

są wierszowo ortonormalne w  $n$ -tym stopniu, a na mocy twierdzenia (V.72) macierz  $U_2$  jest ortonormalna w  $n$ -tym stopniu. Na mocy (V.46) mamy  $C\left(\frac{1}{\alpha}A^*\right)^* = \frac{1}{\alpha}CA = O$ , skąd  $CA = O$  oraz  $D\left(\frac{1}{\alpha}B^*\right)^* = \frac{1}{\alpha}DB = O$ , skąd  $DB = O$ . Wobec tego

$$U_1 A = U_2 B = [\alpha]$$

i na mocy (V.67)  $B = U_2^* U_1 A$ . Z twierdzeń (V.76) i (V.53) wynika, że macierz  $U_2^* U_1$  jest wierszowo ortonormalna w  $n$ -tym stopniu. Kładąc  $U := U_2^* U_1$ , otrzymujemy (V.89). ■

### § V.3. Działania elementarne na macierzach i macierze elementarne

(V.90) DEFINICJA. *Działaniem elementarnym I rodzaju na wierszach (kolumnach) macierzy nazywamy zamianę jej dwu dowolnych wierszy (kolumn).* ■

(V.91) DEFINICJA. *Działaniem elementarnym II rodzaju na wierszach (kolumnach) macierzy nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy dodanie do dowolnego wiersza (dowolnej kolumny) innego wiersza (innej kolumny) pomnożonego (pomnożonej) przez dowolny element  $a \in \mathcal{A}$ .* ■

(V.92) DEFINICJA. *Działaniem elementarnym III rodzaju na wierszach (kolumnach) macierzy nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy pomnożenie jej dowolnego wiersza (dowolnej kolumny) przez dowolny element  $\alpha \in \mathcal{A}$  nie będący dzielnikiem zera.* ■

(V.93) DEFINICJA. *Działaniem elementarnym na macierzy nazywamy każde działanie elementarne I, II lub III rodzaju na wierszach lub kolumnach tej macierzy.* ■

(V.94) DEFINICJA. *Macierzą elementarną I rodzaju  $n$ -tego stopnia nazywamy każdą macierz postaci*

$$(V.95) \quad E_{[n]}^{(1)}(k, l) := \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{kolumny} \\ k\text{-ta} & l\text{-ta} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & 1 & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow k\text{-ty} \\ \leftarrow l\text{-ty} \end{array} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow k\text{-ty} \\ \leftarrow l\text{-ty} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wiersze} \\ \text{dla } k \neq l, k, l \in \{1, \dots, n\}, \end{array}$$

$$(V.96) \quad E_{[n]}^{(1)}(k, k) := I_{[n]} \quad \text{dla } k \in \{1, \dots, n\}. \quad \blacksquare$$

(V.97) DEFINICJA. *Macierzą elementarną II rodzaju  $n$ -tego stopnia nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy każdą macierz postaci*

$$(V.98) \quad E_{[n]}^{(2)}(k, l, a) := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow k\text{-ty} \\ \leftarrow l\text{-ty} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}} \right\} \text{wiersze,} \quad \text{gdy } k < l,$$

a postaci

$$(V.99) \quad E_{[n]}^{(2)}(k, l, a) := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow l\text{-ty} \\ \leftarrow k\text{-ty} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}} \right\} \text{wiersze,} \quad \text{gdy } k > l,$$

$k, l \in \{1, \dots, n\}, a \in \mathcal{A}.$  ■

Macierzy elementarnych II rodzaju  $E_{[n]}^{(2)}(k, l, a)$  dla  $k=l$  nie rozpatruje się.

(V.100) DEFINICJA. *Macierzą elementarną III rodzaju  $n$ -tego stopnia nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy każdą macierz postaci*

$$(V.101) \quad E_{[n]}^{(3)}(k, a) := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow k\text{-ty wiersz,} \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

gdzie  $a \in \mathcal{A}$  nie jest dzielnikiem zera. ■

(V.102) DEFINICJA. *Macierzą elementarną nazywamy każdą macierz elementarną I, II lub III rodzaju.* ■

(V.103) TWIERDZENIE. *Każde działanie elementarne  $k$ -tego rodzaju ( $k=I, II, III$ ) na pierwszych  $n$  wierszach (kolumnach) dowolnej macierzy  $A_{[n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$*

jest równoważne pomnożeniu lewostronnemu (prawostronnemu) macierzy  $A$  przez odpowiednią macierz elementarną  $k$ -tego rodzaju  $n$ -tego stopnia z  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ .

Dowód polega na rachunkowym sprawdzeniu tezy. ■

(V.104) TWIERDZENIE. Macierze elementarne I i II rodzaju  $n$ -tego stopnia są nieosobliwe w  $n$ -tym stopniu. Macierze elementarne III rodzaju  $n$ -tego stopnia są quasi-nieosobliwe w  $n$ -tym stopniu. Macierz elementarna III rodzaju  $E_{[n]}^{(3)}(k, a)$  nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  jest nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy element  $a$  jest odwracalny w pierścieniu  $\mathcal{A}$ .

