

Macierze wielomianowe

§ VII.1. Wielomiany macierzowe i macierze wielomianowe

(VII.1) DEFINICJA. *Wielomianem macierzowym nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} albo po prostu wielomianem macierzowym nazywamy każdy wielomian nad pierścieniem macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$.* ■

(VII.2) DEFINICJA. *Pierścieniem wielomianowo-macierzowym $\mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathcal{A}]]$ nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy pierścień wielomianowy generowany przez pierścień macierzowy $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$.* ■

(VII.3) DEFINICJA. *Macierzą wielomianową nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} albo po prostu macierzą wielomianową nazywamy każdą macierz nad pierścieniem wielomianowym $\mathcal{P}[\mathcal{A}]$.* ■

(VII.4) DEFINICJA. *Pierścieniem macierzowo-wielomianowym $\mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{A}]]$ nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy pierścień macierzowy generowany przez pierścień wielomianowy $\mathcal{P}[\mathcal{A}]$.* ■

(VII.5) TWIERDZENIE. *Jeżeli $\mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathcal{A}]]$ jest pierścieniem wielomianowo-macierzowym nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} , a $\mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{A}]]$ pierścieniem macierzowo-wielomianowym nad tymże pierścieniem \mathcal{A} , to pierścienie $\mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathcal{A}]]$ i $\mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{A}]]$ są izomorficzne.*

Dowód. Niech

$$(i) \quad \mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathcal{A}]] := (\mathfrak{P}, +, \cdot, -, s, t, o, e), \quad \mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{A}]] := (\mathfrak{M}, +, \cdot, -, s, t, O, I),$$

gdzie \mathfrak{P} jest zbiorem wszystkich wielomianów nad pierścieniem macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, \mathfrak{M} – zbiorem wszystkich macierzy nad pierścieniem wielomianowym $\mathcal{P}[\mathcal{A}]$. Niech $\varphi: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{M}$ będzie funkcją określoną dla dowolnych macierzy $M^{(0)}, M^{(1)}, \dots \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ wzorem:

$$(ii) \quad \varphi(M^{(0)}, M^{(1)}, \dots) := \begin{vmatrix} (m_{11}^{(0)}, m_{11}^{(1)}, \dots) & (m_{12}^{(0)}, m_{12}^{(1)}, \dots) & \dots \\ (m_{21}^{(0)}, m_{21}^{(1)}, \dots) & (m_{22}^{(0)}, m_{22}^{(1)}, \dots) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Funkcja φ jest odwracalna i spełnia warunki definicji (I.102), co sprawdzamy rachunkiem. Wobec tego pierścienie (i) są izomorficzne. ■

Na gruncie twierdzenia (VII.5) przyjmujemy dla pierścieni (i), że

$$(VII.6) \quad \mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathcal{A}]] = \mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{A}]] \wedge \varphi(x) \equiv x,$$

tzn. nie odróżniamy pierścienia wielomianowo-macierzowego $\mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathcal{A}]]$ od pierścienia macierzowo-wielomianowego $\mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{A}]]$, zbioru \mathfrak{P} od zbioru \mathfrak{M} , operacji w $\mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathcal{A}]]$ od operacji w $\mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{A}]]$; każdego wielomianu $(M^{(0)}, M^{(1)}, \dots)$, gdzie $M^{(0)}, M^{(1)}, \dots \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ od macierzy

$$\begin{bmatrix} (m_{11}^{(0)}, m_{11}^{(1)}, \dots) & (m_{12}^{(0)}, m_{12}^{(1)}, \dots) & \dots \\ (m_{21}^{(0)}, m_{21}^{(1)}, \dots) & (m_{22}^{(0)}, m_{22}^{(1)}, \dots) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

(VII.7) PRZYKŁAD. Wielomian macierzowy

$$P := \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}, 0, 0, \dots \right)$$

nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z} jest równy macierzy wielomianowej

$$M := \begin{bmatrix} (1, -4, 9, 0, 0, \dots) & (-2, -1, -5, 0, 0, \dots) \\ (3, 7, -3, 0, 0, \dots) & (0, -6, 4, 0, 0, \dots) \\ (-2, 0, 6, 0, 0, \dots) & (5, 2, -7, 0, 0, \dots) \end{bmatrix}$$

nad tymże pierścieniem \mathcal{Z} . Widać to najwyraźniej, jeżeli wprowadzić zgodnie z (II.27) wielomian $A := (O, I, O, \dots)$ nad pierścieniem $\mathcal{M}[\mathcal{Z}]$, wielomian $\lambda := (0, 1, 0, 0, \dots)$ nad pierścieniem \mathcal{Z} i przyjąć zgodnie z (ii) i (VII.6), że

$$(VII.8) \quad A = \lambda I.$$

Mamy wtedy na mocy (II.29)

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} A^0 + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} A^1 + \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} A^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \lambda^0 + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \lambda^1 + \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \lambda^2 = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^0 - 4\lambda^1 + 9\lambda^2 & -2\lambda^0 - \lambda^1 - 5\lambda^2 \\ 3\lambda^0 + 7\lambda^1 - 3\lambda^2 & -6\lambda^1 + 4\lambda^2 \\ -2\lambda^0 + 6\lambda^2 & 5\lambda^0 + 2\lambda^1 - 7\lambda^2 \end{bmatrix} = M. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Przyjęcie warunku (VII.6) nie oznacza bynajmniej, że dla

$$(VII.9) \quad P := (M^{(0)}, M^{(1)}, \dots) = M := \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots \\ m_{21} & m_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

gdzie $m_{kl} = (m_{kl}^{(0)}, m_{kl}^{(1)} \dots)$, $k, l \in \mathfrak{N}$, własności wielomianu macierzowego P automatycznie pokrywają się z własnościami o analogicznych nazwach macierzy wielomianowej M . W przypadku rozbieżności dodajemy do nazwy własności przymiotnik odpowiednio „wielomianowy” lub „macierzowy” jak w następującej definicji.

