

Macierze funkcyjne

§ VI.1. Pierścienie i moduły funkcyjne

(VI.1) DEFINICJA. *Pierścieniem funkcyjnym ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z jedynką*

$$(i) \quad \mathcal{A} := (\mathfrak{A}, +, \cdot, -, 0, 1)$$

albo po prostu *pierścieniem funkcyjnym* nazywamy każdy pierścień nad pierścieniem \mathcal{A} postaci

$$(ii) \quad \mathcal{V} := (\mathfrak{B}, +, \cdot, -, 0, 1),$$

gdzie \mathfrak{B} jest zbiorem funkcji z \mathfrak{X} w $\mathfrak{A}^{(1)}$, a operacje $+$, \cdot , $-$, 0 , 1 są określone dla dowolnych $f, g \in \mathfrak{B}$ przez operacje pierścienia (i) wzorami:

$$(VI.2) \quad (f+g)(x) \equiv f(x) + g(x),$$

$$(VI.3) \quad (fg)(x) \equiv f(x) \cdot g(x),$$

$$(VI.4) \quad (-f)(x) \equiv -f(x),$$

$$(VI.5) \quad f=0: \Leftrightarrow f(x) \equiv 0,$$

$$(VI.6) \quad f=1: \Leftrightarrow f(x) \equiv 1,$$

a w przypadku pierścienia z transpozycją ponadto

$$(VI.7) \quad (\bar{f})(x) \equiv \overline{f(x)},$$

$$(VI.8) \quad (f^T)(x) \equiv (f(x))^T. \quad \blacksquare$$

Należy odróżniać operacje pierścienia (ii) od operacji pierścienia (i). W pierścieniu (ii) operacje $+$, \cdot , $-$, $0, 1$ są dokonywane na funkcjach ze zbioru \mathfrak{B} , a w pierścieniu (i) na elementach zbioru \mathfrak{A} , a więc między innymi na wartościach funkcji z pierścienia (ii). Ściśle

(¹) W przypadku zbioru \mathfrak{X} miary dodatniej dopuszcza się tu funkcje określone nie dla każdego $x \in \mathfrak{X}$, ale prawie wszędzie w \mathfrak{X} , tzn. poza zbiorem miary zero.

biorąc, powinniśmy operacje w (ii) oznaczać inaczej niż operacje w (i). Zwyczajowo używamy jednak tych samych symboli, rozpoznając z kontekstu, czy mamy do czynienia z operacjami pierścienia (i), czy (ii).

Należy również odróżniać zdania $f=0$ i $f(x)=0$. Zgodnie z (VI.5) pierwsze z tych zdań jest równoważne zdaniu

$$\bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} f(x)=0,$$

podczas gdy drugie oznacza, że

$$\bigvee_{x \in \mathfrak{X}} f(x)=0$$

i używamy go tylko dla wyrażenia faktu, że dla jakiegoś wybranego x wartością funkcji f jest zero. Zauważmy przy tym, że w zdaniu $f=0$ symbol 0 oznacza \mathcal{V} -zero, a w zdaniu $f(x)=0$ symbol 0 oznacza \mathcal{A} -zero. Analogicznie, zdanie $f \neq 0$ oznacza, że $f(x) \neq 0$, co nie wyklucza możliwości, że dla pewnego wybranego x jest $f(x)=0$. Jeżeli chcemy wyrazić fakt, że funkcja f dla żadnego x nie przyjmuje wartości zero, to korzystamy z zapisu

$$(VI.9) \quad \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} f(x) \neq 0.$$

(VI.10) DEFINICJA. Funkcję f z pierścienia (ii) nazywamy *niezerową* albo *nierówną tożsamościowo zeru* wtedy i tylko wtedy, gdy $f \neq 0$, czyli $f(x) \neq 0$, natomiast *nierówną zeru* lub *różną od zera* wtedy i tylko wtedy, gdy jest (VI.9). ■

Zgodnie z definicjami (VI.1) i (I.192) w pierścieniu (ii) jest określone lewostronne i prawostronne mnożenie przez elementy pierścienia (i), spełniające warunki (I.193), ..., (I.204), a dla pierścieni z transpozycją ponadto (I.205), ..., (I.208). Wobec tego dla pierścienia (ii) są również ważne wzory (I.210), ..., (I.216).

(VI.11) PRZYKŁAD. Pierścień funkcji wielomianowych ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych \mathfrak{R} w ciało liczb rzeczywistych \mathcal{R} jest pierścieniem funkcyjnym. ■

(VI.12) DEFINICJA. *Ciałem funkcyjnym ze zbioru \mathfrak{X} w ciało \mathcal{F}* albo po prostu *ciałem funkcyjnym* nazywamy każdy pierścień funkcyjny ze zbioru \mathfrak{X} w ciało \mathcal{F} będący ciałem. ■

(VI.13) PRZYKŁAD. Zbiór funkcji wymiernych postaci p/q , $q \neq 0$, gdzie p i q są funkcjami wielomianowymi z \mathfrak{R} w \mathcal{R} , tworzy ciało funkcyjne z \mathfrak{R} w \mathcal{R} , natomiast pierścień funkcyjny z przykładu (VI.11) nie jest ciałem funkcyjnym. ■

(VI.14) DEFINICJA. *Modułem funkcyjnym ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z jedyneką (i)* albo po prostu *modułem funkcyjnym* nazywamy każdy moduł nad pierścieniem (i) postaci

$$(iii) \quad \mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, 0, \mathcal{A}, \cdot),$$

gdzie \mathfrak{H} jest zbiorem funkcji z \mathfrak{X} w \mathfrak{A} , a operacje $+$, $-$, 0 są określone wzorami (VI.2), (VI.4), (VI.5), natomiast operacja \cdot dla dowolnej funkcji $f \in \mathfrak{H}$ i dowolnego elementu $a \in \mathcal{A}$ wzorem

$$(VI.15) \quad (af)(x) := a \cdot f(x). \quad \blacksquare$$

(VI.16) DEFINICJA. *Funkcyjną przestrzenią liniową ze zbioru \mathfrak{X} w ciało \mathcal{F}* nazywamy każdy moduł funkcyjny z \mathfrak{X} w \mathcal{F} . ■

(VI.17) PRZYKŁAD. Zbiór funkcji wielomianowych ze zbioru liczb rzeczywistych \mathfrak{R} w ciało liczb rzeczywistych \mathscr{R} tworzy funkcyjną przestrzeń liniową z \mathfrak{R} w \mathscr{R} . ■

Zauważmy, że każdy pierścień funkcyjny (ii) można traktować jako moduł (iii). Wobec tego możemy mówić o liniowej zależności lub niezależności funkcji z pierścienia (ii) jako półwektorów z modułu (iii).

(VI.18) TWIERDZENIE. Funkcje f_1, \dots, f_n z pierścienia (ii) nad pierścieniem całkowitym (i) są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$, że

$$(VI.19) \quad \det_n \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Dowód. Wykażemy najpierw przez indukcję konieczność warunku (VI.19). W przypadku $n=1$ pojedyncza funkcja f_1 jest liniowo niezależna wtedy i tylko wtedy, gdy $f_1(x) \neq 0$, tzn. gdy istnieje takie $x_1 \in \mathfrak{X}$, że $f_1(x_1) \neq 0$, czyli jest spełniony warunek (VI.19). Załóżmy teraz, że warunek ten jest spełniony dla $n=k$, natomiast nie jest spełniony dla liniowo niezależnych funkcji f_1, \dots, f_{k+1} i $n=k+1$, tzn. że istnieją takie $x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{X}$, że

$$(VI.20) \quad \det_k \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_k(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_k) & \dots & f_k(x_k) \end{bmatrix} \neq 0,$$

$$(VI.21) \quad \det_{k+1} \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_k(x_1) & f_{k+1}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_k) & \dots & f_k(x_k) & f_{k+1}(x_k) \\ f_1(x) & \dots & f_k(x) & f_{k+1}(x) \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Rozwijając wyznacznik (VI.21) względem ostatniego wiersza, stwierdzilibyśmy na mocy (VI.20), że funkcje f_1, \dots, f_{k+1} są liniowo zależne, wbrew założeniu. Jeżeli zatem warunek (VI.19) jest konieczny dla $n=k$, to jest również konieczny dla $n=k+1$. Wynika stąd konieczność warunku (VI.19) dla każdego $n \in \mathfrak{N}$.

