

## ROZDZIAŁ I

### WSTĘPNE WIADOMOŚCI Z TEORII BŁĘDÓW

#### A. Teoria błędów maksymalnych

§ 1. Błąd bezwzględny i błąd względny wartości przybliżonej. We wszystkich naukach eksperymentalnych mamy do czynienia z wartościami przybliżonymi. Dokonywując jakiegokolwiek pomiaru, np. mierząc planimetrem powierzchnię liścia, otrzymujemy na ogół wynik przybliżony. Możemy się o tym przekonać powtarzając pomiar. Uzyskane wyniki będą na ogół różne. *Dokładna wartość* mierzonej wielkości nie tylko że nie jest nam znana, ale mielibyśmy nawet poważne trudności metodologiczne, gdybyśmy chcieli zdefiniować to pojęcie. W dalszych rozważaniach będziemy jednak mówili o wartości dokładnej bez precyzowania tego pojęcia. Można ją rozumieć np. jako wynik znacznie dokładniejszego pomiaru.

Różnicę  $\delta a$  pomiędzy dokładną wartością  $A$  wielkości mierzonej i jej wartością przybliżoną  $a$

$$(1) \quad \delta a = A - a$$

nazywamy *błędem wartości przybliżonej*  $a$ . Nie znając wartości dokładnej  $A$  nie możemy znać również błędu  $\delta a$ <sup>1)</sup>. Dlatego zazwyczaj wprowadzamy inną wielkość zwaną błędem bezwzględnym. *Błędem bezwzględnym* wartości przybliżonej  $a$  nazwiemy każdą liczbę nieujemną  $\Delta a$ , o której wiemy, że spełnia nierówność

$$(2) \quad |\delta a| = |A - a| \leq \Delta a.$$

W praktyce staramy się oczywiście dla danego przybliżenia  $a$  określić możliwie mały błąd bezwzględny  $\Delta a$ .

<sup>1)</sup> Jako przypadek, w którym znamy zarówno dokładną wartość, jak i błąd przybliżenia, można podać przykład przybliżenia przez zaokrąglenie. Jeżeli zysk pewnego przedsiębiorstwa w r. 1952 jest  $Z = 428\,133,57$  zł, to przybliżona wartość  $z = 428\,000$  zł jest obarczona błędem  $\delta z = 133,57$  zł.

Jeśli znamy wartość przybliżoną  $a$  i jej błąd bezwzględny  $\Delta a$ , to możemy za pomocą równoważnej (2) nierówności

$$(3) \quad a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$$

określić przedział, w którym zawiera się nieznana wartość dokładna  $A$ . W przypadkach prostszych pomiarów błąd bezwzględny jest wyznaczony przez dokładność przyrządu pomiarowego. Mierzac np. długość ławy optycznej taśmą z podziałką co 1 cm nie popełniamy błędu większego niż odstęp między sąsiednimi podziałkami i przy powtarzaniu pomiaru otrzymamy zawsze ten sam wynik. W innych przypadkach możemy się zorientować co do wielkości błędu bezwzględnego powtarzając pomiar i badając rozrzut uzyskanych wyników. Zagadnienie to omówimy dokładniej w § 8.

Błąd bezwzględny nie charakteryzuje nam jeszcze dostatecznie dokładności pomiaru. Jeżeli z jednakowym błędem bezwzględnym  $\Delta a = 1$  cm zmierzmy wysokość wieży i długość gwoźdźcia, to pierwszy pomiar uznamy za bardzo dokładny, a drugi za mało dokładny. Dla lepszego scharakteryzowania dokładności pomiaru wprowadzimy pojęcie błędu względnego. *Błędem względnym*  $\varepsilon a$  przybliżonej wartości  $a$  będziemy nazywali stosunek błędu bezwzględnego  $\Delta a$  do wartości bezwzględnej  $|a|$

$$(4) \quad \varepsilon a = \frac{\Delta a}{|a|}, \quad a \neq 0.$$

Zwracamy uwagę, że w odróżnieniu od błędu bezwzględnego, który ma wymiar ten sam co i przybliżona wartość  $a$ , błąd względny jest wielkością niemianowaną i bywa często wyrażany w procentach. Stąd na oznaczenie błędu względnego wyrażonego w procentach używa się często nazwy *błąd procentowy*. Termin ten jest jednak w praktyce źródłem wielu nieporozumień i nie będziemy go używali. Stosując symbol  $\%$  będziemy go rozumieli jako skrócony zapis ułamka  $1/100$  i wyrażając błąd względny w procentach nie będziemy wprowadzali specjalnego terminu.

Posługując się błędem względnym możemy napisać nierówności (2) i (3) w postaci

$$(5) \quad |A - a| \leq |a| \varepsilon a$$

oraz

$$(6) \quad \begin{aligned} a(1 - \varepsilon a) &\leq A \leq a(1 + \varepsilon a) & \text{dla } a > 0, \\ a(1 + \varepsilon a) &\leq A \leq a(1 - \varepsilon a) & \text{dla } a < 0. \end{aligned}$$

Nierówności te podają oszacowanie nieznanej wartości dokładnej  $A$ , gdy znana jest wartość przybliżona  $a$  i jej błąd względny  $\varepsilon a$ .

PRZYKŁAD 1. Z dokładnością do 1 cm zmierzono wysokość wieży uzyskując wynik  $h=62\text{ m } 48\text{ cm}$  i z tą samą dokładnością zmierzono długość gwoźdźcia z wynikiem  $l=7\text{ cm}$ . Błąd bezwzględny obu pomiarów jest równy  $\Delta h=\Delta l=1\text{ cm}$ , natomiast błędy względne różnią się znacznie. Mamy

$$\varepsilon h = \frac{1}{6248} \approx 0,00016 = 0,016\text{‰}, \quad \varepsilon l = \frac{1}{7} \approx 0,14 = 14\text{‰}.$$

PRZYKŁAD 2. W wyniku ważenia z dokładnością do 0,005 g uzyskano dla ciężaru  $Q$  naczynia kalorymetrycznego wartość przybliżoną  $a=127,085\text{ g}$ . Błąd bezwzględny pomiaru jest  $\Delta a=0,005\text{ g}$ , błąd względny

$$\varepsilon a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,005}{127,085} \approx 0,00004 = 0,004\text{‰}.$$

