

ROZDZIAŁ III

INTERPOLACJA

§ 17. Wstęp. *Interpolacją* nazywamy postępowanie prowadzące do znalezienia wartości jakiejś funkcji $f(x)$ w dowolnym punkcie przedziału (x_0, x_n) , na podstawie znanych wartości tej funkcji w punktach $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ (zakładamy, że $x_0 < x_1 < \dots < x_n$). Postępowanie prowadzące do znalezienia wartości funkcji $f(x)$ w punkcie leżącym poza przedziałem (x_0, x_n) nazywamy *ekstrapolacją*.

Interpolację lub ekstrapolację stosujemy najczęściej w następujących dwóch przypadkach:

1. Gdy nie znamy samej funkcji $f(x)$, a tylko jej wartości w pewnych punktach. Tak przeważnie bywa w naukach doświadczalnych.

2. Gdy obliczenie wartości jakiejś funkcji $F(x)$ bezpośrednio z określającego ją wzoru nastęrcza zbyt duże trudności rachunkowe (np. gdy $F(x) = \log x, \sin x$ itp.). Wtedy funkcję tę zastępujemy prostszą funkcją $f(x)$, o której zakładamy, że w punktach $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ ma te same wartości, co funkcja $y = F(x)$.

W obu przypadkach zakładamy z reguły, że funkcja $f(x)$ jest pewnej prostej postaci, najczęściej, że jest wielomianem możliwie niskiego stopnia, albo funkcją wymierną, której licznik i mianownik są wielomianami tego samego, lecz możliwie niskiego stopnia, albo też, że jest wielomianem trygonometrycznym lub funkcją wymierną typu trygonometrycznego możliwie prostego kształtu.

W pierwszym przypadku poprawność założeń co do postaci funkcji $f(x)$ sprawdzamy na drodze doświadczalnej; mianowicie sprawdzamy, czy wartości tej funkcji obliczone metodą interpolacji pokrywają się z doświadczeniem.

W drugim przypadku poprawność założeń co do postaci funkcji $f(x)$ sprawdzamy na gruncie teorii aproksymacji, o której będzie mowa w rozdziale następnym.

W obu przypadkach metoda interpolacyjna jest ta sama. Ponieważ do ekstrapolacji służą na ogół te same wzory co do interpolacji, będziemy więc mówili jedynie o interpolacji.

Wyróżnimy dwa główne zagadnienia interpolacyjne:

1. Poszukiwanie funkcji $y=f(x)$ określonego typu, która w danych punktach $x=x_0, x_1, \dots, x_n$ przybiera z góry dane wartości y_0, y_1, \dots, y_n .
2. Obliczenie wartości funkcji $f(x)$ określonego typu w danym punkcie $x=\bar{x}$, gdy funkcja $f(x)$ dana jest jedynie przez swe wartości y_0, y_1, \dots, y_n w punktach x_0, x_1, \dots, x_n .

Tak na przykład w przypadku interpolacji wielomianami możliwe niskiego stopnia pierwsze zagadnienie sprowadza się do obliczenia współczynników wielomianu

$$y=f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n,$$

o którym wiadomo, że w punktach $x=x_0, x_1, \dots, x_n$ przybiera wartości y_0, y_1, \dots, y_n , a drugie zagadnienie do obliczenia jednej tylko wartości: $f(\bar{x})$. Zagadnienie drugie można oczywiście sprowadzić do pierwszego: najpierw znajdujemy funkcję $f(x)$, a potem podstawiamy $x=\bar{x}$, ale jest to metoda określona. Jeżeli nie zależy nam na znalezieniu samej funkcji $f(x)$, a jedynie na obliczeniu wartości $f(\bar{x})$, to możemy w tym celu używać specjalnych metod.

Przedewszystkim zajmijmy się interpolacją wielomianami.

Wielomian stopnia co najwyżej n , który w punktach x_0, x_1, \dots, x_n ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) przybiera dane z góry wartości y_0, y_1, \dots, y_n , nazywać będziemy *wielomianem interpolacyjnym*.

§ 18. Wzór interpolacyjny Lagrange'a. Udowodnimy najpierw następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 1. *Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny, który w punktach x_0, x_1, \dots, x_n ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) przybiera wartości y_0, y_1, \dots, y_n .*

Dowód. Wielomian

$$\begin{aligned} (1) \quad y=f(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\ &+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \\ &+ y_{n-1} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)} + \\ &+ y_n \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

jest wielomianem co najwyżej stopnia n takim, że

$$f(x_0)=y_0, \quad f(x_1)=y_1, \quad \dots, \quad f(x_n)=y_n.$$

Gdyby istniał jeszcze inny wielomian $g(x)$ stopnia co najwyżej n taki, że

$$g(x_0)=y_0, \quad g(x_1)=y_1, \quad \dots, \quad g(x_n)=y_n,$$

to wielomian $R(x)=f(x)-g(x)$ byłby wielomianem stopnia co najwyżej n i takim, że

$$R(x_0)=0, \quad R(x_1)=0, \quad \dots, \quad R(x_n)=0.$$

$R(x)$ byłby zatem wielomianem stopnia co najwyżej n posiadającym $n+1$ pierwiastków: x_0, x_1, \dots, x_n , musiałby zatem być tożsamościowo równy zeru.

Wynika stąd, że $f(x)=g(x)$, co oznacza, że $f(x)$ jest jedynym wielomianem o żądanych własnościach.

Wzór (1) nazywamy *wzorem interpolacyjnym Lagrange'a*. Może on służyć do rozwiązywania zarówno pierwszego, jak i drugiego zagadnienia interpolacyjnego, sformułowanego w § 17.

