

ników elementarnych i na mocy twierdzenia (VII.65) wszystkie dzielniki elementarne macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ są liniowe.

Jeżeli — odwrotnie — wszystkie dzielniki elementarne macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ są liniowe, to na mocy twierdzenia (VII.63) układ dzielników elementarnych tej macierzy wielomianowej ma postać

$$(-c_1 e + \lambda, p_1), \dots, (-c_s e + \lambda, p_s),$$

gdzie $p_1 + \dots + p_s = n$. Wobec tego na mocy twierdzenia (VII.65) dla macierzy diagonalnej

$$S_{[n]} := \text{diag}(d_1^{\overline{c_1}}, \dots, d_n),$$

gdzie (d_1, \dots, d_n) jest ciągiem, w którym każdy z elementów c_j ($j = 1, \dots, s$) występuje dokładnie p_j razy, macierz wielomianowa $SA^0 - I_{[n]}A$ ma ten sam układ dzielników elementarnych. Na mocy twierdzenia (VII.62) macierze A i S są podobne w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (VIII.77) macierz A jest prosta. ■

(VIII.89) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem częściowo uporządkowanym, macierz $A_{[n]}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy jej moniczny wielomian minimalny w n -tym stopniu v ma t pierwiastków pojedynczych, gdzie t jest stopniem wielomianu v .

Dowód. Jeżeli macierz A jest prosta, to na mocy twierdzenia (VIII.88) wszystkie dzielniki elementarne macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ są liniowe, co z definicji oznacza, że wszystkie czynniki elementarne wielomianów niezmienniczych tej macierzy wielomianowej są iloczynami różnych monicznych wielomianów pierwszego stopnia, co w szczególności dotyczy najwyższego wielomianu niezmienniczego i_n . Na mocy twierdzenia (VII.86) moniczny wielomian minimalny v jest iloczynem t różnych monicznych wielomianów pierwszego stopnia, wobec czego ma t pierwiastków pojedynczych.

Jeżeli — odwrotnie — moniczny wielomian minimalny w n -tym stopniu v o stopniu t ma t pierwiastków pojedynczych, to na mocy twierdzenia (VII.86) wielomian niezmienniczy i_n macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ jest iloczynem monicznych i różnych wielomianów pierwszego stopnia, wobec czego wszystkie dzielniki elementarne tej macierzy wielomianowej są liniowe i na mocy twierdzenia (VIII.88) macierz A jest prosta. ■

(VIII.90) TWIERDZENIE. Macierz zespolona $A_{[n]}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy jej forma kanoniczna Jordana n -tego stopnia jest macierzą diagonalną.

Dowód na mocy definicji (VII.119) wynika z twierdzenia (VIII.88). ■

§ VIII.5. Ortogonalne macierze własne

(VIII.91) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, dla każdej macierzy półprostej $A_{[n]}$ istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że macierz aA jest ortonormalnie quasi-podobna w n -tym stopniu do pewnej macierzy trójkątnej górnej $T_{[n]}$, której wyrazy diagonalne są podzielne przez a .

Dowód. Stosujemy indukcję zupełną. Dla $n=1$ twierdzenie jest oczywiste, bo wystarczy przyjąć $a=1$ i $I_{[1]} AI_{[1]}=A$.

Założmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n=k$. Niech będzie dana macierz półprosta $A_{[k+1]}$. Jej wielomian charakterystyczny $(k+1)$ -ego stopnia ma postać:

$$\chi_{k+1}=(\lambda-\omega_1 e)^{p_1} \dots (\lambda-\omega_s e)^{p_s}, \quad \sum_{j=1}^s p_j=k+1,$$

gdzie $\omega_1, \dots, \omega_s$ są wartościami własnymi w $(k+1)$ -ym stopniu macierzy $A_{[k+1]}$ o krotnościach odpowiednio p_1, \dots, p_s . Niech X_1 będzie dowolnym niezerowym półwektorem własnym odpowiadającym wartości własnej ω_1 w $(k+1)$ -ym stopniu. Na mocy twierdzenia (V.83) istnieją takie półwektory kolumnowe w $(k+1)$ -ym stopniu X_2, \dots, X_{k+1} , że macierz

$$X_{[k+1]}:=[X_1 \dots X_{k+1}]$$

jest kolumnowo ortogonalna w $(k+1)$ -ym stopniu. Na mocy twierdzenia (V.56) istnieje taka macierz $D:=\text{diag}(d_1, \dots, d_{k+1})$, $d_1, \dots, d_{k+1} \neq 0$, że macierz $Y:=XD$ jest kolumnowo quasi-ortonormalna w $(k+1)$ -ym stopniu. Niech

$$Y_{[k+1]}:=[Y_1 \dots Y_{k+1}],$$

gdzie Y_1, \dots, Y_{k+1} są kolumnami macierzy Y . Na mocy definicji $Y_1=d_1 X_1$ jest niezerowym półwektorem własnym odpowiadającym wartości własnej ω_1 w $(k+1)$ -ym stopniu. Na mocy twierdzenia (V.71) Y jest macierzą quasi-ortonormalną w $(k+1)$ -ym stopniu. Mamy

$$Y^*AY = \left[\begin{array}{c|ccc} (Y_1^*AY_1)_{[1]} & (Y_1^*AY_2)_{[1]} & \dots & (Y_1^*AY_{k+1})_{[1]} \\ \hline (Y_2^*AY_1)_{[1]} & & & \\ \vdots & & & \\ (Y_{k+1}^*AY_1)_{[1]} & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ B_{[k]} \\ \end{array}.$$

