

Macierze (ciąg dalszy)

§ V.1. Rząd macierzy skończonej

(V.1) DEFINICJA. *Rzędem macierzy skończonej A nazywamy najwyższy stopień jej minorów różnych od zera.* ■

(V.2) TWIERDZENIE. *Jeżeli w macierzy A nad dowolnym pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} najwyższy stopień minorów nie będących dzielnikami zera jest zarazem najwyższym stopniem minorów różnych od zera, to rząd macierzy A jest równy liczbie jej liniowo niezależnych wierszy i równy liczbie jej liniowo niezależnych kolumn.*

Dowód wynika z twierdzenia (IV.62). ■

(V.3) TWIERDZENIE. *W dowolnym regularnym pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ dla każdej macierzy $A_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jej rząd jest równy liczbie liniowo niezależnych wierszy i równy liczbie liniowo niezależnych kolumn.*

Dowód wynika z twierdzenia (IV.63). ■

Rząd macierzy skończonej A oznaczamy w niniejszej książce symbolem $r(A)$ z umową, że

$$(V.4) \quad r(A) = 0 \Leftrightarrow A = O.$$

Wobec tego mamy zawsze spełniony warunek

$$(V.5) \quad 0 \leq r(A_{[m,n]}) \leq \min(m, n).$$

(V.6) TWIERDZENIE. *Dla każdej macierzy skończonej regularnej jej rząd jest równy wymiarowi jej modułu wierszowego i równy wymiarowi jej modułu kolumnowego.*

Dowód wynika z twierdzenia (V.3). ■

(V.7) DEFINICJA. Jeżeli $[m, n]$ jest minimalnym wymiarem macierzy $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, to m nazywamy liczbą wierszy, a n — liczbą kolumn macierzy A . ■

(V.8) DEFINICJA. Macierz skończoną A nazywamy wierszowo (kolumnowo) pełnego rzędu n ($n \in \mathfrak{N}_0$) wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno jej rząd jak i liczba wierszy (kolumn) jest równa n . ■

(V.9) DEFINICJA. Macierz skończoną A nazywamy *pełnego rzędu* n ($n \in \mathfrak{N}_0$) wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno jej rząd jak liczba wierszy i liczba kolumn są równe n . ■

Z powyższych definicji wynika, że macierz pełnego rzędu n jest zarówno wierszowo jak i kolumnowo pełnego rzędu n .

(V.10) PRZYKŁAD. Macierz rzeczywista

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jest rzędu 2, ponieważ

$$\det_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0,$$

natomiast

$$\begin{aligned} \det_3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= 0, & \det_3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= 0, \\ \det_3 \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= 0, & \det_3 \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Liczbą wierszy macierzy A jest 3, a liczbą kolumn 4. Zatem macierz A nie jest ani wierszowo, ani kolumnowo pełnego rzędu 2. ■

(V.11) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy skończonej A jest

$$r(\bar{A}) = r(A),$$

a dla każdej macierzy skończonej A nad pierścieniem przemiennym z transpozycją

$$r(A) = r(\bar{A}) = r(A^T) = r(A^*).$$

Dowód wynika z twierdzenia (III.96). ■

(V.12) TWIERDZENIE. Każdą macierz $A_{[m,n]}$ wierszowo pełnego rzędu m , w przypadku $m < p \leq n$ można uzupełnić $(p-m)$ wierszami tworzącymi macierz $B_{[p-m,n]}$ wierszowo pełnego rzędu $(p-m)$ tak, aby otrzymać macierz wierszowo pełnego rzędu p . Każdą macierz $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją kolumnowo pełnego rzędu n w przypadku $n < q \leq m$ można uzupełnić $(q-n)$ kolumnami tworzącymi macierz $B_{[m,q-n]}$ kolumnowo pełnego rzędu $(q-n)$ tak, aby otrzymać macierz kolumnowo pełnego rzędu q .

Dowód. Jeżeli macierz $A_{[m,n]}$ jest wierszowo pełnego rzędu m , to istnieje jej minor $A \begin{pmatrix} 1, \dots, m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix} \neq 0$, gdzie $j_1 < \dots < j_m$. Niech $j_{m+1} < \dots < j_n$ będą numerami kolumn nie występujących w tym minory, tzn. $\{j_{m+1}, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\} - \{j_1, \dots, j_m\}$. Niech $B_{[p-m,n]}$ będzie macierzą określoną wzorem

$$B := \begin{bmatrix} \delta_{j_{m+1}1} & \dots & \delta_{j_{m+1}n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_p1} & \dots & \delta_{j_pn} \end{bmatrix},$$

gdzie $\delta_{j,k}$, $l=m+1, \dots, p$, $k=1, \dots, n$, jest symbolem Kroneckera. Mamy

$$B \begin{pmatrix} 1, \dots, p-m \\ j_{m+1}, \dots, j_p \end{pmatrix} = 1,$$

wobec czego $B_{[p-m, n]}$ jest macierzą wierszowo pełnego rzędu $(p-m)$. Niech

$$C := \begin{bmatrix} A_{[m, n]} \\ B_{[p-m, n]} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ na mocy twierdzenia (III.125)

$$C \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} = (-1)^s A \begin{pmatrix} 1, \dots, m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix} \neq 0,$$

gdzie

$$s = \frac{m^2 + m}{2} + j_1 + \dots + j_m,$$

więc C jest żadaną macierzą wierszowo pełnego rzędu p . Dowód drugiej części tezy jest analogiczny. ■

(V.13) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu, to

$$(V.14) \quad r(A) = n.$$

Dowód wynika wprost z definicji (III.95) i (V.1). ■

(V.15) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} quasi-nieosobliwej w n -tym stopniu i dla każdej jej quasi-odwrotności n -tego stopnia $A_{[n]}^-$ jest

$$(V.16) \quad r(A_{[n]}^-) = r(A) = n.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.140) istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, nie będący dzielnikiem zera, że $AA_{[n]}^- = A_{[n]}^-A = aI_{[n]}$, a na mocy twierdzeń (I.111), (III.109) i (III.113) $\det_n A \cdot \det_n A_{[n]}^- = a^n \cdot \det_n I_{[n]} = a^n$ nie jest dzielnikiem zera, skąd $\det_n A$ i $\det_n A_{[n]}^-$ nie są dzielnikami zera, a stąd na mocy twierdzenia (V.13) równość (V.16). ■

(V.17) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} nieosobliwej w n -tym stopniu jest

$$(V.18) \quad r(A_{[n]}^{-1}) = r(A) = n.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(V.19) TWIERDZENIE. Dla dowolnych skończonych macierzy A_1, \dots, A_k nad pierścieniem przemiennym z transpozycją jest

$$(V.20) \quad r\left(\sum_{j=1}^k A_j\right) \leq \sum_{j=1}^k r(A_j).$$

Dowód. Stosujemy indukcję zupełną. Dla $k=1$ wzór (V.20) jest oczywisty. Załóżmy,