(VII.10) DEFINICJA. Stopniem wielomianowym zarówno wielomianu macierzowego P jak i związanej z nim wzorem (VII.9) macierzy wielomianowej M nazywamy stopień wielomianu P , który jest zarazem najwyższym stopniem wielomianów m_{kl} , $k, l \in \mathfrak{N}$, będących wyrazami macierzy M . Stopniem macierzowym zarówno wielomianu macierzowego P jak i związanej z nim wzorem (VII.9) macierzy wielomianowej M nazywamy stopień macierzy M , który jest zarazem stopniem macierzy $M^{(0)}, M^{(1)}, \dots$, będących wyrazami wielomianu P . ■

(VII.11) DEFINICJA. Wielomian macierzowy P o wyrazach $M_{[m,n]}^{(0)}, M_{[m,n]}^{(1)}, \dots$ i związaną z nim wzorem (VII.9) macierz wielomianową $M_{[m,n]}$ nazywamy wielomianowo lewostronnie (prawostronnie) quasi-nieosobliwymi w n -tym (w m -tym) stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M_{[m,n]}^{(p)}$ będąca najwyższym współczynnikiem wielomianu P ma lewą (prawą) quasi-odwrotność n -tego (m -tego) stopnia, a wielomianowo lewostronnie (prawostronnie) nieosobliwymi w n -tym (w m -tym) stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M_{[m,n]}^{(p)}$ ma lewą (prawą) odwrotność n -tego (m -tego) stopnia. ■

(VII.12) DEFINICJA. Wielomian macierzowy P o wyrazach $M_{[n]}^{(0)}, M_{[n]}^{(1)}, \dots$ i związaną z nim wzorem (VII.9) macierz wielomianową $M_{[n]}$ nazywamy wielomianowo quasi-nieosobliwymi (nieosobliwymi) w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M_{[n]}^{(p)}$ będąca najwyższym współczynnikiem wielomianu P ma quasi-odwrotność (odwrotność) n -tego stopnia. ■

(VII.13) DEFINICJA. Wielomian macierzowy $P = (M_{[n]}^{(0)}, M_{[n]}^{(1)}, \dots)$ i związaną z nim wzorem (VII.9) macierz wielomianową $M_{[n]}$ nazywamy macierzowo quasi-nieosobliwymi (nieosobliwymi) w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy $M_{[n]}$ jako macierz nad pierścieniem wielomianowym jest quasi-nieosobliwa (nieosobliwa) w n -tym stopniu. ■

(VII.14) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy wielomianowej $M_{[n]} = M_{[n]}^{(0)} A^0 + \dots + M_{[n]}^{(p)} A^p$, gdzie $A^0 = (I, O, O, \dots)$, $A = (O, I, O, O, \dots)$, $M^{(0)}, \dots, M^{(p)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} macierzowo nieosobliwej w n -tym stopniu macierz $M_{[n]}^{(0)}$ jest nieosobliwa w n -tym stopniu.

Dowód. Jeżeli \mathcal{A} jest pierścieniem przemiennym, to $\mathcal{P}[\mathcal{A}]$ też. Wobec tego $M_{[n]}$ ma odwrotność $N_{[n]} = N_{[n]}^{(0)} A^0 + \dots + N_{[n]}^{(q)} A^q$ n -tego stopnia, czyli

$$(M^{(0)} A^0 + \dots)(N^{(0)} A^0 + \dots) = (N^{(0)} A^0 + \dots)(M^{(0)} A^0 + \dots) = I_{[n]} A^0,$$

skąd $M^{(0)} N^{(0)} A^0 = N^{(0)} M^{(0)} A^0 = I_{[n]} A^0$ i $M^{(0)} N^{(0)} = N^{(0)} M^{(0)} = I_{[n]}$. Oznacza to, że macierz $M_{[n]}^{(0)}$ jest odwracalna w n -tym stopniu, a więc nieosobliwa w n -tym stopniu. ■

(VII.15) PRZYKŁAD. Wielomian macierzowy P z przykładu (VII.7) jest wielomianowo lewostronnie quasi-nieosobliwy w drugim stopniu, ponieważ dla jego najwyższego współ-

czynnika

$$M_{[3,2]}^{(2)} := \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} = 6 \cdot I_{[2]}.$$

Wielomian macierzowy P nie jest jednak ani wielomianowo, ani macierzowo quasi-nieosobliwy w drugim stopniu. ■

(VII.16) DEFINICJA. Lewą wartością (prawą wartością, wartością) macierzową macierzy wielomianowej M nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} w punkcie $x \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest pierścieniem nad pierścieniem \mathcal{A} , nazywamy macierz nad pierścieniem \mathcal{B} , jaką otrzymujemy zastępując wielomiany nad pierścieniem \mathcal{A} , będące wyrazami macierzy M , ich lewymi wartościami (prawymi wartościami, wartościami) w punkcie x . ■

