

jest

$$\sum_{j=1}^q \gamma_j A_{mj*} + \gamma A_{k*} = \mathbf{0}, \quad \gamma \neq \mathbf{0}.$$

Oznacza to, że dla dowolnego $k \notin \{m_1, \dots, m_q\}$ wiersze $A_{m_1}, \dots, A_{m_q}, A_k$ macierzy A są liniowo zależne, skąd na mocy twierdzenia (IV.56) $r \leq q$. Analogicznie dowodzimy, że $s \leq q$. ■

(IV.62) TWIERDZENIE. Jeżeli w macierzy $A_{[m,n]}$ nad dowolnym pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} najwyższy stopień p minorów nie będących dzielnikami zera jest zarazem najwyższym stopniem minorów różnych od zera, to liczba liniowo niezależnych wierszy A jest równa liczbie jej liniowo niezależnych kolumn i równa p .

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia poprzedniego. ■

(IV.63) TWIERDZENIE. W dowolnym regularnym pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ dla każdej macierzy $A_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ liczba liniowo niezależnych wierszy jest równa liczbie liniowo niezależnych kolumn i równa najwyższemu stopniowi minorów tej macierzy różnych od zera.

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego. ■

(IV.64) PRZYKŁAD. Niech

$$A := \begin{bmatrix} (2, 0) & (1, 0) \\ (0, 1) & (0, 2) \end{bmatrix}$$

będzie macierzą nad pierścieniem z przykładu (I.69) o dzielnikach zera omówionych w przykładzie (I.110). Najwyższym stopniem minorów macierzy A nie będących dzielnikami zera jest $p=0$, a najwyższym stopniem jej minorów różnych od zera jest $q=1$. Dla wierszy A_{1*} i A_{2*} macierzy A mamy $(0, 1) A_{1*} = 0$ i $(1, 0) A_{2*} = 0$, skąd wynika, że liczbą liniowo niezależnych wierszy macierzy A jest $r=0$. Dla kolumn A_{*1} i A_{*2} macierzy A mamy $(1, -2) A_{*1} + (-2, 1) A_{*2} = 0$, wobec czego kolumny A_{*1} i A_{*2} są liniowo zależne. Natomiast $(\alpha, \beta) A_{*1} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2\alpha = 0$ i $\beta = 0$, czyli $(\alpha, \beta) = 0$, skąd wynika, że liczbą liniowo niezależnych kolumn macierzy A jest $s=1$. Zatem w rozpatrywanym przykładzie $p=r<s=q$, zgodnie z twierdzeniem (IV.61). ■

§ IV.3. Półbazy i bazy

(IV.65) DEFINICJA. Półbazą zbioru półwektorów $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$ w module \mathcal{H} o podstawie \mathfrak{H} nazywamy każdy taki układ \mathfrak{B} półwektorów liniowo niezależnych z \mathfrak{U} , że dla każdego półwektora $u \in \mathfrak{U}$ istnieją w \mathfrak{B} takie półwektory w_1, \dots, w_p , że półwektory u, w_1, \dots, w_p są liniowo zależne.⁽¹⁾ ■

⁽¹⁾ Nazwa „półbaza” została wprowadzona w niniejszej książce dla wygody. Powszechnie używana nazwa „maksymalny liniowo niezależny podzbiór” jest zbyt długa dla wielokrotnego powtarzania.

Zgodnie z definicją (IV.65) i twierdzeniem (IV.59) półbazą zbioru $\{o\}$ w module \mathcal{H} nad pierścieniem \mathcal{A} nazywamy zbiór pusty \mathfrak{D} .

(IV.66) DEFINICJA. Półbazą modułu \mathcal{H} nazywamy każdą półbazę jego podstawy. ■

(IV.67) DEFINICJA. Półbazę zbioru półwektorów, a w szczególności półbazę modułu, nazywamy skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem skończonym półwektorów albo zbiorem pustym. ■

(IV.68) PRZYKŁAD. Niech moduł \mathcal{H} będzie dowolnym pierścieniem wielomianowym regularnym $\mathcal{P}[\mathcal{A}]$. Ciąg wielomianów $\mathfrak{B} := (\lambda^0 = e, \lambda^1, \lambda^2, \dots)$, gdzie λ jest wielomianem (II.27), a e wielomianem jedynkowym, jest układem półwektorów liniowo niezależnych, ponieważ dla każdego jego skończonego podciągu $(\lambda^{k_1}, \dots, \lambda^{k_p})$, $k_j \neq k_i$ dla $j \neq i$, mamy dla dowolnych elementów $a_{k_1}, \dots, a_{k_p} \in \mathcal{A}$

$$\sum_{j=1}^p a_{k_j} \lambda^{k_j} = 0 \Rightarrow a_{k_1} = \dots = a_{k_p} = 0.$$

Dla każdego wielomianu $a := (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in \mathcal{P}[\mathcal{A}]$, $a_n \neq 0$, mamy

$$1 \cdot a - a_0 e - a_1 \lambda - \dots - a_n \lambda^n = 0,$$

a dla $a = 0$ jest $1 \cdot a + 0 \cdot e = 0$, wobec czego \mathfrak{B} jest półbazą modułu \mathcal{H} .

Jak łatwo spostrzec, dla podmodułu $\mathcal{H}^{(n)}$ utworzonego ze wszystkich wielomianów z $\mathcal{P}[\mathcal{A}]$ stopnia co najwyżej $n \in \mathfrak{N}_0$ istnieje pół baza skończona $(\lambda^0 = e, \lambda^1, \dots, \lambda^n)$. ■

(IV.69) DEFINICJA. Zbiór półwektorów $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$ w module \mathcal{H} o podstawie \mathfrak{H} nazywamy n -wymiarowym ($n \in \mathfrak{N}_0$) wtedy i tylko wtedy, gdy ma półbazę skończoną i każda jego pół baza jest utworzona z n półwektorów liniowo niezależnych. ■

(IV.70) DEFINICJA. Moduł \mathcal{H} nazywamy n -wymiarowym ($n \in \mathfrak{N}_0$) wtedy i tylko wtedy, gdy jego podstawa jest n -wymiarowa. ■

(IV.71) DEFINICJA. Wymiarem n -wymiarowego zbioru półwektorów \mathfrak{U} (n -wymiarowego modułu \mathcal{H}) nazywamy liczbę n . ■

W rozdziale niniejszym przyjmujemy, że symbol $\mathcal{H}_{[n]}$ oznacza dowolny moduł n -wymiarowy.

