

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.81) przejście od permutacji (j_1, \dots, j_n) do permutacji $(1, \dots, n)$ dokonuje się drogą parzystej liczby zamian, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest parzysta, a drogą nieparzystej liczby zamian, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest nieparzysta, ponieważ permutacja $(1, \dots, n)$ jest parzysta. Wobec tego równolegle permutacja $(1, \dots, n)$ przechodzi w permutację (k_1, \dots, k_n) parzystą, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest parzysta, i nieparzystą, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest nieparzysta, skąd teza. ■

(III.85) TWIERDZENIE. Jeżeli (j_1, \dots, j_n) jest permutacją ciągu $(1, \dots, n)$, to dla każdego $p \in \{1, \dots, n-1\}$

$$(vi) \quad \sigma(j_1, \dots, j_n) = (-1)^{\left(\sum_{s=1}^p j_s\right) - \frac{p^2+p}{2}} \sigma(j_1, \dots, j_p) \sigma(j_{p+1}, \dots, j_n).$$

Dowód. Dla liczby przestawień w ciągu (j_1, \dots, j_n) mamy oczywisty wzór

$$(vii) \quad \pi(j_1, \dots, j_n) = \pi(j_1, \dots, j_p) + \pi(j_{p+1}, \dots, j_n) + \pi_0,$$

gdzie π_0 jest liczbą przestawień między wyrazami, z których jeden wyraz należy do ciągu (j_1, \dots, j_p) , a drugi do ciągu (j_{p+1}, \dots, j_n) . Obliczymy π_0 . Zauważmy, że π_0 nie zależy od kolejności wyrazów ciągu (j_1, \dots, j_p) ani od kolejności wyrazów ciągu (j_{p+1}, \dots, j_n) . Wobec tego π_0 jest liczbą przestawień między wyrazami, z których jeden należy do ciągu $(k_1, \dots, k_p) := \langle (j_1, \dots, j_p) \rangle$, a drugi do ciągu $(l_1, \dots, l_{n-p}) := \langle (j_{p+1}, \dots, j_n) \rangle$. Dla każdego wyrazu k_s ($1 \leq s \leq p$) istnieje w ciągu $(1, \dots, n)$ $n - k_s$ liczb większych, natomiast w ciągu $(k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_{n-p})$ jest $n - s$ wyrazów leżących po k_s . Wobec tego wyraz k_s daje w tym ostatnim ciągu $(n - s) - (n - k_s) = k_s - s$ przestawień. Stąd

$$\pi_0 = \pi(k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_{n-p}) = \sum_{s=1}^p (k_s - s) = \left(\sum_{s=1}^p k_s\right) - \frac{p^2 + p}{2} = \left(\sum_{s=1}^p j_s\right) - \frac{p^2 + p}{2},$$

a po podstawieniu do (vii) na mocy (III.73) otrzymujemy wzór (vi). ■

§ III.5. Wyznaczniki

(III.86) DEFINICJA. Wyznacznikiem n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) macierzy nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A}

$$(i) \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

nazywamy element pierścienia \mathcal{A} :

$$(III.87) \quad \det_n A := \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie możliwe permutacje (j_1, \dots, j_n) ciągu $(1, \dots, n)$. ■

Symbol \det jest skrótem wyrazu angielskiego *determinant* (=wyznacznik).

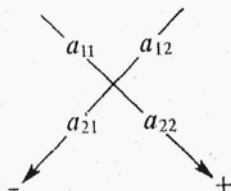
Na mocy twierdzenia (III.80) suma (III.87) zawiera $n!$ składników. Dla $n=1$ mamy

$$\det_1 A = a_{11},$$

a dla $n=2$

$$\det_2 A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

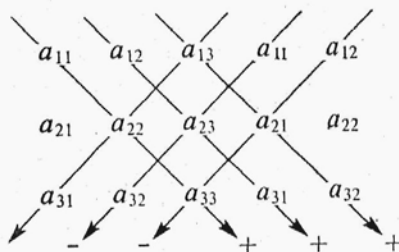
co pozwala obliczać wyznacznik $\det_2 A$ według schematu:



Dla $n=3$ mamy

$$\det_3 A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - \\ - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33},$$

co pozwala dla obliczania wyznaczników trzeciego stopnia korzystać z tzw. *reguły Sarrusa*, polegającej na dopisaniu po prawej stronie trzech pierwszych kolumn macierzy (i) jej dwu pierwszych kolumn i liczeniu iloczynów z odpowiednimi znakami według następującego schematu:



Łatwo spostrzec, że w regule Sarrusa można zastąpić dopisanie dwu pierwszych kolumn z prawej strony dopisaniem drugiej i trzeciej kolumny z lewej strony. Gdy pierścień \mathcal{A} jest przemienny, można również dopisać dwa pierwsze wiersze u dołu po trzecim wierszu lub dopisać drugi i trzeci wiersz u góry.

(III.88) DEFINICJA. *Minorem n -tego stopnia* ($n \in \mathbb{N}$) albo po prostu *minorem* macierzy (i) nazywamy każdy element pierścienia \mathcal{A} postaci

$$A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix} := \det_n \begin{bmatrix} a_{j_1 k_1} & \dots & a_{j_1 k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_n k_1} & \dots & a_{j_n k_n} \end{bmatrix},$$

gdzie $\begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix}$ jest ciągiem podwójnym spełniającym warunki (i) i (iii) z poprzedniego paragrafu. ■

(III.89) DEFINICJA. *Minorem głównym n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) macierzy (i) nazywamy każdy jej minor postaci*

$$(ii) \quad A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ j_1, \dots, j_n \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad j_1 < \dots < j_n. \quad \blacksquare$$

W szczególności mamy dla każdego $n \in \mathfrak{N}$

$$\det_n A = A \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Ważną rolę w teorii wyznaczników grają minory macierzy (i) postaci

$$(III.90) \quad \mu_{n/kl} := A \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n \end{pmatrix}, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

(III.91) DEFINICJA. *Dopełnieniem algebraicznym n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) wyrazu a_{kl} macierzy (i) nazywamy element pierścienia \mathcal{A}*

$$(III.92) \quad \alpha_{n/kl} := (-1)^{k+l} \mu_{n/kl}, \quad k, l = 1, \dots, n,$$

gdzie $\mu_{n/kl}$ jest minorem (III.90). ■

(III.93) DEFINICJA. *Macierzą dołączoną n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) macierzy (i) nazywamy macierz*

$$(III.94) \quad A_{[n]}^D := \begin{bmatrix} \alpha_{n/11} & \dots & \alpha_{n/n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n/1n} & \dots & \alpha_{n/nn} \end{bmatrix}$$

o wyrazach (III.92) (należy zwrócić uwagę na przestawienie wskaźników wierszy i kolumn). ■

(III.95) DEFINICJA. Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} nazywamy *quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu* ($n \in \mathfrak{N}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\det_n A$ nie jest w \mathcal{A} dzielnikiem zera, a *nieosobliwą w n -tym stopniu* wtedy i tylko wtedy, gdy w pierścieniu \mathcal{A} istnieje odwrotność $(\det_n A)^{-1}$. Macierz $A_{[n]}$ nazywamy *quasi-osobliwą (osobliwą) w n -tym stopniu* wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest quasi-nieosobliwa (nieosobliwa) w n -tym stopniu. ■

Zauważmy, że:

1° na mocy twierdzenia (I.120) każda macierz nieosobliwa w n -tym stopniu jest macierzą quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu,

2° gdy \mathcal{A} jest ciałem, pojęcia macierzy quasi-nieosobliwej w n -tym stopniu i macierzy nieosobliwej w n -tym stopniu pokrywają się.

Przechodzimy teraz do omówienia własności wyznaczników.