że jest prawdziwy dla $k=n$ i rozpatrzmy macierze $B := \sum_{j=1}^n A_j$ i $C := A_{n+1}$. Niech m będzie dowolną liczbą naturalną spełniającą warunek

$$(i) \quad m > r(B) + r(C).$$

Niech

$$B_{[m]}^{(0)} := \begin{bmatrix} b_{i_1 j_1} & \dots & b_{i_1 j_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i_m j_1} & \dots & b_{i_m j_m} \end{bmatrix}, \quad C_{[m]}^{(0)} := \begin{bmatrix} c_{i_1 j_1} & \dots & c_{i_1 j_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i_m j_1} & \dots & c_{i_m j_m} \end{bmatrix},$$

$$D_{[m]} := B_{[m]}^{(0)} + C_{[m]}^{(0)}.$$

Wtedy

$$(ii) \quad (B+C) \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix} = \det_m D.$$

Niech $M_{[m]}^{(s_1, \dots, s_p)}$ będzie macierzą określoną dla $1 \leq p \leq m$ wzorem

$$M_{j*}^{(s_1, \dots, s_p)} = \begin{cases} B_{j*}^{(0)}, & \text{gdy } j \in \{s_1, \dots, s_p\}, \\ C_{j*}^{(0)}, & \text{gdy } j \notin \{s_1, \dots, s_p\} \end{cases} \quad j = 1, \dots, m,$$

gdzie $M_{j*}^{(s_1, \dots, s_p)}$, $B_{j*}^{(0)}$, $C_{j*}^{(0)}$ oznaczają j -te wiersze macierzy odpowiednio $M^{(s_1, \dots, s_p)}$, $B^{(0)}$ i $C^{(0)}$.

Dla $p=0$ niech

$$M^{(s_1, \dots, s_p)} = C^{(0)}.$$

Ponieważ na mocy (i) dla $p=0$

$$\det_m M^{(s_1, \dots, s_p)} = \det_m C^{(0)} = 0,$$

więc stosując do wyznacznika (ii) m -krotnie twierdzenie (III.110), otrzymujemy

$$(iii) \quad \det_m D = \sum_{p=1}^m \sum_{\substack{(s_1, \dots, s_p) \\ 1 \leq s_1 < \dots < s_p \leq m}} \det_m M^{(s_1, \dots, s_p)}.$$

Niech teraz $N_{[m]}^{(s_1, \dots, s_p)}$ będzie macierzą otrzymaną z macierzy $M^{(s_1, \dots, s_p)}$ przez zmianę kolejności wierszy tak, że p pierwszych wierszy macierzy $N^{(s_1, \dots, s_p)}$ pochodzi z macierzy $B^{(0)}$, a pozostałe z macierzy $C^{(0)}$. Na mocy twierdzenia (III.104)

$$(iv) \quad \det_m M^{(s_1, \dots, s_p)} = \det_m N^{(s_1, \dots, s_p)} \quad \text{albo} \quad \det_m M^{(s_1, \dots, s_p)} = -\det_m N^{(s_1, \dots, s_p)}.$$

Wobec tego istnieją takie macierze $P_{[p, m]}$ i $Q_{[m-p, m]}$, z których pierwsza jest utworzona z wierszy macierzy $B^{(0)}$, a druga z wierszy macierzy $C^{(0)}$, że

$$N^{(s_1, \dots, s_p)} = \begin{bmatrix} P_{[p, m]} \\ Q_{[m-p, m]} \end{bmatrix}$$

i na mocy twierdzenia (III.125)

$$(v) \quad \det_m N^{(s_1, \dots, s_p)} =$$

$$= (-1)^{(p^2+p)/2} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_p) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq m}} (-1)^{k_1 + \dots + k_p} P \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ k_1, \dots, k_p \end{pmatrix} \cdot Q \begin{pmatrix} 1, \dots, m-p \\ l_1, \dots, l_{m-p} \end{pmatrix},$$

gdzie $\{l_1, \dots, l_{m-p}\} = \{1, \dots, m\} - \{k_1, \dots, k_p\} \wedge l_1 < \dots < l_{m-p}$. Minory $P \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ k_1, \dots, k_p \end{pmatrix}$ są minorami macierzy $B^{(0)}$, a stąd minorami macierzy B , natomiast $Q \begin{pmatrix} 1, \dots, m-p \\ l_1, \dots, l_{m-p} \end{pmatrix}$ są minorami macierzy $C^{(0)}$, a stąd minorami macierzy C . Z nierówności (i) wynika, że

$$p > r(B) \vee m - p > r(C).$$

W pierwszym przypadku na mocy definicji rzędu macierzy wszystkie minory $P \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ k_1, \dots, k_p \end{pmatrix}$ są równe zeru, a w drugim, analogicznie, wszystkie minory $Q \begin{pmatrix} 1, \dots, m-p \\ l_1, \dots, l_{m-p} \end{pmatrix}$ są równe zeru. Na mocy (v) jest $\det_m N^{(s_1, \dots, s_p)} = 0$, a na mocy (iv) $\det_m M^{(s_1, \dots, s_p)} = 0$. Ze względu na dowolność ciągu (s_1, \dots, s_p) , gdzie $1 \leq s_1 < \dots < s_p \leq m$, na mocy (iii) i (ii) otrzymujemy

$$(B+C) \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix} = 0.$$

Oznacza to, że każdy minor m -tego stopnia macierzy $B+C$, gdzie m spełnia warunek (i), jest równy zeru. Wynika stąd, że $r(B+C) \leq r(B) + r(C)$, a następnie

$$r\left(\sum_{j=1}^{n+1} A_j\right) = r(B+C) \leq r(B) + r(C) = r\left(\sum_{j=1}^n A_j\right) + r(A_{n+1}) \leq \sum_{j=1}^{n+1} r(A_j).$$

Na zasadzie indukcji zupełnej otrzymujemy stąd tezę. ■

(V.21) TWIERDZENIE. Dla dowolnych skończonych macierzy A_1, \dots, A_k nad pierścieniem przemiennym z transpozycją jest

$$(V.22) \quad r\left(\prod_{j=1}^k A_j\right) \leq \min(r(A_1), \dots, r(A_k)).$$

