

ROZDZIAŁ X

NOMOGRAFIA

§ 81. Nomogramy siatkowe. W rozdziale VIII zajmowaliśmy się sporządzaniem wykresów funkcji jednej zmiennej. Dla funkcji dwu zmiennych

$$(1) \quad z = f(x, y)$$

należałoby analogicznie konstruować model powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej. Jednakże modele przestrzenne, najprzejrzystej i najwierniej ilustrujące zmienność funkcji dwu zmiennych, są kłopotliwe do wykonania i niemożliwe do publikowania w książce. Geografowie radzą sobie w takim przypadku rysując mapę z warstwicami. Zamiast konstruować przestrzenny model wysokości nad poziomem morza jako funkcji długości i szerokości geograficznej punktu na ziemi rysują oni na odpowiednim papierze funkcyjnym (np. na *siatce Merkatora*) rodzinę krzywych zwanych *warstwicami*, łączących punkty o stałej wysokości nad poziomem morza. Podobnie i my, zamiast konstruować model powierzchni (1), lub ogólniej — powierzchni określonej funkcją uwikłaną

$$(2) \quad F(x, y, z) = 0,$$

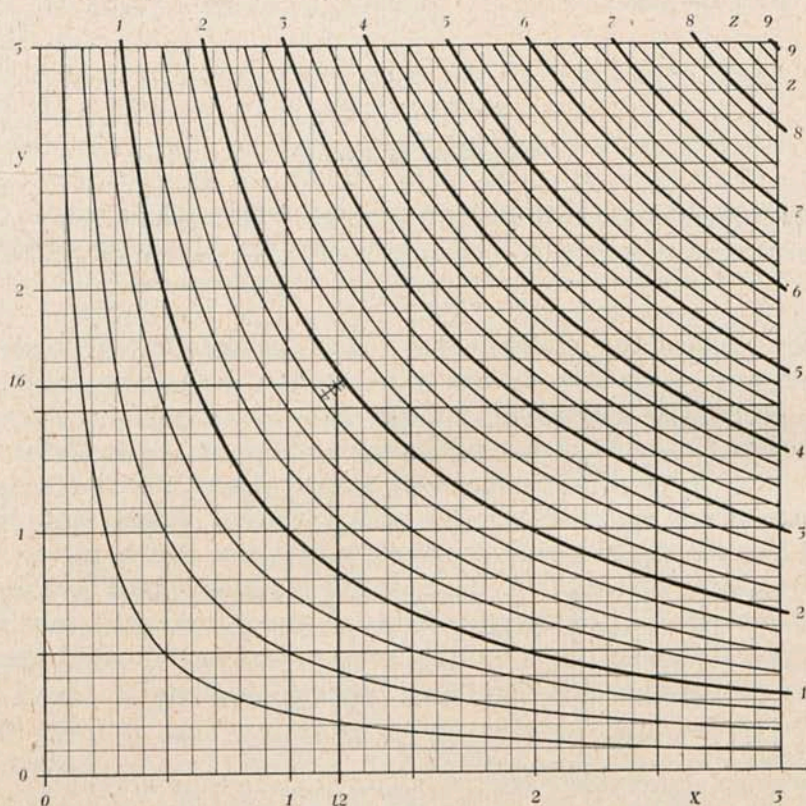
narysujemy na dowolnym papierze funkcyjnym rodzinę krzywych

$$f(x, y) = z_0 \quad \text{lub} \quad F(x, y, z_0) = 0$$

obierając odpowiednio gęsto wartości parametru z_0 . Tak np. rysunek 49 przedstawia na papierze milimetrycznym wykres rodziny krzywych $xy = z_0$. Na rysunku tym uwzględniono przedziały $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$. Moduły na ośiach są równe $a = b = \sqrt{10}$ cm. Krzywe $xy = z_0$ narysowano dla wartości $z_0 = 1/4, 1/2, 3/4, 1, \dots, 35/4$. Tak uzyskany rysunek nazywamy *nomogramem siatkowym* funkcji $z = xy$.

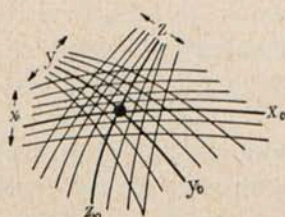
Na nomogramie siatkowym 49 widzimy trzy rodziny linii. Są to dwie rodziny prostych równoległych tworzące papier milimetryczny i jedna rodzina hiperbol równobocznych. Każdej prostej z rodziny prostych prostopadłych do osi odciętych przyporządkowujemy kąt x_0 , jaką na osi odciętych ma punkt przecięcia tej osi z daną prostą. Podobnie każdej prostej z drugiej rodziny przyporządkowujemy odpowiednią kąt y_0 równą kacie punktu przecięcia tej prostej z osią rzędnych, a każdej hiperboli o równaniu $xy = z_0$ przyporządkowujemy kąt z_0 .

Trzy linie o kotach x_0, y_0, z_0 przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy ich koty spełniają równość $x_0 y_0 = z_0$. Znając dowolne dwie spośród trzech wartości x_0, y_0, z_0 (np. x_0 i y_0) możemy z nomogramu



Rys. 49. Nomogram dla równania $z=xy$

49 odczytać nieznaną wartość trzecią, związaną z pozostałymi zależnością $x_0 y_0 = z_0$, odczytując kotę linii przechodzącej przez punkt przecięcia odpowiednich dwóch innych linii o znanych kotach. Tak np. z rysunku 49 odczytujemy, że $1,2 \cdot 1,6 \approx 1,9$ (ponieważ żadna z narysowanych na nomogramie linii z nie przechodzi przez punkt przecięcia linii $x=1,2$, $y=1,6$, musieliśmy dokonać interpolacji między najbliższymi liniami z). Podobnie dla $y=2,45$, $z=5,3$ możemy z nomogramu 49 odczytać $x = z/y \approx 2,16$.