Podając dowolną wartość przybliżoną powinniśmy zawsze podawać jej błąd. Przybliżona wartość bez podania błędu jest bezużyteczna i wyciąganie na jej podstawie jakichkolwiek wniosków praktycznych jest nieuzasadnione. Liczbę przybliżoną wraz z błędem bezwzględnym lub względnym określamy odpowiednio nierównościami (3) i (6) albo wzorami

$$(7) \quad A = a \pm \Delta a \quad \text{lub} \quad A = a(1 \pm \varepsilon a),$$

które należy rozumieć jako skrócony zapis nierówności (3) i (6). Tak więc w przykładzie 2 powiemy, że ciężar  $Q$  naczynia kalorymetrycznego jest

$$Q = 127,085\text{ g} \pm 0,005\text{ g} \quad \text{lub} \quad Q = 127,085(1 \pm 0,00004)\text{ g}.$$

Tam gdzie wykonujemy dużo rachunków na liczbach przybliżonych, warto jest jeszcze bardziej uprościć ich zapis. W dalszym tekście będziemy często zapisywali błąd bezwzględny bezpośrednio nad wartością przybliżoną. Będziemy przy tym zwykle podawali tylko cyfry znaczące błędu bezwzględnego umieszczając je nad odpowiednimi miejscami dziesiętnymi liczby przybliżonej. Przy takim zapisie rozpatrywany poprzednio ciężar naczynia kalorymetrycznego jest

$$Q = 127,085 \overset{5}{\text{g}}.$$

W praktyce dokładność liczby przybliżonej określa się także często przez podanie ilości dokładnych cyfr. Liczba przybliżona ma  $n$  cyfr dokładnych, jeśli jej błąd bezwzględny nie przewyższa jedności na  $n$ -tym z kolei miejscu jej rozwinięcia dziesiętnego, licząc od pierwszej cyfry różnej od zera. Jeżeli np.  $a=15,672$  z czterema cyframi dokładnymi,

to  $\Delta a = 0,01$  ( $a = 15,672$ ). Terminu ilość cyfr dokładnych nie należy rozumieć dosłownie. Na przykład liczba 0,0799 jest wartością przybliżoną liczby 0,0800 z trzema cyframi dokładnymi, mimo że wszystkie jej cyfry znaczące są różne od odpowiednich cyfr liczby dokładnej.

Znając ilość cyfr dokładnych możemy oszacować błąd względny liczby przybliżonej i na odwrót, znając błąd względny możemy obliczyć ilość dokładnych cyfr danej liczby przybliżonej. Jeżeli liczba  $a$  ma  $n$  cyfr dokładnych, to za jej błąd bezwzględny możemy przyjąć

$$(8) \quad \Delta a = 10^{s-n+1},$$

gdzie  $s$  jest cechą logarytmu dziesiętnego liczby  $|a|$ . Wtedy możemy, uwzględniając nierówność  $10^s \leq |a| < 10^{s+1}$ , oszacować błąd względny

$$(9) \quad 10^{-n} = \frac{10^{s-n+1}}{10^{s+1}} < \varepsilon a = \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{10^{s-n+1}}{|a|} \leq \frac{10^{s-n+1}}{10^s} = 10^{-n+1}.$$

Możemy uzyskać dokładniejsze oszacowanie, jeżeli znamy pierwszą cyfrę znaczącą  $c$  liczby  $a$ ; wtedy  $c10^s \leq |a| < (c+1)10^s$  i

$$(10) \quad \frac{10^{-n+1}}{c+1} < \varepsilon a \leq \frac{10^{-n+1}}{c}.$$

Jeżeli znamy błąd względny  $\varepsilon a$ , a błąd bezwzględny jest określony wzorem (8), to

$$(11) \quad 10^{s+[\log \varepsilon a]} < 10^{s+\log \varepsilon a} = 10^s \varepsilon a \leq \Delta a = |a| \varepsilon a < < 10^{s+1} \varepsilon a = 10^{s+1+\log \varepsilon a} \leq 10^{s+[\log \varepsilon a]+2},$$

gdzie  $[\log \varepsilon a]$  oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą niż  $\log \varepsilon a$ . Porównując wzory (8) i (11) otrzymujemy oszacowanie ilości cyfr dokładnych  $n$  liczby  $a$

$$-[\log \varepsilon a] - 1 < n < -[\log \varepsilon a] + 1,$$

skąd

$$(12) \quad n = -[\log \varepsilon a].$$

Istnieje konwencja specjalnego zapisu liczb przybliżonych, dzięki której można określić ich dokładność bez osobnego podawania błędu czy ilości cyfr dokładnych. Konwencja ta polega na podawaniu tylko cyfr dokładnych. Tak zapisana liczba 8,452 ma cztery cyfry dokładne. Jeśli liczba 120000 ma tylko trzy cyfry dokładne, to niedokładne zera zastępujemy odpowiednią potęgą liczby 10, pisząc  $120 \cdot 10^3$  lub też  $1,20 \cdot 10^5$ , a dla zaznaczenia, że liczba 0,2 ma cztery cyfry dokładne, piszemy 0,2000. Konwencja powyższa nie dotyczy jednak obliczeń pomocniczych, gdzie nieraz wypisujemy więcej cyfr znaczących danej liczby przybliżo-

nej, niż ma ona cyfr dokładnych, aby nie powiększać błędów, wynikających z działań przybliżonych.

