

Rozdział III

Macierze

§ III.1. Określenie macierzy i podstawowe działania na macierzach

(III.1) DEFINICJA. *Tablicą* nad pierścieniem \mathcal{A} nazywamy każdą funkcję

$$(III.2) \quad \varphi: \mathfrak{N}^2 \mapsto \mathcal{A},$$

spełniającą warunki

$$(III.3) \quad \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} \bigvee_{n_k \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{l \in \mathfrak{N} \\ l > n_k}} \varphi(k, l) = 0,$$

$$\bigwedge_{l \in \mathfrak{N}} \bigvee_{m_l \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathfrak{N} \\ k > m_l}} \varphi(k, l) = 0,$$

gdzie 0 oznacza element zerowy pierścienia \mathcal{A} , czyli \mathcal{A} -zero. ■

(III.4) DEFINICJA. *k-tym wierszem tablicy* (III.2) nazywamy funkcję $\omega_k: \mathfrak{N} \mapsto \mathcal{A}$ określoną wzorem $\omega_k(l) \equiv \varphi(k, l)$, a *l-tą kolumną tablicy* (III.2) funkcję $\kappa_l: \mathfrak{N} \mapsto \mathcal{A}$ określoną wzorem $\kappa_l(k) \equiv \varphi(k, l)$. ■

(III.5) DEFINICJA. *Wyrazem tablicy* (III.2) leżącym w *k*-tym wierszu i w *l*-tej kolumnie, $k, l \in \mathfrak{N}$, nazywamy wartość funkcji φ w punkcie (k, l) , czyli element $\varphi(k, l) \in \mathcal{A}$. ■

Wyraz $\varphi(k, l)$ tablicy (III.2) oznaczamy również prostszym symbolem φ_{kl} lub analogicznym, w którym zamiast φ jest użyta inna litera. Na przykład, wyrazy tablicy (III.2) można oznaczyć symbolami a_{kl} , $k, l \in \mathfrak{N}$.

Dla wygody zapisuje się często wyrazy tablicy w układzie prostokątnym w postaci

$$\begin{array}{|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Wtedy pojęcia wiersza i kolumny tablicy nabierają potocznego znaczenia. \mathcal{A} -zer można

nie pisać, na przykład

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} -1 & & \\ & 2 & -5 \\ & & 7 \end{array} & \text{oznacza tablicę} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 7 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \end{array}$$

(III.6) DEFINICJA III.4. Pierścieniem macierzowym generowanym przez pierścień z transpozycją \mathcal{A} albo pierścieniem macierzowym nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} , albo po prostu pierścieniem macierzowym nazywamy pierścień z transpozycją

$$(III.7) \quad \mathcal{M}[\mathcal{A}] := (\mathfrak{T}[\mathcal{A}], +, \cdot, -, s, t, O, I),$$

gdzie $\mathfrak{T}[\mathcal{A}]$ jest zbiorem wszystkich tablic nad pierścieniem \mathcal{A} , a operacje $+$, \cdot , $-$, s , t , O , I dla dowolnych $A, B, C \in \mathfrak{T}[\mathcal{A}]$ o wyrazach odpowiednio a_{kl} , b_{kl} , $c_{kl} \in \mathcal{A}$, $k, l \in \mathfrak{N}$, są określone wzorami

$$(III.8) \quad C = A + B : \Leftrightarrow \bigwedge_{k, l \in \mathfrak{N}} c_{kl} = a_{kl} + b_{kl},$$

$$(III.9) \quad C = AB : \Leftrightarrow \bigwedge_{k, l \in \mathfrak{N}} c_{kl} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} b_{jl},$$

$$(III.10) \quad B = -A : \Leftrightarrow \bigwedge_{k, l \in \mathfrak{N}} b_{kl} = -a_{kl},$$

$$(III.11) \quad B = \bar{A} : \Leftrightarrow \bigwedge_{k, l \in \mathfrak{N}} b_{kl} = \bar{a}_{kl},$$

$$(III.12) \quad B = A^T : \Leftrightarrow \bigwedge_{k, l \in \mathfrak{N}} b_{kl} = a_{lk}^T,$$

$$(III.13) \quad A = O : \Leftrightarrow \bigwedge_{k, l \in \mathfrak{N}} a_{kl} = 0,$$

$$(III.14) \quad I := \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 1 \\ & & 1 \\ & & & \ddots \end{array}$$

a ponadto jest określone mnożenie przez elementy $\alpha \in \mathcal{A}$ wzorem

$$(III.15) \quad B = \alpha A : \Leftrightarrow \bigwedge_{k, l \in \mathfrak{N}} b_{kl} = \alpha a_{kl},$$

$$B = A\alpha : \Leftrightarrow \bigwedge_{k, l \in \mathfrak{N}} b_{kl} = a_{kl} \alpha. \quad \blacksquare$$

Sprawdzamy, że operacje (III.8), (III.9), (III.10), (III.13) spełniają wszystkie warunki (I.39), ..., (I.45), operacja zero-argumentowa (III.14) warunek

$$(III.16) \quad IA = AI = A,$$

a operacje (III.11) i (III.12) spełniają warunki (I.62), ..., (I.68), wobec czego na mocy definicji (I.60) $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ – istotnie – jest pierścieniem z transpozycją.

W książce niniejszej symbol $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest używany wyłącznie na oznaczanie pierścienia macierzowego nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} . Litera \mathcal{M} jest tu niezmienna, ale może zmieniać się symbol pierścienia \mathcal{A} . Sprawdzamy dalej, że dla mnożenia przez elementy z \mathcal{A} określonego wzorami (III.15) są spełnione wszystkie warunki (I.193), ..., (I.208), wobec czego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ – istotnie – jest pierścieniem nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} .