Dowód. Stosujemy indukcję zupełną. Dla $k=1$ wzór (V.22) jest oczywisty. Zakładamy, że jest prawdziwy dla $k=n$ i rozpatrujemy macierze $B := \prod_{j=1}^n A_j$ i $C := A_{n+1}$. Niech

$$(vi) \quad (BC) \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix}$$

będzie dowolnym minorem macierzy BC . Niech n będzie taką liczbą naturalną, że zarówno macierz B jak i macierz C są stopnia n . Istnieją zatem takie macierze $P_{[m,n]}$ i $Q_{[n,m]}$, że pierwszych m wierszy macierzy P jest wierszami o numerach i_1, \dots, i_m macierzy B , a pierwszych m kolumn macierzy Q jest kolumnami o numerach j_1, \dots, j_m macierzy C , oraz

$$(BC) \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix} = \det_m PQ.$$

Gdy $m > n$, oznacza to, że w macierzy P , a zatem i w macierzy PQ , co najmniej jeden z wierszy jest utworzony z samych zer, skąd minor (vi) jest równy zeru. Gdy $m \leq n$, mamy na

mocy twierdzenia (III.112)

$$(BC) \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix} = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_m) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n}} P \begin{pmatrix} 1, \dots, m \\ k_1, \dots, k_m \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_m \\ 1, \dots, m \end{pmatrix}.$$

Jeżeli $r(B) < m$, to każdy minor $P \begin{pmatrix} 1, \dots, m \\ k_1, \dots, k_m \end{pmatrix}$ jest równy zero. Jeżeli $r(C) < m$, to każdy minor $Q \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_m \\ 1, \dots, m \end{pmatrix}$ jest równy zero. Zatem minor (vi) może być różny od zera tylko wtedy, gdy $m \leq \min(r(B), r(C))$. Ze względu na dowolność minora (vi) otrzymujemy stąd $r(BC) \leq \min(r(B), r(C))$, a następnie

$$\begin{aligned} r\left(\prod_{j=1}^{n+1} A_j\right) &= r(BC) \leq \min(r(B), r(C)) = \\ &= \min\left(r\left(\prod_{j=1}^n A_j\right), r(A_{n+1})\right) \leq \min(r(A_1), \dots, r(A_{n+1})). \end{aligned}$$

Na zasadzie indukcji zupełnej otrzymujemy stąd tezę. ■

(V.23) TWIERDZENIE. Dla dowolnej macierzy $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} jest

$$(V.24) \quad r(A^*A) = r(AA^*) = r(A).$$

Dowód. Dla $A = O$ twierdzenie jest prawdziwe na mocy (V.4). Załóżmy zatem, że $A \neq O$ i $r(A) > 0$. Na mocy (V.22)

$$(vii) \quad r(AA^*) \leq r(A).$$

Niech $r(A) = r$. Zatem istnieje minor

$$(viii) \quad A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_r \\ l_1, \dots, l_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

Niech

$$B_{[r,n]} := \begin{bmatrix} A_{j_1*} \\ \vdots \\ A_{j_r*} \end{bmatrix},$$

gdzie A_{j_u*} oznacza j_u -ty wiersz macierzy A , $u = 1, \dots, r$. Na mocy twierdzenia (III.112) i definicji (I.156)

$$\begin{aligned} (AA^*) \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix} &= \det_r BB^* = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_r) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n}} B \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} B^* \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_r) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n}} \left(B \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \right)^* B \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ powyższa suma zawiera składnik

$$\left(A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_r \\ l_1, \dots, l_r \end{pmatrix} \right)^* A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_r \\ l_1, \dots, l_r \end{pmatrix},$$

który na mocy (viii) i (I.172) jest dodatni, zatem na mocy (I.144)

$$(AA^*) \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix} > 0,$$

wobec czego $r(AA^*) \geq r$, a w połączeniu z (vii) $r(AA^*) = r(A)$. Wynika stąd, że $r(A^*A) = r(A^*)$ i na mocy twierdzenia (V.11) $r(A^*A) = r(A)$. ■

(V.25) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[p,q]}$ i $B_{[n]}$ są macierzami nad pierścieniem przemiennym z transpozycją, a macierz $B_{[n]}$ jest nieosobliwa w n -tym stopniu, to

$$(V.26) \quad q \leq n \Rightarrow r(AB) = r(A),$$

$$(V.27) \quad p \leq n \Rightarrow r(BA) = r(A).$$

Dowód. Załóżmy, że $q \leq n$. Na mocy twierdzenia (V.21) i równości $A = ABB_{[n]}^{-1}$ mamy

$$r(AB) \leq r(A) \wedge r(A) \leq r(AB),$$

skąd otrzymujemy (V.26). Dowód dla (V.27) jest analogiczny. ■

(V.28) TWIERDZENIE. Dla dowolnej macierzy $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} i dla dowolnego $a \in \mathcal{A}$ nie będącego dzielnikiem zera jest

$$(V.29) \quad r(aA) = r(A).$$

Dowód wynika z twierdzenia (III.109). ■

(V.30) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[p,q]}$ i $B_{[n]}$ są macierzami nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} , a macierz $B_{[n]}$ jest quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu, to są prawdziwe wzory (V.26) i (V.27).

Dowód. Załóżmy, że $q \leq n$. Na mocy twierdzenia (III.140) istnieje quasi-odwrotność $B_{[n]}^{-}$ n -tego stopnia i taki element $b \in \mathcal{A}$ nie będący dzielnikiem zera, że $BB_{[n]}^{-} = B_{[n]}^{-}B = bI_{[n]}$. Wobec tego na mocy twierdzenia (V.21) i równości $bA = ABB_{[n]}^{-}$ mamy

$$r(AB) \leq r(A) \wedge r(bA) \leq r(AB),$$

skąd na mocy twierdzenia (V.28) otrzymujemy wzór (V.26). Wzór (V.27) dowodzimy analogicznie. ■

(V.31) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[p,q]}$ i $B_{[m,n]}$ są macierzami regularnymi, to

$$(V.32) \quad r(B_{[m,n]}) = m \wedge q \leq m \Rightarrow r(AB) = r(A),$$

$$(V.33) \quad r(B_{[m,n]}) = n \wedge p \leq n \Rightarrow r(BA) = r(A).$$

Dowód. Załóżmy, że $r(B_{[m,n]}) = m \wedge q \leq m$. Zauważmy, że zmiana kolejności kolumn w macierzy B powoduje analogiczną zmianę kolejności kolumn w macierzy AB , nie zmie-

niając rzędów tych macierzy. Można wobec tego założyć, że

$$B_{[m,n]} = [C_{[m]} D_{[m,n-m]}],$$

gdzie C jest macierzą quasi-nieosobliwą w m -tym stopniu. Wobec tego

$$AB = [(AC)_{[p,m]} (AD)_{[p,n-m]}],$$

gdzie na mocy twierdzenia (V.30) $r(AC) = r(A)$. Stąd $r(AB) \geq r(AC) = r(A)$, a ponieważ na mocy twierdzenia (V.21) jest $r(AB) \leq r(A)$, więc otrzymujemy (V.32). Dowód wzoru (V.33) jest analogiczny. ■