PRZYKŁAD 1. Znaleźć wielomian interpolacyjny, który w punktach $x=-2, 1, 2, 4$ przybiera wartości $y=4, 2, -1, 10$. Stosujemy wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$\begin{aligned} (2) \quad y &= 4 \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} + 2 \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} - \\ &\quad - 1 \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} + 10 \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(4+2)(4-1)(4-2)} = \\ &= \frac{41}{72} x^3 - \frac{83}{72} x^2 - \frac{127}{36} x + \frac{55}{9}. \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 2. Obliczyć wartość funkcji $f(x)$ dla $x=-1$, jeżeli wiadomo, że $f(-2)=4$, $f(1)=2$, $f(2)=-1$, $f(4)=10$. Tak postawione zagadnienie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Może jednak stać się rozwiązalne jednoznacznie, jeżeli uczynimy pewne założenia co do kształtu funkcji $f(x)$. Zażądajmy na przykład, aby funkcja $f(x)$ była wielomianem co najwyżej trzeciego stopnia. Wtedy zagadnienie ma na podstawie twierdzenia 1 dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to można uzyskać albo znajdując najpierw wielomian interpolacyjny (2), a potem podstawiając $x=-1$, co daje $f(-1)=95/12$, albo stosując bezpośrednio wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4 \frac{(-1-1)(-1-2)(-1-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} + 2 \frac{(-1+2)(-1-2)(-1-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} - \\ &\quad - 1 \frac{(-1+2)(-1-1)(-1-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} + 10 \frac{(-1+2)(-1-1)(-1-2)}{(4+2)(4-1)(4-2)} = \frac{95}{12}. \end{aligned}$$

§ 19. Metoda Aitkena. Wzór interpolacyjny Lagrange'a (1) można otrzymać metodą iteracji. Niech $W_{ij}(x)$ oznacza wielomian stopnia pierwszego, który w punktach x_i i x_j ($x_i \neq x_j$) przybiera wartości y_i i y_j .

Mamy na podstawie wzoru (1)

$$W_{ij}(x) = y_i \frac{x - x_j}{x_i - x_j} + y_j \frac{x - x_i}{x_j - x_i},$$

czyli

$$(3) \quad W_{ij}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & y_i \\ x - x_j & y_j \end{vmatrix}}{x_j - x_i}.$$

Niech $W_{ijk}(x)$ oznacza wielomian stopnia drugiego, który w trzech różnych punktach x_i, x_j, x_k przybiera wartości y_i, y_j, y_k . Na podstawie wzoru (1) mamy

$$W_{ijk}(x) = y_i \frac{(x - x_j)(x - x_k)}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} + y_j \frac{(x - x_i)(x - x_k)}{(x_j - x_i)(x_j - x_k)} + y_k \frac{(x - x_i)(x - x_j)}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)},$$

skąd

$$\begin{aligned} W_{ijk}(x) &= \frac{(x - x_j)(x - x_k)[(x_k - x_i) - (x_j - x_i)]y_i}{(x_j - x_i)(x_k - x_i)(x_k - x_j)} - \\ &\quad - \frac{(x - x_i)(x - x_k)(x_k - x_i)y_j - (x - x_i)(x - x_j)(x_j - x_i)y_k}{(x_j - x_i)(x_k - x_i)(x_k - x_j)} = \\ &= \frac{(x - x_j)(x_j - x_i)[(x - x_i)y_k - (x - x_k)y_i]}{(x_j - x_i)(x_k - x_i)(x_k - x_j)} - \\ &\quad - \frac{(x - x_k)(x_k - x_i)[(x - x_i)y_j - (x - x_j)y_i]}{(x_j - x_i)(x_k - x_i)(x_k - x_j)} = \\ &= \frac{1}{x_k - x_j} \left(\frac{x - x_j}{x_k - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & y_i \\ x - x_k & y_k \end{vmatrix} - \frac{x - x_k}{x_j - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & y_i \\ x - x_j & y_j \end{vmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{x_k - x_j} [(x - x_j)W_{ik}(x) - (x - x_k)W_{ij}(x)], \end{aligned}$$

czyli

$$W_{ijk}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_j & W_{ij}(x) \\ x - x_k & W_{ik}(x) \end{vmatrix}}{x_k - x_j}.$$

Ogólnie: Jeżeli $W_{m_1 m_2 \dots m_i}(x)$ oznacza wielomian, który w punktach $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_i}$ przybiera wartości $y_{m_1}, y_{m_2}, \dots, y_{m_i}$, to można wykazać (dowód pomijamy), że

$$(4) \quad W_{012 \dots k-1, k, m}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_k & W_{01 \dots k-1, k}(x) \\ x - x_m & W_{01 \dots k-1, m}(x) \end{vmatrix}}{x_m - x_k}.$$

Ze wzoru (4) obliczamy kolejno wielomiany

$$\begin{aligned} &W_{01}(x), W_{02}(x), \dots, W_{0n}(x), \\ &W_{012}(x), W_{013}(x), W_{014}(x), \dots, W_{01n}(x), \\ &W_{0123}(x), W_{0124}(x), \dots, W_{012 \dots n}(x). \end{aligned}$$

Ostatni z nich jest szukanym wielomianem (1).

