x)$ w punkcie x_{i-1} i oznaczamy ją jednym z następujących symboli: ∇y_i , $\nabla^1 y_i$, $\nabla f(x_i)$ albo $\nabla^1 f(x_i)$. Jest zatem

$$\nabla y_i = \Delta y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ogólnie określamy *k-tą różnicę wsteczną funkcji* $f(x)$ w punkcie x_i (k naturalne) jako różnicę $(k-1)$ -ych różnic wstecznych funkcji $f(x)$ w punktach x_i i x_{i-1} . Przyjmując ponadto, że $\nabla^0 y_i = y_i = \Delta^0 y_i$, mamy

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = k, k+1, \dots, n.$$

Można z łatwością wykazać, że

$$(28) \quad \nabla^k y_i = \Delta^k y_{i-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Tabela różnic wstecznych funkcji $f(x)$ danej w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n = x_0 + (n-1)h$ jest identyczna ze zwykłą tabelą różnic, przy czym zmianie ulegają jedynie symbole różnic. To, że w jednym przypadku wolimy korzystać z różnic, a w drugim — z różnic wstecznych, jest spowodowane wygodą zapisu. Na przykład może to zależeć od tego, w jakiej części przedziału (x_0, x_n) chcemy badać funkcję $f(x)$. Jeżeli interesuje nas ona w otoczeniu punktu x_0 , korzystamy ze zwykłych różnic i rozbudowujemy ich tabelę w kierunku rosnących wskaźników x_i : x_0, x_1, \dots tak daleko, jak to jest potrzebne. Jeżeli natomiast interesuje nas zachowanie się funkcji $f(x)$ w otoczeniu punktu x_n , to korzystamy z różnic wstecznych i rozbudowujemy ich tablicę w kierunku malejących wskaźników x_i : x_n, x_{n-1}, \dots tak daleko, jak to jest potrzebne. W tym drugim przypadku wolimy punkty, w których dana jest funkcja $f(x)$, zamiast x_0, x_1, \dots, x_n oznaczać symbolami $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0$ i wtedy tabela różnic wstecznych wygląda następująco:

x_{-n}	y_{-n}						
		∇y_{-n+1}					
x_{-n+1}	y_{-n+1}		$\nabla^2 y_{-n+2}$				
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{-3}	y_{-3}		$\nabla^2 y_{-2}$		$\nabla^4 y_{-1}$		$\nabla^6 y_0$
		∇y_{-2}		$\nabla^3 y_{-1}$		$\nabla^5 y_0$	
x_{-2}	y_{-2}		$\nabla^2 y_{-1}$		$\nabla^4 y_0$		
		∇y_{-1}		$\nabla^3 y_0$			
x_{-1}	y_{-1}		$\nabla^2 y_0$				
		∇y_0					
x_0	y_0						
x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$	$\nabla^6 y_i$

Funkcję $\nabla^k y = \nabla^k f(x) = \Delta^k f(x - kh)$, $k = 0, 1, \dots, n$, określoną dla $x = x_{-n+k}, x_{-n+k+1}, \dots, x_0$, gdzie $x_i = x_0 + ih$, a h jest pewną stałą dodatnią, nazywamy k -tą różnicą wsteczną funkcji $f(x)$. Zatem k -ta różnica wsteczna funkcji $f(x)$ w punkcie x_i jest to wartość funkcji, będącej k -tą różnicą wsteczną funkcji $f(x)$, dla $x = x_i$.

Na mocy wzoru (11) mamy

$$(29) \quad \nabla^k y = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(x - jh).$$

Pierwsza różnica wsteczna $(k-1)$ -szej różnicy wstecznej funkcji $f(x)$ jest oczywiście k -tą różnicą wsteczną funkcji $f(x)$. Ogólnie: $\nabla^k (\nabla^l y) = \nabla^{k+l} y$. k -te różnice wsteczne nazywać będziemy również *różnicami wstecznymi k -tego rzędu*.

§ 15. Różnice centralne. Średnia funkcji. Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$ określona w punktach $x_{-n}, x_{-n+1/2}, \dots, x_{-1/2}, x_0, x_{1/2}, x_1, \dots, x_{n-1/2}, x_n$ (n jest liczbą naturalną). Zakładamy, że punkty te położone są w równych odstępach, tj. że

$$(30) \quad x_i = x_0 + ih,$$

gdzie $i = -n, -n+1/2, \dots, -1/2, 0, 1/2, \dots, n-1/2, n$, przy czym h jest pewną stałą dodatnią.