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.103) i równości  $\det_n I_{[n]} = 1$  mamy

$$(V.105) \quad \det_n E_{[n]}^{(1)}(k, l) = -1,$$

następnie na mocy twierdzenia (III.114)

$$(V.106) \quad \det_n E_{[n]}^{(2)}(k, l, a) = 1,$$

$$(V.107) \quad \det_n E_{[n]}^{(3)}(k, a) = a.$$

Z powyższych trzech wzorów wynika teza. ■

(V.108) TWIERDZENIE. Macierze elementarne I i II rodzaju  $n$ -tego stopnia mają zawsze odwrotności  $n$ -tego stopnia, które są również macierzami elementarnymi odpowiednio I i II rodzaju, a mianowicie:

$$(V.109) \quad (E_{[n]}^{(1)}(k, l))_{[n]}^{-1} = E_{[n]}^{(1)}(k, l),$$

$$(V.110) \quad (E_{[n]}^{(2)}(k, l, a))_{[n]}^{-1} = E_{[n]}^{(2)}(k, l, -a).$$

Macierz elementarna III rodzaju  $n$ -tego stopnia  $E_{[n]}^{(3)}(k, a)$  nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  ma odwrotność  $n$ -tego stopnia wtedy i tylko wtedy, gdy element  $a$  jest odwracalny w pierścieniu  $\mathcal{A}$  i wtedy ta odwrotność jest również macierzą elementarną III rodzaju, a mianowicie

$$(V.111) \quad (E_{[n]}^{(3)}(k, a))_{[n]}^{-1} = E_{[n]}^{(3)}(k, a^{-1}).$$

Macierze elementarne III rodzaju  $n$ -tego stopnia mają zawsze quasi-odwrotności  $n$ -tego stopnia

$$(V.112) \quad (E_{[n]}^{(3)}(k, a))_{[n]}^{-} = \left( \prod_{j=1}^{k-1} E_{[n]}^{(3)}(j, a) \right) \left( \prod_{j=k+1}^n E_{[n]}^{(3)}(j, a) \right).$$

Jest wtedy

$$E_{[n]}^{(3)}(k, a) \cdot (E_{[n]}^{(3)}(k, a))_{[n]}^{-} = (E_{[n]}^{(3)}(k, a))_{[n]}^{-} \cdot E_{[n]}^{(3)}(k, a) = a \cdot I_{[n]}.$$

Dowód polega na rachunkowym sprawdzeniu tezy. ■

(V.113) TWIERDZENIE. Jeżeli  $A$  jest macierzą elementarną  $k$ -tego rodzaju ( $k = I, II, III$ ), to  $\bar{A}$ ,  $A^T$  i  $A^*$  są również macierzami elementarnymi  $k$ -tego rodzaju, a mianowicie:

$$(V.114) \quad \overline{E_{[n]}^{(1)}(k, l)} = (E_{[n]}^{(1)}(k, l))^T = (E_{[n]}^{(1)}(k, l))^* = E_{[n]}^{(1)}(k, l),$$

$$(V.115) \quad \overline{E_{[n]}^{(2)}(k, l, a)} = E_{[n]}^{(2)}(k, l, \bar{a}), \quad (E_{[n]}^{(2)}(k, l, a))^T = E_{[n]}^{(2)}(l, k, a^T), \\ (E_{[n]}^{(2)}(k, l, a))^* = E_{[n]}^{(2)}(l, k, a^*),$$

$$(V.116) \quad \overline{E_{[n]}^{(3)}(k, a)} = E_{[n]}^{(3)}(k, \bar{a}), \quad (E_{[n]}^{(3)}(k, a))^T = E_{[n]}^{(3)}(k, a^T), \quad (E_{[n]}^{(3)}(k, a))^* = E_{[n]}^{(3)}(k, a^*).$$

Dowód polega na rachunkowym sprawdzeniu tezy. ■

#### § V.4. Macierze permutacyjne

(V.117) DEFINICJA. *Macierzą permutacyjną  $n$ -tego stopnia nazywamy każdą macierz będącą iloczynem macierzy elementarnych I rodzaju  $n$ -tego stopnia.* ■

(V.118) TWIERDZENIE. *Każdą macierz permutacyjną  $P_{[n]}$  można otrzymać przez zmianę kolejności pierwszych  $n$  wierszy lub zmianę kolejności pierwszych  $n$  kolumn z macierzy quasi-jedynkowej  $I_{[n]}$ .*

Dowód. Niech  $P = E_1 \dots E_k$ , gdzie  $E_1, \dots, E_k$  są macierzami elementarnymi I rodzaju  $n$ -tego stopnia. Teza wynika na mocy twierdzenia (V.103) z faktu, że

$$P = E_1 \dots E_k \cdot I_{[n]} = I_{[n]}^* \cdot E_1 \dots E_k. \quad \blacksquare$$

(V.119) PRZYKŁAD. Macierz

$$P_{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{[3]}^{(1)}(1, 3) \cdot E_{[3]}^{(1)}(1, 2)$$

jest macierzą permutacyjną trzeciego stopnia. ■

(V.120) TWIERDZENIE. *Każdą zmianę kolejności pierwszych  $n$  wierszy (kolumn) w macierzy  $A_{[n, m]}$  ( $A_{[m, n]}$ ) można uzyskać przez pomnożenie lewostronne (prawostronne) tej macierzy przez odpowiednią macierz permutacyjną  $n$ -tego stopnia. Każdą zmianę kolejności pierwszych  $n$  wyrazów diagonalnych w macierzy diagonalnej  $n$ -tego stopnia można uzyskać mnożąc tę macierz prawostronnie przez odpowiednią macierz permutacyjną  $P_{[n]}$  i równocześnie lewostronnie przez macierz  $P_{[n]}^{-1} = P^T = P^*$ .*

Dowód. Każdą zmianę kolejności pierwszych  $n$  wierszy (kolumn) w macierzy  $A_{[n, m]}$  ( $A_{[m, n]}$ ) można uzyskać drogą skończonej liczby zamian dwu wierszy (kolumn), tzn. drogą kolejnych lewostronnych (prawostronnych) mnożeń przez macierze elementarne I rodzaju  $n$ -tego stopnia, a więc przez przemnożenie lewostronne (prawostronne) przez pewną macierz permutacyjną.