Wygodnie jest obliczać kolejne wielomiany podług następującego schematu:

(5)

x_i	$x - x_i$	y_i	$W_{0i}(x)$	$W_{01i}(x)$	$W_{012i}(x)$
x_0	$x - x_0$	y_0			
x_1	$x - x_1$	y_1	$W_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}$		
x_2	$x - x_2$	y_2	$W_{02}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$	$W_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_1 & W_{01} \\ x - x_2 & W_{02} \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}$	
x_3	$x - x_3$	y_3	$W_{03}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{x_3 - x_0}$	$W_{013}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_1 & W_{01} \\ x - x_3 & W_{03} \end{vmatrix}}{x_3 - x_1}$	$W_{0123}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_2 & W_{012} \\ x - x_3 & W_{013} \end{vmatrix}}{x_3 - x_2}$

Wielomian (4) ($k=0, 1, \dots; m=k+1, k+2, \dots$) znajdujemy formując wyznacznik z wyrazów znajdujących się w kolumnach drugiej i $(k+3)$ -ej oraz w wierszach k -tym i m -tym. W schemacie położenie uwzględnianych wyrazów jest takie samo, jak w wyznaczniku.

Opisana metoda nosi nazwę *metody interpolacyjnej Aitkena*.

PRZYKŁAD 3. Rozwiążemy zadanie z przykładu 2 metodą Aitkena. Posłużymy się schematem (5):

x_i	$x - x_i$	y_i			
-2	1	4			
1	-2	2	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10$ $1+2 = 3$		
2	-3	-1	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 11$ $2+2 = 4$	$\begin{vmatrix} -2 & \frac{10}{3} \\ -3 & \frac{11}{4} \end{vmatrix} = 9$ $2-1 = 2$	
4	-5	10	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 5$ $4+2 = 5$	$\begin{vmatrix} -2 & \frac{10}{3} \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 20$ $4-1 = 9$	$\begin{vmatrix} -3 & \frac{9}{2} \\ -5 & \frac{20}{9} \end{vmatrix} = 95$ $4-2 = 12$

Po nabyciu wprawy można w schemacie (5) nie wypisywać wyznaczników.

PRZYKŁAD 4. Funkcja $f(x)$, o której zakładamy, że jest wielomianem co najwyżej czwartego stopnia, ma w punktach 2,135 2,137 2,142 2,143 2,151 wartości 6,010 6,038 6,075 6,090 6,169. Obliczyć wartość tej funkcji w punkcie $x=2,140$.

Posłużymy się metodą Aitkena, lecz w schemacie (5) nie będziemy wypisywali wyznaczników. Obliczenia wykonujemy z dokładnością szacowaną według reguł podanych w rozdziale I.

x_i	$x - x_i$	y_i				
2,135	0,005	6,010				
2,137	0,003	6,038	6,080 ± 0			
2,142	-0,002	6,075	6,056 ± 0,0005	6,066 ± 0,0007		
2,143	-0,003	6,090	6,060 ± 0	6,070 ± 0	6,058 ± 0,0024	
2,151	-0,011	6,169	6,060 ± 0,0004	6,076 ± 0,0006	6,064 ± 0,0013	6,056 ± 0,0041

§ 20. Metoda ilorazów różnicowych. Wzór interpolacyjny Newtona z ilorazami różnicowymi. Wielomian (1) można również znaleźć za pomocą ilorazów różnicowych.

Na podstawie definicji ilorazu różnicowego (wzór (42), str. 56)

$$(6) \quad [xx_0x_1x_2\dots x_n] = \frac{[xx_0x_1x_2\dots x_{n-1}] - [x_0x_1x_2\dots x_n]}{x - x_n}.$$

Ponieważ zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest wielomianem co najwyżej stopnia n , więc na podstawie twierdzenia 3 z rozdziału II jest

$$[xx_0x_1x_2\dots x_n] = 0,$$

czyli

$$[x_0x_1x_2\dots x_n] = [xx_0x_1x_2\dots x_{n-1}] = \frac{[xx_0x_1\dots x_{n-2}] - [x_0x_1x_2\dots x_{n-1}]}{x - x_{n-1}}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} [x_0x_1x_2\dots x_n](x - x_{n-1}) + [x_0x_1x_2\dots x_{n-1}] &= \\ &= [xx_0x_1\dots x_{n-2}] = \frac{[xx_0x_1\dots x_{n-3}] - [x_0x_1x_2\dots x_{n-2}]}{x - x_{n-2}}. \end{aligned}$$

Postępując dalej analogicznie dochodzimy do wzoru

$$(7) \quad y = [x_0] + [x_0x_1](x - x_0) + [x_0x_1x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ + [x_0x_1x_2\dots x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}),$$

który nosi nazwę *wzoru interpolacyjnego Newtona z ilorazami różnicowymi*.

PRZYKŁAD 5. Rozwiążmy zadanie podane w przykładzie 2 za pomocą wzoru (7). Przede wszystkim sporządzamy tabelę ilorazów różnicowych szukanego wielomianu

x_i	y_i		
-2	4		
		-2/3	
1	2	-7/12	
		-3	41/72
2	-1	17/6	
		11/2	
4	10		

Mamy dalej $x - x_0 = 1$, $x - x_1 = -2$, $x - x_2 = -3$. Zatem

$$f(-1) = 4 + \left(-\frac{2}{3}\right)1 + \left(-\frac{7}{12}\right)1(-2) + \frac{41}{72}1(-2)(-3) = \frac{95}{12}.$$

§ 21. Interpolacja wielomianami przy równych odstępach. Niech

$$(8) \quad x_i = x_0 + i \Delta x = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

gdzie $\Delta x = h$ jest stałą dodatnią. W przypadku takim, spotykanym w praktyce najczęściej, metody interpolacyjne można uprościć. Dlatego interpolację wielomianami przy równych odstępach rozważymy szczegółowo, pomimo że omówione metody interpolacyjne są ogólne i dają się stosować niezależnie od tego, czy punkty położone są w równych odstępach, czy nie.

