

Rozdział VIII

Wartości własne i wektory własne macierzy

§ VIII.1. Podstawowe definicje

(VIII.1) DEFINICJA. Wartością własną w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy każdy pierwiastek jej wielomianu charakterystycznego n -tego stopnia

$$(VIII.2) \quad \chi_n := \det_n(A - A A^0) = \det_n \begin{bmatrix} \lambda - a_{11}e & -a_{12}e & \dots & -a_{1n}e \\ -a_{21}e & \lambda - a_{22}e & \dots & -a_{2n}e \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}e & -a_{n2}e & \dots & \lambda - a_{nn}e \end{bmatrix},$$

gdzie $A := (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 := (I, O, O, \dots)$, $A = \lambda \cdot I$ oraz $A^0 = \lambda^0 I = eI$. ■

(VIII.3) DEFINICJA. Równaniem charakterystycznym n -tego stopnia macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} nazywamy równanie

$$(VIII.4) \quad \chi_n(x) = \det_n \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{bmatrix} = 0,$$

gdzie x jest zmienną przyjmującą wartości z pierścienia \mathcal{A} . ■

(VIII.5) TWIERDZENIE. Element $\omega \in \mathcal{A}$ jest wartością własną w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (VIII.4) n -tego stopnia macierzy A , czyli $\det_n(A - \omega I_{[n]}) = 0$.

Dowód wynika wprost z definicji (VIII.1) i (VIII.3). ■

(VIII.6) DEFINICJA. Liczbę naturalną p_k nazywamy krotnością wartości własnej $\omega_k \in \mathcal{A}$ w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} wtedy i tylko wtedy, gdy ω_k jest pierwiastkiem p_k -krotnym wielomianu charakterystycznego (VIII.2) n -tego stopnia. ■

(VIII.7) DEFINICJA. *Widmem w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy ciąg*

$$(VIII.8) \quad (\omega_1, \dots, \omega_s)$$

utworzony przez wszystkie różne wartości własne w n -tym stopniu macierzy A . ■

(VIII.9) TWIERDZENIE. *Jeżeli ciąg (VIII.8) jest widmem w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, a jej wartości własne $\omega_1, \dots, \omega_s$ w n -tym stopniu mają odpowiednio krotności p_1, \dots, p_s , to*

$$(VIII.10) \quad \sum_{j=1}^s p_j \leq n.$$

Dowód wynika z twierdzenia (II.82). ■

(VIII.11) TWIERDZENIE. *Jeżeli ciąg (VIII.8) jest widmem w n -tym stopniu macierzy zespolonej $A_{[n]}$, a jej wartości własne $\omega_1, \dots, \omega_s$ w n -tym stopniu mają odpowiednio krotności p_1, \dots, p_s , to*

$$(VIII.12) \quad \sum_{j=1}^s p_j = n.$$

Dowód wynika z twierdzenia (II.83). ■

(VIII.13) DEFINICJA. *Krotnością widma w n -tym stopniu (VIII.8) macierzy $A_{[n]}$ nazywamy sumę krotności p_1, \dots, p_s jej wartości własnych w n -tym stopniu, czyli liczbę naturalną*

$$p := \sum_{j=1}^s p_j. \quad \blacksquare$$

Na mocy twierdzenia (VIII.9) dla każdej macierzy regularnej $A_{[n]}$ krotność jej widma w n -tym stopniu nie jest większa od n , a na mocy twierdzenia (VIII.11) dla każdej macierzy zespolonej $A_{[n]}$ krotność jej widma w n -tym stopniu jest równa n .

(VIII.14) DEFINICJA. *Układem wartości własnych w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nazywamy ciąg $(\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_p})$ wartości własnych w n -tym stopniu tej macierzy, w którym każda wartość własna występuje tyle razy, ile wynosi jej krotność, a p jest krotnością widma w n -tym stopniu macierzy A . ■*

(VIII.15) DEFINICJA. *Krotnością geometryczną wartości własnej ω_k w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nazywamy liczbę naturalną $q_k := n - r_k$, gdzie r_k jest rzędem macierzy $A - \omega_k \times I_{[n]}$. ■*

(VIII.16) DEFINICJA. *Geometryczną krotnością widma (VIII.8) w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nazywamy sumę krotności geometrycznych q_1, \dots, q_s jej wartości własnych w n -tym stopniu, czyli liczbę naturalną $q = \sum_{j=1}^s q_j$. ■*

(VIII.17) DEFINICJA. *Układem geometrycznym wartości własnych w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nazywamy ciąg $(\omega_{k_1}, \dots, \omega_{k_q})$ wartości własnych w n -tym stopniu tej macierzy, w którym każda wartość własna występuje tyle razy, ile wynosi jej krotność geometryczna, a q jest geometryczną krotnością widma w n -tym stopniu macierzy A . ■*

(VIII.18) TWIERDZENIE. Jeżeli ω jest wartością własną niezerową w n -tym stopniu macierzy A , to jest jej wartością własną w każdym jej stopniu o krotności i krotności geometrycznej nie zależnych od wyboru stopnia macierzy A . Natomiast istnienie wartości własnej zerowej może zależeć od wyboru stopnia macierzy A , a krotność $p(n)$ i krotność geometryczna $q(n)$ wartości własnej zerowej zależą od stopnia n macierzy A . Jednak różnice $n - p(n)$, $n - q(n)$, $p(n) - q(n)$ nie zależą od stopnia n macierzy A .

Dowód wynika z faktu, że na mocy (VIII.2) dla $m \geq n$ mamy

$$\chi_m = \chi_n \lambda^{m-n} \cdot \mathbb{I}_m$$

a rząd r_k macierzy $A - \omega_k I_{[n]}$ (patrz definicja (VIII.15)) nie zależy od wyboru stopnia n macierzy A . ■

(VIII.19) DEFINICJA. Macierzą półprostą nazywamy każdą macierz $A_{[n]}$, dla której krotność widma w n -tym stopniu jest równa n . ■

Z twierdzenia (VIII.11) wynika, że każda macierz zespolona jest półprosta.

(VIII.20) DEFINICJA. Macierzą prostą nazywamy każdą macierz $A_{[n]}$, dla której krotność jej widma w n -tym stopniu jest równa jego krotności geometrycznej i równa n . ■

Twierdzenie (VIII.18) umożliwiło konstrukcję definicji (VIII.19) i (VIII.20), ponieważ na mocy tego twierdzenia fakt, że macierz A jest półprosta czy prosta, nie zależy od wyboru jej stopnia n .