(V.34) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz regularna A jest określona wzorem

$$(V.35) \quad A := \text{diag}(A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_k]}^{(k)}),$$

to

$$(V.36) \quad r(A) = \sum_{j=1}^k r(A^{(j)}).$$

Dowód. Niech $r(A^{(j)}) = r_j$ dla $j = 1, \dots, k$. Na mocy definicji rzędu macierzy z każdej macierzy $A^{(j)}$ można wybrać r_j wierszy i r_j kolumn tak, aby otrzymać macierz $B_{[r_j]}^{(j)}$, dla której $\det_{r_j} B^{(j)} \neq 0$. Niech

$$B := \text{diag}(B_{[r_1]}^{(1)}, \dots, B_{[r_k]}^{(k)}).$$

Na mocy twierdzenia (III.116)

$$\det_s B = \det_{r_1} B^{(1)} \dots \det_{r_k} B^{(k)} \neq 0,$$

gdzie $s = r_1 + \dots + r_k$. Ponieważ $\det_s B$ jest minorem macierzy A , otrzymujemy stąd $r(A) \geq r_1 + \dots + r_k$. Ponieważ każdy minor macierzy A jest iloczynem minorów macierzy $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$, więc $r(A) \leq r_1 + \dots + r_k$ i wobec tego mamy (V.36). ■

(V.37) TWIERDZENIE. Rząd skończonej regularnej macierzy diagonalnej jest równy liczbie różnych od zera wyrazów diagonalnych tej macierzy.

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego. ■

§ V.2. Macierze ortogonalne

(V.38) DEFINICJA. Macierzą wierszowo (kolumnowo) ortogonalną w m -tym (w n -tym) stopniu nazywamy każdą macierz $A_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, dla której istnieje taka macierz diagonalna $D_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ($D_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$) quasi-nieosobliwa w m -tym (w n -tym) stopniu, że

$$(V.39) \quad AA^* = D \quad (A^*A = D). \quad \blacksquare$$

(V.40) DEFINICJA. Macierzą wierszowo (kolumnowo) quasi-ortonormalną w m -tym (w n -tym) stopniu nazywamy każdą macierz $A_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, dla której istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, nie będący dzielnikiem zera, że

$$(V.41) \quad AA^* = a \cdot I_{[m]} \quad (A^*A = a \cdot I_{[n]}). \quad \blacksquare$$

(V.42) DEFINICJA. Macierzą wierszowo (kolumnowo) ortonormalną w m -tym (w n -tym) stopniu nazywamy każdą macierz $A_{[m,n]}$ spełniającą warunek

$$(V.43) \quad AA^* = I_{[m]} \quad (A^*A = I_{[n]}). \quad \blacksquare$$

Z powyższych definicji wynika, że dla wierszy A_{1*}, \dots, A_{m*} macierzy $A_{[m,n]}$ wierszowo ortogonalnej w m -tym stopniu jest

$$(V.44) \quad A_{k*} A_{l*}^* \begin{cases} \neq 0 & \text{dla } k=l, \\ = 0 & \text{dla } k \neq l, \end{cases} \quad k, l=1, \dots, m,$$

a w przypadku, gdy macierz A jest wierszowo quasi-ortonormalna w m -tym stopniu

$$(V.45) \quad A_{k*} A_{l*}^* = \begin{cases} [a] \neq 0 & \text{dla } k=l, \\ 0 & \text{dla } k \neq l, \end{cases} \quad k, l=1, \dots, m,$$

i gdy macierz A jest wierszowo ortonormalna w m -tym stopniu

$$(V.46) \quad A_{k*} A_{l*}^* = [\delta_{kl}], \quad k, l=1, \dots, m,$$

gdzie δ_{kl} jest symbolem Kroneckera.

Analogicznie, dla kolumn A_{*1}, \dots, A_{*n} macierzy $A_{[m,n]}$ kolumnowo ortogonalnej w n -tym stopniu jest

$$(V.47) \quad A_{*k}^* A_{*l} = \begin{cases} \neq 0 & \text{dla } k=l, \\ = 0 & \text{dla } k \neq l, \end{cases} \quad k, l=1, \dots, n,$$

a w przypadku, gdy macierz A jest kolumnowo quasi-ortonormalna w n -tym stopniu

$$(V.48) \quad A_{*k}^* A_{*l} = \begin{cases} [a] \neq 0 & \text{dla } k=l \\ 0 & \text{dla } k \neq l, \end{cases} \quad k, l=1, \dots, n,$$

i w przypadku, gdy macierz A jest kolumnowo ortonormalna w n -tym stopniu

$$(V.49) \quad A_{*k}^* A_{*l} = [\delta_{kl}], \quad k, l=1, \dots, n.$$

Z powyższego wynika, że, jeżeli $A_{[m,n]}$ jest macierzą nad pierścieniem częściowo uporządkowanym i w jej module wierszowym i module kolumnowym wprowadzić iloczyn skalarny (IV.145), to w przypadku, gdy macierz A jest wierszowo ortogonalna (wierszowo quasi-ortonormalna, wierszowo ortonormalna) w m -tym stopniu, jej pierwszych m wierszy tworzy układ ortogonalny (quasi-ortonormalny, ortonormalny), a w przypadku, gdy macierz A jest kolumnowo ortogonalna (kolumnowo quasi-ortonormalna, kolumnowo ortonormalna) w n -tym stopniu, jej pierwszych n kolumn tworzy układ ortogonalny (quasi-ortonormalny, ortonormalny).

(V.50) PRZYKŁAD. Macierz zespolona

$$A := \begin{bmatrix} 1+6i & 5+2i & 3-5i & 0 \\ 0 & 6+10i & -10+4i & 2-7i \end{bmatrix}$$

jest wierszowo ortogonalna w drugim stopniu, ponieważ

$$AA^* = \begin{bmatrix} 100 & \\ & 305 \end{bmatrix}.$$

Macierz rzeczywista

$$B := \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{13} & \frac{3}{5} \\ \frac{12}{13} & 0 \end{bmatrix}$$

jest kolumnowo ortonormalna w drugim stopniu, ponieważ $B^*B = I_{[2]}$. ■

(V.51) TWIERDZENIE. Każda macierz wierszowo ortogonalna w m -tym stopniu nad pierścieniem przemiennym z transpozycją jest macierzą wierszowo pełnego rzędu m . Każda macierz kolumnowo ortogonalna w n -tym stopniu nad pierścieniem przemiennym z transpozycją jest macierzą kolumnowo pełnego rzędu n .