Niech $y_i = f(x_i)$. Przyrost

$$(31) \quad \delta y_i = y_{i+1/2} - y_{i-1/2} = f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = \delta f(x_i),$$

gdzie $i = -n+1/2, -n+1, \dots, n-1, n-1/2$, nazywać będziemy *pierwszą różnicą centralną funkcji $f(x)$ w punkcie x_i* .

Sumę

$$(32) \quad \mu y_i = \frac{y_{i+1/2} + y_{i-1/2}}{2} = \frac{1}{2} \left[f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \right] = \mu f(x_i)$$

nazywać będziemy *średnią funkcji $f(x)$ w punkcie x_i* .

Ogólnie: k -tą różnicą centralną funkcji $f(x)$ w punkcie x_i (k jest liczbą naturalną) nazywać będziemy różnicę $(k-1)$ -ych różnic centralnych funkcji $f(x)$ w punktach $x_{i+1/2}$ i $x_{i-1/2}$ i oznaczać symbolem $\delta^k y_i$ albo $\delta^k f(x_i)$. Ponadto przyjmujemy, że $\delta^1 y_i = \delta y_i$ oraz $\delta^0 y_i = y_i$. Jest zatem

$$(33) \quad \delta^k y_i = \delta^{k-1} y_{i+1/2} - \delta^{k-1} y_{i-1/2},$$

$$k = 1, 2, \dots, 2n, \quad i = -n + k/2, -n + (k+1)/2, \dots, n - (k+1)/2, n - k/2.$$

Funkcję

$$(34) \quad \delta y = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right),$$

określoną dla $x = x_{-n+1/2}, x_{-n+1}, \dots, x_{n-1}, x_{n-1/2}$, nazywamy *pierwszą różnicą centralną funkcji* $f(x)$.

Funkcję

$$(35) \quad \mu y = \frac{1}{2} \left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right) \right],$$

określoną — podobnie jak δy — dla $x = x_{-n+1/2}, x_{-n+1}, \dots, x_{n-1}, x_{n-1/2}$, nazywamy *średnią funkcji* $f(x)$.

Nazywamy dalej funkcję, która jest pierwszą różnicą centralną $(k-1)$ -ej różnicy centralnej funkcji $f(x)$, k -tą *różnicą centralną funkcji* $f(x)$ i oznaczamy symbolem $\delta^k y$ lub $\delta^k f(x)$. Przyjmujemy, że $\delta^1 y = \delta y$ oraz $\delta^0 y = f(x)$. Mamy zatem

$$\delta^k y = \delta(\delta^{k-1} y) \quad (k \text{ jest liczbą naturalną}).$$

Wynika stąd, że ogólnie

$$(36) \quad \delta^k(\delta^l y) = \delta^{k+l} y.$$

Widzimy, że k -ta różnica funkcji $f(x)$ w punkcie x_i jest wartością funkcji $\delta^k f(x)$ w punkcie x_i .

Pomiędzy różnicami i różnicami centralnymi funkcji $f(x)$ w punktach x_i istnieją proste związki

$$(37) \quad \delta^n y_i = \Delta^n y_{i-n/2}.$$

Jeśli ograniczymy się tylko do punktów x_j , gdzie $j = -n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$, to mamy

$$\mu \delta y_j = \frac{1}{2} (\Delta y_j + \Delta y_{j-1}),$$

$$\delta^2 y_j = \Delta^2 y_{j-1},$$

$$\mu \delta^3 y_j = \frac{1}{2} (\Delta^3 y_{j-1} + \Delta^3 y_{j-2}),$$

$$\delta^4 y_j = \Delta^4 y_{j-2}$$

i ogólnie dla $m=1, 2, \dots, n$

$$(38) \quad \mu \delta^{2m-1} y_j = \frac{1}{2} (\Delta^{2m-1} y_{j-m+1} + \Delta^{2m-1} y_{j-m}),$$

$$\delta^{2m} y_j = \Delta^{2m} y_{j-m}.$$

Można sporządzić tablicę zwykłych różnic funkcji $f(x)$ w punktach $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n$ korzystając z różnic centralnych tej funkcji i wzoru (37). Oto schemat takiej tablicy