Wykażemy teraz, że warunek (VI.19) jest wystarczający. Niech $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{A}$ będą dowolnymi takimi elementami, że $a_1 \cdot f_1(x) + \dots + a_n \cdot f_n(x) \equiv 0$. Podstawiając tu kolejno $x = x_1, \dots, x_n$, otrzymujemy

$$(iv) \quad \sum_{j=1}^n a_j \cdot f_j(x_k) = 0 \quad \text{dla} \quad k=1, \dots, n.$$

Niech teraz

$$A := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad M := \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{bmatrix}.$$

Wtedy równości (iv) są równoważne równości

$$(v) \quad MA = O.$$

Ale na mocy (VI.19) macierz M jest quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu i istnieje taka jej

quasi-odwrotność n -tego stopnia N i taki element $\mu \in \mathcal{A}$, $\mu \neq 0$, że $MN = NM = \mu I_{[n]}$. Mnożąc zatem równość (v) lewostronnie przez macierz N , otrzymujemy $\mu A = O$, a stąd $A = O$, czyli $a_1 = \dots = a_n = 0$. Oznacza to, że funkcje f_1, \dots, f_n są liniowo niezależne. ■

(VI.22) PRZYKŁAD. Funkcje $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określone wzorami:

$$f_1(x) \equiv 1, \quad f_2(x) \equiv e^x, \quad f_3(x) \equiv e^{-x}$$

są liniowo niezależne, ponieważ

$$\det_3 \begin{bmatrix} f_1(-1) & f_2(-1) & f_3(-1) \\ f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \end{bmatrix} = \det_3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{e} & e \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & e & \frac{1}{e} \end{bmatrix} = e^2 - 2e + \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} \neq 0. \quad \blacksquare$$

§ VI.2. Funkcje półwektorowe

(VI.23) DEFINICJA. Funkcją półwektorową ze zbioru \mathfrak{X} w moduł \mathcal{H} albo po prostu funkcją półwektorową nazywamy każdą funkcję $\varphi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{H}$. ■

(VI.24) DEFINICJA. Modułem funkcyjnym ze zbioru \mathfrak{X} w moduł \mathcal{H} albo po prostu modułem funkcyjnym półwektorowym nazywamy każdy moduł postaci

$$(VI.25) \quad \mathcal{G} := (\mathfrak{G}, +, -, \circ, \mathcal{V}, \cdot),$$

gdzie

$$(VI.26) \quad \mathcal{V} := (\mathfrak{B}, +, \cdot, -, 0, 1)$$

jest pierścieniem funkcyjnym ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z jedyneką

$$(VI.27) \quad \mathcal{A} := (\mathfrak{A}, +, \cdot, -, 0, 1),$$

\mathfrak{G} jest zbiorem funkcji półwektorowych ze zbioru \mathfrak{X} w moduł

$$(VI.28) \quad \mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, \circ, \mathcal{A}, \cdot),$$

operacje $+$, $-$, \circ modułu (VI.25) są określone analogicznie do (VI.2), (VI.4) i (VI.5) przez operacje modułu (VI.28), a operacja \cdot w (VI.25) jest mnożeniem funkcji półwektorowych z \mathfrak{G} przez funkcje z \mathcal{V} , określonym analogicznie do (VI.3). ■

(VI.29) DEFINICJA. Funkcję półwektorową φ z modułu (VI.25) nazywamy *niezerową* albo *nierówną tożsamościowo zeru* wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \neq o$, czyli $\varphi(x) \neq o$, a nierówną zeru lub różną od zera wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(VI.30) \quad \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} \varphi(x) \neq o. \quad \blacksquare$$

(VI.31) DEFINICJA. Funkcją wektorową ze zbioru \mathfrak{X} w przestrzeń liniową \mathcal{L} albo po prostu funkcją wektorową nazywamy każdą funkcję półwektorową z \mathfrak{X} w \mathcal{L} . ■

(VI.32) DEFINICJA. Modulem funkcyjnym ze zbioru \mathfrak{X} w przestrzeń liniową \mathcal{L} albo po prostu modulem funkcyjnym wektorowym nazywamy każdy moduł (VI.25), w którym $\mathcal{H} = \mathcal{L}$ jest przestrzenią liniową. ■

(VI.33) DEFINICJA. Modulem funkcyjnym ze zbioru \mathfrak{X} w moduł ciągowy n -tego stopnia \mathcal{S} albo po prostu modulem funkcyjnym ciągowym n -tego stopnia nazywamy każdy moduł (VI.25), w którym $\mathcal{H} = \mathcal{S}$ jest modulem ciągowym n -tego stopnia. ■

Zauważmy, że w każdym module funkcyjnym ciągowym n -tego stopnia (VI.25) wzór (VI.28) przyjmuje postać:

$$(VI.34) \quad \mathcal{H} := (\mathfrak{A}^n, +, -, \circ, \mathcal{A}, \cdot),$$

a zbiór \mathfrak{G} jest utworzony z takich funkcji półwektorowych postaci $a: \mathfrak{X} \mapsto \mathcal{H}$, które każdemu elementowi $x \in \mathfrak{X}$ przyporządkowują ciąg $a(x) := (a_1(x), \dots, a_n(x))$ z modułu \mathcal{H} . Jeżeli dla każdej takiej funkcji półwektorowej $a \in \mathfrak{G}$ jest $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{V}$, to można przyjąć, że

$$(VI.35) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{B}^n,$$

a moduł (VI.25) traktować jako moduł ciągowy n -tego stopnia

$$\mathcal{G} = (\mathfrak{B}^n, +, -, \circ, \mathcal{V}, \cdot).$$

(VI.36) PRZYKŁAD. Niech \mathcal{V} będzie pierścieniem funkcyjnym utworzonym przez wszystkie funkcje wielomianowe postaci $a: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$, gdzie \mathfrak{R} jest zbiorem liczb rzeczywistych. Niech \mathcal{H} będzie modulem ciągowym n -tego stopnia nad ciałem \mathcal{R} , tzn. modulem utworzonym przez wszystkie ciągi postaci (a_1, \dots, a_n) , gdzie a_1, \dots, a_n są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Zgodnie z (VI.25), ..., (VI.28) i (VI.34) przyjmujemy zatem, że $\mathfrak{X} = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{R}$. Jeżeli \mathfrak{G} jest zbiorem takich funkcji wektorowych a , które każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowują wartość ciągu wielomianów (a_1, \dots, a_n) nad ciałem \mathcal{R} w punkcie x , to każdą taką funkcję $a \in \mathfrak{G}$ można utożsamić z ciągiem funkcji wielomianowych $(a_1(x), \dots, a_n(x))$, czyli przyjąć (VI.35). A oto przykłady takich funkcji wektorowych z \mathfrak{G} dla $n=3$:

$$a(x) := (x^2, \pi x + \sqrt{2}, 2x^3), \quad b(x) := (2, x - x^2, -x^4). \quad \blacksquare$$

Z definicji (IV.51) wynika definicja następująca.

(VI.37) DEFINICJA. Funkcje półwektorowe $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ z modułu (VI.25) nazywamy liniowo zależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie funkcje $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{V}$, że

$$(VI.38) \quad \sum_{j=1}^k a_j(x) \cdot \varphi_j(x) \equiv 0 \wedge \bigvee_{r \in \{1, \dots, k\}} a_r(x) \not\equiv 0. \quad \blacksquare$$

Tak określona liniowa zależność funkcji półwektorowych $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ nie wystarcza dla późniejszych zastosowań. Wprowadzamy jeszcze dwie dodatkowe definicje.