(IV.72) TWIERDZENIE. Jeżeli w module regularnym \mathcal{H} o podstawie \mathfrak{H} zbiór półwektorów

$$(IV.73) \quad \mathfrak{U} \cup \mathfrak{B}, \quad \text{gdzie} \quad \mathfrak{U} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{D},$$

jest zbiorem wyrazów półbazy zbioru półwektorów $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$, a $\mathfrak{v} \in \mathfrak{G}$ jest takim półwektorem, że $\mathfrak{v} \notin \mathfrak{B}$ i zbiór $\mathfrak{B} \cup \{\mathfrak{v}\}$ jest utworzony z półwektorów liniowo niezależnych, to istnieje taki półwektor $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}$, że dowolny ciąg utworzony przez ustalenie kolejności elementów zbioru

$$(IV.74) \quad \mathfrak{D} := (\mathfrak{U} - \{\mathfrak{u}\}) \cup \mathfrak{B} \cup \{\mathfrak{v}\}$$

jest półbazą zbioru \mathfrak{G} .

Dowód. Z założenia, że zbiór $\mathfrak{B} \cup \{\mathfrak{v}\}$, gdzie $\mathfrak{v} \notin \mathfrak{B}$, jest utworzony z półwektorów liniowo niezależnych, wynika, że \mathfrak{B} nie jest zbiorem wyrazów półbazy zbioru \mathfrak{G} , wobec

czego \mathfrak{A} nie jest zbiorem pustym. Z założenia istnieją takie półwektory $u_1, \dots, u_r \in \mathfrak{A}$, $v_1, \dots, v_s \in \mathfrak{B}$, $r > 0$, $s \geq 0$, oraz takie elementy $c, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in \mathcal{A}$, że

$$(i) \quad cv + \sum_{k=1}^r a_k u_k + \sum_{j=1}^s b_j v_j = 0, \quad c \neq 0,$$

i co najmniej jeden z elementów a_1, \dots, a_r , powiedzmy a_t , nie jest zerem. Mamy

$$(ii) \quad a_t u_t = -cv - \sum_{k=1}^{t-1} a_k u_k - \sum_{k=t+1}^r a_k u_k - \sum_{j=1}^s b_j v_j, \quad a_t \neq 0.$$

Z założenia dla dowolnego półwektora $x \in \mathfrak{G}$ istnieją takie półwektory $w_1, \dots, w_q \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ i takie elementy $\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathcal{A}$, że

$$\gamma x + \sum_{k=1}^q \alpha_k w_k = 0, \quad \gamma \neq 0,$$

skąd

$$(iii) \quad \gamma a_t x + \sum_{k=1}^q \alpha_k a_t w_k = 0, \quad \gamma a_t \neq 0.$$

Jeżeli $u_t \in \{w_1, \dots, w_q\}$, to podstawiając w (iii) wzór (ii) eliminujemy półwektor u_t , a wprowadzamy półwektor v . Wynika stąd, że dla każdego półwektora $x \in \mathfrak{G}$ istnieją w zbiorze (IV.74) dla $u = u_t$ takie półwektory y_1, \dots, y_h , że półwektory x, y_1, \dots, y_h są liniowo zależne. Gdyby zbiór \mathfrak{D} nie był zbiorem półwektorów liniowo niezależnych, istniałyby takie półwektory $z_1, \dots, z_l \in (\mathfrak{A} - \{u_t\}) \cup \mathfrak{B}$ i takie elementy $\beta, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathcal{A}$ nie wszystkie równe zeru, że

$$(iv) \quad \sum_{j=1}^l \beta_j z_j + \beta v = 0.$$

Gdyby $\beta = 0$, oznaczałoby to liniową zależność półwektorów $z_1, \dots, z_l \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, wbrew założeniu. Zatem $\beta \neq 0$ i na mocy (i) i (iv) byłoby

$$\beta cv + \sum_{k=1}^r a_k \beta u_k + \sum_{j=1}^s b_j \beta v_j = 0, \quad \beta cv + \sum_{j=1}^l \beta_j cz_j = 0,$$

skąd

$$\sum_{k=1}^r a_k \beta u_k + \sum_{j=1}^s b_j \beta v_j - \sum_{j=1}^l \beta_j cz_j = 0.$$

Ponieważ $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, z_1, \dots, z_l \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, $u_1, \dots, u_{t-1}, u_{t+1}, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, z_1, \dots, z_l \neq u_t$ oraz $a_t \beta \neq 0$, oznaczałoby to, że w $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ istnieje podzbiór półwektorów liniowo zależnych, wbrew założeniu. Zatem \mathfrak{D} jest zbiorem półwektorów liniowo niezależnych. Z powyższego wynika teza. ■

Twierdzenie (IV.72) określa możliwość wprowadzania na drodze wymiany nowych półwektorów do pólbyzy dowolnego zbioru półwektorów w dowolnym regularnym module \mathcal{H} .

(IV.75) TWIERDZENIE. Jeżeli w module regularnym \mathcal{H} o podstawie \mathfrak{S} zbiór półwektorów $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}$ ma pólbyzę utworzoną z n półwektorów liniowo niezależnych ($n \in \mathfrak{N}_0$), to jest zbiorem n -wymiarowym.

