

## Wektory

## § IV. 1. Moduły. Półwektory

(IV.1) DEFINICJA. *Lewostronnym modulem* albo po prostu *modulem* nad pierścieniem  $\mathcal{A}$  nazywamy szóstkę uporządkowaną

$$(i) \quad \mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot),$$

gdzie  $\mathfrak{H}$  jest zbiorem niepustym,  $(\mathfrak{H}, +, -, \mathbf{o})$  jest grupą abelową ze względu na dodawanie  $+$  z wyróżnionym elementem  $\mathbf{o}$ , czyli dla dowolnych  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{H}$  są spełnione warunki:

$$(IV.2) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

$$(IV.3) \quad \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u},$$

$$(IV.4) \quad -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{o},$$

$$(IV.5) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

przy czym  $\mathcal{A}$  jest pierścieniem,  $\cdot$  jest działaniem zwanym umownie  *mnożeniem* , które każdemu elementowi  $\mathbf{u} \in \mathfrak{H}$  i każdemu elementowi  $a \in \mathcal{A}$  przyporządkowuje element  $a\mathbf{u} \in \mathfrak{H}$  zwany *iloczynem  $\mathbf{u}$  przez  $a$* , i dla dowolnych  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{H}$  oraz dowolnych  $a, b \in \mathcal{A}$  są spełnione następujące warunki:

$$(IV.6) \quad a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v},$$

$$(IV.7) \quad (a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u},$$

$$(IV.8) \quad (ab)\mathbf{u} = a(b\mathbf{u}),$$

a gdy  $\mathcal{A}$  jest pierścieniem z jedyneką, to

$$(IV.9) \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}1 = \mathbf{u}. \quad \blacksquare$$

(IV.10) DEFINICJA. *Podstawą modułu* (i) nazywamy zbiór  $\mathfrak{H}$ .  $\blacksquare$

(IV.11) DEFINICJA. *Półwektorem z modułu* (i) albo po prostu *półwektorem* nazywamy każdy element podstawy  $\mathfrak{H}$ .  $\blacksquare$

Zdanie „ $u$  jest półwektorem z modulu  $\mathcal{H}$ ” piszemy również w postaci  $u \in \mathcal{H}$ .

(IV.12) DEFINICJA. Półwektorem zerowym w module  $\mathcal{H}$  nazywamy półwektor  $o \in \mathcal{H}$  spełniający warunki (IV.3) i (IV.4). ■

W rozdziale niniejszym symbol 0 oznacza  $\mathcal{A}$ -zero, a symbol 1 —  $\mathcal{A}$ -jedynkę.

(IV.13) TWIERDZENIE. Dla każdej uporządkowanej pary półwektorów  $u, v \in \mathcal{H}$  istnieje dokładnie jeden taki półwektor  $x$ , że  $u + x = v$ .

Dowód wynika z twierdzeń (I.26) i (I.27). ■

Taki półwektor  $x \in \mathcal{H}$ , że  $u + x = v$ , gdzie  $u, v \in \mathcal{H}$ , oznaczamy symbolem  $v - u$ .

(IV.14) PRZYKŁAD. Zbiór wszystkich wielomianów stopnia niewyższego niż  $n$  nad pierścieniem  $\mathcal{A}$  tworzy moduł nad pierścieniem  $\mathcal{A}$ . ■

(IV.15) PRZYKŁAD. Każdy pierścień nad pierścieniem z jedynką  $\mathcal{A}$  jest modulem nad pierścieniem  $\mathcal{A}$ . Z przykładu (IV.14) widać, że — odwrotnie — moduł nad pierścieniem  $\mathcal{A}$  może nie być pierścieniem nad pierścieniem  $\mathcal{A}$ . ■

(IV.16) DEFINICJA. Modulem zerowym nazywamy moduł, którego podstawa zawiera tylko jeden półwektor, a mianowicie półwektor zerowy  $o$ . ■