x_{-n}	y_{-n}				
$x_{-n+\frac{1}{2}}$	$y_{-n+\frac{1}{2}}$	$\Delta y_{-n} = \delta y_{-n+\frac{1}{2}}$			
x_{-n+1}	y_{-n+1}	δy_{-n+1}	$\Delta^2 y_{-n} = \delta^2 y_{-n+1}$		
$x_{-n+\frac{3}{2}}$	$y_{-n+\frac{3}{2}}$	$\Delta y_{-n+1} = \delta y_{-n+\frac{3}{2}}$	$\delta^2 y_{-n+\frac{3}{2}}$	$\Delta^3 y_{-n} = \delta^3 y_{-n+\frac{3}{2}}$	
x_{-n+2}	y_{-n+2}	δy_{-n+2}	$\Delta^2 y_{-n+1} = \delta^2 y_{-n+2}$	$\delta^3 y_{-n+2}$	$\Delta^4 y_{-n} = \delta^4 y_{-n+2}$
...
x_{-2}	y_{-2}	δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-3} = \delta^2 y_{-2}$	$\delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-4} = \delta^4 y_{-2}$
$x_{-\frac{3}{2}}$	$y_{-\frac{3}{2}}$	$\Delta y_{-2} = \delta y_{-\frac{3}{2}}$	$\delta^2 y_{-\frac{3}{2}}$	$\Delta^3 y_{-3} = \delta^3 y_{-\frac{3}{2}}$	$\delta^4 y_{-\frac{3}{2}}$
x_{-1}	y_{-1}	δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-2} = \delta^2 y_{-1}$	$\delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-3} = \delta^4 y_{-1}$
$x_{-\frac{1}{2}}$	$y_{-\frac{1}{2}}$	$\Delta y_{-1} = \delta y_{-\frac{1}{2}}$	$\delta^2 y_{-\frac{1}{2}}$	$\Delta^3 y_{-2} = \delta^3 y_{-\frac{1}{2}}$	$\delta^4 y_{-\frac{1}{2}}$
x_0	y_0	δy_0	$\Delta^2 y_{-1} = \delta^2 y_0$	$\delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_{-2} = \delta^4 y_0$
$x_{\frac{1}{2}}$	$y_{\frac{1}{2}}$	$\Delta y_0 = \delta y_{\frac{1}{2}}$	$\delta^2 y_{\frac{1}{2}}$	$\Delta^3 y_{-1} = \delta^3 y_{\frac{1}{2}}$	$\delta^4 y_{\frac{1}{2}}$
x_1	y_1	δy_1	$\Delta^2 y_0 = \delta^2 y_1$	$\delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_{-1} = \delta^4 y_1$
$x_{\frac{3}{2}}$	$y_{\frac{3}{2}}$	$\Delta y_1 = \delta y_{\frac{3}{2}}$	$\delta^2 y_{\frac{3}{2}}$	$\Delta^3 y_0 = \delta^3 y_{\frac{3}{2}}$	$\delta^4 y_{\frac{3}{2}}$
x_2	y_2	δy_2	$\Delta^2 y_1 = \delta^2 y_2$	$\delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_0 = \delta^4 y_2$
...
x_{n-2}	y_{n-2}	δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-3} = \delta^2 y_{n-2}$	$\delta^3 y_{n-2}$	$\Delta^4 y_{n-4} = \delta^4 y_{n-2}$
$x_{n-\frac{3}{2}}$	$y_{n-\frac{3}{2}}$	$\Delta y_{n-2} = \delta y_{n-\frac{3}{2}}$	$\delta^2 y_{n-\frac{3}{2}}$	$\Delta^3 y_{n-3} = \delta^3 y_{n-\frac{3}{2}}$	
x_{n-1}	y_{n-1}	δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2} = \delta^2 y_{n-1}$		
$x_{n-\frac{1}{2}}$	$y_{n-\frac{1}{2}}$	$\Delta y_{n-1} = \delta y_{n-\frac{1}{2}}$			
x_n	y_n				

Z różnic centralnych korzystamy wtedy, gdy interesuje nas zachowanie się danej funkcji $f(x)$ w środku przedziału, w którym rozrzucone są punkty, dla których wartość funkcji $f(x)$ jest znana. Rozbudowujemy wtedy tablicę różnic centralnych począwszy od środka tego przedziału w obie strony: zarówno w kierunku rosnących, jak i malejących wskaźników x tak daleko, jak to jest potrzebne.

Jest faktem oczywistym, że każdy wzór napisany za pomocą różnic centralnych daje się zapisać za pomocą różnic albo różnic wstecznych i na odwrót. Używając tego czy innego typu różnic mamy na uwadze wygodę w zapisie wskaźników.

§ 16. Ilorazy różnicowe. Niech będzie dana funkcja $y=f(x)$ określona w punktach $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, które niekoniecznie leżą w równych odstępach. Niech

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n).$$

Będziemy również pisali $y_0 = [x_0]$, $y_1 = [x_1]$, ..., $y_n = [x_n]$.