(VIII.21) DEFINICJA. Półwektorem własnym (wektorem własnym w przypadku macierzy nad ciałem) macierzy $A_{[n]}$ albo prawym półwektorem (wektorem) własnym tej macierzy, odpowiadającym wartości własnej ω_k w n -tym stopniu tej macierzy, nazywamy każdy półwektor (wektor) kolumnowy $X_{k[n, 1]}$ spełniający warunek

$$(VIII.22) \quad (A - \omega_k I_{[n]}) X_k = O, \quad k=1, \dots, s. \quad \blacksquare$$

(VIII.23) DEFINICJA. Lewym półwektorem własnym (lewym wektorem własnym w przypadku macierzy nad ciałem) macierzy $A_{[n]}$, odpowiadającym wartości własnej ω_k w n -tym stopniu tej macierzy, nazywamy każdy półwektor (wektor) kolumnowy $Y_{k[n, 1]}$ spełniający warunek

$$(VIII.24) \quad Y_k^* (A - \omega_k I_{[n]}) = O, \quad k=1, \dots, s. \quad \blacksquare$$

(VIII.25) PRZYKŁAD. Obliczymy wartości własne i odpowiadające im wektory własne w drugim stopniu macierzy nad ciałem liczb wymiernych \mathcal{Q}

$$(i) \quad A_{[2]} := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Na mocy twierdzenia (VIII.5) wartościami własnymi w drugim stopniu tej macierzy są pierwiastki równania

$$\det_2 \begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x-2 \end{bmatrix} = x^2 - 3x = 0,$$

czyli liczby $\omega_1 = 0$ i $\omega_2 = 3$. Mamy

$$A - 0 \cdot I_{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A - 3 \cdot I_{[2]} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

wobec czego krotnością i krotnością geometryczną każdej z wartości własnych ω_1, ω_2 w drugim stopniu jest liczba 1. Ciąg (0, 3) jest zarówno widmem w drugim stopniu, jak układem wartości własnych w drugim stopniu, jak też układem geometrycznym wartości własnych w drugim stopniu macierzy (i). Macierz (i) jest macierzą prostą.

Wektory własne macierzy (i), odpowiadające wartościom własnym w drugim stopniu 0 i 3, obliczamy rozwiązując, zgodnie z (VIII.22), równania

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = O, \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = O.$$

Wynika stąd, że każdy wektor kolumnowy postaci

$$X_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathcal{Q},$$

jest wektorem własnym macierzy (i), odpowiadającym wartości własnej 0 w drugim stopniu, natomiast każdy wektor kolumnowy postaci

$$X_2 = \begin{bmatrix} b \\ -2b \end{bmatrix}, \quad b \in \mathcal{Q},$$

jest wektorem własnym macierzy (i), odpowiadającym wartości własnej 3 w drugim stopniu. ■

§ VIII.2. Podstawowe własności

(VIII.26) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem przemiennym z transpozycją, i dla każdej jej wartości własnej ω w n -tym stopniu istnieje zarówno prawy jak i lewy niezerowy półwektor własny odpowiadający tej wartości własnej w n -tym stopniu.

Dowód. Niech

$$A - \omega I_{[n]} = [K_1 \dots K_n],$$

gdzie K_1, \dots, K_n są kolumnami macierzy $A - \omega I_{[n]}$. Jeżeli ω jest wartością własną w n -tym stopniu macierzy A , to na mocy twierdzenia (IV.61) kolumny K_1, \dots, K_n są liniowo zależne, czyli istnieją takie elementy $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}$, nie wszystkie równe zero, że $x_1 K_1 + \dots + x_n K_n = O$, czyli istnieje półwektor kolumnowy

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq O$$

taki, że

$$(A - \omega I_{[n]})X = O,$$

co oznacza, że X jest półwektorem własnym macierzy A , odpowiadającym wartości własnej ω w n -tym stopniu. Dowód dla lewego półwektora własnego jest analogiczny. ■

(VIII.27) TWIERDZENIE. W regularnym pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ dla dowolnej macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i dowolnego półwektora kolumnowego $X_{[n, 1]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ warunek

$$(VIII.28) \quad (A - \omega I_{[n]})X = O \wedge X \neq O,$$

gdzie $\omega \in \mathcal{A}$, jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy ω jest wartością własną w n -tym stopniu macierzy A , a $X \neq O$ jest odpowiadającym jej półwektorem własnym.

Dowód. Jeżeli ω jest wartością własną w n -tym stopniu macierzy A , a $X \neq O$ odpowiadającym jej półwektorem własnym, to warunek (VIII.28) jest spełniony na mocy definicji (VIII.21). Jeżeli – odwrotnie – jest spełniony warunek (VIII.28), to oznacza to, że kolumny macierzy $A - \omega I_{[n]}$ są liniowo zależne. Wobec tego na mocy twierdzenia (IV.63) macierz $A - \omega I_{[n]}$ spełnia warunek $\det_n(A - \omega I_{[n]}) = 0$, co oznacza, że ω jest wartością własną w n -tym stopniu macierzy A . Na mocy definicji (VIII.21) X jest wtedy półwektorem własnym odpowiadającym wartości własnej ω w n -tym stopniu. ■

(VIII.29) TWIERDZENIE. W regularnym pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ dla dowolnej macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i dowolnego półwektora kolumnowego $Y_{[n, 1]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ warunek

$$(VIII.30) \quad Y^*(A - \omega I_{[n]}) = O \wedge Y \neq O,$$

gdzie $\omega \in \mathcal{A}$, jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy ω jest wartością własną w n -tym stopniu macierzy A , a $Y \neq O$ odpowiadającym jej lewym półwektorem własnym.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(VIII.31) TWIERDZENIE. Macierze $A_{[n]}$ i $A_{[n]}^T$ nad pierścieniem przemennym z transpozycją trywialną \mathcal{A} mają te same wartości własne w n -tym stopniu.

Dowód. Na mocy (III.98) jest dla $\omega \in \mathcal{A}$

$$\det_n(A - \omega I_{[n]}) = \det_n(A - \omega I_{[n]})^T = \det_n(A^T - \omega I_{[n]}) = 0. \quad \blacksquare$$

(VIII.32) TWIERDZENIE. Jeżeli $(\omega_1, \dots, \omega_p)$ jest układem wartości własnych w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem przemennym z transpozycją trywialną, to $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_p)$ jest układem wartości własnych w n -tym stopniu zarówno dla macierzy \bar{A} jak i dla macierzy A^* .

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.96)

$$\begin{aligned} \det_n(A - \omega I_{[n]}) = 0 &\Leftrightarrow \det_n(\overline{A - \omega I_{[n]}}) = 0 \Leftrightarrow \det_n(\bar{A} - \bar{\omega} I_{[n]}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \det_n(A - \omega I_{[n]})^* = 0 \Leftrightarrow \det_n(A^* - \bar{\omega} I_{[n]}) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(VIII.33) TWIERDZENIE. W regularnym pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ dla dowolnej macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ $X_{[n, 1]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest półwektorem własnym odpowiadającym wartości własnej ω w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest dla macierzy A^* lewym półwektorem własnym odpowiadającym wartości własnej ω^* w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.27) i (VIII.29) na mocy wzoru

$$(A - \omega I_{[n]})X = O \Leftrightarrow ((A - \omega I_{[n]})X)^* = O \Leftrightarrow X^*(A^* - \omega^* I_{[n]}) = O. \quad \blacksquare$$

(VIII.34) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem częściowo uporządkowanym, dla każdej macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ zbiór wszystkich prawych (lewych) półwektorów własnych, odpowiadających wartości własnej ω_k w n -tym stopniu, tworzy moduł $\mathcal{X}_k(\mathcal{Y}_k)$, będący dopełnieniem ortogonalnym modułu kolumnowego macierzy $A^* - \omega_k^* I_{[n]}$ ($A - \omega_k I_{[n]}$) w n -wymiarowym module ciągowym nad pierścieniem \mathcal{A} z iloczynem skalarnym (IV.145). Wymiar modułu $\mathcal{X}_k(\mathcal{Y}_k)$ równa się krotności geometrycznej q_k wartości własnej ω_k .