Dowód. Z założenia istnieje półbaza $\mathfrak{U} := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ zbioru \mathfrak{G} . Jeżeli $n=0$, to $\mathfrak{U}=\mathfrak{D}$ i zbiór \mathfrak{G} jest utworzony z jednego tylko półwektora zerowego, a jedyną jego półbazą jest zbiór pusty \mathfrak{D} , skąd wynika teza. Możemy odtąd założyć, że $n \neq 0$, tzn. $n \in \mathfrak{N}$. Gdyby w \mathfrak{G} istniała inna jeszcze półbaza \mathfrak{E} zawierająca więcej niż n półwektorów liniowo niezależnych, można by z niej wybrać $n+1$ półwektorów liniowo niezależnych $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$. Wprowadzając do półbazy na mocy twierdzenia (IV.72) kolejno półwektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ (tzn. przyjmując w (IV.74) kolejno $\mathfrak{B}=\mathfrak{D}, \{\mathbf{v}_1\}, \dots, \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}\}$), otrzymalibyśmy ciąg $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jako nową półbazę zbioru \mathfrak{G} . Wobec tego półwektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$ byłyby liniowo zależne, wbrew założeniu. Oznacza to, że półbaza \mathfrak{E} nie może mieć więcej niż n półwektorów liniowo niezależnych. Analogicznie, półbaza \mathfrak{U} nie może mieć więcej półwektorów liniowo niezależnych niż półbaza \mathfrak{E} . Zatem półbaza \mathfrak{E} musi być utworzona z n półwektorów liniowo niezależnych. Ze względu na dowolność półbazy \mathfrak{E} otrzymujemy stąd tezę. ■

(IV.76) TWIERDZENIE. *Jeżeli moduł regularny ma półbazę utworzoną z n półwektorów liniowo niezależnych ($n \in \mathfrak{N}_0$), to jest modulem n -wymiarowym.*

Dowód wynika jako przypadek szczególny z twierdzenia poprzedniego. ■

(IV.77) TWIERDZENIE. *Każdy regularny moduł ciągowy n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) jest modulem n -wymiarowym.*

Dowód. Sprawdzamy z łatwością, że ciąg półwektorów $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, gdzie

$$\mathbf{v}_1 := (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{v}_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{v}_n := (0, \dots, 0, 1),$$

czyli

$$(IV.78) \quad \mathbf{v}_k := (\delta_{k1}, \dots, \delta_{kn}), \quad k=1, \dots, n,$$

gdzie δ_{kl} ($k, l \in \mathfrak{N}$) jest tzw. symbolem Kroneckera określonym wzorem

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq l, \\ 1 & \text{dla } k = l \end{cases}$$

jest półbazą dowolnego regularnego modułu ciągowego n -tego stopnia \mathcal{S} . Wobec tego na mocy twierdzenia (IV.76) \mathcal{S} jest modulem n -wymiarowym. ■

(IV.79) TWIERDZENIE. *W zbiorze n -wymiarowym $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}$ w module regularnym \mathcal{H} o podstawie \mathfrak{S} każdy układ $k < n$ półwektorów liniowo niezależnych można uzupełnić $p-k$ półwektorami ($k < p \leq n$) tak, aby otrzymać układ p półwektorów liniowo niezależnych, natomiast każdy układ n półwektorów liniowo niezależnych w \mathfrak{G} jest półbazą tego zbioru.*

Dowód. Niech $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ($k \leq n$) będzie układem półwektorów liniowo niezależnych, a $\mathfrak{B} := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ — półbazą zbioru n -wymiarowego \mathfrak{G} . Wprowadzając na mocy twierdzenia (IV.72) kolejno do półbazy półwektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, otrzymujemy półbazę zawierającą te półwektory, z której w przypadku $k < p \leq n$ można wybrać żądany układ p półwektorów liniowo niezależnych, i która w przypadku $k=n$ jest ciągiem $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. ■

(IV.80) TWIERDZENIE. *W regularnym module n -wymiarowym \mathcal{H} każdy układ $k < n$ półwektorów liniowo niezależnych można uzupełnić $p-k$ półwektorami ($k < p \leq n$) tak, aby*

otrzymać układ p półwektorów liniowo niezależnych, natomiast każdy układ n półwektorów liniowo niezależnych jest pólbazą modułu \mathcal{H} .

Dowód wynika jako przypadek szczególny z twierdzenia poprzedniego. ■

(IV.81) TWIERDZENIE. Wymiar dowolnego podmodułu w regularnym module n -wymiarowym \mathcal{H} nie może być większy niż n .

Dowód. Na mocy twierdzenia poprzedniego liczba półwektorów liniowo niezależnych w \mathcal{H} nie może być większa niż n , skąd wynika teza. ■

(IV.82) PRZYKŁAD. Niech \mathfrak{H} będzie zbiorem wszystkich par uporządkowanych postaci (m, n) , gdzie m i n są liczbami całkowitymi, czyli $m, n \in \mathbb{Z}$. Niech $+$, $-$, \mathbf{o} będą operacjami określonymi w zbiorze \mathfrak{H} wzorami:

$$(m, n) + (p, q) := (m + p, n + q),$$

$$-(m, n) := (-m, -n),$$

$$\mathbf{o} := (0, 0), \quad m, n, p, q \in \mathbb{Z},$$

a \cdot mnożeniem określonym dla dowolnej uporządkowanej pary $(m, n) \in \mathfrak{H}$ i dowolnej liczby całkowitej $a \in \mathbb{Z}$ wzorem

$$a(m, n) := (am, an).$$

Sprawdzamy z łatwością, że szóstka uporządkowana $\mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, \mathbf{o}, \mathbb{Z}, \cdot)$ jest modulem regularnym. Półwektory

$$\mathbf{u}_1 := (1, 0), \quad \mathbf{u}_2 := (0, 1)$$

są liniowo niezależne, ponieważ dla dowolnych $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ jest

$$a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{o} = (0, 0) \Rightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

Każdy półwektor $\mathbf{w} := (m, n) \in \mathcal{H}$ można przedstawić w postaci $\mathbf{w} = m\mathbf{u}_1 + n\mathbf{u}_2$, co oznacza, że półwektory \mathbf{w} , \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 są liniowo zależne. Wobec tego $\mathfrak{B} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ jest pólbazą modułu \mathcal{H} , który na mocy twierdzenia (IV.76) jest dwuwymiarowy.

