

Macierze określone

§ IX.1. Formy hermitowskie

(IX.1) DEFINICJA. Formą hermitowską n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} albo po prostu formą hermitowską nazywamy każdą funkcję $f: H_{[n]} \rightarrow \mathcal{A}$, gdzie $H_{[n]}$ jest n -wymiarowym modulem ciągowym nad pierścieniem \mathcal{A} z iloczynem skalarnym (IV.145), postaci

$$(IX.2) \quad f = f(Z) = f(z_1, \dots, z_n) := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} z_j^* z_k,$$

gdzie

$$Z := \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in H_{[n]}, \quad z_1, \dots, z_n \in \mathcal{A},$$

oraz

$$(IX.3) \quad a_{jk} = a_{kj}^* \quad \text{dla} \quad j, k = 1, \dots, n. \quad \blacksquare$$

Jeżeli przyjąć, że

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}],$$

to na mocy (IX.3) A jest macierzą hermitowską, a wzór (IX.2) można napisać w postaci

$$(IX.4) \quad [f(Z)] = Z^* A Z \quad \text{lub} \quad f(Z) = \text{tr } Z^* A Z.$$

(IX.5) DEFINICJA. Formą kwadratową n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) albo po prostu formą kwadratową nazywamy każdą formę hermitowską n -tego stopnia nad pierścieniem uporządkowanym \mathcal{A} . \blacksquare

Z powyższej definicji wynika, że każdą formę kwadratową n -tego stopnia można napisać w postaci

$$(IX.6) \quad f = f(X) = f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k$$

albo w postaci

$$(IX.7) \quad [f(X)] = X^T A X \quad \text{lub} \quad f(X) = \text{tr } X^T A X,$$

gdzie

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in H_{[n]}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A},$$

a $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest macierzą quasi-rzeczywistą symetryczną.

(IX.8) TWIERDZENIE. *Wartości form hermitowskich są quasi-rzeczywiste.*

Dowód wynika ze wzoru

$$[f(Z)]^* = (Z^* A Z)^* = Z^* A^* Z = Z^* A Z = [f(Z)]. \quad \blacksquare$$

(IX.9) TWIERDZENIE. *W każdym pierścieniu częściowo uporządkowanym \mathcal{A} między formami hermitowskimi n -tego stopnia $\text{tr } Z^* A Z$, a macierzami hermitowskimi n -tego stopnia $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna.*

Dowód. Z definicji (IX.1) wynika, że każdej macierzy hermitowskiej n -tego stopnia A odpowiada dokładnie jedna forma hermitowska n -tego stopnia $\text{tr } Z^* A Z$. Wystarczy zatem jeszcze pokazać, że każdej formie hermitowskiej n -tego stopnia $\text{tr } Z^* A Z$ odpowiada dokładnie jedna macierz hermitowska n -tego stopnia A . Załóżmy, że istnieją dwie takie macierze hermitowskie $A_{[n]}$ i $B_{[n]}$, że

$$(i) \quad \bigwedge_{Z \in H_{[n]}} Z^* A Z = Z^* B Z,$$

gdzie $H_{[n]}$ jest modulem ciągowym n -wymiarowym nad pierścieniem \mathcal{A} i

$$Z := \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad z_1, \dots, z_n \in \mathcal{A}.$$

Kładąc

$$z_j := \begin{cases} 1 & \text{dla } j=p, \\ 0 & \text{dla } j \neq p, \end{cases} \quad p \in \{1, \dots, n\},$$

otrzymujemy na mocy (i) $f(Z) = a_{pp} = b_{pp}$, wobec czego wyrazy diagonalne macierzy A i B są identyczne. Jeżeli wszystkie elementy pierścienia \mathcal{A} są quasi-rzeczywiste, to kładąc

$$(ii) \quad z_j := \begin{cases} 1 & \text{dla } j=p \vee j=q, \\ 0 & \text{dla } j \neq p \wedge j \neq q, \end{cases} \quad p, q \in \{1, \dots, n\},$$

otrzymujemy na mocy (i) $f(Z) = a_{pp} + a_{pq} + a_{qp} + a_{qq} = b_{pp} + b_{pq} + b_{qp} + b_{qq}$, skąd — biorąc pod uwagę, że $a_{pq} = a_{qp}$ i $b_{pq} = b_{qp}$ — wynika, że $a_{pq} = b_{pq}$, co oznacza, że $A = B$. Jeżeli natomiast istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}$, że $\alpha^* - \alpha \neq 0$, to podstawiając najpierw (ii), a potem

$$z_j := \begin{cases} 1 & \text{dla } j=p, \\ \alpha^* - \alpha & \text{dla } j=q, \\ 0 & \text{dla } j \neq p \wedge j \neq q, \end{cases} \quad p, q \in \{1, \dots, n\}, \quad p \neq q,$$

otrzymujemy na mocy (i)

$$a_{pp} + a_{pq} + a_{qp} + a_{qq} = b_{pp} + b_{pq} + b_{qp} + b_{qq},$$

$$a_{pp} + a_{pq}(\alpha^* - \alpha) - a_{qp}(\alpha^* - \alpha) - a_{qq}(\alpha^* - \alpha)^2 = b_{pp} + b_{pq}(\alpha^* - \alpha) - b_{qp}(\alpha^* - \alpha) - b_{qq}(\alpha^* - \alpha)^2,$$

skąd

$$a_{pq} + a_{qp} = b_{pq} + b_{qp} \wedge a_{pq} - a_{qp} = b_{pq} - b_{qp},$$

a następnie $a_{pq} = b_{pq} \wedge a_{qp} = b_{qp}$, wobec czego $A = B$. ■

(IX.10) TWIERDZENIE. W każdym pierścieniu uporządkowanym \mathcal{A} między formami kwadratowymi n -tego stopnia $\text{tr } X^*AX$ a macierzami quasi-rzeczywistymi symetrycznymi n -tego stopnia $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna.

Dowód wynika z definicji (IX.5) i twierdzenia (IX.9). ■

(IX.11) TWIERDZENIE. Dla każdej formy hermitowskiej n -tego stopnia $f(Z) := \text{tr } Z^*AZ$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} , dla której macierz hermitowska A jest półprosta, istnieje nad tymże pierścieniem \mathcal{A} taka forma hermitowska n -tego stopnia $g(Y) := \text{tr } Y^*(aS)Y$, że $S_{[n]} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{A}$, jest macierzą spektralną w n -tym stopniu macierzy A , $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$ i

$$(IX.12) \quad g(Y) = f(UY) = \text{tr } Y^*(aS)Y = a \sum_{j=1}^n \omega_j |y_j|^2,$$

gdzie $U_{[n]}$ jest macierzą własną quasi-ortonormalną w n -tym stopniu odpowiadającą macierzy spektralnej S w n -tym stopniu, $UU^* = U^*U = aI_{[n]}$ i $Y^* := [y_1^* \dots y_n^*]$, $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{A}$.