Dowód. Na mocy definicji (VIII.15) macierz $A - \omega_k I_{[n]}$ ma rząd $r_k = n - q_k$, a na mocy twierdzenia (V.11) macierz $A^* - \omega_k^* I_{[n]}$ ma ten sam rząd. Na mocy twierdzeń (IV.63) i (IV.84) moduły kolumnowe macierzy $A^* - \omega_k^* I_{[n]}$ i $A - \omega_k I_{[n]}$ mają wymiar $n - q_k$. Na mocy definicji (IV.231) i twierdzeń (IV.230) i (IV.232) zbiór wszystkich prawych (lewych) półwektorów własnych X (Y) odpowiadających wartości własnej ω_k w n -tym stopniu, a zatem spełniających warunek $(A - \omega_k I_{[n]})X = (A^* - \omega_k^* I_{[n]})^* X = O$ ($Y^*(A - \omega_k I_{[n]}) = O$) tworzy moduł q_k -wymiarowy, będący dopełnieniem ortogonalnym modułu kolumnowego macierzy $A^* - \omega_k^* I_{[n]}$ ($A - \omega_k I_{[n]}$) w n -wymiarowym module ciągowym nad pierścieniem \mathcal{A} z iloczynem skalarnym (IV.145). \blacksquare

(VIII.35) TWIERDZENIE. Każdej wartości własnej ω_k w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} odpowiada dokładnie q_k liniowo niezależnych prawych (lewych) półwektorów własnych, gdzie q_k jest krotnością geometryczną wartości własnej ω_k w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego. \blacksquare

(VIII.36) TWIERDZENIE. Wielomian charakterystyczny n -tego stopnia χ_n macierzy $A_{[n]}$ można napisać w postaci

$$(VIII.37) \quad \chi_n = \det_n(A - A\lambda^0) = (-1)^n s_n \lambda^0 + (-1)^{n-1} s_{n-1} \lambda + \dots + (-1) s_1 \lambda^{n-1} + \lambda^n,$$

gdzie s_k ($k=1, \dots, n$) oznacza sumę wszystkich minorów głównych stopnia k macierzy A , $A := (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 := (I, O, O, \dots)$, $\lambda := (0, 1, 0, 0, \dots)$, $\lambda^0 := (1, 0, 0, \dots) = e$ oraz $A = \lambda \cdot I$ i $A^0 = \lambda^0 I = eI$.

Dowód. Niech K_1, \dots, K_n będą kolumnami macierzy A , a J_1, \dots, J_n kolumnami macierzy quasi-jedynkowej $I_{[n]}$. Wtedy

$$\chi_n = \det_n[(\lambda J_1 - \lambda^0 K_1) \dots (\lambda J_n - \lambda^0 K_n)].$$

Stosując tu wielokrotnie twierdzenie (III.110), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \chi_n = & (-1)^n \det_n[K_1 \dots K_n] \lambda^0 + (-1)^{n-1} \lambda \sum_{j_1=1}^n \det_n[K_1 \dots K_{j_1-1} J_{j_1} K_{j_1+1} \dots K_n] + \\ & + (-1)^{n-2} \lambda^2 \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=j_1+1}^n \det_n[K_1 \dots K_{j_1-1} J_{j_1} K_{j_1+1} \dots K_{j_2-1} J_{j_2} K_{j_2+1} \dots K_n] + \\ & + \dots + \lambda^n \det_n[J_1 \dots J_n]. \end{aligned}$$

Ponieważ każdy z wyznaczników

$$\det_n [K_1 \dots K_{j_1-1} J_{j_1} K_{j_1+1} \dots K_{j_p-1} J_{j_p} K_{j_p+1} \dots K_n]$$

jest równy minorowi głównemu, jaki otrzymujemy przez skreślenie wierszy i kolumn o numerach j_1, \dots, j_p , otrzymujemy stąd wzór (VIII.37). ■

(VIII.38) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy półprostej $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ o wartościach własnych $\omega_1, \dots, \omega_s$ w n -tym stopniu mających krotności odpowiednio p_1, \dots, p_s są spełnione warunki:

$$(VIII.39) \quad \sum_{j=1}^s p_j = n,$$

$$(VIII.40) \quad \sum_{j=1}^s p_j \omega_j = \text{tr } A,$$

$$(VIII.41) \quad \prod_{j=1}^s \omega_j^{p_j} = \det_n A.$$

Dowód. Warunek (VIII.39) wynika z definicji (VIII.19). Na mocy twierdzenia (II.80) wielomian charakterystyczny n -tego stopnia χ_n macierzy A jest podzielny przez wielomian $(\lambda - \omega_1 e)^{p_1} \dots (\lambda - \omega_s e)^{p_s}$, który na mocy twierdzenia (II.25) i warunku (VIII.39) jest n -tego stopnia. Ze względu na moniczność obu wielomianów jest

$$(VIII.42) \quad \chi_n = \prod_{j=1}^s (\lambda - \omega_j e)^{p_j},$$

skąd wynika, że suma $-p_1 \omega_1 - \dots - p_s \omega_s$ jest równa współczynnikowi przy λ^{n-1} , czyli na mocy (VIII.37)

$$\sum_{j=1}^s p_j \omega_j = s_1,$$

gdzie s_1 jest sumą wszystkich minorów głównych stopnia 1 macierzy A , czyli $s_1 = \text{tr } A$. Otrzymujemy stąd (VIII.40). Natomiast iloczyn $(-\omega_1)^{p_1} \dots (-\omega_s)^{p_s} = (-1)^n \omega_1^{p_1} \dots \omega_s^{p_s} e$ jest wyrazem wolnym wielomianu (VIII.42), skąd na mocy (VIII.37)

$$\prod_{j=1}^s \omega_j^{p_j} = s_n,$$

gdzie s_n jest jedynym minorem głównym stopnia n macierzy A , mogącym nie być zerem, a mianowicie $s_n = \det_n A$. Otrzymujemy stąd (VIII.41). ■

(VIII.43) TWIERDZENIE. Jeżeli $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ jest układem wartości własnych w n -tym stopniu macierzy półprostej $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, to

$$(VIII.44) \quad \sum_{j=1}^n \omega_j = \text{tr } A,$$

$$(VIII.45) \quad \prod_{j=1}^n \omega_j = \det_n A.$$

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego. ■

(VIII.46) TWIERDZENIE. *Macierz regularna $A_{[n]}$ jest quasi-osobliwa w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy zero jest jej wartością własną w n -tym stopniu.*

Dowód wynika z twierdzenia (VIII.5). ■

(VIII.47) TWIERDZENIE. *Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest rzędu $r=n-q$ ($1 \leq q \leq n$), to zero jest wartością własną w n -tym stopniu macierzy A o krotności nie mniejszej niż q .*

Dowód. Na mocy definicji rzędu macierzy A wszystkie jej minory stopnia większego niż $n-q$ są równe zeru i na mocy (VIII.37) wielomian charakterystyczny n -tego stopnia macierzy A przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \chi_n &= (-1)^{n-q} s_{n-q} \lambda^q + \dots + (-1) s_1 \lambda^{n-1} + \lambda^n = \\ &= \lambda^q ((-1)^{n-q} s_{n-q} + \dots + (-1) s_1 \lambda^{n-q-1} + \lambda^{n-q}), \end{aligned}$$

skąd wynika, że zero jest pierwiastkiem co najmniej q -krotnym tego wielomianu. Otrzymujemy stąd tezę. ■