(VII.17) PRZYKŁAD. Wartością macierzową macierzy wielomianowej M z przykładu (VII.7) w punkcie $x=2 \in \mathcal{Z}$ jest

$$M(2) = \begin{bmatrix} 1-4 \cdot 2+9 \cdot 2^2 & -2-2-5 \cdot 2^2 \\ 3+7 \cdot 2-3 \cdot 2^2 & -6 \cdot 2+4 \cdot 2^2 \\ -2+6 \cdot 2^2 & 5+2 \cdot 2-7 \cdot 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -24 \\ 5 & 4 \\ 22 & -19 \end{bmatrix}.$$

Wartością macierzową tejże macierzy w punkcie

$$X := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{[2]}[\mathcal{Z}]$$

jest hipermacierz

$$\begin{aligned} M(X) &= \begin{bmatrix} I_{[2]} - 4X + 9X^2 & -2 \cdot I_{[2]} - X - 5X^2 \\ 3 \cdot I_{[2]} + 7X - 3X^2 & -6X + 4X^2 \\ -2 \cdot I_{[2]} & + 6X^2 & 5 \cdot I_{[2]} + 2X - 7X^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -48 & 10 \\ -15 & -53 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 22 & -12 \\ 18 & 28 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 25 & 8 \\ -12 & 21 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -26 & -4 \\ 6 & -24 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -32 & 12 \\ -18 & -38 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 42 & -10 \\ 15 & 47 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(VII.18) DEFINICJA. Lewym miejscem zerowym (prawym miejscem zerowym, miejscem zerowym) macierzowym macierzy wielomianowej M nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} w pierścieniu \mathcal{B} , gdzie \mathcal{B} jest pierścieniem nad pierścieniem \mathcal{A} , nazywamy każdy element $x \in \mathcal{B}$, dla którego lewa wartość (prawa wartość, wartość) macierzowa macierzy wielomianowej M jest macierzą zerową nad pierścieniem \mathcal{B} . ■

(VII.19) DEFINICJA. Lewym pierwiastkiem (prawym pierwiastkiem, pierwiastkiem) macierzowym macierzy wielomianowej M nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy każde lewe miejsce zerowe (prawe miejsce zerowe, miejsce zerowe) macierzowe tej macierzy w pierścieniu \mathcal{A} . ■

(VII.20) PRZYKŁAD. Miejscem zerowym macierzowym macierzy wielomianowej

$$M := \begin{bmatrix} 9\lambda^0 - 4\lambda - 5\lambda^2 & 6\lambda^0 - 3\lambda - 3\lambda^2 \\ -8\lambda^0 + 7\lambda + \lambda^2 & 5\lambda^0 - 6\lambda + \lambda^2 \\ -2\lambda^0 & +2\lambda^2 & -4\lambda^0 + 5\lambda - \lambda^2 \end{bmatrix}$$

nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z} , gdzie $\lambda := (0, 1, 0, 0, \dots)$, $\lambda^0 := (1, 0, 0, \dots)$, w pierścieniu $\mathcal{M}_{[2]}[\mathcal{Z}]$ jest macierz $I_{[2]}$.

Liczba $1 \in \mathcal{Z}$ jest pierwiastkiem macierzowym powyższej macierzy wielomianowej M .

Zauważmy, że – zgodnie z definicją (II.50) – pierwiastkiem wielomianowym powyższej macierzy wielomianowej M traktowanej jako wielomian nad pierścieniem $\mathcal{M}_{[3]}[\mathcal{Z}]$

$$M := \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -8 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} A^0 + \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 7 & -6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} A^2$$

jest macierz $I_{[3]}$. ■

§ VII.2. Podzielność macierzy wielomianowych

Opierając się na twierdzeniu (VII.5) podzielność macierzy wielomianowych uważamy za równoznaczną z podzielnością odpowiednich wielomianów macierzowych i wprowadzamy, między innymi, następujące określenia i twierdzenia.

(VII.21) DEFINICJA. Macierz wielomianową A nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy lewostronnie (prawostronnie) podzielną z resztą przez macierz wielomianową B nad pierścieniem \mathcal{A} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie macierze wielomianowe Q i R nad pierścieniem \mathcal{A} , że

$$(VII.22) \quad A = BQ + R \quad (A = QB + R) \wedge \text{st}_w R < \text{st}_w B,$$

gdzie $\text{st}_w R$ oznacza stopień wielomianowy macierzy wielomianowej R , a $\text{st}_w B$ – stopień wielomianowy macierzy wielomianowej B . Macierz Q nazywamy wtedy ilorazem, a macierz R – resztą z lewostronnego (prawostronnego) podzielenia macierzy wielomianowej A przez macierz wielomianową B . ■

(VII.23) TWIERDZENIE. W pierścieniu wielomianowo-macierzowym $\mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathcal{A}]]$ każda macierz wielomianowa jest lewostronnie (prawostronnie) podzielna z resztą przez każdą macierz wielomianową n -tego stopnia macierzowego, która jest wielomianowo prawostronnie (lewostronnie) nieosobliwa w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (II.58). ■

(VII.24) DEFINICJA. Macierz wielomianową A nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy *podzielną z resztą* przez macierz wielomianową B nad pierścieniem \mathcal{A} wtedy i tylko wtedy, gdy jest zarówno lewostronnie jak i prawostronnie podzielna z resztą przez B , a iloraz i reszta z lewostronnego dzielenia są odpowiednio równe ilorazowi i reszcie z prawostronnego dzielenia. ■

