

Dowód. Na mocy twierdzeń (VII.47) i (V.155) jest

$$A \approx \text{diag}(S_{[n_1]}^{(1)}, \dots, S_{[n_s]}^{(s)}) = D, \quad n := n_1 + \dots + n_s, \\ [n, n]$$

gdzie $S_{[n_k]}^{(k)}$ jest formą kanoniczną Smitha macierzy wielomianowej $A_{[n_k]}^{(k)}$ ($k=1, \dots, s$). Istnieje taka macierz permutacyjna P , że w macierzy wielomianowej $S := P^{-1}DP$ pierwszymi $(r_1 + \dots + r_s)$ wyrazami diagonalnymi są wielomiany (v) . Ponieważ macierze wielomianowe S i D są równoważne w wymiarze $[n, n]$, więc również macierze A i S są równoważne w wymiarze $[n, n]$. Ponieważ macierz wielomianowa S spełnia warunki (VII.37), (VII.38) i (VII.39), więc na mocy twierdzenia (VII.47) jest formą kanoniczną Smitha macierzy wielomianowej A . Stąd wynika teza. ■

(VII.53) TWIERDZENIE. Macierze $A_{[n]}$ i $B_{[n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} są podobne w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy macierze wielomianowe $AA^0 - I_{[n]}A$ i $BA^0 - I_{[n]}A$ mają wspólną formę kanoniczną Smitha ($A = (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 = (I, O, O, \dots)$).

Dowód wynika z twierdzeń (VII.33) i (VII.50). ■

(VII.54) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} suma stopni wielomianów niezmienniczych macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ ($A = (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 = (I, O, O, \dots)$) jest równa n .

Dowód. Na mocy twierdzenia (VII.47) istnieją takie macierze wielomianowe $M_{[r]}$ i $N_{[n]}$ macierzowo nieosobliwe w n -tym stopniu, że

$$M(AA^0 - I_{[n]}A) = \text{diag}(i_1, \dots, i_n) \cdot N,$$

gdzie i_1, \dots, i_n są wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$, której rząd jest równy n . Na mocy twierdzenia (III.113) oraz definicji (VII.28)

$$(-1)^n \cdot \det_n M \cdot \chi_n = i_1 \dots i_n \cdot \det_n N.$$

Z nieosobliwości macierzy wielomianowych M i N wynika, że $\det_n M$ i $\det_n N$ są wielomianami odwracalnymi, a zatem wielomianami stopnia zerowego. Wielomian χ_n jest stopnia n . Zatem z ostatniej równości na mocy twierdzenia (II.25) otrzymujemy tezę. ■

§ VII.5. Dzielniki elementarne macierzy wielomianowej

(VII.55) DEFINICJA. Dzielnikiem elementarnym macierzy wielomianowej $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} nazywamy każdy moniczny czynnik elementarny jej wielomianów niezmienniczych. ■

(VII.56) DEFINICJA. Układem dzielników elementarnych macierzy wielomianowej $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} nazywamy zbiór wszystkich par (μ_j, ν_j) , $j=1, \dots, p$, gdzie μ_1, \dots, μ_p są różnymi dzielnikami elementarnymi macierzy wielomianowej A , a ν_j jest liczbą naturalną pokazującą, w ilu wielomianach niezmienniczych macierzy wielomianowej A występuje czynnik elementarny μ_j . ■

(VII.57) TWIERDZENIE. *Wielomiany niezmiennicze oraz układ dzielników elementarnych z rzędem macierzy wielomianowej $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} wyznaczają się nawzajem jednoznacznie.*

Dowód. Na mocy twierdzenia (II.102) wielomiany niezmiennicze macierzy wielomianowej A wyznaczają jednoznacznie jej układ dzielników elementarnych, a jej rząd jest równy liczbie wielomianów niezmienniczych. Odwrotnie, jeśli dany jest układ dzielników elementarnych i rząd r macierzy wielomianowej A , to dla każdej pary (μ_j, v_j) , gdzie v_j jest liczbą wystąpień dzielnika elementarnego μ_j , można znaleźć w układzie wszystkie takie pary $(\mu_{k_1}, v_{k_1}), \dots, (\mu_{k_p}, v_{k_p})$, w których dzielnik elementarny μ_{k_l} , $l=1, \dots, p$, jest podzielny przez μ_j . Wtedy μ_j jest czynnikiem elementarnym każdego z wielomianów niezmienniczych $i_{r-v_j-v_{k_1}-\dots-v_{k_p}+1}, \dots, i_{r-v_{k_1}-\dots-v_{k_p}}$. Widzimy, że znajomość układu dzielników elementarnych i rzędu macierzy wielomianowej A pozwala znaleźć czynniki elementarne wszystkich jej wielomianów niezmienniczych, a z uwagi na moniczność tych wielomianów również same jej wielomiany niezmiennicze. ■

(VII.58) PRZYKŁAD. Dla macierzy wielomianowej A z przykładu (VII.43) wielomianami niezmienniczymi były $i_1 := e$, $i_2 := \lambda$, $i_3 := -\lambda + \lambda^3 = \lambda(-e + \lambda)(e + \lambda)$. Wobec tego układem dzielników elementarnych macierzy wielomianowej A jest

$$(\lambda, 2), \quad (-e + \lambda, 1), \quad (e + \lambda, 1).$$

Gdyby był dany ten układ dzielników elementarnych i rząd 3 macierzy wielomianowej A , wiedzielibyśmy, że λ jest czynnikiem elementarnym wielomianów niezmienniczych i_2 i i_3 , a $-e + \lambda$ oraz $e + \lambda$ czynnikami elementarnymi wielomianu niezmienniczego i_3 . Z uwagi na moniczność wielomianów i_1, i_2, i_3 otrzymalibyśmy stąd $i_1 = e$, $i_2 = \lambda$, $i_3 = \lambda(-e + \lambda) \times (e + \lambda) = -\lambda + \lambda^3$. ■

