

skąd

$$(A^*A)(A_{[n]}^-(A_{[n]}^-)^*) = (A^*A)((A_{[n]}^-)^*A_{[n]}^-).$$

Mnożąc tę równość stronami lewostronnie przez $A_{[n]}^-(A_{[n]}^-)^*$, otrzymujemy

$$a^*aA_{[n]}^-(A_{[n]}^-)^* = a^*a(A_{[n]}^-)^*A_{[n]}^-,$$

a ponieważ $a^*a \neq 0$, więc $A_{[n]}^-(A_{[n]}^-)^* = (A_{[n]}^-)^*A_{[n]}^-$, co oznacza, że obrona dowolnie quasi-odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^-$ jest normalna.

Jeżeli $A_{[n]}$ z dowolnego pierścienia macierzowego jest macierzą odwracalną w n -tym stopniu, to

$$A_{[n]}^{-1}(A_{[n]}^{-1})^* = (A^*A)_{[n]}^{-1} = (AA^*)_{[n]}^{-1} = (A_{[n]}^{-1})^*A_{[n]}^{-1},$$

skąd wynika teza. ■

(V.215) TWIERDZENIE. Jeżeli macierze normalne A i B spełniają warunek

$$(V.216) \quad A^*B = BA^*,$$

to macierz AB jest też normalna.

Dowód wynika ze wzoru

$$\begin{aligned} (AB)(AB)^* &= ABB^*A^* = AB^*BA^* = (BA^*)^*(BA^*) = \\ &= (A^*B)^*(A^*B) = B^*AA^*B = B^*A^*AB = (AB)^*(AB). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(V.217) TWIERDZENIE. Iloczyn AB macierzy symetrycznych A i B jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(V.218) \quad AB = BA.$$

Dowód wynika ze wzoru

$$(AB)^T = AB \Leftrightarrow B^T A^T = AB \Leftrightarrow BA = AB. \quad \blacksquare$$

(V.219) TWIERDZENIE. Iloczyn AB macierzy hermitowskich A i B jest macierzą hermitowską wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(V.220) \quad AB = BA.$$

Dowód wynika ze wzoru

$$(AB)^* = AB \Leftrightarrow B^*A^* = AB \Leftrightarrow BA = AB. \quad \blacksquare$$

§ V.10. Macierze idempotentne i macierze rzutu

(V.221) DEFINICJA. Macierzą idempotentną nazywamy każdą macierz A spełniającą warunek

$$(V.222) \quad A^2 = A. \quad \blacksquare$$

(V.223) PRZYKŁAD. Macierz nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z}

$$A := \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ -10 & -14 \end{bmatrix}$$

jest idempotentna, ponieważ – co sprawdzamy rachunkowo – spełnia warunek (V.222). ■

(V.224) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą idempotentną, to dla każdego $n \in \mathfrak{N}$

$$(V.225) \quad A^n = A.$$

Dowód wynika z (V.222) przez indukcję zupełną. ■

(V.226) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą idempotentną, to \bar{A} , A^T i A^* są też macierzami idempotentnymi.

$$\text{Dowód. } AA=A \Leftrightarrow \bar{A}\bar{A}=\bar{A} \Leftrightarrow A^T A^T=A^T \Leftrightarrow A^* A^*=A^*. \quad \blacksquare$$

(V.227) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą idempotentną, to $I_{[n]} - A_{[n]}$ jest też macierzą idempotentną.

$$\text{Dowód. } (I_{[n]} - A)(I_{[n]} - A) = I_{[n]} - A - A + A^2 = I_{[n]} - A. \quad \blacksquare$$

(V.228) TWIERDZENIE. Jedyną macierzą idempotentną n -tego stopnia odwracalną w n -tym stopniu jest macierz $I_{[n]}$.

$$\text{Dowód. Mnożąc równość } AA=A \text{ stronami przez } A_{[n]}^{-1}, \text{ otrzymujemy } A=I_{[n]}. \quad \blacksquare$$

(V.229) TWIERDZENIE. Jedyną macierzą idempotentną n -tego stopnia quasi-odwracalną w n -tym stopniu nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest macierz $I_{[n]}$.

Dowód. Niech $A_{[n]}^-$ będzie dowolną quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy idempotentnej $A_{[n]}$ quasi-odwracalnej w n -tym stopniu i niech $AA_{[n]}^- = A_{[n]}^- A = aI_{[n]}$, gdzie $a \in \mathcal{A}$ nie jest dzielnikiem zera. Mnożąc równość $AA=A$ lewostronnie stronami przez $A_{[n]}^-$, otrzymujemy $aA = aI_{[n]}$, skąd $A=I_{[n]}$. ■

(V.230) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą idempotentną regularną, to

$$\det_n A = \begin{cases} 1, & \text{gdy } A=I_{[n]}, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.113) i wzoru (V.222) jest $(\det_n A)^2 = \det_n A$, skąd $\det_n A = 0 \vee \det_n A = 1$. Gdy $\det_n A = 1$, wtedy na mocy twierdzenia (III.140) macierz A jest odwracalna w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (V.228) $A=I_{[n]}$. Odwrotnie, gdy $A=I_{[n]}$, wtedy $\det_n A = 1$. Stąd wynika teza. ■

(V.231) TWIERDZENIE. Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} podobna w n -tym stopniu do macierzy $I_{[r]}$ ($r \leq n$) jest idempotentna.

Dowód. Z definicji istnieje taka macierz nieosobliwa w n -tym stopniu $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że $MA=I_{[r]}M$. Mamy stąd $MA^2=I_{[r]}MA=I_{[r]}I_{[r]}M=I_{[r]}M=MA$. Mnożąc równość $MA^2=MA$ stronami lewostronnie przez $M_{[n]}^{-1}$, otrzymujemy $A^2=A$. ■

(V.232) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $M[A]$ jest macierzą idempotentną r -tego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(V.233) \quad A_{[n]} \stackrel{P}{\sim} I_{[r]}, \quad \text{gdzie} \quad r \leq n.$$

Dowód. Gdy macierze A i $I_{[r]}$ są quasi-podobne w n -tym stopniu, wtedy istnieje taka macierz quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że $MA = I_{[r]}M$, i taka macierz $M_{[n]}^- \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ oraz taki element $\mu \in \mathcal{A}$, $\mu \neq 0$, że $MM_{[n]}^- = M_{[n]}^-M = \mu I_{[n]}$. Stąd $\mu A = M_{[n]}^- \times \times I_{[r]}M$ i $\mu^2 A^2 = M_{[n]}^- I_{[r]} M M_{[n]}^- I_{[r]} M = \mu M_{[n]}^- I_{[r]} M = \mu^2 A$, skąd $A^2 = A$, co oznacza, że A jest macierzą idempotentną. Na mocy twierdzenia (V.162) $r(A) = r(I_{[r]}) = r$.

Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest idempotentna rzędu r , to na mocy twierdzenia (V.180) istnieją takie macierze quasi-nieosobliwe w n -tym stopniu $M_{[n]}$, $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że $MA = I_{[r]}N$ i takie macierze $M_{[n]}^-$, $N_{[n]}^- \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ oraz takie elementy $\mu, \nu \in \mathcal{A}$, $\mu, \nu \neq 0$, że $MM_{[n]}^- = M_{[n]}^-M = \mu I_{[n]}$ i $NN_{[n]}^- = N_{[n]}^-N = \nu I_{[n]}$. Stąd $\mu A = M_{[n]}^- I_{[r]}N$ i na mocy równości $A^2 = A$

$$\mu^2 A^2 = M_{[n]}^- I_{[r]} N M_{[n]}^- I_{[r]} N = \mu M_{[n]}^- I_{[r]} N.$$

Mnożąc ostatnią równość stronami lewostronnie przez M , a prawostronnie przez $N_{[n]}^-$, mamy

$$\mu \nu I_{[r]} N M_{[n]}^- I_{[r]} = \mu^2 \nu I_{[r]},$$

skąd

$$I_{[r]} N M_{[n]}^- I_{[r]} = \mu I_{[r]}.$$

Równość taka jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $N M_{[n]}^-$ jest postaci

$$N M_{[n]}^- = \begin{bmatrix} \mu I_{[r]} & P_{[r, n-r]} \\ Q_{[n-r, r]} & R_{[n-r]} \end{bmatrix},$$

skąd po pomnożeniu stronami prawostronnie przez M

$$\mu N = \begin{bmatrix} \mu I_{[r]} & P_{[r, n-r]} \\ Q_{[n-r, r]} & R_{[n-r]} \end{bmatrix} \cdot M.$$

Otrzymujemy wobec tego

$$\mu^2 A = M_{[n]}^- I_{[r]} \mu N = M_{[n]}^- [\mu I_{[r]} \quad P_{[r, n-r]}] M.$$

Niech

$$D_{[n]} := \begin{bmatrix} \mu I_{[r]} & P_{[r, n-r]} \\ I_{[n-r]} & \end{bmatrix}, \quad D_{[n]}^- := \begin{bmatrix} I_{[r]} & -P_{[r, n-r]} \\ & \mu I_{[n-r]} \end{bmatrix}.$$

Macierz D jest quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu. $DD_{[n]}^- = D_{[n]}^-D = \mu I_{[n]}$ i

$$D_{[n]}^- I_{[r]} D = [\mu I_{[r]} \quad P_{[r, n-r]}],$$

wobec czego

$$\mu^2 A = M_{[n]}^- D_{[n]}^- I_{[r]} D M.$$

Mnożąc tę równość stronami lewostronnie przez M , a następnie przez D , otrzymujemy $\mu^2 DMA = \mu^2 I_{[r]} DM$, skąd

$$(DM) A = I_{[r]} (DM).$$

Ponieważ na mocy twierdzenia (III.154) macierz DM jest quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu, ostatnia równość oznacza, że $A \sim_{[n]} I_{[r]}$.

(V.234) TWIERDZENIE. Macierz $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest macierzą idempotentną rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie macierze $F_{[n, r]}, G_{[r, n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ oraz taki element $\alpha \in \mathcal{A}, \alpha \neq 0$, że

$$(V.235) \quad \alpha A = FG,$$

$$(V.236) \quad GF = \alpha I_{[r]}.$$

Dowód. Jeżeli istnieją takie macierze F i G oraz taki element $\alpha \neq 0$, że zachodzą równości (V.235) i (V.236), to

$$\alpha^2 A^2 = FGFG = \alpha FG = \alpha^2 A,$$

skąd $A^2 = A$, co oznacza, że A jest macierzą idempotentną. Na mocy (V.236) i twierdzenia (V.21) macierze F i G są rzędu r , a na mocy (V.235) i (V.32) $r(A) = r$.

Jeżeli — odwrotnie — $A_{[n]}$ jest macierzą idempotentną rzędu r , to na mocy twierdzenia (V.196) istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}, \alpha \neq 0$, taka macierz $F_{[n, r]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ kolumnowo pełnego rzędu r i taka macierz $G_{[r, n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ wierszowo pełnego rzędu r , że zachodzi równość (V.235). Wobec tego z równości $A^2 = A$ wynika, że

$$(i) \quad \alpha^2 A^2 = FGFG = \alpha FG,$$

a stąd po pomnożeniu stronami lewostronnie przez G , a prawostronnie przez F

$$(ii) \quad (GF)^3 = \alpha (GF)^2.$$

Na mocy (V.235) $r(FG) = r$, a na mocy twierdzenia (V.21) i równości (i) $r(\alpha FG) = r(FG) = r \leq r(GF)$, skąd na mocy (V.5) $r(GF) = r$. Macierz GF jest zatem pełnego rzędu r i wobec tego jest quasi-nieosobliwa w r -tym stopniu. Na mocy twierdzenia (III.140) istnieje taka macierz $M_{[r]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i taki element $\mu \in \mathcal{A}, \mu \neq 0$, że $(GF)M = M(GF) = \mu I_{[r]}$, wobec czego mnożąc (ii) stronami lewostronnie przez M^2 , otrzymujemy $\mu^2 GF = \alpha \mu^2 I_{[r]}$, skąd wynika równość (V.236). ■

(V.237) TWIERDZENIE. Macierz $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest dowolnym ciałem lub pierścieniem z podzielnością z funkcją porządkującą o wartościach całkowitych, jest macierzą idempotentną rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie macierze $F_{[n, r]}, G_{[r, n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że

$$(V.238) \quad A = FG,$$

$$(V.239) \quad GF = I_{[r]}.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego, jeżeli zamiast na twierdzeniu (V.196) oprzeć się na twierdzeniu (V.198). ■

(V.240) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest macierzą idempotentną, to $\text{tr } A = r(A)$.

Dowód. Na mocy twierdzeń (V.232) i (V.165) $\text{tr } A = \text{tr } I_{[r]} = r = r(A)$. ■

(V.241) DEFINICJA. *Macierzą rzutującą nazywamy każdą macierz idempotentną hermitowską, czyli każdą macierz P spełniającą warunek*

$$(V.242) \quad P^2 = P = P^*. \quad \blacksquare$$

(V.243) PRZYKŁAD. Macierz zespolona

$$P := \begin{bmatrix} 0,26 & 0,40 + 0,18i \\ 0,40 - 0,18i & 0,74 \end{bmatrix}$$

jest rzutująca, ponieważ — co sprawdzamy rachunkiem — spełnia warunek (V.242).

Macierz A z przykładu (V.223) jest idempotentna, ale nie jest rzutująca, ponieważ nie spełnia warunku $A = A^*$. ■

(V.244) TWIERDZENIE. *Macierz idempotentna $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest rzutująca.*

Dowód. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą idempotentną, to na mocy twierdzenia (V.234) istnieją takie macierze $F_{[n,r]}, G_{[r,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie $r = r(A)$, oraz taki element $\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq 0$, że zachodzą równości (V.235) i (V.236).