Każdą zmianę kolejności pierwszych  $n$  wyrazów diagonalnych w macierzy diagonalnej  $D_{[n]}$  można uzyskać drogą skończonej liczby zamian dwu wyrazów diagonalnych. Sprawdzamy, że zamianę  $k$ -tego i  $l$ -tego wyrazu diagonalnego macierzy  $D$  uzyskuje się przez przejście od macierzy  $D$  do macierzy  $E_{[n]}^{(1)}(k, l) D E_{[n]}^{(1)}(k, l)$ , czyli na mocy (V.109) i (V.114) do macierzy  $(E_{[n]}^{(1)}(k, l))_{[n]}^{-1} D E_{[n]}^{(1)}(k, l) = (E_{[n]}^{(1)}(k, l))^T D E_{[n]}^{(1)}(k, l) = (E_{[n]}^{(1)}(k, l))^* D E_{[n]}^{(1)}(k, l)$ .

Wobec tego dowolną zmianę kolejności pierwszych  $n$  wyrazów diagonalnych w macierzy  $D$  uzyskuje się przez przejście do macierzy postaci

$$(E_{[n]}^{(1)}(k_s, l_s))_{[n]}^{-1} \dots (E_{[n]}^{(1)}(k_1, l_1))_{[n]}^{-1} D E_{[n]}^{(1)}(k_1, l_1) \dots E_{[n]}^{(1)}(k_s, l_s),$$

czyli do macierzy postaci

$$P_{[n]}^{-1} D P = P^T D P = P^* D P,$$

gdzie

$$P := E_{[n]}^{(1)}(k_1, l_1) \dots E_{[n]}^{(1)}(k_s, l_s). \quad \blacksquare$$

(V.121) PRZYKŁAD. Sprawdzamy, że

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & \pi & i \\ 1-i & 7 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1+2i & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1+2i & 0 & 8 \\ 2 & -3 & \pi & i \\ 1-i & 7 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Jest również

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ & \pi i & \\ & & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi i & & \\ & -5 & \\ & & \sqrt{3} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{[3]}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^* \quad \blacksquare$$

(V.122) TWIERDZENIE. Każda macierz permutacyjna  $P_{[n]}$  jest nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu.

Dowód. Każda macierz elementarna I rodzaju nad pierścieniem z transpozycją  $\mathcal{A}$  może być traktowana jako macierz nad przemennym podpierścieniem  $\mathcal{A}$ -liczb całkowitych i wobec tego na mocy twierdzenia (III.113) i wzoru (V.105) wyznacznik  $\det_n P$  dowolnej macierzy permutacyjnej  $P_{[n]}$  jest iloczynem wyznaczników  $n$ -tego stopnia macierzy elementarnych I rodzaju  $n$ -tego stopnia i

$$(V.123) \quad \det_n P = 1 \vee \det_n P = -1.$$

Otrzymujemy stąd tezę.  $\blacksquare$

(V.124) TWIERDZENIE. Każda macierz permutacyjna  $P_{[n]}$  ma odwrotność  $n$ -tego stopnia będącą również macierzą permutacyjną  $n$ -tego stopnia.

Dowód. Niech  $P := E_1 \dots E_s$ , gdzie  $E_1, \dots, E_s$  są macierzami elementarnymi  $n$ -tego stopnia. Na mocy wzoru (V.109) mamy

$$(V.125) \quad P_{[n]}^{-1} = (E_1 \dots E_s)_{[n]}^{-1} = E_{s[n]}^{-1} \dots E_{1[n]}^{-1} = E_s \dots E_1,$$

skąd wynika teza.  $\blacksquare$

(V.126) TWIERDZENIE. Każda macierz permutacyjna  $P_{[n]}$  jest samosprężona, tzn.

$$(V.127) \quad \bar{P} = P.$$

Dowód wynika z definicji (V.117) i (V.94).  $\blacksquare$

(V.128) TWIERDZENIE. Jeżeli  $P_{[n]}$  jest macierzą permutacyjną  $n$ -tego stopnia, to  $P^T$  i  $P^*$  są również macierzami permutacyjnymi  $n$ -tego stopnia i

$$(V.129) \quad P^T = P^* = P_{[n]}^{-1}.$$

Dowód wynika ze wzorów (V.125) i (V.114). ■

(V.130) TWIERDZENIE. Każda macierz permutacyjna  $P_{[n]}$  jest macierzą ortonormalną w  $n$ -tym stopniu.

Dowód wynika ze wzoru (V.129). ■

### § V.5. Relacje macierzowe typu równoważności

(V.131) DEFINICJA. Relację między macierzami z tego samego pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nazywamy *relacją typu równoważności* i oznaczamy symbolem  $\sim$  lub  $\approx$ , z ewentualnym dopisaniem znaków rozpoznawczych, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych macierzy  $A, B, C \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  jest

$$(V.132) \quad A \sim A \quad (\text{zwrotność relacji}),$$

$$(V.133) \quad A \sim B \Rightarrow B \sim A \quad (\text{symetryczność relacji}),$$

$$(V.134) \quad A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C \quad (\text{przechodność relacji}). \quad \blacksquare$$

W rachunku macierzowym korzystamy z wielu relacji typu równoważności. Podamy ich definicje i najważniejsze własności.