Dowód. Na mocy twierdzeń (VIII.92) i (VIII.93) jest $AU = US$, wobec czego

$$f(UY) = \text{tr } Y^*U^*AU Y = \text{tr } Y^*U^*USY = \text{tr } Y^*(aS)Y,$$

skąd wynika wzór (IX.12). ■

(IX.13) TWIERDZENIE. Dla każdej formy hermitowskiej n -tego stopnia $f(Z) := \text{tr } Z^*AZ$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} , dla której macierz hermitowska $A_{[n]}$ jest półprosta, istnieje nad tymże ciałem \mathcal{F} taka forma hermitowska n -tego stopnia $g(Y) := \text{tr } Y^*SY$, że $S_{[n]} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ jest macierzą spektralną w n -tym stopniu macierzy A i

$$(IX.14) \quad g(Y) = f(UY) = \text{tr } Y^*SY = \sum_{j=1}^n \omega_j |y_j|^2,$$

gdzie $U_{[n]}$ jest macierzą własną ortonormalną w n -tym stopniu odpowiadającą macierzy spektralnej S w n -tym stopniu i $Y^* := [y_1^* \dots y_n^*]$, $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{F}$.

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.97) i (IX.11). ■

(IX.15) TWIERDZENIE. Dla każdej formy kwadratowej n -tego stopnia $f(X) := \text{tr } X^TAX$ nad ciałem uporządkowanym z pierwiastkowaniem \mathcal{F} , dla której macierz quasi-rzeczywista symetryczna A jest półprosta, istnieje nad tymże ciałem \mathcal{F} taka forma kwadratowa n -tego stopnia $g(Y) := \text{tr } Y^TSY$, że $S_{[n]} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ jest macierzą spektralną w n -tym stopniu

macierzy A i

$$(IX.16) \quad g(Y) = f(UV) = \operatorname{tr} Y^T S Y = \sum_{j=1}^n \omega_j y_j^2,$$

gdzie $U_{[n]}$ jest macierzą własną ortonormalną w n -tym stopniu odpowiadającą macierzy spektralnej S w n -tym stopniu i $Y_{[n]}^T := [y_1 \dots y_n]$, $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{F}$.

Dowód wynika z twierdzenia (IX.13). ■

(IX.17) PRZYKŁAD. Macierzy symetrycznej nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R}

$$A_{[2]} := \begin{bmatrix} 57 & 24 \\ 24 & 43 \end{bmatrix}_d$$

odpowiada forma kwadratowa drugiego stopnia $f(x_1, x_2) = 57x_1^2 + 48x_1x_2 + 43x_2^2$. Macierzą spektralną w drugim stopniu macierzy A jest $S_{[2]} := \operatorname{diag}(25, 75)$, a odpowiadającą jej macierzą własną ortonormalną w drugim stopniu

$$U_{[2]} := \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 \\ -0,8 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Mamy, zgodnie z (IX.16)

$$g(y_1, y_2) = f(0,6y_1 + 0,8y_2, -0,8y_1 + 0,6y_2) = 25y_1^2 + 75y_2^2. \quad \blacksquare$$

§ IX.2. Macierze określone

(IX.18) DEFINICJA. Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem \mathcal{A} nazywamy *dodatnio (ujemnie) określoną* w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° jest macierzą hermitowską,

2° pierścień \mathcal{A} jest częściowo uporządkowany,

3° forma hermitowska n -tego stopnia $f(Z) := \operatorname{tr} Z^* A Z$ nad pierścieniem \mathcal{A} spełnia warunek

$$(IX.19) \quad \bigwedge_{\substack{Z \in H_{[n]} \\ Z \neq 0}} f(Z) = \operatorname{tr} Z^* A Z > 0 \quad (< 0),$$

gdzie $H_{[n]}$ jest n -wymiarowym modulem ciągłym nad pierścieniem \mathcal{A} . ■

(IX.20) DEFINICJA. Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem \mathcal{A} nazywamy *niedodatnio (nieujemnie) określoną* w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° jest macierzą hermitowską,

2° pierścień \mathcal{A} jest częściowo uporządkowany,

3° forma hermitowska n -tego stopnia $f(Z) := \operatorname{tr} Z^* A Z$ nad pierścieniem \mathcal{A} spełnia warunek

$$(IX.21) \quad \bigwedge_{Z \in H_{[n]}} f(Z) = \operatorname{tr} Z^* A Z \leq 0 \quad (\geq 0),$$

gdzie $H_{[n]}$ – jak poprzednio – jest n -wymiarowym modułem ciągowym nad pierścieniem \mathcal{A} . ■

(IX.22) DEFINICJA. *Macierzą określoną w n -tym stopniu nazywamy każdą macierz dodatnio lub ujemnie określoną w n -tym stopniu.* ■

(IX.23) DEFINICJA. *Macierzą półokreśloną w n -tym stopniu nazywamy każdą macierz niedodatnio lub nieujemnie określoną w n -tym stopniu.* ■

Zauważmy, że:

1° Każda macierz dodatnio (ujemnie) określona w n -tym stopniu jest nieujemnie (niedodatnio) określona w n -tym stopniu.

2° Każda macierz określona w n -tym stopniu jest półokreślona w n -tym stopniu.

3° Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest określona w n -tym stopniu, to n jest jej stopniem minimalnym.

4° Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest niedodatnio (nieujemnie) określona w n -tym stopniu, to dla każdej liczby naturalnej $p > n$ macierz A jest niedodatnio (nieujemnie) określona w p -tym stopniu.

(IX.24) TWIERDZENIE. *Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest dodatnio (ujemnie, niedodatnio, nieujemnie) określona w n -tym stopniu, to wszystkie jej wartości własne w tym stopniu są quasi-rzeczywiste dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne).*

Dowód. Niech ω będzie dowolną wartością własną w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ dodatnio określonej w n -tym stopniu, a $Z \neq 0$ dowolnym odpowiadającym wartości ω wektorem własnym, czyli jest $AZ = \omega Z$. Na mocy (IX.19) jest

$$f(Z) = \operatorname{tr} Z^* A Z = \omega \operatorname{tr} Z^* Z > 0,$$

skąd na mocy (III.193) otrzymujemy $\omega > 0$.

Dowód dla macierzy ujemnie, niedodatnio lub nieujemnie określonych w n -tym stopniu jest analogiczny. ■

(IX.25) TWIERDZENIE. *Półprosta macierz hermitowska $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} jest dodatnio (ujemnie, niedodatnio, nieujemnie) określona w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jej wszystkie wartości własne w tym stopniu są quasi-rzeczywiste dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne).*

Dowód wynika z twierdzeń (IX.24) i (IX.11). ■

(IX.26) TWIERDZENIE. *Macierz diagonalna $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} jest dodatnio (ujemnie, niedodatnio, nieujemnie) określona w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jej wszystkie spośród pierwszych n wyrazów diagonalnych są quasi-rzeczywiste dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne).*

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.82), (VIII.98) i (IX.25). ■

(IX.27) TWIERDZENIE. *Jeżeli półprosta macierz hermitowska $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} jest dodatnio określona w n -tym stopniu, to $\det_n A > 0$, a jeżeli nieujemnie określona w n -tym stopniu, to $\det_n A \geq 0$.*

Dowód wynika z twierdzeń (IX.25) i (VIII.38). ■

(IX.28) TWIERDZENIE. Rząd macierzy półprostej $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} , półokreślonej w n -tym stopniu, jest równy sumie krotności jej niezerowych wartości własnych w n -tym stopniu.