§ 22. Metody oparte na wzorze Lagrange'a. a) *Poszukiwanie wielomianu interpolacyjnego.* Duże korzyści rachunkowe można osiągnąć wprowadzając w miejsce zmiennej x zmienną

$$(9) \quad \xi = 2(x - x_0)/h - n.$$

Gdy $x = x_0, x_1, \dots, x_n$, wtedy $\xi = -n, -n+2, -n+4, \dots, -n+2, n$.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a (1) przybierze wtedy postać

$$\begin{aligned}
 (10) \quad y = f(x) &= f\left(x_0 + \frac{\xi + n}{2} h\right) = \varphi(\xi) = \\
 &= y_0 \frac{\left(\frac{\xi + n}{2} - 1\right)\left(\frac{\xi + n}{2} - 2\right) \dots \left(\frac{\xi + n}{2} - n\right)}{(-1)(-2) \dots (-n)} + \\
 &+ y_1 \frac{\frac{\xi + n}{2} \left(\frac{\xi + n}{2} - 2\right)\left(\frac{\xi + n}{2} - 3\right) \dots \left(\frac{\xi + n}{2} - n\right)}{1(-1)(-2) \dots (-n+1)} + \dots + \\
 &+ y_n \frac{\frac{\xi + n}{2} \left(\frac{\xi + n}{2} - 1\right)\left(\frac{\xi + n}{2} - 2\right) \dots \left(\frac{\xi + n}{2} - n+1\right)}{n(n-1)(n-2) \dots 1} = \\
 &= \frac{1}{(-2)^n n!} \left[y_0 \binom{n}{0} (\xi + n - 2)(\xi + n - 4)(\xi + n - 6) \dots (\xi - n) - \right. \\
 &- y_1 \binom{n}{1} (\xi + n)(\xi + n - 4)(\xi + n - 6) \dots (\xi - n) + \\
 &+ y_2 \binom{n}{2} (\xi + n)(\xi + n - 2)(\xi + n - 6) \dots (\xi - n) - \dots + \\
 &+ (-1)^{n-1} y_{n-1} \binom{n}{n-1} (\xi + n)(\xi + n - 2) \dots (\xi - n + 4)(\xi - n) + \\
 &\left. + (-1)^n y_n \binom{n}{n} (\xi + n)(\xi + n - 2) \dots (\xi - n + 4)(\xi - n + 2) \right],
 \end{aligned}$$

którą można uporządkować według kolejnych potęg ξ

$$(11) \quad y = \varphi(\xi) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} \xi + A_2^{(n)} \xi^2 + \dots + A_n^{(n)} \xi^n.$$

Niech teraz dana będzie liczba naturalna

$$(12) \quad m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Niech dalej

$$(13) \quad A_i^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} B_i^{(n)} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

oraz

$$(14) \quad \begin{aligned} &^+y_0 = y_0 + y_n, \quad ^+y_1 = y_1 + y_{n-1}, \quad \dots, \quad ^+y_i = y_i + y_{n-i}, \quad ^+y_m = y_m + y_{n-m}, \\ &\bar{y}_0 = y_0 - y_n, \quad \bar{y}_1 = y_1 - y_{n-1}, \quad \dots, \quad \bar{y}_i = y_i - y_{n-i}, \quad \bar{y}_m = y_m - y_{n-m}. \end{aligned}$$

Wtedy współczynniki $B_0^{(n)}, B_1^{(n)}, \dots, B_n^{(n)}$ ze wzoru (13) można na podstawie (10), (11) i (13) przedstawić w postaci

$$(15) \quad B_i^{(n)} = \begin{cases} C_{0i}^{(n)} {}^+y_0 + C_{1i}^{(n)} {}^+y_1 + \dots + C_{mi}^{(n)} {}^+y_m & \text{dla } i \text{ parzystych,} \\ C_{0i}^{(n)} \bar{y}_0 + C_{1i}^{(n)} \bar{y}_1 + \dots + C_{mi}^{(n)} \bar{y}_m & \text{dla } i \text{ nieparzystych,} \end{cases}$$

gdzie $C_{0i}^{(n)}, C_{1i}^{(n)}, \dots, C_{mi}^{(n)}$ są już liczbami całkowitymi. Liczby te nazywać będziemy *współczynnikami interpolacyjnymi I rodzaju*. W tablicy III umieszczonej na końcu książki podane są współczynniki interpolacyjne I rodzaju dla $n=1, 2, \dots, 7$. Współczynnik $C_{ji}^{(n)}$ leży w tabelce odpowiadającej danej wartości n w wierszu oznaczonym przez ${}^+y_j$ albo \bar{y}_j i w kolumnie oznaczonej przez ξ^i . Układ taki pozwala z łatwością obliczyć każdy ze współczynników $B_i^{(n)}$ przez pomnożenie odpowiednich dwóch kolumn według wzoru (15).

Kolejność postępowania jest następująca: najpierw obliczamy ${}^+y_0, {}^+y_1, {}^+y_2, \dots$ ze wzoru (14), następnie — współczynniki $B_i^{(n)}$, posługując się wzorem (15) i tablicą III. Mając współczynniki $B_0^{(n)}, B_1^{(n)}, \dots, B_n^{(n)}$ obliczamy ze wzoru (13) współczynniki $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$ i wypisujemy wielomian (11).

Gdyby zamiast (9) użyć prostszego podstawienia $\xi = \frac{x-x_0}{h}$, nie można by skorzystać z podstawień (14) i liczba składników w sumach (15) wzrosłaby dwukrotnie. Podstawienie (9) zapewnia symetrię wzoru (10).

Wielomian

$$(16) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

można znaleźć za pomocą wzoru

$$(17) \quad f(x) = \varphi \left(\frac{2(x-x_0)}{h} - n \right),$$

jednak w przeważającej części zastosowań wystarcza znajomość wielomianu $\varphi(\xi)$, określonego wzorem (11).