Przy odrzucaniu zbytecznych miejsc dziesiętnych stosuje się zwykle tzw. *regułę dopełnienia*. W myśl tej reguły, odrzucając zbędne miejsca dziesiętne, ostatnią pozostawioną cyfrę zwiększamy o jedność, jeżeli pierwsza odrzucona cyfra jest nie mniejsza niż 5 i pozostawiamy ją bez zmiany w przypadku przeciwnym, tj. gdy pierwsza odrzucona cyfra jest mniejsza niż 5. W ten sposób liczbę  $\pi = 3,14159\dots$  zaokrąglimy do czterech cyfr pisząc  $\pi \approx 3,142$  lub do trzech cyfr pisząc  $\pi \approx 3,14$ . Reguła dopełnienia gwarantuje nam, że błąd bezwzględny uzyskanego przybliżenia nie przewyższa połowy jedności na ostatnim dziesiętnym miejscu znaczącym. Na przykład odczytując z tablic, które są na ogół sporządzane z uwzględnieniem reguły dopełnienia, przybliżoną wartość  $\log 3 \approx 0,4771$  możemy przyjąć jako błąd bezwzględny liczbę  $0,00005 = 5 \cdot 10^{-5}$ , co możemy

05

również zapisać  $\log 3 = 0,4771$ .

**§ 2. Błąd funkcji jednej zmiennej.** Mierzone bezpośrednio wielkości fizyczne służą nam zazwyczaj do obliczania innych. Wyniki działań wykonanych na liczbach przybliżonych lub ogólniej — wartości funkcji argumentów przybliżonych, są także przybliżone. Musimy więc umieć obliczać *błąd wartości funkcji*, gdy znane są błędy jej argumentów.

Niech  $x$  będzie wartością przybliżoną wielkości  $X$  z błędem bezwzględnym  $\Delta x$ . Niech  $y = f(t)$  będzie daną funkcją, ciągłą w przedziale  $[x - \Delta x, x + \Delta x]^1$ . Niech ponadto

$$F^+ = \max_{x - \Delta x \leq t \leq x + \Delta x} f(t), \quad F^- = \min_{x - \Delta x \leq t \leq x + \Delta x} f(t).$$

Wtedy liczba  $(F^+ + F^-)/2$  przybliży wartość  $Y = f(X)$  z błędem bezwzględnym równym  $(F^+ - F^-)/2$ .

Zazwyczaj jednak inaczej szacujemy błąd przybliżonej wartości funkcji  $Y = f(X)$ . Niech  $f(t)$  będzie funkcją mającą ciągłą pochodną w przedziale  $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ . Jeżeli przyjmiemy liczbę  $y = f(x)$  za wartość przybliżoną liczby  $Y = f(X)$ , to z twierdzenia o wartości średniej mamy

$$Y - y = f(X) - f(x) = f'(\xi)(X - x).$$

Stąd za błąd bezwzględny  $\Delta y$  wartości przybliżonej  $y$  możemy przyjąć

$$(13) \quad \Delta y = M_1 \Delta x,$$

<sup>1)</sup> Symbol  $[x - \Delta x, x + \Delta x]$  oznacza przedział domknięty, tzn. zbiór tych wszystkich wartości zmiennej  $t$ , dla których jest  $x - \Delta x \leq t \leq x + \Delta x$ . Symbolem  $(x - \Delta x, x + \Delta x)$  oznaczać będziemy przedział otwarty, tzn. zbiór tych wszystkich wartości zmiennej  $t$ , dla których jest  $x - \Delta x < t < x + \Delta x$ .

gdzie  $M_1$  oznacza liczbę nie mniejszą od maksimum wartości bezwzględnej pochodnej  $f'(t)$  w przedziale  $[x-\Delta x, x+\Delta x]$ , tzn.

$$M_1 \geq \max_{x-\Delta x \leq t \leq x+\Delta x} |f'(t)|.$$

Jeżeli funkcja  $f(t)$  posiada w przedziale  $[x-\Delta x, x+\Delta x]$  ciągłe pochodne do rzędu  $n$  włącznie, to na mocy wzoru Taylora mamy

$$\begin{aligned} Y - y = f(X) - f(x) &= \\ &= f'(x)(X-x) + \frac{1}{2!} f''(x)(X-x)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(X-x)^n, \end{aligned}$$

gdzie  $\xi$  jest liczbą zawartą między  $X$  i  $x$ . Stąd

$$|Y - y| \leq |f'(x)| \Delta x + \frac{1}{2!} |f''(x)| \Delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!} |f^{(n)}(\xi)| \Delta x^n$$

i jako błąd bezwzględny możemy przyjąć

$$(14) \quad \Delta y = |f'(x)| \Delta x + \frac{1}{2!} |f''(x)| \Delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!} M_n \Delta x^n,$$

gdzie  $M_n$  jest liczbą spełniającą nierówność

$$M_n \geq \max_{x-\Delta x \leq t \leq x+\Delta x} |f^{(n)}(t)|.$$

Zazwyczaj już liczba  $M_2 \Delta x^2$  jest tak mała w porównaniu z  $|f'(x)| \Delta x$ , że błąd  $\Delta y$  jest rzędu  $|f'(x)| \Delta x$ .

Ze wzoru (14) dla  $n=2$  łatwo uzyskać wygodny wzór na błąd względny

$$\begin{aligned} (15) \quad \varepsilon y = \frac{\Delta y}{|y|} &= \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \Delta x + \frac{1}{2} M_2 \frac{\Delta x^2}{|f(x)|} = \\ &= \left| \frac{d \ln |f(x)|}{dx} \right| \Delta x + \frac{1}{2} M_2 \frac{\Delta x^2}{|f(x)|}. \end{aligned}$$

Gdy liczba  $\frac{1}{2} M_2 \frac{\Delta x^2}{|f(x)|}$  jest mała w porównaniu z  $\left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \Delta x$ , wtedy błąd  $\varepsilon y$  jest rzędu  $\left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \Delta x$ , czyli rzędu  $\Delta [\ln |f(x)|]$ .