Z założenia jest $AY_1=\omega_1 Y_1$ i jeżeli $Y_j^*Y_j=[a]$ dla $j=1, \dots, k+1$, to

$$Y_j^*AY_1=\omega_1 Y_j^*Y_1=\begin{cases} [a\omega_1] & \text{dla } j=1, \\ [0] & \text{dla } j=2, \dots, k+1. \end{cases}$$

Mamy zatem

$$(i) \quad Y^*AY = \left[\begin{array}{c|ccc} [a\omega_1]_{[1]} & (Y_1^*AY_2)_{[1]} & \dots & (Y_1^*AY_{k+1})_{[1]} \\ \hline [0]_{[1]} & & & \\ \vdots & & & \\ [0]_{[1]} & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ B_{[k]} \\ \end{array}.$$

Ale na mocy (VIII.2) mamy

$$\begin{aligned} a^{k+1} \cdot \det_{k+1}(A-AA^0) &= \det_{k+1}(Y^*Y) \cdot \det_{k+1}(A-AA^0) = \\ &= \det_{k+1} Y^* \cdot \det_{k+1}(A-AA^0) \cdot \det_{k+1} Y = \\ &= \det_{k+1} Y^*(A-AA^0)Y = \det_{k+1}(aA - Y^*AY A^0), \end{aligned}$$

skąd wynika, że ω_j ($j=1, \dots, s$) jest dla macierzy A wartością własną w $(k+1)$ -ym stopniu o krotności p_j , wtedy i tylko wtedy, gdy $a\omega_j$ jest dla macierzy Y^*AY wartością własną w $(k+1)$ -ym stopniu o krotności p_j . Wobec tego wielomianem charakterystycznym macierzy (i) jest

$$(\lambda - a\omega_1 e)^{p_1} \dots (\lambda - a\omega_s e)^{p_s} = (\lambda - a\omega_1) \chi_k,$$

gdzie χ_k jest wielomianem charakterystycznym k -tego stopnia macierzy $B_{[k]}$. Wobec tego macierz $B_{[k]}$ jest półprosta i na mocy założenia istnieje taki element $b \in \mathcal{A}$, $b \neq 0$, i taka macierz quasi-ortonormalna w k -tym stopniu $V_{[k]}$, że $bBV = VQ$, gdzie Q jest macierzą trójkątną górną, której wyrazy diagonalne są podzielne przez b . Niech $V^*V = cI_{[k]}$. Wtedy $bV^*BV = cQ$ i macierz cQ jest również trójkątną górną. Z równości $V^*V = cI_{[k]}$ wynika istnienie \sqrt{c} . Niech

$$U_{[k+1]} = Y \begin{bmatrix} [\sqrt{c}]_{[1]} & \\ & V_{[k]} \end{bmatrix}.$$

Mamy $UU^* = U^*U = acI_{[k+1]}$, co oznacza, że U jest macierzą quasi-ortonormalną w $(k+1)$ -ym stopniu. Mamy dla $C := [(Y_1^*AY_2)_{[1]}] \dots (Y_1^*AY_{k+1})_{[1]}$

$$\begin{aligned} U^*bAU &= \begin{bmatrix} [\sqrt{c}]_{[1]} & \\ (V^*)_{[k]} \end{bmatrix} bY^*AY \begin{bmatrix} [\sqrt{c}]_{[1]} & \\ & V_{[k]} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} [\sqrt{c}]_{[1]} & \\ (V^*)_{[k]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [ab\omega_1]_{[1]} & (bC)_{[1,k]} \\ O & bB_{[k]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\sqrt{c}]_{[1]} & \\ & V_{[k]} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} [abc\omega_1]_{[1]} & (b\sqrt{c}CV)_{[1,k]} \\ O & (cQ)_{[k]} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

skąd wynika prawdziwość tezy dla $n=k+1$. Na mocy indukcji twierdzenie jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathfrak{N}$. ■

(VIII.92) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, macierz półprosta $A_{[n]}$ ma prawą (lewą) macierz własną quasi-ortonormalną w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest normalna.