(VIII.48) TWIERDZENIE. *Krotność wartości własnej w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją jest zawsze nie mniejsza niż krotność geometryczna tej wartości własnej.*

Dowód. Zauważmy, że fakt istnienia wartości własnej w n -tym stopniu ω_k o krotności p_k dla macierzy $A_{[n]}$ jest równoważny faktowi istnienia wartości własnej w n -tym stopniu zerowej o krotności p_k dla macierzy $A - \omega_k I_{[n]}$, ponieważ wielomian charakterystyczny (VIII.2) n -tego stopnia macierzy $A - \omega_k I_{[n]}$ ma postać

$$\det_n \begin{bmatrix} \lambda - (a_{11} - \omega_k) e & -a_{12} e & \dots & -a_{1n} e \\ -a_{21} e & \lambda - (a_{22} - \omega_k) e & \dots & -a_{2n} e \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} e & -a_{n2} e & \dots & \lambda - (a_{nn} - \omega_k) e \end{bmatrix}.$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia (VIII.47) jest

$$(VIII.49) \quad p_k \geq q_k, \quad k=1, \dots, s,$$

gdzie q_k jest taką liczbą, że $n-q_k$ jest rzędem macierzy $A - \omega_k I_{[n]}$, czyli q_k jest krotnością geometryczną wartości własnej ω_k w n -tym stopniu. Otrzymujemy stąd tezę. ■

(VIII.50) TWIERDZENIE. *Prawe (lewe) niezerowe półwektory własne, odpowiadające różnym wartościom własnym w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, są liniowo niezależne.*

Dowód. Niech $\omega_1, \dots, \omega_s$ będą różnymi wartościami własnymi w n -tym stopniu macierzy A , a X_1, \dots, X_s prawymi niezerowymi półwektorami własnymi tej macierzy, odpowiadającymi wymienionym wartościom własnym w n -tym stopniu, tzn.

$$(i) \quad (A - \omega_k I_{[n]}) X_k = O, \quad k=1, \dots, s,$$

czyli

$$(ii) \quad A X_k = \omega_k X_k, \quad k=1, \dots, s.$$

Założmy, że

$$(iii) \quad a_1 X_1 + \dots + a_s X_s = O, \quad a_1, \dots, a_s \in \mathcal{A}.$$

Mnożąc tę równość stronami lewostronnie przez $A - \omega_1 I_{[n]}$, mamy na mocy (i)

$$a_2(A X_2 - \omega_1 X_2) + \dots + a_s(A X_s - \omega_1 X_s) = O$$

i na mocy (ii)

$$a_2(\omega_2 - \omega_1) X_2 + \dots + a_s(\omega_s - \omega_1) X_s = O.$$

Mnożąc tę równość analogicznie lewostronnie przez $A - \omega_2 I_{[n]}, \dots, A - \omega_{s-1} I_{[n]}$, dochodzimy do równości

$$a_s(\omega_s - \omega_1) \dots (\omega_s - \omega_{s-1}) X_s = O.$$

Ponieważ wartości własne $\omega_1, \dots, \omega_s$ są z założenia różne, a półwektor kolumnowy X_s niezerowy, więc

$$(iv) \quad a_s = 0.$$

Ale kolejność wartości własnych $\omega_1, \dots, \omega_s$ była tu dowolna, więc przez jej zmianę dochodzimy na mocy (iv) do wniosku, że $a_1 = \dots = a_s = 0$, co na mocy (iii) oznacza liniową niezależność półwektorów własnych X_1, \dots, X_s .

Dowód dla lewych półwektorów własnych jest analogiczny. ■

(VIII.51) TWIERDZENIE. *Maksymalna liczba liniowo niezależnych prawych (lewych) półwektorów własnych w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} jest równa geometrycznej krotności widma w n -tym stopniu macierzy A .*

Dowód. Na mocy twierdzenia (VIII.34) maksymalna liczba liniowo niezależnych prawych półwektorów własnych w n -tym stopniu macierzy A nie może przewyższać sumy krotności geometrycznych wszystkich różnych wartości własnych w n -tym stopniu $\omega_1, \dots, \omega_s$, czyli nie może przewyższać geometrycznej krotności widma w n -tym stopniu tej macierzy. Na mocy tegoż twierdzenia (VIII.34) dla każdej wartości własnej ω_k w n -tym stopniu ($k=1, \dots, s$) można wybrać q_k prawych półwektorów własnych w n -tym stopniu X_{k1}, \dots, X_{kq_k} liniowo niezależnych, gdzie q_k oznacza krotność geometryczną wartości własnej ω_k w n -tym stopniu. Jeżeli

$$a_{11} X_{11} + \dots + a_{1q_1} X_{1q_1} + \dots + a_{s1} X_{s1} + \dots + a_{sq_s} X_{sq_s} = O,$$

gdzie $a_{11}, \dots, a_{1q_1}, \dots, a_{s1}, \dots, a_{sq_s} \in \mathcal{A}$, to dla

$$(v) \quad Z_j := a_{j1} X_{j1} + \dots + a_{jq_j} X_{jq_j} \quad (j=1, \dots, s),$$

otrzymujemy

$$(vi) \quad Z_1 + \dots + Z_s = O.$$

Ale półwektor kolumnowy (v) jako kombinacja liniowa półwektorów własnych, odpowiadających wartości własnej ω_j w n -tym stopniu, jest też półwektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej w n -tym stopniu, wobec czego na mocy (vi) i twierdzenia (VIII.50) mamy $Z_1 = \dots = Z_s = O$, a ponieważ półwektory własne X_{j1}, \dots, X_{jq_j} są z za-

łożenia liniowo niezależne, więc na mocy (v) $a_{11} = \dots = a_{1q_1} = \dots = a_{s1} = \dots = a_{sq_s} = 0$, co oznacza, że półwektory własne $X_{11}, \dots, X_{1q_1}, \dots, X_{s1}, \dots, X_{sq_s}$ są liniowo niezależne. Ich liczba jest równa krotności geometrycznej widma w n -tym stopniu macierzy A .