Dowód. Macierz półokreślona w n -tym stopniu jest normalna, wobec czego na mocy twierdzenia (VIII.95) macierz A jest prosta. Na mocy twierdzenia (VIII.79) otrzymujemy tezę. ■

(IX.29) TWIERDZENIE. Macierz półprosta $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} , dodatnio (ujemnie) określona w n -tym stopniu, jest quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzeń (IX.25) i (IX.28). ■

(IX.30) PRZYKŁAD. Macierz A z przykładu (IX.17) jest dodatnio określona w drugim stopniu, ponieważ dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$, $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$, forma kwadratowa $57x_1^2 + 48x_1x_2 + 43x_2^2$ ma wartość dodatnią. Zgodnie z twierdzeniem (IX.24), wartości własne 25 i 75 w drugim stopniu macierzy A są obie dodatnie. Zgodnie z twierdzeniem (IX.27) $\det_2 A = 1875 > 0$. Zgodnie z twierdzeniem (IX.28) rząd macierzy A jest równy 2. ■

(IX.31) TWIERDZENIE. Każda macierz półprosta $A_{[n]}$ nad pierścieniem (ciałem) z pierwiastkowaniem \mathcal{A} dodatnio lub ujemnie, lub niedodatnio, lub nieujemnie określona w n -tym stopniu jest ortonormalnie quasi-podobna (podobna) w n -tym stopniu do pewnej macierzy diagonalnej $D_{[n]}$ o wyrazach quasi-rzeczywistych odpowiednio dodatnich, ujemnych, niedodatnich lub nieujemnych.

Dowód wynika z twierdzeń (IX.25) i (VIII.96) ((VIII.97)). ■

(IX.32) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest dodatnio (ujemnie, niedodatnio, nieujemnie) określona w n -tym stopniu, to macierze \bar{A} , A^T i A^* są również dodatnio (ujemnie, niedodatnio, nieujemnie) określone w n -tym stopniu.

Dowód. Ponieważ z definicji macierz A jest hermitowska i $A^* = A$ oraz $A^T = (A^*)^T = \bar{A}$, więc wystarczy przeprowadzić dowód dla macierzy \bar{A} . Wprowadzimy formy hermitowskie

$$f(Z) := \operatorname{tr} Z^* A Z, \quad g(Z) := f(\bar{Z}) = \operatorname{tr} Z^T A \bar{Z}.$$

Na mocy twierdzenia (IX.8) $g(Z) = \overline{g(\bar{Z})} = \overline{\operatorname{tr} \bar{Z}^T A \bar{Z}} = \operatorname{tr} Z^* A Z$. Ponieważ dla każdego $Z \neq 0$ jest $f(Z) > 0$ (< 0 , ≤ 0 , ≥ 0), więc również $g(Z) = f(\bar{Z}) > 0$ (< 0 , ≤ 0 , ≥ 0). Otrzymujemy stąd tezę. ■

(IX.33) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ quasi-odwracalna w n -tym stopniu jest dodatnio (ujemnie) określona w n -tym stopniu, a $A_{[n]}^-$ jest dowolną jej quasi-odwrotnością n -tego stopnia i $AA_{[n]}^- = A_{[n]}^- A = aI_{[n]}$, $a \neq 0$, to macierz $a^* A_{[n]}^-$ jest również dodatnio (ujemnie) określona w n -tym stopniu.

Dowód. Niech f będzie formą hermitowską odpowiadającą macierzy A , a g — formą hermitowską określoną wzorem

$$g(Z) = f(A_{[n]}^- Z) = \operatorname{tr} Z^* (A_{[n]}^-)^* A A_{[n]}^- Z = \operatorname{tr} Z^* a (A_{[n]}^-)^* Z.$$

Ze wzoru $A_{[n]}^- A = aI_{[n]}$ otrzymujemy $A^* (A_{[n]}^-)^* = A (A_{[n]}^-)^* = a^* I_{[n]}$, skąd $A_{[n]}^- A (A_{[n]}^-)^* =$

$= a^* A_{[n]}^-$, czyli $a (A_{[n]}^-)^* = a^* A_{[n]}^-$, co oznacza, że macierz $a^* A_{[n]}^-$ jest hermitowska i

$$g(Z) = f(A_{[n]}^- Z) = \operatorname{tr} Z^* a^* A_{[n]}^- Z.$$

Ponieważ wartościami formy hermitowskiej f dla $Z \neq O$ są wyłącznie elementy quasi-rzeczywiste dodatnie (ujemne), więc macierz $a^* A_{[n]}^-$ jest dodatnio (ujemnie) określona w n -tym stopniu. ■

(IX.34) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ odwracalna w n -tym stopniu jest dodatnio (ujemnie) określona w n -tym stopniu, to macierz $A_{[n]}^{-1}$ jest również dodatnio (ujemnie) określona w n -tym stopniu.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(IX.35) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem częściowo uporządkowanym, macierz $A_{[n]}$ jest dodatnio (ujemnie, niedodatnio, nieujemnie) określona w n -tym stopniu, a $C_{[n,p]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest macierzą kolumnowo pełnego rzędu p , to macierz

$$(IX.36) \quad B_{[p]} := C^* A C$$

jest dodatnio (ujemnie, niedodatnio, nieujemnie) określona w p -tym stopniu.

Dowód. Ponieważ $B^* = C^* A^* C = C^* A C = B$, więc B jest macierzą hermitowską. Niech f będzie formą hermitowską n -tego stopnia odpowiadającą macierzy A , a g – formą hermitowską p -tego stopnia odpowiadającą macierzy B . Mamy

$$(i) \quad g(Z) = \operatorname{tr} Z^* B Z = \operatorname{tr} Z^* C^* A C Z = f(CZ).$$

Ponadto $Z \neq O \Rightarrow CZ \neq O$, ponieważ $CZ = O$ dla $Z \neq O$ oznaczałoby, że kolumny macierzy C są liniowo zależne wbrew założeniu, że C jest macierzą kolumnowo pełnego rzędu p . W takim razie z (i) wynika teza. ■

(IX.37) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem częściowo uporządkowanym, macierze $A_{[n]}$ i $B_{[n]}$ są ściśle równoważne w n -tym stopniu, a macierz A jest dodatnio (ujemnie, niedodatnio, nieujemnie) określona w n -tym stopniu, to macierz B jest również dodatnio (ujemnie, niedodatnio, nieujemnie) określona w n -tym stopniu.

Dowód wynika z definicji (V.150) i twierdzenia (IX.35). ■

(IX.38) TWIERDZENIE. Półprosta macierz hermitowska $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} jest dodatnio określona w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej minory główne $A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix}$ dla $j_1 < \dots < j_p \leq n$ i $p = 1, \dots, n$ są quasi-rzeczywiste dodatnie.