Niech teraz \mathfrak{G} będzie zbiorem wszystkich par uporządkowanych $(m, n) \in \mathcal{H}$, w których m i n są liczbami całkowitymi parzystymi. Szóstka uporządkowana $\mathcal{G} := (\mathfrak{G}, +, -, \mathbf{o}, \mathbb{Z}, \cdot)$ jest podmodulem właściwym modułu \mathcal{H} . Sprawdzamy, że półwektory

$$\mathbf{v}_1 := (2, 0), \quad \mathbf{v}_2 := (0, 2)$$

są liniowo niezależne i $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ jest pólbazą podmodułu \mathcal{G} , który tym samym jest modulem dwuwymiarowym.

Jak widać, podmoduł właściwy modułu n -wymiarowego może być modulem również n -wymiarowym.

Gdybyśmy jako \mathfrak{G} wzięli zbiór wszystkich par uporządkowanych postaci (m, m) , gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą, otrzymalibyśmy podmoduł \mathcal{G} jednowymiarowy z pólbazą $((1, 1))$. ■

(IV.83) TWIERDZENIE. W dowolnym regularnym module $\mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, 0, \mathcal{A}, \cdot)$ dla każdego n -wymiarowego zbioru $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$ podmoduł $\mathcal{H}(\mathfrak{U})$ jest n -wymiarowy. W szczególności $\mathcal{H}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\})$, gdzie $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathcal{H}$ są półwektorami liniowo niezależnymi, jest podmodułem n -wymiarowym.

Dowód. Niech $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, gdzie $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathfrak{U}$, będzie półbazą zbioru \mathfrak{U} . Niech $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathfrak{U})$. Istnieją zatem takie półwektory $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p \in \mathfrak{U}$ i takie elementy $c_1, \dots, c_p \in \mathcal{A}$, że $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{w}_1 + \dots + c_p \mathbf{w}_p$, a ponadto dla każdego półwektora \mathbf{w}_k , $k \in \{1, \dots, p\}$, istnieją takie elementy $a_k, a_{k1}, \dots, a_{kn} \in \mathcal{A}$ nie wszystkie równe zeru, że

$$(v) \quad a_k \mathbf{w}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \mathbf{v}_j.$$

Gdyby $a_k = 0$, oznaczałoby to liniową zależność półwektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ wbrew założeniu. Zatem $a_1 \dots a_p \mathbf{x} = a_1 \dots a_p c_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_1 \dots a_p c_p \mathbf{w}_p$, gdzie $a_1 \dots a_p \neq 0$, a po podstawieniu (v) i po uporządkowaniu otrzymujemy równość postaci

$$a_1 \dots a_p \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0},$$

co oznacza, że półwektory $\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ są liniowo zależne. Ze względu na dowolność półwektora \mathbf{x} wnioskujemy, że $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jest półbazą podmodułu $\mathcal{H}(\mathfrak{U})$, który na mocy twierdzenia (IV.76) jest modułem n -wymiarowym. W przypadku szczególnym, gdy $\mathfrak{U} := \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, gdzie $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ są półwektorami liniowo niezależnymi, ciąg $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ jest dla \mathfrak{U} półbazą i na mocy już udowodnionej pierwszej części twierdzenia $\mathcal{H}(\mathfrak{U})$ jest podmodułem n -wymiarowym. ■

(IV.84) TWIERDZENIE. Dla dowolnej macierzy regularnej $A_{[m,n]}$ wymiar modułu wierszowego jest równy wymiarowi modułu kolumnowego i równy zarówno liczbie liniowo niezależnych wierszy jak i liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy A .

Dowód wynika z twierdzeń (IV.63) i (IV.83). ■

(IV.85) DEFINICJA. Półbazę modułu $\mathcal{H}_{[n]}$ nazywamy bazą tego modułu wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{H}_{[n]}$ jest modułem rozpiętym na tej półbazie. ■

(IV.86) PRZYKŁAD. Pół baza \mathfrak{B} modułu \mathcal{H} z przykładu (IV.68) jest bazą tego modułu. ■

(IV.87) TWIERDZENIE. Jeżeli \mathfrak{B} jest bazą modułu $\mathcal{H}_{[n]}$ nad pierścieniem \mathcal{A} , to każdy półwektor $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{[n]}$ można i to w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci kombinacji liniowej półwektorów z bazy \mathfrak{B} .

Dowód. Z definicji bazy wynika, że każdy półwektor $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{[n]}$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej półwektorów z bazy \mathfrak{B} . Gdyby istniały dwa takie przedstawienia

$$(vi) \quad \mathbf{u} = \sum_{k=1}^m a_k \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{u} = \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{v}_k,$$

gdzie

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathfrak{B}, \quad a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathcal{A},$$

wtedy moglibyśmy przez w_1, \dots, w_s oznaczyć wszystkie różne półwektory spośród $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ i ponieważ (w_1, \dots, w_s) byłby utworzony z różnych wyrazów bazy \mathcal{B} , półwektory w_1, \dots, w_s byłyby liniowo niezależne. Gdyby wprowadzić

$$c_j := \begin{cases} a_k, & \text{gdy istnieje takie } k \in \{1, \dots, m\}, \text{ że } w_j = u_k, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

$$d_j := \begin{cases} b_k, & \text{gdy istnieje takie } k \in \{1, \dots, n\}, \text{ że } w_j = v_k, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie $j=1, \dots, s$, wtedy wzory (vi) można by napisać w postaci

$$u = \sum_{k=1}^s c_k w_k = \sum_{k=1}^s d_k w_k,$$

skąd

$$\sum_{k=1}^s (c_k - d_k) w_k = 0$$

i na mocy (IV.55) $c_k = d_k$ dla $k=1, \dots, s$. Oznacza to, że przedstawienia (vi) są identyczne. ■

§ IV.4. Przestrzenie liniowe. Wektory

(IV.88) DEFINICJA. *Przestrzenią liniową albo przestrzenią wektorową nazywamy każdy moduł regularny nad ciałem.* ■

(IV.89) DEFINICJA. *Wektorem nazywamy każdy półwektor z dowolnej przestrzeni liniowej.* ■

Jak widać z przykładu (IV.82), nie każdy moduł regularny jest przestrzenią liniową.