Jeżeli A jest macierzą normalną, tzn. $AA^* = A^*A$, otrzymujemy

$$\alpha^* \alpha AA^* = \alpha^* \alpha A^* A = FGG^*F^* = G^*F^*FG.$$

Mnożąc ostatnią równość stronami prawostronnie przez G^* i uwzględniając, że na mocy wzoru (V.236) jest $F^*G^* = \alpha^*I_{[r]}$, otrzymujemy

$$(iii) \quad \alpha^*FGG^* = G^*F^*FGG^*.$$

Na mocy twierdzenia (V.23) jest $r(GG^*) = r(G)$, a na mocy (V.235) i (V.5) $r(G) = r$, wobec czego macierz GG^* jest pełnego rzędu r i na mocy twierdzenia (III.140) istnieje taka macierz $Q \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i taki element $\rho \in \mathcal{A}$, $\rho \neq 0$, że $Q(GG^*) = (GG^*)Q = \rho I_{[r]}$. Mnożąc (iii) stronami prawostronnie przez Q , otrzymujemy $\rho \alpha^*F = \rho G^*F^*F$, czyli $\alpha^*F = G^*F^*F$, skąd na mocy (V.235)

$$\alpha^* \alpha A = \alpha^*FG = G^*F^*FG,$$

$$\alpha^* \alpha A^* = (G^*F^*FG)^* = G^*F^*FG = \alpha^* \alpha A,$$

a stąd $A^* = A$. Macierz A jako idempotentna i hermitowska jest wtedy rzutująca.

Jeżeli — odwrotnie — macierz A jest rzutująca, to jako hermitowska jest normalna. ■

(V.245) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} jest macierzą rzutującą rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz wierszowo ortogonalna w n -tym stopniu $U_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że*

$$(V.246) \quad UA = I_{[r]}U.$$

Dowód. Niech $A_{[n]}$ będzie macierzą rzutującą rzędu r . Na mocy twierdzenia (V.232) istnieje taka macierz quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że $MA = I_{[r]}M$.

Niech

$$M = \begin{bmatrix} M_{[r, n]}^{(1)} \\ M_{[n-r, n]}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$(iv) \quad M^{(1)}A = M^{(1)}, \quad M^{(2)}A = O.$$

Na mocy twierdzenia (V.171) istnieją takie macierze quasi-nieosobliwe $T_{[r]}^{(1)}, T_{[n-r]}^{(2)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ pierwsza w r -tym, a druga w $(n-r)$ -tym stopniu i takie macierze wierszowo ortogonalne $U_{[r, n]}^{(1)}, U_{[n-r, n]}^{(2)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, pierwsza w r -tym, a druga w $(n-r)$ -tym stopniu, że

$$U^{(1)} = T^{(1)}M^{(1)}, \quad U^{(2)} = T^{(2)}M^{(2)}.$$

Stąd

$$(v) \quad U^{(1)}A = U^{(1)}, \quad U^{(2)}A = O.$$

Dla

$$U_{[n]} := \begin{bmatrix} U_{[r, n]}^{(1)} \\ U_{[n-r, n]}^{(2)} \end{bmatrix}$$

mamy

$$UU^* = \begin{bmatrix} (U^{(1)}U^{(1)*})_{[r]} & (U^{(1)}U^{(2)*})_{[r, n-r]} \\ (U^{(2)}U^{(1)*})_{[n-r, r]} & (U^{(2)}U^{(2)*})_{[n-r]} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierze $U^{(1)}$ i $U^{(2)}$ są wierszowo ortogonalne pierwsza w r -tym, a druga w $(n-r)$ -tym stopniu, więc istnieją takie macierze diagonalne $D_{[r]}^{(1)}, D_{[n-r]}^{(2)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ quasi-nieosobliwe pierwsza w r -tym, a druga w $(n-r)$ -tym stopniu, że

$$U^{(1)}U^{(1)*} = D^{(1)}, \quad U^{(2)}U^{(2)*} = D^{(2)}.$$

Następnie na mocy (iv), uwzględniając, że $A^* = A$, mamy

$$M^{(1)}M^{(2)*} = M^{(1)}A^*M^{(2)*} = M^{(1)}(M^{(2)}A)^* = O,$$

$$U^{(1)}U^{(2)*} = T^{(1)}M^{(1)}M^{(2)*}T^{(2)*} = O,$$

$$U^{(2)}U^{(1)*} = (U^{(1)}U^{(2)*})^* = O.$$

Wobec tego istnieje taka macierz diagonalna $D_{[n]} := \text{diag}(D_{[r]}^{(1)}, D_{[n-r]}^{(2)})$, że

$$UU^* = \begin{bmatrix} D_{[r]}^{(1)} & \\ & D_{[n-r]}^{(2)} \end{bmatrix} = D,$$

co oznacza, że macierz U jest wierszowo ortogonalna w n -tym stopniu, ponieważ na mocy twierdzenia (III.116) macierz diagonalna $D_{[n]}$ jest quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu. Na mocy (v) mamy

$$UA = U^{(1)} = I_{[r]} U,$$

czyli wzór (V.246).

Niech teraz — odwrotnie — istnieje taka macierz wierszowo ortogonalna w n -tym stopniu $U_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że jest (V.246). Na mocy twierdzenia (V.232) macierz A jest idempo-

tentna rzędu r . Istnieje taka macierz diagonalna $D_{[n]}$, że $UU^* = D = (UU^*)^* = D^*$, skąd

$$UAU^* = I_{[r]} UU^* = I_{[r]} D,$$

$$UA^*U^* = (UAU^*)^* = D^* I_{[r]} = D I_{[r]} = I_{[r]} D,$$

wobec czego $UA^*U^* = UAU^*$. Ponieważ istnieje taka quasi-odwrotność n -tego stopnia $U_{[n]}^- \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i taki element $\mu \in \mathcal{A}$, $\mu \neq 0$, że $UU_{[n]}^- = U_{[n]}^- U = \mu I_{[n]}$ oraz $U_{[n]}^* U_{[n]}^{-*} = U_{[n]}^{-*} \times \times U_{[n]}^* = \mu^* I_{[n]}$, więc po pomnożeniu lewostronnym przez $U_{[n]}^-$, a prawostronnym przez $U_{[n]}^{-*}$, otrzymujemy $\mu^* \mu A^* = \mu^* \mu A$, a stąd $A^* = A$. Zatem A jest wtedy macierzą rzutującą r -tego rzędu. ■