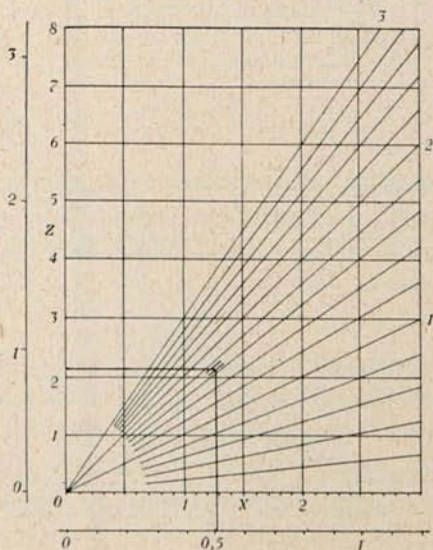


Rys. 50

Ogólnie, *nomogramem siatkowym* funkcji (2) będziemy nazywali trzy rodziny linii, którym przyporządkowano koty przebiegające wartości trzech zmiennych x, y, z w taki sposób, że trzy

linie o kotach x_0, y_0, z_0 przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy ich koty spełniają równanie (2). Jak schematycznie pokazano na rysunku 50, na ogół wszystkie trzy rodziny linii mogą być rodzinami krzywych. Oczywiście najbardziej nas będą interesowały najłatwiejsze do narysowania i zazwyczaj najprostsze w użyciu nomogramy siatkowe, w których wszystkie trzy rodziny linii są rodzinami linii prostych. Dla wielu ważnych i często spotykanych w praktyce funkcji postaci (2) takie prostoliniowe nomogramy siatkowe można łatwo skonstruować. Jednakże nie dla wszystkich funkcji jest to możliwe. Do zagadnienia tego wrócimy jeszcze w dalszych rozważaniach. Łatwo jest jednak zauważyć, że byleby funkcja $F(x, y, z)$ była ciągła w interesującym nas obszarze, to możemy dowolnie ustalić dwie rodziny linii, a więc w szczególności możemy przyjąć dwie rodziny prostych prostopadłych. Na uzyskanym w ten sposób papierze funkcyjnym trzecia rodzina linii będzie już jednoznacznie określona. Ciągłość funkcji $F(x, y, z)$ zakładamy po to, by linie trzeciej rodziny były krzywymi ciągłymi, wypełniały pewien obszar na płaszczyźnie i koty zmieniały się w sposób ciągły wraz ze zmianą krzywych. Dobrze zaprojektowany i starannie wykonany nomogram pozwala w prosty sposób i z wystarczającą na ogół dokładnością odczytywać wartości danej funkcji. Zwłaszcza wtedy, gdy mamy do czynienia z wielokrotnie powtarzanimi analogicznymi obliczeniami, opłaca się trud sporządzenia nomogramu.

Nomogram funkcji $z = xy$ przedstawiony na rysunku 49 łatwo jest zastąpić nomogramem prostoliniowym. Wystarczy w tym celu przyjąć dowolny papier milimetrowy jako siatkę linii x i z . Trzecia rodzina linii będzie teraz pękiem prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych. Taki nomogram siatkowy nazywany jest *nomogramem*



Rys. 51

Crepina (rys. 51). Nomogram ten jest prostoliniowy, ale ma tę wadę, że dla małych wartości x i z linie y są bardzo zagęszczone i błąd odczytu jest duży. Błąd odczytu wartości y przy małych wartościach x i z można zmniejszyć wykorzystując tę własność nomogramu 51, że linie y nie ulegną zmianie, jeżeli w jednakowym stosunku zwiększymy moduły na osiach. Obok umieszczonych na osiach podziałek zmiennych x i z możemy więc narysować powiększone podziałki tych samych zmiennych i posługiwać

się nimi dla małych wartości tych zmiennych. Na rysunku 51 narysowano podziałki o module 2,5 razy większym. Przy użyciu tych pomocniczych podziałek możemy odczytać np. dla $y=1,65$, $z=0,85$, że $x=z/y \approx 0,52$, czego nie mogliśmy pierwotnie uzyskać z taką dokładnością.

Jeżelibyśmy na rysunku 51 wzięli zamiast papieru milimetrowego dowolny papier funkcyjny o równaniach

$$\xi = \alpha f(x), \quad \eta = \beta g(y),$$

to na każdej prostej przechodzącej przez początek układu spełniony byłby warunek

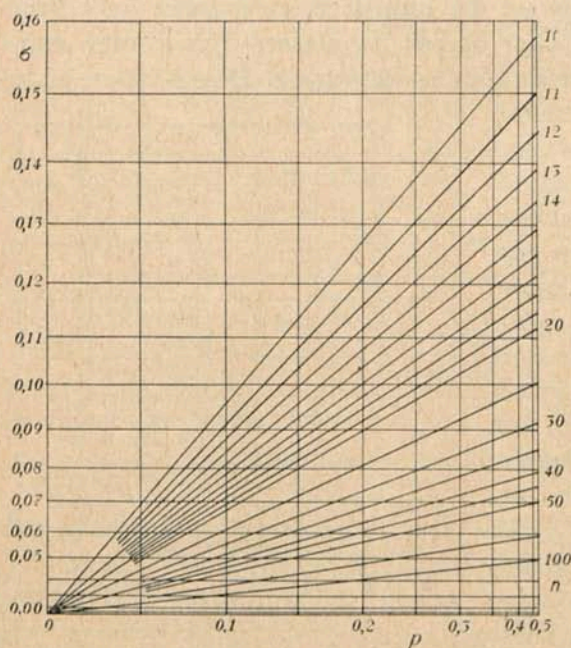
$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{f(x)}{g(y)} = \text{const.}$$

Nadając więc odpowiednie kąty prostym przechodzącym przez początek układu możemy w ten sposób narysować prostoliniowy nomogram siatkowy dla dowolnego równania postaci

$$(3) \quad \frac{f(x)}{g(y)} = h(z),$$

gdzie funkcje $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ są w rozpatrywanych przedziałach monotoniczne, a funkcje $f(x)$, $g(y)$ ograniczone. Na rysunku 52 narysowany jest nomogram do obliczania błędu średniego σ frekwencji udanych doświadczeń w n niezależnych próbach, gdy znane jest prawdopodobieństwo p sukcesu w pojedynczym doświadczeniu. Mamy

$$\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}.$$



Rys. 52

Nomogram wykonano dla przedziałów $0 \leq p \leq 0,5$, $10 \leq n \leq 100$ przyjmując papier funkcyjny o równaniach

$$\xi = 25 \text{ cm} \cdot p(1-p), \quad \eta = 300 \text{ cm} \cdot \sigma^2.$$