Dowód. Jeżeli macierz półprosta $A_{[n]}$ ma macierz spektralną w n -tym stopniu $S_{[n]}$ i odpowiadającą jej prawą macierz własną $M_{[n]}$ quasi-ortonormalną w n -tym stopniu, to na mocy twierdzenia (V.60) istnieje taki element $\mu \in \mathcal{A}$, $\mu \neq 0$, że $MM^* = M^*M = \mu I_{[n]}$, a na mocy twierdzenia (VIII.27) jest $AM = MS$ skąd $AMM^* = MSM^*$, czyli $\mu A = MSM^*$. Wobec tego

$$\mu\mu^*AA^* = MSM^*MS^*M^* = \mu MSS^*M^*,$$

$$\mu\mu^*A^*A = MS^*M^*MSM^* = \mu MS^*SM^* = \mu MSS^*M^*,$$

skąd $\mu\mu^*AA^* = \mu\mu^*A^*A$, a następnie $AA^* = A^*A$, co oznacza, że macierz A jest normalna. Założmy, że – odwrotnie – macierz półprosta $A_{[n]}$ jest normalna. Na mocy twierdzenia poprzedniego istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, taka macierz trójkątną górną $T_{[n]}$ o wyrazach diagonalnych podzielnych przez a i taka macierz quasi-ortonormalna w n -tym stopniu U , że $aAU = UT$. Na mocy twierdzenia (V.60) istnieje taki element $u \in \mathcal{A}$, $u \neq 0$,

że $UU^* = U^*U = uI_{[n]}$. Wobec tego $uT = U^*UT = aU^*AU$, a stąd

$$uu^*TT^* = aU^*AUa^*U^*A^*U = aa^*uU^*AA^*U,$$

$$uu^*T^*T = a^*U^*A^*UaU^*AU = aa^*uU^*A^*AU = aa^*uU^*AA^*U.$$

Zatem $uu^*TT^* = uu^*T^*T$, a stąd $TT^* = T^*T$, co oznacza, że macierz T jest normalna. Ale na mocy (I.168)

$$TT^* = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}^* & & & \\ t_{12}^* & t_{22}^* & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n}^* & t_{2n}^* & \dots & t_{nn}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n |t_{1j}|^2 & \dots & \dots & \\ \dots & \sum_{j=2}^n |t_{2j}|^2 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & |t_{nn}|^2 \end{bmatrix},$$

$$T^*T = \begin{bmatrix} t_{11}^* & & & \\ t_{12}^* & t_{22}^* & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n}^* & t_{2n}^* & \dots & t_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |t_{11}|^2 & \dots & \dots & \\ \dots & \sum_{j=1}^2 |t_{j2}|^2 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \sum_{j=1}^n |t_{jn}|^2 \end{bmatrix},$$

wobec czego

$$\sum_{j=1}^n |t_{1j}|^2 = |t_{11}|^2,$$

$$\sum_{j=2}^n |t_{2j}|^2 = \sum_{j=1}^2 |t_{j2}|^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|t_{nn}|^2 = \sum_{j=1}^n |t_{jn}|^2.$$

Z pierwszego z tych równań wynika, że $t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$, wobec czego drugie równanie przyjmuje postać

$$\sum_{j=2}^n |t_{2j}|^2 = |t_{22}|^2,$$

skąd $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$. Dowodzimy analogicznie przez indukcję, że macierz T jest diagonalna. Wobec tego istnieje taka macierz diagonalna $S_{[n]}$, że $T = aS$ i z równości $aAU = UT$ wynika, że $AU = US$. Na mocy twierdzenia (VIII.77) S jest macierzą spektralną w n -tym stopniu, a U odpowiadającą jej prawą macierzą własną quasi-ortonormalną w n -tym stopniu.

Dowód dla lewych macierzy własnych jest analogiczny. ■

(VIII.93) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, równość

$$(VIII.94) \quad AU = US \quad (U^*A = SU^*),$$

gdzie $A_{[n]}$ jest dowolną macierzą n -tego stopnia, $U_{[n]}$ jest macierzą quasi-ortonormalną w n -tym stopniu, a $S_{[n]}$ — macierzą diagonalną, jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą półprostą i normalną, S — jej macierzą spektralną w n -tym stopniu, a U — odpowiadającą jej prawą (lewą) macierzą własną quasi-ortonormalną w n -tym stopniu.

Dowód. Jeżeli zachodzi równość (VIII.94), to na mocy twierdzenia (VIII.77) macierz A jest prosta, a więc półprosta, macierz S jest jej macierzą spektralną w n -tym stopniu, a U — odpowiadającą jej macierzą własną quasi-ortonormalną w n -tym stopniu. Na mocy twierdzenia (VIII.92) macierz A jest normalna.

Jeżeli A jest macierzą półprostą i normalną, S — jej macierzą spektralną w n -tym stopniu, a U — odpowiadającą jej prawą (lewą) macierzą własną quasi-ortonormalną w n -tym stopniu, to na mocy twierdzenia (VIII.27) zachodzi równość (VIII.94). ■

(VIII.95) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, każda macierz półprosta normalna jest prosta.

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.92) i (VIII.77). ■

(VIII.96) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy spektralnej w n -tym stopniu $S_{[n]}$ macierzy półprostej normalnej $A_{[n]}$ w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} istnieje odpowiadająca jej prawa (lewa) macierz własna quasi-ortonormalna w n -tym stopniu.