PRZYKŁAD 6. Funkcja $y=f(x)$ dana jest następującą tabelką:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0,2	0,7	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7
y_i	0,57926	0,75804	0,88493	0,95543	0,98610	0,99653	0,99931	0,99989

Znaleźć funkcję $f(x)$ zakładając, że jest wielomianem stopnia ≤ 7 .

Funkcję $f(x)$ znajdziemy w postaci (17), gdzie $n=7$, a $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_7 - x_6 = 0,5$. Ze wzoru (9) mamy $\xi = \frac{2(x-0,2)}{0,5} - 7 = 4x - 7,8$, a ze wzoru (12) $m=3$. Sporządzamy teraz na podstawie wzorów (14) i tablicy III następującą tabelkę:

y	1	ξ^2	ξ^4	ξ^6
1,57915	-1575	1813	-245	7
1,75735	15435	-17465	2065	-35
1,88146	-77175	81837	-4725	63
1,94153	385875	-66185	2905	-35
	628623,75	-2356,2398	-7,7178500	0,12523000

\bar{y}	ξ	ξ^3	ξ^5	ξ^7
-0,42063	225	-259	35	-1
-0,24127	-3087	3493	-413	7
-0,11160	25725	-27279	1575	-21
-0,03067	-385875	66185	-2905	35
	9614,0350	280,62951	-1,7511900	0,0018900000

Powstała ona z tabelki podanej dla $n=7$ w tablicy III przez podstawienie wartości $y_0, y_1, y_2, y_3, y_0, y_1, y_2, y_3$ obliczonych według wzoru (14). W ostatnim wierszu zostały ponadto wypisane współczynniki $B_0^{(7)}, B_2^{(7)}, B_4^{(7)}, B_6^{(7)}, B_1^{(7)}, B_3^{(7)}, B_5^{(7)}, B_7^{(7)}$ obliczone według wzoru (15). Dzieląc je przez $2^n n! = 2^7 \cdot 7! = 645120$ otrzymujemy na mocy wzoru (13) współczynniki $A_0^{(7)}, A_1^{(7)}, \dots, A_7^{(7)}$. Po wstawieniu tych ostatnich do wzoru (11) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) \approx & 0,974429 + 0,0149027\xi - 0,00365241\xi^2 + 0,000435004\xi^3 - \\ & - 0,0000119634\xi^4 - 0,00000271452\xi^5 + \\ & + 0,000000194119\xi^6 + 0,00000000292969\xi^7. \end{aligned}$$

Podstawiamy następnie, zgodnie ze wzorem (17),

$$\xi = 4x - 7,8 = 10(0,4x - 0,78)$$

i otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} f(x) \approx & 0,974429 + 0,149027(0,4x - 0,78) - \\ & - 0,365241(0,4x - 0,78)^2 + 0,435004(0,4x - 0,78)^3 - \\ & - 0,119634(0,4x - 0,78)^4 - 0,271452(0,4x - 0,78)^5 + \\ & + 0,194119(0,4x - 0,78)^6 + 0,029297(0,4x - 0,78)^7. \end{aligned}$$

b) *Poszukiwanie wartości wielomianu interpolacyjnego w danym punkcie.* Jak już o tym była mowa, wartość wielomianu interpolacyjnego $f(x)$ w danym z góry punkcie $x = \bar{x}$ można obliczyć znajdując najpierw wielomian $f(x)$ (na przykład metodą opisaną w poprzednim paragrafie) i podstawiając następnie $x = \bar{x}$. Jeśli jednak nie zależy nam na znalezieniu samego wielomianu $f(x)$, a jedynie na obliczeniu liczby $f(\bar{x})$, to rachunek prowadzimy w znacznie prostszy sposób. Mianowicie piszemy wzór (10) w postaci

$$(18) \quad y = L_0^{(n)}(\xi)y_0 + L_1^{(n)}(\xi)y_1 + \dots + L_n^{(n)}(\xi)y_n$$

i korzystamy z tablic współczynników $L_i^{(n)}(\xi)$, $i=0,1,\dots,n$, które noszą nazwę *współczynników interpolacyjnych Lagrange'a*¹⁾. Obliczenie wartości $f(\bar{x})$ sprowadza się wtedy do obliczenia za pomocą wzoru (9) wartości zmiennej ξ dla $x = \bar{x}$, odczytania przy danym n i ξ współczynników w tablicach i obliczenia y według wzoru (18).

¹⁾ Wydano dość dużo tablic współczynników Lagrange'a. Największym wydawnictwem w tej dziedzinie jest: New York W. P. A. (Work Projects Administration), *Tables of Lagrangian Interpolation Coefficients*, New York, Columbia University Press, 1944. W tablicach tych podane są z dokładnością do 10 miejsc dziesiętnych współczynniki Lagrange'a dla $n=3,4,\dots,10$ i wartości zmiennej ξ w odstępach co 0,001, a dla $n=3,4$ w odstępach nawet co 0,0001.