(VII.25) PRZYKŁAD. W pierścieniu wielomianowo-macierzowym $\mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathbb{Q}]]$ nad ciałem liczb wymiernych \mathbb{Q} macierz wielomianowa

$$A := \begin{bmatrix} \lambda^4 - \lambda^0 & \lambda^3 + \lambda^2 & 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda - 6\lambda^0 \\ o & \lambda^2 + \lambda + \lambda^0 & \lambda^4 \\ -2\lambda & \lambda^2 - \lambda^0 & -\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^0 \\ \lambda & o & 2\lambda + \lambda^0 \end{bmatrix}$$

jest prawostronnie podzielna z resztą przez macierz wielomianową

$$B := \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda^0 & \lambda^2 & 3\lambda^0 \\ \lambda^2 - \lambda - \lambda^0 & \lambda & -\lambda^2 \\ 2\lambda^2 + 3\lambda - 5\lambda^0 & \lambda^0 & o \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda := (0, 1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{P}[\mathbb{Q}]$, a prawostronny iloraz Q i prawostronna reszta R z tego podzielenia są równe:

$$Q := \begin{bmatrix} 4\lambda - 5\lambda^0 & -3\lambda^2 + 4\lambda & 2\lambda^2 - \frac{17}{2}\lambda + \frac{67}{4}\lambda^0 \\ \lambda + \frac{1}{2}\lambda^0 & -\lambda^2 & \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{7}{4}\lambda + \frac{17}{8}\lambda^0 \\ o & \lambda - 5\lambda^0 & -\frac{1}{2}\lambda + \frac{15}{4}\lambda^0 \end{bmatrix},$$

$$R := \begin{bmatrix} -\frac{347}{4}\lambda + \frac{371}{4}\lambda^0 & \frac{17}{2}\lambda - \frac{67}{4}\lambda^0 & -5\lambda + 9\lambda^0 \\ -\frac{145}{8}\lambda + \frac{77}{8}\lambda^0 & \frac{11}{4}\lambda - \frac{9}{8}\lambda^0 & -3\lambda - \frac{3}{2}\lambda^0 \\ -\frac{79}{4}\lambda + \frac{55}{4}\lambda^0 & \frac{11}{2}\lambda - \frac{19}{4}\lambda^0 & -\lambda + 2\lambda^0 \\ \lambda & o & 2\lambda + \lambda^0 \end{bmatrix},$$

ponieważ — co sprawdzamy rachunkiem — jest $A = QB + R$ i $\text{st}_w R < \text{st}_w B$. ■

(VII.26) DEFINICJA. Macierz wielomianową A nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy *lewostronnie słabo podzielną z resztą* (*prawostronnie słabo podzielną z resztą*, *słabo podzielną z resztą*) przez macierz wielomianową B nad pierścieniem \mathcal{A} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$ nie będący dzielnikiem zera, że macierz wielomianowa Aa jest lewostronnie podzielna z resztą (aA jest prawostronnie podzielna z resztą, $Aa = aA$ jest podzielna z resztą) przez macierz wielomianową B . ■

(VII.27) TWIERDZENIE. W pierścieniu wielomianowo-macierzowym $\mathcal{P}[\mathcal{M}[\mathcal{A}]]$ każda macierz wielomianowa jest lewostronnie (prawostronnie) słabo podzielna z resztą przez każdą macierz wielomianową n -tego stopnia macierzowego, która jest wielomianowo prawostronnie (lewostronnie) quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (II.52). ■

(VII.28) DEFINICJA. Wielomianem charakterystycznym p -tego stopnia macierzy $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy wielomian moniczny nad pierścieniem \mathcal{A} określony wzorem

$$(VII.29) \quad \chi_p := \det_p(A - AA^0) = (-1)^p \det_p(AA^0 - A),$$

gdzie $A := (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 := (I, O, O, \dots)$, czyli

$$(VII.30) \quad \chi_p := (-1)^p \cdot \det_p \begin{bmatrix} a_{11}\lambda^0 - \lambda & a_{12}\lambda^0 & \dots & a_{1p}\lambda^0 \\ a_{21}\lambda^0 & a_{22}\lambda^0 - \lambda & \dots & a_{2p}\lambda^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}\lambda^0 & a_{p2}\lambda^0 & \dots & a_{pp}\lambda^0 - \lambda \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda := (0, 1, 0, 0, \dots)$, $\lambda^0 := (1, 0, 0, \dots) = e$ i $A = \lambda I$. ■

(VII.31) TWIERDZENIE. Jeżeli χ_n jest wielomianem charakterystycznym n -tego stopnia macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemennym z transpozycją \mathcal{A} , to

$$(VII.32) \quad (AA^0 - A)(AA^0 - A)_{[n]}^D = (AA^0 - A)_{[n]}^D (AA^0 - A) = (-1)^n \chi_n I_{[n]}.$$

Dowód wynika z twierdzenia (III.128) i wzoru (VII.29), ponieważ

$$(AA^0 - A)(AA^0 - A)_{[n]}^D = (AA^0 - I_{[n]}A)(AA^0 - I_{[n]}A)_{[n]}^D,$$

$$(AA^0 - A)_{[n]}^D (AA^0 - A) = (AA^0 - I_{[n]}A)_{[n]}^D (AA^0 - I_{[n]}A). \quad \blacksquare$$

(VII.33) TWIERDZENIE. Macierze $A_{[n]}$ i $B_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ są podobne w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(VII.34) \quad AA^0 - I_{[n]}A \underset{[n]}{\approx} BA^0 - I_{[n]}A,$$

gdzie — jak poprzednio — $A := (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 := (I, O, O, \dots)$.