Proste należące do rodziny n wyznaczono z warunku

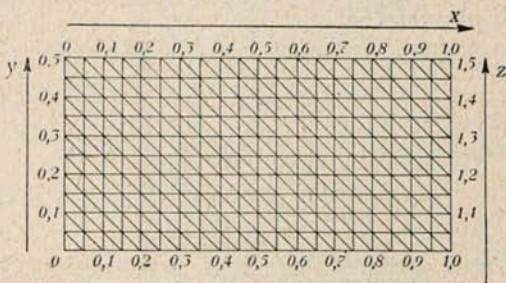
$$\frac{\eta}{300 \text{ cm}} = \frac{\xi}{25 \text{ cm} \cdot n}.$$

Przyjmując $\xi = 6,25$ cm otrzymamy na prawym brzegu rysunku skalę odwrotności o równaniu

$$\eta = 75 \text{ cm} \frac{1}{n}.$$

Łącząc punkty tej skali z początkiem układu otrzymujemy rodzinę prostych n .

Widzimy, że nomogram Crepina, to jest nomogram o dwu rodzinach prostych równoległych i trzeciej rodzinie prostych przechodzących przez punkt, można skonstruować dla dość obszernej klasy funkcji postaci (3). Wadą jego jest to, że proste jednej z rodzin przechodzą przez jeden punkt, w pobliżu którego mamy wielkie zagęszczenie linii, co pociąga za sobą duże błędy odczytywanych kot. Ponadto linie tej rodziny przecinają linie pozostałych dwu rodzin pod zmiennym kątem, niekiedy bardzo małym, co także powoduje poważne błędy przy posługiwaniu się tym nomogramem.



Rys. 53

Najwygodniejsze będą więc takie nomogramy siatkowe, na których wszystkie trzy rodziny linii są rodzinami prostych równoległych. Najprostszym takim nomogramem jest nomogram funkcji

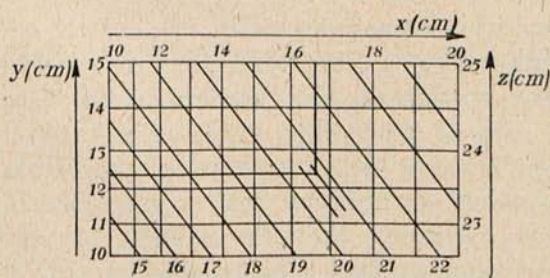
$$z = x + y.$$

Jeżeli za linie rodziny x i y przyjmiemy linie papieru milimetrowego, to linie rodziny z dadzą rodzinę prostych równoległych (rys. 53). Biorąc

zamiast papieru milimetrowego odpowiedni papier funkcyjny oraz odpowiednio cechując proste rodziny z , możemy skonstruować nomogram siatkowy o trzech rodzinach prostych równoległych dla funkcji postaci

$$(4) \quad h(z) = f(x) + g(y),$$

gdzie funkcje $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ są w rozpatrywanych przedziałach



Rys. 54

monotoniczne i ograniczone. Nomogram tego typu nazywany jest *nomogramem Lalanne'a*.

Możemy np. biorąc papier o dwu skalach kwadratowych sporządzić nomogram do rozwiązywania trójkąta prostokątnego na podstawie twierdzenia Pitagorasa

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Na rysunku 54 widzimy taki nomogram narysowany dla przedziałów $10 \text{ cm} \leq x \leq 20 \text{ cm}$, $10 \text{ cm} \leq y \leq 15 \text{ cm}$. Na osiach papieru obrano moduły

$$\alpha = 0,015 \text{ cm}^{-1}, \quad \beta = 0,02 \text{ cm}^{-1}.$$

Proste, które należą do rodziny z odcinają na dolnej krawędzi tego rysunku skalę

$$z^2 = x^2 + (10 \text{ cm})^2 = \frac{\xi}{\alpha} + 100 \text{ cm}^2,$$

czyli skalę

$$\xi = \alpha(z^2 - 100 \text{ cm}^2).$$

Przez punkty tej skali prowadzimy proste rodziny z o współczynniku kierunkowym $k = -\beta/\alpha = -4/3$.

Z nomogramu tego odczytajmy dla przykładu

$$x_0 = \sqrt{z_0^2 - y_0^2} = \sqrt{20,7^2 - 12,3^2} \text{ cm} \approx 16,6 \text{ cm}.$$

Kładąc w równaniu (4)