(VII.59) TWIERDZENIE. *Macierze wielomianowe $A_{[m,n]}$ i $B_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} są równoważne w wymiarze $[m, n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam rząd i ten sam układ dzielników elementarnych.*

Dowód wynika z twierdzeń (VII.50) i (VII.57). ■

(VII.60) DEFINICJA. *Sumą układów dzielników elementarnych*

$$(i) \quad (\mu_1^{(j)}, v_1^{(j)}), \dots, (\mu_{p_j}^{(j)}, v_{p_j}^{(j)}), \quad j=1, \dots, k,$$

nazywamy taki układ dzielników elementarnych

$$(\mu_1, v_1), \dots, (\mu_p, v_p),$$

w którym μ_1, \dots, μ_p są wszystkimi różnymi dzielnikami elementarnymi spośród $\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_{p_1}^{(1)}, \dots, \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{p_k}^{(k)}$, a liczba v_l wystąpień dzielnika elementarnego μ_l ($l=1, \dots, p$) jest sumą liczb jego wystąpień w układach (i). ■

(VII.61) TWIERDZENIE. *Układ dzielników elementarnych macierzy wielomianowej nad ciałem z transpozycją \mathcal{F}*

$$A_{[m,n]} := \begin{bmatrix} A_{[m_1, n_1]}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{[m_k, n_k]}^{(k)} \end{bmatrix},$$

gdzie $m := m_1 + \dots + m_k$, $n := n_1 + \dots + n_k$, jest sumą układów dzielników elementarnych macierzy wielomianowych $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$.

Dowód. Na mocy twierdzenia (VII.47) każda z macierzy wielomianowych $A^{(j)}$ ($j = 1, \dots, k$) jest równoważna w wymiarze $[m_j, n_j]$ swojej formie kanonicznej Smitha $S^{(j)} := \text{diag}(i_1^{(j)}, \dots, i_{r_j}^{(j)})$, gdzie r_j jest rzędem macierzy wielomianowej $A^{(j)}$. Wobec tego na mocy twierdzenia (V.155) macierz wielomianowa A jest równoważna macierzy wielomianowej

$$\begin{bmatrix} S_{[m_1, n_1]}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S_{[m_k, n_k]}^{(k)} \end{bmatrix}$$

i na mocy twierdzeń (V.120) i (V.122) równoważna macierzy wielomianowej

$$D_{[r]} := \begin{bmatrix} i_1^{(1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & i_{r_1}^{(1)} & \\ & & & \ddots \\ & & & & i_1^{(k)} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & i_{r_k}^{(k)} \end{bmatrix},$$

gdzie $r := r_1 + \dots + r_k$ i na mocy twierdzeń (V.34) i (V.161) r jest rzędem macierzy wielomianowej A . Na mocy twierdzenia (VII.59) wystarczy wykazać, że układ dzielników elementarnych macierzy wielomianowej D jest sumą układów dzielników elementarnych macierzy wielomianowych $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$.

Niech

$$(ii) \quad (\mu_1, v_1), \dots, (\mu_q, v_q)$$

będzie sumą układów dzielników elementarnych macierzy wielomianowych $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$. Niech

$$\alpha^{v_1}, \dots, \alpha^{v_t}, \quad v_1 < \dots < v_t,$$

będą wszystkimi spośród dzielników elementarnych μ_1, \dots, μ_q , które są potęgami czynnika pierwszego α . Niech ponadto $v_0 = 0$ i $\alpha^{v_0} = e$. Niech p_j ($j = 0, \dots, t$) oznacza liczbę wyrazów przekątniowych macierzy wielomianowej D , dla których α^{v_j} jest, a $\alpha^{v_{j+1}}$ nie jest dzielnikiem. Mamy zatem $p_0 + \dots + p_t = r$. Z powyższego wynika, że wszystkie minory j -tego stopnia macierzy wielomianowej D są dla

$$(iii) \quad p_0 + \dots + p_{l-1} < j \leq p_0 + \dots + p_l, \quad l \in \{1, \dots, t\},$$

podzielne przez

$$(iv) \quad \alpha^{p_0 v_0 + p_{l-1} v_{l-1} + (j - p_1 - \dots - p_{l-1}) v_l}$$

i istnieje pomiędzy nimi minor niepodzielny przez

$$\alpha^{p_0 v_0 + p_{l-1} v_{l-1} + (j - p_1 - \dots - p_{l-1}) v_l + 1}.$$

Wynika stąd, że wielomian (iv) jest czynnikiem elementarnym wielomianu d_j będącego

największym wspólnym monicznym dzielnikiem wszystkich minorów j -tego stopnia macierzy wielomianowej D ($j=1, \dots, r$). Jeżeli i_1, \dots, i_r są wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej D , to na mocy (iv) i (VII.42) dla wielomianu i_j , gdzie j spełnia warunek (iii), wielomian α^{v_i} jest czynnikiem elementarnym i wobec tego α^{v_i} jest dzielnikiem elementarnym macierzy wielomianowej D . Powtarza się on p_i razy, a mianowicie w wielomianach $i_{p_0+\dots+p_{i-1}+1}, \dots, i_{p_0+\dots+p_i}$. Wobec tego para (α^{v_i}, p_i) należy do układu dzielników elementarnych macierzy wielomianowej D , a p_i z definicji jest sumą liczb wystąpień dzielnika elementarnego α^{v_i} w układach dzielników elementarnych macierzy wielomianowych $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$, wobec czego (α^{v_i}, p_i) jest zarazem jedną z par (ii). Z uwagi na dowolność czynnika pierwszego α oraz fakt, że wszystkie czynniki pierwsze wielomianów d_j , a stąd i wielomianów i_j ($j=1, \dots, r$) muszą być czynnikami pierwszymi dzielników elementarnych macierzy wielomianowych $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$, otrzymujemy stąd tezę. ■

(VII.62) TWIERDZENIE. Macierze $A_{[n]}$ i $B_{[n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} są podobne w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy macierze wielomianowe $AA^0 - I_{[n]} A$ i $BA^0 - I_{[n]} A$ mają ten sam układ dzielników elementarnych.