(V.135) DEFINICJA. Macierze  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *równoważnymi w wymiarze  $[m, n]$*  i piszemy  $A \approx B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz nieosobliwa w  $m$ -tym stopniu  $M_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  oraz taka macierz nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $MA = BN$ . ■

(V.136) TWIERDZENIE. Relacja określona definicją (V.135) jest typu równoważności.

Dowód. Mamy  $I_{[m]}A = AI_{[n]}$ , skąd  $A \approx A$ . Jeżeli  $MA = BN$ , to  $M_{[m]}^{-1}B = AN_{[n]}^{-1}$ , skąd  $A \approx B$ . Jeżeli  $MA = BN$  i  $PB = CQ$ , gdzie  $C, P, Q \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ,  $P$  jest nieosobliwa w  $m$ -tym stopniu,  $Q$  nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu, to  $(PM)A = PBN = C(QN)$  i na mocy twierdzenia (III.154)  $A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow A \approx C$ . Zgodnie z definicją (V.131) otrzymujemy stąd tezę. ■

(V.137) DEFINICJA. Macierze  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *quasi-równoważnymi w wymiarze  $[m, n]$*  i piszemy  $A \sim B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz quasi-nieosobliwa w  $m$ -tym stopniu  $M_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  oraz taka macierz quasi-nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $MA = BN$ . ■

(V.138) DEFINICJA. Macierze  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  z dowolnego pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nazywamy *ortonormalnie równoważnymi* w wymiarze  $[m,n]$  i piszemy  $A \overset{o}{\approx} B_{[m,n]}$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz ortonormalna w  $m$ -tym stopniu  $U_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  oraz taka macierz ortonormalna w  $n$ -tym stopniu  $V_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $UA = BV$ . ■

(V.139) TWIERDZENIE. Relacje określone definicjami (V.137) i (V.138) są typu równoważności.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (V.136). ■

(V.140) PRZYKŁAD. Macierze zespolone

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & i & 2+i \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 2+4i & 1 & -2+4i \\ 10-16i & -5-8i & 10+4i \end{bmatrix}$$

są równoważne w wymiarze  $[2, 3]$  i możemy napisać  $A \underset{[2,3]}{\approx} B$ , ponieważ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & i & 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4i & 1 & -2+4i \\ 10-16i & -5-8i & 10+4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

oraz

$$\det_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = -4 \neq 0, \quad \det_3 \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}i \neq 0. \quad \blacksquare$$

Definicje (V.135), (V.137) i (V.138) określają trzy podstawowe relacje macierzowe typu równoważności. Następne będą szczególnymi przypadkami tych trzech. Dowody, że są one również relacjami typu równoważności, są analogiczne do dowodu twierdzenia (V.136).

(V.141) DEFINICJA. Macierze  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *ortonormalnie quasi-równoważnymi* w wymiarze  $[m,n]$  i piszemy  $A \overset{o}{\sim} B_{[m,n]}$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz quasi-ortonormalna w  $m$ -tym stopniu  $U_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  oraz taka macierz quasi-ortonormalna w  $n$ -tym stopniu  $V_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $UA = BV$ . ■

(V.142) DEFINICJA. Macierze  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *wierszowo (kolumnowo) równoważnymi* w wymiarze  $[m,n]$  i piszemy  $A \overset{w}{\approx} B_{[m,n]}$  ( $A \overset{k}{\approx} B_{[m,n]}$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz nieosobliwa w  $m$ -tym stopniu  $M_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  (nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ), że  $MA = B$  ( $AN = B$ ). ■

(V.143) DEFINICJA. Macierze  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *wierszowo (kolumnowo) quasi-równoważnymi* w wymiarze  $[m,n]$  i piszemy  $A \overset{w}{\sim} B_{[m,n]}$  ( $A \overset{k}{\sim} B_{[m,n]}$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje

taka macierz quasi-nieosobliwa w  $m$ -tym stopniu  $M_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  (quasi-nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ) oraz taki element  $b \in \mathcal{A}$  nie będący dzielnikiem zera, że  $MA = bB$  ( $AN = bB$ ). ■

(V.144) DEFINICJA. Macierze  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  z dowolnego pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nazywamy *wierszowo (kolumnowo) ortonormalnie równoważnymi* w wymiarze  $[m,n]$  i piszemy  $A \overset{wo}{\underset{[m,n]}{\approx}} B$  ( $A \overset{ko}{\underset{[m,n]}{\approx}} B$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz ortonormalna w  $m$ -tym stopniu  $U_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  (w  $n$ -tym stopniu  $V_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ), że  $UA = B$  ( $AV = B$ ). ■

(V.145) DEFINICJA. Macierze  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *wierszowo (kolumnowo) ortonormalnie quasi-równoważnymi* w wymiarze  $[m,n]$  i piszemy  $A \overset{wo}{\underset{[m,n]}{\sim}} B$  ( $A \overset{ko}{\underset{[m,n]}{\sim}} B$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz quasi-ortonormalna w  $m$ -tym stopniu  $U_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  (quasi-ortonormalna w  $n$ -tym stopniu  $V_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ) oraz taki element  $b \in \mathcal{A}$  nie będący dzielnikiem zera, że  $UA = bB$  ( $AV = bB$ ). ■