(VI.39) DEFINICJA. Funkcje półwektorowe $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ z modułu (VI.25) nazywamy *silnie liniowo zależnymi* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie funkcje $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{V}$, że

$$(VI.40) \quad \sum_{j=1}^k a_j(x) \cdot \varphi_j(x) \equiv 0 \wedge \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} \bigvee_{r \in \{1, \dots, k\}} a_r(x) \neq 0. \quad \blacksquare$$

(VI.41) DEFINICJA. Funkcje półwektorowe $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ z modułu (VI.25) nazywamy *słabo liniowo zależnymi* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie funkcje $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{V}$ i taki element $x_0 \in \mathfrak{X}$, że

$$(VI.42) \quad \sum_{j=1}^k a_j(x_0) \cdot \varphi_j(x_0) = 0 \wedge \bigvee_{r \in \{1, \dots, k\}} a_r(x_0) \neq 0. \quad \blacksquare$$

Z powyższych definicji wynika, że jeżeli funkcje półwektorowe $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ są silnie liniowo zależne, to są liniowo zależne, a jeżeli są liniowo zależne, to są słabo liniowo zależne.

(VI.43) PRZYKŁAD. Niech \mathcal{G} będzie modułem funkcyjnym z przykładu (VI.36) i niech

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &\equiv (1, x, x^2), & \varphi_2(x) &\equiv (1+x, 1+x^2, 1+x^3), \\ \varphi_3(x) &\equiv (-1+x^2, -x^2+x^3, x-x^2-x^3+x^4). \end{aligned}$$

Funkcje półwektorowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ są silnie liniowo zależne, ponieważ

$$(i) \quad (1+x) \cdot \varphi_1(x) - x \cdot \varphi_2(x) + 1 \cdot \varphi_3(x) \equiv (0, 0, 0) = 0.$$

Natomiast funkcje półwektorowe φ_1 i φ_2 nie są nawet liniowo zależne, ponieważ dla dowolnych funkcji wielomianowych $a_1, a_2 \in \mathcal{V}$ z równości

$$(ii) \quad a_1(x) \cdot (1, x, x^2) + a_2(x) \cdot (1+x, 1+x^2, 1+x^3) \equiv (0, 0, 0)$$

wynika, że

$$\begin{aligned} (iii) \quad & a_1(x) + (1+x) \cdot a_2(x) \equiv 0, \\ & x \cdot a_1(x) + (1+x^2) \cdot a_2(x) \equiv 0, \\ & x^2 \cdot a_1(x) + (1+x^3) \cdot a_2(x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Odejmując od drugiej tożsamości pierwszą pomnożoną przez x , otrzymujemy

$$(1-x) \cdot a_2(x) \equiv 0.$$

Jedyną funkcją wielomianową, która tę tożsamość spełnia, jest $a_2(x) \equiv 0$. Wobec tego na mocy pierwszej tożsamości (iii) jest również $a_1(x) \equiv 0$.

Natomiast funkcje półwektorowe φ_1, φ_2 są słabo liniowo zależne, gdyż dla $a_1(x) \equiv 2$ i $a_2(x) \equiv -1$ oraz dla $x=1$ otrzymujemy z (ii) $2 \cdot (1, 1, 1) - 1 \cdot (2, 2, 2) = (0, 0, 0)$. \blacksquare

(VI.44) DEFINICJA. Funkcje półwektorowe $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ z modułu (VI.25) nazywamy *liniowo niezależnymi*, gdy nie są liniowo zależne, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy dla $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{V}$

$$(VI.45) \quad \sum_{j=1}^k a_j(x) \cdot \varphi_j(x) \equiv 0 \Rightarrow \bigwedge_{j \in \{1, \dots, k\}} a_j(x) \equiv 0. \quad \blacksquare$$

(VI.46) DEFINICJA. Funkcje półwektorowe $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ z modułu (VI.25) nazywamy *silnie liniowo niezależnymi*, gdy nie są słabo liniowo zależne, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{V}$ i dla każdego $x \in \mathfrak{X}$

$$(VI.47) \quad \sum_{j=1}^k a_j(x) \cdot \varphi_j(x) = 0 \Rightarrow \bigwedge_{j \in \{1, \dots, k\}} a_j(x) = 0. \quad \blacksquare$$

(VI.48) DEFINICJA. Funkcje półwektorowe $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ z modułu (VI.25) nazywamy *słabo liniowo niezależnymi*, gdy nie są silnie liniowo zależne, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{V}$

$$(VI.49) \quad \sum_{j=1}^k a_j(x) \cdot \varphi_j(x) \equiv 0 \Rightarrow \bigvee_{x \in \mathfrak{X}} \bigwedge_{j \in \{1, \dots, k\}} a_j(x) = 0. \quad \blacksquare$$

Z powyższych definicji wynika, że jeżeli funkcje półwektorowe $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ są silnie liniowo niezależne, to są liniowo niezależne, a jeżeli są liniowo niezależne, to są słabo liniowo niezależne.

(VI.50) PRZYKŁAD. Funkcje półwektorowe φ_1 i φ_2 z przykładu (VI.43) są liniowo niezależne, ale nie są silnie liniowo niezależne. Natomiast w tym samym module funkcje półwektorowe

$$\psi_1(x) := (1, 0, x), \quad \psi_2(x) := (1+x, 1+x^2, 1+x^3), \quad \psi_3(x) := (0, 0, 1+x^4)$$

są silnie liniowo niezależne, ponieważ dla dowolnych funkcji wielomianowych $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{V}$ i dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathfrak{R}$ z równości

$$a_1(x) \cdot (1, 0, x) + a_2(x) \cdot (1+x, 1+x^2, 1+x^3) + a_3(x) \cdot (0, 0, 1+x^4) = (0, 0, 0)$$

wynika, że

$$a_1(x) + (1+x) \cdot a_2(x) = 0,$$

$$(1+x^2) \cdot a_2(x) = 0,$$

$$x \cdot a_1(x) + (1+x^3) \cdot a_2(x) + (1+x^4) \cdot a_3(x) = 0,$$

i z drugiego z tych równań otrzymujemy $a_2(x) = 0$, następnie z pierwszego $a_1(x) = 0$, a na koniec z trzeciego $a_3(x) = 0$. \blacksquare

(VI.51) TWIERDZENIE. Ciągi funkcji $(\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}), \dots, (\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_n^{(k)})$ wziętych z pierścienia funkcyjnego (VI.26) przy założeniu, że pierścień (VI.27) jest całkowity, traktowane – zgodnie z (VI.35) – jako funkcje półwektorowe z modułu funkcyjnego (VI.25), są silnie liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \mathfrak{X}$, macierz

$$(VI.52) \quad M_{[k, n]} := \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k)}(x) & \dots & \varphi_n^{(k)}(x) \end{bmatrix}$$

jest wierszowo pełnego rzędu k , a słabo liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $x \in \mathfrak{X}$, że macierz (VI.52) jest wierszowo pełnego rzędu k .

Dowód. Jeżeli wymienione ciągi funkcji są silnie liniowo niezależne, to z definicji (VI.46) wynika, że dla dowolnych funkcji $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{V}$ i dla każdego $x \in \mathfrak{X}$

$$\sum_{j=1}^k a_j(x) \cdot (\varphi_1^{(j)}(x), \dots, \varphi_n^{(j)}(x)) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \bigwedge_{j \in \{1, \dots, k\}} a_j(x) = 0,$$

czyli

$$(iv) \quad [a_1(x) \dots a_k(x)] \cdot M = O \Rightarrow [a_1(x) \dots a_k(x)] = O.$$

Gdyby macierz M dla jakiegoś $x \in \mathfrak{X}$ nie była wierszowo pełnego rzędu k , wtedy na mocy twierdzenia (IV.63) jej wiersze byłyby liniowo zależne, tzn. istniałyby takie elementy $c_1, \dots, c_k \in \mathcal{A}$, z których co najmniej jeden, powiedzmy c_r , nie byłby zerem, że

$$(v) \quad [c_1 \dots c_k] \cdot M = O \wedge c_r \neq 0.$$

W pierścieniu (VI.26) jest jedynka, którą jest funkcja tożsamościowo równa \mathcal{A} -jedynce. Ponieważ (VI.26) jest pierścieniem nad pierścieniem \mathcal{A} , więc jest w nim określone mnożenie przez elementy pierścienia \mathcal{A} . W takim razie z istnienia \mathcal{V} -jedynki wynika istnienie w pierścieniu \mathcal{V} funkcji tożsamościowo równych c_1, \dots, c_k i wobec tego (v) byłoby sprzeczne z (iv). Wynika stąd, że dla każdego $x \in \mathfrak{X}$ macierz (VI.52) jest wierszowo pełnego rzędu k .