Dowód dla lewych półwektorów własnych jest analogiczny. ■

(VIII.52) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} ma n liniowo niezależnych prawych (lewych) półwektorów własnych w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest prosta.*

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.48) i (VIII.51). ■

(VIII.53) TWIERDZENIE. *Macierze $A_{[n]}$ i $B_{[n]}$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} podobne w n -tym stopniu mają te same wartości własne w n -tym stopniu.*

Dowód. Istnieje taka macierz nieosobliwa w n -tym stopniu $C \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że $CA = BC$. Niech ω będzie dla macierzy A dowolną wartością własną w n -tym stopniu o krotności p i krotności geometrycznej q . Ponieważ $C(A - \omega I_n) = (A - \omega I_n)C$ oraz $C(A - \omega I_n) = (B - \omega I_n)C$, więc $\det_n C \cdot \det_n (A - \omega I_n) = \det_n (A - \omega I_n) \cdot \det_n C$ skąd macierze A i B mają wspólny wielomian charakterystyczny n -tego stopnia

$$\chi_n = \det_n (A - \omega I_n) = \det_n (B - \omega I_n)$$

i macierze $A - \omega I_n$ oraz $B - \omega I_n$ na mocy twierdzenia (V.161) mają ten sam rząd. Wobec tego ω jest również wartością własną w n -tym stopniu o krotności p i krotności geometrycznej q dla macierzy B . Biorąc pod uwagę dowolność wyboru wartości własnej ω oraz możliwość zamiany ról macierzy A i B , otrzymujemy stąd tezę. ■

(VIII.54) TWIERDZENIE. *Macierze $A_{[n]}$ i $B_{[n]}$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} quasi-podobne w n -tym stopniu mają te same wartości własne w n -tym stopniu.*

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(VIII.55) PRZYKŁAD. Macierze nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z}

$$A_{[3]} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{[3]} := \begin{bmatrix} 32 & -58 & -14 \\ -80 & 155 & 37 \\ 395 & -757 & -181 \end{bmatrix}$$

są podobne w trzecim stopniu, ponieważ

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -10 & -25 & -14 \end{bmatrix} A = B \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -10 & -25 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & -10 \\ 20 & 10 & 27 \\ -99 & -50 & -132 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny trzeciego stopnia dla macierzy A ma postać

$$\det_3 \begin{bmatrix} \lambda - e & 0 & e \\ -3e & \lambda - 2e & -4e \\ -e & 0 & \lambda - 3e \end{bmatrix} = (\lambda - 2e)^3,$$

a dla macierzy B

$$\det_3 \begin{bmatrix} \lambda - 32e & 58e & 14e \\ 80e & \lambda - 155e & -37e \\ -395e & 757e & \lambda + 181e \end{bmatrix} = (\lambda - 2e)^3.$$

Wobec powyższego 2 jest dla macierzy A i B wartością własną w trzecim stopniu o krotności 3. Ponieważ macierz

$$A - 2I_{[3]} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest rzędu 2 z uwagi na minor

$$\det_2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -1 \neq 0,$$

więc krotność geometryczna wartości własnej 2 w trzecim stopniu jest równa 1. Macierze A i B nie są proste. Na mocy twierdzenia (VIII.51) dla każdej z nich istnieje tylko jeden liniowo niezależny półwektor własny odpowiadający wartości własnej 2 w trzecim stopniu. Obliczamy go z warunków odpowiednio dla macierzy A i B

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = O, \quad \begin{bmatrix} 30 & -58 & -14 \\ -80 & 153 & 37 \\ -395 & -757 & -183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = O.$$

Dla macierzy A otrzymujemy stąd półwektor własny

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie a jest dowolną liczbą całkowitą nierówną zeru, a dla macierzy B

$$\begin{bmatrix} 2b \\ -5b \\ 25b \end{bmatrix},$$

gdzie b jest dowolną liczbą całkowitą nierówną zeru. ■

(VIII.56) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{C}]$ nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} dla każdej macierzy $A_{[n]}$ i każdego niezerowego półwektora kolumnowego $V_{[n, 1]}$ istnieje taki wielomian zespolony f , że $f(A) \cdot V$ jest niezerowym półwektorem własnym w n -tym stopniu macierzy A .

Dowód. Niech p będzie niezerowym wielomianem zespolonym możliwie niskiego stopnia, takim, że

$$(vii) \quad p(A) \cdot V = O.$$

Wielomian taki istnieje, ponieważ na mocy twierdzenia (VII.70) $\chi_n(A) \cdot V = O$, gdzie χ_n jest wielomianem charakterystycznym n -tego stopnia macierzy A . Wielomian p nie jest

stopnia 0, ponieważ wtedy na mocy (vii) byłoby $V=O$ wbrew założeniu. Na mocy twierdzenia (II.83) wielomian p ma pierwiastek $\pi \in \mathcal{C}$, a na mocy twierdzenia (II.72) istnieje taki wielomian zespolony f , że $p=(\lambda-\pi e)f$. Wobec tego na mocy (vii)

$$(viii) \quad p(A) \cdot V = (A - \pi I)f(A) \cdot V = (A - \pi I_{[n]}) \cdot f(A) \cdot V = O.$$

Gdyby $f(A) \cdot V = O$, przeczyłoby to określeniu wielomianu p , ponieważ wielomian f jest niższego stopnia. Zatem $f(A) \cdot V$ jest półwektorem niezerowym n -tego stopnia i na mocy (viii) oraz twierdzenia (VIII.27) otrzymujemy tezę. ■

(VIII.57) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} jest półprosta o widmie w n -tym stopniu $(\omega_1, \dots, \omega_s)$, to moniczny wielomian minimalny w n -tym stopniu macierzy A ma postać:

$$v = (\lambda - \omega_1 e)^{t_1} \dots (\lambda - \omega_s e)^{t_s},$$

gdzie t_1, \dots, t_s są liczbami naturalnymi spełniającymi warunek

$$1 \leq t_j \leq p_j \quad \text{dla} \quad j=1, \dots, s,$$

a p_j jest krotnością wartości własnej ω_j w n -tym stopniu.

Dowód. Na mocy (VII.85) mamy $\det_n(AA^0 - A) \cdot \det_n R = \det_n(v \cdot I_{[n]})$, czyli $\chi_n \cdot (-1)^n \times \det_n R = v^n$. Zatem każda z wartości własnych w n -tym stopniu ω_j ($j=1, \dots, s$) jest pierwiastkiem monicznego wielomianu minimalnego w n -tym stopniu v i krotność t_j tego pierwiastka nie może przekraczać jej krotności dla wielomianu χ_n , czyli liczby p_j . Na mocy twierdzenia (II.80) wielomian v jest podzielny przez $(\lambda - \omega_1 e)^{t_1} \dots (\lambda - \omega_s e)^{t_s}$. Ale na mocy (VII.84) każdy dzielnik wielomianu v jest dzielnikiem wielomianu $\chi_n = (\lambda - \omega_1 e)^{p_1} \dots (\lambda - \omega_s e)^{p_s}$. Otrzymujemy stąd tezę. ■

(VIII.58) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} ma n różnych wartości własnych w n -tym stopniu, to jej wielomian charakterystyczny w n -tym stopniu jest monicznym wielomianem minimalnym w n -tym stopniu macierzy A .

Dowód. Jeżeli macierz A ma n różnych wartości własnych w n -tym stopniu, to każda z nich ma krotność 1, a krotność widma w n -tym stopniu macierzy A jest równa n . Wobec tego teza wynika z twierdzenia poprzedniego. ■

(VIII.59) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} jest półprosta o widmie w n -tym stopniu $(\omega_1, \dots, \omega_s)$, to wszystkie dzielniki elementarne macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ ($A := (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 := (I, O, O, \dots)$) mają postać

$$(\lambda - \omega e)^k,$$

gdzie ω jest wartością własną w n -tym stopniu macierzy A , a k liczbą naturalną nieprze-
wyższającą krotności wartości własnej ω w n -tym stopniu.

