

Mieczysław  
Warmus

# wektory i macierze

Państwowe Wydawnictwo Naukowe

## Wektory i macierze



Mieczysław Warmus

# Wektory i macierze

tom I



Warszawa 1981

Państwowe Wydawnictwo Naukowe

© Copyright  
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe  
Warszawa 1981

Okladkę projektował

*Andrzej Pilich*

Redaktor

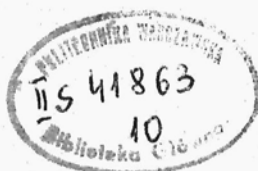
*Feliks Ptasiński*

Redaktor techniczny

*Eugeniusz Szkudaj*

Korektor

*Czesława Dworaczek*



ISBN 83-01-02362-7 t. 1-2

ISBN 83-01-02363-5 t. 1

32-11-82k

## Przedmowa

Rachunek macierzowy stał się klasycznym narzędziem matematyki współczesnej. Jego główną zaletą jest przedstawianie skomplikowanych zależności matematycznych w formie niezwykle prostej i zwężłej oraz równoległe wykonywanie działań na układach liczb jako działań na macierzach. Pozwala ponadto — dzięki pozbyciu się we wzorach nieistotnego balastu obliczeniowego — na wydobycie na wierzch istoty wykonywanych działań i na głębszą analizę otrzymywanych zależności. Dzięki powyższym zaletom znalazł szerokie zastosowanie nie tylko w samej matematyce, ale również w fizyce, naukach technicznych, naukach biologicznych, ekonometrii i innych.

Mimo swego klasycznego charakteru rachunek macierzowy stale się rozwija. I tak w ostatnich latach rozwinęła się, na przykład, teoria uogólnionych odwrotności macierzy, pozwalająca odkrywać coraz to nowe metody. Obserwuje się rozwój metod opartych na pojęciu normy macierzy, gdyż wiele zagadnień optymalizacyjnych daje się sprowadzić do poszukiwania macierzy o minimalnej normie. Coraz częściej sięga się do interpretacji geometrycznej macierzy ze względu na łatwość pojmowania przez umysł ludzki faktów geometrycznych. O ile w dawnych opracowaniach zwracano uwagę prawie wyłącznie na macierze kwadratowe nieosobliwe, o tyle obecnie obserwuje się szerokie zastosowania macierzy prostokątnych, niekoniecznie kwadratowych i niekoniecznie pełnego rzędu.

Metody macierzowe, pomimo prostoty zapisu, prowadzą często do bardzo żmudnych i długich obliczeń, sięgających miliardów operacji arytmetycznych, dlatego duże znaczenie dla rozwoju rachunku macierzowego miała rewolucja, jaką w technice obliczeniowej przyniosły elektroniczne maszyny liczące.

Rachunek macierzowy łączy się ściśle z rachunkiem wektorowym. Oba te rachunki przeplatają się i tworzą pewną całość. Książka niniejsza jest poświęcona obu tym rachunkom.

Istniejące podręczniki i monografie poświęcone teorii macierzy opierają się na pojęciu ciała algebraicznego. Ponieważ dzielenie odgrywa w rachunku macierzowym rolę drugorzędną, autor zdecydował się oprzeć teorię macierzy na pojęciu pierścienia algebraicznego. W konsekwencji teorię wektorów trzeba było oprzeć nie na pojęciu przestrzeni liniowej, a na pojęciu modułu. Z tego względu teoria modułów odgrywa w niniejszej książce rolę podstawową. Zaszła również konieczność uogólnienia niektórych pojęć, jak na przykład, pojęcia macierzy ortogonalnych, oraz wprowadzenie nowych, jak na przykład,

pojęcia macierzy quasi-nieosobliwych czy quasi-odwracalnych. W rezultacie większość znanych twierdzeń dała się wyrazić w formie uogólnionej w nowej teorii, chociaż wymagało to często nowych metod dowodzenia.

Przez uogólnienie samego pojęcia macierzy autorowi udało się wprowadzić nowe pojęcie pierścienia macierzowego, jako pierścienia nad pierścieniem, z nieograniczonym wykonywaniem dodawania i mnożenia macierzowego, przez co cała teoria stała się bardziej konsekwentna. Można było m.in. w sposób naturalny wprowadzić pojęcie hiper-macierzy.

