

§ 56. Metody krakowianowe rozwiązywania układów równań liniowych. Niech będzie dany układ n równań z n niewiadomymi x_1, x_2, \dots, x_n

[illegible]

gdzie a_{ij} ($i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n+1$) są stałymi współczynnikami.
Jeśli wprowadzimy krakowiany

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}, \quad L = \begin{Bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{Bmatrix},$$

to układ (60) możemy zapisać za pomocą krakowianów

$$(61) \quad X(\tau A) = XA^* = L,$$

gdzie A^* oznacza — jak poprzednio — krakowian, jaki otrzymujemy z krakowianu A , zamieniając w nim wiersze z kolumnami.

Mamy stąd na mocy (54) i (54b)

$$X = L : A.$$

Do wykonania tego dzielenia potrzebny jest na ogół rozkład krakowianu A na czynniki

$$A=GH,$$

gdzie G i H są krakowianami elementarnymi. Mamy stąd

$$X=L:(GH)$$

¹⁾ Inne zastosowania rachunku krakowianowego znajdzie czytelnik m. in. w książce: T. Banachiewicz, *Rachunek krakowianowy* (w przygotowaniu).

i na mocy (55)

$$(62) \quad X = L : (\tau H) : G = L : H^* : G.$$

Rozwiązanie układu (60) według wzoru (62) wymagałoby: 1° rozkładu krakowianu A na czynniki elementarne G i H , 2° dzielenia $L:H^*$, 3° dzielenia $(L:H^*):G$. Można to postępowanie uprościć. Wprowadzamy krakowian

$$(63) \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix},$$

jaki otrzymujemy dopisując do krakowianu A kolumnę elementów krakowianu L . Będziemy pisali krótko

$$(64) \quad \bar{A} = \{A, L\}.$$

Rozkładamy krakowian \bar{A} na czynniki elementarne. Łatwo zauważyć, że

$$(65) \quad \bar{A} = \{A, L\} = \{G, \bar{L}\} H,$$

gdzie

$$A = GH \quad \text{ i } \quad L = \bar{L}H,$$

czyli

$$\bar{L} = L : (\tau H) = L : H^*.$$

Na mocy (62) jest

$$(66) \quad X = \bar{L} : G.$$

Rozwiązanie układu (60) sprowadza się zatem do:

1° rozkładu krakowianu \bar{A} na czynniki elementarne,

2° podzielenia krakowianu utworzonego z ostatniej kolumny pierwszego z uzyskanych czynników elementarnych przez krakowian utworzony przez pozostałe kolumny tegoż czynnika.

Można udowodnić, że jeżeli krakowian A jest pełnej rangi, czyli jeżeli krakowian G ma n wierszy, gdzie n jest liczbą równań i niewiadomych układu (60), to układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, dane wzorem (66).

PRZYKŁAD 6. Rozwiązać układ równań

$$2,1341x_1 - 0,0603x_2 - 1,1255x_3 - 0,6914x_4 = 8,3414,$$

$$3,3033x_1 - 1,2321x_2 + 1,7899x_3 - 1,8100x_4 = 10,2776,$$

$$5,3270x_1 + 2,0063x_2 - 3,4531x_3 - 4,2910x_4 = 9,6730,$$

$$3,2555x_1 - 1,0003x_2 - 0,1112x_3 + 2,7342x_4 = 9,8351.$$

Skorzystamy ze wzoru (66). Dyskusję błędów pomijamy.

Najpierw rozkładamy krakowian \bar{A} utworzony ze współczynników danego układu równań wraz z wyrazami wolnymi na czynniki elementarne

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} 2,1341 & -0,0603 & -1,1255 & -0,6914 & 8,3414 \\ 3,3033 & -1,2321 & 1,7899 & -1,8100 & 10,2776 \\ 5,3270 & 2,0063 & -3,4531 & -4,2910 & 9,6730 \\ 3,2555 & -1,0003 & -0,1112 & 2,7342 & 9,8351 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} 1 & -0,0283 & -0,5274 & -0,3240 & 3,9086 \\ 0 & 1 & -3,1021 & 0,6497 & 2,3131 \\ 0 & 0 & 1 & -0,6559 & -2,6683 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1,1219 \end{Bmatrix} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} 2,1341 & 3,3033 & 5,3270 & 3,2555 \\ 0 & -1,1386 & 2,1571 & -0,9082 \\ 0 & 0 & 6,0479 & -1,2116 \\ 0 & 0 & 0 & 3,5844 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,9086 \\ 2,3131 \\ -2,6683 \\ -1,1219 \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} 1 & -0,0283 & -0,5274 & -0,3240 \\ 0 & 1 & -3,1021 & 0,6497 \\ 0 & 0 & 1 & -0,6559 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,5370 \\ -7,5182 \\ -3,4042 \\ -1,1219 \end{Bmatrix},$$

czyli

$$x_1 \approx 1,537, \quad x_2 \approx -7,518, \quad x_3 \approx -3,404, \quad x_4 \approx -1,122.$$