(V.247) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} jest macierzą rzutującą rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz kolumnowo ortogonalna w n -tym stopniu $V_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że*

$$(V.248) \quad AV = VI_{[r]}.$$

Dowód. Jeżeli A jest macierzą rzutującą r -tego rzędu, to na mocy (V.246) jest $A^*U^* = AU^* = U^*I_{[r]}$ i kładąc $V := U^*$ otrzymujemy (V.248), ponieważ $V^*V = UU^* = D$, gdzie $D_{[n]}$ jest macierzą diagonalną quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu. Jeżeli — odwrotnie — zachodzi równość (V.248), to $V^*AV = V^*VI_{[r]} = DI_{[r]} = I_{[r]}D = I_{[r]}V^*V$ i mnożąc tę równość stronami prawostronnie przez quasi-odwrotność n -tego stopnia $V_{[n]}^-$ taką, że $VV_{[n]}^- = vI_{[n]}$, $v \neq 0$, otrzymujemy $vV^*A = vI_{[r]}V^*$, czyli $V^*A = I_{[r]}V^*$ i na mocy twierdzenia (V.245) macierz A jest rzutująca r -tego rzędu. ■

(V.249) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} jest macierzą rzutującą rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(V.250) \quad A \overset{op}{\sim}_{[n]} I_{[r]}.$$

Dowód. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą rzutującą rzędu r , to na mocy twierdzenia (V.245) istnieje taka macierz wierszowo ortogonalna w n -tym stopniu $U_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że ma miejsce równość (V.246), a na mocy twierdzeń (V.56) i (V.71) istnieje taka macierz diagonalna $D_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu, że $V := DU$ jest quasi-ortonormalna w n -tym stopniu i

$$VA = DI_{[r]}U = I_{[r]}DU = I_{[r]}V,$$

czyli zachodzi relacja (V.250). Jeżeli — odwrotnie — jest (V.250), to na mocy twierdzenia (V.245) A jest macierzą rzutującą r -tego rzędu. ■

(V.251) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} jest macierzą rzutującą rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(V.252) \quad A \overset{op}{\approx}_{[n]} I_{[r]}.$$

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego, ponieważ w pierścieniu macierzowym nad dowolnym ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} relacje $\overset{op}{\sim}_{[n]}$ i $\overset{op}{\approx}_{[n]}$ pokrywają się. ■

(V.253) TWIERDZENIE. Macierz $A_{[n]}$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} jest macierzą rzutującą rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora kolumnowego $X \in \mathcal{S}$, gdzie \mathcal{S} jest n -wymiarową przestrzenią ciągową nad ciałem \mathcal{F} , AX jest rzutem ortogonalnym tego wektora na pewną r -wymiarową podprzestrzeń liniową \mathcal{T} przestrzeni \mathcal{S} . Jeżeli

$$(vi) \quad U := [U_1 \dots U_r],$$

gdzie wektory kolumnowe U_1, \dots, U_r traktujemy jako wektory przestrzeni liniowej \mathcal{S} , a (U_1, \dots, U_r) jest dowolną bazą ortonormalną podprzestrzeni \mathcal{T} , to $A = UU^*$.

Dowód. Na mocy twierdzeń (IV.154) i (IV.194) w podprzestrzeni \mathcal{T} istnieje baza ortonormalna określona macierzą (vi).

Jeżeli $R \in \mathcal{T}$ jest rzutem ortogonalnym wektora X na podprzestrzeń \mathcal{T} , to na mocy twierdzenia (IV.241)

$$R = \sum_{j=1}^r \langle U_j, X \rangle U_j,$$

gdzie na mocy (IV.140)

$$\langle U_j, X \rangle = \text{tr}(U_j^* X).$$

Biorąc pod uwagę, że macierz $U_j^* X$ jest pierwszego stopnia, mamy

$$\langle U_j, X \rangle U_j = U_j \langle U_j, X \rangle = U_j U_j^* X,$$

skąd $R = \sum_{j=1}^r U_j U_j^* X = UU^* X$. Niech $A := UU^*$. Wtedy $R = AX$ jest rzutem ortogonalnym wektora $X \in \mathcal{S}$ na podprzestrzeń liniową \mathcal{T} . Macierz A jest rzutująca rzędu r , ponieważ na mocy twierdzenia (V.23) $r(A) = r(U) = r$ i

$$A^2 = UU^* UU^* = UI_{[r]} U^* = UU^* = A,$$

$$A^* = (UU^*)^* = UU^* = A.$$

Jeżeli — odwrotnie — $A_{[n]}$ jest macierzą rzutującą rzędu r , to na mocy twierdzenia (V.251) istnieje taka macierz ortonormalna w n -tym stopniu $V_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}]$, że $AV = VI_{[r]}$, czyli $A = VI_{[r]} V^* = (VI_{[r]})(VI_{[r]})^*$. Macierz $U_{[n,r]} := VI_{[r]}$ jest kolumnowo ortonormalna w r -tym stopniu. Niech

$$U_{[n,r]} = [U_1 \dots U_r],$$

gdzie U_1, \dots, U_r są wektorami kolumnowymi. Jeżeli \mathcal{T} jest podprzestrzenią liniową r -wymiarową rozpiętą na wektorach U_1, \dots, U_r , tworzących jej bazę ortonormalną, to dla dowolnego wektora kolumnowego $X \in \mathcal{S}$ jest

$$AX = UU^* X = \sum_{j=1}^r U_j U_j^* X = \sum_{j=1}^r \langle U_j, X \rangle U_j$$

i na mocy twierdzenia (IV.241) AX jest rzutem ortogonalnym wektora X na podprzestrzeń \mathcal{T} . ■

Twierdzenie (V.253) tłumaczy nazwę macierzy rzutujących.

(V.254) PRZYKŁAD. Niech \mathcal{S} będzie dwuwymiarową przestrzenią ciągową utworzoną przez wszystkie zespolone wektory kolumnowe o 2 wierszach. Niech \mathcal{T} będzie podprzes-

trzenią w \mathcal{S} utworzoną przez wszystkie wektory kolumnowe postaci

$$\alpha \begin{bmatrix} 0,5-0,1i \\ 0,7-0,5i \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Sprawdzamy, że wektor kolumnowy

$$U_1 := \begin{bmatrix} 0,5-0,1i \\ 0,7-0,5i \end{bmatrix}$$

tworzy bazę ortonormalną podprzestrzeni \mathcal{T} . Sprawdzamy, że dla macierzy rzutującej P z przykładu (V.243) jest $P = U_1 U_1^*$, wobec czego macierz P jest w \mathcal{S} macierzą rzutującą nad podprzestrzeń \mathcal{T} . Znajdźmy rzut ortogonalny R wektora

$$X := \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}$$

na podprzestrzeń \mathcal{T} . Na mocy twierdzenia (V.253) $R = PX$, czyli

$$R = \begin{bmatrix} 0,26 & 0,40+0,18i \\ 0,40-0,18i & 0,74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,80+0,62i \\ 1,66+0,40i \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy, że

$$R = (1,3+1,5i) \begin{bmatrix} 0,5-0,1i \\ 0,7-0,5i \end{bmatrix} = (1,3+1,5i) U_1,$$

co oznacza, że $R \in \mathcal{T}$, oraz

$$\langle R-X, U_1 \rangle = \text{tr} \begin{bmatrix} 0,80-0,38i \\ -0,34+0,40i \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0,5-0,1i \\ 0,7-0,5i \end{bmatrix} = \text{tr}[O] = 0,$$

co oznacza, że $R-X \perp \mathcal{T}$ zgodnie z definicją (IV.239). ■

(V.255) TWIERDZENIE. Jeżeli w n -wymiarowej przestrzeni ciągowej \mathcal{S} nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{T} macierz $A_{[n]}$ jest macierzą rzutującą na podprzestrzeń \mathcal{T} przestrzeni \mathcal{S} , to $I_{[n]} - A$ jest macierzą rzutującą na dopełnienie ortogonalne \mathcal{T}^\perp .