**PRZYKŁAD 3.** Obliczyć objętość  $V$  zbiornika sześciennego o krawędzi  $L = 1,24 \text{ m} \pm 0,005 \text{ m}$ .

Niech  $l = 1,24 \text{ m}$ . Mamy

$$V = L^3, \quad v = l^3 = (1,24 \text{ m})^3, \quad \Delta v = M_1 \Delta l,$$

gdzie

$$M_1 = 3 \max_{1,235 \leq l \leq 1,245} l^2 = 3(1,245 \text{ m})^2, \quad \Delta l = 0,005 \text{ m};$$

stąd

$$V \approx v = 1,906624 \text{ m}^3, \quad \Delta v = 0,02325 \dots \text{ m}^3.$$

Oczywiście nie ma sensu podawać wyniku i jego błędu ze wszystkimi wyliczonymi cyframi. Ponieważ  $1,906624 \text{ m}^3 = 1,907 \text{ m}^3 - 0,000376 \text{ m}^3$ , więc możemy zapisać uzyskany wynik w postaci  $V = 1,907 \text{ m}^3 - 0,000376 \text{ m}^3 \pm \pm 0,02325 \dots \text{ m}^3$ , a więc i w postaci

$$V = 1,907 \text{ m}^3 \pm 0,024 \text{ m}^3.$$

Zbyteczne cyfry wyniku można było odrzucić już wcześniej w czasie rachunku upraszczając w ten sposób i skracając obliczenia. Jest to szczególnie ważne przy większych pracach rachunkowych, gdzie niedoświadczeni rachmistrze nieraz tracą dużo czasu na obliczanie niepotrzebnych miejsc dziesiętnych. Pamiętać jednak należy, że wszelkie zaokrąglania liczby  $a$  pociągają za sobą zmiany błędu bezwzględnego  $\Delta a$ .

PRZYKŁAD 4. Obliczyć błąd logarytmu dziesiętnego liczby o pięciu dokładnych cyfrach.

Niech  $x$  będzie liczbą dodatnią o pięciu cyfrach dokładnych. Ze wzoru (9) otrzymujemy

$$\varepsilon x = \frac{\Delta x}{x} \leq 10^{-4},$$

a ze wzoru (14)

$$(16) \quad \Delta \log x = \frac{M}{x} \Delta x + \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{(x - \Delta x)^2} \Delta x^2 = M \varepsilon x + \frac{M}{2} (\varepsilon x)^2,$$

gdzie  $M = \log e = 0,43429 \dots$  i  $\varepsilon x = \frac{\Delta x}{x - \Delta x} = \frac{\varepsilon x}{1 - \varepsilon x}$ .

Ze wzoru (16) widzimy, że dla małych  $\varepsilon x$  błąd bezwzględny logarytmu jest w przybliżeniu proporcjonalny do błędu względnego liczby logarytmowanej. Tę ważną własność mają logarytmy o dowolnej zasadzie.

Ponieważ  $M \varepsilon x + \frac{M}{2} (\varepsilon x)^2 < 0,43429 \dots \cdot (10^{-4} + 0,6 \cdot 10^{-8})$ , więc możemy w naszym przykładzie przyjąć

$$\Delta \log x = 0,435 \cdot 10^{-4}.$$

Jeśli liczba  $x$  ma pięć cyfr dokładnych zgodnie z prawem dopełnienia, to  $\varepsilon x \leq 0,5 \cdot 10^{-4}$  oraz

$$\Delta \log x = 0,218 \cdot 10^{-4}.$$

Błąd bezwzględny logarytmu może więc osiągać dwie jednostki na piątym miejscu po przecinku. Widzimy stąd, że do obliczania logarytmów liczb z pięcioma cyframi dokładnymi nie warto używać tablic logarytmów dokładniejszych niż pięciocyfrowe. Ogólnie do  $n$ -cyfrowych liczb nie warto używać więcej niż  $n$ -cyfrowych tablic logarytmicznych.

**§ 3. Błąd funkcji wielu zmiennych.** Zajmiemy się obecnie funkcjami wielu zmiennych. Niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będą odpowiednio wartościami przybliżonymi wielkości  $X_1, X_2, \dots, X_n$  z błędami bezwzględnymi  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . Niech  $y = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  będzie funkcją ciągłą w kostce  $n$ -wymiarowej  $x_i - \Delta x_i \leq t_i \leq x_i + \Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Niech ponadto

$$F^+ = \max_{\substack{x_i - \Delta x_i \leq t_i \leq x_i + \Delta x_i \\ i=1,2,\dots,n}} f(t_1, t_2, \dots, t_n), \quad F^- = \min_{\substack{x_i - \Delta x_i \leq t_i \leq x_i + \Delta x_i \\ i=1,2,\dots,n}} f(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Wtedy liczba  $(F^+ + F^-)/2$  przybliży wartość  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  z błędem bezwzględnym  $(F^+ - F^-)/2$ .

Zazwyczaj jednak inaczej szacujemy błąd przybliżenia wartości  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Niech  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  będzie funkcją mającą w danej kostce  $n$ -wymiarowej (poprzednio określonej) ciągle pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych. Jeżeli liczbę  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  przyjmiemy za wartość przybliżoną liczby  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , to z twierdzenia o wartości średniej dla funkcji wielu zmiennych mamy

$$\begin{aligned} Y - y &= f(X_1, X_2, \dots, X_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= f_{t_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_n)(X_1 - x_1) + f_{t_2}(X_1, \xi_2, \dots, x_n)(X_2 - x_2) + \\ &\quad + \dots + f_{t_n}(X_1, X_2, \dots, \xi_n)(X_n - x_n), \end{aligned}$$

gdzie  $f_{t_i}(t_1, t_2, \dots, t_n)$  oznacza pochodną cząstkową funkcji  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  względem zmiennej  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), a  $\xi_i$  oznacza liczbę leżącą między  $X_i$  i  $x_i$ . Stąd za błąd bezwzględny  $\Delta y$  możemy przyjąć

$$(17) \quad \Delta y = M'_1 \Delta x_1 + M'_2 \Delta x_2 + \dots + M'_n \Delta x_n,$$

$$M'_i \geq \max_{\substack{x_k - \Delta x_k \leq t_k \leq x_k + \Delta x_k \\ k=1,2,\dots,n}} |f_{t_i}(t_1, t_2, \dots, t_n)|.$$

Jeżeli funkcja  $y = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ma w danej kostce  $n$ -wymiarowej ciągle pochodne cząstkowe aż do  $n$ -tego rzędu włącznie względem wszystkich zmiennych  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , to na mocy wzoru Taylora

$$\begin{aligned} Y - y &= f(X_1, X_2, \dots, X_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \dots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)!} + \frac{(d^n f)_\xi}{n!}, \end{aligned}$$

gdzie

$$1^\circ d^k f = (f_{t_1}(X_1 - x_1) + f_{t_2}(X_2 - x_2) + \dots + f_{t_n}(X_n - x_n))^k;$$

w równości tej należy po podniesieniu sumy do  $k$ -tej potęgi zastąpić iloczyny pochodnych cząstkowych odpowiednimi pochodnymi cząstkowymi