Oparcie teorii macierzy na pojęciu pierścienia rozszerzyło zakres zagadnień możliwych do rozwiązania na gruncie tej teorii, jak, chociażby, zagadnień związanych z macierzami o wyrazach całkowitych, a więc, na przykład, rozwiązywanie w liczbach całkowitych układów algebraicznych równań liniowych o współczynnikach całkowitych.

Wydaje się, że niniejsza praca jest w literaturze matematycznej pierwszą, która tak ujmie rachunek macierzowy. Z tego też względu zawiera ona wiele fragmentów oryginalnych, do których m.in. można zaliczyć definicje pierścienia częściowo uporządkowanego, pierścienia z pierwiastkowaniem, pierścienia z wartością bezwzględną, pierścienia z podzielnością, pierścienia macierzowego, macierzy quasi-nieosobliwej, macierzy quasi-ortonormalnej i in. oraz takie twierdzenia o charakterze podstawowym, jak na przykład, uogólnienie nierówności Schwarza (twierdzenie I.159), uogólnienie algorytmu Euklidesa (twierdzenie I.331), twierdzenie o wierszach i kolumnach liniowo niezależnych w macierzy (twierdzenie IV.61), twierdzenie o wymianie półwektora w półbazie modułu (twierdzenie IV.72) i inne. W dużej mierze oryginalna jest część trzecia książki, poświęcona interpretacji geometrycznej.

Ponieważ krąg odbiorców niniejszej książki jest szeroki i bardzo zróżnicowany, autor zrezygnował z podania przykładów zastosowań, uważając, że dysponowanie dużą ilością środków w zakresie ogólnej teorii daje najlepsze podstawy dla dalszego samodzielnego uzupełniania wiedzy w kierunkach specjalistycznych. Dodatkowym argumentem był fakt, że wprowadzenie przykładów zastosowań powiększyłoby objętość opracowania, które i tak jest obszerne. Ten sam wzgląd zdecydował, że autor nie włączył do opracowania metod obliczeniowych rachunku macierzowego. Wprowadzenie chociażby najważniejszych z nich podwoiłoby objętość książki. Wyjątek stanowi kilka metod obliczeniowych podanych w przykładach ze względu na ich znaczenie metodologiczne.

Autor uważał za konieczne przeplatanie tekstu przykładami dla ułatwienia czytelnikowi zrozumienia wykładu.

---

Chcę w tym miejscu podziękować Dyrekcji Instytutu Podstaw Informatyki PAN za stworzenie mi warunków do napisania tej książki.

*Mieczysław Warmus*

## Wiadomości wstępne

W książce niniejszej zakłada się, że czytelnikowi są znane podstawowe pojęcia matematyczne w zakresie, na przykład, monografii H. Rasiowej<sup>(1)</sup> ze szczególnym uwzględnieniem elementarnych pojęć algebry abstrakcyjnej (pierwsze 6 paragrafów rozdziału XIV wymienionej monografii). Przyjmuje się, że:

$\sim \alpha$  oznacza negację zdania  $\alpha$ ,

$\alpha \wedge \beta$  oznacza koniunkcję zdań  $\alpha$  i  $\beta$ , czyli zdanie „ $\alpha$  i  $\beta$ ”,

$\alpha \vee \beta$  oznacza alternatywę zdań  $\alpha$  i  $\beta$ , czyli zdanie „ $\alpha$  lub  $\beta$ ”,

$\alpha \Rightarrow \beta$  oznacza zdanie „jeśli  $\alpha$ , to  $\beta$ ”,

$\alpha \Leftrightarrow \beta$  oznacza zdanie „ $\alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\beta$ ”,

$\bigwedge_{\psi(x)} \varphi(x)$  oznacza zdanie „dla każdego  $x$  spełniającego  $\psi(x)$  jest  $\varphi(x)$ ”,

$\bigvee_{\psi(x)} \varphi(x)$  oznacza zdanie „istnieje takie  $x$  spełniające  $\psi(x)$ , że  $\varphi(x)$ ”,

$a \in \mathfrak{A}$  oznacza zdanie „ $a$  jest elementem zbioru  $\mathfrak{A}$ ”,

$a \notin \mathfrak{A}$  oznacza zdanie „ $a$  nie jest elementem zbioru  $\mathfrak{A}$ ”,

$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$  oznacza zdanie „zbiór  $\mathfrak{A}$  jest zawarty w zbiorze  $\mathfrak{B}$ ”,

$\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$  oznacza zdanie „zbiór  $\mathfrak{B}$  zawiera zbiór  $\mathfrak{A}$ ”.

Ostatnie dwa zdania uważamy za równoważne.