Dowód. Na mocy twierdzenia (VIII.92) istnieje taka macierz spektralna w n -tym stopniu $F_{[n]}$, że odpowiada jej prawa (lewa) macierz własna quasi-ortonormalna w n -tym stopniu $V_{[n]}$. Z definicji macierze spektralne S i F różnią się co najwyżej kolejnością pierwszych n wyrazów diagonalnych. Na mocy twierdzenia (V.120) istnieje taka macierz permutacyjna $P_{[n]}$, że $S = P^{-1}FP$, czyli $PS = FP$. Na mocy twierdzenia (VIII.93) jest $AV = VF$, skąd $AVP = VFP = VPS$. Kładąc $U := VP$, otrzymujemy $AU = US$. Na mocy twierdzeń (V.130) i (V.78) macierz U jest quasi-ortonormalna w n -tym stopniu, wobec czego otrzymujemy stąd tezę. ■

(VIII.97) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy spektralnej w n -tym stopniu $S_{[n]}$ macierzy półprostej normalnej $A_{[n]}$ w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} istnieje odpowiadająca jej prawa (lewa) macierz własna ortonormalna w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego na mocy faktu, że dla każdej macierzy quasi-ortonormalnej w n -tym stopniu $U_{[n]}$ istnieje taki element $a \in \mathcal{F}$, $a \neq 0$, że $UU^* = U^*U = aI_{[n]}$ i wobec tego istnieje \sqrt{a} , a macierz $\frac{1}{\sqrt{a}}U$ jest ortonormalna w n -tym stopniu. ■

(VIII.98) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, macierz półprosta normalna $A_{[n]}$ ma wszystkie wartości własne quasi-rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą hermitowską.

Dowód. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą półprostą normalną, a $S_{[n]}$ — jej macierzą spektralną w n -tym stopniu, to na mocy twierdzeń (VIII.96) i (VIII.93) istnieje odpowiadająca

jej macierz własna $U_{[n]}$ quasi-ortonormalna w n -tym stopniu i $AU=US$. Niech $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, będzie takim elementem, że $UU^*=U^*U=aI_{[n]}$. Mamy $AUU^*=USU^*$ i $U^*AU=U^*US$, skąd

$$(VIII.99) \quad aA=USU^*, \quad aS=U^*AU.$$

Ponadto $a^*I_{[n]}=(aI_{[n]})^*=(UU^*)^*=UU^*=aI_{[n]}$, skąd

$$(VIII.100) \quad a^*=a.$$

Jeżeli macierz A ma wszystkie wartości własne quasi-rzeczywiste, to $S^*=S$ i

$$aA^*=a^*A^*=(aA)^*=(USU^*)^*=US^*U^*=USU^*=aA,$$

skąd $A^*=A$, co oznacza, że A jest macierzą hermitowską.

Jeżeli — odwrotnie — macierz A jest hermitowska, to

$$aS^*=a^*S^*=(aS)^*=(U^*AU)^*=U^*A^*U=U^*AU=aS,$$

skąd $S^*=S$, co oznacza, że A ma wszystkie wartości własne quasi-rzeczywiste. ■

(VIII.101) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, dla macierzy półprostej normalnej $A_{[n]}$ prawe (lewe) półwektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym w n -tym stopniu są ortogonalne.

Dowód. Niech ω_1 i ω_2 będą dwiema różnymi wartościami własnymi w n -tym stopniu macierzy półprostej normalnej $A_{[n]}$, a X_1 i X_2 — dwoma dowolnymi prawymi półwektorami własnymi odpowiadającymi tym wartościom własnym w n -tym stopniu. Na mocy twierdzenia (VIII.92) istnieją półwektory kolumnowe n -tego stopnia $Y_1, \dots, Y_{p_1}, Z_1, \dots, Z_{p_2}$, gdzie p_j jest krotnością wartości własnej ω_j w n -tym stopniu ($j=1, 2$), tworzące układ quasi-ortonormalny i takie, że Y_1, \dots, Y_{p_1} są półwektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej ω_1 w n -tym stopniu, a Z_1, \dots, Z_{p_2} wartości własnej ω_2 w n -tym stopniu. Na mocy twierdzenia (VIII.34) istnieją takie elementy $a, a_1, \dots, a_{p_1}, b, b_1, \dots, b_{p_2} \in \mathcal{A}$, $a, b \neq 0$, że

$$aX_1 = \sum_{j=1}^{p_1} a_j Y_j, \quad bX_2 = \sum_{k=1}^{p_2} b_k Z_k.$$

Wynika stąd, że dla iloczynu skalarnego (IV.145)

$$a^*b \langle X_1, X_2 \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{p_1} a_j Y_j, \sum_{k=1}^{p_2} b_k Z_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{p_1} \sum_{k=1}^{p_2} a_j^* b_k \langle Y_j, Z_k \rangle = 0,$$

skąd $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$. ■

(VIII.102) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy hermitowskiej $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} wszystkie wartości własne w n -tym stopniu są quasi-rzeczywiste.

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.192) $X \neq 0 \Leftrightarrow X^*X \neq 0$, wobec czego z równości $AX = \omega X$ dla $X \neq 0$ wynika, że

$$\omega X^*X = X^*(\omega X) = X^*AX = X^*A^*X = (AX)^*X = (\omega X)^*X = \omega^*X^*X.$$

czyli

$$(\omega - \omega^*) X^* X = O,$$

skąd $\omega = \omega^*$. Na mocy definicji (I.156) element ω jest quasi-rzeczywisty. ■

(VIII.103) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy hermitowskiej $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} prawe (lewe) półwektory własne, odpowiadające różnym wartościom własnym w n -tym stopniu, są ortogonalne.