W braku tablic współczynników interpolacyjnych Lagrange'a można w celu obliczenia wartości funkcji $f(x)$ w danym punkcie przedstawić wzór (10) w postaci

$$(19) \quad y = \varphi(\xi) = \frac{(\xi+n)(\xi+n-2)(\xi+n-4)\dots(\xi-n)}{(-2)^n n!} \times \\ \times \left[\binom{n}{0} \frac{y_0}{\xi+n} - \binom{n}{1} \frac{y_1}{\xi+n-2} + \binom{n}{2} \frac{y_2}{\xi+n-4} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \frac{y_n}{\xi-n} \right],$$

czyli dla n parzystych w postaci

$$(19a) \quad y = \frac{(\xi^2-n^2)(\xi^2-(n-2)^2)(\xi^2-(n-4)^2)\dots(\xi^2-2^2)\xi}{2^n n!} \times \\ \times \left[\binom{n}{0} \frac{y_0}{\xi+n} - \binom{n}{1} \frac{y_1}{\xi+n-2} + \binom{n}{2} \frac{y_2}{\xi+n-4} - \dots + \binom{n}{n} \frac{y_n}{\xi-n} \right],$$

a dla n nieparzystych w postaci

$$(19b) \quad y = \frac{(\xi^2-n^2)(\xi^2-(n-2)^2)\dots(\xi^2-3^2)(\xi^2-1^2)}{2^n n!} \times \\ \times \left[-\binom{n}{0} \frac{y_0}{\xi+n} + \binom{n}{1} \frac{y_1}{\xi+n-2} - \binom{n}{2} \frac{y_2}{\xi+n-4} + \dots + \binom{n}{n} \frac{y_n}{\xi-n} \right].$$

PRZYKŁAD 7. Obliczyć wartość funkcji $f(x)$, określonej w przykładzie 6, w punkcie $x=0$ za pomocą wzoru (19).

Ze wzoru (9) obliczamy najpierw

$$\xi = \frac{2(0-0,2)}{0,5} - 7 = -7,8,$$

następnie $\xi^2=60,84$ i wzór (19b) przybiera postać

$$y = \frac{11,84 \cdot 35,84 \cdot 51,84 \cdot 59,84}{645120} \left(-\frac{0,57926}{-0,8} + 7 \frac{0,75804}{-2,8} - 21 \frac{0,88493}{-4,8} + \right. \\ \left. + 35 \frac{0,95543}{-6,8} - 35 \frac{0,98610}{-8,8} + 21 \frac{0,99653}{-10,8} - 7 \frac{0,99931}{-12,8} + \frac{0,99989}{-14,8} \right) \approx \\ \approx 2,040496(0,724075 - 1,895100 + 3,871569 - 4,917654 + 3,921989 - \\ - 1,937697 + 0,546498 - 0,067560) \approx 0,50220.$$

§ 23. Wzór interpolacyjny Newtona. Podstawiając wzór (44) z rozdziału II do wzoru (7) niniejszego rozdziału i przyjmując $h = \Delta x$ otrzymujemy

$$(20) \quad y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x} \cdot \frac{x - x_0}{1!} + \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x^3} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{n!},$$

co można również zapisać za pomocą wielomianów czynnikowych

$$(21) \quad y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x} \cdot \frac{(x - x_0)^{(1)}}{1!} + \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} \cdot \frac{(x - x_0)^{(2)}}{2!} + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n} \cdot \frac{(x - x_0)^{(n)}}{n!}.$$

W granicy, gdy $\Delta x \rightarrow 0$, otrzymujemy ze wzoru (20) lub (21) wzór Taylora dla wielomianów.

Wzór (20), jak również (21), nosi nazwę *wzoru interpolacyjnego Newtona*. Zastosujemy go do obu głównych zagadnień interpolacyjnych.

a) *Poszukiwanie wielomianu interpolacyjnego.* Duże korzyści rachunkowe można osiągnąć wprowadzając we wzór (20) w miejsce x nową zmienną ξ , określoną wzorem

$$(22) \quad \xi = \frac{x - x_0}{\Delta x}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})}{k! \Delta x^k} &= \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_0 - \Delta x)(x - x_0 - 2\Delta x) \dots (x - x_0 - (k-1)\Delta x)}{k! \Delta x^k} = \\ &= \frac{\xi(\xi - 1)(\xi - 2) \dots (\xi - k + 1)}{k!} = \binom{\xi}{k} \end{aligned}$$

i wzór interpolacyjny Newtona przybiera postać

$$(23) \quad y = y_0 + \Delta y_0 \xi + \Delta^2 y_0 \binom{\xi}{2} + \Delta^3 y_0 \binom{\xi}{3} + \dots + \Delta^n y_0 \binom{\xi}{n}.$$

Postać tę można zapisać symbolicznie jako

$$(24) \quad y = (1 + \Delta)^{\xi} y_0.$$

Rozwijając bowiem (24) według wzoru dwumianowego Newtona, tak jakbyśmy to uczynili, gdyby Δ było symbolem liczby, i uwzględniając

tylko pierwsze $n+1$ wyrazów, otrzymujemy formalnie wzór (23). Wzór (23) jest uogólnieniem wzoru (7) z rozdziału II.

Można we wzorze (23) ugrupować wyrazy podług kolejnych potęg zmiennej ξ . Mamy wtedy na mocy wzoru (16) z rozdziału II

$$(25) \quad y = y_0 + \left(\frac{\Delta y_0}{1!} S_0^1 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} S_1^2 + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} S_{n-1}^n \right) \xi + \\ + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2!} S_0^2 + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} S_1^3 + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} S_{n-2}^n \right) \xi^2 + \\ + \left(\frac{\Delta^3 y_0}{3!} S_0^3 + \frac{\Delta^4 y_0}{4!} S_1^4 + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} S_{n-3}^n \right) \xi^3 + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} S_0^n \xi^n,$$

gdzie S_0^1, S_1^2, \dots są liczbami Stirlinga I rodzaju.