Jeżeli – odwrotnie – dla każdego $x \in \mathfrak{X}$ macierz (VI.52) jest wierszowo pełnego rzędu k , to dla każdego $x \in \mathfrak{X}$ można z jej kolumn utworzyć macierz $N_{[k]}$ pełnego rzędu k , a zatem quasi-nieosobliwą w k -tym stopniu i dla dowolnych funkcji $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{V}$ mamy

$$(vi) \quad [a_1(x) \dots a_k(x)] \cdot N = O \Rightarrow [a_1(x) \dots a_k(x)] \cdot NN_{[k]}^{-1} = O,$$

gdzie $N_{[k]}^{-1}$ jest quasi-odwrotnością k -tego stopnia macierzy N , tzn. istnieje taki element $v \in \mathcal{A}$, $v \neq 0$, że $NN_{[k]}^{-1} = N_{[k]}^{-1}N = v \cdot I_{[k]}$. Wobec tego na mocy (vi)

$$[a_1(x) \dots a_k(x)] \cdot N = O \Rightarrow [a_1(x) \dots a_k(x)] \cdot v = O \Rightarrow [a_1(x) \dots a_k(x)] = O,$$

a stąd wynika (iv), czyli ciągi $(\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}), \dots, (\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_n^{(k)})$ są wtedy silnie liniowo niezależne.

Dowód w przypadku ciągów słabo liniowo niezależnych jest analogiczny. ■

(VI.53) TWIERDZENIE. Ciągi funkcji $(\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}), \dots, (\varphi_1^{(n)}, \dots, \varphi_n^{(n)})$ wziętych z pierścienia funkcyjnego (VI.26) przy założeniu, że pierścień (VI.27) jest całkowity, traktowane – zgodnie z (VI.35) – jako funkcje półwektorowe z modułu funkcyjnego (VI.25), są silnie liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(VI.54) \quad \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} \det_n \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{bmatrix} \neq 0,$$

a słabo liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(VI.55) \quad \bigvee_{x \in \mathfrak{X}} \det_n \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego dla $k=n$. ■

(VI.56) PRZYKŁAD. Funkcje półwektorowe ψ_1, ψ_2, ψ_3 z przykładu (VI.50) są silnie liniowo niezależne, ponieważ

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \det_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1+x & 1+x^2 & 1+x^3 \\ 0 & 0 & 1+x^4 \end{bmatrix} = (1+x^2)(1+x^4) \neq 0.$$

Funkcje półwektorowe φ_1 i φ_2 z przykładu (VI.43) są słabo liniowo niezależne, a nie są silnie liniowo niezależne, ponieważ macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1+x & 1+x^2 & 1+x^3 \end{bmatrix}$$

dla $x=0$ jest wierszowo pełnego rzędu 2, natomiast dla $x=1$ jest rzędu 1, a więc nie jest wierszowo pełnego rzędu 2. ■

Jak widać z przykładów (VI.43) i (VI.56) te same funkcje półwektorowe mogą być jednocześnie słabo liniowo zależne i słabo liniowo niezależne.

(VI.57) TWIERDZENIE. Ciągi funkcji $(\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}), \dots, (\varphi_1^{(n)}, \dots, \varphi_n^{(n)})$, wziętych z pierścienia funkcyjnego (VI.26) przy założeniu, że pierścień (VI.27) jest całkowity, traktowane — zgodnie z (VI.35) — jako funkcje półwektorowe z modułu funkcyjnego (VI.25), są silnie liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(VI.58) \quad \det_n \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(1)}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{bmatrix} \equiv 0,$$

a słabo liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(VI.59) \quad \bigvee_{x \in \mathbb{R}} \det_n \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(1)}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{bmatrix} = 0.$$

Dowód wynika z twierdzenia (VI.51) dla $k=n$. ■

(VI.60) PRZYKŁAD. Funkcje półwektorowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ z przykładu (VI.43) są silnie liniowo zależne, ponieważ

$$\det_3 \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1+x & 1+x^2 & 1+x^3 \\ -1+x^2 & -x^2+x^3 & x-x^2-x^3+x^4 \end{bmatrix} \equiv 0. \quad \blacksquare$$

§ VI.3. Funkcje macierzowe i macierze funkcyjne

(VI.61) DEFINICJA. Funkcją macierzową ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień macierzowy $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ albo po prostu funkcją macierzową nazywamy każdą funkcję $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}[\mathcal{A}]$. ■

Zgodnie z definicją (VI.14) modulem funkcyjnym macierzowym nazywamy każdy

moduł funkcyjny z dowolnego zbioru \mathfrak{X} w pierścień macierzowy $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, tzn. każdy moduł

$$\mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, 0, \mathcal{M}[\mathcal{A}], \cdot),$$

gdzie \mathfrak{H} jest zbiorem funkcji macierzowych z \mathfrak{X} w $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, operacje $+$, $-$, 0 są określone wzorami (VI.2), (VI.4) i (VI.5), a \cdot jest mnożeniem funkcji macierzowych ze zbioru \mathfrak{H} przez macierze z pierścienia $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$. Tego rodzaju moduły funkcyjne macierzowe mają znaczenie praktyczne, pomimo że samo pojęcie funkcji macierzowej jest podstawowe między innymi w analizie macierzowej. W algebrze macierzowej większe znaczenie ma pokrewne pojęcie macierzy funkcyjnej, które obecnie wprowadzimy.

(VI.62) DEFINICJA. *Macierzą funkcyjną* nazywamy każdą macierz nad dowolnym pierścieniem funkcyjnym z transpozycją. ■

(VI.63) DEFINICJA. *Pierścieniem macierzowym funkcyjnym $\mathcal{M}[\mathcal{V}]$* nazywamy każdy pierścień macierzowy nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} . ■

Zauważmy, że każdą macierz funkcyjną można traktować jako funkcję macierzową. Istotnie, niech \mathcal{V} będzie pierścieniem funkcyjnym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} i niech $\mathcal{M}[\mathcal{V}]$ będzie pierścieniem macierzowym nad \mathcal{V} . Wobec tego każda macierz $M \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$ ma postać:

$$(i) \quad M := \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots \\ m_{21} & m_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}],$$

gdzie m_{jk} ($j, k \in \mathfrak{N}$) są funkcjami o dziedzinie \mathfrak{X} i przeciwdziedzinie \mathcal{A} , i wobec tego można ją również traktować jako funkcję macierzową, która każdemu $x \in \mathfrak{X}$ przyporządkowuje macierz

$$(ii) \quad M(x) := \begin{bmatrix} m_{11}(x) & m_{12}(x) & \dots \\ m_{21}(x) & m_{22}(x) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}].$$

Aby — odwrotnie — każdą funkcję macierzową (ii) można było traktować jako macierz funkcyjną (i), muszą być spełnione warunki zapewniające istnienie pierścienia funkcyjnego z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} , do którego to pierścienia funkcyjnego należałyby funkcje m_{jk} ($j, k \in \mathfrak{N}$).

(VI.64) PRZYKŁAD. Macierz rzeczywistą

$$M(x) := \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ x^3 & 1-x \end{bmatrix}$$

można traktować jako macierz funkcyjną o wyrazach będących funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej x albo jako funkcję, która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje pewną macierz o wyrazach będących liczbami rzeczywistymi. W pierwszym przypadku mamy $M \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem utworzonym z funkcji postaci $\varphi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, w drugim $M: \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{M}[\mathcal{A}]$. ■

(VI.65) DEFINICJA. *Wartością macierzy funkcyjnej* $M \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} , w punkcie $x \in \mathfrak{X}$ nazywamy macierz $M(x) \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, jaką otrzymujemy z macierzy M zastępując jej wyrazy ich wartościami w punkcie x , tzn. macierz będącą wartością funkcji macierzowej M w punkcie x . ■

Wartość macierzy funkcyjnej M w punkcie $x \in \mathfrak{X}$ oznaczamy tak jak wartość odpowiadającej jej funkcji macierzowej M w punkcie x symbolem $M(x)$.