Dowód. Z definicji wszystkie dzielniki elementarne macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ są dzielnikami jej najwyższego wielomianu niezmienniczego i_n . Wobec tego teza wynika z twierdzeń (VII.86) i (VIII.57). ■

(VIII.60) TWIERDZENIE. Jeżeli ω jest wartością własną w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} , to kolumny macierzy $(A - \omega I_{[n]})_{[n]}^D$ są półwektorami własnymi macierzy A , odpowiadającymi wartości własnej ω w n -tym stopniu.

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.128) mamy

$$(A - \omega I_{[n]})(A - \omega I_{[n]})_{[n]}^D = 0,$$

skąd otrzymujemy tezę. ■

(VIII.61) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]} \in \mathcal{M}_{[n]}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} jest półprosta o widmie w n -tym stopniu $(\omega_1, \dots, \omega_s)$, to kolumny macierzy $R(\omega_k)$ ($k = 1, \dots, s$), gdzie R jest zredukowaną macierzą dołączoną n -tego stopnia macierzy A , są wektorami własnymi macierzy A , odpowiadającymi wartości własnej ω_k w n -tym stopniu.

Dowód. Na mocy twierdzenia (VIII.57) dla monicznego wielomianu minimalnego w n -tym stopniu v macierzy A mamy $v(\omega_k) = 0$. Wobec tego zastępując we wzorze (VII.85) macierze wielomianowe ich wartościami macierzowymi w punkcie $\omega_k \in \mathcal{F}$ otrzymujemy

$$(A - \omega_k I_{[n]}) \cdot R(\omega_k) = 0,$$

skąd otrzymujemy tezę. ■

(VIII.62) TWIERDZENIE. Krotność geometryczna q_k wartości własnej ω_k w n -tym stopniu macierzy zespolonej $A_{[n]}$ jest równa liczbie l_k dzielników elementarnych postaci $(\lambda - \omega_k e)^{l_k}$ dla macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ ($A^0 = (I, O, O, \dots)$, $A = (O, I, O, O, \dots)$), czyli jest równa liczbie bloków Jordana odpowiadających wartości własnej ω_k w formie kanonicznej Jordana w n -tym stopniu macierzy A .

Dowód. Na mocy twierdzenia (VIII.54) macierze $A, B \in \mathcal{M}[\mathcal{C}]$ podobne w n -tym stopniu mają te same wartości własne, a na mocy twierdzenia (VII.62) dla macierzy $A, B \in \mathcal{M}[\mathcal{C}]$ podobnych w n -tym stopniu macierze wielomianowe $AA^0 - I_{[n]}A$ i $BA^0 - I_{[n]}A$ mają ten sam układ dzielników elementarnych. Wobec tego na mocy twierdzenia (VII.121) wystarczy przeprowadzić dowód dla form kanonicznych Jordana w n -tym stopniu.

Z definicji krotność geometryczna q_k wartości własnej ω_k w n -tym stopniu formy kanonicznej Jordana (VII.120) jest równa $n - r_k$, gdzie r_k jest najwyższym stopniem minorów różnych od zera macierzy

$$J - \omega_k I_{[n]} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

czyli stopniem minora

$$\det_{n-l_k} \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

równym $n-l_k$. Zatem $q_k=l_k$, skąd wynika teza. ■

(VIII.63) TWIERDZENIE. Dla każdej trójkątnej macierzy $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jej pierwszych n wyrazów diagonalnych tworzy układ wartości własnych w n -tym stopniu.

Dowód. Jeżeli $(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ jest główną przekątną macierzy A , to na mocy twierdzenia (III.114) wielomianem charakterystycznym n -tego stopnia macierzy A jest $(\lambda - a_1 e) \dots (\lambda - a_n e)$, skąd wynika teza. ■

§ VIII.3. Macierze spektralne i macierze własne macierzy

(VIII.64) DEFINICJA. Macierzą spektralną w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nazywamy każdą macierz

$$(VIII.65) \quad S_{[q]} := \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_q),$$

gdzie $(\omega_1, \dots, \omega_q)$ jest układem geometrycznym wartości własnych w n -tym stopniu macierzy A . ■

(VIII.66) DEFINICJA. Macierzą własną albo prawą macierzą własną macierzy $A_{[n]}$, odpowiadającą macierzy spektralnej w n -tym stopniu (VIII.65) macierzy A , nazywamy każdą macierz postaci

$$(VIII.67) \quad M_{[n, q]} := [X_1 \dots X_q],$$

gdzie X_j ($j=1, \dots, q$) jest półwektorem własnym odpowiadającym wartości własnej ω_j w n -tym stopniu, a półwektory X_1, \dots, X_q są liniowo niezależne. ■

(VIII.68) DEFINICJA. Lewą macierzą własną macierzy $A_{[n]}$, odpowiadającą macierzy spektralnej w n -tym stopniu (VIII.65) macierzy A , nazywamy każdą macierz postaci

$$(VIII.69) \quad N_{[n, q]} := [Y_1 \dots Y_q],$$

gdzie Y_j ($j=1, \dots, q$) jest lewym półwektorem własnym odpowiadającym wartości własnej ω_j w n -tym stopniu, a półwektory Y_1, \dots, Y_q są liniowo niezależne. ■

(VIII.70) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy spektralnej w n -tym stopniu macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} istnieje odpowiadająca jej prawa (lewa) macierz własna.

Dowód wynika z twierdzeń (VIII.26), (VIII.34) i (VIII.51). ■

(VIII.71) TWIERDZENIE. Równość

$$(VIII.72) \quad AM = MS \quad (M^*A = SM^*),$$

gdzie $A_{[n]}$ jest macierzą nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} , $M_{[n,q]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest macierzą kolumnowo pełnego rzędu q , q jest krotnością geometryczną widma w n -tym stopniu macierzy A , a $S_{[q]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest macierzą diagonalną, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy S jest macierzą spektralną w n -tym stopniu macierzy A , a M odpowiadającą jej prawą (lewą) macierz własną.

Dowód. Załóżmy najpierw, że zachodzi równość (VIII.72). Niech

$$(i) \quad M = [X_1 \dots X_q],$$

gdzie X_1, \dots, X_q są kolumnami macierzy M , oraz

$$(ii) \quad S = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_q), \quad \omega_1, \dots, \omega_q \in \mathcal{A}.$$

Równość (VIII.72) można napisać w postaci

$$(VIII.73) \quad AX_k = \omega_k X_k \wedge X_k \neq O \quad (X_k^* A = \omega_k X_k^* \wedge X_k \neq O),$$

czyli

$$(VIII.74) \quad (A - \omega_k I_{[n]}) X_k = O \wedge X_k \neq O \quad (X_k^* (A - \omega_k I_{[n]}) = O \wedge X_k \neq O), \quad k = 1, \dots, q,$$

co na mocy twierdzenia (VIII.27) oznacza, że $\omega_1, \dots, \omega_q$ są wartościami własnymi w n -tym stopniu macierzy A , a X_1, \dots, X_q odpowiadającymi im prawymi (lewymi) półwektorami własnymi. Ponieważ macierz M jest z założenia kolumnowo pełnego rzędu q , więc półwektory kolumnowe X_1, \dots, X_q są liniowo niezależne. Gdyby w ciągu $(\omega_1, \dots, \omega_q)$ występowały nie wszystkie wartości własne w n -tym stopniu macierzy A lub nie była zachowana krotność geometryczna, wtedy musiałyby być pomiędzy nimi wartość własna ω_i , występująca w ciągu $(\omega_1, \dots, \omega_q)$ więcej razy niż wynosi jej krotność geometryczna q_i w n -tym stopniu. Wynikałoby stąd, że istnieje więcej niż q , odpowiadających jej liniowo niezależnych półwektorów własnych, co przeczyłoby twierdzeniu (VIII.34). Zatem z (ii) wynika, że S jest macierzą spektralną w n -tym stopniu macierzy A i wobec (VIII.74) M jest odpowiadającą jej prawą (lewą) macierz własną.