(V.146) DEFINICJA. Macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *podobnymi w  $n$ -tym stopniu* i piszemy  $A \overset{p}{\underset{[n]}{\approx}} B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $MA = BM$ . ■

(V.147) DEFINICJA. Macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *quasi-podobnymi w  $n$ -tym stopniu* i piszemy  $A \overset{p}{\underset{[n]}{\sim}} B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz quasi-nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $MA = BM$ . ■

(V.148) DEFINICJA. Macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  z dowolnego pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nazywamy *ortonormalnie podobnymi w  $n$ -tym stopniu* i piszemy  $A \overset{op}{\underset{[n]}{\approx}} B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz ortonormalna w  $n$ -tym stopniu  $U_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $UA = BU$ . ■

(V.149) DEFINICJA. Macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *ortonormalnie quasi-podobnymi w  $n$ -tym stopniu* i piszemy  $A \overset{op}{\underset{[n]}{\sim}} B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz quasi-ortonormalna w  $n$ -tym stopniu  $U_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $UA = BU$ . ■

(V.150) DEFINICJA. Macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy *ściśle równoważnymi w  $n$ -tym stopniu* i piszemy  $A \overset{s}{\underset{[n]}{\approx}} B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $M^*A = BM_{[n]}^{-1}$ . ■

(V.151) DEFINICJA. Macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierście-



niem przemennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  nazywamy ściśle quasi-równoważnymi w  $n$ -tym stopniu i piszemy  $A \overset{s}{\sim}_{[n]} B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz quasi-nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  i takiej quasi-odwrotność  $n$ -tego stopnia  $M_{[n]}^{-}$ , że  $M^*A = BM_{[n]}^{-}$ . ■

Między podanymi relacjami zachodzą liczne implikacje. Na przykład, macierze podobne w  $n$ -tym stopniu są równoważne w wymiarze  $[n, n]$ , macierze ściśle quasi-równoważne w  $n$ -tym stopniu są quasi-równoważne w wymiarze  $[n, n]$  itp.

(V.152) TWIERDZENIE. Jeżeli między macierzami  $A_{[m, n]}$  i  $B_{[m, n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  zachodzi którakolwiek z relacji  $\overset{w}{\sim}_{[m, n]}$ ,  $\overset{k}{\sim}_{[m, n]}$ ,  $\overset{w}{\sim}_{[m, n]}$ , to między macierzami  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  zachodzi taka sama relacja i w tym samym wymiarze, natomiast między macierzami  $A^T$  i  $B^T$  oraz między macierzami  $A^*$  i  $B^*$  zachodzi odpowiednio relacja  $\overset{k}{\sim}_{[n, m]}$ ,  $\overset{w}{\sim}_{[n, m]}$ ,  $\overset{w}{\sim}_{[n, m]}$ . Jeżeli między macierzami  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  z tegoż  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  zachodzi którakolwiek z relacji  $\overset{p}{\sim}_{[n]}$ ,  $\overset{s}{\sim}_{[n]}$ , to między macierzami  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$ , między macierzami  $A^T$  i  $B^T$  oraz między macierzami  $A^*$  i  $B^*$  zachodzi taka sama relacja i w tym samym stopniu.

Dowód wynika z faktu, że

$$MA = BN \Leftrightarrow \bar{M}\bar{A} = \bar{B}\bar{N} \Leftrightarrow A^T M^T = N^T B^T \Leftrightarrow A^* M^* = N^* B^*,$$

$$MA = B \Leftrightarrow \bar{M}\bar{A} = \bar{B} \Leftrightarrow A^T M^T = B^T \Leftrightarrow A^* M^* = B^*,$$

$$AN = B \Leftrightarrow \bar{A}\bar{N} = \bar{B} \Leftrightarrow N^T A^T = B^T \Leftrightarrow N^* A^* = B^*. \quad \blacksquare$$

(V.153) TWIERDZENIE. Jeżeli między macierzami  $A_{[m, n]}$  i  $B_{[m, n]}$  z pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  zachodzi którakolwiek z relacji:  $\overset{o}{\sim}_{[m, n]}$ ,  $\overset{w}{\sim}_{[m, n]}$ ,  $\overset{k}{\sim}_{[m, n]}$ ,  $\overset{wo}{\sim}_{[m, n]}$ ,  $\overset{ko}{\sim}_{[m, n]}$ , to między macierzami  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  zachodzi taka sama relacja i w tym samym wymiarze, natomiast między macierzami  $A^T$  i  $B^T$  oraz między macierzami  $A^*$  i  $B^*$  zachodzi odpowiednio relacja  $\overset{o}{\sim}_{[n, m]}$ ,  $\overset{k}{\sim}_{[n, m]}$ ,  $\overset{w}{\sim}_{[n, m]}$ ,  $\overset{ko}{\sim}_{[n, m]}$ ,  $\overset{wo}{\sim}_{[n, m]}$ . Jeżeli między macierzami  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  z tegoż  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  zachodzi którakolwiek z relacji  $\overset{p}{\sim}_{[n]}$ ,  $\overset{op}{\sim}_{[n]}$ ,  $\overset{s}{\sim}_{[n]}$ , to między macierzami  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$ , między macierzami  $A^T$  i  $B^T$  oraz między macierzami  $A^*$  i  $B^*$  zachodzi taka sama relacja i w tym samym stopniu.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(V.154) TWIERDZENIE. Jeżeli między macierzami  $A_{[m, n]}$  i  $B_{[m, n]}$  z dowolnego pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  zachodzi którakolwiek z relacji  $\overset{o}{\sim}_{[m, n]}$ ,  $\overset{wo}{\sim}_{[m, n]}$ ,  $\overset{ko}{\sim}_{[m, n]}$ , to między macierzami  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  zachodzi taka sama relacja i w tym samym wymiarze, natomiast między