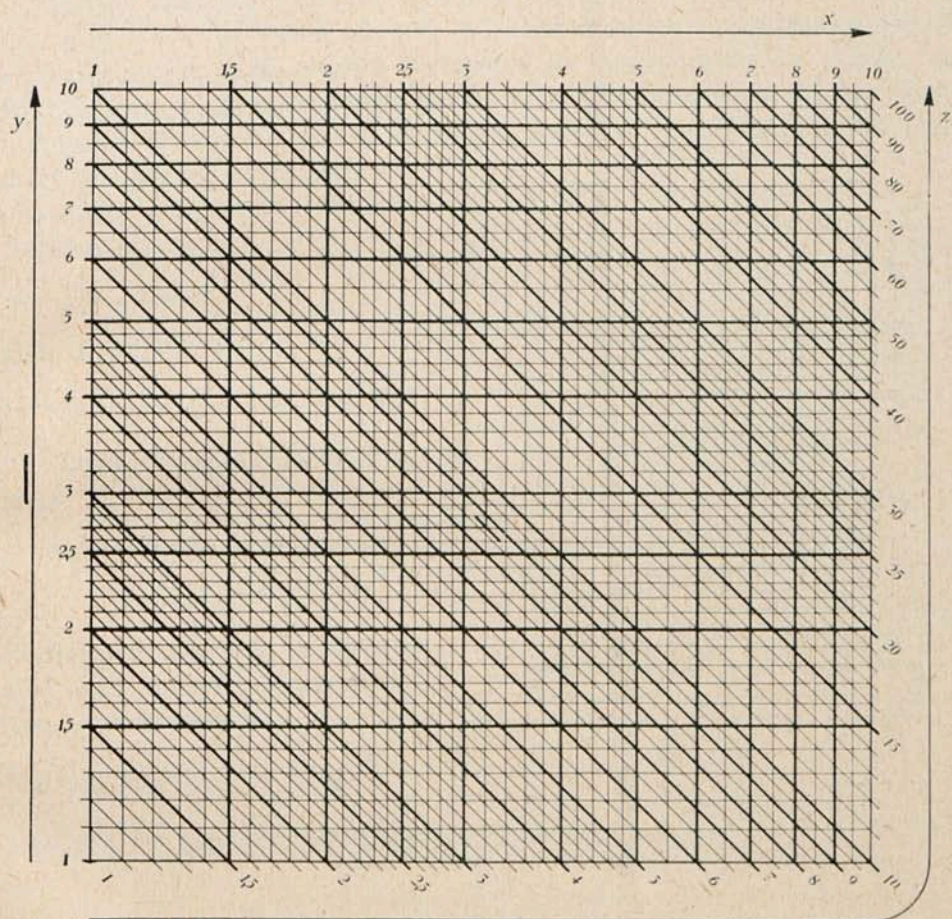
$$f(x) = \log x,$$

$$g(y) = \log y,$$

$$h(z) = \log z$$

otrzymamy na papierze logarytmicznym nomogram siatkowy o trzech rodzinach prostych równoległych dla funkcji $z = xy$. Oczywiście możemy go narysować tylko dla przedziałów zmiennych nie zawierających zera. W naszym przypadku zupełnie nam to wystarczy, bo iloczyn każdego dwu liczb x, y różnych od zera możemy przez przesunięcie przecinka i ewentualną zmianę znaku sprowadzić do iloczynu liczb x, y z przedziałów $1 \leq x \leq 10$, $1 \leq y \leq 10$. Tak więc, podobnie jak przy suwaku logarytmicznym, możemy się ograniczyć tylko do tych przedziałów zmiennych x i y .

Na rysunku 55 pokazany jest taki nomogram wykonany na papierze logarytmicznym o modułach $\alpha = \beta = 10 \text{ cm}$. Linie rodziny z wykreślamy łącząc odpowiadające sobie punkty skal na brzegach papieru logaryt-



Rys. 55. Nomogram dla równania $z=xy$

micznego. Dla $y=1$ mamy bowiem $z=x$ i podobnie dla $x=1$ jest $z=y$. Dla przykładu odczytamy z nomogramu wartość iloczynu

$$z = 0,032 \cdot 27 = 10^{-1} \cdot 3,2 \cdot 2,7 \approx 10^{-1} \cdot 8,65 = 0,865.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli tylko występujące we wzorze (3) funkcje $f(x)$, $g(y)$ i $h(z)$ są różne od zera w interesujących nas przedziałach, to przez logarytmowanie można wyrażenie (3) doprowadzić do postaci (4). Przy uczynionych założeniach można więc dla wyrażenia (3) narysować nomogram siatkowy o trzech rodzinach prostych równoległych. Dla przykładu narysujmy nomogram do obliczania amplitudy drgania tłumionego

$$(5) \quad A = A_0 e^{-kt},$$

gdzie $k = 0,012 \text{ sek}^{-1}$,

$$0 \text{ sek} \leq t \leq 40 \text{ sek}, \quad 1 \leq A_0 \leq 20.$$

Logarytmując (5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \log A &= \log A_0 - kt \log e \approx \\ &\approx \log A_0 - 0,4343 kt. \end{aligned}$$

Nomogram możemy narysować albo na papierze logarytmicznym o równaniach

$$\xi = a \log A, \quad \eta = \beta \log A_0,$$

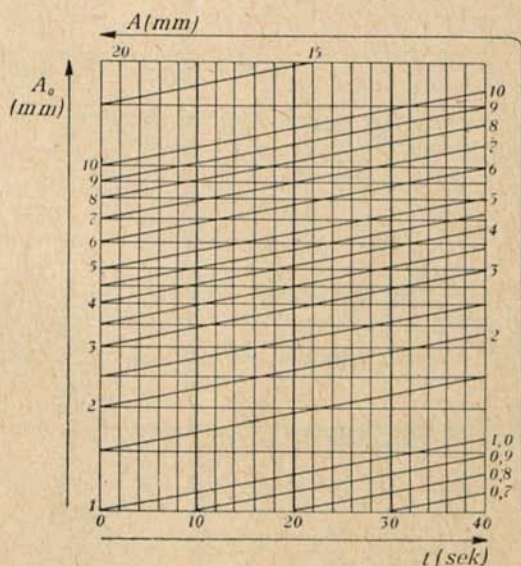
albo też na papierze półlogarytmicznym przyjmując