Dowód. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest dodatnio określona w n -tym stopniu, to na mocy twierdzeń (VIII.92), (VIII.93), (VIII.98) i (IX.25) istnieje taka macierz diagonalna $S_{[n]}$ o pierwszych n wyrazach quasi-rzeczywistych dodatnich i taka macierz $U_{[n]}$ quasi-ortogonalna w n -tym stopniu, że $AU = US$. Jeżeli $UU^* = U^*U = aI_{[n]}$, $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, to $a^* =$

$$=a \wedge a > 0 \text{ i}$$

$$aA = USU^*.$$

Jeżeli A jest dodatnio określona w n -tym stopniu, to aA jest również dodatnio określona w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (IX.35) macierz S jest dodatnio określona w n -tym stopniu. Rozpatrzmy dowolny minor główny

$$(ii) \quad aA \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} = \det_p(V^*SV), \quad j_1 < \dots < j_p \leq n,$$

gdzie macierz $V_{[n,p]}$ jest utworzona z kolumn o numerach j_1, \dots, j_p macierzy U^* . Ponieważ kolumny te są liniowo niezależne, więc macierz V jest kolumnowo pełnego rzędu p . Na mocy twierdzenia (IX.35) macierz V^*SV jest dodatnio określona w n -tym stopniu, wobec czego na mocy twierdzenia (IX.27) i faktu że $a > 0$, ze wzoru (ii) wynika, że

$$(iii) \quad A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} > 0 \quad \text{dla} \quad j_1 < \dots < j_p \leq n.$$

Jeżeli — odwrotnie \perp wszystkie minory główne (iii) są quasi-rzeczywiste dodatnie, to na mocy (VIII.37) jest $s_k > 0$ dla $k = 1, \dots, n$. Z faktu, że $s_n > 0$, na mocy (VIII.41) i twierdzenia (VIII.98) wynika, że wszystkie wartości własne w n -tym stopniu macierzy A są quasi-rzeczywiste i niezerowe. Gdyby któraś z nich była ujemna, wtedy na mocy (VIII.37) wartość wielomianu charakterystycznego n -tego stopnia dla tej wartości własnej nie byłaby zerem, co dałoby sprzeczność. Zatem wszystkie wartości własne w n -tym stopniu macierzy A są quasi-rzeczywiste dodatnie i na mocy twierdzenia (IX.25) macierz A jest dodatnio określona w n -tym stopniu. ■

(IX.39) TWIERDZENIE. Półprosta macierz hermitowska $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} jest dodatnio określona w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(IX.40) \quad A \begin{pmatrix} 1, \dots, k \\ 1, \dots, k \end{pmatrix} > 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, n.$$

Dowód. Jeżeli macierz A jest dodatnio określona w n -tym stopniu, to na mocy twierdzenia (IX.38) warunek (IX.40) jest spełniony. Załóżmy teraz, że $A_{[n]}$ jest półprostą macierzą hermitowską spełniającą warunek (IX.40). Wprowadźmy macierze $A_{[n]}^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n$) wzorem

$$(iv) \quad \begin{aligned} A^{(1)} &:= A, \\ A^{(k)} &:= C^{(k-1)*} A^{(k-1)} C^{(k-1)} \quad \text{dla} \quad k = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

gdzie

$$C_{[n]}^{(k)} := \begin{bmatrix} I_{[k-1]} & & & & \\ & 1 & -a_{k,k+1}^{(k)} & -a_{k,k+2}^{(k)} & \dots & -a_{k,n}^{(k)} \\ & 0 & a_{kk}^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k)} \end{bmatrix}$$

dla $k=1, \dots, n-1$. Na mocy (iv) mamy

$$A^{(k)*} = C^{(k-1)*} A^{(k-1)*} C^{(k-1)} \quad \text{dla } k=2, \dots, n$$

i na mocy indukcji macierze $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ są wszystkie hermitowskie, wobec czego

$$(v) \quad a_{kk}^{(k)*} = a_{kk}^{(k)} \quad \text{dla } k=1, \dots, n.$$

Sprawdzamy, że macierze $A^{(k)}$ mają postać:

$$(vi) \quad A_{[n]}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{k-1, k-1}^{(k-1)} & & \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Niech dla $p=1, \dots, n$

$$B_{kp} := I_{[p]} A^{(k)} I_{[p]}, \quad D_{kp} := C^{(k)} I_{[p]}.$$

Na mocy (iv) mamy

$$\begin{aligned} B_{kp} &= D_{k-1, p}^* A^{(k-1)} D_{k-1, p} = (I_{[p]} D_{k-1, p})^* A^{(k-1)} (I_{[p]} D_{k-1, p}) = \\ &= D_{k-1, p}^* (I_{[p]} A^{(k-1)} I_{[p]}) D_{k-1, p} = D_{k-1, p}^* B_{k-1, p} D_{k-1, p}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$A^{(k)} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} = \det_p B_{kp},$$

otrzymujemy

$$A^{(k)} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} = \det_p D_{k-1, p}^* \cdot A^{(k-1)} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} \cdot \det_p D_{k-1, p}.$$

Ale

$$\det_p D_{k-1, p} = \det_p D_{k-1, p}^* = \det_p C^{(k-1)} = \begin{cases} (a_{k-1, k-1}^{(k-1)})^{p-k+1} & \text{dla } k \leq p, \\ 1 & \text{dla } k > p. \end{cases}$$

Przez indukcję dochodzimy do wniosku, że dla $2 \leq p \leq n$

$$(vii) \quad A^{(p)} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} = (a_{11}^{(1)})^{2p-2} (a_{22}^{(2)})^{2p-4} \dots (a_{p-1, p-1}^{(p-1)})^2 A \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix},$$

a dla $p=1$

$$A^{(p)} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} = a_{11}^{(1)}.$$

Z drugiej strony na mocy (vi)

$$A^{(p)} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} = a_{11}^{(1)} \dots a_{pp}^{(p)}$$

i wobec (vii)

$$a_{11}^{(1)} \dots a_{pp}^{(p)} = (a_{11}^{(1)})^{2p-2} (a_{22}^{(2)})^{2p-4} \dots (a_{p-1, p-1}^{(p-1)})^2 A \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix}, \quad p=2, \dots, n,$$

skaąd na mocy (IX.40) wnioskujemy przez indukcję, że

$$a_{kk}^{(k)} > 0 \quad \text{dla} \quad k=1, \dots, n.$$

Wobec tego macierz $A^{(n)}$ jest macierzą diagonalną o pierwszych n wyrazach diagonalnych quasi-rzeczywistych dodatnich. Na mocy twierdzenia (IX.26) macierz $A^{(n)}$ jest dodatnio określona w n -tym stopniu. Na mocy twierdzeń (III.140) i (III.146) ze wzorów (iv) wynika, że istnieje dla każdego $k=1, \dots, n-1$ taka macierz quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu $C^{(k)-}$ i taki element $c_k \in \mathcal{A}$, $c_k \neq 0$, że $C^{(k)}C^{(k)-} = c_k I_{[n]}$ i

$$c_k^* c_k A^{(k)} = (C^{(k)-})^* A^{(k+1)} C^{(k)-} \quad \text{dla} \quad k=1, \dots, n-1.$$

Ponieważ $c_k^* c_k > 0$, więc na mocy twierdzenia (IX.35) z faktu, że $A^{(n)}$ jest macierzą dodatnio określoną w n -tym stopniu, wnioskujemy przez indukcję, że macierz $A^{(1)} = A$ jest dodatnio określona w n -tym stopniu. ■

(IX.41) TWIERDZENIE. Każda półprosta macierz hermitowska $A_{[n]}$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} jest ściśle równoważna w n -tym stopniu macierzy

$$(IX.42) \quad J_{[p+q]} = \begin{bmatrix} I_{[p]} & \\ & -I_{[q]} \end{bmatrix},$$

gdzie p jest sumą krotności wszystkich dodatnich, a q — sumą krotności wszystkich ujemnych wartości własnych w n -tym stopniu macierzy A .