Ułamek

$$(40) \quad [x_i x_j] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \quad (x_i \neq x_j)$$

nazywać będziemy *pierwszym ilorazem różnicowym funkcji $f(x)$ na punktach x_i, x_j* . Jest zatem

$$[x_0 x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}, \quad [x_1 x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad [x_0 x_2] = \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2} \text{ itd.}$$

i oczywiście

$$(41) \quad [x_i x_j] = [x_j x_i].$$

Ogólnie: k -tym ilorazem różnicowym funkcji $f(x)$ na punktach $x_{a_0}, x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_k}$, gdzie a_0, a_1, \dots, a_k jest ciągiem liczb naturalnych wybranych spośród liczb $0, 1, 2, \dots, n$ i różnych pomiędzy sobą, nazywać będziemy ułamek

$$(42) \quad [x_{a_0} x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_k}] = \frac{[x_{a_0} x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_{k-1}}] - [x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_{k-1}} x_{a_k}]}{x_{a_0} - x_{a_k}},$$

gdzie $[x_{a_0} x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_{k-1}}]$ jest $(k-1)$ -ym ilorazem różnicowym tej funkcji na punktach $x_{a_0}, x_{a_1}, \dots, x_{a_{k-1}}$.

Tablicę ilorazów różnicowych sporządza się zazwyczaj podług następującego schematu:

x_i	y_i				
x_0	y_0				
		$[x_0 x_1]$			
x_1	y_1		$[x_0 x_1 x_2]$		
		$[x_1 x_2]$		$[x_0 x_1 x_2 x_3]$	
x_2	y_2		$[x_1 x_2 x_3]$		$[x_0 x_1 x_2 x_3 x_4]$
		$[x_2 x_3]$		$[x_1 x_2 x_3 x_4]$	
x_3	y_3		$[x_2 x_3 x_4]$		
		$[x_3 x_4]$			
x_4	y_4				
\vdots	\vdots	\vdots			
x_{n-1}	y_{n-1}				
		$[x_{n-1} x_n]$			
x_n	y_n				

k -te ilorazy różnicowe nazywać będziemy również *ilorazami różnicowymi rzędu k* .

PRZYKŁAD 5. Sporządźmy tablicę ilorazów różnicowych dla funkcji zdefiniowanej następującą tabelką:

x	-3	-2	0	3	4	8
y	-614	-511	331	-416	-481	-14221

Oto ta tablica

x_i	y_i					
-3	-614					
		103				
-2	-511		106			
		421		-40		
0	331		-134		10	
		-249		30		-2
3	-416		46		-12	
		-65		-90		
4	-481		-674			
		-3435				
8	-14221					

Metodą indukcji można udowodnić (dowód pomijamy), że

$$\begin{aligned}
 (43) \quad [x_0 x_1 \dots x_n] = & \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} + \\
 & + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \\
 & + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} + \dots + \\
 & + \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}.
 \end{aligned}$$

Ze względu na symetrię wzór (43) ma liczne zastosowania.

Zauważmy, że — jak to wynika ze wzoru (43) — wartość ilorazu różnicowego $[x_0 x_1 \dots x_n]$ nie zależy zupełnie od porządku liczb x_0, x_1, \dots, x_n . Metodą podobną do użytej w dowodzie twierdzenia 1 można dowieść następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. *Iloraz różnicowy $[x_0 x_1 \dots x_{n+1}]$ rzędu $n+1$ wielomianu stopnia n jest równy zeru dla wszelkich liczb x_0, x_1, \dots, x_{n+1} różnych pomiędzy sobą.*

Dowód pomijamy.

Jeśli dana funkcja $y=f(x)$ jest określona w punktach x_0, x_1, \dots, x_n położonych w równych odstępach, tj. takich, że

$$x_i = x_0 + ih,$$

gdzie $i=1, 2, \dots, n$, a h jest stałą dodatnią, to ilorazy różnicowe funkcji $f(x)$ dają się łatwo wyrazić za pomocą różnic funkcji $f(x)$. Albowiem

$$[x_0 x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$[x_1 x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_1}{h},$$

.....

$$[x_i x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta y_i}{1!h} \quad \text{dla } i=0, 1, \dots, n-1,$$

następnie

$$[x_0 x_1 x_2] = \frac{[x_0 x_1] - [x_1 x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{\frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

i ogólnie

$$(44) \quad [x_i x_{i+1} x_{i+2} \dots x_{i+j}] = \frac{\Delta^j y_i}{j! h^j}.$$

Jeżeli zatem funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 pochodną $f^{(j)}(x_0)$, to

$$\lim_{h \rightarrow 0} [x_i x_{i+1} x_{i+2} \dots x_{i+j}] = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}.$$

Ilorazy różnicowe grają zatem w rachunku różnicowym podobną rolę, jak współczynniki wzoru Taylora w rachunku różniczkowym.