$$\xi = at, \quad \eta = \beta \log A_0.$$

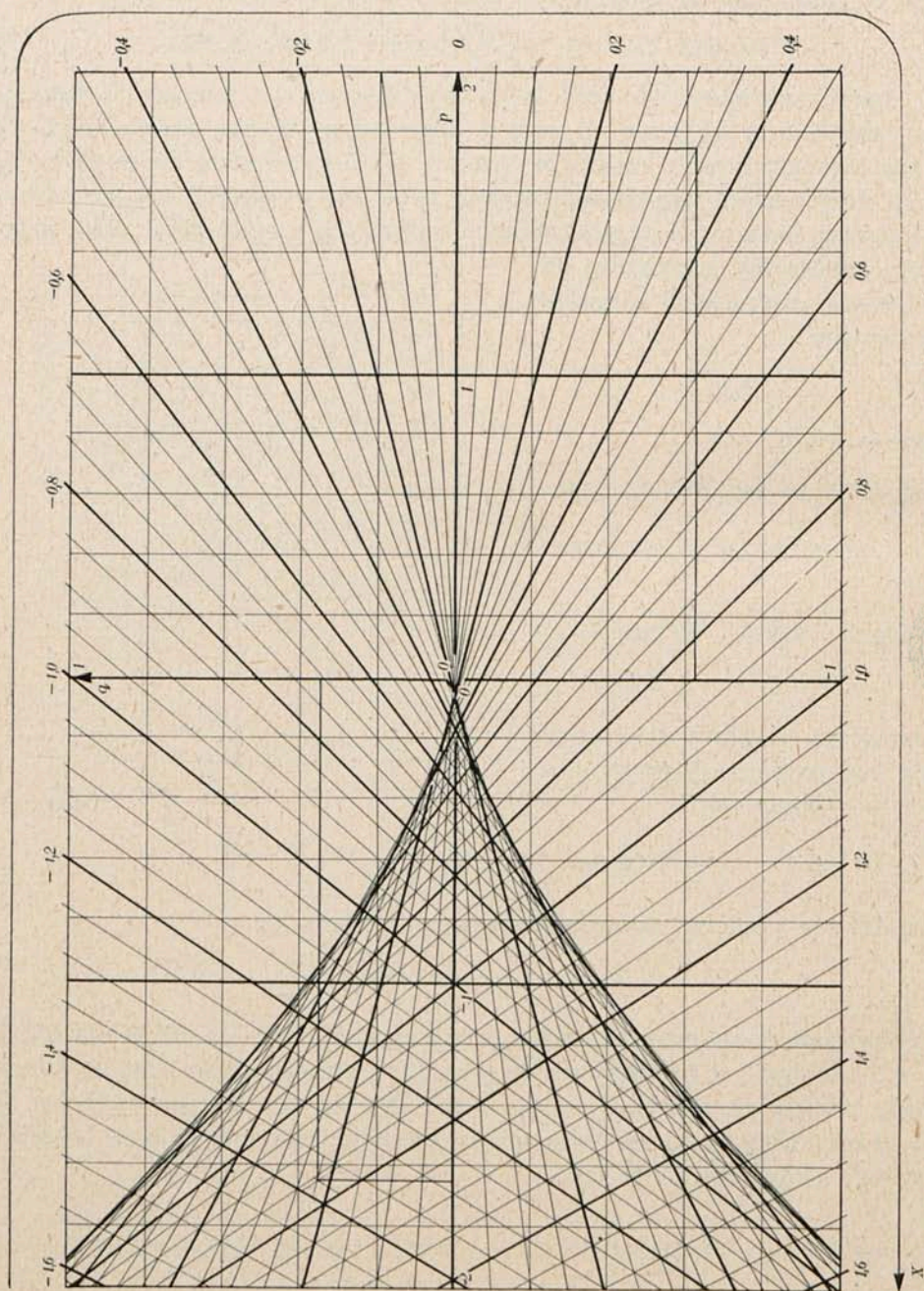
Wyberzemy drugą ewentualność i przyjmijmy moduły $a = 0,125 \text{ cm sek}^{-1}$, $\beta = 4,5 \text{ cm}$. Linie A kreślimy zatem (rys. 56) poprzez punkty skali A_0 korzystając z tego, że dla $t=0$ jest $A=A_0$. Na drugim brzegu rysunku 56 ($t=40 \text{ sek}$) linie A przechodzą przez punkty przesuniętej skali logarytmicznej, której równanie jest

$$\log A = \frac{\eta}{\beta} - 0,4343 k \cdot 40 \text{ sek}, \quad \text{czyli} \quad \eta = \beta \log A + \beta 0,2041.$$

Wiemy już, że nomogram o trzech rodzinach prostych równoległych można narysować dla każdego równania postaci (4), a nomogram o dwu



Rys. 56



Rys. 57 Nomogram dla równania $x^3 + px + q = 0$.

rodzinach prostych równoległych i trzeciej rodzinie prostych przechodzących przez jeden punkt — dla każdego równania postaci (3). Przez logarytmowanie można równanie (3) sprowadzić do postaci (4) i na odwrót przez przejście do funkcji wykładniczych można równanie (4) sprowadzić do postaci (3). Dla równań każdej z tych dwu postaci można więc narysować nomogram siatkowy któregośkolwiek z dwóch omówionych typów.

Nomogram siatkowy, w którym dwie rodziny linii są rodzinami prostych równoległych, a trzecia rodzina linii jest dowolną rodziną prostych, można narysować dla równania postaci

$$(6) \quad h_1(z)f(x) + h_2(z)g(y) + h_3(z) = 0,$$

gdzie funkcje $f(x)$, $g(y)$ są w rozważanych przedziałach monotoniczne i ograniczone. Wystarcza w tym celu za linie x i y przyjąć linie papieru funkcyjnego o równaniach

$$\xi = \alpha f(x), \quad \eta = \beta g(y).$$

Na tym papierze funkcyjnym równanie (6) jest przy ustalonym $z = z_0$ równaniem linii prostej. Podstawiając odpowiednie wartości zmiennej z możemy wykreślić na papierze funkcyjnym proste rodziny z uzyskując nomogram dla równania (6).

Dla przykładu narysujemy *nomogram do znajdowania pierwiastków rzeczywistych równania trzeciego stopnia* (rys. 57)

$$(7) \quad x^3 + px + q = 0,$$

dla $-2 \leq p \leq 2$, $-1 \leq q \leq 1$.

Wartości współczynników p i q równania (7) przyjęliśmy na osiach papieru milimetrowego o modułach $\alpha = 4$ cm, $\beta = 5$ cm. Zależność zmiennej x od zmiennych p i q określona funkcją uwikłaną (7) nie jest jednoznaczna. W zależności od wartości współczynników p i q równanie trzeciego stopnia (7) ma trzy, dwa lub jeden pierwiastek rzeczywisty. Wskutek tego na nomogramie 57 przez pewne punkty płaszczyzny p, q przechodzą trzy linie rodziny x , przez inne dwie i przez pozostałe punkty jedna prosta rodziny x . Rodzina prostych x ma obwiednię o równaniu

$$(8) \quad 27q^2 + 4p^3 = 0.$$

Obwiednia (8) oddziela na płaszczyźnie p, q obszar, w którym spełniona jest nierówność

$$(8a) \quad 27q^2 + 4p^3 > 0,$$

od obszaru, w którym zachodzi nierówność przeciwna

$$(8b) \quad 27q^2 + 4p^3 < 0.$$

Przez każdy punkt pierwszego obszaru przechodzą trzy proste rodziny x . Pokrywa się to ze znanym z algebry faktem, że równanie (7) ma wtedy i tylko wtedy trzy pierwiastki rzeczywiste, gdy spełniona jest nierówność (8a). Przez każdy punkt drugiego obszaru (8b) przechodzi tylko jedna prosta rodziny x . Oznacza to, że w takim przypadku równanie (7) ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty. Punktom leżącym na obwiedni (8) odpowiadają równania (7) mające pierwiastek podwójny.