(IV.17) TWIERDZENIE. Dla dowolnego półwektora  $u \in \mathcal{H}$  i dowolnego elementu  $a \in \mathcal{A}$  jest:

$$(IV.18) \quad 0u = o,$$

$$(IV.19) \quad ao = o.$$

Dowód. Mamy  $au + 0u = (a + 0)u = au$  oraz  $au + ao = a(u + o) = au$ , skąd uzyskujemy wzory (IV.18) i (IV.19). ■

(IV.20) DEFINICJA. Półwektor  $u \in \mathcal{H}$  nazywamy właściwie dzielącym zero wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki element  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a \neq 0$ , że  $au = o$ , a jeżeli ponadto  $u \neq o$ , to nazywamy go właściwie dzielącym zero. ■

(IV.21) TWIERDZENIE. Jeżeli  $u \in \mathcal{H}$  nie jest półwektorem właściwie dzielącym zero, to dla dowolnych elementów  $a, b \in \mathcal{A}$

$$(IV.22) \quad au = o \Rightarrow a = 0 \vee u = o,$$

$$(IV.23) \quad au = bu \wedge u \neq o \Rightarrow a = b.$$

Jeżeli dla  $u, v \in \mathcal{H}$  półwektor  $u - v$  nie jest półwektorem właściwie dzielącym zero, to dla dowolnego elementu  $a \in \mathcal{A}$

$$(IV.24) \quad au = av \wedge a \neq 0 \Rightarrow u = v.$$

Dowód. Implikacja (IV.22) wynika wprost z definicji (IV.20). Natomiast (IV.23) wynika z (IV.22), ponieważ równość  $au = bu$  jest równoważna równości  $(a - b)u = o$ . Również (IV.24) wynika z (IV.22), ponieważ równość  $au = av$  jest równoważna równości  $a(u - v) = o$ . ■

(IV.25) DEFINICJA. Moduł  $\mathcal{H}$  nazywamy *modulem bez dzielenia zera* wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera półwektorów właściwie dzielących zero. ■

(IV.26) TWIERDZENIE. Jeżeli  $\mathcal{H}$  jest modulem bez dzielenia zera, to dla dowolnych półwektorów  $u, v \in \mathcal{H}$  i dowolnych elementów  $a, b \in \mathcal{A}$  jest (IV.22), (IV.23) i (IV.24).

Dowód wynika z definicji (IV.25) i twierdzenia (IV.21). ■

(IV.27) TWIERDZENIE. Jeżeli moduł niezerowy  $\mathcal{H}$  nad pierścieniem  $\mathcal{A}$  jest modulem bez dzielenia zera, to pierścień  $\mathcal{A}$  nie zawiera właściwych dzielników zera.

Dowód. Niech  $u \in \mathcal{H}$ ,  $u \neq 0$ . Gdyby pierścień  $\mathcal{A}$  zawierał właściwe dzielniki zera, istniałyby takie elementy  $a, b \in \mathcal{A}$ , że  $a, b \neq 0 \wedge ab = 0$ . Półwektor  $bu \neq 0$  na mocy założenia. Wobec tego półwektor  $a(bu)$  też powinien być niezerowy, a tymczasem  $a(bu) = (ab)u = 0u = 0$ , co dałoby sprzeczność. Zatem pierścień  $\mathcal{A}$  nie zawiera właściwych dzielników zera. ■

(IV.28) DEFINICJA. Moduł  $\mathcal{G} := (\mathcal{G}, +, -, 0, \mathcal{B}, \cdot)$  nazywamy *podmodulem* modułu  $\mathcal{H} := (\mathcal{H}, +, -, 0, \mathcal{A}, \cdot)$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

1°  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ ,

2°  $\mathcal{B}$  jest podpierścieniem  $\mathcal{A}$ ,

3° operacje w  $\mathcal{G}$  są operacjami z  $\mathcal{H}$  zredukowanymi do zbioru  $\mathcal{G}$  i podpierścienia  $\mathcal{B}$ , tzn., że dla dowolnych półwektorów  $u, v \in \mathcal{H}$  i dowolnego elementu  $a \in \mathcal{A}$

$$(IV.29) \quad u \in \mathcal{G} \wedge v \in \mathcal{G} \Rightarrow u+v \in \mathcal{G} \wedge -u \in \mathcal{G},$$

$$(IV.30) \quad u \in \mathcal{G} \wedge a \in \mathcal{B} \Rightarrow au \in \mathcal{G}. \quad \blacksquare$$