$k$ -tego rzędu, np. iloczyn  $f_{t_1}^2 f_{t_2}^3 f_{t_3}$  należy zastąpić pochodną  $\frac{\partial^6 f}{\partial t_1^2 \partial t_2^3 \partial t_3}$ ,

a następnie wziąć wartości tych pochodnych dla  $t_i = x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),

$2^\circ (d^n f)_\xi$  jest liczbą, jaką otrzymujemy w miejsce  $d^n f$ , jeżeli zamiast wartości pochodnych dla  $t_i = x_i$  weźmiemy wartości tych pochodnych dla  $t_i = \xi_i$ , gdzie  $\xi_i$  jest pewną liczbą zawartą między  $X_i$  i  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Możemy wtedy przyjąć za błąd bezwzględny liczbę

$$(18) \quad \Delta y = \frac{\overline{df}}{1!} + \frac{\overline{d^2 f}}{2!} + \dots + \frac{\overline{d^{n-1} f}}{(n-1)!} + \frac{M_n}{n!},$$

gdzie

$1^\circ \overline{d^k f}$  jest liczbą, którą się oblicza analogicznie jak liczbę  $d^k f$ , z tą jedyną różnicą, że zamiast wartości pochodnych cząstkowych dla  $t_i = x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) należy wziąć ich wartości bezwzględne, a zamiast różnic  $X_i - x_i$  błędy bezwzględne  $\Delta x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),

$2^\circ M_n$  jest liczbą, którą się oblicza analogicznie jak liczbę  $d^n f$ , z tą różnicą, że zamiast wartości pochodnych cząstkowych w punkcie  $t_i = x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) należy wziąć liczby nie mniejsze od odpowiednich maksimum wartości bezwzględnych tych pochodnych w danej kostce  $n$ -wymiarowej, a zamiast różnic  $X_i - x_i$  — błędy bezwzględne  $\Delta x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Zazwyczaj liczba  $M_2$  jest już tak mała, że błąd  $\Delta y$  jest rzędu  $\overline{df}/1!$ . Przyjmujemy wtedy wzór (17) lub dokładniej

$$(19) \quad \Delta y = \overline{df} + \frac{M_2}{2} = |f_{t_1}| \Delta x_1 + |f_{t_2}| \Delta x_2 + \dots + |f_{t_n}| \Delta x_n + \frac{1}{2} M_2,$$

gdzie  $|f_{t_i}| = |f_{t_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)|$ . Poprawkę  $M_2/2$  można zazwyczaj obliczyć w pamięci.

Błąd względny  $\varepsilon y$  będziemy obliczali ze wzoru

$$(20) \quad \varepsilon y = \frac{\Delta y}{|y|} = \left| \frac{f_{t_1}}{f} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{f_{t_2}}{f} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{f_{t_n}}{f} \right| \Delta x_n + \frac{M_2}{|2f|} =$$

$$= \left| \frac{\partial \ln |f|}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial \ln |f|}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial \ln |f|}{\partial x_n} \right| \Delta x_n + \frac{M_2}{|2f|},$$

gdzie  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a symbol  $\frac{\partial \ln |f|}{\partial x_i}$  oznacza wartość funkcji  $\frac{\partial \ln |f(t_1, t_2, \dots, t_n)|}{\partial t_i}$  dla  $t_1 = x_1, t_2 = x_2, \dots, t_n = x_n$ .

Wzór (20) otrzymuje się ze wzoru (19).

Gdy poprawka  $M_2/|2f|$  jest mała w porównaniu z poprzedzającą ją we wzorze (20) sumą, wtedy  $\varepsilon y$  jest rzędu

$$\left| \frac{\partial \ln |f|}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial \ln |f|}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial \ln |f|}{\partial x_n} \right| \Delta x_n,$$

a więc rzędu  $\Delta \ln |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|$ .

**§ 4. Błędy działań arytmetycznych.** Zanim przejdziemy do szczegółowych przykładów zastosowania (17), (18), (19) i (20), zajmiemy się obecnie błędami działań arytmetycznych.

**Błąd sumy.** Podstawiając do wzoru (17)

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad \text{ i } \quad M'_1 = M'_2 = \dots = M'_n = 1$$

otrzymujemy

$$(21) \quad \Delta(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n.$$

Zatem *suma błędów bezwzględnych składników sumy jest błędem bezwzględnym*.

Błąd względny sumy wyraża się wzorem

$$(22) \quad \varepsilon(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n}{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|} = \\ = \frac{|x_1| \varepsilon x_1 + |x_2| \varepsilon x_2 + \dots + |x_n| \varepsilon x_n}{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|}.$$

Jeżeli wszystkie liczby  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) mają ten sam znak, to

$$(23) \quad \varepsilon(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{x_1 \varepsilon x_1 + x_2 \varepsilon x_2 + \dots + x_n \varepsilon x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

Błąd względny sumy jest wtedy średnią ważoną błędów względnych składników. Spełnia on też wtedy oczywistą nierówność

$$\min_i \varepsilon x_i \leq \varepsilon(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leq \max_i \varepsilon x_i.$$

Z ostatniego wzoru wynika, że suma jednakowo dokładnych składników (tj. składników o jednakowym błędzie względnym) o tym samym znaku ma błąd względny taki, jak każdy ze składników. Sumując np. liczby z sześcioma dokładnymi cyframi nie warto podawać więcej niż sześć cyfr w ich sumie. Warto także pamiętać, że na ogół bez uszczerbku dokładności wyniku można przy sumowaniu pominąć z zachowaniem prawa dopełnienia cyfry składników stojące na tych miejscach dziesiętnych, które nie są dokładne w którymkolwiek ze składników, np.

zamiast	sumujemy
04	04
853,6	853,6
07*	07
314,32	314,32
11	05
76,587	76,59
+ 08	03
0,6375	0,64
4818	55 6
1245,1445	1245,15 = 1245,15

Zasada ta może być niekiedy niepraktyczna, gdy mamy dużo składników. Stosując ją powiększamy wtedy niepotrzebnie błąd sumy.