Dowód. Jeżeli macierze A i B są podobne w n -tym stopniu, to z definicji istnieje taka macierz $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nieosobliwa w n -tym stopniu, że $MA = BM$ i stąd $MA^0(AA^0 - I_{[n]}A) = (BA^0 - I_{[n]}A)MA^0$, co oznacza, że zachodzi relacja (VII.34).

Jeżeli — odwrotnie — zachodzi relacja (VII.34), to istnieją takie macierze wielomianowe $M_{[n]}$, $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{A}]]$ macierzowo nieosobliwe w n -tym stopniu, że $M(AA^0 - I_{[n]}A) = (BA^0 - I_{[n]}A)N$, skąd $MA = BN$ i $M = N$. Ale na mocy twierdzenia (VII.14) dla $M = M_{[n]}^{(0)}A^0 + \dots + M_{[n]}^{(p)}A^p$ macierz $M_{[n]}^{(0)}$ jest nieosobliwa w n -tym stopniu i mamy $M^{(0)}A = BM^{(0)}$, co oznacza, że macierze A i B są podobne w n -tym stopniu. ■

§ VII.3. Kanoniczne macierze diagonalne

(VII.35) DEFINICJA. Kanoniczną macierzą diagonalną nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} nazywamy każdą diagonalną macierz wielomianową

$$(VII.36) \quad T_{[r]} := \text{diag}(t_1, \dots, t_r),$$

spełniającą następujące warunki:

(VII.37) t_1, \dots, t_r są wielomianami niezerowymi z pierścienia wielomianowego $\mathcal{P}[\mathcal{F}]$,

(VII.38) wielomiany t_1, \dots, t_r są moniczne,

(VII.39) każdy wielomian t_j ($j=2, \dots, r$) jest podzielny przez wielomian t_{j-1} . ■

(VII.40) TWIERDZENIE. Każda macierz wielomianowa $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} jest równoważna w wymiarze $[m,n]$ pewnej kanonicznej macierzy diagonalnej (VII.36), gdzie r jest rzędem macierzy A .

Dowód. Na mocy twierdzenia (II.77) pierścień wielomianowy $\mathcal{P}[\mathcal{F}]$ jest całkowity, wobec czego pierścień macierzowy $\mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{F}]]$ jest regularny. Na mocy twierdzenia (V.184) istnieje taka macierz diagonalna $D_{[r]} := \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$, gdzie d_1, \dots, d_r są wielomianami niezerowymi z pierścienia wielomianowego $\mathcal{P}[\mathcal{F}]$, a r jest rzędem macierzy A , że $A \approx D$, a ponadto d_j ($j=2, \dots, r$) jest podzielny przez d_{j-1} . Istnieją zatem macierze odwracalne $M_{[m]}, N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{F}]]$ pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu takie, że $MA = DN$. Niech α_j będzie najwyższym współczynnikiem wielomianu d_j dla $j=1, \dots, r$. Wielomiany $t_j := \frac{1}{\alpha_j} d_j$ spełniają warunki (VII.37), (VII.38) i (VII.39), wobec czego macierz wielomianowa

$$T_{[r]} := D_{[r]} \prod_{j=1}^r E_{[n]}^{(3)}\left(j, \frac{1}{\alpha_j}\right)$$

jest kanoniczną macierzą diagonalną i

$$(i) \quad MA = TQ,$$

gdzie $Q := \prod_{j=1}^r E_{[n]}^{(3)}(j, \alpha_j) N$ jest macierzą odwracalną w n -tym stopniu, ponieważ na mocy twierdzenia (V.108) każda z macierzy elementarnych $E_{[n]}^{(3)}(j, \alpha_j)$ jest odwracalna w n -tym stopniu i $(E_{[n]}^{(3)}(j, \alpha_j))_{[n]}^{-1} = E_{[n]}^{(3)}\left(j, \frac{1}{\alpha_j}\right)$, wobec czego

$$\left(\prod_{j=1}^r E_{[n]}^{(3)}(j, \alpha_j)\right)_{[n]}^{-1} = \prod_{j=1}^r E_{[n]}^{(3)}\left(j, \frac{1}{\alpha_j}\right).$$

Na mocy (i) otrzymujemy tezę. ■

§ VII.4. Wielomiany niezmiennicze macierzy wielomianowej

Niech wielomian $d_j \in \mathcal{P}[\mathcal{F}]$ ($j=1, \dots, r$) będzie największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów j -tego stopnia macierzy wielomianowej $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} . O wielomianach d_1, \dots, d_r zakładamy, że są moniczne. Istnienie takich wielomianów d_1, \dots, d_r gwarantuje twierdzenie (II.87). Niech $d_0 := e$, gdzie e jest wielomianem jedynkowym.

Ze wzoru (III.118) wynika, że każdy wielomian d_j ($j=1, \dots, r$) jest podzielny przez wielomian d_{j-1} .

(VII.41) DEFINICJA. Wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} nazywamy moniczne wielomiany i_1, \dots, i_r , gdzie r jest rzędem macierzy A , określone wzorem

$$(VII.42) \quad d_{j-1} i_j = d_j \quad \text{dla} \quad j=1, \dots, r,$$

gdzie – jak poprzednio – d_j oznacza największy wspólny moniczny dzielnik wszystkich minorów j -tego stopnia macierzy wielomianowej A . ■

Wzory (VII.42) określają wielomiany niezmiennicze jednoznacznie, ponieważ na mocy twierdzenia (II.87) wielomiany d_1, \dots, d_r są dla macierzy A określone jednoznacznie, a dla dowolnego wielomianu $x \in \mathcal{P}[\mathcal{F}]$ spełniającego równość $d_{j-1} x = d_j$ mamy na mocy (VII.42) $d_{j-1}(x - i_j) = 0$, a następnie na mocy twierdzenia (II.79) $x - i_j = 0$, czyli $x = i_j$.