(IV.31) TWIERDZENIE. Jeżeli dla modułu  $\mathcal{H}$ , dla podzbioru  $\mathcal{G}$  oraz podpierścienia  $\mathcal{B}$  są spełnione warunki (IV.29) i (IV.30), to szóstka uporządkowana  $\mathcal{G} := (\mathcal{G}, +, -, 0, \mathcal{B}, \cdot)$  jest modulem i jest podmodulem modułu  $\mathcal{H}$ .

Dowód polega na sprawdzeniu, że dla szóstki uporządkowanej  $\mathcal{G}$  są spełnione wszystkie warunki (IV.2), ..., (IV.8), czyli że  $\mathcal{G}$  jest modulem. Wtedy na mocy definicji (IV.28)  $\mathcal{G}$  jest podmodulem modułu  $\mathcal{H}$ . ■

(IV.32) DEFINICJA. Podmodułami trywialnymi dowolnego modułu  $\mathcal{H}$  nazywamy moduł zerowy i sam moduł  $\mathcal{H}$ . ■

(IV.33) DEFINICJA. Podmodulem właściwym dowolnego modułu  $\mathcal{H}$  nazywamy każdy jego podmoduł nietrywialny. ■

(IV.34) PRZYKŁAD. Zbiór wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej  $n$  nad pierścieniem liczb całkowitych  $\mathcal{Z}$  tworzy podmoduł właściwy modułu wszystkich wielomianów nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathcal{R}$ . ■

(IV.35) DEFINICJA. Kombinacją liniową półwektorów  $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{H}$  nazywamy każdy półwektor postaci

$$(ii) \quad u := \sum_{k=1}^m a_k u_k, \quad \text{gdzie} \quad a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych półwektorów należących do zbioru  $\mathfrak{U}$ , oznaczamy symbolem  $\mathfrak{K}(\mathfrak{U})$ . W szczególności  $\mathfrak{K}(\mathfrak{D}) = \{\mathbf{o}\}$ .

(IV.36) TWIERDZENIE. Szóstka uporządkowana

$$(IV.37) \quad \mathcal{K}(\mathfrak{U}) := (\mathfrak{K}(\mathfrak{U}), +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot),$$

gdzie  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$ , a  $\mathfrak{H}$  jest podstawą modułu  $\mathcal{K} := (\mathfrak{H}, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot)$ , jest podmodulem modułu  $\mathcal{K}$ .

Dowód. Sprawdzamy, że dla dowolnych  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{U})$  i dowolnego  $a \in \mathcal{A}$  jest  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{U}) \wedge -\mathbf{u} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{U}) \wedge a\mathbf{u} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{U})$ , wobec czego na mocy twierdzenia (IV.31) otrzymujemy tezę. ■

(IV.38) TWIERDZENIE. Jeżeli  $\mathcal{G}$  jest dowolnym podmodulem modułu  $\mathcal{K}$  i jego podstawa  $\mathfrak{G}$  spełnia warunek  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{G}$ , to  $\mathcal{K}(\mathfrak{U})$  jest podmodulem  $\mathcal{G}$ .

Dowód wynika z faktu, że  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{K}(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{G}$  i że na mocy twierdzenia poprzedniego  $\mathcal{K}(\mathfrak{U})$  jest modulem. ■

W świetle twierdzenia (IV.38) moduł  $\mathcal{K}(\mathfrak{U})$  można by nazwać najmniejszym modulem zawierającym zbiór  $\mathfrak{U}$ .