Dowód. Na mocy twierdzeń (VIII.97) i (VIII.93) macierz A ma macierz spektralną w n -tym stopniu $S_{[n]}$ i lewą macierz własną U ortonormalną w n -tym stopniu takie, że

$$U^* A = S U^* = S U_{[n]}^{-1}.$$

Na mocy twierdzeń (V.120), (V.124) i (V.128) istnieje taka macierz permutacyjna $P_{[n]}$, że

$$P^* S P = T = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_p, -\lambda_1, \dots, -\lambda_q), \quad \omega_1, \dots, \omega_p, \lambda_1, \dots, \lambda_q > 0.$$

Niech

$$Q_{[n]} := \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_p}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_q}}, 1, \dots, 1\right).$$

Wtedy $T = Q_{[n]}^{-1} J Q_{[n]}^{-1}$ i mamy

$$P^* U^* A = T P_{[n]}^{-1} U_{[n]}^{-1} = Q_{[n]}^{-1} J Q_{[n]}^{-1} P_{[n]}^{-1} U_{[n]}^{-1},$$

czyli

$$(UPQ)^* A = J (UPQ)_{[n]}^{-1},$$

co na mocy definicji (V.150) oznacza, że macierze A i J są ściśle równoważne w n -tym stopniu. ■

(IX.43) TWIERDZENIE. Każda półprosta macierz nieujemnie określona $A_{[n]}$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} jest ściśle równoważna w n -tym stopniu macierzy $I_{[r]}$, gdzie r jest rzędem macierzy A .

Dowód wynika z twierdzeń (IX.25), (IX.41) i (V.161). ■

(IX.44) TWIERDZENIE. Każda półprosta macierz dodatnio określona $A_{[n]}$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} jest ściśle równoważna w n -tym stopniu macierzy $I_{[n]}$.

Dowód wynika z twierdzeń (IX.43) i (IX.27). ■

§ IX.3. Macierze nieujemnie określone

(IX.45) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m, n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} macierze A^*A i AA^* są nieujemnie określone, pierwsza w n -tym, a druga w m -tym stopniu.

Dowód. Macierze A^*A i AA^* są obie hermitowskie i dla dowolnych $Z^* := [z_1^* \dots z_n^*]$, $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{A}$, $Y^* := [y_1^* \dots y_m^*]$, $y_1, \dots, y_m \in \mathcal{A}$, mamy na mocy (III.196)

$$f(Z) := \operatorname{tr} Z^*(A^*A)Z = \operatorname{tr} (AZ)^*AZ \geq 0,$$

$$g(Y) := \operatorname{tr} Y^*(AA^*)Y = \operatorname{tr} (A^*Y)^*A^*Y \geq 0. \quad \blacksquare$$

(IX.46) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m, n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} kolumnowo pełnego rzędu n (wierszowo pełnego rzędu m) macierz A^*A (AA^*) jest dodatnio określona w n -tym (w m -tym) stopniu. Dla każdej macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} quasi-nieosobliwej w n -tym stopniu macierze A^*A i AA^* są dodatnio określone w n -tym stopniu.

Dowód. Macierz $I_{[n]}$ jest dodatnio określona w p -tym stopniu, ponieważ dla każdego $Z^* := (z_1^*, \dots, z_p^*)$, $z_1, \dots, z_p \in \mathcal{A}$, $Z \neq 0$ jest na mocy (I.144)

$$f(Z) := \operatorname{tr} Z^*I_{[p]}Z = \operatorname{tr} Z^*Z = \sum_{j=1}^p z_j^* z_j > 0.$$

Wobec tego dla macierzy $A_{[m, n]}$ kolumnowo pełnego rzędu n (wierszowo pełnego rzędu m) macierz

$$A^*A = A^*I_{[m]}A \quad (AA^* = (A^*)^*I_{[n]}A^*)$$

jest dodatnio określona w n -tym (w m -tym) stopniu na mocy twierdzenia (IX.35).

Druga część tezy wynika z pierwszej. ■

(IX.47) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} jest nieujemnie określona w n -tym stopniu, to

$$(IX.48) \quad a_{kk} \geq 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, n,$$

$$(IX.49) \quad a_{kk} = 0 \Rightarrow \bigwedge_{j \in \{1, \dots, n\}} a_{jk} = a_{kj} = 0.$$

Dowód. Niech $f(Z) := \operatorname{tr} Z^*AZ$ dla $Z^* := [z_1^*, \dots, z_n^*]$, $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{A}$, będzie formą hermitowską n -tego stopnia odpowiadającą macierzy A . Mamy z założenia

$$(i) \quad \operatorname{tr} Z^*AZ \geq 0.$$

Kładąc

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } j=k, \\ 0 & \text{dla } j \neq k, \quad k=1, \dots, n, \end{cases}$$

otrzymujemy na mocy (i) nierówności (IX.48). Kładąc natomiast

$$z_j = \begin{cases} -ka_{pq} & \text{dla } j=p, \\ 1 & \text{dla } j=q, \\ 0 & \text{dla } j \neq p \wedge j \neq q, \end{cases}$$

gdzie $p, q=1, \dots, n$, $p \neq q$, a k jest dowolną \mathcal{A} -liczbą naturalną, otrzymujemy

$$(ii) \quad k^2 a_{pq} a_{pq}^* a_{pp} - 2ka_{pq} a_{pq}^* + a_{qq} \geq 0.$$

Ponieważ $a_{pq} a_{pq}^* \geq 0$, więc dla $a_{pp}=0 \wedge a_{pq} \neq 0$ istnieje na mocy (I.153) takie k , że nierówność (ii) nie jest spełniona. Wynika stąd (IX.49). ■

(IX.50) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz nad ciałem częściowo uporządkowanym \mathcal{F}

$$(IX.51) \quad B_{[n+1]} := \begin{bmatrix} A_{[n]} & D_{[n, 1]} \\ D_{[1, n]}^* & [d]_{[1, 1]} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}], \quad d \in \mathcal{F},$$

jest nieujemnie określona w $(n+1)$ -ym stopniu, to macierz A jest nieujemnie określona w n -tym stopniu i istnieje taki wektor kolumnowy $W_{[n, 1]}$, że

$$(IX.52) \quad D = AW,$$

$$(IX.53) \quad \text{tr } W^* A W \leq d.$$

Dowód. Niech $Y^* := [Z^* [z^*]]$, gdzie $Z^* := [z_1^* \dots z_n^*]$, $z_1, \dots, z_n, z \in \mathcal{F}$. Z założenia jest $\text{tr } Y^* B Y \geq 0$, czyli

$$(iii) \quad \text{tr } Z^* A Z + z^* \text{tr } D^* Z + z \text{tr } Z^* D + z^* d z \geq 0.$$