Na mocy definicji (I.71) w pierścieniu $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ dla dowolnego A jest określona transpozycja sprzężona

$$(III.17) \quad A^* := (\bar{A})^T = \overline{(A^T)}.$$

(III.18) DEFINICJA. Macierzami nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} albo po prostu macierzami nazywamy elementy pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$. ■

(III.19) DEFINICJA. k -tym wierszem macierzy $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, l -tą kolumną macierzy A , wyrazem macierzy A leżącym w k -tym wierszu i l -tej kolumnie tej macierzy, nazywamy odpowiednio k -ty wiersz, l -tą kolumnę tablicy określającej macierz A , wyraz tej tablicy leżący w jej k -tym wierszu i l -tej kolumnie ($k, l \in \mathfrak{N}$). ■

Dla wygody przyjmujemy w książce niniejszej, że macierze są oznaczane dużymi literami łacińskimi kursywą, a ich wyrazy odpowiednimi małymi literami, zaopatrzonymi w dwa wskaźniki, z których pierwszy oznacza numer wiersza, a drugi numer kolumny, w której leży dany wyraz. Piszemy, na przykład,

$$(i) \quad A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

(III.20) DEFINICJA. Macierz (i) nazywamy skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $m, n \in \mathfrak{N}$, że

$$(III.21) \quad \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{l \in \mathfrak{N} \\ l > n}} a_{kl} = 0, \quad \bigwedge_{l \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathfrak{N} \\ k > m}} a_{kl} = 0.$$

W przeciwnym przypadku macierz (i) nazywamy nieskończoną. ■

Z warunków (III.3) wynika, że warunki (III.21) są albo oba spełnione, albo oba niespełnione.

(III.22) DEFINICJA. Wymiarem macierzy skończonej (i) nazywamy każdą taką uporządkowaną parę liczb całkowitych nieujemnych $[m, n]$, że są spełnione warunki (III.21). Wymiarem macierzy nieskończonej nazywamy parę $[\infty, \infty]$. ■

Macierz A o wymiarze $[m, n]$ oznaczamy również symbolem $A_{[m, n]}$. Przyjmujemy umowę, że macierze skończone (i) o wymiarze $[m, n]$ można zapisywać w postaci:

$$A = A_{[m, n]} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gdy $m, n > 0$ i w postaci $A = [0]$, gdy $m = 0$ lub $n = 0$.

(III.23) DEFINICJA. *Minimalnym wymiarem macierzy skończonej (i) nazywamy taki jej wymiar $[m, n]$, dla którego prócz (III.21) są spełnione warunki*

$$(III.24) \quad \bigvee_{j \in \mathbb{N}} a_{mj} \neq 0, \quad \bigvee_{k \in \mathbb{N}} a_{kn} \neq 0$$

albo warunek

$$(III.25) \quad m = n = 0.$$

Minimalnym wymiarem macierzy nieskończonej jest $[\infty, \infty]$. ■

(III.26) DEFINICJA. *Stopniem macierzy skończonej $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy każdą taką liczbę całkowitą nieujemną n , że $[n, n]$ jest wymiarem macierzy A . Stopniem macierzy nieskończonej nazywamy ∞ . Minimalnym stopniem macierzy nazywamy najmniejszy ze stopni macierzy.* ■

Macierz A stopnia n oznaczamy również symbolem $A_{[n]}$.

(III.27) PRZYKŁAD. Macierz (III.14) jest nieskończona. Jej wymiarem jest $[\infty, \infty]$, a stopniem ∞ . ■

(III.28) PRZYKŁAD. Macierz

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

jest skończona. Dla każdej pary liczb naturalnych $m \geq 2$ i $n \geq 5$ $[m, n]$ jest wymiarem macierzy A . Każda liczba naturalna $n \geq 5$ jest stopniem macierzy A . Można, na przykład, napisać $A = A_{[6,7]} = A_{[9]}$. Minimalnym wymiarem macierzy A jest $[2, 5]$. ■

(III.29) DEFINICJA. *Główną przekątną macierzy $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy ciąg jej wyrazów $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots)$.* ■

(III.30) DEFINICJA. *Wyrazem przekątniowym albo wyrazem diagonalnym macierzy $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy każdy jej wyraz a_{kk} , $k = 1, 2, \dots$* ■

(III.31) DEFINICJA. *Wyraz a_{kl} macierzy $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy nadprzekątniowym wtedy i tylko wtedy, gdy $k < l$, a podprzekątniowym wtedy i tylko wtedy, gdy $k > l$.* ■

(III.32) PRZYKŁAD. Dla macierzy A z przykładu (III.28) główną przekątną jest $(1, 3, 0, 0, \dots)$, wyrazami przekątniowymi są $1, 3, 0, 0, \dots$, nadprzekątniowymi $2, 4, 5, 6, 0$. Podprzekątniowe są wszystkie równe zeru. ■

(III.33) PRZYKŁAD. Oto przykłady działań na macierzach nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C}