(IV.39) DEFINICJA. Modulem rozpiętym na zbiorze  $\mathfrak{U}$ , gdzie  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$ , a  $\mathfrak{H}$  jest podstawą modułu  $\mathcal{K}$ , nazywamy podmoduł  $\mathcal{K}(\mathfrak{U})$ . ■

(IV.40) DEFINICJA. Moduł  $\mathcal{K} := (\mathfrak{H}, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot)$  nazywamy *regularnym* wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° jest modulem bez dzielenia zera,

2°  $\mathcal{A}$  jest pierścieniem całkowitym. ■

(IV.41) DEFINICJA. Modulem cięgowym  $n$ -tego stopnia ( $n \in \mathbb{N}$ ) nad pierścieniem  $\mathcal{A}$  albo po prostu modulem cięgowym nazywamy moduł

$$(iii) \quad \mathcal{S} := (\mathfrak{U}^n, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot),$$

gdzie  $\mathfrak{U}$  jest podstawą pierścienia  $\mathcal{A}$ , a operacje  $+, -, \mathbf{o}, \cdot$  dla dowolnych półwektorów

$$(iv) \quad \mathbf{u} := (a_1, \dots, a_n), \quad \mathbf{v} := (b_1, \dots, b_n), \quad a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathcal{A},$$

i dowolnego  $c \in \mathcal{A}$  są określone wzorami:

$$(IV.42) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$

$$(IV.43) \quad -\mathbf{u} := (-a_1, \dots, -a_n),$$

$$(IV.44) \quad \mathbf{o} := (0, \dots, 0),$$

$$(IV.45) \quad c\mathbf{u} := (ca_1, \dots, ca_n). \quad \blacksquare$$

Sprawdzamy, że operacje (IV.42), ..., (IV.45) spełniają wszystkie warunki (IV.2), ..., (IV.8), a zatem szóstka uporządkowana (iii) — istotnie — określa pewien moduł nad pierścieniem  $\mathcal{A}$ .

(IV.46) DEFINICJA. *Modulem macierzowym nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy moduł*

$$(IV.47) \quad \mathcal{H} := (\mathfrak{T}[\mathcal{A}], +, -, O, \mathcal{A}, \cdot),$$

gdzie  $\mathfrak{T}[\mathcal{A}]$  jest zbiorem wszystkich macierzy nad pierścieniem  $\mathcal{A}$ , a  $+$ ,  $-$ ,  $O$ ,  $\cdot$  są operacjami z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ . ■

(IV.48) DEFINICJA. *Modulem macierzowym  $n$ -tego stopnia nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy podmoduł*

$$(IV.49) \quad \mathcal{H}^{(n)} := (\mathfrak{T}_{[n]}[\mathcal{A}], +, -, O, \mathcal{A}, \cdot),$$

modułu (IV.47), gdzie  $\mathfrak{T}_{[n]}[\mathcal{A}]$  jest zbiorem wszystkich macierzy  $n$ -tego stopnia z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ . ■

Zauważmy teraz, że każdy wiersz dowolnej macierzy  $A_{[m,n]}$  ( $m, n \in \mathfrak{N}$ ) nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  może być traktowany jako półwektor modułu ciągowego  $n$ -tego stopnia nad pierścieniem  $\mathcal{A}$ , a każda kolumna tej macierzy jako półwektor modułu ciągowego  $m$ -tego stopnia nad pierścieniem  $\mathcal{A}$ .

(IV.50) DEFINICJA. *Modulem wierszowym (kolumnowym) macierzy  $A_{[m,n]}$  nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy podmoduł  $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$  modułu ciągowego  $n$ -tego stopnia ( $m$ -tego stopnia) nad pierścieniem  $\mathcal{A}$ , gdzie  $\mathfrak{X}$  jest zbiorem wszystkich wierszy (kolumn) macierzy  $A_{[m,n]}$ , a  $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$  jest modulem rozpiętym na zbiorze  $\mathfrak{X}$ . ■*

## § IV.2. Liniowa niezależność półwektorów

(IV.51) DEFINICJA. Półwektory  $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{H}$ , gdzie  $\mathcal{H} := (\mathfrak{S}, +, -, o, \mathcal{A}, \cdot)$ , nazywamy *liniowo zależnymi* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie elementy  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}$ , że

$$(IV.52) \quad \sum_{k=1}^m a_k u_k = o \wedge \bigvee_{r \in \{1, \dots, m\}} a_r \neq 0. \quad \blacksquare$$