Dla uproszczenia przyjmujemy, że w niniejszym rozdziale symbol \mathcal{F} oznacza dowolne ciało, symbol \mathcal{L} dowolną przestrzeń liniową nad ciałem \mathcal{F} , a symbol $\mathcal{L}_{[n]}$ dowolną n -wymiarową przestrzeń liniową nad ciałem \mathcal{F} .

(IV.90) TWIERDZENIE. *Jeżeli wektory $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{L}$ są liniowo zależne, to istnieje pomiędzy nimi wektor będący kombinacją liniową pozostałych.*

Dowód. Z założenia istnieją takie $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{F}$, że

$$\sum_{j=1}^m a_j u_j = 0 \wedge \bigvee_{k \in \{1, \dots, m\}} a_k \neq 0.$$

Gdy $m \geq 2$, mamy stąd

$$u_k = - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_j}{a_k} u_j - \sum_{j=k+1}^m \frac{a_j}{a_k} u_j.$$

Gdy $m=1$, wtedy $a_1 u_1 = 0 \wedge a_1 \neq 0$, skąd na mocy (IV.22) $u_1 = 0$, wobec czego u_1 jest kombinacją liniową wektorów pozostałych, tzn. wektorów ze zbioru pustego. ■

(IV.91) TWIERDZENIE. Każda pól baza \mathfrak{B} przestrzeni liniowej \mathcal{L} jest bazą tej przestrzeni.

Dowód. Na mocy definicji pól bazy dla każdego wektora $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ istnieją takie wektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in \mathfrak{B}$ i takie elementy $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{F}$, że

$$\alpha \mathbf{u} + \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{u}_j = \mathbf{0} \wedge \alpha \neq 0,$$

skąd

$$(i) \quad \mathbf{u} = - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\alpha} \mathbf{u}_j.$$

Oznacza to, że $\mathbf{u} \in \mathcal{K}(\mathfrak{B})$. Ze względu na dowolność wektora $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ oraz twierdzenie (IV.36) otrzymujemy stąd $\mathcal{L} = \mathcal{K}(\mathfrak{B})$. Oznacza to, że \mathfrak{B} jest bazą przestrzeni liniowej \mathcal{L} . ■

(IV.92) DEFINICJA. Przestrzeń liniową \mathcal{U} nazywamy *podprzestrzenią liniową* przestrzeni liniowej \mathcal{L} wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{U} jest podmodułem przestrzeni liniowej \mathcal{L} . ■

(IV.93) PRZYKŁAD. Moduł \mathcal{K} rozpatrywany w przykładzie (IV.60) jest podprzestrzenią liniową dla przestrzeni liniowej \mathcal{L} utworzonej przez wszystkie wielomiany nad ciałem \mathcal{A} . ■

(IV.94) DEFINICJA. Przestrzeń liniową \mathcal{U} nazywamy *podprzestrzenią liniową właściwą* (trywialną) przestrzeni liniowej \mathcal{L} wtedy i tylko wtedy, gdy jest podmodułem właściwym (trywialnym) przestrzeni liniowej \mathcal{L} . ■

(IV.95) TWIERDZENIE. Jedyną n -wymiarową podprzestrzenią liniową w $\mathcal{L}_{[n]}$ jest sama przestrzeń $\mathcal{L}_{[n]}$.

Dowód. Niech \mathcal{U} będzie dowolną n -wymiarową podprzestrzenią liniową w $\mathcal{L}_{[n]}$. Istnieje zatem jej baza $\mathfrak{B} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Na mocy twierdzenia (IV.91) \mathfrak{B} jest również bazą dla $\mathcal{L}_{[n]}$ i $\mathcal{U} = \mathcal{K}(\mathfrak{B}) = \mathcal{L}_{[n]}$. ■

(IV.96) TWIERDZENIE. Podprzestrzeń liniowa k -wymiarowa \mathcal{U} przestrzeni liniowej $\mathcal{L}_{[n]}$ jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \leq k \leq n-1$.

Dowód wynika z twierdzeń (IV.81) i (IV.95). ■

(IV.97) DEFINICJA. Przestrzeńią ciągową n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) nazywamy każdy moduł ciągowy n -tego stopnia nad ciałem. ■

(IV.98) DEFINICJA. Przestrzeńią unitarną n -tego stopnia nazywamy moduł ciągowy n -tego stopnia nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} . ■

(IV.99) DEFINICJA. Przestrzeńią euklidesową n -tego stopnia nazywamy moduł ciągowy n -tego stopnia nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} . ■

Jak wynika z powyższych definicji i twierdzenia (IV.77), przestrzenie ciągowe n -tego stopnia, a w szczególności przestrzenie unitarne n -tego stopnia i przestrzenie euklidesowe n -tego stopnia, są przestrzeniami liniowymi n -wymiarowymi.

§ IV.5. Przestrzenie metryczne

(IV.100) DEFINICJA. Zbiór \mathfrak{X} nazywamy *przestrzenią metryczną*, jeśli jest określona funkcja

$$(i) \quad \rho: \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{D},$$

zwana *metryką*, gdzie \mathfrak{D} jest zbiorem tworzącym pierścień uporządkowany $\mathfrak{D} := (\mathfrak{D}, +, \cdot, -, s, t, 0, 1)$, spełniająca następujące warunki dla dowolnych $x, y, z \in \mathfrak{X}$:

$$(IV.101) \quad \rho(x, y) \geq 0,$$

$$(IV.102) \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(IV.103) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x) \text{ (warunek symetrii),}$$

$$(IV.104) \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \text{ (warunek trójkąta).} \quad \blacksquare$$

(IV.105) DEFINICJA. *Odległością punktów* $x, y \in \mathfrak{X}$, gdzie \mathfrak{X} jest przestrzenią metryczną z metryką (i), nazywamy element $\rho(x, y) \in \mathfrak{D}$. \blacksquare

Jeden i ten sam zbiór można metryzować na różne sposoby, tzn. można w nim różnie definiować pojęcie odległości, otrzymując w ten sposób różne przestrzenie metryczne.