(III.96) TWIERDZENIE. *Dla każdej macierzy A i każdego $n \in \mathfrak{N}$ jest*

$$(III.97) \quad \det_n \bar{A} = \overline{\det_n A},$$

a gdy A jest macierzą nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} , to

$$(III.98) \quad \det_n A^T = (\det_n A)^T,$$

$$(III.99) \quad \det_n A^* = (\det_n A)^*.$$

Dowód. Wzór (III.97) wynika wprost z (III.87). Niech teraz \mathcal{A} będzie pierścieniem przemiennym z transpozycją. Na mocy (III.87)

$$\det_n A^T = \sum_{(k_1, \dots, k_n)} \sigma(k_1, \dots, k_n) a_{k_1 1}^T a_{k_2 2}^T \dots a_{k_n n}^T.$$

Każdy z iloczynów $a_{k_1 1}^T a_{k_2 2}^T \dots a_{k_n n}^T$ można uporządkować według wskaźników wierszy i na mocy twierdzenia (III.84)

$$(iii) \quad \sigma(k_1, \dots, k_n) a_{k_1 1}^T a_{k_2 2}^T \dots a_{k_n n}^T = \sigma(j_1, \dots, j_n) a_{1 j_1}^T a_{2 j_2}^T \dots a_{n j_n}^T = \\ = a_{n j_n}^T a_{n-1, j_{n-1}}^T \dots a_{1 j_1}^T \cdot \sigma(j_1, \dots, j_n) = (\sigma(j_1, \dots, j_n) a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots a_{n j_n})^T.$$

Otrzymujemy stąd na mocy (III.87) wzór (III.98). Wzór (III.99) wynika z (III.97) i (III.98). ■

(III.100) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest quasi-nieosobliwa (nieosobliwa) w n -tym stopniu, to macierz \bar{A} jest również quasi-nieosobliwa (nieosobliwa) w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (III.96) i (I.124) oraz wzoru (I.91). ■

(III.101) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} i jeżeli A jest macierzą quasi-nieosobliwą (nieosobliwą) w n -tym stopniu, to macierze A^T i A^* są również macierzami quasi-nieosobliwymi (nieosobliwymi) w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzeń (III.96) i (I.124) oraz wzoru (I.91). ■

(III.102) TWIERDZENIE. Jeżeli w macierzy A w jednym z wierszy lub w jednej z kolumn pierwszych n wyrazów jest równych zeru, to $\det_n A = 0$.

Dowód wynika wprost ze wzoru (III.87). ■

(III.103) TWIERDZENIE. Jeżeli B jest macierzą powstałą z macierzy A przez zamianę dwu spośród pierwszych n kolumn, to

$$\det_n B = -\det_n A.$$

Dowód wynika ze wzoru (III.87) i twierdzenia (III.81). ■

(III.104) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą nad pierścieniem przemiennym z transpozycją, a B macierzą powstałą z macierzy A przez zamianę dwu spośród pierwszych n wierszy, to

$$\det_n B = -\det_n A.$$

Dowód wynika ze wzoru (III.87) i twierdzeń (III.81) oraz (III.84). ■

(III.105) TWIERDZENIE. Jeżeli (zgodnie z definicją (III.75))

$$(l_1, \dots, l_n) := \langle j_1, \dots, j_n \rangle, \quad (m_1, \dots, m_n) := \langle k_1, \dots, k_n \rangle,$$

to dla dowolnej macierzy A nad pierścieniem przemiennym z transpozycją

$$(iv) \quad A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix} = \sigma(j_1, \dots, j_n) \sigma(k_1, \dots, k_n) A \begin{pmatrix} l_1, \dots, l_n \\ m_1, \dots, m_n \end{pmatrix}.$$