Błąd wielokrotności. Ze wzorów (21) i (22) wynikają dla  $n$  naturalnego równości

$$\Delta(nx) = n \Delta x, \quad \varepsilon(nx) = \frac{n \Delta x}{|nx|} = \frac{\Delta x}{|x|} = \varepsilon x.$$

Wychodząc ze wzoru (13) łatwo sprawdzić, że dla dowolnej dokładnej liczby rzeczywistej  $a$  spełnione są analogiczne równości

$$(24) \quad \Delta(ax) = |a| \Delta x, \quad \varepsilon(ax) = \varepsilon x.$$

Błąd różnicy. Na podstawie wzorów (21) i (24) mamy

$$(25) \quad \Delta(x_1 - x_2) = \Delta x_1 + \Delta(-x_2) = \Delta x_1 + \Delta x_2.$$

Za błąd bezwzględny różnicy można więc przyjąć sumę błędów bezwzględnych odjemnej i odjemnika. Błąd względny różnicy wyraża się wzorem

$$(26) \quad \varepsilon(x_1 - x_2) = \frac{\Delta(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{|x_1 - x_2|} = \frac{|x_1| \varepsilon x_1 + |x_2| \varepsilon x_2}{|x_1 - x_2|}.$$

Ze wzoru (26) widzimy, że przy małych błędach względnych odjemnej i odjemnika błąd względny różnicy może być duży, jeśli tylko  $x_1$  i  $x_2$  mało się różnią między sobą. O tym trzeba pamiętać i w obliczeniach unikać różnic dwóch bliskich wielkości. Różnice takie występują najczęściej tam, gdzie obliczamy przyrost funkcji w małym przedziale  $(x_1, x_2)$ . Zamiast obliczać różnicę wartości funkcji w końcach przedziału (trzeba je pracowicie obliczyć z dużą dokładnością, którą tracimy przy odejmowaniu), warto jest wtedy na ogół skorzystać z przybliżonego wyrażenia za pomocą odpowiedniej sumy częściowej rozwinięcia Taylora

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x_2 - x_1)^2 + \dots$$

Błąd iloczynu. Podstawiając we wzorze (18)  $y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$  i przyjmując  $n = 3$ , a następnie  $M_3 = 0$ , otrzymujemy

$$(27) \quad \Delta y = \Delta(x_1 x_2) = |x_2| \Delta x_1 + |x_1| \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta x_2,$$

skąd

$$(27a) \quad \varepsilon(x_1 x_2) = \frac{\Delta(x_1 x_2)}{|x_1 x_2|} = \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon x_1 \varepsilon x_2.$$

Jak widać ze wzoru (27a), gdy liczby  $\varepsilon x_1$  i  $\varepsilon x_2$  są małe, to błąd względny iloczynu jest w przybliżeniu równy sumie błędów względnych czynników. Błąd bezwzględny iloczynu można obliczać z błędu względnego

$$\Delta(x_1 x_2) = |x_1 x_2| \varepsilon(x_1 x_2) = |x_1 x_2| (\varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon x_1 \varepsilon x_2).$$

Zamiast wzoru (27) stosujemy często w praktyce równoważny mu wzór

$$(27b) \quad \Delta(x_1 x_2) = (|x_2| + \Delta x_2) \Delta x_1 + |x_1| \Delta x_2.$$

01                      02

PRZYKŁAD 5. Obliczyć  $3,1416 \cdot 2,7183$ .

Mamy

$$3,1416 \cdot 2,7183 = 8,539811 \dots$$

i na mocy (27b) możemy przyjąć błąd bezwzględny

$$2 \cdot 3,15 + 1 \cdot 2,72 = 9,02$$

jednostek na 5 miejscu dziesiętnym. Stąd

$$\begin{array}{cccc} 01 & 02 & 902 & 11 \\ 3,1416 \cdot 2,7183 = 8,539811 \dots = 8,5398 \end{array}$$

Błąd potęgi. Ze wzoru (14) dla  $n = 2$  i  $y = f(x) = x^a$ , gdzie  $a$  jest dowolną liczbą rzeczywistą, a  $x > \Delta x$ , wynika, że

$$\Delta(x^a) = |a| x^{a-1} \Delta x + \frac{1}{2} M_2 \Delta x^2,$$

gdzie

$$\begin{aligned} M_2 &\geq \max_{x - \Delta x < t < x + \Delta x} |a(a-1)t^{a-2}| = |a(a-1)| \max_{x - \Delta x < t < x + \Delta x} t^{a-2} = \\ &= \begin{cases} a(a-1)(x + \Delta x)^{a-2} & \text{dla } a \geq 2, \\ |a(a-1)|(x - \Delta x)^{a-2} & \text{dla } a \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Przyjmując

$$M_2 = \begin{cases} a(a-1)(x + \Delta x)^{a-2} & \text{dla } a \geq 2, \\ |a(a-1)|(x - \Delta x)^{a-2} & \text{dla } a \leq 2 \end{cases}$$

otrzymujemy błąd względny

$$(28) \quad \varepsilon(x^a) = \frac{\Delta(x^a)}{x^a} = |a|\varepsilon x + \begin{cases} \frac{a(a-1)}{2}(1+\varepsilon x)^{a-2}\varepsilon x^2 & \text{dla } a \geq 2, \\ \frac{|a(a-1)|}{2}(1-\varepsilon x)^{a-2}\varepsilon x^2 & \text{dla } a \leq 2. \end{cases}$$

Jak widać z tego wzoru, dla małych  $\varepsilon x$  błąd względny potęgi o wykładniku  $a$  jest większy w przybliżeniu  $|a|$  razy od błędu względnego podstawy potęgi.