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & -3+i & -1 \\ -i & 1-2i & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & i \\ 0 & 2i & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2+i & -1+i \\ -i & 1 & 10 \end{bmatrix}, \\ & [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [9], \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3] = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \\ & 3 \begin{bmatrix} 2 & -3+i & -1 \\ -i & 1-2i & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9+3i & -3 \\ -3i & 3-6i & 15 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & -3+i & -1 \\ -i & 1-2i & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -3-i & -1 \\ i & 1+2i & 5 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 2 & -3+i & -1 \\ -i & 1-2i & 5 \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -3+i & 1-2i \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 2 & -3+i & -1 \\ -i & 1-2i & 5 \end{bmatrix}^* &= \begin{bmatrix} 2 & i \\ -3-i & 1+2i \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 2 & -3+i & -1 \\ -i & 1-2i & 5 \end{bmatrix}^3 &= \begin{bmatrix} 2 & -3+i & -1 \\ -i & 1-2i & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3+i & -1 \\ -i & 1-2i & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3+i & -1 \\ -i & 1-2i & 5 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 19+13i & -7+19i & -40+42i \\ -5-4i & 5+10i & -8-2i \end{bmatrix}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Jak widać z powyższego przykładu, mnożenie macierzy nie jest przemienne, tzn. dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest na ogół $AB \neq BA$. Wobec tego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nie jest, na ogół, pierścieniem przemennym. Na mocy definicji (I.109) $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nie jest, na ogół, pierścieniem całkowitym. Na mocy definicji (I.130) i (I.156) $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nie jest, na ogół, pierścieniem uporządkowanym ani nawet częściowo uporządkowanym.

§ III.2. Typy szczególne macierzy

(III.34) DEFINICJA. *Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy każdą macierz $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, której wszystkie wyrazy podprzekątniowe (nadprzekątniowe) są \mathcal{A} -zerami.* ■

(III.35) DEFINICJA. *Macierzą trójkątną nazywamy każdą macierz trójkątną górną i każdą macierz trójkątną dolną.* ■

(III.36) DEFINICJA. *Macierzą diagonalną nazywamy każdą macierz $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, której wszystkie wyrazy poza główną przekątną są \mathcal{A} -zerami.* ■

(III.37) PRZYKŁAD. Pierwsze dwie z macierzy nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C}

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ 0 & i & 1+i \end{bmatrix}, \quad [2+i \quad \frac{1}{2}], \quad \begin{bmatrix} 0 & & \\ 7 & -2 & \\ 5 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & & \\ 1 & -i & \\ 1 & 1 & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 0,2 & \end{bmatrix}$$

są trójkątne górne, następne dwie trójkątne dolne, ostatnia jest diagonalna. ■

Macierz diagonalną skończoną n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) oznaczamy symbolem $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, gdzie $(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ jest główną przekątną tej macierzy. Analogicznie macierz diagonalną nieskończoną oznaczamy symbolem $\text{diag}(a_1, a_2, \dots)$, jeżeli funkcja przyporządkowująca liczbom naturalnym $k \in \mathfrak{N}$ wyrazy diagonalne a_k jest znana albo przynajmniej łatwa do odgadnięcia.

(III.38) PRZYKŁAD

$$\text{diag}(3, \sqrt{2}, \pi) = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & \pi \end{bmatrix}, \quad \text{diag}(1, 2, 3, \dots) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

(III.39) DEFINICJA. *Macierzą trójdziagonalną* nazywamy każdą macierz $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, dla której $a_{kl} = 0$, gdy $l < k - 1$ albo $l > k + 1$. \blacksquare

(III.40) PRZYKŁAD. Macierz nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R}

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & & \\ -3 & 4 & -5 & \\ & 6 & -7 & 8 \\ & & -9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

jest trójdziagonalna. \blacksquare

(III.41) DEFINICJA. *Macierzą zerową* O w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy macierz, której wszystkie wyrazy są zerami, a *macierzą jedyneką* macierz (III.14), czyli

$$I := \text{diag}(1, 1, 1, \dots),$$

gdzie 1 oznacza \mathcal{A} -jedynekę. \blacksquare

(III.42) DEFINICJA. *Macierzą quasi-jedyneką n -tego stopnia* ($n \in \mathbb{N}$) w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy macierz skończoną

$$I_{[n]} := \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ razy}}),$$

gdzie 1 oznacza \mathcal{A} -jedynekę. \blacksquare

W książce niniejszej symbolem I oznaczamy tylko macierz jedyneką, a symbolem $I_{[n]}$ tylko macierz quasi-jedyneką n -tego stopnia.

Z łatwością sprawdzamy, że dla dowolnej macierzy skończonej $A_{[n]}$

$$(III.43) \quad I_{[n]} A = A I_{[n]} = A,$$

przy założeniu, że A i $I_{[n]}$ są macierzami z tego samego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$.

(III.44) DEFINICJA. *Macierzą skalarną* nazywamy każdą macierz nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} postaci $\text{diag}(\alpha, \alpha, \dots)$, gdzie $\alpha \in \mathcal{A}$. \blacksquare

(III.45) DEFINICJA. *Macierzą quasi-skalarną n -tego stopnia* ($n \in \mathbb{N}$) nazywamy każdą macierz skończoną nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} postaci $\text{diag}(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{n \text{ razy}})$, gdzie $\alpha \in \mathcal{A}$. \blacksquare

Sprawdzamy, że mnożenie macierzy nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} przez element $\alpha \in \mathcal{A}$ jest równoważne mnożeniu lewostronnemu lub prawostronnemu przez macierz skalarną $\text{diag}(\alpha, \alpha, \dots)$, a w przypadku macierzy skończonych n -tego stopnia przez macierz

quasi-skalarną n -tego stopnia $\text{diag}(\alpha, \dots, \alpha)$:

$$(III.46) \quad \begin{aligned} \alpha I &= I\alpha = \text{diag}(\alpha, \alpha, \dots), \\ \alpha I_{[n]} &= I_{[n]} \alpha = \text{diag}(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{n \text{ razy}}). \end{aligned}$$

Sprawdzamy też z łatwością, że dla pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ -liczbami całkowitymi są macierze skalarne (III.46) dla α będących \mathcal{A} -liczbami całkowitymi.