(VII.43) PRZYKŁAD. Znajdziemy wielomiany niezmiennicze macierzy wielomianowej nad ciałem liczb wymiernych \mathcal{Q}

$$(i) \quad A := \begin{bmatrix} -2e & -3\lambda + \lambda^2 & 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda^4 & -2\lambda \\ o & \lambda & -\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^5 & o \\ o & o & -3\lambda + 3\lambda^3 & o \end{bmatrix},$$

gdzie – jak poprzednio – e jest wielomianem jedynekowym, o – wielomianem zerowym, $\lambda := (0, 1, 0, 0, \dots)$ i $\lambda^0 = e$. Z uwagi na minor pierwszego stopnia $\det_1[-2e] = -2e$ mamy $d_1 := e$. Następnie z uwagi na minor drugiego stopnia

$$(ii) \quad \det_2 \begin{bmatrix} -2e & -3\lambda + \lambda^2 \\ o & \lambda \end{bmatrix} = -2\lambda$$

możemy spodziewać się, że $d_2 := \lambda$. Sprawdzamy, że – istotnie – wielomian moniczny λ jest wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów drugiego stopnia macierzy A , wobec czego z uwagi na (ii) jest największym wspólnym monicznym dzielnikiem tych minorów. Wreszcie macierz wielomianowa A ma dwa niezerowe minory trzeciego stopnia, a mianowicie

$$\det_3 \begin{bmatrix} -2e & -3\lambda + \lambda^2 & 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda^4 \\ o & \lambda & -\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^5 \\ o & o & -3\lambda + 3\lambda^3 \end{bmatrix} = 6\lambda^2(e - \lambda^2),$$

$$\det_3 \begin{bmatrix} -3\lambda + \lambda^2 & 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda^4 & -2\lambda \\ \lambda & -\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^5 & o \\ o & -3\lambda + 3\lambda^3 & o \end{bmatrix} = 6\lambda^3(e - \lambda^2),$$

wobec czego $d_3 := -\lambda^2(e - \lambda^2)$. Na mocy wzoru (VII.42) otrzymujemy

$$(iii) \quad i_1 = e, \quad i_2 = \lambda, \quad i_3 = -\lambda + \lambda^3. \quad \blacksquare$$

Nazwę wielomianów niezmienniczych tłumaczy następujące twierdzenie.

(VII.44) TWIERDZENIE. *Macierze wielomianowe $A_{[m,n]}$, $B_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{F}]]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} równoważne w wymiarze $[m, n]$ mają te same wielomiany niezmiennicze.*

Dowód. Z równoważności macierzy wielomianowych A i B wynika istnienie takich macierzy wielomianowych macierzowo nieosobliwych $M_{[m]}$, $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{P}[\mathcal{F}]]$ pierwszej w m -tym, a drugiej w n -tym stopniu, że $B = MAN$. Przyjmijmy, że $Q_{[m,n]} := MA$. Na mocy twierdzenia (III.112) dla dowolnego minora j -tego stopnia macierzy B mamy

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_j \\ l_1, \dots, l_j \end{pmatrix} &= \sum_{1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_j \leq n} Q \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_j \\ \beta_1, \dots, \beta_j \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \beta_1, \dots, \beta_j \\ l_1, \dots, l_j \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_j \leq n} \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_j \leq m} M \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_j \\ \alpha_1, \dots, \alpha_j \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_j \\ \beta_1, \dots, \beta_j \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \beta_1, \dots, \beta_j \\ l_1, \dots, l_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Z tego wzoru wynika, że największy wspólny moniczny dzielnik wszystkich minorów j -tego stopnia macierzy wielomianowej A jest wspólnym monicznym dzielnikiem wszystkich minorów j -tego stopnia macierzy wielomianowej B . Ale macierze wielomianowe A i B można zamienić rolami, wobec czego największy wspólny moniczny dzielnik jednej z nich jest największym wspólnym monicznym dzielnikiem drugiej i na mocy twierdzenia (II.87) macierze wielomianowe A i B mają te same wielomiany d_1, \dots, d_r , a na mocy (VII.42) te same wielomiany niezmiennicze i_1, \dots, i_r . ■

(VII.45) DEFINICJA. *Formą kanoniczną Smitha macierzy wielomianowej $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} nazywamy macierz*

$$(VII.46) \quad S := \text{diag}(i_1, \dots, i_r),$$

gdzie r jest rzędem, a i_1, \dots, i_r są wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej A uporządkowanymi zgodnie ze wzorem (VII.42). ■

(VII.47) TWIERDZENIE. PODSTAWOWE TWIERDZENIE O DIAGONALIZACJI MACIERZY WIELOMIANOWYCH. *Każda macierz wielomianowa $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} jest równoważna w wymiarze $[m, n]$ dokładnie jednej kanonicznej macierzy diagonalnej, a mianowicie swojej formie kanonicznej Smitha.*

Dowód. Dla każdej kanonicznej macierzy diagonalnej (VII.36) nad ciałem \mathcal{F} mamy wielomiany $d_j = t_1 \dots t_j$ dla $j = 1, \dots, r$, wobec czego na mocy (VII.42) wielomianami niezmienniczymi tej macierzy są t_1, \dots, t_r . Na mocy twierdzenia (VII.40) i (VII.44) mamy $i_j = t_j$ dla $j = 1, \dots, r$, gdzie i_1, \dots, i_r są wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej A . Ze względu na jednoznaczność wielomianów niezmienniczych i_1, \dots, i_r i twierdzenie (VII.40) otrzymujemy stąd tezę. ■