Kładąc tu $z=0$ i uwzględniając, że z warunku $B^*=B$ wynika $A^*=A$, wnioskujemy, że macierz A jest nieujemnie określona w n -tym stopniu. Wykażemy teraz, że

$$(IX.54) \quad AZ=O \Rightarrow D^*Z=O, \quad \text{czyli} \quad Z^*A=O \Rightarrow Z^*D=O.$$

Istotnie, jeżeli $AZ=O$, to dla dowolnej \mathcal{F} -liczby całkowitej k jest $k^2 \text{tr } Z^* A Z = 0$, wobec czego zastępując w (iii) wektor Z wektorem kZ otrzymujemy

$$(iv) \quad k(z^* \text{tr } D^* Z + z \text{tr } Z^* D) + z^* d z \geq 0.$$

Gdyby $z^* \text{tr } D^* Z + z \text{tr } Z^* D \in \text{re } \mathcal{F}$ nie było zerem, wtedy na mocy (I.153) istniałaby \mathcal{F} -liczba całkowita k , dla której nierówność (iv) nie byłaby spełniona. Zatem

$$z^* \text{tr } D^* Z + z \text{tr } Z^* D = 0$$

dla każdego $z \in \mathcal{F}$. Dla $z := \frac{1}{2} \text{tr } D^* Z$ otrzymujemy $(\text{tr } D^* Z)^* \cdot \text{tr } D^* Z = 0$, skąd na mocy (III.195) $\text{tr } D^* Z = 0$, czyli $D^* Z = O$. Druga z implikacji (IX.54) wynika z pierwszej.

Jeżeli A jest macierzą nieosobliwą w n -tym stopniu, to kładąc $W := A_{[n]}^{-1} D$ otrzymujemy (IX.52), a kładąc w (iii) $Z = W$ i $z = -1$

$$(v) \quad \operatorname{tr} W^* A W - \operatorname{tr} D^* W - \operatorname{tr} W^* D + d \geq 0.$$

Ponieważ $D^* W = W^* D = W^* A W$, więc otrzymujemy stąd (IX.53).

Jeżeli A jest macierzą rzędu $r < n$, to przyjmujemy najpierw, że

$$(vi) \quad A = \begin{bmatrix} E_{[r]} & E_{[r, n-r]}^{(1)} \\ E_{[n-r, r]}^{(1)*} & E_{[n-r, n-r]}^{(2)} \end{bmatrix},$$

gdzie E jest macierzą nieosobliwą w r -tym stopniu. Wobec tego kolumny od $(r+1)$ -ej do n -tej macierzy A są liniowymi kombinacjami pierwszych r kolumn i stąd istnieje taka macierz $F_{[r, n-r]}$, że

$$A = \begin{bmatrix} E_{[r]} & (EF)_{[r, n-r]} \\ E_{[n-r, r]}^{(1)*} & (E^{(1)*}F)_{[n-r]} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ wiersze tej macierzy od $(r+1)$ -ego do n -tego są analogicznie liniowymi kombinacjami pierwszych r wierszy, więc istnieje taka macierz $F_{[n-r, r]}^{(1)}$, że

$$A = \begin{bmatrix} E_{[r]} & (EF)_{[r, n-r]} \\ (F^{(1)}E)_{[n-r, r]} & (F^{(1)}EF)_{[n-r]} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ A jest macierzą hermitowską, więc $E^* = E$ i $F^{(1)}E = F^*E$, a po pomnożeniu prawostronnym przez $E_{[r]}^{-1}$ mamy $F^{(1)} = F^*$. Zatem macierz A ma postać

$$(vii) \quad A = \begin{bmatrix} E_{[r]} & (EF)_{[r, n-r]} \\ (F^*E)_{[n-r, r]} & (F^*EF)_{[n-r]} \end{bmatrix}.$$

Niech teraz

$$D = \begin{bmatrix} D_{[r, 1]}^{(1)} \\ D_{[n-r, 1]}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (EH)_{[r, 1]} \\ D_{[n-r, 1]}^{(2)} \end{bmatrix},$$

gdzie $H_{[r, 1]} = E_{[r]}^{-1} D^{(1)}$. Mamy

$$[F_{[n-r, r]}^* \quad -I_{[n-r]}] A = O.$$

Stosując (IX.54) do kolejnych wierszy macierzy $[F_{[n-r, r]}^* \quad -I_{[n-r]}]$, otrzymujemy stąd

$$[F_{[n-r, r]}^* \quad -I_{[n-r]}] D = F^* E H - D^{(2)} = O,$$

skąd $D^{(2)} = F^* E H$. Kładąc $W := H$, otrzymujemy (IX.52), a dla $Z = W$ i $z = -1$ nierówność (v), skąd — jak poprzednio — nierówność (IX.53).

Jeżeli A jest macierzą rzędu $r < n$, to z uwagi na $A^* = A$ istnieje taka macierz permutacyjna $P_{[n]}$, że macierz $P^* A P$ jest macierzą postaci (vi), czyli (vi) i dla macierzy permutacyjnej

$$R := \begin{bmatrix} P_{[n]} & \\ & [1]_{[1]} \end{bmatrix}$$

mamy

$$R^* B R = \begin{bmatrix} (P^* A P)_{[n]} & (P^* D)_{[n, 1]} \\ (D^* P)_{[1, n]} & [d]_{[1]} \end{bmatrix}.$$

Na mocy udowodnionej już części twierdzenia istnieje taki wektor kolumnowy $V_{[n, 1]}$, że

$$P^*D = P^*APV,$$

skąd

$$D = APV$$

i kładąc $PV = W$ otrzymujemy (IX.52), a następnie, analogicznie jak poprzednio, (IX.53). ■

§ IX.4. Rozkład macierzy nieujemnie określonych

(IX.55) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ rzędu n nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} jest nieujemnie określona w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz ponadtrójkątna górna $T_{[r, n]}$ o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich, że*

$$(IX.56) \quad T^*T = A.$$

Dowód. Gdy $r=0$, wtedy na mocy twierdzenia (III.192) $T=O \Leftrightarrow A=O$ i twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy zatem, że $r>0$.

Przyjmujemy najpierw, że A jest macierzą nieujemnie określoną w n -tym stopniu i wykażemy przez indukcję istnienie żądanej macierzy T .

Gdy $n=1$, wtedy $r=1$ i $A=[a_{11}]$, $a_{11} \in \mathcal{F}$, $a_{11} \neq 0$. Na mocy (IX.48) jest $a_{11} > 0$ i istnieje $\sqrt{a_{11}}$. Przyjmując $T=[\sqrt{a_{11}}]$, otrzymujemy (IX.56).