Szczególą rolę w teorii macierzy odgrywają macierze skończone określonego stopnia. Sprawdzamy z łatwością, że dla każdego pierścienia macierzowego (III.7) algebra

$$(III.47) \quad \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}] := (\mathfrak{T}_{[n]}[\mathcal{A}], +, \cdot, -, s, t, O, I_{[n]}),$$

gdzie $\mathfrak{T}_{[n]}[\mathcal{A}]$ jest zbiorem wszystkich macierzy skończonych n -tego stopnia ($n \in \mathbb{N}$) nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} , jest podpierścieniem, dla którego $\mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$ -liczbami całkowitymi są macierze quasi-skalarne n -tego stopnia (III.45) dla α będących \mathcal{A} -liczbami całkowitymi.

(III.48) DEFINICJA. Podpierścieniem macierzowym n -tego stopnia ($n \in \mathbb{N}$) pierścienia macierzowego (III.7) nazywamy podpierścień (III.47). ■

(III.49) DEFINICJA. Macierz A z dowolnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy samosprzężoną, symetryczną, hermitowską, quasi-rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy w pierścieniu $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ A jest elementem odpowiednio samosprzężonym, symetrycznym, hermitowskim, quasi-rzeczywistym (patrz definicja (I.93)). ■

Łatwo sprawdzić, że każdą macierz A nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} można przedstawić w postaci

$$(III.50) \quad A = A_1 + A_2 i,$$

gdzie A_1 i A_2 są macierzami nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} . Dla macierzy (III.50) mamy

$$(III.51) \quad \bar{A} = A_1 - A_2 i, \quad A^T = A_1^T + A_2^T i, \quad A^* = A_1^T - A_2^T i.$$

(III.52) DEFINICJA. Częścią rzeczywistą macierzy zespolonej (III.50) nazywamy macierz A_1 , a częścią urojoną macierz A_2 . ■

Część rzeczywistą macierzy (III.50) oznaczamy symbolem $\text{re } A$, część urojoną $\text{im } A$. Mamy zatem $A = \text{re } A + i \text{im } A$.

(III.53) PRZYKŁAD. Macierz nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C}

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 2i & 0 & 4 + i \\ 1 + i & 1 & -\sqrt{2} - i \end{bmatrix}$$

można napisać w postaci

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} i.$$

Mamy

$$\text{re } A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \text{im } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

(III.54) DEFINICJA. *Macierzą rzeczywistą* nazywamy każdą macierz nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} . ■

(III.55) DEFINICJA. *Macierzą zespoloną* nazywamy każdą macierz nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} . ■

(III.56) DEFINICJA. Macierz $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy *skośnie symetryczną* wtedy i tylko wtedy, gdy $A^T = -A$. ■

(III.57) DEFINICJA. Macierz $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy *skośnie hermitowską* wtedy i tylko wtedy, gdy $A^* = -A$. ■

(III.58) PRZYKŁAD. Pierwszą z macierzy zespolonych

$$\begin{bmatrix} 0 & 5-2i & 1 \\ 5-2i & 3+i & 4-7i \\ 1 & 4-7i & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 5-2i & 1 \\ -5+2i & 0 & 4-7i \\ -1 & -4+7i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5-2i & 1 \\ 5+2i & 3 & 4-7i \\ 1 & 4+7i & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 5-2i & 1 \\ -5-2i & 3i & 4-7i \\ -1 & -4-7i & 5i \end{bmatrix}$$

jest symetryczna, druga skośnie symetryczna, trzecia hermitowska, a ostatnia skośnie hermitowska. ■

W macierzy skośnie symetrycznej wszystkie wyrazy przekątniowe muszą być \mathcal{A} -zerami. W macierzy hermitowskiej wszystkie wyrazy przekątniowe muszą być elementami hermitowskimi, a więc w przypadku macierzy hermitowskiej zespolonej liczbami rzeczywistymi.

W przypadku macierzy nad pierścieniami o elementach quasi-rzeczywistych pojęcia macierzy symetrycznej i macierzy hermitowskiej oraz pojęcia macierzy skośnie symetrycznej i macierzy skośnie hermitowskiej pokrywają się, ponieważ macierze nad pierścieniami o elementach quasi-rzeczywistych są macierzami samosprzężonymi i dla dowolnej takiej macierzy A mamy $\bar{A} = A$ oraz $A^* = A^T$.

(III.59) DEFINICJA. *Regularnym pierścieniem macierzowym* nazywamy każdy pierścień macierzowy nad pierścieniem całkowitym z transpozycją. *Macierzą regularną* nazywamy każdą macierz z regularnego pierścienia macierzowego. ■

Z definicji (III.59) wynika, że dla każdej macierzy regularnej mnożenia (III.15) są identyczne.

Zauważmy, że nawet macierz nad ciałem może być właściwym dzielnikiem zera, na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

Z przykładu (III.33) widać, że mnożenie nawet macierzy nad ciałem nie jest, na ogół, przemienne.