Gdy zależy nam na obliczeniu z układu (60) niewiadomych x_1, x_2, \dots, x_n w postaci kombinacji liniowych wyrazów wolnych $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \dots, a_{n,n+1}$ (sytuację taką spotyka się np. przy rozwiązywaniu układów równań nieoznaczonych albo przy rozwiązywaniu wielu układów równań, różniących się pomiędzy sobą jedynie kolumną wyrazów wolnych), to wygodniej jest zmienić postępowanie prowadzące do uzyskania niewiadomego krakowianu X . Mianowicie mnożymy obie strony równości (61) przez odwrotność A^{-1} krakowianu A (odwrotność taka — jak wiemy już z cytowanego poprzednio twierdzenia — istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy A jest krakowianem pełnej rangi, tzn. gdy układ (60) ma dokładnie jedno rozwiązanie) i mamy

$$X(\tau A)A^{-1} = LA^{-1}.$$

Ale na mocy (51)

$$X(\tau A)A^{-1} = X(A^{-1}A),$$

i na mocy wzorów (57) i (48)

$$X(A^{-1}A) = X.$$

Zatem

$$(67) \quad X = LA^{-1}.$$

Odwrotność A^{-1} obliczamy tu z warunku (57).

Jeśli

$$(68) \quad A = GH,$$

gdzie G i H są krakowianami elementarnymi, to

$$A^{-1}A = A^{-1}(GH)$$

i na mocy (51)

$$A^{-1}A = A^{-1}H^*G.$$

Oznaczając

$$(69) \quad A^{-1}H^* = C$$

mamy

$$A^{-1}A = CG$$

i na mocy (57)

$$(70) \quad CG = \tau.$$

Rozwiązanie układu (60) polega teraz na:

1° rozkładzie (68) krakowianu A , utworzonego przez współczynniki układu równań (60) (bez wyrazów wolnych), na czynniki elementarne G i H , 2° obliczeniu krakowianu C ze wzoru (70), 3° obliczeniu krakowianu A^{-1} ze wzoru (69), 4° obliczeniu krakowianu X ze wzoru (67).

PRZYKŁAD 7. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= \alpha, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= \beta, \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= \gamma. \end{aligned}$$

Rozkładamy krakowian A , utworzony ze współczynników przy niewiadomych, na czynniki elementarne

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \\ -1 & 3 & 7 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{109}{9} \end{array} \right\}.$$

Obliczamy krakowian

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

z równości (70)

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mamy stąd

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{9} & \frac{13}{9} & 1 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy dalej krakowian

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

z równości (69)

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{9}{2} & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{109}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{9} & \frac{13}{9} & 1 \end{pmatrix}.$$

Mamy stąd

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{43}{109} & -\frac{2}{109} & \frac{7}{109} \\ \frac{16}{109} & \frac{17}{109} & -\frac{5}{109} \\ -\frac{7}{109} & \frac{13}{109} & \frac{9}{109} \end{pmatrix}.$$

Wreszcie obliczamy krakowian

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

ze wzoru (67)

$$X = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{43}{109} & -\frac{2}{109} & \frac{7}{109} \\ \frac{16}{109} & \frac{17}{109} & -\frac{5}{109} \\ -\frac{7}{109} & \frac{13}{109} & \frac{9}{109} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{43}{109}\alpha + \frac{16}{109}\beta - \frac{7}{109}\gamma \\ -\frac{2}{109}\alpha + \frac{17}{109}\beta + \frac{13}{109}\gamma \\ \frac{7}{109}\alpha - \frac{5}{109}\beta + \frac{9}{109}\gamma \end{Bmatrix}.$$