Dowód wynika z twierdzeń (VII.53) i (VII.57), ponieważ rząd zarówno macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]} A$ jak i macierzy wielomianowej $BA^0 - I_{[n]} A$ jest równy n . ■

(VII.63) TWIERDZENIE. Jeżeli

$$(\alpha_1^{k_1}, p_1), \dots, (\alpha_q^{k_q}, p_q),$$

gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ są czynnikami pierwszymi, $k_1, \dots, k_q, p_1, \dots, p_q \in \mathfrak{N}$, jest układem dzielników elementarnych macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]} A$, gdzie $A_{[n]}$ jest dowolną macierzą nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} , to

$$(v) \quad \sum_{j=1}^q p_j k_j = n.$$

Dowód. Z definicji suma (v) jest sumą stopni wielomianów niezmienniczych macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]} A$, wobec czego teza wynika z twierdzenia (VII.54). ■

(VII.64) PRZYKŁAD. Rozpatrzmy macierz nad ciałem liczb wymiernych \mathcal{Q}

$$A_{[4]} := \begin{bmatrix} 4 & 25 & & \\ -1 & -6 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} AA^0 - I_{[4]} A &= \begin{bmatrix} 4e - \lambda & 25e & & \\ -e & -6e - \lambda & & \\ & & -e - \lambda & \\ & & & -e - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4e - \lambda & & 6e - \lambda & \\ -e & & -e & \\ & -e & & \\ & & -e & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & & & \\ & e + \lambda & & \\ & & e + \lambda & \\ & & & (e + \lambda)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & \frac{11}{2}e - \frac{1}{2}\lambda^2 & & \\ & & e & \\ & & & \frac{1}{2}e & \\ & & & & e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oraz

$$\det_4 \begin{bmatrix} 4e-\lambda & & 6e-\lambda \\ -e & & -e \\ & -e & \\ & & -e \end{bmatrix} = 2e, \quad \det_4 \begin{bmatrix} e & \frac{11}{2}e - \frac{1}{2}\lambda^2 \\ & & e \\ & & & e \\ & \frac{1}{2}e & & \end{bmatrix} = \frac{1}{2}e.$$

są wielomianami odwracalnymi w pierścieniu $\mathcal{P}[\lambda]$, więc macierz wielomianowa $AA^0 - I_{[4]}A$ jest na mocy twierdzenia (VII.47) równoważna formie kanonicznej Smitha

$$S_{[4]} := \begin{bmatrix} e & & & \\ & e+\lambda & & \\ & & e+\lambda & \\ & & & (e+\lambda)^2 \end{bmatrix}.$$

Wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[4]}A$ są

$$i_1 := e, \quad i_2 := e+\lambda, \quad i_3 := e+\lambda, \quad i_4 := (e+\lambda)^2,$$

a jej układem dzielników elementarnych jest

$$(e+\lambda, 2), \quad ((e+\lambda)^2, 1).$$

Suma (v) jest tu równa $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$.

Zauważmy, że w stosunku do danej macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[4]}A$ można było dla znalezienia jej układu dzielników elementarnych posłużyć się twierdzeniem (VII.61), przyjmując, że

$$AA^0 - I_{[4]}A = \begin{bmatrix} A_{[2]}^{(1)} & & \\ & A_{[1]}^{(2)} & \\ & & A_{[1]}^{(3)} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$A^{(1)} := \begin{bmatrix} 4e-\lambda & 25e \\ -e & -6e-\lambda \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} := [-e-\lambda], \quad A^{(3)} := [-e-\lambda].$$

Ponieważ bowiem

$$\begin{bmatrix} 4e-\lambda & 25e \\ -e & -6e-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e-\lambda & 6e-\lambda \\ -e & -e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & \\ & (e+\lambda)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & \frac{11}{2}e - \frac{1}{2}\lambda^2 \\ & \frac{1}{2}e \end{bmatrix},$$

$$\det_2 \begin{bmatrix} 4e-\lambda & 6e-\lambda \\ -e & -e \end{bmatrix} = 2e, \quad \det_2 \begin{bmatrix} e & \frac{11}{2}e - \frac{1}{2}\lambda^2 \\ & \frac{1}{2}e \end{bmatrix} = \frac{1}{2}e,$$

więc na mocy twierdzenia (VII.47) macierz wielomianowa

$$S_{[2]}^{(1)} := \begin{bmatrix} e & \\ & (e+\lambda)^2 \end{bmatrix}$$

jest formą kanoniczną Smitha macierzy wielomianowej $A^{(1)}$ i jej układem dzielników elementarnych jest

$$(vi) \quad ((e+\lambda)^2, 1),$$

a dla macierzy wielomianowych $A^{(2)}$ i $A^{(3)}$ formami kanonicznymi Smitha są odpowiednio $-A^{(2)}$ i $-A^{(3)}$ i wobec tego ich układami dzielników elementarnych są odpowiednio

$$(vii) \quad (e + \lambda, 1) \quad i \quad (e + \lambda, 1).$$

Sumą układów dzielników elementarnych (vi) i (vii) jest

$$(e + \lambda, 2), \quad ((e + \lambda)^2, 1),$$

będący na mocy twierdzenia (VII.61) układem dzielników elementarnych macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[4]} A$. ■

(VII.65) TWIERDZENIE. Jeżeli $D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ jest macierzą nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} , $d_1, \dots, d_n \in \mathcal{F}$, c_1, \dots, c_s są wszystkimi różnymi elementami z ciągu (d_1, \dots, d_n) i c_j ($j = 1, \dots, s$) występuje w ciągu (d_1, \dots, d_n) dokładnie $p_j > 0$ razy, a więc $p_1 + \dots + p_s = n$, to układem dzielników elementarnych macierzy wielomianowej $DA^0 - I_{[n]} A$ jest

$$(viii) \quad (-c_1 e + \lambda, p_1), \dots, (-c_s e + \lambda, p_s).$$

Dowód. Mamy

$$(ix) \quad DA^0 - I_{[n]} A = \begin{bmatrix} d_1 e - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & d_n e - \lambda \end{bmatrix}.$$