(IV.106) PRZYKŁAD. Jeżeli w zbiorze \mathfrak{R}^3 dla dowolnych jego elementów

$$x := (x_1, x_2, x_3), \quad y := (y_1, y_2, y_3),$$

gdzie $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathfrak{R}$, określić ich odległość wzorem

$$(IV.107) \quad \rho_1(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

(jest to tzw. *odległość euklidesowa*), to otrzymujemy w ten sposób przestrzeń metryczną, ponieważ funkcja (IV.107) w sposób oczywisty spełnia warunki (IV.101), (IV.102) i (IV.103), a na mocy twierdzenia (I.159) dla dowolnego punktu $z := (z_1, z_2, z_3) \in \mathfrak{R}^3, z_1, z_2, z_3 \in \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} & -(x_1 - z_1)(y_1 - z_1) - (x_2 - z_2)(y_2 - z_2) - (x_3 - z_3)(y_3 - z_3) \leq \\ & \leq \sqrt{[(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2]} \sqrt{[(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2]}, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &= \sqrt{[(x_1 - z_1) - (y_1 - z_1)]^2 + [(x_2 - z_2) - (y_2 - z_2)]^2 + [(x_3 - z_3) - (y_3 - z_3)]^2} \leq \\ & \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (y_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2 + (y_3 - z_3)^2 +} \\ & \quad + 2\sqrt{[(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2]} \sqrt{[(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2]} = \\ & = \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y), \end{aligned}$$

czyli jest również spełniony warunek (IV.104).

Gdyby zamiast (IV.107) przyjąć

$$(IV.108) \quad \rho_2(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|,$$

otrzymalibyśmy z \mathfrak{R}^3 inną przestrzeń metryczną. Funkcja (IV.108) w sposób oczywisty spełnia warunki (IV.101), (IV.102) i (IV.103), a ponadto

$$\begin{aligned}\rho_2(x, y) &= |(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)| + |(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)| + |(x_3 - z_3) + (z_3 - y_3)| \leq \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| + |x_3 - z_3| + |z_3 - y_3| = \\ &= \rho_2(x, z) + \rho_2(z, y),\end{aligned}$$

czyli jest również spełniony warunek (IV.104). ■

§ IV.6. Moduły z iloczynem skalarnym

(IV.109) DEFINICJA. Moduł $\mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot)$ nazywamy *modułem z iloczynem skalarnym* wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° \mathcal{H} jest modułem regularnym nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} ,

2° jest określona funkcja, zwana *iloczynem skalarnym*, która każdej uporządkowanej parze półwektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ przyporządkowuje element $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathcal{A}$ ze spełnieniem dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}$ i dowolnego $a \in \mathcal{A}$ następujących warunków:

$$(IV.110) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0,$$

$$(IV.111) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

$$(IV.112) \quad \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle,$$

$$(IV.113) \quad \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$(IV.114) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle. \quad \blacksquare$$

Z warunku (IV.114) wynika, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ jest $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^*$, skąd na mocy warunku 3° z definicji pierścienia częściowo uporządkowanego jest $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \text{re } \mathcal{A}$, gdzie z założenia $\text{re } \mathcal{A}$ jest pierścieniem uporządkowanym. Wobec tego warunek (IV.110) ma zawsze sens.

(IV.115) TWIERDZENIE. Jeżeli $\mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot)$ jest modułem z iloczynem skalarnym, to dla dowolnych półwektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \in \mathcal{H}$ i dowolnego $a \in \mathcal{A}$ jest

$$(IV.116) \quad \left\langle \sum_{j=1}^m \mathbf{x}_j, \sum_{k=1}^n \mathbf{y}_k \right\rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_k \rangle,$$

$$(IV.117) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{o} \rangle = \langle \mathbf{o}, \mathbf{x} \rangle = 0,$$

$$(IV.118) \quad \langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = a^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$(IV.119) \quad -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle,$$

gdzie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy półwektory \mathbf{x} i \mathbf{y} są liniowo zależne.

Wzór (IV.119) można napisać w postaci

$$(IV.120) \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Dowód. Na mocy (IV.112) i (IV.114) mamy

$$\langle x, y+z \rangle = \langle y+z, x \rangle^* = \langle y, x \rangle^* + \langle z, x \rangle^* = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

Na mocy tego wzoru oraz (IV.112) dowodzimy z łatwością przez indukcję zupełną wzór (IV.116). Mamy dalej na mocy (IV.116), (IV.113), (IV.114)

$$\langle x, 0 \rangle = \langle x, x+(-x) \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, (-1)x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle = 0,$$

$$\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle^* = 0^* = 0,$$

skąd wzór (IV.117). Następnie na mocy (IV.113) i (IV.114)

$$\langle ax, y \rangle = \langle y, ax \rangle^* = (a \langle y, x \rangle)^* = \langle y, x \rangle^* a^* = a^* \langle y, x \rangle^* = a^* \langle x, y \rangle,$$

skąd wzór (IV.118). Gdy $\langle x, x \rangle = 0$, wtedy na mocy (IV.111) jest $x=0$, na mocy (IV.117) jest $\langle x, y \rangle = 0$ i warunek (IV.119) jest spełniony jako równość. Ponadto wtedy $1 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, co oznacza, że x i y są liniowo zależne. Możemy teraz ograniczyć się do przypadku, gdy

$$(i) \quad \langle x, x \rangle > 0.$$

Na mocy (IV.110) mamy

$$(ii) \quad \langle \langle x, y \rangle x - \langle x, x \rangle y, \langle x, y \rangle x - \langle x, x \rangle y \rangle \geq 0,$$

czyli na mocy (IV.116), (IV.113) i (IV.118)

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle^* \langle x, x \rangle \langle x, y \rangle - \langle x, x \rangle \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle + \\ + \langle x, x \rangle^2 \langle y, y \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

skąd na mocy przemienności pierścienia \mathcal{A} i wzoru (IV.114)

$$(iii) \quad \langle x, x \rangle (\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle) \geq 0.$$

Wynika stąd nierówność (IV.119), bo w przeciwnym przypadku na mocy (i) warunek (iii), a z nim i (ii) nie byłyby spełnione.

Na mocy (I.166) wzór (IV.119) można napisać w postaci (IV.120).