Dowód. Niech (U_1, \dots, U_n) będzie bazą ortonormalną przestrzeni \mathcal{S} , a (U_1, \dots, U_r) bazą ortonormalną podprzestrzeni \mathcal{T} i niech – zgodnie z twierdzeniem (V.253) – $A :=$

$:= [U_1 \dots U_r][U_1 \dots U_r]^* = \sum_{j=1}^r U_j U_j^*$ będzie macierzą rzutującą na podprzestrzeń \mathcal{T} .

Na mocy twierdzenia (IV.235) (U_{r+1}, \dots, U_n) jest bazą w dopełnieniu ortogonalnym \mathcal{T}^\perp .

Na mocy twierdzenia (V.72) macierz $U := [U_1 \dots U_n]$ jest ortonormalna w n -tym stopniu i wobec tego

$$UU^* = \sum_{j=1}^n U_j U_j^* = I_{[n]}.$$

Stąd

$$I_{[n]} - A = \sum_{j=1}^n U_j U_j^* - \sum_{j=1}^r U_j U_j^* = \sum_{j=r+1}^n U_j U_j^* = [U_{r+1} \dots U_n][U_{r+1} \dots U_n]^*$$

jest macierzą rzutującą na \mathcal{T}^\perp . ■

(V.256) TWIERDZENIE. Jeżeli w n -wymiarowej przestrzeni ciągowej \mathcal{S} nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} wektor R jest rzutem ortogonalnym wektora X na podprzestrzeń \mathcal{T} przestrzeni \mathcal{S} , to wektor $X - R$ jest rzutem ortogonalnym wektora X na podprzestrzeń \mathcal{T}^\perp .

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego, ponieważ $X - R = (I_{[n]} - A)X$. ■

(V.257) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ $F_{[n, r]}$ jest taką macierzą, że F^*F jest macierzą odwracalną w r -tym stopniu, to macierz

$$(V.258) \quad A := F(F^*F)_{[r]}^{-1}F^*$$

jest macierzą rzutującą.

Dowód. Mamy

$$A^2 = F(F^*F)_{[r]}^{-1}F^*F(F^*F)_{[r]}^{-1}F^* = F(F^*F)_{[r]}^{-1}F^* = A,$$

$$A^* = (F(F^*F)_{[r]}^{-1}F^*)^* = F(F^*F)_{[r]}^{-1}F^* = A,$$

wobec czego macierz (V.258) jest rzutująca. ■

(V.259) TWIERDZENIE. Jeżeli $F_{[n, r]}$ jest taką macierzą nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} , że F^*F jest macierzą odwracalną w r -tym stopniu, to macierz (V.258) jest macierzą rzutującą r -tego rzędu.

Dowód. Na mocy twierdzenia poprzedniego macierz (V.258) jest rzutująca. Macierz F^*F na mocy twierdzeń (III.140) i (V.17) jest rzędu r , wobec czego na mocy twierdzenia (V.21) $r(F) \geq r$ i na mocy (V.5) $r(F) = r$. W takim razie na mocy twierdzenia (V.21) i wzoru (V.258) $r(A) \leq r(F) = r$. Ale ze wzoru (V.258) wynika, że $AF = F$, wobec czego $r(A) \geq r(F) = r$ i w takim razie macierz rzutująca (V.258) jest rzędu r . ■

(V.260) TWIERDZENIE. Macierz $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest macierzą rzutującą rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq 0$, i taka macierz $F_{[n, r]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ kolumnowo pełnego rzędu r , że macierz F^*F jest quasi-nieosobliwa w r -tym stopniu i istnieje taka jej quasi-odwrotność r -tego stopnia $X_{[r]}$, że

$$(V.261) \quad (F^*F)X = X(F^*F) = \alpha^* \alpha I_{[r]},$$

$$(V.262) \quad \alpha^* \alpha A = F X F^*.$$

Dowód. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą rzutującą rzędu r , to na mocy twierdzenia (V.234) istnieją takie macierze $F_{[n, r]}$, $G_{[r, n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ oraz taki element $\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq 0$, że zachodzą równości (V.235) i (V.236). Na mocy (V.236), (V.5) i twierdzenia (V.21) macierz F jest kolumnowo pełnego rzędu r . Z równości $A^* = A$ na mocy (V.235) wynika, że

$$(vii) \quad \alpha^* F G = \alpha G^* F^*.$$

Mnożąc tę równość stronami z lewej strony przez G , a z prawej przez F , na mocy wzoru (V.236) otrzymujemy $\alpha^* \alpha^2 I_{[r]} = \alpha G G^* F^* F$, skąd

$$(viii) \quad (G G^*)(F^* F) = \alpha^* \alpha I_{[r]}.$$

Na mocy twierdzenia (III.143) macierz $X := G G^*$ jest quasi-odwrotnością r -tego stopnia

macierzy F^*F spełniającą warunek (V.261). Mnożąc (vii) stronami z lewej strony przez FG , otrzymujemy na mocy (V.235) i równości $A^2 = A$

$$\alpha^* \alpha^2 A = \alpha F G G^* F^*,$$

skąd równość (V.262).