Macierz funkcyjną $M \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, dla której istnieje taka macierz $C \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że

$$\bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} M(x) = C,$$

oznaczamy również symbolem C i piszemy $M = C$ albo $M(x) \equiv C$. Nie prowadzi to do nieporozumień, jeżeli zawsze określimy pierścień macierzowy, z którego macierz pochodzi. Jeżeli piszemy $C \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, to mamy na myśli dowolną macierz z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$. Jeżeli później piszemy $M \in \mathcal{M}[\mathcal{V}] \wedge M = C$ lub $C \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, to mamy na myśli macierz funkcyjną nad pierścieniem funkcyjnym \mathcal{V} . Tego rodzaju umowa nie jest zbyt ścisła, ale wygodna dla praktyki.

W szczególności macierz funkcyjną diagonalną, której wyrazy diagonalne są funkcjami tożsamościowo równymi 1 oznaczamy symbolem I , a macierz funkcyjną diagonalną n -tego stopnia, której pierwszych n wyrazów diagonalnych jest funkcjami tożsamościowo równymi 1, symbolem $I_{[n]}$.

Wyznacznik $\det_n M$ macierzy funkcyjnej $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym z transpozycją, jest funkcją z pierścienia \mathcal{V} . Wobec tego może się zdarzyć, że $\det_n M$ w niektórych punktach przyjmuje wartość zero, a w innych nie.

(VI.66) TWIERDZENIE. *Macierz funkcyjna* $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} , jest *quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(VI.67) \quad \det_n M$$

nie jest dzielnikiem zera w pierścieniu funkcyjnym \mathcal{V} , a nieosobliwa w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $\mu \in \mathcal{V}$, że

$$(VI.68) \quad \det_n M(x) \cdot \mu(x) \equiv \mu(x) \cdot \det_n M(x) \equiv 1.$$

Dowód wynika z definicji (VI.62) i (III.95). ■

(VI.69) DEFINICJA. Macierz funkcyjną $M_{[n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} nazywamy *silnie quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(VI.70) \quad \det_n M(x)$$

dla żadnego $x \in \mathfrak{X}$ nie jest dzielnikiem zera w pierścieniu \mathcal{A} , a słabo nieosobliwą w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(VI.71) \quad \bigvee_{x_0 \in \mathfrak{X}} \bigvee_{m \in \mathcal{A}} \det_n M(x_0) \cdot m = m \cdot \det_n M(x_0) = 1. \quad \blacksquare$$

(VI.72) TWIERDZENIE. Macierz funkcyjna $M_{[n]}^- \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} , jest quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy funkcyjnej $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $a \in \mathcal{V}$ nie będąca dzielnikiem zera w \mathcal{V} , że

$$(VI.73) \quad M(x) \cdot M_{[n]}^-(x) \equiv M_{[n]}^-(x) \cdot M(x) \equiv a(x) \cdot I_{[n]},$$

a $M_{[n]}^{-1} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$ odwrotnością n -tego stopnia macierzy funkcyjnej $M_{[n]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(VI.74) \quad M(x) \cdot M_{[n]}^{-1}(x) \equiv M_{[n]}^{-1}(x) \cdot M(x) \equiv I_{[n]}.$$

Dowód wynika z definicji (III.137). ■

(VI.75) DEFINICJA. Macierz funkcyjną $M_{[n]}^- \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} , nazywamy silną quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy funkcyjnej $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $a \in \mathcal{V}$, że dla żadnego $x \in \mathfrak{X}$ $a(x)$ nie jest dzielnikiem zera w \mathcal{A} i

$$(VI.76) \quad M(x) \cdot M_{[n]}^-(x) \equiv M_{[n]}^-(x) \cdot M(x) \equiv a(x) \cdot I_{[n]}.$$

Macierz funkcyjną $M_{[n]}$ nazywamy wtedy silnie quasi-odwracalną w n -tym stopniu. ■

(VI.77) DEFINICJA. Macierz funkcyjną $M_{[n]}^{-1} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} , nazywamy słabą odwrotnością n -tego stopnia macierzy funkcyjnej $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(VI.78) \quad \bigvee_{x \in \mathfrak{X}} M(x) \cdot M_{[n]}^{-1}(x) = M_{[n]}^{-1}(x) \cdot M(x) = I_{[n]}.$$

Macierz funkcyjną $M_{[n]}$ nazywamy wtedy słabo odwracalną w n -tym stopniu. ■

(VI.79) TWIERDZENIE. Macierz funkcyjna $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym przemennym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} , jest quasi-odwracalna (silnie quasi-odwracalna) w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest quasi-nieosobliwa (silnie quasi-nieosobliwa) w n -tym stopniu.

Dowód. Dla macierzy funkcyjnych quasi-odwracalnych w n -tym stopniu twierdzenie wynika z twierdzenia (III.140).

Jeżeli macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest silnie quasi-odwracalna w n -tym stopniu, to istnieje taka macierz funkcyjna $M_{[n]}^- \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$ i taka funkcja $a \in \mathcal{V}$, że jest (VI.76). Na mocy twierdzeń (I.111) i (III.113)

$$\det_n M(x) \cdot \det_n M_{[n]}^-(x) = (a(x))^n$$

dla żadnego $x \in \mathfrak{X}$ nie jest dzielnikiem zera w pierścieniu \mathcal{A} i wobec tego jest spełniony warunek (VI.70), co oznacza, że macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest silnie quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu.

Jeżeli — odwrotnie — macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest silnie quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu, to na mocy twierdzeń (III.140), (III.128) i na mocy wzoru (VI.70) istnieje taka

macierz funkcyjna $M_{[n]}^- = M_{[n]}^D \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$ i taka funkcja $a = \det_n M \in \mathcal{V}$, że jest (VI.76), co oznacza, że macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest silnie quasi-odwracalna w n -tym stopniu. ■

(VI.80) TWIERDZENIE. *Macierz funkcyjna $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym przemiennym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} , jest odwracalna (słabo odwracalna) w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa (słabo nieosobliwa) w n -tym stopniu.*

Dowód. Dla macierzy funkcyjnych odwracalnych w n -tym stopniu twierdzenie wynika z twierdzenia (III.140).

Jeżeli macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest słabo odwracalna w n -tym stopniu, to istnieje taka macierz funkcyjna $M_{[n]}^{-1} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$ i takie $x_0 \in \mathfrak{X}$, że

$$M(x_0) \cdot M_{[n]}^{-1}(x_0) = M_{[n]}^{-1}(x_0) \cdot M(x_0) = I_{[n]}.$$

Na mocy twierdzenia (III.113) jest wtedy

$$\det_n M(x_0) \cdot \det_n M_{[n]}^{-1}(x_0) = \det_n M_{[n]}^{-1}(x_0) \cdot \det_n M(x_0) = 1,$$

co oznacza, że macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest słabo nieosobliwa w n -tym stopniu.