Błąd odwrotności. Oszacowanie błędu względnego odwrotności można otrzymać ze wzoru (28) podstawiając w nim  $a = -1$ . Jednak lepsze oszacowanie otrzymujemy w następujący sposób. Zakładamy, że  $|x| > \Delta x$ , czyli  $\varepsilon x < 1$ . Ponieważ

$$\max\left(\frac{1}{|x| - \Delta x} - \frac{1}{|x|}, \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x| + \Delta x}\right) = \frac{1}{|x| - \Delta x} - \frac{1}{|x|},$$

więc błąd odwrotności nie przekracza liczby

$$\frac{1}{|x| - \Delta x} - \frac{1}{|x|}$$

i za błąd bezwzględny można przyjąć każdą liczbę  $\Delta\left(\frac{1}{x}\right)$ , która spełnia warunek

$$(29) \quad \Delta\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{|x| - \Delta x} - \frac{1}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|(|x| - \Delta x)} = \frac{\varepsilon x}{|x|(1 - \varepsilon x)}.$$

Przyjmując  $\Delta(1/x) = \varepsilon x / (|x|(1 - \varepsilon x))$  otrzymujemy błąd względny

$$(30) \quad \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{|x|}} = |x| \Delta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\varepsilon x}{1 - \varepsilon x}.$$

Dla małych  $\varepsilon x$  błąd  $\varepsilon(1/x)$  jest rzędu  $\varepsilon x$ .

Błąd ilorazu. Korzystając ze wzorów (27) i (30) otrzymujemy wzór na błąd względny ilorazu. Mianowicie

$$(31) \quad \varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \varepsilon\left(x_1 \frac{1}{x_2}\right) = \varepsilon x_1 + \varepsilon\left(\frac{1}{x_2}\right) + \varepsilon x_1 \varepsilon\left(\frac{1}{x_2}\right) = \\ = \varepsilon x_1 + \frac{\varepsilon x_2}{1 - \varepsilon x_2} + \frac{\varepsilon x_1 \varepsilon x_2}{1 - \varepsilon x_2} = \frac{\varepsilon x_1 + \varepsilon x_2}{1 - \varepsilon x_2} \quad (\varepsilon x_2 < 1).$$



Dla małych  $\varepsilon x_2$  błąd względny ilorazu jest zatem w przybliżeniu równy sumie błędów względnych dzielnej i dzielnika.

Błąd bezwzględny ilorazu można oszacować z błędu względnego. Mamy

$$(31a) \quad \Delta \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \left| \frac{x_1}{x_2} \right| \varepsilon \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \left| \frac{x_1}{x_2} \right| \frac{\varepsilon x_1 + \varepsilon x_2}{1 - \varepsilon x_2} = \frac{\Delta x_1 + \left| \frac{x_1}{x_2} \right| \Delta x_2}{|x_2| - \Delta x_2}.$$

$$\text{PRZYKŁAD 6. Obliczyć } \frac{6,5347}{1,7709}.$$

Ponieważ

$$6,5347 : 1,7709 = 3,690044 \dots,$$

a na mocy (31a) możemy przyjąć błąd bezwzględny równy

$$\frac{7 + 3,70 \cdot 5}{1,77} < 14,5$$

jednostkom na piątym miejscu dziesiętnym po przecinku, więc

$$\frac{6,5347}{1,7709} = 3,690044 \dots = 3,690.$$

## § 5. Przykłady praktyczne.

PRZYKŁAD 7. Obliczyć błąd oporu  $R$  połączonych równolegle oporów  $R_1 = (24,6 \pm 0,2) \Omega$ ,  $R_2 = (32,0 \pm 0,3) \Omega$ ,  $R_3 = (42,0 \pm 0,5) \Omega$ .

Mamy

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3},$$

gdzie  $r_1 = 24,6 \Omega$ ,  $r_2 = 32,0 \Omega$ ,  $r_3 = 42,0 \Omega$ . Na mocy wzoru (21) i (29) przyjmujemy

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) \geq \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\varepsilon r_1}{1 - \varepsilon r_1} + \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\varepsilon r_2}{1 - \varepsilon r_2} + \frac{1}{r_3} \cdot \frac{\varepsilon r_3}{1 - \varepsilon r_3},$$

gdzie

$$\varepsilon r_1 = \frac{0,2}{24,6}, \quad \varepsilon r_2 = \frac{0,3}{32,0}, \quad \varepsilon r_3 = \frac{0,5}{42,0}.$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy  $1/r = 0,09571(1/\Omega)$  i przyjmujemy  $\Delta(1/r) = 0,001(1/\Omega)$  (uwzględniliśmy tu również błąd płynący z zaokrąglenia liczby  $1/r$ ). Zatem

$$\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{0,001}{0,09571} < 0,0105$$

i na mocy (29)

$$\Delta r = \Delta\left(\frac{1}{\frac{1}{r}}\right) = r \frac{0,0105}{1 - 0,0105} = r \, 0,01061 \dots$$

Przyjmujemy

$$r = \frac{1\Omega}{0,09571} = (10,45 \pm 0,002)\Omega, \quad \Delta r = 0,112\Omega.$$

Ostatecznie

$$R = (10,45 \pm 0,12)\Omega.$$

PRZYKŁAD 8. Obliczyć powierzchnię  $P$  kulki stalowej o masie

$$M = (56,42 \pm 0,01) \text{ g}$$

(gęstość stali  $D = (7,2 \pm 0,05) \text{ g/cm}^3$ ).

Ze wzorów na powierzchnię  $P$  i objętość  $V$  kuli o promieniu  $R$  dostajemy równości

$$P = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{M}{D},$$

skąd

$$P = \sqrt[3]{36\pi M^2 D^{-2}}.$$

Niech  $\pi = 3,14 \pm 0,002$ . Wprowadzamy przybliżenia

$$a = 3,14, \quad m = 56,42 \text{ g}, \quad d = 7,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

których błędy bezwzględne są

$$\Delta a = 0,002, \quad \Delta m = 0,01 \text{ g}, \quad \Delta d = 0,05 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3};$$

stąd obliczamy błędy względne

$$\varepsilon a = 0,00064, \quad \varepsilon m = 0,00018, \quad \varepsilon d = 0,0070.$$

Niech  $S = 36\pi M^2 D^{-2}$ ,  $s = 36am^2 d^{-2}$  i  $p = \sqrt[3]{s}$ .