Jeżeli – odwrotnie – istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq 0$, taka macierz $F_{[n, r]}$ kolumnowo pełnego rzędu r i taka quasi-odwrotność $X_{[r]}$ macierzy F^*F , że są prawdziwe wzory (V.261) i (V.262), to

$$(\alpha^* \alpha)^2 A^2 = F X F^* F X F^* = \alpha^* \alpha F X F^* = (\alpha^* \alpha)^2 A,$$

skąd $A^2 = A$ oraz

$$(ix) \quad \alpha^* \alpha A^* = (\alpha^* \alpha A)^* = (F X F^*)^* = F X^* F^*.$$

Ale na mocy (V.261)

$$(F^* F) X^* = X^* (F^* F) = (\alpha^* \alpha I_{[r]})^* = \alpha^* \alpha I_{[r]},$$

skąd

$$(F^* F) (X - X^*) = O,$$

a po pomnożeniu z lewej strony przez X

$$\alpha^* \alpha (X - X^*) = O,$$

skąd $X^* = X$ i na mocy (ix)

$$\alpha^* \alpha A^* = F X F^* = \alpha^* \alpha A,$$

a stąd $A^* = A$. Wobec powyższego A jest wtedy macierzą rzutującą. Z równości (V.261) i (V.262) na mocy twierdzenia (V.21) wynika, że $r(F) \geq r(I_{[r]}) = r$ i $r(A) \leq r(F)$, a ponieważ na mocy (V.5) $r(F) \leq r$, więc $r(F) = r$ i $r(A) \leq r$. Ale mnożąc równość (V.262) prawostronnie przez F , otrzymujemy $\alpha^* \alpha A F = \alpha^* \alpha F$, czyli $A F = F$, skąd na mocy twierdzenia (V.21) $r = r(F) \leq r(A)$ i wobec powyższego $r(A) = r$. Zatem A jest wtedy macierzą rzutującą rzędu r . ■

(V.263) TWIERDZENIE. Macierz $A_{[n, r]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest dowolnym ciałem lub pierścieniem z podzielnością z funkcją porządkującą o wartościach całkowitych, jest macierzą rzutującą rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz $F_{[n, r]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że F^*F jest macierzą odwracalną w r -tym stopniu i jest

$$(V.264) \quad A = F (F^* F)^{-1}_{[r]} F^*.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego, ponieważ na mocy twierdzenia (V.237) można przyjąć $\alpha = 1$. ■

§ V.11. Macierze nilpotentne

(V.265) DEFINICJA. Macierzą k -nilpotentną ($k \in \mathfrak{N}$) albo po prostu macierzą nilpotentną nazywamy każdą taką macierz A , że

$$(V.266) \quad A^k = O \wedge (k = 1 \vee (k \geq 2 \wedge A^{k-1} \neq O)). \quad \blacksquare$$

(V.267) PRZYKŁAD. Macierz nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z}

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

jest dwunilpotentna, ponieważ $A^2 = O \wedge A^1 = A \neq O$. ■

(V.268) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą k -nilpotentną, to dla każdego $n \geq k$ ($n \in \mathfrak{N}$) jest

(V.269) $A^n = O$.

Dowód wynika wprost z definicji. ■

(V.270) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą k -nilpotentną, to \bar{A} , A^T i A^* są również macierzami k -nilpotentnymi.

Dowód wynika z faktu, że

$$A^k = O \Leftrightarrow (\bar{A})^k = O \Leftrightarrow (A^T)^k = O \Leftrightarrow (A^*)^k = O. \quad \blacksquare$$

(V.271) TWIERDZENIE. Jeżeli w regularnym pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ macierz A jest k -nilpotentna, to dla każdego $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, macierz aA jest też k -nilpotentna.

Dowód wynika z faktu, że

$$A^k = O \Leftrightarrow (aA)^k = a^k A^k = O. \quad \blacksquare$$

(V.272) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą k -nilpotentną nad pierścieniem przemienym z transpozycją, to jest macierzą quasi-osobliwą w n -tym stopniu.

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.113) i wzoru (V.266) $(\det_n A)^k = 0$, skąd na mocy twierdzenia (I.111) $\det_n A$ jest dzielnikiem zera. ■

(V.273) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą k -nilpotentną nad pierścieniem przemienym z transpozycją \mathcal{A} , to każda macierz quasi-podobna do niej w n -tym stopniu jest też k -nilpotentna.

Dowód. Niech $B_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ będzie macierzą quasi-podobną w n -tym stopniu do macierzy A . Istnieje zatem taka macierz $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu, że $MA = BM$ i taka jej quasi-odwrotność n -tego stopnia $M_{[n]}^-$, że $MM_{[n]}^- = M_{[n]}^-M = \mu I_{[n]}$, gdzie $\mu \in \mathcal{A}$ nie jest dzielnikiem zera. Mamy stąd $\mu B = MAM_{[n]}^-$, $\mu A = M_{[n]}^-BM$ oraz

$$\mu^k B^k = (\mu B)^k = MAM_{[n]}^- MAM_{[n]}^- \dots MAM_{[n]}^- = \mu^{k-1} MA^k M_{[n]}^-,$$

$$\mu^k A^k = (\mu A)^k = M_{[n]}^- BMM_{[n]}^- BM \dots M_{[n]}^- BM = \mu^{k-1} M_{[n]}^- B^k M,$$

skąd $B^k = O \Leftrightarrow A^k = O$. ■

(V.274) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą k -nilpotentną, to dla dowolnych macierzy $B_{[n, m]}$ i $C_{[m, n]}$ macierz

$$D_{[n, m+n]} := [A_{[n]} \ B_{[n, m]}]$$

jest k -nilpotentna, gdy $A^{k-1}B = O$, a $(k+1)$ -nilpotentna, gdy $A^{k-1}B \neq O$, natomiast macierz

$$E_{[m+n, n]} := \begin{bmatrix} A_{[n]} \\ C_{[m, n]} \end{bmatrix}$$

jest k -nilpotentna, gdy $CA^{k-1} = O$, a $(k+1)$ -nilpotentna, gdy $CA^{k-1} \neq O$.

Dowód. Dowodzimy indukcyjnie, że dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$

$$D^l = [A_{[n]}^l \quad (A^{l-1}B)_{[n, m]}], \quad E^l = \begin{bmatrix} A_{[n]}^l \\ (CA^{l-1})_{[m, n]} \end{bmatrix},$$

skąd wynika teza. ■

(V.275) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ rzędu r z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest k -nilpotentna ($k \geq 2$), to

$$(V.276) \quad r \leq \frac{k-1}{k} n.$$

Dowód. Na mocy nierówności Sylwestera (V.207) mamy dla $B = A^l$

$$r(A^{l+1}) \geq r(A^l) + r(A) - n,$$

skąd z łatwością dowodzimy przez indukcję, że

$$r(A^k) = 0 \geq k \cdot r(A) - (k-1)n,$$

czyli zachodzi nierówność (V.276). ■

(V.277) TWIERDZENIE. Macierz $A_{[n]}$ rzędu r z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest k -nilpotentna ($k \geq 2$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie macierze $F_{[n, r]}, G_{[r, n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ pierwsza kolumnowo, a druga wierszowo pełnego rzędu r i taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że $aA = FG$, a macierz GF jest $(k-1)$ -nilpotentna.