Odwrotnie, jeżeli macierz $A_{[n]}$ ma macierz spektralną w n -tym stopniu (ii) i odpowiadającą jej macierz własną (i), to zachodzą równości (VIII.74), czyli (VIII.73) i wobec tego równość (VIII.72). ■

(VIII.75) PRZYKŁAD. Dla macierzy A z przykładu (VIII.55) macierzą spektralną w trzecim stopniu jest

$$S_{[1]} = [2],$$

a odpowiadającą jej macierzą własną, na przykład,

$$M := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy, że jest spełniony warunek (VIII.72). ■

§ VIII.4. Macierze proste

(VIII.76) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} ma prawą (lewą) macierz własną quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą prostą.*

Dowód. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest prosta, to z definicji krotność geometryczna jej widma w n -tym stopniu jest równa n i na mocy twierdzenia (VIII.70) istnieje prawa (lewa) macierz własna $M_{[n]}$, której n pierwszych kolumn jest liniowo niezależnych. Stąd na mocy twierdzenia (V.3) rzędem macierzy M jest n i na mocy definicji (V.1) macierz M jest quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu.

Jeżeli — odwrotnie — macierz $A_{[n]}$ ma prawą (lewą) macierz własną M quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu, to na mocy twierdzeń (V.13) i (V.3) pierwszych n kolumn macierzy M jest liniowo niezależnych, co oznacza, że macierz A ma n liniowo niezależnych prawych (lewych) półwektorów własnych w n -tym stopniu, wobec czego na mocy twierdzenia (VIII.51) geometryczna krotność widma w n -tym stopniu macierzy A jest równa n i na mocy twierdzenia (VIII.48) macierz A jest prosta. ■

(VIII.77) TWIERDZENIE. *W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem częściowo uporządkowanym, równość*

$$(VIII.78) \quad AM = MS \quad (M^*A = SM^*),$$

gdzie $S_{[n]}$ jest macierzą diagonalną, a $M_{[n]}$ macierzą quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $A_{[n]}$ jest macierzą prostą, S — jej macierzą spektralną w n -tym stopniu, a M — prawą (lewą) macierzą własną, odpowiadającą macierzy spektralnej S w n -tym stopniu.

Dowód. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą prostą, S — jej macierzą spektralną, w n -tym stopniu, a M — odpowiadającą prawą (lewą) macierzą własną, to równość (VIII.78) zachodzi na mocy twierdzenia (VIII.71). Jeżeli — odwrotnie — zachodzi równość (VIII.78) to analogicznie jak dla (VIII.72) dowodzimy, że S jest macierzą spektralną w n -tym stopniu, a M — odpowiadającą jej prawą (lewą) macierzą własną macierzy A . Ta ostatnia na mocy twierdzenia (VIII.76) jest prosta.

VIII.79) TWIERDZENIE. *Rząd macierzy prostej $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} jest równy sumie krotności geometrycznych dla niezerowych wartości własnych macierzy A .*

Dowód. Na mocy twierdzenia (VIII.77) macierz A i jej macierz spektralna w n -tym stopniu S są quasi-podobne w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (V.162) mają ten sam rząd. Wobec tego teza wynika z twierdzenia (V.37). ■

(VIII.80) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem częściowo uporządkowanym, jest prosta, to macierze \bar{A} , A^T i A^* są również proste. Jeżeli S jest macierzą spektralną w n -tym stopniu macierzy prostej A , M — odpowiadającą jej macierzą własną, a $M_{[n]}^-$ dowolną quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy M , to:

\bar{S} jest macierzą spektralną w n -tym stopniu macierzy \bar{A} , a \bar{M} odpowiadającą jej macierzą własną,

S^T jest macierzą spektralną w n -tym stopniu macierzy A^T , a $(M_{[n]}^-)^T$ odpowiadającą jej macierzą własną,

S^* jest macierzą spektralną w n -tym stopniu macierzy A^* , a $(M_{[n]}^-)^*$ odpowiadającą jej macierzą własną.

Dowód. Wynika na mocy twierdzenia (VIII.77) z równości

$$AM = MS, \quad A^T(M_{[n]}^-)^T = (M_{[n]}^-)^T S^T, \quad A^*(M_{[n]}^-)^* = (M_{[n]}^-)^* S^*.$$

Drugą i trzecią z nich otrzymujemy z (VIII.78) uwzględniając istnienie takiego $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że $MM_{[n]}^- = M_{[n]}^- M = aI_{[n]}$, ponieważ po pomnożeniu równości (VIII.78) stronami obustronnie przez $M_{[n]}^-$ otrzymujemy

$$aM_{[n]}^- A = aSM_{[n]}^-, \quad \text{czyli} \quad M_{[n]}^- A = SM_{[n]}^-. \quad \blacksquare$$

(VIII.81) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz regularna $A_{[n]}$ ma n różnych wartości własnych w n -tym stopniu, to jest prosta.

Dowód. Na mocy twierdzenia (VIII.9) krotności p_1, \dots, p_n wartości własnych $\omega_1, \dots, \omega_n$ w n -tym stopniu macierzy A spełniają warunek $p_1 = \dots = p_n = 1$, wobec czego na mocy twierdzenia (VIII.48) krotności geometryczne tych wartości własnych są też wszystkie równe 1. Zatem krotność widma w n -tym stopniu macierzy A jest równa krotności geometrycznej tego widma i równa stopniowi macierzy A , która wobec tego jest prosta. ■

(VIII.82) TWIERDZENIE. Każda macierz diagonalna $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest macierzą prostą, sama dla siebie jest macierzą spektralną w n -tym stopniu, a macierz quasi-jedynkowa $I_{[n]}$ jest odpowiadającą jej macierzą własną.

Dowód. Niech $A_{[n]} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Niech $\omega_1, \dots, \omega_s$ będą wszystkimi różnymi elementami z ciągu (a_1, \dots, a_n) i niech p_j ($j=1, \dots, s$) będzie liczbą wyrazów tego ciągu równych ω_j . Zatem $p_1 + \dots + p_s = n$. Na mocy definicji wielomian charakterystyczny n -tego stopnia macierzy A ma postać $(\lambda - \omega_1 e)^{p_1} \dots (\lambda - \omega_s e)^{p_s}$, wobec czego $(\omega_1, \dots, \omega_s)$ jest widmem w n -tym stopniu macierzy A , a n jest krotnością tego widma w n -tym stopniu. Na mocy twierdzenia (V.37) rząd macierzy $A - \omega_k I_{[n]}$ jest równy $n - p_k$ ($k=1, \dots, s$), wobec czego krotność geometryczna każdej z wartości własnych $\omega_1, \dots, \omega_s$ w n -tym stopniu jest równa jej krotności. Skąd krotność geometryczna widma w n -tym stopniu macierzy A jest równa krotności tego widma i równa stopniowi n macierzy A . Oznacza to, że macierz A jest prosta i sama dla siebie jest macierzą spektralną w n -tym stopniu.