Dowód. Niech $A_{[m,n]}$ będzie macierzą wierszowo ortogonalną w n -tym stopniu, nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} . Wobec tego istnieje taka macierz diagonalna $D_{[m]}$ quasi-nieosobliwa w m -tym stopniu, że $AA^* = D$. Skoro D jest macierzą quasi-nieosobliwą w m -tym stopniu, to na mocy twierdzenia (V.13) jest $r(D) = m$. Na mocy twierdzenia (V.21) mamy $m = r(D) \leq r(A)$, a na mocy (V.5) $r(A) \leq m$, wobec czego $r(A) = m$, skąd pierwsza część tezy. Drugą dowodzimy analogicznie. ■

(V.52) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą wierszowo ortogonalną (wierszowo quasi-ortonormalną, wierszowo ortonormalną) w m -tym stopniu, to \bar{A} jest również macierzą wierszowo ortogonalną (wierszowo quasi-ortonormalną, wierszowo ortonormalną) w m -tym stopniu, natomiast A^T i A^* są macierzami kolumnowo ortogonalnymi (kolumnowo quasi-ortonormalnymi, kolumnowo ortonormalnymi) w m -tym stopniu. Jeżeli A jest macierzą kolumnowo ortogonalną (kolumnowo quasi-ortonormalną, kolumnowo ortonormalną) w n -tym stopniu, to \bar{A} jest również macierzą kolumnowo ortogonalną (kolumnowo quasi-ortonormalną, kolumnowo ortonormalną) w n -tym stopniu, natomiast A^T i A^* są macierzami wierszowo ortogonalnymi (wierszowo quasi-ortonormalnymi, wierszowo ortonormalnymi) w n -tym stopniu.

Dowód. Jeżeli $A_{[m,n]}$ jest macierzą wierszowo ortogonalną w m -tym stopniu, to na mocy (V.39) $AA^* = D$, gdzie D jest macierzą diagonalną quasi-nieosobliwą w m -tym stopniu. Wobec tego

$$\bar{A}(\bar{A})^* = \bar{D}, \quad (A^T)^*A^T = \bar{A}(\bar{A})^* = \bar{D}, \quad (A^*)^*A^* = AA^* = D,$$

gdzie na mocy (III.97) macierz \bar{D} jest również quasi-nieosobliwa w m -tym stopniu. Stąd wynika teza. Dowód w pozostałych przypadkach jest analogiczny. ■

(V.53) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[m,n]}$ jest wierszowo ortogonalna (wierszowo quasi-ortonormalna, wierszowo ortonormalna) w m -tym stopniu, a macierz $B_{[n,p]}$ wierszowo ortonormalna w n -tym stopniu ($A, B \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$), to macierz AB jest również wierszowo ortogonalna (wierszowo quasi-ortonormalna, wierszowo ortonormalna) w m -tym stopniu. Jeżeli macierz $A_{[m,n]}$ jest kolumnowo ortonormalna w n -tym stopniu, a macierz $B_{[n,p]}$ kolumnowo ortogonalna (kolumnowo quasi-ortonormalna, kolumnowo ortonormalna) w p -tym stopniu ($A, B \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$), to macierz AB jest również kolumnowo ortogonalna (kolumnowo quasi-ortonormalna, kolumnowo ortonormalna) w p -tym stopniu.

Dowód wynika z równości

$$AB(AB)^* = A(BB^*)A^* = AA^*, \quad (AB)^*AB = B^*(A^*A)B = B^*B,$$

gdzie w pierwszym przypadku macierz B jest wierszowo ortonormalna w n -tym stopniu, a w drugim macierz A jest kolumnowo ortonormalna w n -tym stopniu. ■

(V.54) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[m,n]}$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest wierszowo ortogonalna (wierszowo quasi-ortonormalna) w m -tym stopniu, a macierz $B_{[n,p]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ wierszowo quasi-ortonormalna w n -tym stopniu, to macierz AB jest również wierszowo ortogonalna (wierszowo quasi-ortonormalna) w m -tym stopniu. Jeżeli natomiast macierz $A_{[m,n]}$ jest kolumnowo quasi-ortonormalna w n -tym stopniu, a macierz $B_{[n,p]}$ kolumnowo ortogonalna (kolumnowo quasi-ortonormalna) w p -tym stopniu, to macierz AB jest również kolumnowo ortogonalna (kolumnowo quasi-ortonormalna) w p -tym stopniu.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(V.55) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest

$$A_{[m_1+\dots+m_k, n_1+\dots+n_k]} = \begin{bmatrix} A_{[m_1, n_1]}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{[m_k, n_k]}^{(k)} \end{bmatrix}$$

to:

1° jeżeli macierze $A_{[m_j, n_j]}^{(j)}$ są wierszowo ortonormalne w m_j -tym stopniu, $j=1, \dots, k$, to macierz A jest wierszowo ortonormalna w $(m_1+\dots+m_k)$ -tym stopniu,

2° jeżeli macierze $A_{[m_j, n_j]}^{(j)}$ są kolumnowo ortonormalne w n_j -tym stopniu, $j=1, \dots, k$, to macierz A jest kolumnowo ortonormalna w $(n_1+\dots+n_k)$ -tym stopniu.

3° jeżeli \mathcal{A} jest pierścieniem przemiennym z transpozycją i jeżeli macierze $A_{[m_j, n_j]}^{(j)}$ są wierszowo ortogonalne w m_j -tym stopniu, $j=1, \dots, k$, to macierz A jest wierszowo ortogonalna w $(m_1+\dots+m_k)$ -tym stopniu,

4° jeżeli A jest pierścieniem przemiennym z transpozycją i jeżeli macierze $A_{[m_j, n_j]}^{(j)}$ są kolumnowo ortogonalne w n_j -tym stopniu, $j=1, \dots, k$ to macierz A jest kolumnowo ortogonalna w $(n_1+\dots+n_k)$ -tym stopniu.

Dowód wynika z faktu, że

$$AA^* = \begin{bmatrix} (A^{(1)}A^{(1)*})_{[m_1]} & & \\ & \ddots & \\ & & (A^{(k)}A^{(k)*})_{[m_k]} \end{bmatrix},$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} (A^{(1)*}A^{(1)})_{[n_1]} & & \\ & \ddots & \\ & & (A^{(k)*}A^{(k)})_{[n_k]} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

(V.56) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ wierszowo ortogonalnej w m -tym stopniu istnieje

taka macierz diagonalna $D_{[m]}$ quasi-nieosobliwa w m -tym stopniu, że macierz DA jest wierszowo quasi-ortonormalna w m -tym stopniu, a dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ kolumnowo ortogonalnej w n -tym stopniu istnieje taka macierz diagonalna $D_{[n]}$ quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu, że macierz AD jest kolumnowo quasi-ortonormalna w n -tym stopniu.

Dowód. Niech $A_{[m,n]}$ będzie macierzą wierszowo ortogonalną w m -tym stopniu. Istnieje zatem taka macierz diagonalna $E_{[m]} := \text{diag}(e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, $e_1, \dots, e_m \in \mathcal{A}$, quasi-nieosobliwa w m -tym stopniu, że $AA^* = E$, skąd

$$e_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} a_{jk}^* > 0 \quad \text{dla } j=1, \dots, m.$$

Z założenia istnieją elementy $\sqrt{e_1}, \dots, \sqrt{e_m} \in \text{re } \mathcal{A}$, takie, że $(\sqrt{e_j})^2 = e_j$ dla $j=1, \dots, m$. Niech

$$(i) \quad D := \text{diag}(\sqrt{e_2 \dots e_m}, \sqrt{e_1 e_3 \dots e_m}, \dots, \sqrt{e_1 \dots e_{m-1}}).$$

Wtedy

$$(DA)(DA)^* = DAA^*D^* = DED = (e_1 \dots e_m)I_{[m]}$$

i $\det_m D = (\sqrt{e_1 \dots e_m})^{m-1} \neq 0$, co oznacza, że D jest macierzą quasi-nieosobliwą w m -tym stopniu, a macierz DA jest wierszowo quasi-ortonormalną w m -tym stopniu.