Na przykład z nomogramu 57 możemy odczytać, że równanie

$$x^3 - 1,65x + 0,35 = 0$$

ma trzy pierwiastki rzeczywiste: $x_1 \approx -1,38$, $x_2 \approx 0,22$, $x_3 \approx 1,16$.

Jeżeli równanie trzeciego stopnia dane jest w postaci

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie $a \neq 0$, to możemy je łatwo sprowadzić do postaci (7) wprowadzając nową zmienną

$$y = x + \frac{a}{3}.$$

Znajdźmy dla przykładu pierwiastki rzeczywiste równania

$$(9) \quad x^3 + 3x^2 + 10x + 3 = 0.$$

Po podstawieniu $x = y - 1$ otrzymujemy z (9) równanie postaci (7)

$$(10) \quad y^3 + 7y - 5 = 0.$$

Pierwiastków tego równania nie możemy odczytać bezpośrednio z rysunku 57, bo współczynniki nie mieszczą się w przedziałach uwzględnionych w naszym nomogramie. Możemy jednak zmniejszyć współczynniki dokonując podstawienia zmiennej. Podstawiając w (10) nową zmienną $y = 2z$ i dzieląc obustronnie równanie przez 8 otrzymujemy

$$(11) \quad z^3 + 1,75z - 0,625 = 0.$$

Z nomogramu 57 odczytujemy, że równanie (11) ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty $z_1 \approx 0,34$. Cofając się przez dokonane podstawienia stwierdzamy, że równanie wyjściowe (9) ma także tylko jeden pierwiastek rzeczywisty $x_1 = 2z_1 - 1 \approx -0,32$.

W omawianych dotychczas przykładach nomogramów siatkowych dwie rodziny linii zawsze były rodzinami prostych równoległych. Zajmiemy się teraz ogólniejszymi nomogramami siatkowymi o trzech rodzinach prostych, nie zakładając równoległości prostych którejkolwiek rodziny.

Niech w dowolnym układzie współrzędnych ξ, η dane są trzy jednoparametrowe rodziny prostych. Równania tych trzech rodzin zapiszemy w najogólniejszej postaci

$$\begin{aligned} & \frac{\xi}{\alpha} f_1(x) + \frac{\eta}{\beta} g_1(x) + h_1(x) = 0, \\ (12) \quad & \frac{\xi}{\alpha} f_2(y) + \frac{\eta}{\beta} g_2(y) + h_2(y) = 0, \\ & \frac{\xi}{\alpha} f_3(z) + \frac{\eta}{\beta} g_3(z) + h_3(z) = 0. \end{aligned}$$

Jeżeli wartości parametrów x, y, z przyporządkujemy jako koty odpowiednim prostym rodzin (12), to trzy proste o kotach x, y, z będą się przecinały w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy ich koty będą spełniały równanie

$$(13) \quad \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Trzy rodziny prostych (12) z przyporządkowanymi kotami x, y, z równymi odpowiednim wartościom parametrów tworzą więc prostoliniowy nomogram siatkowy dla równania (13). Ponieważ wzory (12) są najogólniejszą postacią zapisu trzech jednoparametrowych rodzin linii prostych, a równanie (13) jest warunkiem dostatecznym i koniecznym przecinania się w jednym punkcie trzech prostych (12), więc *prostoliniowy nomogram siatkowy można narysować dla takiej i tylko takiej funkcji*

$$(14) \quad F(x, y, z) = 0,$$

która daje się sprowadzić do postaci (13).

Nie ma ogólnych metod sprowadzania funkcji (14) do postaci (13) i nie dla każdej funkcji jest to możliwe. Nie dla każdej funkcji (14) można więc narysować prostoliniowy nomogram siatkowy. W nomografii rozpatruje się tak zwane *postacie kanoniczne* funkcji (14), które można sprowadzić do postaci (13). Omawiane już przez nas postacie (3), (4) i (6) są najczęściej stosowanymi w praktyce postaciami kanonicznymi. Inną postacią kanoniczną jest równanie

$$(15) \quad \frac{f_1(x) + f_2(y)}{g_1(x) + g_2(y)} = f_3(z).$$

Równanie to jest równoważne równaniu

$$(16) \quad \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & -1 \\ f_3(z) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wychodząc z równania (16) możemy na różne sposoby uzyskać równania rodzin linii prostoliniowego nomogramu siatkowego. Można np. skonstruować nomogram dla równania (16) przyjąwszy następujące równania rodzin prostych:

$$\frac{\xi}{a} f_1(x) + \frac{\eta}{\beta} g_1(x) + 1 = 0, \quad \frac{\xi}{a} f_2(y) + \frac{\eta}{\beta} g_2(y) - 1 = 0, \quad \frac{\xi}{a} f_3(z) + \frac{\eta}{\beta} = 0.$$

W takim nomogramie na ogół żadna z trzech rodzin nie będzie rodziną prostych równoległych. Przyjmując pierwszą kolumnę wyznacznika (16) jako wyrazy wolne w równaniach rodzin linii prostych, a odpowiednio drugą i trzecią kolumnę jako współczynniki przy ξ/a i η/β otrzymujemy inny nomogram siatkowy o równaniach rodzin prostych

$$\frac{\xi}{a} g_1(x) + \frac{\eta}{\beta} + f_1(x) = 0, \quad \frac{\xi}{a} g_2(y) - \frac{\eta}{\beta} + f_2(y) = 0, \quad \frac{\xi}{a} + f_3(z) = 0.$$

W tym nomogramie dla równania (15) rodzina linii z jest rodziną prostych równoległych. Pozostałe rodziny na ogół nie są równoległe.