Na mocy twierdzenia (VIII.27) i definicji (VIII.66) macierz $I_{[n]}$ jest odpowiadającą macierzą własną. ■

(VIII.83) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem częściowo uporządkowanym, macierz $N_{[n]}$ jest lewą macierzą własną macierzy prostej $A_{[n]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(N_{[n]}^-)^*$ jest prawą macierzą własną macierzy A , odpowiadającą tej samej macierzy spektralnej w n -tym stopniu S , gdzie $N_{[n]}^-$ jest dowolną quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy N , tzn. istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że $NN_{[n]}^- = N_{[n]}^- N = aI_{[n]}$.

Dowód wynika z twierdzenia (VIII.77) i quasi-nieosobliwości w n -tym stopniu macierzy $N_{[n]}$ i $N_{[n]}^-$, ponieważ $(N_{[n]}^-)$ jest lewą macierzą własną macierzy prostej $A_{[n]}$, odpowiadającą macierzy spektralnej w n -tym stopniu $S_{[n]}$ $\Leftrightarrow N^*A = SN^* \Leftrightarrow A^*N = NS^* \Leftrightarrow N_{[n]}^- A^* N N_{[n]}^- = N_{[n]}^- NS^* N_{[n]}^- \Leftrightarrow a N_{[n]}^- A^* = a S^* N_{[n]}^- \Leftrightarrow N_{[n]}^- A^* = S^* N_{[n]}^- \Leftrightarrow A (N_{[n]}^-)^* = (N_{[n]}^-)^* S \Leftrightarrow (N_{[n]}^-)^*$ jest prawą macierzą własną macierzy prostej $A_{[n]}$, odpowiadającą macierzy spektralnej w n -tym stopniu $S_{[n]}$. ■

(VIII.84) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem częściowo uporządkowanym, dla każdej macierzy prostej $A_{[n]}$, dla każdej jej macierzy spektralnej w n -tym stopniu $S_{[n]}$ i dla każdej odpowiadającej tej macierzy spektralnej prawej macierzy własnej $M_{[n]}$ istnieje taka lewa macierz własna $N_{[n]}$ odpowiadająca tej samej macierzy spektralnej S i taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że

$$(VIII.85) \quad N^*M = aI_{[n]} \wedge aA = MSN^*.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia poprzedniego wystarczy przyjąć $N := (M_{[n]}^-)^*$, gdzie $M_{[n]}^-$ jest dowolną quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy M , tzn. istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że $MM_{[n]}^- = M_{[n]}^- M = aI_{[n]}$. ■

(VIII.86) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem częściowo uporządkowanym, dla każdej macierzy prostej $A_{[n]}$, dla każdej jej macierzy spektralnej w n -tym stopniu $S_{[n]}$ i dla każdej odpowiadającej tej macierzy spektralnej prawej macierzy własnej $M_{[n]}$ istnieje taka lewa macierz własna $N_{[n]}$, odpowiadająca tej samej macierzy spektralnej S , że

$$(VIII.87) \quad N^*M = I_{[n]} \wedge A = MSN^*.$$

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego, ponieważ dla macierzy nad ciałem pojęcia macierzy quasi-odwracalnej w n -tym stopniu i odwracalnej w n -tym stopniu pokrywają się i wobec tego dla każdej macierzy quasi-nieosobliwej w n -tym stopniu istnieje taka jej quasi-odwrotność w n -tym stopniu, która jest odwrotnością w n -tym stopniu. ■

(VIII.88) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem częściowo uporządkowanym, macierz $A_{[n]}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie dzielniki elementarne macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ są wielomianami pierwszego stopnia, czyli są liniowe ($A^0 := (I, O, O, \dots)$, $A := (O, I, O, \dots)$).

Dowód. Jeżeli macierz A jest prosta, to na mocy twierdzenia (VIII.77) jest podobna w n -tym stopniu do swej macierzy spektralnej w n -tym stopniu $S_{[n]}$. Na mocy twierdzenia (VII.62) macierze wielomianowe $AA^0 - I_{[n]}A$ i $SA^0 - I_{[n]}A$ mają ten sam układ dziel-

ników elementarnych i na mocy twierdzenia (VII.65) wszystkie dzielniki elementarne macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ są liniowe.

Jeżeli — odwrotnie — wszystkie dzielniki elementarne macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ są liniowe, to na mocy twierdzenia (VII.63) układ dzielników elementarnych tej macierzy wielomianowej ma postać

$$(-c_1 e + \lambda, p_1), \dots, (-c_s e + \lambda, p_s),$$

gdzie $p_1 + \dots + p_s = n$. Wobec tego na mocy twierdzenia (VII.65) dla macierzy diagonalnej

$$S_{[n]} := \text{diag}(d_1^{\overline{p_1}}, \dots, d_n^{\overline{p_s}}),$$

gdzie (d_1, \dots, d_n) jest ciągiem, w którym każdy z elementów c_j ($j = 1, \dots, s$) występuje dokładnie p_j razy, macierz wielomianowa $SA^0 - I_{[n]}A$ ma ten sam układ dzielników elementarnych. Na mocy twierdzenia (VII.62) macierze A i S są podobne w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (VIII.77) macierz A jest prosta. ■

(VIII.89) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem częściowo uporządkowanym, macierz $A_{[n]}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy jej moniczny wielomian minimalny w n -tym stopniu v ma t pierwiastków pojedynczych, gdzie t jest stopniem wielomianu v .

Dowód. Jeżeli macierz A jest prosta, to na mocy twierdzenia (VIII.88) wszystkie dzielniki elementarne macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ są liniowe, co z definicji oznacza, że wszystkie czynniki elementarne wielomianów niezmienniczych tej macierzy wielomianowej są iloczynami różnych monicznych wielomianów pierwszego stopnia, co w szczególności dotyczy najwyższego wielomianu niezmienniczego i_n . Na mocy twierdzenia (VII.86) moniczny wielomian minimalny v jest iloczynem t różnych monicznych wielomianów pierwszego stopnia, wobec czego ma t pierwiastków pojedynczych.

Jeżeli — odwrotnie — moniczny wielomian minimalny w n -tym stopniu v o stopniu t ma t pierwiastków pojedynczych, to na mocy twierdzenia (VII.86) wielomian niezmienniczy i_n macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ jest iloczynem monicznych i różnych wielomianów pierwszego stopnia, wobec czego wszystkie dzielniki elementarne tej macierzy wielomianowej są liniowe i na mocy twierdzenia (VIII.88) macierz A jest prosta. ■

(VIII.90) TWIERDZENIE. Macierz zespolona $A_{[n]}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy jej forma kanoniczna Jordana n -tego stopnia jest macierzą diagonalną.

Dowód na mocy definicji (VII.119) wynika z twierdzenia (VIII.88). ■

§ VIII.5. Ortogonalne macierze własne

(VIII.91) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, dla każdej macierzy półprostej $A_{[n]}$ istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że macierz aA jest ortonormalnie quasi-podobna w n -tym stopniu do pewnej macierzy trójkątnej górnej $T_{[n]}$, której wyrazy diagonalne są podzielne przez a .