Dowód. Na mocy poprzedniego twierdzenia i założenia $A^* = A$ z równości $AX_1 = \omega_1 X_1$ i $AX_2 = \omega_2 X_2$ wynika, że

$$\omega_1 X_1^* X_2 = (\omega_1 X_1)^* X_2 = (AX_1)^* X_2 = X_1^* A^* X_2 = X_1^* A X_2 = \omega_2 X_1^* X_2,$$

czyli

$$(\omega_1 - \omega_2) X_1^* X_2 = O,$$

skąd dla $\omega_1 \neq \omega_2$ otrzymujemy $X_1^* X_2 = O$.

Dowód dla lewych półwektorów własnych jest analogiczny. ■

(VIII.104) TWIERDZENIE. Każdej macierzy spektralnej $S_{[q]}$ w n -tym stopniu dowolnej macierzy hermitowskiej $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} odpowiada prawa (lewa) macierz własna $U_{[n, q]}$ ($V_{[q, n]}$) kolumnowo quasi-ortonormalna w q -tym stopniu.

Dowód. Na mocy twierdzeń (VIII.35), (VIII.34) i (IV.185) każdej wartości własnej ω_k w n -tym stopniu macierzy A odpowiada dokładnie q_k ortogonalnych prawych (lewych) półwektorów własnych, gdzie q_k jest krotnością geometryczną ω_k . Wobec tego dla każdej macierzy spektralnej w n -tym stopniu

$$S := \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_q),$$

gdzie q jest krotnością geometryczną widma w n -tym stopniu macierzy A można utworzyć odpowiadającą jej prawą (lewą) macierz własną $W_{[n, q]}$, w której kolumny W_{k_1}, \dots, W_{k_t} odpowiadające wartościom własnym $\omega_{k_1} = \dots = \omega_{k_t} = \omega_k$ są ortogonalne. Na mocy twierdzenia poprzedniego macierz W jest kolumnowo ortogonalna w q -tym stopniu. Na mocy twierdzenia (V.56) istnieje macierz diagonalna $D_{[q]}$ quasi-nieosobliwa w q -tym stopniu taka, że macierz

$$U_{[n, q]} := WD$$

jest quasi-ortonormalna w q -tym stopniu. Na mocy twierdzenia (VIII.27) jest

$$AW = WS \quad (W^* A = S W^*),$$

skąd dla prawej macierzy własnej W mamy

$$AU = AWD = WSD = WDS = US,$$

co na mocy tegoż twierdzenia oznacza, że U jest prawą macierzą własną odpowiadającą macierzy spektralnej S w n -tym stopniu. Dla lewej macierzy własnej W dowód jest analogiczny. ■

(VIII.105) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z wartością bezwzględną, wszystkie wartości własne w n -tym stopniu macierzy quasi-ortonormalnej w n -tym stopniu $A_{[n]}$ mają wartość bezwzględną równą \sqrt{a} , gdzie $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, jest takim elementem, że $AA^* = A^*A = aI_{[n]}$.

Dowód. Jeżeli ω jest dowolną wartością własną w n -tym stopniu macierzy A , a X – odpowiadającym jej niezerowym półwektorem własnym, to $AX = \omega X$, skąd $X^*A^* = \omega^*X^*$, a następnie $X^*A^*AX = |\omega|^2 X^*X$, czyli

$$aX^*X = |\omega|^2 X^*X.$$

Stąd wynika teza. ■

(VIII.106) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z wartością bezwzględną, wszystkie wartości własne w n -tym stopniu macierzy ortonormalnej w n -tym stopniu $A_{[n]}$ mają wartość bezwzględną równą 1.

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego. ■

(VIII.107) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, wartościami własnymi w n -tym stopniu macierzy quasi-ortonormalnej w n -tym stopniu hermitowskiej $A_{[n]}$ mogą być tylko \sqrt{a} i $-\sqrt{a}$, gdzie $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, jest takim elementem, że $AA^* = A^*A = aI_{[n]}$.

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.105) i (VIII.102). ■

(VIII.108) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, wartościami własnymi w n -tym stopniu macierzy ortonormalnej w n -tym stopniu hermitowskiej $A_{[n]}$ mogą być tylko 1 i -1 .

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.106) i (VIII.102). ■

(VIII.109) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{C}]$ nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} każda macierz normalna $A_{[n]}$ jest prosta. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{R}]$ nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} każda macierz symetryczna jest prosta.