Niech teraz

$$B_{[k+1]} := \begin{bmatrix} A_{[k]} & D_{[k, 1]} \\ D_{[1, k]}^* & [d]_{[1]} \end{bmatrix}, \quad d \in \mathcal{F},$$

będzie dowolną macierzą nieujemnie określoną w $(k+1)$ -ym stopniu. Na mocy twierdzenia (IX.50) A jest macierzą nieujemnie określoną w k -tym stopniu i istnieje taki wektor kolumnowy $W_{[k, 1]}$, że

$$(i) \quad B = \begin{bmatrix} A_{[k]} & (AW)_{[k, 1]} \\ (W^*A)_{[1, k]} & [d]_{[1]} \end{bmatrix}$$

i zachodzi nierówność $\text{tr } W^*AW \leq d$.

Jeżeli dla każdej macierzy $A_{[k]}$ nieujemnie określonej w k -tym stopniu istnieje taka macierz ponadtrójkątna górna $T_{[r, k]}$ o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich, że zachodzi równość (IX.56), to dla macierzy (i) przyjmijmy

$$Q_{[r+1, k+1]} := \begin{bmatrix} T_{[r, k]} & (TW)_{[r, 1]} \\ O_{[1, k]} & [\sqrt{d - \text{tr } W^*AW}]_{[1]} \end{bmatrix}.$$

Macierz Q jest ponadtrójkątna górna i

$$Q^*Q = \begin{bmatrix} (T^*T)_{[k]} & (T^*TW)_{[k, 1]} \\ (W^*T^*T)_{[1, k]} & (W^*T^*TW + [d] - W^*AW)_{[1]} \end{bmatrix} = B.$$

Na mocy indukcji dla każdej macierzy nieujemnie określonej w n -tym stopniu $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}]$

istnieje żądana macierz trójkątna $T_{[r,n]}$. Na mocy twierdzenia (V.23) r jest rzędem macierzy A .

Jeżeli — odwrotnie — istnieje macierz T o podanych własnościach spełniająca równość (IX.56), to na mocy twierdzenia (IX.45) macierz A jest nieujemnie określona w n -tym stopniu. ■

(IX.57) TWIERDZENIE. Jeżeli dla macierzy $A_{[n]}$ rzędu r , nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} istnieje taka macierz ponadtrójkątna górna $T_{[r,n]}$ o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich, że $T^*T=A$, to T jest jedyną macierzą o tych własnościach.

Dowód. Ponieważ $A=O \Leftrightarrow T=O$, możemy przyjąć, że $r>0$. Równość $T^*T=A$ ma postać

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_{1s_1}^* & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 \\ \vdots & t_{2s_2}^* & \vdots & t_{rs_r}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{1n}^* & t_{2n}^* & \vdots & t_{rn}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & t_{1s_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & t_{1n} \\ & & 0 & \dots & 0 & t_{2s_2} & \dots & \dots & t_{2n} \\ & & & & & & \dots & \dots & \\ & & & & & & t_{rs_r} & \dots & t_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie z założenia wyrazy oporowe $t_{1s_1}, \dots, t_{rs_r}$ są quasi-rzeczywiste dodatnie. Gdyby istniała inna macierz ponadtrójkątna górna $D_{[r,n]}$ o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich taka, że $D^*D=A$, mielibyśmy analogicznie

$$(iii) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_{1p_1}^* & \vdots \\ \vdots & 0 \\ \vdots & d_{2p_2}^* & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & d_{rp_r}^* \\ d_{1n}^* & d_{2n}^* & \vdots & d_{rn}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & d_{1p_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & d_{1n} \\ & & 0 & \dots & 0 & d_{2p_2} & \dots & \dots & d_{2n} \\ & & & & & & \dots & \dots & \\ & & & & & & d_{rp_r} & \dots & d_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ze wzoru (ii) wynika, że $a_{jk}=0$ dla $j, k < s_1$ i $a_{s_1s_1}=t_{1s_1}^2 > 0$. Stąd $p_1=s_1$ i

$$d_{1p_1}^2 = t_{1s_1}^2 = a_{s_1s_1},$$

skąd $d_{1p_1}=t_{1s_1} > 0$. Ze wzoru (ii) wynika dalej, że

$$a_{s_1j} = t_{1s_1} t_{1j} = d_{1p_1} d_{1j} = t_{1s_1} d_{1j},$$

skąd $d_{1j}=t_{1j}$ dla $j=p_1+1, \dots, n$. Dalszy dowód przeprowadzamy przez indukcję. Jeżeli $d_{kj}=t_{kj}$ dla $k=1, \dots, q$ i $j=1, \dots, n$, to mnożąc p_{q+1} -szy wiersz pierwszej z macierzy

(iii) przez j -tą kolumnę drugiej, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^q d_{k, p_{q+1}}^* d_{kj} + d_{q+1, p_{q+1}}^* d_{q+1, j} = a_{p_{q+1}, j} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=1}^q t_{k, p_{q+1}}^* t_{kj} = \sum_{k=1}^q d_{k, p_{q+1}}^* d_{kj} & \text{dla } 1 \leq j < s_{q+1}, \\ \sum_{k=1}^q t_{k, p_{q+1}}^* t_{kj} + t_{q+1, p_{q+1}}^* t_{q+1, j} = \\ = \sum_{k=1}^q d_{k, p_{q+1}}^* d_{kj} + t_{q+1, p_{q+1}}^* t_{q+1, j} & \text{dla } s_{q+1} \leq j \leq n. \end{cases}$$

Ponieważ z założenia jest $d_{q+1, p_{q+1}} > 0$, otrzymujemy stąd

$$d_{q+1, j} = 0 \quad \text{dla } 1 \leq j \leq s_{q+1},$$

$$p_{q+1} = s_{q+1},$$

$$d_{q+1, p_{q+1}}^* d_{q+1, p_{q+1}} = d_{q+1, p_{q+1}}^2 = t_{q+1, s_{q+1}}^2 > 0,$$

skąd $d_{q+1, p_{q+1}} = t_{q+1, s_{q+1}}$ i dla $j = s_{q+1}, \dots, n$:

$$d_{q+1, p_{q+1}} d_{q+1, j} = t_{q+1, s_{q+1}} d_{q+1, j} = t_{q+1, s_{q+1}} t_{q+1, j},$$

skąd $d_{q+1, j} = t_{q+1, j}$ dla $j = s_{q+1}, \dots, n$. Przez indukcję otrzymujemy $D = T$. ■

(IX.58) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} macierz $A_{[n]}$ jest dodatnio określona w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz trójkątna górna $T_{[n]}$ nieosobliwa w n -tym stopniu o pierwszych n wyrazach diagonalnych quasi-rzeczywistych dodatnich, że

$$T^* T = A.$$

Dowód wynika z twierdzenia (IX.55), ponieważ na mocy twierdzenia (IX.27) macierz dodatnio określona w n -tym stopniu jest pełnego rzędu n . ■

(IX.59) TWIERDZENIE. Dla macierzy $A_{[m, n]}$ i $B_{[p, n]}$ ($m \geq p$) nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} równość

$$(IX.60) \quad A^* A = B^* B$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz kolumnowo quasi-ortonormalna w p -tym stopniu $U_{[m, p]}$ i taki element $b \in \text{re } \mathcal{A}$, $b \neq 0$, że

$$(IX.61) \quad bA = UB, \quad U^* U = b^2 I_{[p]}.$$

Gdy \mathcal{A} jest ciałem, można przyjąć $b = 1$.