(VII.48) PRZYKŁAD. Zilustrujemy twierdzenie (VII.47) na macierzy wielomianowej A z przykładu (VII.43). Na mocy (iii) jej formą kanoniczną Smitha jest macierz wielomianowa

$$S := \begin{bmatrix} e & & \\ & \lambda & \\ & & -\lambda + \lambda^3 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy rachunkiem, że jest

$$(iv) \quad I_{[3]} \cdot A = S \cdot \begin{bmatrix} -2e & -3\lambda + \lambda^2 & 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda^4 & -2\lambda \\ & e & -\lambda - \lambda^2 + \lambda^4 & \\ & & 3e & \\ & & & e \end{bmatrix},$$

co oznacza, że macierze wielomianowe A i S są równoważne w wymiarze $[3, 4]$. ■

Zauważmy, że dla znalezienia formy kanonicznej Smitha danej macierzy wielomianowej $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} można zamiast wzorów (VII.42), w których kłopotliwe jest obliczanie wielomianów d_1, \dots, d_r , zastosować postępowanie analogiczne do użytego w przykładzie (V.186).

(VII.49) PRZYKŁAD. Znajdźmy formę kanoniczną Smitha dla macierzy wielomianowej $A_{[3,4]}$ z przykładu (VII.43) posługując się algorytmem analogicznym do użytego w przykładzie (V.186). Rozpoczynamy zatem obliczenia od trzech macierzy $I_{[3]}$, $A_{[3,4]}$, $I_{[4]}$:

$$\begin{bmatrix} e & & & \\ & e & & \\ & & e & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2e & -3\lambda + \lambda^2 & 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda^4 & -2\lambda \\ o & \lambda & -\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^5 & o \\ o & o & -3\lambda + 3\lambda^3 & o \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e & & & \\ & e & & \\ & & e & \\ & & & e \end{bmatrix}.$$

Od czwartej kolumny macierzy drugiej i trzeciej odejmujemy kolumnę pierwszą pomnożoną przez λ , a następnie pierwszą kolumnę mnożymy przez $-\frac{1}{2}e$:

$$\begin{bmatrix} e & & & \\ & e & & \\ & & e & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e & -3\lambda + \lambda^2 & 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda^4 \\ & \lambda & -\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^5 \\ & & -3\lambda + 3\lambda^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e & & & -\lambda \\ & e & & \\ & & e & \\ & & & e \end{bmatrix}.$$

Do pierwszego wiersza macierzy pierwszej i drugiej dodajemy drugi pomnożony przez $3e - \lambda$:

$$\begin{bmatrix} e & 3e - \lambda & & \\ & e & & \\ & & e & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e & -\lambda^2 - 3\lambda^3 + 3\lambda^5 - \lambda^6 \\ & \lambda & -\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^5 \\ & & -3\lambda + 3\lambda^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e & & & -\lambda \\ & e & & \\ & & e & \\ & & & e \end{bmatrix}.$$

Do pierwszego wiersza macierzy pierwszej i drugiej dodajemy trzeci pomnożony przez $-\lambda^2$:

$$\begin{bmatrix} e & 3e - \lambda & -\lambda^2 \\ & e & \\ & & e \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e & -\lambda^2 - \lambda^6 \\ & \lambda & -\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^5 \\ & & -3\lambda + 3\lambda^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e & & & -\lambda \\ & e & & \\ & & e & \\ & & & e \end{bmatrix}.$$

Trzeci wiersz macierzy pierwszej i drugiej mnożymy przez $\frac{1}{3}$:

$$\begin{bmatrix} e & 3e-\lambda & -\lambda^2 \\ e & & \\ & & \frac{1}{3}e \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e & -\lambda^2-\lambda^6 \\ \lambda & -\lambda^2-\lambda^3+\lambda^5 \\ -\lambda+\lambda^3 & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e & & -\lambda \\ & e & \\ & & e \end{bmatrix}.$$

Do trzeciej kolumny macierzy drugiej i trzeciej dodajemy pierwszą pomnożoną przez $\lambda^2+\lambda^6$, a następnie drugą pomnożoną przez $\lambda+\lambda^2-\lambda^4$. Otrzymujemy

$$M := \begin{bmatrix} e & 3e-\lambda & -\lambda^2 \\ e & & \\ & & \frac{1}{3}e \end{bmatrix}, \quad S := \begin{bmatrix} e & & \\ \lambda & & \\ & & -\lambda+\lambda^3 \end{bmatrix}, \quad N := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e & -\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda^6 & -\lambda \\ & e & \lambda+\lambda^2-\lambda^4 \\ & & e \end{bmatrix}.$$

Sprawdźmy, że $MAN=S$, co oznacza, że macierze wielomianowe A i S są równoważne w wymiarze $[3, 4]$. Macierz S spełnia warunki (VII.37), (VII.38) i (VII.39), wobec czego na mocy twierdzenia (VII.47) jest formą kanoniczną Smitha dla macierzy A . ■

(VII.50) TWIERDZENIE. *Macierze wielomianowe $A_{[m,n]}$ i $B_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} są równoważne w wymiarze $[m, n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy mają wspólną formę kanoniczną Smitha.*

Dowód. Jeżeli macierze wielomianowe A i B są równoważne w wymiarze $[m, n]$, to na mocy twierdzenia (VII.47) ich formy kanoniczne Smitha są też równoważne w wymiarze $[m, n]$. Ponieważ dla każdej z macierzy wielomianowych A i B obie są formami kanonicznymi Smitha, więc na mocy twierdzenia (VII.47) są identyczne.