Dowód. Na mocy twierdzenia (II.83) każda macierz zespolona $A_{[n]}$ jest półprosta. Wobec tego na mocy twierdzenia (VIII.95) każda macierz normalna jest prosta. Każda macierz z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{R}]$ traktowana jako macierz zespolona jest półprosta. Wobec tego każda macierz symetryczna z $\mathcal{M}[\mathcal{R}]$ może być traktowana jako macierz półprosta normalna hermitowska z $\mathcal{M}[\mathcal{C}]$ i na mocy twierdzenia (VIII.98) ma wszystkie wartości własne z ciała \mathcal{R} . Stąd i w $\mathcal{M}[\mathcal{R}]$ jest macierzą półprostą, a na mocy twierdzenia (VIII.95) prostą. ■

(VIII.110) PRZYKŁAD. Macierz

$$(ii) \quad A_{[2]} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{R}]$ nie jest prosta, ponieważ jej wielomianem charakterystycznym drugiego stopnia jest $\lambda^2 + 1$, nie mający pierwiastków rzeczywistych. Natomiast macierze

$$AA^* = A^*A = I_{[2]}$$

mają wielomian charakterystyczny drugiego stopnia $(\lambda - e)^2$. Ich wartością własną w drugim stopniu jest liczba 1 o krotności 2 i krotności geometrycznej 2, wobec czego są proste.

Macierz (ii) w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{C}]$ ma wartości własne w drugim stopniu i oraz $-i$. Na mocy twierdzenia (VIII.81) macierz (ii) w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{C}]$ jest prosta. ■

(VIII.111) PRZYKŁAD. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{R}]$ nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} macierz

$$A_{[2]} := \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

jest normalna, gdyż $AA^* = A^2 = A^*A$, i półprosta, ponieważ jej wielomianem charakterystycznym drugiego stopnia jest

$$\chi_2 = \det_2 \begin{bmatrix} \lambda - 17e & -5e \\ -5e & \lambda - 13e \end{bmatrix} = \lambda^2 - 30\lambda + 196e = (\lambda - (15 + \sqrt{29})e)(\lambda - (15 - \sqrt{29})e).$$

Wobec tego na mocy twierdzenia (VIII.97) musi istnieć macierz ortonormalna w drugim stopniu $U_{[2]}$ taka, że $AU = US$, gdzie $S = \text{diag}(15 + \sqrt{29}, 15 - \sqrt{29})$. Sprawdzamy, że taką macierzą jest

$$U := \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{29}}} & -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{29}}} \\ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{29}}} & \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{29}}} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

§ VIII.6. Twierdzenia o diagonalizacji ortogonalnej

(VIII.112) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$, dla której macierze AA^* i A^*A są półproste, istnieją takie macierze quasi-ortonormalne $U_{[m]}$, $V_{[n]}$, pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu, oraz taka macierz diagonalna $D_{[r]}$, gdzie r jest rzędem macierzy A , quasi-nieosobliwa w r -tym stopniu, że

$$(VIII.113) \quad UAV = D.$$

Dowód. Macierze AA^* i A^*A są normalne, wobec czego na mocy twierdzenia (VIII.96) dla ich dowolnych macierzy spektralnych odpowiednio w m -tym i w n -tym stopniu S_1 i S_2 istnieją takie macierze quasi-ortonormalne $U_{1[m]}$, $U_{2[n]}$ pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu, że

$$AA^*U_1 = U_1 S_1 \wedge A^*AU_2 = U_2 S_2.$$

Na mocy twierdzeń (V.23) i (V.162) macierze S_1 i S_2 są rzędu r . Na mocy twierdzenia (V.37) zakładamy, że

$$(i) \quad S_j = \text{diag}(\omega_1^{(j)}, \dots, \omega_r^{(j)}), \quad \omega_1^{(j)}, \dots, \omega_r^{(j)} \neq 0, \quad j = 1, 2.$$

Niech $U_1 U_1^* = U_1^* U_1 = a_1 I_{[m]}$, $U_2 U_2^* = U_2^* U_2 = a_2 I_{[n]}$, $a_1, a_2 \neq 0$. Mamy wtedy

$$(ii) \quad U_1^* A A^* U_1 = a_1 S_1 \wedge U_2^* A^* A U_2 = a_2 S_2.$$

Niech

$$(iii) \quad F_{[m, n]} := U_1^* A U_2.$$

Mamy wtedy

$$(iv) \quad FF^* = U_1^* A U_2 U_2^* A^* U_1 = a_2 U_1^* A A^* U_1 = a_1 a_2 S_1,$$

$$F^* F = U_2^* A^* U_1 U_1^* A U_2 = a_1 U_2^* A^* A U_2 = a_1 a_2 S_2.$$

Niech

$$F_{[m, n]} = \begin{bmatrix} F_{1[r, n]} \\ F_{2[m-r, n]} \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$(FF^*)_{[m]} = \begin{bmatrix} (F_1 F_1^*)_{[r]} & (F_1 F_2^*)_{[r, m-r]} \\ (F_2 F_1^*)_{[m-r, r]} & (F_2 F_2^*)_{[m-r]} \end{bmatrix} = a_1 a_2 S_{1[r]},$$

skąd $F_2 F_2^* = O$ i na mocy twierdzenia (III.192) jest $F_2 = O$, wobec czego $F = F_1$. Niech teraz

$$F_{[r, n]} = [F_{3[r]} \ F_{4[r, n-r]}].$$

Wtedy

$$(F^* F)_{[n]} = \begin{bmatrix} (F_3^* F_3)_{[r]} & (F_3^* F_4)_{[r, n-r]} \\ (F_4^* F_3)_{[n-r, r]} & (F_4^* F_4)_{[n-r]} \end{bmatrix} = a_1 a_2 S_{2[r]},$$