macierzami  $A^T$  i  $B^T$  oraz między macierzami  $A^*$  i  $B^*$  zachodzi odpowiednio relacja  $\overset{o}{\approx}_{[n, m]}$   
 $\overset{ko}{\approx}_{[n, m]} \overset{wo}{\approx}_{[n, m]}$ . Jeżeli  $A \overset{op}{\approx}_{[n]} B$ , to  $\bar{A} \overset{op}{\approx}_{[n]} \bar{B}$ ,  $A^T \overset{op}{\approx}_{[n]} B^T$  oraz  $A^* \overset{op}{\approx}_{[n]} B^*$ .

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (V.152). ■

(V.155) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  jest

$$(i) \quad A_{[m, n]} := \begin{bmatrix} A_{[m_1, n_1]}^{(1)} \\ \vdots \\ A_{[m_k, n_k]}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad B_{[m, n]} := \begin{bmatrix} B_{[m_1, n_1]}^{(1)} \\ \vdots \\ B_{[m_k, n_k]}^{(k)} \end{bmatrix},$$

gdzie  $m := m_1 + \dots + m_k$ ,  $n := n_1 + \dots + n_k$  i między macierzami  $A^{(j)}, B^{(j)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  zachodzi jedna z relacji:  $\overset{w}{\approx}_{[m_j, n_j]}, \overset{ko}{\approx}_{[m_j, n_j]}, \overset{k}{\approx}_{[m_j, n_j]}, j=1, \dots, k$ , to taka sama relacja zachodzi między macierzami  $A$  i  $B$  w wymiarze  $[m, n]$ .

Dowód. Załóżmy, że między macierzami  $A^{(j)}$  i  $B^{(j)}$  zachodzi relacja  $\overset{w}{\approx}_{[m_j, n_j]}$ . Istnieją zatem takie macierze  $M_{[m_j]}^{(j)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nieosobliwe w  $m_j$ -tym stopniu i takie macierze  $N_{[n_j]}^{(j)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nieosobliwe w  $n_j$ -tym stopniu,  $j=1, \dots, k$ , że  $M^{(j)} A^{(j)} = B^{(j)} N^{(j)}$ .

Przyjmując

$$M_{[m]} := \text{diag}(M_{[m_1]}^{(1)}, \dots, M_{[m_k]}^{(k)}), \quad N_{[n]} := \text{diag}(N_{[n_1]}^{(1)}, \dots, N_{[n_k]}^{(k)})$$

otrzymujemy na mocy twierdzeń (III.116) i (III.160) macierz  $M$  nieosobliwą w  $m$ -tym stopniu oraz macierz  $N$  nieosobliwą w  $n$ -tym stopniu takie, że  $MA = BN$ , skąd wynika teza. Dowód w pozostałych przypadkach jest analogiczny. ■

(V.156) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  jest (i) i między macierzami  $A^{(j)}, B^{(j)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  zachodzi jedna z relacji  $\overset{w}{\approx}_{[m_j, n_j]}, \overset{ko}{\approx}_{[m_j, n_j]}, \overset{k}{\approx}_{[m_j, n_j]}, j=1, \dots, k$ , to taka sama relacja zachodzi między macierzami  $A$  i  $B$  w wymiarze  $[m, n]$ . ■

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(V.157) TWIERDZENIE. Jeżeli w dowolnym pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  jest (i) i między macierzami  $A^{(j)}, B^{(j)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  zachodzi jedna z relacji  $\overset{o}{\approx}_{[m_j, n_j]}, \overset{wo}{\approx}_{[m_j, n_j]}, \overset{ko}{\approx}_{[m_j, n_j]}, j=1, \dots, k$ , to taka sama relacja zachodzi między macierzami  $A$  i  $B$  w wymiarze  $[m, n]$ .

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (V.155). ■

(V.158) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  jest

$$(ii) \quad A_{[n]} := \text{diag}(A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_k]}^{(k)}), \quad B_{[n]} := \text{diag}(B_{[n_1]}^{(1)}, \dots, B_{[n_k]}^{(k)}),$$

gdzie  $n = n_1 + \dots + n_k$ , i między macierzami  $A^{(j)}, B^{(j)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  zachodzi jedna z relacji  $\overset{p}{\sim}_{[n_j]}$ ,  $\overset{s}{\sim}_{[n_j]}$ ,  $j=1, \dots, k$ , to taka sama relacja zachodzi między macierzami  $A$  i  $B$  w stopniu  $n$ .

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (V.155). ■

(V.159) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  jest (ii) i między macierzami  $A^{(j)}, B^{(j)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  zachodzi jedna z relacji  $\overset{p}{\sim}_{[n_j]}$ ,  $\overset{s}{\sim}_{[n_j]}$ ,  $j=1, \dots, k$ , to taka sama relacja zachodzi między macierzami  $A$  i  $B$  w stopniu  $n$ .

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (V.155). ■

(V.160) TWIERDZENIE. Jeżeli w dowolnym pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  jest (ii) i  $A^{(j)} \overset{op}{\sim}_{[n_j]} B^{(j)}$  dla  $j=1, \dots, k$ , to  $A \overset{op}{\sim}_{[n]} B$ .