(III.60) DEFINICJA. *Półwektorem wierszowym (kolumnowym)* nazywamy każdą macierz o wymiarze $[1, p]$ ($[p, 1]$). W szczególności *półwektorem wierszowym zerowym* albo *pół-*

wektorem kolumnowym zerowym nazywamy każdą macierz zerową. W przypadku macierzy nad ciałem półwektor wierszowy (kolumnowy) nazywamy wektorem wierszowym (kolumnowym), a macierz zerową – wektorem wierszowym zerowym albo wektorem kolumnowym zerowym. ■

§ III.3. Hipermacierze

(III.61) DEFINICJA. Hipermacierzą nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} albo po prostu hipermacierzą nazywamy macierz nad pierścieniem macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, czyli macierz, której wyrazami są macierze nad pierścieniem \mathcal{A} . ■

Dla wygody w późniejszych zapisach wskaźniki wierszy i kolumn hipermacierzy piszemy w nawiasach u góry. Na przykład, hipermacierz A piszemy w postaci

$$A := \begin{bmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} & \dots \\ A^{(21)} & A^{(22)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Wtedy wyrazy macierzy $A^{(kl)}$ oznaczamy symbolami $a_{uv}^{(kl)}$ ($k, l, u, v \in \mathfrak{N}$).

(III.62) DEFINICJA. Rozpisaniem hipermacierzy

$$(i) \quad A := \begin{bmatrix} A^{(11)} & \dots & A^{(1n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A^{(m1)} & \dots & A^{(mn)} \end{bmatrix}$$

w wymiarach $(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)$, gdzie $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n \in \mathfrak{N}$ i każda para uporządkowana $[p_k, q_l]$ jest wymiarem macierzy $A^{(kl)}$ ($k \leq m, l \leq n$), nazywamy funkcję, która każdej hipermacierzy (i) nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} przyporządkowuje macierz nad pierścieniem \mathcal{A}

$$(ii) \quad X_{[p_1 + \dots + p_m, q_1 + \dots + q_n]} = \text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} A$$

według następującego wzoru:

Jeżeli $k > 1$ i $l > 1$

$$(iii) \quad p_1 + \dots + p_{k-1} < r \leq p_1 + \dots + p_k, \quad u := r - (p_1 + \dots + p_{k-1}),$$

$$q_1 + \dots + q_{l-1} < s \leq q_1 + \dots + q_l, \quad v := s - (q_1 + \dots + q_{l-1}),$$

to

$$(iv) \quad x_{rs} = a_{uv}^{(kl)}.$$

Jeżeli $k = 1$ i $r \leq p_1$, to przyjmujemy w (iv) $u = r$, a jeżeli $l = 1$ i $s \leq q_1$, to $v = s$.

Dla $r > p_1 + \dots + p_m$ lub $s > q_1 + \dots + q_n$ przyjmujemy

$$(v) \quad x_{rs} = 0. \quad \blacksquare$$

(III.63) PRZYKŁAD. Dla hipermacierzy nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C}

$$A := \begin{bmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} & A^{(13)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} & A^{(23)} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$A^{(11)} := [2 \ -3 \ 1], \quad A^{(12)} := \begin{bmatrix} -7+2i & 0 \\ -1 & -4-i \end{bmatrix}, \quad A^{(13)} := \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$A^{(21)} := [9+5i \ -8i], \quad A^{(22)} := [3 \ -i \ 3], \quad A^{(23)} := [\pi],$$

mamy

$$\text{matr}_{(3,1) \times (3,4,1)} A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -7+2i & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4-i & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9+5i & -8i & 0 & 3 & -i & 3 & 0 & \pi \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

(III.64) TWIERDZENIE. Jeżeli dla hipermacierzy

$$A := \begin{bmatrix} A^{(11)} & \dots & A^{(1n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A^{(m1)} & \dots & A^{(mn)} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} B^{(11)} & \dots & B^{(1n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ B^{(m1)} & \dots & B^{(mn)} \end{bmatrix}$$

każda para uporządkowana liczb naturalnych $[p_k, q_l]$ jest wymiarem macierzy $A^{(kl)}$ i wymiarem macierzy $B^{(kl)}$ ($k \leq m, l \leq n$), to

$$\begin{aligned} \text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} (A+B) &= \text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} A + \text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} B. \end{aligned}$$

Dowód wynika z definicji (III.62). \blacksquare

(III.65) TWIERDZENIE. Jeżeli dla pierwszej z hipermacierzy

$$A := \begin{bmatrix} A^{(11)} & \dots & A^{(1t)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A^{(m1)} & \dots & A^{(mt)} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} B^{(11)} & \dots & B^{(1n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ B^{(t1)} & \dots & B^{(tn)} \end{bmatrix}$$

każda para uporządkowana liczb naturalnych $[p_k, h_j]$ jest wymiarem macierzy $A^{(kj)}$ ($k \leq m, j \leq t$), a dla drugiej każda para uporządkowana $[h_j, q_l]$ jest wymiarem macierzy $B^{(jl)}$ ($j \leq t, l \leq n$), to

$$\text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} AB = \text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (h_1, \dots, h_t)} A \cdot \text{matr}_{(h_1, \dots, h_t) \times (q_1, \dots, q_n)} B.$$

Dowód polega na sprawdzeniu ostatniej równości rachunkiem. \blacksquare

(III.66) TWIERDZENIE. Dla dowolnej hipermacierzy (i)

$$\text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} (-A) = -\text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} A,$$

$$\overline{\text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} A} = \text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} \bar{A},$$

$$(\text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} A)^T = \text{matr}_{(q_1, \dots, q_n) \times (p_1, \dots, p_m)} A^T.$$

Dowód wynika z definicji (III.62). ■

(III.67) TWIERDZENIE. Dla dowolnej hipermacieży (i) nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} i dla dowolnego elementu $a \in \mathcal{A}$ jest

$$\text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} (aA) = a \cdot \text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} A.$$

Dowód wynika z definicji (III.62). ■

Należy zauważyć, że na mocy twierdzeń (III.64), ..., (III.67) działania na hipermacieżach są analogiczne do odpowiednich działań na macierzach, otrzymanych z tych hipermacieży przez rozpisanie w odpowiednich wymiarach. Stanowi to główne korzyści ze stosowania hipermacieży.