(IV.53) DEFINICJA. Półwektory  $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{H}$  nazywamy *liniowo niezależnymi* wtedy i tylko wtedy, gdy nie są liniowo zależne. ■

(IV.54) TWIERDZENIE. *Półwektory  $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{H}$  są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}$*

$$(IV.55) \quad \sum_{k=1}^m a_k u_k = o \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0.$$

Dowód wynika z definicji (IV.51) i (IV.53). ■

(IV.56) TWIERDZENIE. *Jeżeli półwektory  $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{H}$  są liniowo zależne, to dla dowolnych  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{H}$  półwektory  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$  są liniowo zależne.*

Dowód. Jeżeli półwektory  $u_1, \dots, u_m$  są liniowo zależne, to istnieją takie elementy  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}$ , z których co najmniej jeden nie jest zerem, że zachodzi (IV.52). Przyjmując

$b_1 = \dots = b_n = 0$ , mamy

$$\sum_{k=1}^m a_k \mathbf{u}_k + \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0},$$

co oznacza, że półwektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  są liniowo zależne. ■

(IV.57) DEFINICJA. W dowolnym module  $\mathcal{H}$  układem półwektorów liniowo niezależnych nazywamy każdy taki ciąg półwektorów, skończony lub nieskończony, którego każdy skończony podciąg jest utworzony z półwektorów liniowo niezależnych. ■

Zbiór pusty  $\emptyset$  traktujemy jako układ półwektorów liniowo niezależnych, ponieważ nie zawiera żadnego podciągu skończonego, a więc spełnia warunek definicji (IV.57).

(IV.58) TWIERDZENIE. Jeżeli półwektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in \mathcal{H}$  są liniowo niezależne, to tworzą układ półwektorów liniowo niezależnych.

Dowód. Gdyby w ciągu  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$  istniał podciąg utworzony z półwektorów liniowo zależnych, wtedy na mocy twierdzenia (IV.56) półwektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  byłyby też liniowo zależne, wbrew założeniu. ■

(IV.59) TWIERDZENIE. W dowolnym module  $\mathcal{H}$  każdy układ półwektorów liniowo niezależnych nie zawiera półwektorów dzielących zero.

Dowód. Dla dowolnego półwektora  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  dzielącego zero istnieje z definicji taki element  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a \neq 0$ , że  $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , co na mocy definicji (IV.51) oznacza, że  $\mathbf{u}$  jest półwektorem liniowo zależnym, skąd na mocy definicji (IV.57) wynika teza. ■

(IV.60) PRZYKŁAD. Niech  $\mathcal{H}$  będzie modulem utworzonym przez wszystkie wielomiany stopnia co najwyżej 2 nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathcal{R}$ . Niech

$$u_1 := e + \lambda + \lambda^2, \quad u_2 := -3e - \lambda^2, \quad u_3 := 9e + 3\lambda + 5\lambda^2,$$

gdzie  $\lambda$  jest wielomianem (II.27), a  $e$  wielomianem jedynkowym. Wielomiany  $u_1, u_2, u_3$  są liniowo zależne, ponieważ  $3u_1 - 2u_2 - u_3 = 0$ . Natomiast  $u_1, u_2$  tworzą układ półwektorów liniowo niezależnych, gdyż z równości  $a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$ , gdzie  $a_1, a_2 \in \mathcal{R}$ , otrzymujemy

$$(a_1 - 3a_2)e + a_1 \lambda + (a_1 - a_2)\lambda^2 = 0,$$

skąd

$$a_1 - 3a_2 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_1 - a_2 = 0,$$

a stąd  $a_1 = a_2 = 0$ . ■

(IV.61) TWIERDZENIE. W każdej macierzy  $A_{[m,n]}$  nad dowolnym pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  zarówno liczba liniowo niezależnych wierszy jak i liczba liniowo niezależnych kolumn są nie mniejsze niż najwyższy stopień minorów macierzy  $A$  nie będących dzielnikami zera i nie większe niż najwyższy stopień minorów macierzy  $A$  różnych od zera (gdy macierz  $A$  nie ma takich minorów, wtedy przyjmujemy, że najwyższy ich stopień jest zerem).