Dla każdej macierzy wielomianowej $[d_j e - \lambda]$ ($j = 1, \dots, n$) układem dzielników elementarnych jest

$$(-d_j e + \lambda, 1).$$

Wobec tego na mocy twierdzenia (VII.61) układem dzielników elementarnych macierzy wielomianowej (ix) jest (viii). ■

§ VII.6. Wielomiany zerujące i wielomiany minimalne macierzy

(VII.66) DEFINICJA. Wielomian p z pierścienia wielomianowego $\mathcal{P}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy wielomianem lewostronnie (prawostronnie) zerującym w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(vii.67) \quad ({}_A)p = O \quad (p_{(A)} = O). \quad \blacksquare$$

(VII.68) DEFINICJA. Wielomian p z pierścienia wielomianowego $\mathcal{P}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy wielomianem zerującym w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(vii.69) \quad p(A) = O. \quad \blacksquare$$

(VII.70) TWIERDZENIE. TWIERDZENIE CAYLEYA-HAMILTONA. Jeżeli χ_n jest wielomianem charakterystycznym n -tego stopnia macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem przemiennym z transpozycją, to χ_n jest wielomianem zerującym w n -tym stopniu macierzy

A , czyli

$$(VII.71) \quad \chi_n(A) = O.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia (VII.31) wielomian macierzowy $\chi_n \cdot I_{[n]}$ jest podzielny przez wielomian macierzowy $AA^0 - I_{[n]}A$. Na mocy twierdzenia (II.71) macierz A jest miejscem zerowym wielomianu χ_n w pierścieniu $\mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$, czyli jest (VII.71). ■

(VII.72) PRZYKŁAD. Wykorzystamy twierdzenie Cayleya-Hamiltona dla obliczenia wartości wielomianu $p := (-3, 1, -3, 0, 0, 2, 0, 0, \dots) = -3e + \lambda - 3\lambda^2 + 2\lambda^5$ nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z} w punkcie

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{[2]}[\mathcal{Z}].$$

Wielomianem charakterystycznym drugiego stopnia macierzy A jest

$$\chi_2 := \det_2 \begin{bmatrix} e - \lambda & 3e \\ -e & -2e - \lambda \end{bmatrix} = e + \lambda + \lambda^2.$$

Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona jest zatem

$$I_{[2]} + A + A^2 = O.$$

Ponieważ

$$p(A) = -3I_{[2]} + A - 3A^2 + 2A^5 = (-I_{[2]} - 2A^2 + 2A^3)(I_{[2]} + A + A^2) + (-2I_{[2]} + 2A),$$

więc

$$p(A) = -2I_{[2]} + 2A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

(VII.73) DEFINICJA. Wielomianem minimalnym w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$ nazywamy taki niezerowy wielomian zerujący w n -tym stopniu $p \in \mathcal{P}[\mathcal{A}]$ macierzy A , którego stopień jest nie większy od stopnia każdego niezerowego wielomianu zerującego w n -tym stopniu macierzy A . ■

(VII.74) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$ ma dwa wielomiany minimalne w n -tym stopniu $p_1, p_2 \in \mathcal{P}[\mathcal{A}]$, to istnieją takie elementy $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, $a_1, a_2 \neq 0$, że

$$(VII.75) \quad a_1 p_1 = a_2 p_2.$$

Dowód. Z definicji (VII.73) wynika, że wielomiany p_1 i p_2 są tego samego stopnia. Ponieważ $\mathcal{P}[\mathcal{A}]$ jest pierścieniem z quasi-podzielnością, więc istnieją takie $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, $a_1, a_2 \neq 0$, i taki wielomian $r \in \mathcal{P}[\mathcal{A}]$, że

$$(i) \quad a_1 p_1 = a_2 p_2 + r, \quad \text{st } r < \text{st } p_2.$$

Gdyby r nie był wielomianem zerowym, wtedy byłby na mocy (i) wielomianem zerującym w n -tym stopniu macierzy A i byłby stopnia niższego niż stopień p_2 , co dałoby sprzeczność. Wobec tego musi zachodzić równość (VII.75). ■

(VII.76) TWIERDZENIE. Każda macierz $A_{[n]}$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} ma dokładnie jeden moniczny wielomian minimalny w n -tym stopniu.

Dowód. Istnienie niezerowego wielomianu zerującego w n -tym stopniu macierzy A wynika z twierdzenia Cayleya-Hamiltona (VII.70). Stąd wynika istnienie wielomianu minimalnego p w n -tym stopniu macierzy A . Jeżeli α jest najwyższym współczynnikiem wielomianu p , to $(1/\alpha)p$ jest monicznym wielomianem minimalnym w n -tym stopniu macierzy A . Jego jednoznaczność wynika z twierdzenia (VII.74). ■

(VII.77) PRZYKŁAD. Wielomian nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z}

$$p := (-1, 0, 1, 0, 0, \dots) = -e + \lambda^2$$

jest wielomianem minimalnym w trzecim stopniu macierzy nad pierścieniem \mathcal{Z}

$$(ii) \quad A_{[3]} := \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{[3]}[\mathcal{Z}].$$

Ponieważ — co łatwo sprawdzić bezpośrednio

$$p(A) = -I_{[3]} + A^2 = O,$$

co oznacza, że p jest wielomianem zerującym w trzecim stopniu macierzy A , a macierz ta nie może mieć niezerowego wielomianu zerującego w trzecim stopniu niższego, a więc pierwszego stopnia, gdyż musiałby on mieć postać

$$q = ae + b\lambda, \quad a, b \in \mathcal{Z}, \quad b \neq 0,$$

wobec czego

$$q(A) = aI_{[3]} + bA = O,$$

co byłoby sprzeczne z (ii).