skąd $F_4^* F_4 = O$ i na mocy twierdzenia (III.192) jest $F_4 = O$, wobec czego $F = F_3$ jest macierzą r -tego stopnia, na mocy twierdzenia (V.21) pełnego rzędu r . Ze wzorów (iv) wynika, że macierz F^* jest ortogonalna w r -tym stopniu. Na mocy twierdzenia (V.74) istnieje taka macierz diagonalna $E_{[r]}$ quasi-nieosobliwa w r -tym stopniu, że $F^* E$ jest quasi-ortonormalna w r -tym stopniu. Niech $c \in \mathcal{A}$, $c \neq 0$, będzie takim elementem, że $(F^* E)(F^* E)^* = (F^* E)^* \times (F^* E) = c I_{[r]}$. Z określenia liczby c wynika, że istnieje \sqrt{c} . Macierz

$$Q_{[n]} := \begin{bmatrix} (F^* E)_{[r]} \\ \sqrt{c} \cdot I_{[n-r]} \end{bmatrix}$$

jest quasi-ortonormalna w n -tym stopniu i dla macierzy diagonalnej

$$D_{[r]} := a_1 a_2 S_1 E$$

quasi-nieosobliwej w r -tym stopniu mamy na mocy (iii) i (iv)

$$FQ = U_1^* A U_2 Q = D.$$

Na mocy twierdzenia (V.76) macierz $U_{[m]} := U_1^*$ jest quasi-ortonormalna w m -tym stopniu, a na mocy twierdzenia (V.78) macierz $V_{[n]} := U_2 Q$ jest quasi-ortonormalna w n -tym stopniu i otrzymujemy wzór (VIII.113). ■

(VIII.114) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z pier-

wiastkowaniem, dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$, dla której macierze AA^* i A^*A są półproste, istnieją takie macierze ortonormalne $U_{[m]}$, $V_{[n]}$, pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu, oraz taka macierz diagonalna $D_{[r]}$, gdzie r jest rzędem macierzy A , nieosobliwa w r -tym stopniu, że

$$(VIII.115) \quad UAV = D.$$

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego na mocy faktu, że dla każdej macierzy quasi-ortonormalnej w p -tym stopniu $M_{[p]}$ istnieje taki element $\mu \in \mathcal{F}$, $\mu \neq 0$, że $MM^* = M^*M = \mu I_{[p]}$, skąd wynika istnienie $\sqrt{\mu}$ i istnienie macierzy $\frac{1}{\sqrt{\mu}}M$ ortonormalnej w p -tym stopniu. Ponadto każda macierz nad ciałem quasi-nieosobliwa w p -tym stopniu jest nieosobliwa w p -tym stopniu. ■

(VIII.116) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} lub ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} , dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ istnieją takie macierze ortonormalne $U_{[m]}$ i $V_{[n]}$, pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu oraz taka macierz diagonalna $D_{[r]}$, gdzie r jest rzędem macierzy A , nieosobliwa w r -tym stopniu, że zachodzi równość (VIII.115).

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.109) i (VIII.114). ■

(VIII.117) TWIERDZENIE. Jeżeli macierze AA^* i A^*A , gdzie $A = A_{[m,n]}$, w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} są półproste, to niezerowe wartości własne obu tych macierzy są takie same, z zachowaniem ich krotności.

Dowód. W macierzach spektralnych (i) ciąg $(\omega_1^{(j)}, \dots, \omega_r^{(j)})$ jest ciągiem wszystkich niezerowych wartości własnych z zachowaniem ich krotności równej krotności geometrycznej, ponieważ odpowiednie macierze są na mocy twierdzenia (VIII.95) proste. Na mocy (iv) macierz F jest ortogonalna w r -tym stopniu. Wobec tego teza wynika z (iv) na mocy twierdzenia (V.69). ■

(VIII.118) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} lub ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} , dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ macierze AA^* i A^*A mają te same niezerowe wartości własne z zachowaniem ich krotności.

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.109) i (VIII.117). ■

(VIII.119) PRZYKŁAD. Dla macierzy rzeczywistej

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mamy

$$AA^* = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^*A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Wielomianem charakterystycznym drugiego stopnia macierzy AA^* jest

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50e = (\lambda - 5e)(\lambda - 10e),$$

a wielomianem charakterystycznym trzeciego stopnia macierzy A^*A

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 50\lambda = \lambda(\lambda - 5e)(\lambda - 10e).$$

Niezerowymi wartościami własnymi obu macierzy są liczby 5 i 10. Ich krotności są równe 1. ■

(VIII.120) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem dla macierzy $A_{[m,n]}$ zachodzi równość

$$UAV = D,$$

gdzie $U_{[m]}$ i $V_{[n]}$ są macierzami quasi-ortonormalnymi, pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu, $UU^* = U^*U = \mu I_{[m]}$, $VV^* = V^*V = \nu I_{[n]}$, $\mu, \nu \neq 0$, a $D_{[r]}$, gdzie r jest rzędem macierzy A , jest macierzą diagonalną quasi-nieosobliwą w r -tym stopniu, to DD^* jest macierzą spektralną w m -tym stopniu, a U^* odpowiadającą jej macierzą własną dla macierzy $\mu\nu AA^*$, natomiast D^*D jest macierzą spektralną w n -tym stopniu, a V odpowiadającą jej macierzą własną dla macierzy $\mu\nu A^*A$.