Narysujmy dla przykładu nomogram dla równania

$$(17) \quad z = \frac{x - y}{\sin x + \cos y}$$

dla przedziałów $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Równanie to sprowadzimy do postaci wyznacznikowej

$$\begin{vmatrix} x & \sin x & 1 \\ -y & \cos y & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

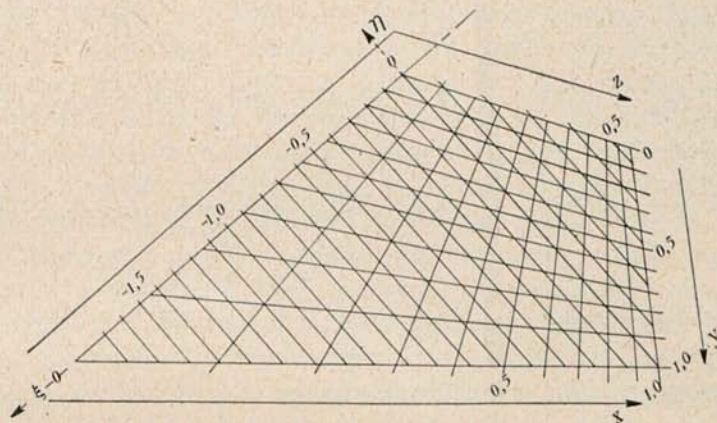
i narysujemy nomogram siatkowy o rodzinach prostych, których równania w układzie współrzędnych ξ, η są

$$\frac{\xi}{a} \sin x + \frac{\eta}{\beta} + x = 0, \quad \frac{\xi}{a} \cos y - \frac{\eta}{\beta} - y = 0, \quad \frac{\xi}{a} + z = 0,$$

czyli

$$\eta = -\frac{\beta \sin x}{a} \xi - \beta x, \quad \eta = \frac{\beta \cos y}{a} \xi - \beta y, \quad \xi = -az.$$

Rysunek 58 przedstawia gotowy już nomogram dla równania (17). Nomogram ten ma tylko jedną rodzinę prostych równoległych, jest to rodzina linii z . Proste pozostałych dwu rodzin nie są równoległe, ani też nie przechodzą przez jeden punkt. Do narysowania tych rodzin musimy obliczyć współrzędne dwóch punktów każdej prostej.



Rys. 58

Widzieliśmy na przykładzie równania (15), że gdy dane równanie (14) udało się nam już doprowadzić do postaci wyznacnikowej (13), to równania (12) rodzin linii nomogramu siatkowego można uzyskać na różne sposoby. Należało tylko przekształcić odpowiednio wyznacznik. Można np. pomnożyć równanie (13) przez dowolny różny od zera wyznacznik

$$(18) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Otrzymamy w ten sposób równanie

$$(19) \quad \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 f_1 + a_2 g_1 + a_3 h_1 & b_1 f_1 + b_2 g_1 + b_3 h_1 & c_1 f_1 + c_2 g_1 + c_3 h_1 \\ a_1 f_2 + a_2 g_2 + a_3 h_2 & b_1 f_2 + b_2 g_2 + b_3 h_2 & c_1 f_2 + c_2 g_2 + c_3 h_2 \\ a_1 f_3 + a_2 g_3 + a_3 h_3 & b_1 f_3 + b_2 g_3 + b_3 h_3 & c_1 f_3 + c_2 g_3 + c_3 h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Przy założeniu (18) równanie (19) jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione jest równanie (13).

Możemy więc narysować prostoliniowy nomogram siatkowy dla funkcji (14) wychodząc z wyznacznika (13) albo z wyznacznika (19). W pierwszym przypadku otrzymujemy równania rodzin linii nomogramu określone wzorami (12), w przypadku drugim otrzymujemy następujące równania:

$$\frac{\xi'}{\alpha'} (a_1 f_1 + a_2 g_1 + a_3 h_1) + \frac{\eta'}{\beta'} (b_1 f_1 + b_2 g_1 + b_3 h_1) + c_1 f_1 + c_2 g_1 + c_3 h_1 = 0,$$

$$\frac{\xi'}{\alpha'} (a_1 f_2 + a_2 g_2 + a_3 h_2) + \frac{\eta'}{\beta'} (b_1 f_2 + b_2 g_2 + b_3 h_2) + c_1 f_2 + c_2 g_2 + c_3 h_2 = 0,$$

$$\frac{\xi'}{\alpha'} (a_1 f_3 + a_2 g_3 + a_3 h_3) + \frac{\eta'}{\beta'} (b_1 f_3 + b_2 g_3 + b_3 h_3) + c_1 f_3 + c_2 g_3 + c_3 h_3 = 0$$

lub po przegrupowaniu wyrazów równania

(20)

$$\left(a_1 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_1 \frac{\eta'}{\beta'} + c_1\right) f_1 + \left(a_2 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_2 \frac{\eta'}{\beta'} + c_2\right) g_1 + \left(a_3 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_3 \frac{\eta'}{\beta'} + c_3\right) h_1 = 0,$$

$$\left(a_1 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_1 \frac{\eta'}{\beta'} + c_1\right) f_2 + \left(a_2 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_2 \frac{\eta'}{\beta'} + c_2\right) g_2 + \left(a_3 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_3 \frac{\eta'}{\beta'} + c_3\right) h_2 = 0,$$

$$\left(a_1 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_1 \frac{\eta'}{\beta'} + c_1\right) f_3 + \left(a_2 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_2 \frac{\eta'}{\beta'} + c_2\right) g_3 + \left(a_3 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_3 \frac{\eta'}{\beta'} + c_3\right) h_3 = 0.$$

Nomogram dla równania (14) o równaniach rodzin linii danych wzorami (20) można uzyskać z nomogramu o równaniach rodzin linii danych wzorami (12) przez przekształcenie płaszczyzny określone wzorami

$$(21) \quad \xi = \alpha \frac{a_1 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_1 \frac{\eta'}{\beta'} + c_1}{a_3 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_3 \frac{\eta'}{\beta'} + c_3}, \quad \eta = \beta \frac{a_2 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_2 \frac{\eta'}{\beta'} + c_2}{a_3 \frac{\xi'}{\alpha'} + b_3 \frac{\eta'}{\beta'} + c_3}.$$

Przekształcenie płaszczyzny określone wzorami (21) przy założeniu warunku (18) zwane jest *przekształceniem rzutowym*. Pozwala ono przez odpowiedni dobór wyznacznika (18) rozrzedzić linie nomogramu siatkowego tam, gdzie są one zbyt gęste, zagęścić linie zbyt rzadkie itp., a więc

poprawić nomogram zwiększając i wyrównując jego dokładność. Może się bowiem zdarzyć, że bezpośrednie wykreślenie nomogramu na podstawie sprowadzonego do postaci wyznacnikowej (13) równania (14) prowadzi do nomogramu nieprzydatnego w praktyce, ale po przekształceniu płaszczyzny otrzymujemy nomogram właściwy. Można np. obrać takie przekształcenie rzutowe (21), które sprowadzi nomogram przedstawiony na rysunku 58 o kształcie nieforemnego czworokąta do kształtu kwadratu lub dowolnego prostokąta. W niniejszym krótkim zarysie nomografii nie możemy zająć się szczegółowo tym zagadnieniem.