Jak widać z powyższego przykładu, wielomian minimalny w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ może być niższego stopnia niż wielomian charakterystyczny n -tego stopnia χ_n tej macierzy. ■

(VII.78) TWIERDZENIE. Każdy wielomian zerujący w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} (z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$), jest podzielny (quasi-podzielny) przez jej wielomian minimalny w n -tym stopniu.

Dowód. Dla zerowego wielomianu zerującego w n -tym stopniu twierdzenie jest oczywiste. Niech v będzie dowolnym niezerowym wielomianem zerującym w n -tym stopniu macierzy A , a p — wielomianem minimalnym w n -tym stopniu tej macierzy. Ponieważ $\mathcal{P}[\mathcal{F}]$ jest pierścieniem z podzielnością, więc istnieją takie wielomiany $q, r \in \mathcal{P}[\mathcal{F}]$, że

$$v = q \cdot p + r \text{ st } r < \text{st } p.$$

Wynika stąd, że r jest wielomianem zerującym w n -tym stopniu macierzy A , a z nierówności $\text{st } r < \text{st } p$ i faktu, iż p jest wielomianem minimalnym w n -tym stopniu, że r jest wie-

lomianem zerowym. Oznacza to, że wielomian v jest podzielny przez wielomian p . W przypadku gdy $\mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$ jest regularnym pierścieniem macierzowym, dowód przebiega analogicznie. ■

(VII.79) DEFINICJA. Zredukowaną macierz dołączoną n -tego stopnia macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z transpozycją, nazywamy macierz wielomianową $R_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{F}]]$ określoną wzorem

$$(VII.80) \quad (AA^0 - A)_{[n]}^D = (-1)^n d_{n-1} R \quad ((AA^0 - A)_{[1]}^D = I_{[1]}).$$

gdzie $A := (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 := (I, O, O, \dots)$, a d_{n-1} jest największym monicznym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów $(n-1)$ -ego stopnia macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$, a zatem największym monicznym wspólnym dzielnikiem wszystkich wyrazów macierzy dołączonej n -tego stopnia $(AA^0 - I_{[n]}A)_{[n]}^D = (AA^0 - A)_{[n]}^D$ ($d_0 = e$). ■

(VII.81) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z transpozycją, istnieje dokładnie jedna zredukowana macierz dołączona n -tego stopnia $R_{[n]}$.

Dowód wynika z twierdzenia (II.87). ■

(VII.82) TWIERDZENIE. Największym monicznym wspólnym dzielnikiem wyrazów zredukowanej macierzy dołączonej n -tego stopnia macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z transpozycją, jest wielomian jedynekowy.

Dowód wynika z definicji (VII.79). ■

(VII.83) TWIERDZENIE. Jeżeli χ_n jest wielomianem charakterystycznym n -tego stopnia macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z transpozycją, a $p \in \mathcal{P}[\mathcal{F}]$ jest monicznym wielomianem minimalnym w n -tym stopniu tej macierzy, to

$$(VII.84) \quad \chi_n = d_{n-1} \cdot p,$$

$$(VII.85) \quad p \cdot I_{[n]} = (AA^0 - A) \cdot R,$$

gdzie d_{n-1} jest największym monicznym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów $(n-1)$ -ego stopnia macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$, $A^0 := (I, O, O, \dots)$, $A := (O, I, O, O, \dots)$, a $R_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{F}]]$ jest zredukowaną macierz dołączoną n -tego stopnia macierzy A .

Dowód. Na mocy (VII.32) i (VII.80) mamy

$$\chi_n \cdot I_{[n]} = (AA^0 - A) d_{n-1} \cdot R,$$

skąd wynika istnienie takiego wielomianu $w \in \mathcal{P}[\mathcal{F}]$, że

$$(iii) \quad w \cdot I_{[n]} = (AA^0 - A) R,$$

$$(iv) \quad \chi_n = d_{n-1} \cdot w.$$

Ze wzoru (iv) wynika, że wielomian w jest moniczny. Ze wzoru (iii) wynika, że w jest wielomianem zerującym w n -tym stopniu macierzy A . Na mocy twierdzenia (VII.78) istnieje taki wielomian moniczny $h \in \mathcal{P}[\mathcal{F}]$, że $w = h \cdot p$, a na mocy twierdzenia (II.71) istnieje taka macierz wielomianowa $G \in \mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{F}]]$, że

$$p \cdot I_{[n]} = (AA^0 - A) G,$$

wobec czego

$$w \cdot I_{[n]} = (AA^0 - A)Gh,$$

skąd na mocy (iii) i twierdzenia (II.60) $R = Gh$. Wobec tego na mocy twierdzenia (VII.82) h jest wielomianem jedynkowym. Stąd $w = p$ i na mocy (iii) i (iv) otrzymujemy tezę. ■

(VII.86) TWIERDZENIE. Jeżeli $p \in \mathcal{P}[\mathcal{F}]$ jest monicznym wielomianem minimalnym w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z transpozycją, a i_n — wielomianem niezmienniczym najwyższego stopnia macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ ($A^0 = (I, O, O, \dots)$, $A = (O, I, O, O, \dots)$), to

$$(VII.87) \quad p = i_n.$$

Dowód. Na mocy (VII.42) mamy $d_n = d_{n-1} \cdot i_n$, gdzie d_n jest największym monicznym wspólnym dzielnikiem dla jednego tylko niezerowego minora n -tego stopnia macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$, a mianowicie $\det_n(AA^0 - I_{[n]}A) = \det_n(AA^0 - A) = (-1)^n \chi_n$, skąd $d_n = \chi_n$. Mamy zatem $\chi_n = d_{n-1} \cdot i_n$ i na mocy (VII.84) otrzymujemy (VII.87). ■

(VII.88) PRZYKŁAD. W przykładzie (VII.77) wykazaliśmy, że wielomian $p = -e + \lambda^2$ jest wielomianem minimalnym w trzecim stopniu macierzy

$$A_{[3]} := \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{[3]}[\mathcal{L}].$$