Dowód wynika z twierdzenia (VIII.93), ponieważ

$$U^*DD^* = U^*UAVV^*A^*U^* = \mu\nu AA^*U^*, \quad VD^*D = VV^*A^*U^*UAV = \mu\nu A^*AV. \quad \blacksquare$$

(VIII.121) DEFINICJA. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z pierwiastkowaniem, macierzą charakterystyczną macierzy $A_{[m,n]}$, dla której macierze AA^* i A^*A są półproste, nazywamy macierz

$$(VIII.122) \quad Q_{[r]} := \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_r),$$

gdzie r jest rzędem macierzy A , a elementy $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathcal{F}$ spełniające warunek

$$(VIII.123) \quad \omega_1 \geq \dots \geq \omega_r > 0$$

są pierwiastkami kwadratowymi niezerowych wartości własnych macierzy AA^* i A^*A z zachowaniem ich krotności. ■

(VIII.124) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z pierwiastkowaniem, każda macierz $A_{[m,n]}$, dla której macierze AA^* i A^*A są półproste, ma dokładnie jedną macierz charakterystyczną.

Dowód. Na mocy twierdzenia (VIII.95) macierze AA^* i A^*A są proste, a na mocy twierdzenia (V.23) ich rząd jest równy rzędowi r macierzy A . Na mocy twierdzenia (VIII.79) ich macierze spektralne (i) są rzędu r . Ze wzorów (iv) wynika, że wszystkie niezerowe wartości własne macierzy AA^* i A^*A są quasi-rzeczywiste, dodatnie i dla każdej z nich istnieje pierwiastek kwadratowy. Z uwagi na warunek (VIII.123) otrzymujemy stąd tezę. ■

(VIII.125) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} lub ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} , każda macierz $A_{[m,n]}$ ma dokładnie jedną macierz charakterystyczną.

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.109) i (VIII.124). ■

(VIII.126) PRZYKŁAD. Macierzą charakterystyczną macierzy A z przykładu (VIII.119) jest macierz

$$Q_{[2]} := \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \\ & \sqrt{5} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

(VIII.127) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z pierwiastkowaniem, każda macierz $A_{[m,n]}$, dla której macierze AA^* i A^*A są półproste, jest ortonormalnie równoważna w wymiarze $[m, n]$ swojej macierzy charakterystycznej.

Dowód. Na mocy twierdzenia (VIII.114) istnieją takie macierze ortonormalne $U_{[m]}$, $V_{[n]}$ pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu oraz taka macierz diagonalna $D_{[r]}$, gdzie r jest rzędem macierzy A , nieosobliwa w r -tym stopniu, że

$$(v) \quad UAV = D.$$

Jeżeli $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$, niech

$$E := \text{diag}(|d_1|, \dots, |d_r|), \quad F_{[n]} := \text{diag}\left(\frac{d_1}{|d_1|}, \dots, \frac{d_r}{|d_r|}, 1, \dots, 1\right).$$

Mamy $D = EF$ i na mocy (v)

$$(vi) \quad UAV = EF.$$

Ale $FF^* = F^*F = I_{[n]}$, co oznacza, że F jest macierzą ortonormalną w n -tym stopniu. Wobec tego kładąc $W := VF^*$, otrzymujemy z (vi)

$$(vii) \quad UAW = E,$$

gdzie W jest macierzą ortonormalną w n -tym stopniu, a $E_{[r]}$ jest macierzą o pierwszych r wyrazach quasi-rzeczywistych nieujemnych, które na mocy twierdzenia (VIII.120) są pierwiastkami kwadratowymi wszystkich niezerowych wartości własnych macierzy AA^* i A^*A . Oznacza to, że macierz E różni się od macierzy charakterystycznej Q macierzy A co najwyżej kolejnością pierwszych r wyrazów diagonalnych. Istnieje zatem na mocy twierdzenia (V.120) taka macierz permutacyjna $P_{[r]}$, że $P^*EP = Q$, lub — co na jedno wychodzi — takie macierze permutacyjne $P_{1[m]}$ i $P_{2[n]}$, że $P_1EP_2 = Q$. Kładąc $\hat{U}_{[m]} := P_1U$ i $\hat{V}_{[n]}^* = WP_2$, otrzymujemy z (vii)

$$\hat{U}A\hat{V}^* = Q, \quad \text{czyli} \quad \hat{U}A = Q\hat{V},$$

gdzie na mocy twierdzeń (V.130) i (V.77) macierze \hat{U} i \hat{V} są ortonormalne, pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu. Otrzymujemy stąd tezę. \blacksquare

(VIII.128) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} lub ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} , każda macierz $A_{[m,n]}$ jest ortonormalnie równoważna w wymiarze $[m, n]$ swej macierzy charakterystycznej.

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.109) i (VIII.127). \blacksquare