Dowód. Jeżeli  $A = O$ , to na mocy twierdzenia (IV.59) liczba liniowo niezależnych wierszy i liczba liniowo niezależnych kolumn tej macierzy są zerami. Ponieważ zarówno najwyższy stopień minorów macierzy  $A$  nie będących dzielnikami zera jak i najwyższy

stopień jej minorów różnych od zera są wtedy zerami, otrzymujemy stąd tezę. Możemy odtąd przyjąć, że  $A \neq O$ . Niech  $r$  oznacza liczbę liniowo niezależnych wierszy,  $s$  — liczbę liniowo niezależnych kolumn macierzy  $A$ . Niech  $p$  oznacza najwyższy stopień jej minorów nie będących dzielnikami zera, a  $q$  — najwyższy stopień jej minorów różnych od zera. Istnieje zatem minor

$$(i) \quad \alpha := A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} = \det_p \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p j_1} & \dots & a_{i_p j_p} \end{bmatrix}$$

nie będący dzielnikiem zera. Gdyby wiersze  $A_{i_1*}, \dots, A_{i_p*}$  tak były liniowo zależne, istniałyby takie elementy  $c_1, \dots, c_p \in \mathcal{A}$ , z których co najmniej jeden, powiedzmy  $c_w$ , nie byłby zerem, że

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^p c_i A_{i*} = 0, \quad c_w \neq 0.$$

Gdyby wtedy  $B_{[p]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  była macierzą określoną wzorem

$$b_{ki} := \begin{cases} a_{ikj_i} & \text{dla } k \neq w, \\ c_w a_{ikj_i} & \text{dla } k = w, \end{cases}$$

wówczas na mocy twierdzenia (III.108) i (i) mielibyśmy  $\det_p B = c_w \alpha \neq 0$ . Zastępując  $w$ -ty wiersz macierzy  $B$  kombinacją liniową  $\sum_{i=1}^p c_i B_{i*}$  otrzymalibyśmy macierz  $C_{[p]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , dla której na mocy twierdzenia (III.111) powinno być  $\det_p C = \det_p B \neq 0$ , a na mocy (ii) i twierdzenia (III.102)  $\det_p C = 0$ , co dałoby sprzeczność. Zatem wiersze  $A_{i_1*}, \dots, A_{i_p*}$  są liniowo niezależne i wobec tego  $r \geq p$ . Analogicznie dowodzimy, że  $s \geq p$ .

Z określenia liczby  $q$  wynika, że istnieje minor

$$(iii) \quad \gamma := A \begin{pmatrix} m_1, \dots, m_q \\ n_1, \dots, n_q \end{pmatrix} = \det_q \begin{bmatrix} a_{m_1 n_1} & \dots & a_{m_1 n_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m_q n_1} & \dots & a_{m_q n_q} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Utwórzmy minor

$$(iv) \quad A \begin{pmatrix} m_1, \dots, m_q, k \\ n_1, \dots, n_q, l \end{pmatrix} = \det_{q+1} \begin{bmatrix} a_{m_1 n_1} & \dots & a_{m_1 n_q} & a_{m_1 l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_q n_1} & \dots & a_{m_q n_q} & a_{m_q l} \\ a_{k n_1} & \dots & a_{k n_q} & a_{k l} \end{bmatrix}.$$