Wielomianem charakterystycznym trzeciego stopnia tej macierzy jest

$$\chi_3 := -\det_3 \begin{bmatrix} -e-\lambda & 2e & -2e \\ -2e & 3e-\lambda & -2e \\ -2e & 2e & -e-\lambda \end{bmatrix} = (-e+\lambda)^2(e+\lambda).$$

Największym monicznym wspólnym dzielnikiem wyrazów macierzy wielomianowej

$$(AA^0 - I_{[3]}A)_{[3]}^p = \begin{bmatrix} e-2\lambda+\lambda^2 & -2e+2\lambda & 2e-2\lambda \\ 2e-2\lambda & -3e+2\lambda+\lambda^2 & 2e-2\lambda \\ 2e-2\lambda & -2e+2\lambda & e-2\lambda+\lambda^2 \end{bmatrix}$$

jest wielomian $d_2 = -e + \lambda$, natomiast największy moniczny wspólny dzielnik d_3 minorów trzeciego stopnia macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[3]}A$ jest równy $\chi_3 = (-e + \lambda)^2(e + \lambda)$. Wobec tego wielomian niezmienniczy i_3 macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[3]}A$, jako spełniający równość $d_3 = d_2 i_3$ spełnia równość $i_3 = -e + \lambda^2$. Wobec tego $p = i_3$, zgodnie z twierdzeniem (VII.86).

Zredukowaną macierzą dołączoną trzeciego stopnia macierzy A na mocy (VII.80) jest

$$R = \begin{bmatrix} e-\lambda & -2e & 2e \\ 2e & -2e-\lambda & 2e \\ 2e & -2e & e-\lambda \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy, że jest spełniona równość (VII.85). ■

(VII.89) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z transpozycją, macierze podobne w n -tym stopniu mają te same wielomiany minimalne w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzeń (VII.53) i (VII.86). ■

(VII.90) TWIERDZENIE. Jeżeli v jest dowolnym wielomianem nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} , to dla każdej macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ istnieje wielomian $v_A \in \mathcal{P}[\mathcal{F}]$ stopnia niższego niż stopień monicznego wielomianu minimalnego p_A w n -tym stopniu macierzy A taki, że

$$(VII.91) \quad v(A) = v_A(A).$$

Dowód. Pierścień wielomianowy $\mathcal{P}[\mathcal{F}]$ jest pierścieniem z podzielnością, wobec czego istnieją takie wielomiany $q_A, v_A \in \mathcal{P}[\mathcal{F}]$, że $v = q_A \cdot p_A + v_A$ i $\text{st } v_A < \text{st } p_A$. Mamy ponadto $v(A) = q_A(A) \cdot p_A(A) + v_A(A)$, a ponieważ na mocy definicji wielomianu p_A jest $p_A(A) = 0$, otrzymujemy stąd tezę. ■

(VII.92) TWIERDZENIE. Jeżeli v jest dowolnym wielomianem nad pierścieniem całkowitym z transpozycją \mathcal{A} , to dla każdej macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{A}]$ istnieje taki wielomian $v_A \in \mathcal{P}[\mathcal{A}]$ stopnia niższego niż stopień wielomianu minimalnego w n -tym stopniu macierzy A oraz taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że

$$(VII.93) \quad a \cdot v(A) = v_A(A).$$

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(VII.94) PRZYKŁAD. Niech $q = 5e + 3\lambda + \lambda^2$ będzie wielomianem nad pierścieniem liczb całkowitych \mathbb{Z} , a $A_{[3]}$ macierzą z przykładu (VII.88), dla której wykazaliśmy, że wielomian $p = -e + \lambda^2$ jest wielomianem minimalnym w trzecim stopniu. Mamy $q = p + (6e + 3\lambda)$ i kładąc $q_A = 6e + 3\lambda$, otrzymujemy

$$q(A) = q_A(A) = 6I_{[3]} + 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -6 & 15 & -6 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

§ VII.7. Formy normalne macierzy

(VII.95) DEFINICJA. Macierzą stowarzyszoną z wielomianem monicznym

$$(i) \quad p := (a_0, \dots, a_{n-1}, 1, 0, \dots) = a_0 e + a\lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$$

nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy macierz nad pierścieniem \mathcal{A}

$$(VII.96) \quad L_{[n]}^{(p)} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Wielomiany moniczne stopnia 0, czyli wielomiany jedynkowe nie mają macierzy stowarzyszonych. ■

(VII.97) TWIERDZENIE. Wielomianem charakterystycznym n -tego stopnia macierzy $L_{[n]}^{(p)}$ stowarzyszonej z wielomianem p n -tego stopnia nad pierścieniem przemennym z transpozycją \mathcal{A} jest sam wielomian p .

Dowód. Z definicji wielomianem charakterystycznym n -tego stopnia macierzy (VII.96) jest

$$\chi_n := \det_n \begin{bmatrix} \lambda & -e & o & \dots & o & o \\ o & \lambda & -e & \dots & o & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & o & o & \dots & \lambda & -e \\ a_0 e & a_1 e & a_2 e & \dots & a_{n-2} e & a_{n-1} e + \lambda \end{bmatrix}.$$

Rozwijając ten wyznacznik względem ostatniego wiersza obliczamy, że

$$\chi_n = a_0 e + a_1 \lambda + \dots + a_{n-2} \lambda^{n-2} + (a_{n-1} e + \lambda) \lambda^{n-1} = p. \quad \blacksquare$$

(VII.98) TWIERDZENIE. Monicznym wielomianem minimalnym w n -tym stopniu macierzy $L_{[n]}^{(p)} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ stowarzyszonej z wielomianem p n -tego stopnia nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} jest sam wielomian p .