Jeżeli we wzorze (IV.119) zachodzi równość, to również w (iii) i w (ii), skąd na mocy (IV.111)

$$\langle x, y \rangle x - \langle x, x \rangle y = 0,$$

co na mocy (i) oznacza, że półwektory x i y są liniowo zależne. Jeżeli — odwrotnie — półwektory x i y są liniowo zależne, to istnieją takie elementy $a, b \in \mathcal{A}$, z których co najmniej jeden nie jest zerem, że $ax + by = 0$. Z uwagi na (i) jest $x \neq 0$, wobec czego $b \neq 0$. Mamy wtedy

$$b^* b \langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle = \langle x, by \rangle^* \langle x, by \rangle = a^* a \langle x, x \rangle^2,$$

$$b^* b \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle \langle by, by \rangle = a^* a \langle x, x \rangle^2,$$

skąd $\langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. Zatem dla x i y liniowo zależnych we wzorze (IV.119) mamy równość. ■

(IV.121) DEFINICJA. Normą kwadratową w module $\mathcal{H} := (\mathcal{H}, +, -, 0, \mathcal{A}, \cdot)$ z iloczynem skalarnym nazywamy funkcję, która każdemu półwektorowi $x \in \mathcal{H}$ przyporządkowuje element z \mathcal{A}

$$(IV.122) \quad \|x\|^2 := \langle x, x \rangle. \quad \blacksquare$$

(IV.123) TWIERDZENIE. W każdym module \mathcal{H} z iloczynem skalarnym norma kwadratowa ma następujące własności, gdzie x, y są dowolnymi półwektorami z \mathcal{H} , a a dowolnym elementem z pierścienia \mathcal{A} :

$$(IV.124) \quad \|x\|^2 \geq 0,$$

$$(IV.125) \quad \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(IV.126) \quad \|ax\|^2 = a^* a \|x\|^2,$$

$$(IV.127) \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle^* + \langle x, y \rangle,$$

$$(IV.128) \quad \langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Wzory (IV.126) i (IV.128) można napisać w postaci

$$(IV.129) \quad \|ax\|^2 = |a|^2 \|x\|^2,$$

$$(IV.130) \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Gdy \mathcal{A} jest ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} , wzór (IV.127) można napisać w postaci

$$(IV.131) \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{re} \langle x, y \rangle,$$

a gdy \mathcal{A} jest ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} , w postaci

$$(IV.132) \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle.$$

Dowód. Własność (IV.124) wynika z (IV.110), a własność (IV.125) z (IV.111). Własność (IV.126) wynika z (IV.113) i (IV.118). Następnie na mocy (IV.116) mamy

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle,$$

skąd na mocy (IV.122) i (IV.114) otrzymujemy (IV.127). Wzór (IV.128) wynika z (IV.119). Wzory (IV.126) i (IV.128) przyjmują postać (IV.129) i (IV.130) na mocy (I.166). Gdy \mathcal{A} jest ciałem liczb zespolonych, wtedy $\langle x, y \rangle = \operatorname{re} \langle x, y \rangle + i \operatorname{im} \langle x, y \rangle$, $\langle x, y \rangle^* = \operatorname{re} \langle x, y \rangle - i \operatorname{im} \langle x, y \rangle$, wobec czego z (IV.127) wynika (IV.131). Gdy \mathcal{A} jest ciałem liczb rzeczywistych, wtedy $\langle x, y \rangle^* = \langle x, y \rangle$, wobec czego wzór (IV.127) można napisać w postaci (IV.132). ■

(IV.133) PRZYKŁAD. Niech \mathcal{H} będzie modulem utworzonym przez wszystkie wielomiany stopnia co najwyżej drugiego nad ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} . Dla dowolnych wielomianów

$$u := a_0 e + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2, \quad v := b_0 e + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2,$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathcal{C}$, e jest wielomianem jedynkowym, a λ wielomianem (II.27), można określić iloczyn skalarny wzorem

$$\langle u, v \rangle := a_0^* b_0 + a_1^* b_1 + a_2^* b_2.$$

Sprawdzamy, że są spełnione wszystkie warunki (IV.110), ..., (IV.114), a więc iloczyn skalarny został określony poprawnie. Norma kwadratowa jest określona wzorem

$$\|u\|^2 = a_0^* a_0 + a_1^* a_1 + a_2^* a_2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2. \quad \blacksquare$$

(IV.134) PRZYKŁAD. Każdy pierścień częściowo uporządkowany \mathcal{A} może być traktowany jako moduł z iloczynem skalarnym nad samym sobą, jeżeli określić w nim iloczyn skalarny dla dowolnych $x, y \in \mathcal{A}$ wzorem

$$\langle x, y \rangle := x^* y.$$

Sprawdzamy, że są spełnione wszystkie warunki (IV.110), ..., (IV.114), a więc iloczyn skalarny został określony poprawnie. Norma kwadratowa jest określona wzorem

$$\|x\|^2 = x^* x = |x|^2. \quad \blacksquare$$

(IV.135) TWIERDZENIE. W każdym module macierzowym \mathcal{H} n -tego stopnia ($n \in \mathbb{N}$) nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} funkcja określona dla dowolnych macierzy $A_{[n]}$ i $B_{[n]}$ wzorem

$$(IV.136) \quad \langle A, B \rangle := \text{tr}(A^* G B),$$

gdzie $G_{[n]}$ jest macierzą hermitowską postaci

$$(IV.137) \quad G = C^* C,$$

a $C_{[n]}$ dowolną macierzą quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu, jest iloczynem skalarnym.