Ze wzoru (25) najwygodniej korzystać sporządzając tabelkę, w którą wpisuje się liczby według następującego schematu (liczby Stirlinga podane są w tablicy II umieszczonej na końcu książki):

(26)

$\frac{\Delta^i y_0}{i!} \backslash \xi^j$	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	ξ^5	\dots	ξ^n
$\frac{\Delta y_0}{1!}$	S_0^1						
$\frac{\Delta^2 y_0}{2!}$	S_1^2	S_0^2					
$\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$	S_2^3	S_1^3	S_0^3				
$\frac{\Delta^4 y_0}{4!}$	S_3^4	S_2^4	S_1^4	S_0^4			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$\frac{\Delta^n y_0}{n!}$	S_{n-1}^n	S_{n-2}^n	S_{n-3}^n	S_{n-4}^n	S_{n-5}^n	\dots	S_0^n
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	\dots	A_n

Mnożąc przez siebie, zgodnie ze wzorem (25), kolumny pierwszą i oznaczoną przez ξ^j otrzymujemy współczynnik A_j do wzoru ostatecznego

$$(27) \quad y = y_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + \dots + A_n \xi^n.$$

PRZYKŁAD 8. Znaleźć za pomocą wzoru (25) funkcję $f(x)$ określoną w przykładzie 6.

Sporządzamy tabelkę różnic

x	y						
0,2	0,57926						
		17878					
0,7	0,75804		-5189				
		12689		-450			
1,2	0,88493		-5639		2106		
		7050		1656		-1803	
1,7	0,95543		-3983		303		800
		3067		1959		-1003	189
2,2	0,98610		-2024		-700		989
		1043		1259		-14	
2,7	0,99653		-765		-714		
		278		545			
3,2	0,99931		-220				
		58					
3,7	0,99989						

Różnice podkreślone bierzemy do dalszego rachunku. Sporządzamy teraz (str. 74) tabelkę (26) biorąc liczby Stirlinga z tablicy II. Zatem zgodnie z (27)

$$y \approx 0,57926 + 0,193291\xi - 0,0041471\xi^2 - 0,01316475\xi^3 + \\ + 0,003048819\xi^4 - 0,0002512917\xi^5 + 0,00000323611\xi^6 + \\ + 0,000000375000\xi^7,$$

gdzie według (22)

$$\xi = \frac{x-0,2}{0,5} = 2x - 0,4 = 10(0,2x - 0,04).$$

Ostatecznie

$$y \approx 0,57926 + 1,93291(0,2x - 0,04) - 0,41471(0,2x - 0,04)^2 - \\ - 13,16475(0,2x - 0,04)^3 + 30,48819(0,2x - 0,04)^4 - \\ - 25,12917(0,2x - 0,04)^5 + 3,23611(0,2x - 0,04)^6 + 3,75000(0,2x - 0,04)^7.$$

b) *Poszukiwanie wartości wielomianu interpolacyjnego w danym punkcie.* Aby obliczyć wartość wielomianu interpolacyjnego $f(x)$ w danym punkcie $x = \bar{x}$, najwygodniej posłużyć się wzorem (23). Mianowicie według (22) obliczamy wartość ξ odpowiadającą wartości $x = \bar{x}$, następnie z danych wartości funkcji $f(x)$ sporządzamy tabelkę różnic i wreszcie

$\frac{\Delta^i \eta_0}{i!}$	η_0	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7
0.178780000000	1							
-0.025945000000	-1	1						
-0.000750000000	2	-3	1					
0.000877500000	-6	11	-6	1				
-0.000150250000	24	-50	35	-10	1			
0.000011111111	-120	274	-225	85	-15	1		
0.000000375000	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
	0.193291	-0.0041471	-0.01316475	0.003048819	-0.0002512917	0.000000323611	0.0000000375000	

wygodnie obliczamy wartość y odpowiadającą danemu ξ ze wzoru (23), jeżeli znamy współczynniki $\binom{\xi}{k}$ dla $k=1, 2, \dots, n$.

Rachunek przebiega najwygodniej, gdy dysponujemy tablicami współczynników $\binom{\xi}{k}$. Tablice takie są znane i często używane. W tablicy V na końcu książki podano wartości współczynników $\binom{\xi}{k}$ dla $\xi=0, 0,01, 0,02, \dots, 1,00$ i $k=1, 2, 3, 4, 5$. Jeśli ξ jest liczbą naturalną, współczynniki $\binom{\xi}{k}$ odczytujemy w tablicy IV; jeśli $\xi=0$, to $\binom{\xi}{k}=0$. Dla ξ całkowitych ujemnych współczynniki $\binom{\xi}{k}$ najwygodniej obliczać z oczywistego wzoru

$$(28) \quad \binom{\xi}{k} = (-1)^k \binom{k-\xi-1}{k},$$

gdzie $\binom{k-\xi-1}{k}$ odczytujemy w tablicy IV. Dla $m < \xi < m+1$, gdzie m jest liczbą całkowitą, współczynniki $\binom{\xi}{k}$ najwygodniej obliczać ze wzoru

$$(29) \quad \binom{\xi}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{\xi-m}{i} \binom{m}{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{\xi}{i} \binom{m}{k-i}^1,$$

gdzie $\xi = \xi - m$. Współczynniki $\binom{m}{k-i}$ odczytujemy w tablicy IV, gdy $m > 0$, natomiast dla $m < 0$ obliczamy za pomocą wzoru (28). W przypadku gdy $m=0$, nie korzystamy ze wzoru (29), lecz odczytujemy współczynniki $\binom{\xi}{k}$ bezpośrednio w tablicy V. Wreszcie współczynniki $\binom{\xi}{i}$ występujące we wzorze (29), odczytujemy w tablicy V.