Inaczej

$$x_1 = \frac{43}{109}\alpha + \frac{16}{109}\beta - \frac{7}{109}\gamma,$$

$$x_2 = -\frac{2}{109}\alpha + \frac{17}{109}\beta + \frac{13}{109}\gamma,$$

$$x_3 = \frac{7}{109}\alpha - \frac{5}{109}\beta + \frac{9}{109}\gamma.$$

Gdy układ równań (60) jest symetryczny, tzn.

$$(71) \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

wygodniej jest obrać jeszcze inny sposób postępowania. Obliczamy mianowicie pierwiastek kwadratowy B krakowianu A , utworzonego ze współczynników przy niewiadomych układu (60). Elementy krakowianu B obliczamy ze wzorów (59) albo — co na jedno wychodzi — z równań wynikających z kolejnego mnożenia kolumn w iloczynie $BB=A$. Krakowian trójkątny B jest oczywiście także elementarny, gdyż dla jego istnienia konieczne jest na mocy wzorów (59), aby elementy leżące na przekątnej, tj. elementy b_{ii} ($i=1, 2, \dots, n$) były różne od zera. Zatem na mocy (65)

$$(72) \quad \bar{A} = \{A, L\} = \{B^2, L\} = \{B, \bar{L}\} B,$$

gdzie $L = \bar{L}B$.

Wzór (66) przybierze wtedy postać

$$(73) \quad X = \bar{L} : B.$$

Korzyść płynąca z wprowadzenia pierwiastka kwadratowego B polega na oszczędności w rachunku i zapisie: zamiast obliczać elementy

dwóch różnych krakowianów elementarnych G i H obliczamy elementy jednego tylko krakowianu B , zamiast zapisywać dwa krakowiany $\{G, \bar{L}\}$ i H we wzorze (65) wystarczy zapisać według wzoru (72) tylko krakowian $\{B, \bar{L}\}$, ponieważ w praktyce możemy korzystać z faktu, iż drugi czynnik elementarny B jest już wypisany jako część krakowianu $\{B, \bar{L}\}$.

Sposobu powyższego nie możemy stosować w przypadku układu niesymetrycznego równań, gdyż z równości $BB=A$ wynika, iż w krakowianie A muszą wtedy zachodzić równości (71), a więc układ (60) musi być symetryczny.

PRZYKŁAD 8. Rozwiążemy zadanie z przykładu 4 metodą krakowianową.

Ze wzoru (63) mamy

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3,6534 & 2,8315 & 2,1033 & 1,7769 & 9,8901 \\ 2,8315 & 3,3372 & 2,0013 & 1,6440 & 8,7637 \\ 2,1033 & 2,0013 & 3,1515 & 2,2131 & 7,6512 \\ 1,7769 & 1,6440 & 2,2131 & 2,9873 & 5,8321 \end{pmatrix}.$$

Z równości (72)

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3,6534 & 2,8315 & 2,1033 & 1,7769 & 9,8901 \\ 2,8315 & 3,3372 & 2,0013 & 1,6440 & 8,7637 \\ 2,1033 & 2,0013 & 3,1515 & 2,2131 & 7,6512 \\ 1,7769 & 1,6440 & 2,2131 & 2,9873 & 5,8321 \end{pmatrix},$$

w której wypisywanie drugiego czynnika elementarnego jest w praktyce zbyteczne, otrzymujemy metodą kolejnego mnożenia kolumn następujący krakowian:

$$\{B, \bar{L}\} = \begin{pmatrix} 1,91139 & 1,48138 & 1,10040 & 0,92964 & 5,17430 \\ 0 & 1,06898 & 0,34724 & 0,24963 & 1,02770 \\ 0 & 0 & 1,34909 & 0,81792 & 1,18639 \\ 0 & 0 & 0 & 1,17973 & -0,17381 \end{pmatrix}.$$

Na mocy (73) jest

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,17430 \\ 1,02770 \\ 1,18639 \\ -0,17381 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1,91139 & 1,48138 & 1,10040 & 0,92964 \\ 0 & 1,06898 & 0,34724 & 0,24963 \\ 0 & 0 & 1,34909 & 0,81792 \\ 0 & 0 & 0 & 1,17973 \end{pmatrix},$$

skąd po wykonaniu dzielenia

$$X = \begin{pmatrix} 1,69316 \\ 0,68112 \\ 0,96872 \\ -0,14733 \end{pmatrix},$$

czyli $x_1 \approx 1,6932$, $x_2 \approx 0,6811$, $x_3 \approx 0,9687$, $x_4 \approx -0,1473$.

Dyskusji błędów nie podajemy.