Dowód. Macierz wielomianowa $L^{(p)} A^0 - I_{[n]} A$ ma minor $(n-1)$ -ego stopnia

$$\det_{n-1} \begin{bmatrix} e & o & \dots & o & o \\ -\lambda & e & \dots & o & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & o & \dots & -\lambda & e \end{bmatrix} = e,$$

wobec czego największym monicznym wspólnym dzielnikiem wszystkich jej minorów $(n-1)$ -ego stopnia jest $d_{n-1} = e$. Stąd na mocy (VII.84) i twierdzenia (VII.97) otrzymujemy tezę. ■

(VII.99) TWIERDZENIE. Wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $L_{[n]}^{(p)} A^0 - I_{[n]} A$, gdzie $L_{[n]}^{(p)} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ jest macierzą stowarzyszoną z wielomianem p n -tego stopnia nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} , są

$$(VII.100) \quad \underbrace{e, \dots, e}_{n-1 \text{ razy}}, p.$$

Dowód. Największym monicznym wspólnym dzielnikiem minorów n -tego stopnia macierzy wielomianowej $L^{(p)} A^0 - I_{[n]} A$ jest $d_n = \chi_n$, gdzie χ_n jest wielomianem charakterystycznym n -tego stopnia macierzy $L^{(p)}$, ponieważ macierz wielomianowa $L^{(p)} A^0 - I_{[n]} A$ ma tylko jeden niezerowy minor n -tego stopnia, a mianowicie $\det_n(L^{(p)} A^0 - I_{[n]} A)$. Na mocy twierdzenia (VII.97) i wzoru (VII.84) jest $d_{n-1} = e$. Wobec tego mamy $d_1 = \dots = d_{n-1} = e$, gdzie d_j ($j=1, \dots, n-1$) jest największym monicznym wspólnym dzielnikiem minorów j -tego stopnia macierzy wielomianowej $L^{(p)} A^0 - I_{[n]} A$, ponieważ każdy wielomian d_j

($j=2, \dots, n$) jest podzielny przez wielomian d_{j-1} . Na mocy wzoru (VII.42) otrzymujemy stąd tezę. ■

(VII.101) DEFINICJA. Pierwszą naturalną formą normalną n -tego stopnia macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z transpozycją, nazywamy macierz

$$(VII.102) \quad L_{[n]}^I := \text{diag}(L_{[k_s]}^{(s)}, \dots, L_{[k_n]}^{(n)}),$$

gdzie $L_{[k_j]}^{(j)}$ ($j=s, \dots, n$) jest macierzą stowarzyszoną z wielomianem niezmienniczym i_j stopnia k_j macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ ($A^0 := (I, O, O, \dots)$, $A := (O, I, O, O, \dots)$), s jest wskaźnikiem pierwszego z kolei wielomianu niezmienniczego nie będącego wielomianem jednostkowym, czyli na mocy twierdzenia (VII.51)

$$(VII.103) \quad i_1 = \dots = i_{s-1} = e, \quad i_s, \dots, i_n \neq e,$$

a macierz L^I na mocy twierdzenia (VII.54) jest n -tego stopnia. ■

(VII.104) TWIERDZENIE. Każda macierz $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z transpozycją, jest podobna w n -tym stopniu do swej pierwszej naturalnej formy normalnej n -tego stopnia.

Dowód. Na mocy twierdzenia (VII.99) wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $L_{[k_j]}^{(j)}A^0 - I_{[k_j]}A$ ($j=s, \dots, n$) są e, \dots, e, i_j , wobec czego na mocy twierdzenia (VII.52) wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $L^IA^0 - I_{[n]}A$ są (VII.103). Na mocy twierdzenia (VII.53) otrzymujemy stąd tezę. ■

(VII.105) PRZYKŁAD. Znajdziemy pierwszą naturalną formę normalną czwartego stopnia dla macierzy nad ciałem liczb wymiernych \mathbb{Q}

$$A_{[4]} := \begin{bmatrix} 4 & 25 & & \\ -1 & -6 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{[4]}[\mathbb{Q}].$$

W przykładzie (VII.64) obliczyliśmy, że wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[4]}A$ są:

$$i_1 := e, \quad i_2 := e + \lambda, \quad i_3 := e + \lambda, \quad i_4 := (e + \lambda)^2.$$

Wobec tego na mocy (VII.102) i (VII.96) pierwszą naturalną formę normalną czwartego stopnia macierzy A jest macierz

$$L_{[4]}^I := \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $PA = L^IP$, gdzie

$$P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & 4 & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$$

więc macierze A i L^I są podobne w czwartym stopniu, zgodnie z twierdzeniem (VII.104). ■

(VII.106) DEFINICJA. Drugą naturalną formą normalną n -tego stopnia macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} nazywamy macierz

$$(VII.107) \quad L_{[n]}^{II} := \text{diag}(\underbrace{L_{[k_1]}^{(1)}, \dots, L_{[k_1]}^{(1)}}_{p_1 \text{ razy}}, \dots, \underbrace{L_{[k_q]}^{(q)}, \dots, L_{[k_q]}^{(q)}}_{p_q \text{ razy}}),$$

gdzie $L_{[k_j]}^{(j)}$ ($j=1, \dots, q$) jest macierzą stowarzyszoną z dzielnikiem elementarnym μ_j stopnia k_j macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$, dla której

$$(VII.108) \quad (\mu_1, p_1), \dots, (\mu_q, p_q)$$

jest układem dzielników elementarnych, i gdzie macierz L^{II} jest n -tego stopnia na mocy twierdzenia (VII.63). ■

(VII.109) TWIERDZENIE. Każda macierz $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} jest podobna w n -tym stopniu do swej drugiej naturalnej formy normalnej n -tego stopnia.