Wyrażenie  $\{a_1, \dots, a_n\}$  oznacza zbiór utworzony z elementów  $a_1, \dots, a_n$ , a wyrażenie  $(a_1, \dots, a_n)$  ciąg o wyrazach  $a_1, \dots, a_n$ . Wyrażenie

$$\{x \in \mathfrak{X} : \varphi(x)\}$$

oznacza zbiór tych wszystkich elementów  $x$  zbioru  $\mathfrak{X}$ , które spełniają  $\varphi(x)$ .

Sumę, iloczyn i różnicę zbiorów  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{B}$  oznaczamy odpowiednio

$$\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} - \mathfrak{B},$$

a dla sumy i iloczynu zbiorów  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$  przyjmujemy odpowiednio zapis skrócony

$$\bigcup_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, \quad \bigcap_{k=1}^n \mathfrak{A}_k.$$

Dopełnienie zbioru  $\mathfrak{A}$  oznaczamy symbolem  $-\mathfrak{A}$ .

<sup>(1)</sup> H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, wyd. VII, PWN, Warszawa 1979



Iloczyn kartezjański zbiorów  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$  oznaczamy symbolem

$$\mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_n,$$

a w przypadku, gdy  $\mathfrak{X}_1 = \dots = \mathfrak{X}_n = \mathfrak{X}$ , również symbolem  $\mathfrak{X}^n$ .

W książce niniejszej wprowadzamy dla niektórych zbiorów stałe oznaczenia:

$\mathfrak{N}$  oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych,

$\mathfrak{N}_0$  oznacza zbiór utworzony ze wszystkich liczb naturalnych i zera,

$\mathbb{Z}$  oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych,

$\mathbb{Q}$  oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$  oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,

$\mathbb{C}$  oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych,

$\emptyset$  oznacza zbiór pusty.

Zdanie

$$\varphi(x) \equiv \psi(x),$$

gdzie  $\varphi$  i  $\psi$  są funkcjami o dziedzinie  $\mathfrak{X}$ , uważa się za równoważne zdaniu

$$\bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} \varphi(x) = \psi(x)$$

i czytamy je „ $\varphi(x)$  jest tożsamościowo równe  $\psi(x)$ ”. Symbol  $\equiv$  jest wygodny, gdy nie korzysta się z symbolu funkcji  $\psi$ , a jedynie ze wzoru na obliczanie jej wartości w punkcie  $x \in \mathfrak{X}$ .

Dla równości definiujących przyjmujemy symbol  $:=$ . Zdanie

$$\alpha := \beta$$

oznacza, że  $\alpha$  jest zdefiniowane jako równe  $\beta$ . Analogicznie, zdanie

$$\alpha := \Leftrightarrow \beta$$

oznacza, że znaczenie zdania  $\alpha$  zostało określone przez równoważne zdanie  $\beta$ , a zdanie

$$\varphi(x) := \psi(x)$$

oznacza definicję funkcji  $\varphi$  przez podanie wzoru  $\psi(x)$  na obliczanie jej wartości.

Jeżeli  $f$  jest funkcją  $n$  zmiennych, a  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$  zbiorami, to

$$f(\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n) := \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \mathfrak{A}_1 \wedge \dots \wedge x_n \in \mathfrak{A}_n\}.$$

W szczególności, jeżeli  $\circ$  jest operacją (działaniem) dwuargumentową, to

$$\mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{A}_2 := \{x \circ y : x \in \mathfrak{A}_1 \wedge y \in \mathfrak{A}_2\}.$$

W książce niniejszej używa się skróconego zapisu sum i iloczynów

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n, \quad \prod_{k=m}^n a_k := a_m a_{m+1} \dots a_n$$

z dodatkową umową, że dla  $m > n$  symbol  $\sum_{k=m}^n a_k$  oznacza element zerowy, a symbol  $\prod_{k=m}^n a_k$  element jednostkowy odpowiedniej struktury algebraicznej.

Symbol ■ oznacza koniec definicji, koniec dowodu twierdzenia lub koniec przykładu.

W całej książce przyjęto następujące zasady numerowania wzorów, definicji, twierdzeń i przykładów. Numery pisane cyframi arabskimi po numerze rozdziału pisanym systemem rzymskim (I.1), (I.2), ... obowiązują w całej książce. Numery pisane systemem rzymskim, ale małymi literami (i), (ii), (iii), (iv), ... obowiązują jedynie w granicach danego paragrafu.