Omówimy jeszcze metodę krakowianową rozwiązania układu (39). Będzie to metoda najmniejszych kwadratów w ujęciu krakowianowym. Układ (39) zapisujemy w rachunku krakowianowym następująco:

$$(74) \quad X(\tau \mathfrak{A}) = X\mathfrak{A}^* = A,$$

gdzie

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{1,n+1} \\ -a_{2,n+1} \\ \vdots \\ -a_{p,n+1} \end{pmatrix}.$$

Układ równań normalnych ma wtedy postać

$$X(\tau A) = XA^* = L,$$

gdzie

$$(75) \quad A = \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2, \quad L = A\mathfrak{A}.$$

Wprowadzamy teraz pierwiastek kwadratowy B krakowianu A , tzn. taki krakowian trójkątny B , że $B^2 = A$. Niech

$$(76) \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wprowadzamy też krakowian (por. wzór (64))

$$(77) \quad \bar{A} = \{A, L\}.$$

Ze wzorów (75) i (77) wynika, że $\bar{A} = \{\mathcal{A}^2, A\mathcal{A}\}$. Ale na mocy (72)

$$\bar{A} = \{A, L\} = \{B^2, L\} = \{B, \bar{L}\} B,$$

gdzie $L = \bar{L}B$. Zatem

$$(78) \quad \bar{A} = \{\mathcal{A}^2, A\mathcal{A}\} = \{B, \bar{L}\} B.$$

Rozwiązanie układu (39) sprowadza się w ten sposób do:

1° obliczenia krakowianów A i L ze wzorów (75),

2° rozkładu krakowianu $\bar{A} = \{A, L\}$ na czynniki elementarne $\{B, \bar{L}\}$ i B ,

3° obliczenia krakowianu X ze wzoru (73).

Postępowanie to można jednak uprościć. Niech

$$(79) \quad \bar{L} = \begin{pmatrix} -b_{1,n+1} \\ -b_{2,n+1} \\ \vdots \\ -b_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Wprowadzamy krakowiany

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & -a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} & -a_{p,n+1} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -b_{1,n+1} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} & -b_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} & -b_{n,n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{n+1,n+1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & -a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} & -a_{p,n+1} \\ -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1n} & b_{1,n+1} \\ 0 & -b_{22} & \dots & -b_{2n} & b_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -b_{nn} & b_{n,n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Pierwszy z nich otrzymujemy podpisując pod elementami krakowianu \bar{A} , utworzonego ze współczynników i wyrazów wolnych układu równań (39), elementy krakowianu $\{B, \bar{L}\}$ określonego wzorem (78), a pod nimi umieszczając jeszcze wiersz $\{0 \ 0 \ \dots \ 0 - b_{n+1, n+1}\}$, gdzie element $b_{n+1, n+1}$ jest określony wzorem

$$(80) \quad b_{n+1, n+1} = \sqrt{p} \mathfrak{B},$$

a \mathfrak{B} oznacza błąd średni, z jakim wartości x_1, x_2, \dots, x_n będące elementami krakowianu X (patrz wzór (74)) spełniają układ równań (39), przy czym błąd ten jest określony wzorem (41). Drugi z nich otrzymujemy z pierwszego zmieniając znaki wszystkich wyrazów b_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n+1$) na przeciwne.

Otóż równości (78) i (80) można zastąpić jedną

$$(81) \quad F\bar{F} = \{0\},$$

gdzie $\{0\}$ oznacza krakowian zerowy, tzn. mający wszystkie elementy równe zeru.

Istotnie,

$$\{\mathfrak{U}^2, \mathfrak{A}\mathfrak{U}\} = \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^p \alpha_{r1}^2 & \sum_{r=1}^p \alpha_{r1} \alpha_{r2} & \dots & \sum_{r=1}^p \alpha_{r1} \alpha_{rn} & - \sum_{r=1}^p \alpha_{r1} \alpha_{r, n+1} \\ \sum_{r=1}^p \alpha_{r1} \alpha_{r2} & \sum_{r=1}^p \alpha_{r2}^2 & \dots & \sum_{r=1}^p \alpha_{r2} \alpha_{rn} & - \sum_{r=1}^p \alpha_{r2} \alpha_{r, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{r=1}^p \alpha_{r1} \alpha_{rn} & \sum_{r=1}^p \alpha_{r2} \alpha_{rn} & \dots & \sum_{r=1}^p \alpha_{rn}^2 & - \sum_{r=1}^p \alpha_{rn} \alpha_{r, n+1} \end{pmatrix}$$