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia (V.155). ■

(V.161) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  między macierzami  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  zachodzi jedna z relacji:  $\overset{w}{\sim}_{[m,n]}$ ,  $\overset{k}{\sim}_{[m,n]}$ ,  $\overset{o}{\sim}_{[m,n]}$ ,  $\overset{wo}{\sim}_{[m,n]}$ ,  $\overset{ko}{\sim}_{[m,n]}$  lub w przypadku  $m=n$  jedna z relacji  $\overset{p}{\sim}_{[n]}$ ,  $\overset{s}{\sim}_{[n]}$ ,  $\overset{op}{\sim}_{[n]}$ , to macierze  $A$  i  $B$  mają ten sam rząd, tzn.  $r(A)=r(B)$ .

Dowód wynika z twierdzenia (V.25). ■

(V.162) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  między macierzami  $A_{[m,n]}$  i  $B_{[m,n]}$  zachodzi jedna z relacji  $\overset{o}{\sim}_{[m,n]}$ ,  $\overset{w}{\sim}_{[m,n]}$ ,  $\overset{k}{\sim}_{[m,n]}$ ,  $\overset{wo}{\sim}_{[m,n]}$ ,  $\overset{ko}{\sim}_{[m,n]}$  lub w przypadku  $m=n$  jedna z relacji  $\overset{p}{\sim}_{[n]}$ ,  $\overset{s}{\sim}_{[n]}$ ,  $\overset{op}{\sim}_{[n]}$ , to macierze  $A$  i  $B$  mają ten sam rząd, tzn.  $r(A)=r(B)$ .

Dowód wynika z twierdzenia (V.30). ■

(V.163) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  są quasi-podobne w  $n$ -tym stopniu, to  $\det_n A = \det_n B$ .

Dowód. Na mocy definicji relacji  $\overset{p}{\sim}_{[n]}$  istnieje taka macierz quasi-nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $MA=BM$ , skąd na mocy twierdzenia (III.113) otrzymujemy  $\det_n M \cdot \det_n A = \det_n B \cdot \det_n M$ . Wobec tego, że  $\det_n M$  nie jest dzielnikiem zera, na mocy twierdzenia (I.112) otrzymujemy  $\det_n A = \det_n B$ . ■

(V.164) TWIERDZENIE. Jeżeli macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  nad pierścieniem przemiennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  są podobne w  $n$ -tym stopniu, to  $\det_n A = \det_n B$ .

Dowód. Na mocy definicji relacji  $\overset{p}{\approx}_{[n]}$  istnieje taka macierz nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $M_{[n]}$  nad pierścieniem  $\mathcal{A}$ , że  $MA = BM$ , skąd na mocy twierdzenia (III.113)  $\det_n M \cdot \det_n A = \det_n M \cdot \det_n B$ . Mnożąc tę nierówność stronami przez  $(\det_n M)^{-1}$ , otrzymujemy tezę. ■

(V.165) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  są quasi-podobne w  $n$ -tym stopniu, to  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .

Dowód. Istnieje taka macierz quasi-nieosobliwa w  $n$ -tym stopniu  $M_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ , że  $MA = BM$  oraz taka macierz  $M_{[n]}^{-1} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  i taki element  $\mu \in \mathcal{A}$  nie będący dzielnikiem zera, że  $MM_{[n]}^{-1} = M_{[n]}^{-1}M = \mu I_{[n]}$ , skąd  $\mu B = MAM_{[n]}^{-1}$  i

$$\mu \text{tr } B = \text{tr } (\mu B) = \text{tr } ((MA)M_{[n]}^{-1}) = \text{tr } (M_{[n]}^{-1}(MA)) = \text{tr } (\mu A) = \mu \text{tr } A,$$

skąd otrzymujemy tezę. ■

(V.166) TWIERDZENIE. Jeżeli macierze  $A_{[n]}$  i  $B_{[n]}$  nad pierścieniem przemennym z transpozycją są podobne w  $n$ -tym stopniu, to  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(V.167) TWIERDZENIE. W pierścieniu macierzowym  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  nad pierścieniem przemennym z transpozycją  $\mathcal{A}$  macierz podobna w  $n$ -tym stopniu do sumy (iloczynu) macierzy  $A_{[n]}^{(1)}, \dots, A_{[n]}^{(k)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  jest sumą (iloczynem) macierzy podobnych w  $n$ -tym stopniu odpowiednio do  $A_{[n]}^{(1)}, \dots, A_{[n]}^{(k)}$ . Macierz podobna w  $n$ -tym stopniu do  $k$ -tej potęgi ( $k \in \mathfrak{N}$ ) macierzy  $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  jest  $k$ -tą potęgą macierzy podobnej w  $n$ -tym stopniu do  $A$ .