Dowód. Załóżmy najpierw, że macierz A jest k -nilpotentna ($k \geq 2$). Na mocy twierdzenia (V.196) istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, i takie macierze $F_{[n, r]}, G_{[r, n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ pierwsza kolumnowo, a druga wierszowo pełnego rzędu r , że $aA = FG$ i wobec tego $a^k A^k = (aA)^k = (FG)^k = O$. Na mocy twierdzenia (V.202) istnieją takie macierze $M_{[n]}, N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i takie $\mu, v \in \mathcal{A}$, $\mu, v \neq 0$, że $MF = \mu I_{[r]}$ i $GN = v I_{[r]}$. Mnożąc równość $(FG)^k = O$ lewostronnie przez M , a prawostronnie przez N , otrzymujemy $\mu v (GF)^{k-1} = O$, czyli $(GF)^{k-1} = O$. Gdyby $(GF)^{k-2} = O$, wtedy mnożąc tę równość lewostronnie przez F , a prawostronnie przez G , otrzymalibyśmy $(FG)^{k-1} = O$, skąd $(aA)^{k-1} = a^{k-1} A^{k-1} = O$, czyli $A^{k-1} = O$, co przeczyłoby założeniu, że A jest macierzą k -nilpotentną. Zatem $(GF)^{k-2} \neq O$ i GF jest macierzą $(k-1)$ -nilpotentną.

Jeżeli — odwrotnie — $aA = FG$, a macierz GF jest $(k-1)$ -nilpotentna, to $(GF)^{k-1} = O$, skąd $(FG)^k = (aA)^k = a^k A^k = O$ i $A^k = O$. Gdyby $A^{k-1} \neq O$, wtedy byłoby $M(FG)^{k-1}N = MF \times (GF)^{k-2}GN = \mu v (GF)^{k-2} = O$, skąd $(GF)^{k-2} = O$, co przeczyłoby założeniu, że macierz GF jest $(k-1)$ -nilpotentną. Zatem $A^{k-1} \neq O$ i A jest macierzą k -nilpotentną. ■

(V.278) PRZYKŁAD. Macierz nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z}

$$A_{[4]} := \begin{bmatrix} -4 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 7 & 5 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

jest trójnilpotentna, ponieważ $A^3 = O$ i $A^2 \neq O$. Macierz

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad -1]$$

jest dwunilpotentna, ponieważ $B^2 = O$ i $B \neq O$. Macierz

$$C := [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

jest jednonilpotentna, ponieważ $C = O$. ■

Twierdzenie (V.277) może służyć do konstrukcji macierzy k -nilpotentnych dla coraz to większych k .

§ V.12. Macierze ponadtrójkątne

(V.279) DEFINICJA. Macierz A nazywamy *ponadtrójkątną górną* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące dwa warunki, gdzie $k, l, r, s \in \mathfrak{N}$:

$$(V.280) \quad \bigwedge_r (a_{r1} = \dots = a_{r, s-1} = 0 \wedge a_{rs} \neq 0 \Rightarrow \bigwedge_{k > r} \bigwedge_{l \leq s} a_{kl} = 0),$$

$$(V.281) \quad \bigwedge_r \left(\bigwedge_s a_{rs} = 0 \Rightarrow \bigwedge_{k > r} \bigwedge_l a_{kl} = 0 \right). \quad \blacksquare$$

(V.282) DEFINICJA. Macierz A nazywamy *ponadtrójkątną dolną* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące dwa warunki, gdzie $k, l, r, s \in \mathfrak{N}$:

$$(V.283) \quad \bigwedge_s (a_{1s} = \dots = a_{r-1, s} = 0 \wedge a_{rs} \neq 0 \Rightarrow \bigwedge_{k \leq r} \bigwedge_{l > s} a_{kl} = 0),$$

$$(V.284) \quad \bigwedge_s \left(\bigwedge_r a_{rs} = 0 \Rightarrow \bigwedge_k \bigwedge_{l > s} a_{kl} = 0 \right). \quad \blacksquare$$

(V.285) DEFINICJA. Macierzami *ponadtrójkątnymi* nazywamy zarówno macierze ponadtrójkątne górne jak i macierze ponadtrójkątne dolne. ■

(V.286) DEFINICJA. Wyrazem *oporowym* nazywamy każdy wyraz a_{rs} macierzy ponadtrójkątnej górnej spełniający warunek $a_{rs} \neq 0 \wedge a_{r1} = \dots = a_{r, s-1} = 0$ oraz każdy wyraz a_{rs} macierzy ponadtrójkątnej dolnej spełniający warunek $a_{rs} \neq 0 \wedge a_{1s} = \dots = a_{r-1, s} = 0$. ■

Z definicji (V.279), (V.282) i (V.285) wynika, że każda macierz ponadtrójkątna jest macierzą trójkątną, a mianowicie każda macierz ponadtrójkątna górna (dolna) jest macierzą trójkątną górną (dolną).

(V.287) PRZYKŁAD. Macierz rzeczywista

$$A_{[5,9]} := \begin{bmatrix} \underline{-3} & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ & \underline{-4} & -2 & 3 & 0 & 0 & 4 & -1 & \\ & & & 2 & 0 & -1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 0 & -1 & & \\ & & & & & & 5 & & \end{bmatrix},$$

w której podkreślono wyrazy oporowe, jest ponadtrójkątna górna. ■

(V.288) PRZYKŁAD. Macierz rzeczywista

$$A_{[7,3]} := \begin{bmatrix} \underline{-3} & & \\ & 2 & \\ & 1 & -4 \\ & 0 & -2 \\ & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

jest macierzą trójkątną dolną, ale nie jest macierzą ponadtrójkątną dolną. ■

(V.289) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą ponadtrójkątną górną (dolną), to \bar{A} jest też macierzą ponadtrójkątną górną (dolną), a A^T i A^* są macierzami ponadtrójkątnymi dolnymi (górnymi).

Dowód wynika wprost z definicji. ■

(V.290) TWIERDZENIE. Rząd macierzy skończonej ponadtrójkątnej z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest równy liczbie jej wyrazów oporowych.

Dowód. Niech A będzie macierzą ponadtrójkątną górną. Ponieważ wyrazy oporowe z definicji leżą w różnych wierszach i różnych kolumnach, więc można utworzyć minor macierzy A będący wyznacznikiem macierzy trójkątnej o głównej przekątnej utworzonej z wyrazów oporowych macierzy A . Na mocy twierdzenia (III.114) minor ten jest różny od zera, wobec czego rząd macierzy A jest nie mniejszy od liczby jej wyrazów oporowych. Ale z drugiej strony liczba wierszy macierzy A jest równa liczbie wyrazów oporowych, a rząd macierzy A nie może przekraczać liczby jej wierszy. Wobec tego rząd macierzy A jest równy liczbie jej wyrazów oporowych. Dowód dla macierzy ponadtrójkątnej dolnej jest analogiczny. ■

(V.291) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} , istnieje taka macierz $U_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ quasi-ortonormalna w m -tym stopniu, że

$$(V.292) \quad T_{[m,n]}^{(1)} := UA$$

jest macierzą ponadtrójkątną górną o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich, i taka macierz $V_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ quasi-ortonormalna w n -tym stopniu, że

$$(V.293) \quad T_{[m,n]}^{(2)} = AV$$

jest macierzą ponadtrójkątną dolną o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich.