(III.68) PRZYKŁAD. Niech będą dane hipermacieże nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R}

$$A := \begin{bmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} B^{(11)} & B^{(12)} \\ B^{(21)} & B^{(22)} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$A^{(11)} := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{(12)} := \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$A^{(21)} := [0 \ 1], \quad A^{(22)} := [3],$$

$$B^{(11)} := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^{(12)} := \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$B^{(21)} := [1 \ 6], \quad B^{(22)} := [-3].$$

Mamy

$$X := \text{matr}_{(2,1) \times (2,1)} A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \sqrt{2} \\ 0 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$Y := \text{matr}_{(2,1) \times (2,1)} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Widzimy, że

$$A + B = \begin{bmatrix} A^{(11)} + B^{(11)} & A^{(12)} + B^{(12)} \\ A^{(21)} + B^{(21)} & A^{(22)} + B^{(22)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd

$$\text{matr}_{(2,1) \times (2,1)} (A + B) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & \sqrt{2} \\ 0 & 8 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

i zgodnie z twierdzeniem (III.64)

$$\text{matr}_{(2,1) \times (2,1)} (A + B) = X + Y.$$

Widzimy dalej, że

$$AB = \begin{bmatrix} A^{(11)}B^{(11)} + A^{(12)}B^{(21)} & A^{(11)}B^{(12)} + A^{(12)}B^{(22)} \\ A^{(21)}B^{(11)} + A^{(22)}B^{(21)} & A^{(21)}B^{(12)} + A^{(22)}B^{(22)} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$A^{(11)}B^{(11)} + A^{(12)}B^{(21)} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} [1 \ 6] = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 6\sqrt{2}-14 \\ \frac{1}{2} & 19 \end{bmatrix},$$

$$A^{(11)}B^{(12)} + A^{(12)}B^{(22)} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} [-3] = \begin{bmatrix} 6-3\sqrt{2} \\ -\frac{19}{2} \end{bmatrix},$$

$$A^{(21)}B^{(11)} + A^{(22)}B^{(21)} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + [3] [1 \ 6] = [3 \ 22],$$

$$A^{(21)}B^{(12)} + A^{(22)}B^{(22)} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + [3] [-3] = [-11],$$

więc

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 6\sqrt{2}-14 \\ \frac{1}{2} & 19 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6-3\sqrt{2} \\ -\frac{19}{2} \end{bmatrix} \\ [3 \ 22] & [-11] \end{bmatrix},$$

skąd

$$\text{matr}_{(2,1) \times (2,1)} AB = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 6\sqrt{2}-14 & 6-3\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & 19 & -\frac{19}{2} \\ 3 & 22 & -11 \end{bmatrix}$$

i zgodnie z twierdzeniem (III.65)

$$\text{matr}_{(2,1) \times (2,1)} AB = XY. \quad \blacksquare$$

Zdanie „macierz X przedstawia się w postaci hipermacierzy A ” należy rozumieć jako zdanie

$$X = \text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} A.$$

W przypadkach szczególnych, gdy wymiary $(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)$ są ustalone, zwyczajowo dopuszcza się tu zapis

$$X = A.$$

Często przedstawia się macierz w postaci hipermacierzy, której wyrazami są wiersze lub kolumny danej macierzy. Jeżeli, na przykład,

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

i wiersze macierzy A traktujemy jako półwektory wierszowe

$$A_{k*} := [a_{k1} \dots a_{kq}], \quad k=1, \dots, p,$$

a kolumny jako półwektory kolumnowe

$$A_{*l} = \begin{bmatrix} a_{1l} \\ \vdots \\ a_{pl} \end{bmatrix}, \quad l=1, \dots, q,$$

to piszemy

$$A = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{p*} \end{bmatrix} \quad \text{albo} \quad A = [A_{*1} \dots A_{*q}]$$

zwyczajowo rozumiejąc te równości jako

$$A = \text{matr}_{(1, \dots, 1) \times (q)} \begin{bmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{p*} \end{bmatrix}$$

albo

$$A = \text{matr}_{(p) \times (1, \dots, 1)} [A_{*1} \dots A_{*q}].$$

W książce niniejszej przyjmujemy umowę ogólniejszą, upraszczającą zapis rozpisywania hipermacierzy. Jeżeli mianowicie dla każdej z macierzy $A^{(kl)}$ będących wyrazami hipermacierzy A nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} jest podany jej wymiar (p_k, q_l) , $k=1, \dots, m$; $l=1, \dots, n$, to równość

$$X = \begin{bmatrix} A_{[p_1, q_1]}^{(11)} & \dots & A_{[p_1, q_n]}^{(1n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{[p_m, q_1]}^{(m1)} & \dots & A_{[p_m, q_n]}^{(mn)} \end{bmatrix} = A,$$

gdzie X jest macierzą nad pierścieniem \mathcal{A} , rozumiemy jako

$$X = \text{matr}_{(p_1, \dots, p_m) \times (q_1, \dots, q_n)} A.$$

W szczególności równość

$$X = \text{diag}(A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_k]}^{(k)}),$$

gdzie X jest macierzą nad pierścieniem \mathcal{A} , rozumiemy jako

$$X = \text{matr}_{(n_1, \dots, n_k) \times (n_1, \dots, n_k)} \text{diag}(A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_k]}^{(k)}).$$