Gdy  $k \in \{m_1, \dots, m_q\}$  lub  $l \in \{n_1, \dots, n_q\}$ , minor (iv) jest równy zeru na mocy twierdzeń (III.106) i (III.107), a gdy  $k \notin \{m_1, \dots, m_q\}$  i  $l \notin \{n_1, \dots, n_q\}$  na mocy określenia liczby  $q$ . Wobec tego, rozwijając wyznacznik (iv) względem ostatniej kolumny, mamy

$$(v) \quad \sum_{j=1}^q a_{m_j l} \alpha_{q+1/m_j l} + \gamma a_{kl} = 0,$$

gdzie na mocy (iii)  $\gamma \neq 0$ . Ponieważ równość ta zachodzi dla dowolnie obranej  $l$ -tej kolumny, a współczynniki  $\gamma_j := \alpha_{q+1/m_j l}$  nie zależą od numeru  $l$  kolumny, więc na mocy (v)



jest

$$\sum_{j=1}^q \gamma_j A_{mj*} + \gamma A_{k*} = \mathbf{0}, \quad \gamma \neq \mathbf{0}.$$

Oznacza to, że dla dowolnego  $k \notin \{m_1, \dots, m_q\}$  wiersze  $A_{m_1}, \dots, A_{m_q}, A_k$  macierzy  $A$  są liniowo zależne, skąd na mocy twierdzenia (IV.56)  $r \leq q$ . Analogicznie dowodzimy, że  $s \leq q$ . ■

(IV.62) TWIERDZENIE. Jeżeli w macierzy  $A_{[m,n]}$  nad dowolnym pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  najwyższy stopień  $p$  minorów nie będących dzielnikami zera jest zarazem najwyższym stopniem minorów różnych od zera, to liczba liniowo niezależnych wierszy  $A$  jest równa liczbie jej liniowo niezależnych kolumn i równa  $p$ .

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia poprzedniego. ■

(IV.63) TWIERDZENIE. W dowolnym regularnym pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  dla każdej macierzy  $A_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  liczba liniowo niezależnych wierszy jest równa liczbie liniowo niezależnych kolumn i równa najwyższemu stopniowi minorów tej macierzy różnych od zera.

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego. ■

(IV.64) PRZYKŁAD. Niech

$$A := \begin{bmatrix} (2, 0) & (1, 0) \\ (0, 1) & (0, 2) \end{bmatrix}$$

będzie macierzą nad pierścieniem z przykładu (I.69) o dzielnikach zera omówionych w przykładzie (I.110). Najwyższym stopniem minorów macierzy  $A$  nie będących dzielnikami zera jest  $p=0$ , a najwyższym stopniem jej minorów różnych od zera jest  $q=1$ . Dla wierszy  $A_{1*}$  i  $A_{2*}$  macierzy  $A$  mamy  $(0, 1) A_{1*} = 0$  i  $(1, 0) A_{2*} = 0$ , skąd wynika, że liczbą liniowo niezależnych wierszy macierzy  $A$  jest  $r=0$ . Dla kolumn  $A_{*1}$  i  $A_{*2}$  macierzy  $A$  mamy  $(1, -2) A_{*1} + (-2, 1) A_{*2} = 0$ , wobec czego kolumny  $A_{*1}$  i  $A_{*2}$  są liniowo zależne. Natomiast  $(\alpha, \beta) A_{*1} = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $2\alpha = 0$  i  $\beta = 0$ , czyli  $(\alpha, \beta) = 0$ , skąd wynika, że liczbą liniowo niezależnych kolumn macierzy  $A$  jest  $s=1$ . Zatem w rozpatrywanym przykładzie  $p=r<s=q$ , zgodnie z twierdzeniem (IV.61). ■

### § IV.3. Półbazy i bazy

(IV.65) DEFINICJA. Półbazą zbioru półwektorów  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$  w module  $\mathcal{H}$  o podstawie  $\mathfrak{H}$  nazywamy każdy taki układ  $\mathfrak{B}$  półwektorów liniowo niezależnych z  $\mathfrak{U}$ , że dla każdego półwektora  $u \in \mathfrak{U}$  istnieją w  $\mathfrak{B}$  takie półwektory  $w_1, \dots, w_p$ , że półwektory  $u, w_1, \dots, w_p$  są liniowo zależne.<sup>(1)</sup> ■

<sup>(1)</sup> Nazwa „półbaza” została wprowadzona w niniejszej książce dla wygody. Powszechnie używana nazwa „maksymalny liniowo niezależny podzbiór” jest zbyt długa dla wielokrotnego powtarzania.