Jeżeli — odwrotnie — macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest słabo nieosobliwa w n -tym stopniu, to na mocy (VI.71) istnieje takie $x_0 \in \mathfrak{X}$, że $\det_n M(x_0)$ jest elementem odwracalnym w pierścieniu \mathcal{A} i na mocy (III.141) i twierdzenia (III.128) istnieje taka macierz funkcyjna $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, że

$$M(x) \cdot N(x) \equiv N(x) \cdot M(x) \equiv \det_n M(x) \cdot I_{[n]}$$

i, kładąc $M_{[n]}^- := (\det_n M(x_0))^{-1} \cdot N \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$ otrzymujemy spełnienie warunku (VI.78), co oznacza, że macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest słabo odwracalna w n -tym stopniu. ■

(VI.81) TWIERDZENIE. *Jeżeli macierz funkcyjna $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} , jest quasi-odwrotnością (silną quasi-odwrotnością, odwrotnością, słabą odwrotnością) n -tego stopnia macierzy funkcyjnej $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, to macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest quasi-odwrotnością (silną quasi-odwrotnością, odwrotnością, słabą odwrotnością) macierzy funkcyjnej $N_{[n]}$.*

Dowód wynika bezpośrednio z definicji. ■

(VI.82) TWIERDZENIE. *Jeżeli $M_{1[n]}, \dots, M_{k[n]}$ są silnymi quasi-odwrotnościami n -tego stopnia odpowiednio macierzy funkcyjnych M_1, \dots, M_k n -tego stopnia nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień całkowity z transpozycją \mathcal{A} , to $M_{k[n]}^- \dots M_{1[n]}^-$ jest silną quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy funkcyjnej $M_1 \dots M_k$. Jeżeli $M_{1[n]}^{-1}, \dots, M_{k[n]}^{-1}$ są odwrotnościami n -tego stopnia odpowiednio macierzy funkcyjnych M_1, \dots, M_k n -tego stopnia nad dowolnym pierścieniem funkcyjnym z transpozycją, to*

$$(VI.83) \quad (M_1 \dots M_k)_{[n]}^{-1} = M_{k[n]}^{-1} \dots M_{1[n]}^{-1}.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (III.152). ■

(VI.84) TWIERDZENIE. *Iloczyn macierzy funkcyjnych nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień całkowity z transpozycją \mathcal{A} silnie quasi-nieosobliwych w n -tym stopniu jest macierzą funkcyjną silnie quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu.*

Dowód wynika z definicji (VI.69) i twierdzenia (III.113). ■

(VI.85) TWIERDZENIE. Iloczyn macierzy funkcyjnych nad pierścieniem funkcyjnym przemennym z transpozycją \mathcal{V} nieosobliwych w n -tym stopniu jest macierzą funkcyjną nieosobliwą w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (III.154). ■

(VI.86) TWIERDZENIE. Macierz funkcyjna trójkątna górna (dolna) $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{V}]$, gdzie \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień całkowity z transpozycją \mathcal{A} , jest silnie quasi-odwracalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jej wszystkie wyrazy diagonalne a_{11}, \dots, a_{nn} są różne od zera. Jej silna quasi-odwrotność n -tego stopnia jest też macierzą funkcyjną trójkątną górną (dolną) o pierwszych n wyrazach diagonalnych różnych od zera.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (III.157). ■

(VI.87) TWIERDZENIE. Macierz funkcyjna $M := \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, gdzie $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{V}$, a \mathcal{V} jest pierścieniem funkcyjnym z transpozycją ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień całkowity z transpozycją \mathcal{A} , jest silnie quasi-odwracalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \dots a_n$ jest funkcją różną od zera. Jej silna quasi-odwrotność n -tego stopnia jest też macierzą funkcyjną diagonalną o pierwszych n wyrazach diagonalnych różnych od zera.

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego. ■

(VI.88) TWIERDZENIE. Dla dowolnej macierzy funkcyjnej skończonej M nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień częściowo uporządkowany \mathcal{A} jest

$$(VI.89) \quad \text{tr}(M^*M) = \text{tr}(MM^*) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m_{jk}^* m_{jk} \geq 0,$$

$$(VI.90) \quad \text{tr}(M^*M) = 0 \Leftrightarrow M = O,$$

$$(VI.91) \quad M^*M = O \Leftrightarrow MM^* = O \Leftrightarrow M = O.$$

Dowód wynika z twierdzenia (III.192). ■

(VI.92) PRZYKŁAD. Macierz M z przykładu (VI.64) jest quasi-nieosobliwa w drugim stopniu ponieważ $\det_2 M(x) \equiv 1 - x - 2x^4 \not\equiv 0$, ale nie jest silnie quasi-nieosobliwa w drugim stopniu, ponieważ $\det_2 M(-1) = 0$. Jest ona również słabo nieosobliwa w drugim stopniu, ponieważ $\det_2 M(0) \cdot 1 = 1 \cdot \det_2 M(0) = 1$. Jej słabą odwrotnością drugiego stopnia jest, na przykład, macierz $I_{[2]}$, ponieważ $M(0) \cdot I_{[2]} = I_{[2]} \cdot M(0) = I_{[2]}$. ■

§ VI.4. Moduły macierzowe nad pierścieniami funkcyjnymi

Zgodnie z definicją (IV.24) modulem macierzowym nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} nazywamy moduł

$$(i) \quad \mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, O, \mathcal{V}, \cdot),$$

gdzie \mathfrak{S} jest zbiorem macierzy nad pierścieniem funkcyjnym \mathcal{V} , O jest macierzą zerową, a \cdot jest mnożeniem macierzy funkcyjnych ze zbioru \mathfrak{S} przez funkcje z pierścienia \mathcal{V} .

Podstawowe twierdzenia z teorii modułów, jak na przykład twierdzenia (IV.72), ..., (IV.84), wymagają założenia, że moduły są regularne. Moduły (i) na ogół nie są regularne, ponieważ pierścienie funkcyjne \mathcal{V} zazwyczaj zawierają dzielniki zera, nawet wtedy, gdy pierścień \mathcal{A} ich nie zawiera, jak chociażby w przypadkach, gdy \mathcal{A} jest pierścieniem całkowitym. Do modułów regularnych (i) należą, na szczęście, moduły macierzowe nad pierścieniami funkcyjnymi \mathcal{V} utworzonymi przez funkcje wielomianowe nad pierścieniami całkowitymi. Z takimi modułami mamy w niniejszej książce najczęściej do czynienia.

Ważną rolę w teorii modułów odgrywają moduły z iloczynem skalarnym. Ponieważ w modułach macierzowych (i) pierścienie funkcyjne \mathcal{V} nie są zazwyczaj częściowo uporządkowane, wprowadzimy kilka nowych definicji.

(VI.93) DEFINICJA. *Pierścieniem o wartościach częściowo uporządkowanych* nazywamy każdy pierścień funkcyjny z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień częściowo uporządkowany \mathcal{A} . ■

(VI.94) PRZYKŁAD. Pierścień funkcyjny \mathcal{V} ze zbioru wszystkich liczb zespolonych \mathbb{C} w ciało zespolone \mathbb{C} utworzony ze wszystkich funkcji wielomianowych nad ciałem \mathbb{C} jest pierścieniem o wartościach częściowo uporządkowanych, ponieważ ciało zespolone \mathbb{C} jest częściowo uporządkowane. ■

Jeżeli \mathcal{V} jest pierścieniem o wartościach częściowo uporządkowanych ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień \mathcal{A} , to dla dowolnych $a, b \in \mathcal{V}$ piszemy $a \leq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} a(x) \leq b(x)$, i $a < b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} a(x) < b(x)$.

(VI.95) TWIERDZENIE. *Jeżeli \mathcal{V} jest pierścieniem o wartościach częściowo uporządkowanych ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień \mathcal{A} , to dla każdej funkcji $a \in \mathcal{V}$ jest*

$$(VI.96) \quad a = a^* \Rightarrow \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} a(x) \in \text{re } \mathcal{A} \Leftrightarrow a \in \text{re } \mathcal{V},$$

$$(VI.97) \quad a^* a \geq 0.$$

Dowód wynika z definicji (I.156) i (VI.1). ■

(VI.98) DEFINICJA. *Pierścieniem z funkcyjną wartością bezwzględną* nazywamy każdy pierścień funkcyjny z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z wartością bezwzględną \mathcal{A} , w którym dla każdej funkcji $a \in \mathcal{V}$ jest określona jej wartość bezwzględna $|a| \in \mathcal{V}$ wzorem:

$$(VI.99) \quad |a| := \sqrt{a^* a},$$

czyli

$$(VI.100) \quad (\varphi := |a|) : \Leftrightarrow \varphi(x) \equiv |a(x)| \equiv \sqrt{a^*(x) \cdot a(x)}. \quad \blacksquare$$

(VI.101) DEFINICJA. Moduł \mathcal{H} nazywamy *modułem z funkcyjnym iloczynem skalarnym* wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° \mathcal{H} jest modulem nad pierścieniem o wartościach częściowo uporządkowanych \mathcal{V} ,

2° jest określona funkcja, zwana funkcyjnym iloczynem skalarnym, która każdej uporządkowanej parze półwektorów $x, y \in \mathcal{H}$ przyporządkowuje funkcję $\langle x, y \rangle \in \mathcal{V}$ ze spełnieniem dla dowolnych $x, y, z \in \mathcal{H}$ i dowolnej funkcji $a \in \mathcal{V}$ warunków (IV.110), ..., (IV.114). ■

(VI.102) TWIERDZENIE. Jeżeli \mathcal{H} jest modulem (i) z funkcyjnym iloczynem skalarnym, to dla dowolnych $x, y, z, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$ i dowolnej funkcji $a \in \mathcal{V}$ są prawdziwe wzory (IV.116), ..., (IV.120).