oraz

$$\{B\bar{L}\} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -b_{1, n+1} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} & -b_{2, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} & -b_{n, n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{11} b_{12} & b_{11} b_{13} & \dots & -b_{11} b_{1, n+1} \\ b_{11} b_{12} & \sum_{r=1}^2 b_{r2}^2 & \sum_{r=1}^2 b_{r2} b_{r3} & \dots & - \sum_{r=1}^2 b_{r2} b_{r, n+1} \\ b_{11} b_{13} & \sum_{r=1}^2 b_{r2} b_{r3} & \sum_{r=1}^3 b_{r3}^2 & \dots & - \sum_{r=1}^3 b_{r3} b_{r, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{11} b_{1n} & \sum_{r=1}^2 b_{r2} b_{rn} & \sum_{r=1}^3 b_{r3} b_{rn} & \dots & - \sum_{r=1}^n b_{rn} b_{r, n+1} \end{pmatrix},$$

skąd na mocy (78)

$$(82) \quad \sum_{v=1}^p a_{vi} a_{vj} = \begin{cases} \sum_{v=1}^i b_{vi} b_{vj} & (i=1, 2, \dots, n; j=i, i+1, \dots, n+1), \\ \sum_{v=1}^j b_{vi} b_{vj} & (j=1, 2, \dots, n; i=j, j+1, \dots, n). \end{cases}$$

Z drugiej strony mnożąc j -tą kolumnę krakowianu F przez i -tą kolumnę krakowianu \bar{F} i przyrównując na mocy (81) do zera, mamy

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^p a_{vi} a_{vj} - \sum_{v=1}^i b_{vi} b_{vj} &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, n; j=i, i+1, \dots, n+1), \\ \sum_{v=1}^p a_{vi} a_{vj} - \sum_{v=1}^j b_{vi} b_{vj} &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, n; i=j, j+1, \dots, n), \end{aligned}$$

a więc zależności równoważne równościom (82), następnie

$$\sum_{v=1}^p a_{v,n+1} a_{vj} - \sum_{v=1}^j b_{v,n+1} b_{vj} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

równoważne poprzednio już otrzymanym równościom

$$\sum_{v=1}^p a_{vi} a_{v,n+1} - \sum_{v=1}^i b_{vi} b_{v,n+1} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

oraz równość

$$\sum_{v=1}^p a_{v,n+1}^2 - \sum_{v=1}^{n+1} b_{v,n+1}^2 = 0,$$

z której otrzymujemy

$$(83) \quad b_{n+1,n+1} = \left[\sum_{v=1}^p a_{v,n+1}^2 - \sum_{v=1}^n b_{v,n+1}^2 \right]^{1/2}.$$

Wykażemy, że wzór (83) jest równoważny wzorowi (80). W tym celu wystarczy na mocy (41) okazać, że

$$b_{n+1,n+1}^2 = \Phi_0,$$

gdzie Φ_0 określono wzorem (41a). Wystarczy na mocy (83) okazać, że

$$(84) \quad \left(\sum_{v=1}^p a_{v1} a_{v,n+1} \right) x_1 + \left(\sum_{v=1}^p a_{v2} a_{v,n+1} \right) x_2 + \dots + \left(\sum_{v=1}^p a_{vn} a_{v,n+1} \right) x_n + \\ + \sum_{v=1}^n b_{v,n+1}^2 = 0.$$

Rzeczywiście na mocy (82) równość (84) można napisać w postaci

$$\left(\sum_{v=1}^1 b_{v1} b_{v,n+1} \right) x_1 + \left(\sum_{v=1}^2 b_{v2} b_{v,n+1} \right) x_2 + \dots + \left(\sum_{v=1}^n b_{vn} b_{v,n+1} \right) x_n = - \sum_{v=1}^n b_{v,n+1}^2,$$

która w ujęciu krakowianowym wyraża się wzorem

$$\bar{L}BX = \bar{L}^2.$$

Wzór ten jest prawdziwy, gdyż na mocy (73) i (54a) jest

$$XB^* = \bar{L},$$

a stąd prawdziwy jest wzór

$$\bar{L}(XB^*) = \bar{L}^2,$$

czyli na mocy (51)

$$\bar{L}BX = \bar{L}^2.$$

Wykazaliśmy zatem, że wzór (81) jest równoważny dwóm wzorom (78) i (80).