§ III.4. Permutacje

Pojęcie permutacji jest potrzebne dla późniejszego zdefiniowania wyznacznika macierzy i dla dowodów niektórych własności wyznaczników

(III.69) DEFINICJA. Permutacją ciągu (j_1, \dots, j_n) , $n \in \mathbb{N}$, o którym zakładamy, że

$$(i) \quad j_u \neq j_v \quad \text{dla} \quad u \neq v,$$

nazywamy każdy taki ciąg (k_1, \dots, k_n) , że

$$(ii) \quad \{k_1, \dots, k_n\} = \{j_1, \dots, j_n\}. \quad \blacksquare$$

Z powyższej definicji wynika, że

$$(iii) \quad k_u \neq k_v \quad \text{dla} \quad u \neq v$$

jak również, że każdy ciąg skończony spełniający warunek (i) jest sam dla siebie permutacją.

W niniejszej książce będziemy mieć do czynienia wyłącznie z permutacjami, których wyrazy są liczbami naturalnymi. Dlatego przyjmujemy w definicji (III.69)

$$j_1, \dots, j_n \in \mathfrak{N}.$$

(III.70) DEFINICJA. *Przestawieniem* w permutacji nazywamy każdą parę jej wyrazów, z zachowaniem ich kolejności, w której wyraz większy poprzedza mniejszy. ■

Symbolem $\pi(j_1, \dots, j_n)$ oznaczamy liczbę przestawień w permutacji (j_1, \dots, j_n) .

(III.71) DEFINICJA. Permutację (j_1, \dots, j_n) nazywamy *parzystą*, gdy liczba $\pi(j_1, \dots, j_n)$ jest parzysta, a *nieparzystą*, gdy liczba $\pi(j_1, \dots, j_n)$ jest nieparzysta. ■

(III.72) DEFINICJA. *Znakiem permutacji* (j_1, \dots, j_n) nazywamy liczbę

$$(III.73) \quad \sigma(j_1, \dots, j_n) := (-1)^{\pi(j_1, \dots, j_n)}. \quad \blacksquare$$

(III.74) PRZYKŁAD. Ciąg $(5, 3, 1, 4, 2)$ jest permutacją ciągu $(1, 2, 3, 4, 5)$. Jest to permutacja nieparzysta, ponieważ ma 7 przestawień

$$(5, 3), \quad (5, 1), \quad (5, 4), \quad (5, 2), \quad (3, 1), \quad (3, 2), \quad (4, 2).$$

Mamy tutaj $\pi(5, 3, 1, 4, 2) = 7$ i $\sigma(5, 3, 1, 4, 2) = (-1)^7 = -1$. Znakiem permutacji $(5, 3, 1, 4, 2)$ jest zatem liczba -1 . ■

(III.75) DEFINICJA. *Permutacją główną* ciągu (j_1, \dots, j_n) spełniającego warunek (i) nazywamy permutację

$$(k_1, \dots, k_n) = \langle j_1, \dots, j_n \rangle,$$

dla której $\pi(k_1, \dots, k_n) = 0$. ■

Z powyższej definicji wynika, że jeżeli (k_1, \dots, k_n) jest permutacją główną, to $k_1 < \dots < k_n$.

Jak łatwo zauważyć, dla każdego ciągu skończonego spełniającego warunek (i) permutacja główna istnieje i to dokładnie jedna.

(III.76) PRZYKŁAD. Permutacją główną ciągu $(2, 4, 3, 1)$ jest $(1, 2, 3, 4)$. ■

(III.77) DEFINICJA. *Ciągiem podwójnym* nazywamy ciąg $((j_1, k_1), \dots, (j_n, k_n))$, $n \in \mathfrak{N}$, utworzony z uporządkowanych i różnych par liczb naturalnych i spełniający warunki (i) i (iii). ■

Ciąg podwójny $((j_1, k_1), \dots, (j_n, k_n))$ zapisujemy również w postaci

$$(iv) \quad \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix}.$$

(III.78) DEFINICJA. Permutacją ciągu podwójnego (iv) nazywamy każdy ciąg podwójny $\begin{pmatrix} p_1, \dots, p_n \\ q_1, \dots, q_n \end{pmatrix}$ taki, że

$$\{(j_1, k_1), \dots, (j_n, k_n)\} = \{(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)\}. \quad \blacksquare$$

(III.79) PRZYKŁAD. Ciąg podwójny $\begin{pmatrix} 5, 3, 1, 4, 2 \\ 1, 2, 3, 4, 5 \end{pmatrix}$ jest permutacją ciągu podwójnego $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 5, 2, 4, 1 \end{pmatrix}$. \blacksquare

(III.80) TWIERDZENIE. Istnieje dokładnie $n!$ permutacji ciągu (j_1, \dots, j_n) spełniającego warunek (i).

Dowód. Stosujemy indukcję. Twierdzenie jest oczywiste dla $n=1$. Jeżeli jest prawdziwe dla $n=k$, to dla każdego wyrazu j_l ciągu (j_1, \dots, j_{k+1}) istnieje $k!$ permutacji wyrazów pozostałych. Wobec tego przyjmując kolejno j_1, \dots, j_{k+1} jako ostatni wyraz permutacji ciągu (j_1, \dots, j_{k+1}) otrzymujemy $(k+1) \cdot k!$ permutacji tego ciągu, czyli twierdzenie jest wtedy prawdziwe również dla $n=k+1$. \blacksquare

(III.81) TWIERDZENIE. Przez zamianę dwu wyrazów w permutacji otrzymuje się permutację o przeciwnym znaku.