Dowód. Na mocy twierdzenia (VII.99) macierz wielomianowa $L^{(j)}A^0 - I_{[k_j]}A$ ($j=1, \dots, q$) ma tylko jeden dzielnik elementarny, a mianowicie μ_j . Wobec tego na mocy twierdzenia (VII.61) układem dzielników elementarnych macierzy wielomianowej $L^{II}A^0 - I_{[n]}A$ jest (VII.108). Na mocy twierdzenia (VII.62) otrzymujemy stąd tezę. ■

(VII.110) PRZYKŁAD. Układem dzielników elementarnych macierzy $A_{[4]}$ z przykładu (VII.105) jest

$$(e+\lambda, 2), ((e+\lambda)^2, 1),$$

wobec czego na mocy (VII.107) i (VII.96) drugą naturalną formą normalną czwartego stopnia macierzy A jest macierz

$$L_{[4]}^{II} := \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

W danym przypadku druga naturalna forma normalna czwartego stopnia macierzy A pokrywa się z pierwszą. ■

§ VII.8. Forma kanoniczna Jordana macierzy zespolonych

(VII.111) DEFINICJA. Blokiem Jordana odpowiadającym wielomianowi $(-ae+\lambda)^k$ nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} , gdzie $a \in \mathcal{C}$, $e:=(1, 0, 0, \dots)$, $\lambda:=(0, 1, 0, 0, \dots)$, nazywamy macierz

$$(VII.112) \quad J_{[k]} := \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{[k]}[\mathcal{C}]. \quad \blacksquare$$

(VII.113) TWIERDZENIE. Wielomianem charakterystycznym k -tego stopnia bloku Jordana (VII.112) odpowiadającego wielomianowi $(-ae + \lambda)^k$ nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} jest tenże wielomian $(-ae + \lambda)^k$.

Dowód. Z definicji wielomianem charakterystycznym k -tego stopnia bloku Jordana (VII.112) jest

$$\chi_k := \det_k \begin{bmatrix} -ae + \lambda & -e & & & \\ & -ae + \lambda & -e & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -ae + \lambda & -e \\ & & & & -ae + \lambda \end{bmatrix} = (-ae + \lambda)^k. \quad \blacksquare$$

(VII.114). TWIERDZENIE. Monicznym wielomianem minimalnym w k -tym stopniu bloku Jordana (VII.112) odpowiadającego wielomianowi $(-ae + \lambda)^k$ nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} jest tenże wielomian $(-ae + \lambda)^k$.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (VII.98). \blacksquare

(VII.115) TWIERDZENIE. Wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $JA^0 - I_{[k]}A$, gdzie J jest blokiem Jordana (VII.112) odpowiadającym wielomianowi $(-ae + \lambda)^k$ nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} , $A^0 := (I, O, O, \dots)$, $A := (O, I, O, O, \dots)$, są

$$(VII.116) \quad e, \dots, e, (-ae + \lambda)^k.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (VII.99). \blacksquare

(VII.117) TWIERDZENIE. Blok Jordana (VII.112) odpowiadający wielomianowi $(-ae + \lambda)^k$ nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} i macierz stowarzyszona L z tym wielomianem są podobne w k -tym stopniu.

Dowód. Na mocy twierdzeń (VII.99) i (VII.115) macierze wielomianowe $JA^0 - I_{[k]}A$ i $LA^0 - I_{[k]}A$ mają te same wielomiany niezmiennicze, wobec czego na mocy twierdzenia (VII.53) otrzymujemy tezę. \blacksquare

(VII.118) TWIERDZENIE. Macierze wielomianowe $JA^0 - I_{[k]}A$ i $LA^0 - I_{[k]}A$, gdzie J jest blokiem Jordana (VII.112) odpowiadającym wielomianowi $(-ae + \lambda)^k$ nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} , a L jest macierzą stowarzyszoną z tym wielomianem, mają ten sam układ dzielników elementarnych.

Dowód wynika z twierdzeń (VII.117) i (VII.62). \blacksquare

(VII.119) DEFINICJA. Formą kanoniczną Jordana n -tego stopnia macierzy zespolonej $A_{[n]}$ nazywamy macierz zespoloną

$$(VII.120) \quad J_{[n]} := \text{diag} \left(\underbrace{J_{[k_1]}^{(1)}, \dots, J_{[k_1]}^{(1)}}_{p_1 \text{ razy}}, \dots, \underbrace{J_{[k_q]}^{(q)}, \dots, J_{[k_q]}^{(q)}}_{p_q \text{ razy}} \right),$$

gdzie $J_{[k_j]}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, q$) jest blokiem Jordana odpowiadającym wielomianowi $(-a_j e + \lambda)^{k_j}$

będącemu dzielnikiem elementarnym macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$, a

$$((-a_1 e + \lambda)^{k_1}, p_1), \dots, ((-a_q e + \lambda)^{k_q}, p_q)$$

jest układem dzielników elementarnych tej macierzy wielomianowej. ■

(VII.121) TWIERDZENIE. Każda macierz zespolona $A_{[n]}$ jest podobna w n -tym stopniu do swej formy kanonicznej Jordana n -tego stopnia.

Dowód. Na mocy twierdzeń (VII.118) i (VII.61) macierze wielomianowe $JA^0 - I_{[n]}A$ i $L^{II}A^0 - I_{[n]}A$, gdzie J jest formą kanoniczną Jordana (VII.120) n -tego stopnia macierzy A , a L^{II} jej drugą naturalną formą normalną n -tego stopnia, mają ten sam układ dzielników elementarnych. Wobec tego na mocy twierdzenia (VII.62) macierze J i L^{II} są podobne w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (VII.109) macierze A i J są podobne w n -tym stopniu. ■

(VII.122) PRZYKŁAD. W przykładzie (VII.110) wykazaliśmy, że dla macierzy

$$(i) \quad A_{[4]} := \begin{bmatrix} 4 & 25 & & \\ -1 & -6 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

którą obecnie traktujemy jako macierz zespoloną, układem dzielników elementarnych jest

$$(e + \lambda, 2), \quad ((e + \lambda)^2, 1).$$

Wobec tego na mocy definicji (VII.119) i (VII.111) formą kanoniczną Jordana czwartego stopnia macierzy (i) jest

$$(ii) \quad J := \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $PA = JP$, gdzie

$$P := \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & 4 & & \\ 1 & 5 & & \end{bmatrix}$$

jest macierzą nieosobliwą w czwartym stopniu, więc macierze A i J są podobne w czwartym stopniu, zgodnie z twierdzeniem (VII.121). ■