Dowód wynika ze wzorów

$$(V.168) \quad M(A^{(1)} + \dots + A^{(k)})M_{[n]}^{-1} = MA^{(1)}M_{[n]}^{-1} + \dots + MA^{(k)}M_{[n]}^{-1},$$

$$(V.169) \quad M(A^{(1)} \dots A^{(k)})M_{[n]}^{-1} = (MA^{(1)}M_{[n]}^{-1}) \dots (MA^{(k)}M_{[n]}^{-1}),$$

$$(V.170) \quad MA^k M_{[n]}^{-1} = (MAM_{[n]}^{-1})^k. \quad \blacksquare$$

(V.171) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz  $A_{[m,n]}$  nad pierścieniem częściowo uporządkowanym  $\mathcal{A}$  jest wierszowo pełnego rzędu  $m$  (kolumnowo pełnego rzędu  $n$ ), to istnieje taka macierz trójkątna dolna  $T_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  (trójkątna górna  $T_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ) quasi-nieosobliwa w  $m$ -tym stopniu (w  $n$ -tym stopniu) i taka macierz  $U_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  wierszowo ortogonalna w  $m$ -tym stopniu (kolumnowo ortogonalna w  $n$ -tym stopniu), że  $U = TA$  ( $U = AT$ ).

Dowód. Niech  $A_{[m,n]}$  będzie macierzą wierszowo pełnego rzędu  $m$ . Zatem wiersze macierzy  $A$  są półwektorami  $n$ -wymiarowego modułu ciągowego nad pierścieniem  $\mathcal{A}$  z iloczynem skalarnym (IV.145). Niech  $u_1, \dots, u_m$  będą pierwszymi  $m$  wierszami macierzy  $A$ . Z faktu, że macierz  $A$  jest wierszowo pełnego rzędu  $m$  wynika, że półwektory  $u_1, \dots, u_m$  są liniowo niezależne. Niech  $v_1, \dots, v_m$  będą półwektorami określonymi przez wzory

(IV.186) i (IV.187). Tworzą one układ ortogonalny i macierz

$$U_{[m,n]} := \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

jest wierszowo ortogonalna w  $m$ -tym stopniu. Ze wzorów (IV.186) i (IV.187) wynika ponadto istnienie takiej macierzy trójkątnej dolnej  $T_{[m]}$  quasi-nieosobliwej w  $m$ -tym stopniu, że  $U = TA$ . Dowód dla macierzy  $A_{[m,n]}$  kolumnowo pełnego rzędu  $n$  jest analogiczny. ■

(V.172) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz  $A_{[m,n]}$  nad pierścieniem z pierwiastkowaniem  $\mathcal{A}$  jest wierszowo pełnego rzędu  $m$  (kolumnowo pełnego rzędu  $n$ ), to istnieje taka macierz trójkątna dolna  $T_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  (trójkątna górna  $T_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ) quasi-nieosobliwa w  $m$ -tym stopniu (w  $n$ -tym stopniu) i taka macierz  $U_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  wierszowo quasi-ortonormalna w  $m$ -tym stopniu (kolumnowo quasi-ortonormalna w  $n$ -tym stopniu), że  $U = TA$  ( $U = AT$ ). Jeżeli ponadto pierścień  $\mathcal{A}$  jest ciałem, to istnieje taka macierz trójkątna dolna  $T_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  (trójkątna górna  $T_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ) nieosobliwa w  $m$ -tym stopniu (w  $n$ -tym stopniu) i taka macierz  $U_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  wierszowo ortonormalna w  $m$ -tym stopniu (kolumnowo ortonormalna w  $n$ -tym stopniu), że  $U = TA$  ( $U = AT$ ).

• Dowód wynika z twierdzeń (V.171), (V.56) i (V.57). ■

### § V.6. Twierdzenia o diagonalizacji

(V.173) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy  $A_{[m,n]}$  z regularnego pierścienia macierzowego  $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$  istnieją takie macierze  $M_{[m]}, N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$  będące iloczynami macierzy elementarnych odpowiednio  $m$ -tego i  $n$ -tego stopnia, i taki element  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a \neq 0$ , że

$$(V.174) \quad MAN = aI_{[r]},$$

gdzie  $r$  jest rzędem macierzy  $A$ .

Dowód. Dla  $A = O$  mamy  $r = 0$  i przyjmując umowę, że  $I_{[0]} = O$ , mamy (V.174) dla dowolnych  $M, N$  i  $a$ , na przykład, dla  $M = I_{[m]} = E_{[m]}^{(1)}(1, 1)$ ,  $N = I_{[n]} = E_{[n]}^{(1)}(1, 1)$ ,  $a = 1$ . Możemy odąd założyć, że  $A \neq O$  i  $1 \leq r \leq \min(m, n)$ . Rozważmy ciąg macierzy postaci

$$(i) \quad A_{[m,n]}^{(k)} := \begin{bmatrix} D_{[k]}^{(k)} & \\ & B_{[m-k, n-k]}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, \min(m, n),$$

$$A_{[m,n]}^{(0)} := B_{[m,n]}^{(0)} := A,$$

gdzie  $D_{[k]}^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, \min(m, n)$ , jest macierzą diagonalną quasi-nieosobliwą w  $k$ -tym stopniu. Załóżmy, że istnieje wyraz  $b_{u_k, v_k}^{(k)} \neq 0$ , gdzie  $1 \leq u_k \leq m - k$ ,  $1 \leq v_k \leq n - k$ . Mnożąc macierz  $A^{(k)}$  lewostronnie przez macierz elementarną  $E_{[m]}^{(k,1)} := E_{[m]}^{(1)}(k+1, k+u_k)$ , a prawostronnie przez macierz elementarną  $E_{[n]}^{(k,2)} := E_{[n]}^{(1)}(k+1, k+v_k)$ , otrzymujemy macierz postaci

$$(ii) \quad E^{(k,1)} A^{(k)} E^{(k,2)} = \begin{bmatrix} D_{[k]}^{(k)} & \\ & C_{[m-k, n-k]}^{(k)} \end{bmatrix},$$