Dowód drugiej części tezy jest analogiczny. ■

(V.57) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z pierwiastkowaniem, dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ wierszowo ortogonalnej w m -tym stopniu istnieje taka macierz diagonalna $D_{[m]}$ nieosobliwa w m -tym stopniu, że macierz DA jest wierszowo ortonormalna w m -tym stopniu, a dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ kolumnowo ortogonalnej w n -tym stopniu istnieje taka macierz diagonalna $D_{[n]}$ nieosobliwa w n -tym stopniu, że macierz AD jest kolumnowo ortonormalna w n -tym stopniu.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego, jeśli zamiast (i) przyjąć

$$D := \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{e_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{e_m}}\right). \quad \blacksquare$$

(V.58) TWIERDZENIE. Każda macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją wierszowo lub kolumnowo ortogonalna w n -tym stopniu jest macierzą quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu.

Dowód. Niech $A_{[n]}$ będzie macierzą wierszowo ortogonalną w n -tym stopniu. Na mocy definicji istnieje taka macierz diagonalna $D_{[n]}$ quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu, że $AA^* = D$ i na mocy twierdzeń (I.111) i (III.113) $\det_n A \cdot \det_n A^* = \det_n D$ nie jest dzielnikiem zera, skąd $\det_n A$ nie jest dzielnikiem zera. Dowód dla macierzy $A_{[n]}$ kolumnowo ortogonalnej w n -tym stopniu jest analogiczny. ■

(V.59) DEFINICJA. Macierz $A_{[n]}$ nazywamy ortogonalną (quasi-ortonormalną, ortonormalną) w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest zarówno wierszowo jak i kolumnowo ortogonalna (quasi-ortonormalna, ortonormalna) w n -tym stopniu. ■

(V.60) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest quasi-ortonormalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}$ nie będący dzielnikiem zera, że*

$$(V.61) \quad AA^* = A^*A = \alpha I_{[n]}.$$

Dowód. Jeżeli istnieje taki element α nie będący dzielnikiem zera, że jest (V.61), to na mocy definicji macierz A jest quasi-ortonormalna w n -tym stopniu. Jeżeli — odwrotnie — macierz A jest quasi-ortonormalna w n -tym stopniu, to istnieją takie elementy $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, nie będące dzielnikami zera, że $AA^* = \alpha I_{[n]}$ i $A^*A = \beta I_{[n]}$. Mamy wtedy $\alpha A = AA^*A = \beta A$; skąd $(\alpha - \beta)A = 0$ i $(\alpha - \beta)AA^* = (\alpha - \beta)\alpha I_{[n]} = 0$. Wobec tego $(\alpha - \beta)\alpha = 0$, a ponieważ α nie jest dzielnikiem zera, więc $\alpha = \beta$. Stąd wzór (I.61). ■

(V.62) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ jest ortonormalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(V.63) \quad AA^* = A^*A = I_{[n]}.$$

Dowód wynika z definicji. ■

(V.64) TWIERDZENIE. *Każda macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją ortogonalną w n -tym stopniu jest macierzą pełnego rzędu n i quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu.*

Dowód wynika z twierdzeń (V.51) i (V.58). ■

(V.65) TWIERDZENIE. *Każda macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} ortonormalna w n -tym stopniu jest macierzą nieosobliwą w n -tym stopniu.*

Dowód. Na mocy (V.63) i twierdzenia (III.113)

$$\det_n A \cdot \det_n A^* = \det_n A^* \det_n A = \det_n I_{[n]} = 1,$$

co oznacza, że element $\det_n A$ jest odwracalny w pierścieniu \mathcal{A} i wobec tego macierz A jest nieosobliwa w n -tym stopniu. ■

(V.66) TWIERDZENIE. *Każda macierz $A_{[n]}$ ortonormalna w n -tym stopniu jest odwracalna w n -tym stopniu i*

$$(V.67) \quad A_{[n]}^{-1} = A^*.$$

Dowód wynika wprost z definicji (III.137) i wzoru (V.63). ■

(V.68) TWIERDZENIE. *Każda macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} quasi-ortonormalna w n -tym stopniu jest quasi-odwracalna w n -tym stopniu i macierz A^* jest jej quasi-odwrotnością n -tego stopnia.*

Dowód wynika z twierdzeń (V.60), (III.140), definicji (III.137) i wzoru (V.61). ■

(V.69) TWIERDZENIE. *Jeżeli macierz $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest ortogonalna w n -tym stopniu i*

$$(ii) \quad AA^* = D \wedge A^*A = E,$$

to macierze diagonalne D i E mają te same wyrazy diagonalne, a różnią się co najwyżej ich kolejnością.

Dowód. Na mocy twierdzenia (V.64) jest $\det_n A \neq 0$. Wobec tego istnieje taka permutacja (j_1, \dots, j_n) ciągu $(1, \dots, n)$, że $a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \neq 0$, skąd

$$(iii) \quad a_{kj_k} \neq 0 \quad \text{dla} \quad k=1, \dots, n.$$

Niech $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ i $E = \text{diag}(e_1, \dots, e_n)$. Ze wzorów (ii) wynika, że $DA = AE$, a stąd

$$d_k a_{kj_k} = e_{j_k} a_{kj_k} \quad \text{dla} \quad d=1, \dots, n$$

i na mocy (iii)

$$d_k = e_{j_k} \quad \text{dla} \quad k=1, \dots, n. \quad \blacksquare$$

(V.70) PRZYKŁAD. Macierz zespolona

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2-i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

jest ortogonalna w drugim stopniu, ponieważ

$$AA^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathbb{R}}^* A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Macierz nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z}

$$B := \begin{bmatrix} 23 & 44 & -28 \\ -52 & 17 & -16 \\ -4 & 32 & 47 \end{bmatrix}$$

jest quasi-ortonormalna w trzecim stopniu, ponieważ

$$BB^* = B^*B = 3249 \cdot I_{[3]}.$$

Macierz zespolona

$$C := \begin{bmatrix} 0,5+0,1i & 0,7+0,5i \\ 0,7-0,5i & -0,5+0,1i \end{bmatrix}$$

jest ortonormalna w drugim stopniu, ponieważ $CC^* = C^*C = I_{[2]}$. \blacksquare

(V.71) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest wierszowo lub kolumnowo quasi-ortonormalna w n -tym stopniu, to jest quasi-ortonormalna w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (III.143). \blacksquare

(V.72) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}^{\mathbb{R}}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest wierszowo lub kolumnowo ortonormalna w n -tym stopniu, to jest ortonormalna w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (III.143). \blacksquare

Należy zauważyć, że macierz $A_{[n]}$ może być wierszowo lub kolumnowo ortogonalna w n -tym stopniu, a nie być ortogonalna w n -tym stopniu, jak to pokazuje następujący przykład.