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.192) mamy

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}((CA)^* CA) \geq 0, \quad \langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow CA = O.$$

Ale dla macierzy C istnieje taka macierz $C_{[n]}^-$ i taki element $\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq 0$, że $CC_{[n]}^- = C_{[n]}^- C = \alpha I_{[n]}$, wobec czego

$$\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow C_{[n]}^- CA = O \Leftrightarrow \alpha A = O \Leftrightarrow A = O.$$

Z powyższego wynika, że funkcja (IV.136) spełnia warunki (IV.110) i (IV.111). Mamy dalej na mocy (III.179) i (III.180) dla dowolnych macierzy $A_{[n]}$, $B_{[n]}$, $D_{[n]} \in \mathcal{H}$ i dowolnego $a \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \langle A + D, B \rangle &= \text{tr}((A + D)^* G B) = \text{tr}(A^* G B + D^* G B) = \text{tr}(A^* G B) + \text{tr}(D^* G B) = \\ &= \langle A, B \rangle + \langle D, B \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle A, aB \rangle = \text{tr}(A^* G aB) = \text{tr}(aA^* G B) = a \text{tr}(A^* G B) = a \langle A, B \rangle,$$

co oznacza, że funkcja (IV.136) spełnia również warunki (IV.112) i (IV.113). Wreszcie na mocy (III.183) mamy

$$\langle A, B \rangle^* = (\text{tr}(A^* G B))^* = \text{tr}(A^* G B)^* = \text{tr}(B^* G A) = \langle B, A \rangle,$$

co oznacza, że funkcja (IV.136) spełnia także warunek (IV.114) i na mocy definicji (IV.109) jest iloczynem skalarnym. ■

Na mocy definicji (IV.121) w module macierzowym \mathcal{M} n -tego stopnia z iloczynem skalarnym (IV.136) jest określona norma kwadratowa

$$\begin{aligned}
 (IV.138) \quad \|A\|^2 &= \langle A, A \rangle = \text{tr}(A^*GA) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{lj}^* g_{lk} a_{kj} = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_{lj}^* c_{ml}^* c_{mk} a_{kj} = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^n c_{ml} a_{lj} \right)^* \left(\sum_{l=1}^n c_{ml} a_{lj} \right),
 \end{aligned}$$

dla której wzór (IV.127) przyjmuje postać:

$$(IV.139) \quad \|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + \text{tr}(B^*GA) + \text{tr}(A^*GB).$$

Szczególną rolę odgrywa iloczyn skalarny (IV.136) w przypadku, gdy $G = I_{[n]}$. Mamy wtedy

$$(IV.140) \quad \langle A, B \rangle := \text{tr}(A^*B),$$

a wzór (IV.139) przyjmuje postać:

$$(IV.141) \quad \|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + \text{tr}(B^*A) + \text{tr}(A^*B).$$

(IV.142) TWIERDZENIE. W każdym module ciągowym \mathcal{M} n -tego stopnia nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} funkcja określona dla dowolnych ciągów

$$\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n), \quad \mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n), \quad a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathcal{A},$$

wzorem

$$(IV.143) \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_l^* g_{lk} b_k = \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^n c_{ml} a_l \right)^* \left(\sum_{l=1}^n c_{ml} a_l \right),$$

gdzie A i B są półwektorami kolumnowymi nad pierścieniem \mathcal{A} określonymi wzorami

$$(IV.144) \quad A := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

a $\langle A, B \rangle$ jest iloczynem skalarnym (IV.136) w module macierzowym n -tego stopnia nad pierścieniem \mathcal{A} , jest iloczynem skalarnym w module ciągowym \mathcal{M} .

Dowód. Ponieważ macierze (IV.144) są n -tego stopnia, twierdzenie wynika z twierdzenia poprzedniego. ■

Szczególną rolę odgrywa iloczyn skalarny (IV.143) w przypadku, gdy iloczyn skalarny (IV.136) ma postać (IV.140). Mamy wtedy

$$(IV.145) \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=1}^n a_j^* b_j.$$

(IV.146) DEFINICJA. Moduł \mathcal{G} nazywamy *podmodulem z iloczynem skalarnym* modułu \mathcal{H} z iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{G} jest podmodulem modułu \mathcal{H} i iloczyn skalarny w \mathcal{G} jest iloczynem skalarnym modułu \mathcal{H} zredukowanym do podmodułu \mathcal{G} . ■

(IV.147) PRZYKŁAD. Moduł wierszowy i moduł kolumnowy dowolnej macierzy $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} rozpatrujemy z reguły jako podmoduły z iloczynem skalarnym (IV.143) modułu ciągowego odpowiednio n -wymiarowego i m -wymiarowego nad pierścieniem \mathcal{A} . ■

§ IV.7. Moduły unormowane

(IV.148) DEFINICJA. Moduł \mathcal{H} nazywamy *unormowanym* wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° \mathcal{H} jest regularnym modulem nad pierścieniem \mathcal{A} z wartością bezwzględną,

2° jest określona funkcja zwana *normą*, która każdemu półwektorowi $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ przyporządkowuje element $\|\mathbf{x}\| \in \text{re } \mathcal{A}$ ze spełnieniem dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ i dowolnego $a \in \mathcal{A}$ następujących warunków:

$$(IV.149) \quad \|\mathbf{x}\| \geq 0,$$

$$(IV.150) \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$(IV.151) \quad \|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|,$$

$$(IV.152) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \quad \blacksquare$$

(IV.153) DEFINICJA. Normę w module \mathcal{H} z iloczynem skalarnym nazywamy *naturalną* wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat tej normy jest normą kwadratową (IV.122). ■

(IV.154) TWIERDZENIE. W module \mathcal{H} z iloczynem skalarnym nad pierścieniem \mathcal{A} z wartością bezwzględną norma naturalna istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego półwektora $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ istnieje pierwiastek kwadratowy $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \in \text{re } \mathcal{A}$.

Dowód. Jeżeli w module \mathcal{H} istnieje norma naturalna, to na mocy (IV.122) dla każdego półwektora $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ istnieje pierwiastek kwadratowy $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \in \text{re } \mathcal{A}$.

Jeżeli – odwrotnie – dla każdego półwektora $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ istnieje $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \in \text{re } \mathcal{A}$, rozważmy funkcję

$$(IV.155) \quad \|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Spełnia ona na mocy (IV.110) i (IV.111) warunki (IV.149) i (IV.150), a na mocy (IV.129) warunek (IV.151). Na mocy (I.187) i (I.184) jest dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^*| + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|,$$

a ponieważ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \text{re } \mathcal{A}$, więc na mocy (IV.130)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

i na mocy (IV.127)

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$