Dowód. Wykażemy najpierw prawdziwość tezy w przypadku zamiany dwu wyrazów sąsiednich, tzn. prawdziwość wzoru

$$(v) \quad \sigma(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, j_k, j_{k+2}, \dots, j_n) = -\sigma(j_1, \dots, j_n), \quad k=1, \dots, n-1.$$

Istotnie, wszystkie pary (j_r, j_s) z wyjątkiem (j_k, j_{k+1}) będące przestawieniem w permutacji (j_1, \dots, j_n) są przestawieniem również po zamianie i odwrotnie. Jedynie para (j_k, j_{k+1}) przechodząc w parę (j_{k+1}, j_k) zwiększa lub zmniejsza liczbę przestawień o 1, skąd teza.

Jeśli w permutacji (j_1, \dots, j_n) dokonujemy zamiany wyrazów j_r i j_s , $r < s$, to można to zrobić drogą $2(s-r)-1$ zamian sąsiednich wyrazów, zmieniając w ten sposób $2(s-r)-1$ razy znak permutacji na przeciwny, skąd wynika teza. \blacksquare

(III.82) TWIERDZENIE. Jeżeli (j_1, \dots, j_n) jest permutacją ciągu $(1, \dots, n)$, to

$$(III.83) \quad \sigma(j_1, \dots, j_n) = (-1)^{k+j_k} \sigma(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n), \quad k=1, \dots, n.$$

Dowód. Dokonując $n-k$ zamian sąsiednich wyrazów, otrzymujemy na mocy (v)

$$\sigma(j_1, \dots, j_n) = (-1)^{n-k} \sigma(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n, j_k).$$

Ponieważ w zbiorze $\{1, \dots, n\}$ istnieje $n-j_k$ liczb większych od j_k , więc przez opuszczenie wyrazu j_k zmniejszamy liczbę przestawień permutacji $(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n, j_k)$ o $n-j_k$, skąd teza. \blacksquare

(III.84) TWIERDZENIE. Jeżeli $\begin{pmatrix} k_1, \dots, k_n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix}$ jest permutacją ciągu podwójnego $\begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ j_1, \dots, j_n \end{pmatrix}$, to

$$\sigma(k_1, \dots, k_n) = \sigma(j_1, \dots, j_n).$$

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.81) przejście od permutacji (j_1, \dots, j_n) do permutacji $(1, \dots, n)$ dokonuje się drogą parzystej liczby zamian, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest parzysta, a drogą nieparzystej liczby zamian, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest nieparzysta, ponieważ permutacja $(1, \dots, n)$ jest parzysta. Wobec tego równolegle permutacja $(1, \dots, n)$ przechodzi w permutację (k_1, \dots, k_n) parzystą, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest parzysta, i nieparzystą, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest nieparzysta, skąd teza. ■

(III.85) TWIERDZENIE. Jeżeli (j_1, \dots, j_n) jest permutacją ciągu $(1, \dots, n)$, to dla każdego $p \in \{1, \dots, n-1\}$

$$(vi) \quad \sigma(j_1, \dots, j_n) = (-1)^{\left(\sum_{s=1}^p j_s\right) - \frac{p^2+p}{2}} \sigma(j_1, \dots, j_p) \sigma(j_{p+1}, \dots, j_n).$$

Dowód. Dla liczby przestawień w ciągu (j_1, \dots, j_n) mamy oczywisty wzór

$$(vii) \quad \pi(j_1, \dots, j_n) = \pi(j_1, \dots, j_p) + \pi(j_{p+1}, \dots, j_n) + \pi_0,$$

gdzie π_0 jest liczbą przestawień między wyrazami, z których jeden wyraz należy do ciągu (j_1, \dots, j_p) , a drugi do ciągu (j_{p+1}, \dots, j_n) . Obliczymy π_0 . Zauważmy, że π_0 nie zależy od kolejności wyrazów ciągu (j_1, \dots, j_p) ani od kolejności wyrazów ciągu (j_{p+1}, \dots, j_n) . Wobec tego π_0 jest liczbą przestawień między wyrazami, z których jeden należy do ciągu $(k_1, \dots, k_p) := \langle (j_1, \dots, j_p) \rangle$, a drugi do ciągu $(l_1, \dots, l_{n-p}) := \langle (j_{p+1}, \dots, j_n) \rangle$. Dla każdego wyrazu k_s ($1 \leq s \leq p$) istnieje w ciągu $(1, \dots, n)$ $n - k_s$ liczb większych, natomiast w ciągu $(k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_{n-p})$ jest $n - s$ wyrazów leżących po k_s . Wobec tego wyraz k_s daje w tym ostatnim ciągu $(n - s) - (n - k_s) = k_s - s$ przestawień. Stąd

$$\pi_0 = \pi(k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_{n-p}) = \sum_{s=1}^p (k_s - s) = \left(\sum_{s=1}^p k_s \right) - \frac{p^2 + p}{2} = \left(\sum_{s=1}^p j_s \right) - \frac{p^2 + p}{2},$$

a po podstawieniu do (vii) na mocy (III.73) otrzymujemy wzór (vi). ■

§ III.5. Wyznaczniki

(III.86) DEFINICJA. Wyznacznikiem n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) macierzy nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A}

$$(i) \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

nazywamy element pierścienia \mathcal{A} :

$$(III.87) \quad \det_n A := \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie możliwe permutacje (j_1, \dots, j_n) ciągu $(1, \dots, n)$. ■