Do obliczenia krakowianów \bar{L} i B , potrzebnych dla znalezienia rozwiązania

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

ze wzoru (73), nie musimy teraz najpierw obliczać krakowianu \bar{A} ze wzorów (75) i (77), a następnie rozkładać go na czynniki elementarne według wzoru (72). Mnożąc bowiem stopniowo krakowiany F i \bar{F} możemy na mocy (81) obliczyć kolejno wszystkie elementy b_{ij} ($i=1,2,\dots,n+1$; $j=i,i+1,\dots,n+1$) i z nich utworzyć następnie krakowiany \bar{L} i B .

Wzór (81) pozwala ponadto obliczyć automatycznie błąd średni $\bar{3}$ według wzoru (80).

Metoda oparta na równości (81) jest pomysłem S. Hausbrandta.

Na zakończenie podkreślić należy, że wszystkie metody krakowianowe rozwiązywania układów równań liniowych można przetłumaczyć na metody schematyczne i na odwrót. Działania pozostają te same, lecz zmienia się ich interpretacja. Metoda krakowianowa góruje o tyle nad schematyczną, że używając zwiezłych wzorów pozwala łatwiej odkrywać stosowne metody rachunku i ponadto łatwiej przeprowadzać dyskusje istnienia i jednoznaczności rozwiązań oraz różnego typu kontrole rachunku. Metoda schematyczna jest znowu prostsza w bezpośrednich zastosowaniach, gdyż nie wymaga znajomości specjalnej teorii, a tylko stosowania określonych schematów rachunkowych.

PRZYKŁAD 9. Rozwiążemy zadanie z przykładu 5 metodą Hausbrandta.

W tym celu wykonujemy stopniowo według wzoru (81) mnożenie krakowianów

$$(85) \left\{ \begin{array}{cccc} 3,153 & -2,062 & 5,404 & -14,002 \\ 2,710 & 4,133 & -4,125 & +4,315 \\ 3,888 & 0,696 & 0,287 & -7,194 \\ 3,001 & -2,899 & -1,725 & -10,003 \\ 5,454 & -4,734 & -1,910 & -17,873 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & -b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & -b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{44} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} 3,153 & -2,062 & 5,404 & -14,002 \\ 2,710 & 4,133 & -4,125 & +4,315 \\ 3,888 & 0,696 & 0,287 & -7,194 \\ 3,001 & -2,899 & -1,725 & -10,003 \\ 5,454 & -4,734 & -1,910 & -17,873 \\ -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & b_{14} \\ 0 & -b_{22} & -b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & -b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{array} \right\} = \{0\}.$$

Po zakończeniu tego rachunku równość (85) przybierze postać

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 3,153 & -2,062 & 5,404 & -14,002 \\ 2,710 & 4,133 & -4,125 & 4,315 \\ 3,888 & 0,696 & 0,287 & -7,194 \\ 3,001 & -2,899 & -1,725 & -10,003 \\ 5,454 & -4,734 & -1,910 & -17,873 \\ 8,43529 & -3,21437 & -1,02165 & 22,27828 \\ 0 & 6,50410 & -2,64959 & -12,86847 \\ 0 & 0 & 6,69782 & 4,89752 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1674 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} 3,153 & -2,062 & 5,404 & -14,002 \\ 2,710 & 4,133 & -4,125 & 4,315 \\ 3,888 & 0,696 & 0,287 & -7,194 \\ 3,001 & -2,899 & -1,725 & -10,003 \\ 5,454 & -4,734 & -1,910 & -17,873 \\ -8,43529 & 3,21437 & 1,02165 & -22,27828 \\ 0 & -6,50410 & 2,64959 & 12,86847 \\ 0 & 0 & -6,69782 & -4,89752 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1674 \end{array} \right\} = \{0\}.$$

Mamy stąd na mocy wzorów (73), (76) i (78)

$$X = \left\{ \begin{array}{c} 22,27828 \\ -12,86847 \\ 4,89752 \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{ccc} 8,43529 & -3,21437 & -1,02165 \\ 0 & 6,50410 & -2,64959 \\ 0 & 0 & 6,69782 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2,0892 \\ -1,6806 \\ 0,7312 \end{array} \right\},$$

czyli

$$x_1 \approx 2,0892, \quad x_2 \approx -1,6806, \quad x_3 \approx 0,7312.$$

Błąd średni na mocy (80) jest

$$\mathfrak{B} = \frac{0,1674}{\sqrt{5}} \approx 0,07.$$