Na mocy wzorów (27a), (28) i (24) przyjmujemy kolejno  $\varepsilon(m^2) = 0,00037$ ,  $\varepsilon(d^{-2}) = 0,015$ ,  $\varepsilon(36am^2) = 0,00102$ ,  $\varepsilon s = 0,0161$ . Stąd

$$S = \frac{36 \cdot 3,14 \cdot 56,42^2}{7,2^2} (1 \pm 0,0161) \text{ cm}^6 = 6940 (1 \pm 0,0165) \text{ cm}^6.$$

Przyjmujemy teraz  $s = 6940$ ,  $\varepsilon s = 0,0165$  i obliczamy na suwaku logarytmicznym, że

$$p = \sqrt[3]{s} = (19,1 \pm 0,05) \text{ cm}^2,$$

a na mocy wzoru (28) otrzymujemy  $\varepsilon p = 0,006$ , skąd  $\Delta p = p \varepsilon p < 0,115 \text{ cm}^2$ . Przyjmujemy ostatecznie  $p = 19,1 \text{ cm}^2$  oraz  $\Delta p = 0,17 \text{ cm}^2$ , skąd

$$P = (19,1 \pm 0,17) \text{ cm}^2.$$

Zwróćmy uwagę na to, że w ostatnim przykładzie oprócz błędu pomiaru masy uwzględnialiśmy także błędy przybliżenia stałej matematycznej  $\pi$  i stałej fizycznej  $D$ . Nieostrożny eksperymentator popelnia często błąd traktując odczytane z tablic wartości stałych fizycznych jako dokładne. Podobnie źródłem błędów jest bardzo rozpowszechnione przekonanie, że  $\pi = 3,14$ . Liczba 3,14 jest tylko przybliżoną wartością liczby  $\pi$  i w wielu precyzyjniejszych obliczeniach należy korzystać z dokładniejszych przybliżeń. Stałe matematyczne możemy zwykle uzyskać z dowolną dokładnością, natomiast dokładność stałych fizycznych jest zawsze ograniczona. W rozważanym przykładzie błąd gęstości stali  $D$  miał decydujący wpływ na błąd wyniku  $P$ . Gdybyśmy chcieli zmniejszyć błąd wyniku, musielibyśmy uzyskać przede wszystkim dokładniejszą wartość gęstości danego gatunku stali.

Rozpatrywaliśmy dotychczas przykłady obliczania błędu funkcji, gdy znane były błędy jej argumentów. Eksperymentatora interesuje jednak często przy projektowaniu doświadczeń zagadnienie odwrotne: z jaką dokładnością należy wyznaczyć wartości argumentów, aby z daną z góry dokładnością uzyskać wartość funkcji.

**PRZYKŁAD 9.** Z jaką dokładnością należy zmierzyć dwa boki i kąt między nimi zawarty, aby obliczone na podstawie tych pomiarów pole trójkąta miało błąd względny nie większy niż 1%.

Znając dwa boki trójkąta  $a, b$  i kąt między nimi zawarty  $\varphi$ , pole trójkąta obliczamy ze wzoru

$$(32) \quad P = \frac{1}{2} ab \sin \varphi.$$

Błąd względny pola  $P$  na podstawie wzorów (27) i (15) wyrazić można wzorem

$$\varepsilon P \approx \varepsilon a + \varepsilon b + \varepsilon \sin \varphi \approx \varepsilon a + \varepsilon b + \left| \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right| \Delta \varphi = \varepsilon a + \varepsilon b + |\operatorname{ctg} \varphi| \Delta \varphi.$$

Warunek, aby błąd wyniku  $\varepsilon P$  nie przekraczał 1%, daje nierówność

$$\varepsilon a + \varepsilon b + |\operatorname{ctg} \varphi| \Delta \varphi < 0,01,$$

którą muszą spełniać błędy pomiarów  $a, b$  i  $\varphi$ . Wartość 0,01 stojącą po prawej stronie należy rozdzielić na każdy ze składników strony lewej. Jeżeli nie mamy żadnych wiadomości o łatwości uzyskania odpowiednich dokładności poszczególnych argumentów, to każdemu składnikowi strony lewej przyporządkowujemy równą część strony prawej. Otrzymamy

$$\varepsilon a \leq 0,0033, \quad \varepsilon b \leq 0,0033, \quad |\operatorname{ctg} \varphi| \Delta \varphi \leq 0,0033.$$

Jeżeli kąt  $\varphi$  zawiera się w przedziale  $45^\circ \leq \varphi \leq 135^\circ$ , to  $|\operatorname{ctg} \varphi| \leq 1$  i można przyjąć

$$\Delta \varphi \leq 0,0033 \approx 11'.$$

Jeżeli więc zmierzmy dwa boki trójkąta z błędem względnym 0,33% i kąt między nimi zawarty (spełniający nierówność  $45^\circ \leq \varphi \leq 135^\circ$ ) z błędem bezwzględnym 11', to ze wzoru (32) obliczymy pole trójkąta z błędem względnym rzędu 1%.

Jeżeli z powodu trudności technicznych nie możemy zmierzyć kąta z taką dokładnością, to kosztem zwiększenia dokładności pomiarów boków możemy zwiększyć dopuszczalny błąd kąta. Możemy np. przyjąć

$$\varepsilon a = \varepsilon b = 0,001, \quad \Delta \varphi = 0,008 \approx 27'.$$

## B. Statystyczna teoria błędów

### § 6. Elementarne wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa.

Gdy powtarzamy  $n$ -krotnie pomiar pewnej wielkości fizycznej, uzyskujemy ciąg wartości przybliżonych  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , które — o ile nie popełniamy błędu systematycznego — są w pewien sposób skupione dookoła dokładnej wartości  $X$ . Na podstawie uzyskanych wyników chcemy znaleźć możliwie najlepsze przybliżenie nieznaney wartości dokładnej  $X$  i ocenić dokładność pomiarów. Zagadnienie to wymaga stosowania aparatu pojęciowego i twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa oraz przyjęcia dodatkowych założeń dotyczących mierzonej wielkości i pomiaru.

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia  $A$  jest miarą jego możliwości. Niech np. zdarzenie  $A$  polega na tym, że wynik pomiaru pewnej