Jeżeli — odwrotnie — macierze wielomianowe A i B mają wspólną formę kanoniczną Smitha, to na mocy twierdzenia (VII.47) obie są jej równoważne w wymiarze $[m, n]$, wobec czego są między sobą równoważne w wymiarze $[m, n]$. ■

(VII.51) TWIERDZENIE. *W formie kanonicznej Smitha (VII.46) każdy wielomian niezmienniczy i_j ($j=2, \dots, r$) jest podzielny przez wielomian niezmienniczy i_{j-1} .*

Dowód. Na mocy twierdzenia (VII.47) forma kanoniczna Smitha jest kanoniczną macierzą diagonalną, wobec czego teza wynika z (VII.39). ■

(VII.52) TWIERDZENIE. *Jeżeli*

$$i_1^{(k)} = \dots = i_{m_k-1}^{(k)} = e, \quad i_{m_k}^{(k)}, \dots, i_{r_k}^{(k)}$$

są wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $A_{[n_k]}^{(k)}$ ($n_k \in \mathfrak{N}$, $k=1, \dots, s$) nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} i każdy z wielomianów $i_{m_k}^{(k)}, \dots, i_{r_k}^{(k)}$ ($k=2, \dots, s$) jest podzielny przez każdy z wielomianów $i_{m_{k-1}}^{(k-1)}, \dots, i_{r_{k-1}}^{(k-1)}$, to wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej

$$A_{[n_1+\dots+n_s]} := \text{diag}(A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_s]}^{(s)})$$

są

$$(v) \quad i_1^{(1)}, \dots, i_{m_1-1}^{(1)}, \dots, i_1^{(s)}, \dots, i_{m_s-1}^{(s)}, i_{m_1}^{(1)}, \dots, i_{r_1}^{(1)}, \dots, i_{m_s}^{(s)}, \dots, i_{r_s}^{(s)}.$$

Dowód. Na mocy twierdzeń (VII.47) i (V.155) jest

$$A \approx \text{diag}(S_{[n_1]}^{(1)}, \dots, S_{[n_s]}^{(s)}) = D, \quad n := n_1 + \dots + n_s,$$

$[n, n]$

gdzie $S_{[n_k]}^{(k)}$ jest formą kanoniczną Smitha macierzy wielomianowej $A_{[n_k]}^{(k)}$ ($k=1, \dots, s$). Istnieje taka macierz permutacyjna P , że w macierzy wielomianowej $S := P^{-1}DP$ pierwszymi $(r_1 + \dots + r_s)$ wyrazami diagonalnymi są wielomiany (v) . Ponieważ macierze wielomianowe S i D są równoważne w wymiarze $[n, n]$, więc również macierze A i S są równoważne w wymiarze $[n, n]$. Ponieważ macierz wielomianowa S spełnia warunki (VII.37), (VII.38) i (VII.39), więc na mocy twierdzenia (VII.47) jest formą kanoniczną Smitha macierzy wielomianowej A . Stąd wynika teza. ■

(VII.53) TWIERDZENIE. Macierze $A_{[n]}$ i $B_{[n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} są podobne w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy macierze wielomianowe $AA^0 - I_{[n]}A$ i $BA^0 - I_{[n]}A$ mają wspólną formę kanoniczną Smitha ($A = (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 = (I, O, O, \dots)$).

Dowód wynika z twierdzeń (VII.33) i (VII.50). ■

(VII.54) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} suma stopni wielomianów niezmienniczych macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$ ($A = (O, I, O, O, \dots)$, $A^0 = (I, O, O, \dots)$) jest równa n .

Dowód. Na mocy twierdzenia (VII.47) istnieją takie macierze wielomianowe $M_{[r]}$ i $N_{[n]}$ macierzowo nieosobliwe w n -tym stopniu, że

$$M(AA^0 - I_{[n]}A) = \text{diag}(i_1, \dots, i_n) \cdot N,$$

gdzie i_1, \dots, i_n są wielomianami niezmienniczymi macierzy wielomianowej $AA^0 - I_{[n]}A$, której rząd jest równy n . Na mocy twierdzenia (III.113) oraz definicji (VII.28)

$$(-1)^n \cdot \det_n M \cdot \chi_n = i_1 \dots i_n \cdot \det_n N.$$

Z nieosobliwości macierzy wielomianowych M i N wynika, że $\det_n M$ i $\det_n N$ są wielomianami odwracalnymi, a zatem wielomianami stopnia zerowego. Wielomian χ_n jest stopnia n . Zatem z ostatniej równości na mocy twierdzenia (II.25) otrzymujemy tezę. ■

§ VII.5. Dzielniki elementarne macierzy wielomianowej

(VII.55) DEFINICJA. Dzielnikiem elementarnym macierzy wielomianowej $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} nazywamy każdy moniczny czynnik elementarny jej wielomianów niezmienniczych. ■

(VII.56) DEFINICJA. Układem dzielników elementarnych macierzy wielomianowej $A_{[m,n]}$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} nazywamy zbiór wszystkich par (μ_j, v_j) , $j=1, \dots, p$, gdzie μ_1, \dots, μ_p są różnymi dzielnikami elementarnymi macierzy wielomianowej A , a v_j jest liczbą naturalną pokazującą, w ilu wielomianach niezmienniczych macierzy wielomianowej A występuje czynnik elementarny μ_j . ■