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (IV.115). ■

(VI.103) TWIERDZENIE. W każdym module z funkcyjnym iloczynem skalarnym można wzorem (IV.122) określić funkcyjną normę kwadratową, która ma wszystkie własności (IV.124), ..., (IV.132).

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (IV.123). ■

(VI.104) TWIERDZENIE. W każdym module macierzowym \mathcal{H} n -tego stopnia nad pierścieniem o wartościach częściowo uporządkowanych \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień częściowo uporządkowany \mathcal{A} funkcja określona dla dowolnych macierzy funkcyjnych $A_{[n]}, B_{[n]} \in \mathcal{H}$ wzorem

$$(VI.105) \quad \langle A, B \rangle := \text{tr}(A^*GB),$$

gdzie $G_{[n]} \in \mathcal{H}$ jest macierzą funkcyjną hermitowską postaci

$$(VI.106) \quad G = C^*C,$$

a $C_{[n]} \in \mathcal{H}$ jest macierzą funkcyjną silnie quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu, jest funkcyjnym iloczynem skalarnym.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (IV.135). ■

Szczególną rolę odgrywają funkcyjne iloczyny skalarne (VI.105) w przypadku, gdy $G = I_{[n]}$. Mamy wtedy

$$(VI.107) \quad \langle A, B \rangle := \text{tr}(A^*B).$$

(VI.108) DEFINICJA. Moduł \mathcal{H} nazywamy funkcyjnie unormowanym wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° \mathcal{H} jest modulem nad pierścieniem \mathcal{V} z funkcyjną wartością bezwzględną,

2° jest określona funkcja, zwana normą funkcyjną, która każdemu półwektorowi $x \in \mathcal{H}$ przyporządkowuje funkcję $\|x\| \in \text{re } \mathcal{V}$ ze spełnieniem dla dowolnych $x, y \in \mathcal{H}$ i dowolnej funkcji $a \in \mathcal{V}$ warunków (IV.149), ..., (IV.152). ■

(VI.109) DEFINICJA. Normę funkcyjną nazywamy naturalną wtedy i tylko wtedy, gdy jej kwadrat jest funkcyjną normą kwadratową. ■

(VI.110) TWIERDZENIE. Jeżeli dla modułu macierzowego n -tego stopnia nad pierścieniem o wartościach częściowo uporządkowanych \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień częściowo uporządkowany \mathcal{A} z funkcyjnym iloczynem skalarnym (VI.105) istnieje funkcyjna norma naturalna,

to dla dowolnej macierzy funkcyjnej $A_{[n]}$ jest dana wzorem (IV.157), który w przypadku, gdy funkcyjny iloczyn skalarny ma postać (VI.107), można napisać w postaci (IV.158).

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (IV.156). ■

(VI.111) TWIERDZENIE. Jeżeli \mathcal{H} jest modulem z funkcyjną normą naturalną, to dla dowolnych $x, y \in \mathcal{H}$ jest (IV.163).

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (IV.162). ■

§ VI.5. Rząd macierzy funkcyjnej

Na mocy definicji (V.1) rzędem macierzy funkcyjnej skończonej M nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} nazywamy najwyższy stopień minorów tej macierzy nierównych tożsamościowo zeru. Prócz tego można jeszcze wprowadzić następującą definicję.

(VI.112) DEFINICJA. Rzędem funkcyjnym macierzy funkcyjnej skończonej M nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} nazywamy funkcję $\rho: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{N}_0$ określoną wzorem:

$$(VI.113) \quad \rho(x) \equiv r(M(x)). \quad \blacksquare$$

Wiersze i kolumny dowolnej macierzy funkcyjnej $M_{[m, n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} traktujemy z reguły jako funkcje półwektorowe ze zbioru \mathfrak{X} w moduł ciągowy odpowiednio n -wymiarowy i m -wymiarowy nad pierścieniem \mathcal{A} .

(VI.114) DEFINICJA. Wiersze lub kolumny dowolnej macierzy funkcyjnej $M_{[m, n]}$ nazywamy liniowo zależnymi (silnie liniowo zależnymi, słabo liniowo zależnymi, liniowo niezależnymi, silnie liniowo niezależnymi, słabo liniowo niezależnymi) wtedy i tylko wtedy, gdy są funkcjami półwektorowymi liniowo zależnymi (silnie liniowo zależnymi, słabo liniowo zależnymi, liniowo niezależnymi, silnie liniowo niezależnymi, słabo liniowo niezależnymi). ■

(VI.115) DEFINICJA. Macierz funkcyjną M nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} nazywamy macierzą o wartościach regularnych wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{A} jest pierścieniem całkowitym. ■

(VI.116) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz funkcyjna M nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} jest macierzą o wartościach regularnych, to dla każdego $x \in \mathfrak{X}$ macierz $M(x)$ jest regularna.

Dowód. Dla każdego $x \in \mathfrak{X}$ jest $M(x) \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, wobec czego $M(x)$ jest macierzą regularną. ■

(VI.117) TWIERDZENIE. Jeżeli dla macierzy funkcyjnej $M_{[m, n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścień z transpozycją \mathcal{A} i o wartościach regularnych r_1 jest liczbą silnie liniowo niezależnych wierszy, s_1 — liczbą silnie liniowo niezależnych kolumn, r_2 — liczbą słabo liniowo niezależnych wierszy, s_2 — liczbą słabo liniowo niezależnych ko-

lumn, a ρ jest rzędem funkcyjnym macierzy funkcyjnej M , to

$$(VI.118) \quad \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} r_1 \leq \rho(x) \leq r_2 \wedge s_1 \leq \rho(x) \leq s_2 \wedge r_2 = s_2.$$

Dowód. Niech $M_{j_1*}, \dots, M_{j_{r_1}*}$ będą r_1 silnie liniowo niezależnymi wierszami macierzy M . Na mocy definicji (VI.46) dla każdego $x \in \mathfrak{X}$ wiersze $M_{j_1*}(x), \dots, M_{j_{r_1}*}(x)$ macierzy $M(x)$ są liniowo niezależne, wobec czego na mocy twierdzenia (V.3) jest $r_1 \leq \rho(x)$. Niech teraz x będzie dowolnym elementem zbioru \mathfrak{X} . Macierz $M(x)$ jest rzędu $\rho(x)$, wobec czego istnieje w niej $\rho(x)$ liniowo niezależnych wierszy. Na mocy definicji (VI.48) jest $\rho(x) \leq r_2$. Ze względu na dowolność elementu x otrzymujemy stąd $r_1 \leq \rho(x) \leq r_2$. Dowód nierówności $s_1 \leq \rho(x) \leq s_2$ jest analogiczny. Na mocy definicji (VI.48) istnieje taki element $x_0 \in \mathfrak{X}$ i takie wiersze $M_{k_1*}, \dots, M_{k_{r_2}*}$ macierzy M , że wiersze $M_{k_1*}(x_0), \dots, M_{k_{r_2}*}(x_0)$ macierzy $M(x_0)$ są liniowo niezależne, wobec czego na mocy twierdzenia (V.3) jest $r_2 \leq s_2$. Analogicznie wykazujemy, że $s_2 \leq r_2$, wobec czego jest $r_2 = s_2$. ■

(VI.119) **PRZYKŁAD.** Dla macierzy funkcyjnej nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru liczb rzeczywistych \mathfrak{R} w ciało liczb rzeczywistych \mathfrak{A}