¹⁾ Wzór (29), prawdziwy również dla m niecałkowitych, można otrzymać mnożąc przez siebie szeregi absolutnie zbieżne dla $|z| < 1$:

$$(1+z)^\xi = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\xi}{\mu} z^\mu \quad \text{ i } \quad (1+z)^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\nu} z^\nu,$$

a następnie porównując współczynniki przy jednakowych potęgach z w otrzymanym iloczynie i w szeregu

$$(1+z)^\xi = (1+z)^{\xi+m} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\xi}{i} z^i.$$

Wzór (29) dla $m=1, 2, 3, 4, 5$ daje

$$\begin{aligned}
 (30) \quad \binom{\bar{\xi}+1}{k} &= \binom{\bar{\xi}}{k-1} + \binom{\bar{\xi}}{k}, \\
 \binom{\bar{\xi}+2}{k} &= \binom{\bar{\xi}}{k-2} + 2\binom{\bar{\xi}}{k-1} + \binom{\bar{\xi}}{k}, \\
 \binom{\bar{\xi}+3}{k} &= \binom{\bar{\xi}}{k-3} + 3\binom{\bar{\xi}}{k-2} + 3\binom{\bar{\xi}}{k-1} + \binom{\bar{\xi}}{k}, \\
 \binom{\bar{\xi}+4}{k} &= \binom{\bar{\xi}}{k-4} + 4\binom{\bar{\xi}}{k-3} + 6\binom{\bar{\xi}}{k-2} + 4\binom{\bar{\xi}}{k-1} + \binom{\bar{\xi}}{k}, \\
 \binom{\bar{\xi}+5}{k} &= \binom{\bar{\xi}}{k-5} + 5\binom{\bar{\xi}}{k-4} + 10\binom{\bar{\xi}}{k-3} + 10\binom{\bar{\xi}}{k-2} + 5\binom{\bar{\xi}}{k-1} + \binom{\bar{\xi}}{k}.
 \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 9. Funkcja $y=f(x)$ przybiera w punktach $\pi/36, 3\pi/36, 5\pi/36, 7\pi/36, 9\pi/36$ wartości 0,087156, 0,258819, 0,422618, 0,573576, 0,707107. Obliczyć wartość funkcji $f(x)$ dla $x=0,105\pi$, zakładając, że $f(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej czwartego.

Sporządzamy przede wszystkim tabelkę różnic

x	y			
$\frac{\pi}{36}$	0,087156			
		171663		
$\frac{3\pi}{36}$	0,258819		-7864	
		163799		-4977
$\frac{5\pi}{36}$	0,422618		-12841	391
		150958		-4586
$\frac{7\pi}{36}$	0,573576		-17427	
		133531		
$\frac{9\pi}{36}$	0,707107			

Przy zapisie różnic nie uwzględniliśmy dla uproszczenia położenia przecinka.

Wprowadzamy teraz nową zmienną zgodnie z (22)

$$\xi = \frac{x - \frac{\pi}{36}}{\frac{2\pi}{36}} = 18 \frac{x}{\pi} - 0,5.$$

Dla $x = 0,105\pi$ jest $\xi = 18 \cdot 0,105 - 0,5 = 1,39$. Wzór (23) przybiera postać

$$(31) \quad y \approx 0,087156 + 0,171663 \cdot 1,39 - \\ - 0,007864 \binom{1,39}{2} - 0,004977 \binom{1,39}{3} + 0,000391 \binom{1,39}{4}.$$

Na mocy wzoru (30) jest $\binom{1,39}{k} = \binom{0,39}{k-1} + \binom{0,39}{k}$, skąd (tablica V)

$$\binom{1,39}{2} \approx 0,39 - 0,11895 = 0,27105,$$

$$\binom{1,39}{3} \approx -0,11895 + 0,06384 = -0,05511,$$

$$\binom{1,39}{4} \approx 0,06384 - 0,04165 = 0,02219.$$

Podstawiając te wartości do wzoru (31) otrzymujemy

$$y \approx 0,32392.$$

Uwaga. Jak łatwo zauważyć, powyższy sposób rozwiązania jest na ogół dłuższy, niż poprzednio opisany oparty na współczynnikach Lagrange'a. Jeśli jednak różnice funkcji $f(x)$ są znane i nie trzeba ich obliczać, to rozwiązanie powyższe znacznie się skraca. Ponadto użycie wzoru Newtona daje jedną bardzo poważną korzyść, której nie mamy stosując wzór Lagrange'a: jeśli zachodzi konieczność dodania jeszcze jednego lub więcej punktów, w których wartość funkcji $f(x)$ jest dana i funkcja $f(x)$ ma być wielomianem wyższego niż poprzednio stopnia, to rachunek wzorem Lagrange'a trzeba wykonywać od nowa, natomiast stosując wzór Newtona wyrazy już znalezione pozostawiamy nadal, a tylko dodajemy do nich wyrazy nowe rzędu wyższego. W ten sposób zaoszczędzamy dużo rachunków.

§ 24. Wzór interpolacyjny Newtona z różnicami wstecznymi.

Ponieważ — jak to wynika ze sposobu wyprowadzenia — wzór (7) nie wymaga ustalenia kolejności punktów $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, więc można go wyprowadzić wychodząc we wzorze (6) z ilorazu różnicowego $[x x_n x_{n-1} \dots x_0]$. Wtedy wzór (7) przybierze postać

$$(32) \quad y = [x_n] + [x_n x_{n-1}](x - x_n) + [x_n x_{n-1} x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \\ + [x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0](x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1).$$

Ponieważ — jak to wynika ze wzoru (43) w rozdziale II — wartość ilorazu różnicowego nie zależy od kolejności punktów, na których został obliczony, więc wzór (32) można napisać w postaci

$$(32a) \quad y = [x_n] + [x_{n-1} x_n](x - x_n) + [x_{n-2} x_{n-1} x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \\ + [x_0 x_1 x_2 \dots x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$