Na początku rozdziału mówiliśmy o tym, że dla każdego równania (14) można narysować nomogram siatkowy o dwu rodzinach prostych równoległych i trzeciej rodzinie linii na ogół krzywych. Jeżeli równanie (14) da się sprowadzić do postaci wyznacnikowej (13), to pierwotny nomogram będziemy mogli zastąpić nomogramem, w którym wszystkie trzy rodziny są rodzinami linii prostych. Sprowadzenie równania (14) do postaci (13) nazywamy *anamorfozą*. Anamorfoza nie zawsze jest wykonalna. W rozdziale VIII używaliśmy już terminu anamorfoza nazywając tak takie przekształcenie papieru funkcyjnego, które przeprowadzało wykres danej funkcji na linię prostą. Wykazaliśmy wtedy, że jest to zawsze możliwe i to na wiele sposobów, a także podaliśmy graficzną konstrukcję odpowiedniego papieru funkcyjnego. Omawiana poprzednio anamorfoza jest szczególnym przypadkiem pojęcia, które wprowadziliśmy obecnie używając tego samego terminu. Metoda anamorfozy graficznej, opisana w rozdziale VIII, nie da się jednak poza specjalnymi przypadkami zastosować do wyprostowania całej rodziny krzywych.

W przypadku gdy równanie (14) nie da się sprowadzić do postaci wyznacnikowej (13), musimy się zadowolić nomogramem krzywoliniowym. Nomogramy krzywoliniowe są trudniejsze do narysowania, ale w praktyce mogą się niekiedy okazać lepsze od nomogramów prostoliniowych. Tak np. dla równania

$$z = xy$$

umiemy narysować nomogramy prostoliniowe (rys. 51 i 55); jednakże gdy chcemy go zastosować do obliczania powierzchni prostokątów, to krzywoliniowy nomogram z rysunku 49 okaże się wygodniejszy. Tam na prostopadłych osiach papieru milimetrowego odkładamy bezpośrednio długości boków prostokąta i możemy odczytać za pomocą tego nomogramu pole prostokąta bez pomiaru długości jego boków. Należy w tym celu przyłożyć prostokąt dwoma bokami do osi nomogramu 49, a wierzchołek wskaże na płaszczyźnie linię z o kocie równej powierzchni prostokąta (z uwzględnieniem modułów obranych na osiach). Podany na rysunku 49 przykład odczytu uzyskano obrysowując przyłożone w ten sposób do

nomogramu pudełko zapalek. Uwzględniając moduły na osiach tego nomogramu $a = \beta = \sqrt{10}$ cm dostajemy, że powierzchnia górnej ścianki pudełka od zapalek $z \approx 1,9a\beta = 19$ cm². Taki nomogram, narysowany np. na blacie stołu szklarza, można od razu wycechować wartościami szyby o danej powierzchni (np. w złotych), co pozwoli natychmiast wycenić każdą prostokątną szybę.

W praktyce bardzo często nie znamy analitycznej postaci równania (14). Krzywoliniowy nomogram siatkowy można uzyskać na podstawie wyników pomiarów trzech wielkości związanych nieznanym równaniem (14).

Kiedy indziej, nawet gdy równanie (14) jest znane, lecz ma skomplikowaną postać analityczną, krzywoliniowy nomogram siatkowy można w prosty sposób uzyskać analizując samo zagadnienie, które doprowadza nas do danego równania. Tak np. okazuje się, że dla dość skomplikowanego wzoru analitycznego na dokładność obróbki mechanicznej najprościej jest uzyskać nomogram siatkowy przyjmując jako jedną rodzinę krzywych powiększone profile noża tokarki. Analityczne określenie profilu noża wymagałoby wprowadzenia kilku parametrów.

§ 82. Nomogramy kolineacyjne. W geometrii znana jest *zasada dualizmu*, która głosi, że każde twierdzenie geometryczne o koincydencji punktów i prostych na płaszczyźnie pozostaje prawdziwe, jeżeli w jego wysłowieniu zamienimy wszędzie słowo prosta słowem punkt i na odwrót słowo punkt słowem prosta¹⁾. Zasada omawianych dotychczas prostoliniowych nomogramów siatkowych polegała na tym, że analitycznej relacji spełniania równania (14) przez trzy wartości zmiennych x, y, z odpowiada geometryczna relacja przecinania się w jednym punkcie trzech prostych o kotach x, y, z wybranych z trzech jednoparametrowych rodzin prostych, wycechowanych wartościami tych zmiennych (rys. 50). Zastanówmy się obecnie, co odpowiada równaniu (14) po przetłumaczeniu zasady prostoliniowych nomogramów siatkowych na język pojęć dualnych.

Trzem jednoparametrowym rodzinom prostych w myśl zasady dualizmu odpowiadają trzy jednoparametrowe rodziny punktów, tj. trzy krzywe, których punkty wycechowane są wartościami parametru jako kotami. Geometrycznej relacji przecinania się trzech prostych w jednym punkcie odpowiada leżenie na jednej prostej trzech punktów o kotach x, y, z (rys. 59). Tak więc doszliśmy do sformułowania zasady nomogramu kolineacyjnego.

¹⁾ Ścisłe sformułowanie zasady dualizmu znaleźć można np. w książce M. Stark, *Geometria analityczna*, Monografie Matematyczne XXVI, Warszawa-Wrocław 1951, str. 432.