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ x^3 & 1-x \end{bmatrix}$$

mamy

$$\det_2 M = 1 - x - 2x^4$$

i dla $x = -1$ $\det_n M = 0$, wobec czego na mocy twierdzenia (VI.53) liczba r_1 silnie liniowo niezależnych wierszy i liczba s_1 silnie liniowo niezależnych kolumn są mniejsze od 2. Na mocy twierdzenia (VI.51) zarówno pierwszy wiersz jest silnie liniowo niezależny jak i pierwsza kolumna jest silnie liniowo niezależna. W takim razie $r_1 = s_1 = 1$. Dla $x = 0$ jest $\det_2 M = 1 \neq 0$, wobec czego na mocy twierdzenia (VI.53) liczba r_2 słabo liniowo niezależnych wierszy i liczba s_2 słabo liniowo niezależnych kolumn spełniają równość $r_2 = s_2 = 2$. Na mocy twierdzenia (VI.117) mamy dla każdego $x \in \mathfrak{R}$

$$1 \leq \rho(x) \leq 2.$$

Mamy, na przykład, $\rho(0) = 2$ i $\rho(-1) = 1$. ■

(VI.120) **Twierdzenie.** Macierz funkcyjna $M_{[n]}$ jest silnie quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd funkcyjny ρ spełnia warunek

$$(VI.121) \quad \rho(x) \equiv n.$$

Dowód wynika z definicji (VI.69). ■

(VI.122) **Twierdzenie.** Dla każdej macierzy funkcyjnej $M_{[m, n]}$ nad pierścieniem o wartościach częściowo uporządkowanych jest

$$(VI.123) \quad \rho_{M \circ M}(x) \equiv \rho_{M \circ M^*}(x) \equiv \rho_M(x),$$

gdzie ρ_M oznacza rząd funkcyjny macierzy funkcyjnej M .

Dowód wynika z twierdzenia (V.23). ■

(VI.124) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[p,q]}$, $B_{[n]}$ są macierzami funkcyjnymi o wartościach regularnych, a $B_{[n]}$ jest silnie quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu, to

$$(VI.125) \quad q \leq n \Rightarrow \rho_{AB}(x) \equiv \rho_A(x),$$

$$(VI.126) \quad p \leq n \Rightarrow \rho_{BA}(x) \equiv \rho_A(x),$$

gdzie ρ_A oznacza rząd funkcyjny macierzy funkcyjnej A .

Dowód wynika z twierdzenia (V.30). ■

§ VI.6. Funkcyjne macierze ortogonalne

Funkcyjne macierze wierszowo ortogonalne, wierszowo quasi-ortonormalne, wierszowo ortonormalne, kolumnowo ortogonalne, kolumnowo quasi-ortonormalne, kolumnowo ortonormalne, ortogonalne, quasi-ortonormalne, ortonormalne, stanowią przypadek szczególny macierzy zdefiniowanych odpowiednio definicjami (V.38), (V.40), (V.42) i (V.59). Z definicji (V.38) wynika, że macierz funkcyjna $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścieniu z transpozycją \mathcal{A} jest wierszowo (kolumnowo) ortogonalna w m -tym (w n -tym) stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcyjna macierz diagonalna $D_{[m]}$ ($D_{[n]}$) quasi-nieosobliwa w m -tym (w n -tym) stopniu, że $AA^* = D_{[m]}$ ($A^*A = D_{[n]}$).

Z definicji (V.40) wynika, że macierz funkcyjna $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścieniu z transpozycją \mathcal{A} jest wierszowo (kolumnowo) quasi-ortonormalna w m -tym (w n -tym) stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $a \in \mathcal{V}$, nie będąca w \mathcal{V} dzielnikiem zera, że $AA^* = aI_{[m]}$ ($A^*A = aI_{[n]}$).

Oprócz powyższych będą nam jeszcze potrzebne następujące definicje.

(VI.127) DEFINICJA. Macierz funkcyjną $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścieniu z transpozycją \mathcal{A} nazywamy *wierszowo (kolumnowo) silnie ortogonalną* w m -tym (w n -tym) stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcyjna macierz diagonalna $D_{[m]}$ ($D_{[n]}$) silnie quasi-nieosobliwa w m -tym (w n -tym) stopniu, że

$$(VI.128) \quad AA^* = D_{[m]}^{**} \quad (A^*A = D_{[n]}). \quad \blacksquare$$

(VI.129) DEFINICJA. Macierz funkcyjną $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścieniu z transpozycją \mathcal{A} nazywamy *wierszowo (kolumnowo) silnie quasi-ortonormalną* w m -tym (w n -tym) stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $a \in \mathcal{V}$, że dla żadnego $x \in \mathfrak{X}$ $a(x)$ nie jest dzielnikiem zera w \mathcal{A} i

$$(VI.130) \quad AA^* = aI_{[m]} \quad (A^*A = aI_{[n]}). \quad \blacksquare$$

(VI.131) DEFINICJA. Macierz funkcyjną $A_{[n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścieniu z transpozycją \mathcal{A} nazywamy *silnie ortogonalną (silnie quasi-ortonormalną)* w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest zarówno wierszowo jak i kolumnowo silnie ortogonalna (silnie quasi-ortonormalna) w n -tym stopniu. ■

(VI.132) TWIERDZENIE. *Macierz funkcyjna $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścieniu z transpozycją \mathcal{A} jest wierszowo silnie ortogonalna w m -tym stopniu (wierszowo silnie quasi-ortonormalna w m -tym stopniu, kolumnowo silnie ortogonalna w n -tym stopniu, kolumnowo silnie quasi-ortonormalna w n -tym stopniu) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \mathfrak{X}$ macierz $M(x) \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest wierszowo ortogonalna w m -tym stopniu (wierszowo quasi-ortonormalna w m -tym stopniu, kolumnowo ortogonalna w n -tym stopniu, kolumnowo quasi-ortonormalna w n -tym stopniu). Macierz funkcyjna $A_{[n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścieniu z transpozycją \mathcal{A} jest silnie ortogonalna (silnie quasi-ortonormalna) w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \mathfrak{X}$ macierz $M(x) \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest ortogonalna (quasi-ortonormalna) w n -tym stopniu.*

Dowód wynika z definicji (VI.127), (VI.129) i (VI.131). ■

(VI.133) PRZYKŁAD. Rozpatrzmy następujące macierze funkcyjne nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} utworzonym przez wszystkie ciągłe funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej ze zbioru liczb rzeczywistych \mathfrak{R} w ciało liczb rzeczywistych \mathfrak{R} :

$$A(x) := \begin{bmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{bmatrix}, \quad B(x) := \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix}, \quad C(x) := \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}.$$

Macierz funkcyjna A jest silnie quasi-ortonormalna w drugim stopniu, ponieważ $AA^* = A^*A = (1+x^2)I_{[2]}$ i dla żadnego x $1+x^2$ nie jest dzielnikiem zera. Macierz funkcyjna B jest quasi-ortonormalna, ale nie jest silnie quasi-ortonormalna w drugim stopniu, ponieważ $BB^* = B^*B = x^2I_{[2]}$ i dla $x=0$ jest $B(x) \cdot B^*(x) = B^*(x) \cdot B(x) = 0$. Macierz funkcyjna C jest ortonormalna w drugim stopniu, ponieważ $CC^* = C^*C = I_{[2]}$. ■

(VI.134) TWIERDZENIE. *Każda macierz funkcyjna $A_{[n]}$ nad pierścieniem funkcyjnym z transpozycją \mathcal{V} ze zbioru \mathfrak{X} w pierścieniu przemiennym z transpozycją \mathcal{A} silnie ortogonalna w n -tym stopniu jest silnie quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu.*

Dowód wynika z twierdzeń (VI.132), (V.58) i definicji (VI.69). ■

(VI.135) TWIERDZENIE. *Każda macierz funkcyjna $A_{[n]}$ o wartościach regularnych silnie quasi-ortonormalna w n -tym stopniu jest silnie quasi-odwracalna w n -tym stopniu i A^* jest jej silną quasi-odwrotnością n -tego stopnia.*

Dowód wynika z twierdzeń (VI.132), (V.68) i definicji (VI.75). ■