Dowód. Ponieważ dla $A=O$ wystarczy przyjąć $U=I_{[m]}$, $V=I_{[n]}$, $T^{(1)}=T^{(2)}=O$, aby twierdzenie było prawdziwe, więc zakładamy, że $A \neq O$. Udowodnimy przez indukcję pierwszą część twierdzenia. Rozpatrzmy macierze postaci:

$$A_{[m,n]}^{(0)} = A = [R_{[m,n]}^{(0)}],$$

$$A_{[m,n]}^{(k)} = \begin{bmatrix} P_{[k,p_k]}^{(k)} & Q_{[k,n-p_k]}^{(k)} \\ O_{[m-k,p_k]} & R_{[m-k,n-p_k]}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k=1, 2, \dots,$$

gdzie $P_{[k,p_k]}^{(k)}$ jest macierzą ponadtrójkątną górną wierszowo pełnego rzędu k o wyrazach oporowych $d_1^{(k)}, \dots, d_k^{(k)} \in \text{re } \mathcal{A}$, $d_1^{(k)}, \dots, d_k^{(k)} > 0$. Jeżeli $k=m$ lub $R^{(k)}=O$, to macierz $A^{(k)}$ jest ponadtrójkątną górną o wyrazach oporowych d_1, \dots, d_k quasi-rzeczywistych dodatnich. Jeżeli $k < m$ i $R^{(k)} \neq O$, to niech

$$Z^{(k)} := \begin{bmatrix} z_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ z_m^{(k)} \end{bmatrix}, \quad z_{k+1}^{(k)}, \dots, z_m^{(k)} \in \mathcal{A},$$

będzie pierwszą z kolei niezerową kolumną macierzy $R^{(k)}$. Na mocy twierdzeń (V.85) i (V.71) istnieje taka macierz $M_{[m-k]}^{(k)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ quasi-ortonormalna w $(m-k)$ -tym stopniu i taki element $d_k \in \text{re } \mathcal{A}$, $d_k > 0$, że

$$\begin{bmatrix} d_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = d_k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = M^{(k)} Z^{(k)}.$$

Niech $\mu \in \mathcal{A}$, $\mu \neq 0$, będzie takim elementem, że $M^{(k)} M^{(k)*} = M^{(k)*} M^{(k)} = \mu I_{[m-k]}$. Wobec tego, jeżeli $[c_1^{(k)} \dots c_{m-k}^{(k)}]$ jest pierwszym wierszem macierzy $M^{(k)}$, to

$$(i) \quad \sum_{j=1}^{m-k} c_j^{(k)*} c_j^{(k)} = \mu,$$

skąd wynika, że $\mu \in \text{re } \mathcal{A}$, $\mu > 0$, i istnieje $\sqrt{\mu} \in \text{re } \mathcal{A}$, $\sqrt{\mu} > 0$. Wobec tego macierz

$$U_{[m]}^{(k)} := \begin{bmatrix} \sqrt{\mu} I_{[k]} & \\ & M_{[m-k]}^{(k)} \end{bmatrix}$$

jest quasi-ortonormalna w m -tym stopniu i istnieje taka liczba naturalna p_{k+1} , że

$$U_{[m]}^{(k)} A_{[m,n]}^{(k)} = \begin{bmatrix} P_{[k+1,p_{k+1}]}^{(k+1)} & Q_{[k+1,n-p_{k+1}]}^{(k+1)} \\ O_{[m-k-1,p_{k+1}]} & R_{[m-k-1,n-p_{k+1}]}^{(k+1)} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$P_{[k+1, p_{k+1}]}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu} P_{[k, p_k]}^{(k)} & S_{[k, p_{k+1}-p_k]}^{(k+1)} \\ 0 \dots 0 & d_k \end{bmatrix}$$

jest macierzą ponadtrójkątną górną wierszowo pełnego rzędu $k+1$ o wyrazach oporowych

$$d_j^{(k+1)} := \begin{cases} \sqrt{\mu} d_j^{(k)} & \text{dla } j=1, \dots, k, \\ d_k & \text{dla } j=k+1, \end{cases}$$

czyli o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich. Istnieje zatem ciąg macierzy $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(q)}$ taki, że

$$A^{(0)} = A,$$

$$A^{(k+1)} = U^{(k)} A^{(k)} \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, q-1,$$

$$A^{(q)} = T^{(1)},$$

gdzie $T_{[m, n]}^{(1)}$ jest macierzą ponadtrójkątną górną o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich. Stąd otrzymujemy

$$T^{(1)} = U^{(q-1)} \dots U^{(0)} A.$$

Na mocy twierdzenia (V.78) macierz $U_{[m]} := U^{(q-1)} \dots U^{(0)}$ jest quasi-ortonormalna w m -tym stopniu i otrzymujemy wzór (V.292). Wyprowadzenie wzoru (V.293) jest analogiczne. ■

(V.294) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m, n]}$ nad ciałem z pierwiastkowaniem \mathcal{F} , istnieje taka macierz $U_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}]$ ortonormalna w m -tym stopniu, że

$$(V.295) \quad T_{[m, n]}^{(1)} := UA$$

jest macierzą ponadtrójkątną górną o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich, i taka macierz $V_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}]$ ortonormalna w n -tym stopniu, że

$$(V.296) \quad T_{[m, n]}^{(2)} := AV$$

jest macierzą ponadtrójkątną dolną o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich.

Dowód. Na mocy twierdzenia poprzedniego istnieją macierze $U_{[m]}, V_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}]$ quasi-ortonormalne pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu takie, że zachodzą równości (V.295) i (V.296). Ale $UU^* = U^*U = u \cdot I_{[m]}$ i $VV^* = V^*V = v \cdot I_{[n]}$, gdzie $u, v \in \mathcal{F}$, $u, v \neq 0$, i analogicznie jak dla (i) wykazujemy, że $u, v \in \text{re } \mathcal{F}$, $u, v > 0$, i istnieją $\sqrt{u}, \sqrt{v} \in \text{re } \mathcal{F}$, $\sqrt{u}, \sqrt{v} > 0$. Wobec tego mamy

$$\frac{1}{\sqrt{u}} T^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{u}} U \right) A, \quad \frac{1}{\sqrt{v}} T^{(2)} = A \left(\frac{1}{\sqrt{v}} V \right).$$

Ponieważ macierze $\frac{1}{\sqrt{u}} T^{(1)}$ i $\frac{1}{\sqrt{v}} T^{(2)}$ są ponadtrójkątne, pierwsza górna, a druga dolna, o wyrazach oporowych quasi-rzeczywistych dodatnich, a macierze $\frac{1}{\sqrt{u}} U$ i $\frac{1}{\sqrt{v}} V$ są ortonormalne, pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu, więc otrzymujemy stąd tezę. ■