(V.73) PRZYKŁAD. Macierz nad pierścieniem liczb całkowitych \mathbb{Z}

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

jest wierszowo ortogonalna w drugim stopniu, a nie jest ortogonalna w drugim stopniu, ponieważ

$$AA^* = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 52 \end{bmatrix}, \quad A^*A = \begin{bmatrix} 40 & 18 \\ 18 & 25 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

(V.74) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest pierścieniem z pierwiastkowaniem, dla każdej macierzy $A_{[n]}$ ortogonalnej w n -tym stopniu istnieją takie macierze diagonalne $D_{[n]}$ i $E_{[n]}$ quasi-nieosobliwe w n -tym stopniu, że macierze DA i AE są quasi-ortonormalne w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzeń (V.56) i (V.71). \blacksquare

(V.75) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$, gdzie \mathcal{F} jest ciałem z pierwiastkowaniem, dla każdej macierzy $A_{[n]}$ ortogonalnej w n -tym stopniu istnieją takie macierze diagonalne $D_{[n]}$ i $E_{[n]}$ nieosobliwe w n -tym stopniu, że macierze DA i AE są ortonormalne w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzeń (V.57) i (V.72). \blacksquare

(V.76) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą ortogonalną (quasi-ortonormalną, ortonormalną) w n -tym stopniu, to macierze \bar{A} , A^T i A^* są również ortogonalne (quasi-ortonormalne, ortonormalne) w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (V.52). \blacksquare

(V.77) TWIERDZENIE. Iloczyn macierzy ortonormalnych w n -tym stopniu jest macierzą ortonormalną w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (V.53). \blacksquare

(V.78) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} iloczyn macierzy quasi-ortonormalnych w n -tym stopniu jest macierzą quasi-ortonormalną w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (V.54). \blacksquare

(V.79) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest

$$A_{[n_1 + \dots + n_k]} = \text{diag}(A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_k]}^{(k)}).$$

to:

1° jeżeli macierze $A_{[n_j]}^{(j)}$ są ortonormalne w n_j -tym stopniu, $j=1, \dots, k$, to macierz A jest ortonormalna w $(n_1 + \dots + n_k)$ -tym stopniu,

2° jeżeli \mathcal{A} jest pierścieniem przemiennym z transpozycją i jeżeli macierze $A_{[n_j]}^{(j)}$ są ortogonalne w n_j -tym stopniu, $j=1, \dots, k$, to macierz A jest ortogonalna w $(n_1 + \dots + n_k)$ -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (V.55). \blacksquare

(V.80) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą ortonormalną n -tego stopnia nad pierścieniem częściowo uporządkowanym, to

$$(V.81) \quad |\det_n A|^2 = 1,$$

a jeżeli nad pierścieniem z wartością bezwzględną, to

$$(V.82) \quad |\det_n A| = 1.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.113) i wzoru (V.63) mamy $\det_n A \cdot \det_n A^* = 1$, skąd $\det_n A \cdot (\det_n A)^* = 1$ i na mocy (I.166) i (I.168) wzory (V.81) i (V.82). ■

(V.83) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} każdą macierz $A_{[m,n]}$ ($m < n$) wierszowo ortogonalną w m -tym stopniu można uzupełnić $(p-m)$ wierszami ($p \in \mathfrak{N}$, $m < p \leq n$) tworzącymi macierz $B_{[p-m,n]}$ wierszowo ortogonalną w $(p-m)$ -tym stopniu tak, aby macierz

$$(iv) \quad G_{[p,n]} := \begin{bmatrix} A_{[m,n]} \\ B_{[p-m,n]} \end{bmatrix}$$

była wierszowo ortogonalna w p -tym stopniu, a każdą macierz $A_{[m,n]}$ ($m > n$) kolumnowo ortogonalną w n -tym stopniu można uzupełnić $(q-n)$ kolumnami ($q \in \mathfrak{N}$, $n < q \leq m$) tworzącymi macierz $B_{[m,q-n]}$ kolumnowo ortogonalną w $(q-n)$ -tym stopniu tak, aby macierz

$$(v) \quad G_{[m,q]} := [A_{[m,n]} \quad B_{[m,q-n]}]$$

była kolumnowo ortogonalna w q -tym stopniu.

Dowód. Wiersze (kolumny) macierzy $A_{[m,n]}$ są półwektorami ortogonalnymi w n -wymiarowym (m -wymiarowym) module ciągowym z iloczynem skalarnym (IV.145). Wobec tego teza wynika z twierdzenia (IV.189). ■

(V.84) TWIERDZENIE. W dowolnym pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} , każdą macierz $A_{[m,n]}$ ($m < n$) wierszowo ortonormalną w m -tym stopniu można uzupełnić $(p-m)$ wierszami ($p \in \mathfrak{N}$, $m < p \leq n$) tworzącymi macierz $B_{[p-m,n]}$ wierszowo ortonormalną w $(p-m)$ -tym stopniu tak, aby macierz (iv) była wierszowo ortonormalna w p -tym stopniu, a każdą macierz $A_{[m,n]}$ ($m > n$) kolumnowo ortonormalną w n -tym stopniu można uzupełnić $(q-n)$ kolumnami ($q \in \mathfrak{N}$, $n < q \leq m$) tworzącymi macierz $B_{[m,q-n]}$ kolumnowo ortonormalną w $(q-n)$ -tym stopniu tak, aby macierz (v) była kolumnowo ortonormalna w q -tym stopniu.

Dowód. Wiersze (kolumny) macierzy $A_{[m,n]}$ są wektorami w n -wymiarowej (m -wymiarowej) przestrzeni ciągowej z iloczynem skalarnym (IV.145) i z normą naturalną. Wobec tego teza wynika z twierdzenia (IV.196). ■