Dowód. Załóżmy, że zachodzi równość (IX.60). Na mocy twierdzenia (V.291) istnieją takie macierze $U_{[m]}^{(1)}$, $U_{[p]}^{(2)}$ quasi-ortonormalne, pierwsza w m -tym, a druga w p -tym stopniu, że macierze $T_{[m, n]}^{(1)} := U^{(1)} A$ i $T_{[p, n]}^{(2)} := U^{(2)} B$ są ponadtrójkątne górne o wyrazach

oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich. Jeżeli

$$A^*A = B^*B = M$$

i jeżeli $\mu_1, \mu_2 \in \operatorname{re} \mathcal{A}$, $\mu_1, \mu_2 \neq 0$, są takimi elementami, że $U^{(1)*}U^{(1)} = U^{(1)}U^{(1)*} = \mu_1 I_{[m]}$, $U^{(2)*}U^{(2)} = U^{(2)}U^{(2)*} = \mu_2 I_{[n]}$, to $\mu_1, \mu_2 > 0$ i

$$T^{(1)*}T^{(1)} = A^*U^{(1)*}U^{(1)}A = \mu_1 A^*A = \mu_1 M,$$

$$T^{(2)*}T^{(2)} = B^*U^{(2)*}U^{(2)}B = \mu_2 B^*B = \mu_2 M.$$

Jeżeli wprowadzić

$$D^{(1)} = \sqrt{\mu_2} T^{(1)}, \quad D^{(2)} = \sqrt{\mu_1} T^{(2)},$$

to macierze $D^{(1)}$ i $D^{(2)}$ są również ponadtrójkątne górne o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich i

$$D^{(1)*}D^{(1)} = D^{(2)*}D^{(2)} = \mu_1 \mu_2 M.$$

Na mocy twierdzenia (IX.57) jest $D^{(1)} = D^{(2)}$, czyli

$$\sqrt{\mu_2} U^{(1)}A = \sqrt{\mu_1} U^{(2)}B.$$

Stąd

$$\mu_1 \sqrt{\mu_2} A = \sqrt{\mu_1} U^{(1)*}U^{(2)}B,$$

czyli

$$\sqrt{\mu_1 \mu_2} A = U^{(1)*}U^{(2)}B.$$

Kładąc $b = \sqrt{\mu_1 \mu_2}$ i $U = U^{(1)*}U^{(2)}$, otrzymujemy (IX.61).

Jeżeli – odwrotnie – zachodzi (IX.61), to sprawdzamy bezpośrednio, że jest prawdziwa równość (IX.60).

Jeżeli \mathcal{A} jest ciałem, to macierz $V := (1/b)U$ jest kolumnowo ortonormalna w p -tym stopniu i zamiast (IX.61) mamy $A = UB$ i $V^*V = I_{[p]}$. ■

(IX.62) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} równość

$$(IX.63) \quad X^*X = A, \quad A = A_{[n]}, \quad X = X_{[m, n]}$$

w przypadku, gdy A nie jest macierzą nieujemnie określoną w n -tym stopniu, nie jest spełniona przez żadną macierz X .

Gdy $A_{[n]}$ jest macierzą nieujemnie określoną w n -tym stopniu i $m < r$, gdzie r jest rzędem macierzy A , wtedy równość (IX.63) nie jest spełniona przez żadną macierz X .

Gdy $A_{[n]}$ jest macierzą nieujemnie określoną w n -tym stopniu i $m \geq r$, wtedy równość (IX.63) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(IX.64) \quad X = UT,$$

gdzie $U_{[m, r]}$ jest macierzą kolumnowo ortonormalną w r -tym stopniu, a $T_{[r, n]}$ jest macierzą ponadtrójkątną górną o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich, spełniającą warunek $T^*T = A$, której istnienie zapewnia twierdzenie (IX.55).

Dowód. Pierwsza część twierdzenia wynika z twierdzenia (IX.45), druga z twierdzenia (V.23), a trzecia z twierdzenia (IX.59). ■

(IX.65) TWIERDZENIE. *Półprosta macierz hermitowska $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} jest nieujemnie (dodatnio) określona w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz nieujemnie (dodatnio) określona w n -tym stopniu $B_{[n]}$ i taki element $a \in \text{re } \mathcal{A}$, $a > 0$, że*

$$B^2 = a^2 A.$$

Gdy \mathcal{A} jest ciałem, można przyjąć $a = 1$.

Dowód. Jeżeli A jest macierzą nieujemnie (dodatnio) określoną w n -tym stopniu, to na mocy twierdzeń (VIII.92), (VIII.93) i (IX.24) istnieje taka quasi-rzeczywista macierz diagonalna

$$S = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

o pierwszych n wyrazach diagonalnych nieujemnych (dodatnich) oraz taka macierz $U_{[n]}$ quasi-ortonormalna w n -tym stopniu, że

$$AU = US.$$

Niech $U^*U = UU^* = aI_{[n]}$. Mamy $a = a^*$, skąd $a \in \text{re } \mathcal{A}$ i z definicji $a > 0$. Stąd

$$aA = USU^*.$$

Niech

$$(iv) \quad B := UTU^*,$$

gdzie

$$T := \text{diag}(\sqrt{\omega_1}, \dots, \sqrt{\omega_n}).$$

Na mocy twierdzenia (IX.26) macierz T jest nieujemnie (dodatnio) określona w n -tym stopniu, a na mocy twierdzenia (IX.35) również macierz B jest nieujemnie (dodatnio) określona w n -tym stopniu. Mamy ponadto

$$B^2 = UTU^*UTU^* = aUSU^* = a^2A.$$

Gdy \mathcal{A} jest ciałem, wtedy przyjmując zamiast (iv)

$$B := \frac{1}{a} UTU^*,$$

otrzymujemy również macierz nieujemnie (dodatnio) określoną w n -tym stopniu i

$$B^2 = A.$$

Jeżeli — odwrotnie — jest $B^2 = a^2A$, czyli $B^*B = a^2A$, to na mocy twierdzeń (IX.45) i (IX.27) macierz a^2A , a z nią i macierz A są nieujemnie (dodatnio) określone w n -tym stopniu. ■

(IX.66) TWIERDZENIE. Każdą macierz $A_{[n]}$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} , dla której macierz A^*A jest półprosta, można przedstawić w postaci

$$A = UH,$$

gdzie $U_{[n]}$ jest macierzą ortonormalną w n -tym stopniu, a H — macierzą nieujemnie określoną w n -tym stopniu, a więc hermitowską.

Dowód. Na mocy twierdzeń (IX.45) i (IX.65) istnieje taka macierz H nieujemnie określona w n -tym stopniu, że

$$H^2 = H^*H = A^*A.$$

Wobec tego twierdzenie (IX.66) wynika z twierdzenia (IX.59). ■