(V.85) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[m,1]}$ i $B_{[n,1]}$ ($m \geq n$) są niezerowymi półwektorami kolumnowymi nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} , to istnieje taka macierz wierszowo quasi-ortonormalna w n -tym stopniu $U_{[n,m]}$ nad pierścieniem \mathcal{A} i taki element $\beta \in \text{re } \mathcal{A}$, $\beta > 0$, że

$$(V.86) \quad \beta B = UA.$$

Dowód. Niech $A^*A = [a]$ i $B^*B = [b]$. Na mocy (III.195) jest $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Wobec tego półwektory wierszowe bA^* i aB^* są wierszowo ortogonalne w pierwszym stopniu i na mocy twierdzenia (V.83) istnieją takie macierze wierszowo ortogonalne w $(n-1)$ -ym stopniu $C_{[n-1, m]}$ i $D_{[n-1, n]}$, że macierze

$$U_{1[n, m]} := \begin{bmatrix} (bA^*)_{[1, m]} \\ C_{[n-1, m]} \end{bmatrix}, \quad U_{2[n]} := \begin{bmatrix} (aB^*)_{[1, n]} \\ D_{[n-1, n]} \end{bmatrix}$$

są wierszowo ortogonalne w n -tym stopniu. Wobec tego na mocy twierdzenia (V.56) istnieją takie macierze diagonalne $P_{[n]} := \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ i $Q_{[n]} := \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ quasi-nieosobliwe w n -tym stopniu, że macierze PU_1 i QU_2 są wierszowo quasi-ortonormalne w n -tym stopniu. W takim razie macierze $V_1 := q_1 PU_1$ i $V_2 := p_1 QU_2$ są również wierszowo quasi-ortonormalne w n -tym stopniu i istnieją takie macierze F i G , że

$$V_{1[n, m]} = \begin{bmatrix} (p_1 q_1 bA^*)_{[1, m]} \\ F_{[n-1, m]} \end{bmatrix}, \quad V_{2[n]} = \begin{bmatrix} (p_1 q_1 aB^*)_{[1, n]} \\ G_{[n-1, n]} \end{bmatrix},$$

gdzie $p_1 q_1 b \neq 0$ i $p_1 q_1 a \neq 0$. Na mocy (V.45) mamy $F(p_1 q_1 bA^*)^* = p_1^* q_1^* b^* FA = O$, skąd $FA = O$, oraz $G(p_1 q_1 aB^*)^* = p_1^* q_1^* a^* GB = O$, skąd $GB = O$, wobec czego

$$(vi) \quad V_1 A = V_2 B = [p_1 q_1 ab].$$

Na mocy twierdzenia (V.71) macierz V_2 jest quasi-ortonormalna w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (V.60) istnieje taki element $\beta \in \mathcal{A}$, $\beta \neq 0$, że $V_2 V_2^* = V_2^* V_2 = \beta I_{[n]}$. Wobec tego na mocy (vi) jest $\beta B = V_2^* V_1 A$. Na mocy twierdzeń (V.76) i (V.54) macierz $V_2^* V_1$ jest wierszowo quasi-ortonormalna w n -tym stopniu. Kładąc $U := V_2^* V_1$ otrzymujemy (V.86). Mamy $\text{tr}(V_2 V_2^*) = \beta \text{tr} I_{[n]} = n\beta$, skąd na mocy (III.193) i (III.194) $n\beta \in \text{re } \mathcal{A}$ i $n\beta > 0$, a stąd $\beta \in \text{re } \mathcal{A}$ i $\beta > 0$. ■

(V.87) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[m, 1]}$ i $B_{[n, 1]}$ ($m \geq n$) są wektorami kolumnowymi nad ciałem \mathcal{F} z pierwiastkowaniem \mathcal{F} , mającymi tę samą normę naturalną (IV.161)

$$(V.88) \quad \|A\| = \|B\|,$$

to istnieje taka macierz wierszowo ortonormalna $U_{[n, m]}$ w n -ym stopniu nad ciałem \mathcal{F} , że

$$(V.89) \quad B = UA.$$

Dowód. Niech $\alpha := \|A\| = \|B\|$. Jeżeli $\alpha = 0$, to $A = B = O$ i dla dowolnej macierzy wierszowo ortonormalnej $U_{[n, m]}$ w n -tym stopniu, na przykład dla

$$U_{[n, m]} := I_{[n]}$$

jest spełniony warunek (V.89). Jeżeli $\alpha \neq 0$, to wektory wierszowe $\frac{1}{\alpha} A^*$ i $\frac{1}{\alpha} B^*$ są wierszowo ortonormalne w pierwszym stopniu. Na mocy twierdzenia (V.84) istnieją takie macierze wierszowo ortonormalne w $(n-1)$ -ym stopniu $C_{[n-1, m]}$ i $D_{[n-1, n]}$, że macierze

$$U_{1[n, m]} := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\alpha} A^*\right)_{[1, m]} \\ C_{[n-1, m]} \end{bmatrix}, \quad U_{2[n]} := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\alpha} B^*\right)_{[1, n]} \\ D_{[n-1, n]} \end{bmatrix}$$

są wierszowo ortonormalne w n -tym stopniu, a na mocy twierdzenia (V.72) macierz U_2 jest ortonormalna w n -tym stopniu. Na mocy (V.46) mamy $C\left(\frac{1}{\alpha}A^*\right)^* = \frac{1}{\alpha}CA = O$, skąd $CA = O$ oraz $D\left(\frac{1}{\alpha}B^*\right)^* = \frac{1}{\alpha}DB = O$, skąd $DB = O$. Wobec tego

$$U_1 A = U_2 B = [\alpha]$$

i na mocy (V.67) $B = U_2^* U_1 A$. Z twierdzeń (V.76) i (V.53) wynika, że macierz $U_2^* U_1$ jest wierszowo ortonormalna w n -tym stopniu. Kładąc $U := U_2^* U_1$, otrzymujemy (V.89). ■

§ V.3. Działania elementarne na macierzach i macierze elementarne

(V.90) DEFINICJA. *Działaniem elementarnym I rodzaju na wierszach (kolumnach) macierzy nazywamy zamianę jej dwu dowolnych wierszy (kolumn).* ■

(V.91) DEFINICJA. *Działaniem elementarnym II rodzaju na wierszach (kolumnach) macierzy nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy dodanie do dowolnego wiersza (dowolnej kolumny) innego wiersza (innej kolumny) pomnożonego (pomnożonej) przez dowolny element $a \in \mathcal{A}$.* ■

(V.92) DEFINICJA. *Działaniem elementarnym III rodzaju na wierszach (kolumnach) macierzy nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy pomnożenie jej dowolnego wiersza (dowolnej kolumny) przez dowolny element $\alpha \in \mathcal{A}$ nie będący dzielnikiem zera.* ■

(V.93) DEFINICJA. *Działaniem elementarnym na macierzy nazywamy każde działanie elementarne I, II lub III rodzaju na wierszach lub kolumnach tej macierzy.* ■

(V.94) DEFINICJA. *Macierzą elementarną I rodzaju n -tego stopnia nazywamy każdą macierz postaci*

$$(V.95) \quad E_{[n]}^{(1)}(k, l) := \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{kolumny} \\ k\text{-ta} & l\text{-ta} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & 1 & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow k\text{-ty} \\ \leftarrow l\text{-ty} \end{array} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow k\text{-ty} \\ \leftarrow l\text{-ty} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wiersze} \\ \text{dla } k \neq l, k, l \in \{1, \dots, n\}, \end{array}$$

$$(V.96) \quad E_{[n]}^{(1)}(k, k) := I_{[n]} \quad \text{dla} \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad \blacksquare$$