Dowód. Z definicji permutacje (l_1, \dots, l_n) i (m_1, \dots, m_n) są parzyste. Od pierwszego z minorów

$$A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} l_1, \dots, l_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix}$$

przechodzi się zatem do drugiego przez parzystą liczbę zamian wierszy, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest parzysta, a przez nieparzystą, gdy permutacja (j_1, \dots, j_n) jest nieparzysta. Stąd na mocy twierdzenia (III.104)

$$(v) \quad A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix} = \sigma(j_1, \dots, j_n) \cdot A \begin{pmatrix} l_1, \dots, l_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix}.$$

Analogicznie wykazuje się, że

$$(vi) \quad A \begin{pmatrix} l_1, \dots, l_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix} = \sigma(k_1, \dots, k_n) \cdot A \begin{pmatrix} l_1, \dots, l_n \\ m_1, \dots, m_n \end{pmatrix}.$$

Ze wzorów (v) i (vi) wynika teza. ■

(III.106) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz A ma pomiędzy n pierwszymi kolumnami takie dwie, które nie różnią się pierwszymi n wyrazami, to $\det_n A = 0$.

Dowód. Niech w macierzy A kolumny r -ta i s -ta, $r < s \leq n$, nie różnią się pierwszymi n wyrazami. W sumie (III.87) w każdym iloczynie jest wyraz z r -tej i wyraz z s -tej kolumny i dla każdego iloczynu $a_{1j_1} \dots a_{pr} \dots a_{qs} \dots a_{nj_n}$ istnieje równy mu iloczyn $a_{1j_1} \dots a_{ps} \dots a_{qr} \dots a_{nj_n}$. Ponieważ na mocy twierdzenia (III.81) $\sigma(j_1, \dots, r, \dots, s, \dots, j_n) = -\sigma(j_1, \dots, s, \dots, r, \dots, j_n)$, więc suma (III.87) rozpada się na pary składników, dających każda w sumie 0. Stąd wynika teza. ■

(III.107) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą nad pierścieniem przemiennym z transpozycją i jeżeli macierz A ma pomiędzy n pierwszymi wierszami takie dwa, które nie różnią się pierwszymi n wyrazami, to $\det_n A = 0$.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(III.108) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz B powstała z macierzy A nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} przez pomnożenie jednego spośród pierwszych n wierszy lub jednej spośród pierwszych n kolumn przez element $a \in \mathcal{A}$, to $\det_n B = a \cdot \det_n A$.

Dowód wynika bezpośrednio z definicji (III.86). ■

(III.109) TWIERDZENIE. Dla dowolnych macierzy A i B nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} , dla dowolnego elementu $a \in \mathcal{A}$ i dla dowolnego $n \in \mathfrak{N}$

$$B = aA \Rightarrow \det_n B = a^n \cdot \det_n A.$$

Dowód wynika bezpośrednio z definicji (III.86). ■

(III.110) TWIERDZENIE. Jeżeli macierze A , B , C nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} różnią się tylko k -tym wierszem (lub k -tą kolumną), $k \leq n \in \mathfrak{N}$, i k -ty wiersz (k -ta kolumna) macierzy C jest sumą k -tych wierszy (k -tych kolumn) macierzy A i B , to $\det_n C = \det_n A + \det_n B$.

Dowód wynika bezpośrednio z definicji (III.86). ■

(III.111) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} i jeżeli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do któregośkolwiek spośród n pierwszych wierszy (którejkolwiek spośród n pierwszych kolumn) dowolnej kombinacji liniowej pozostałych z tych wierszy (kolumn), to $\det_n B = \det_n A$.

Dowód. Niech $C := [A_1 \dots A_n]$, gdzie A_1, \dots, A_n są n pierwszymi kolumnami macierzy A . Niech dla dowolnych elementów $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathcal{A}$

$$B := [A_1 \dots A_{k-1} \left(A_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_j A_j + \sum_{j=k+1}^n a_j A_j \right) A_{k+1} \dots A_n].$$

Na mocy twierdzeń (III.110) i (III.108) i równości $\det_n C = \det_n A$ mamy

$$\begin{aligned} \det_n B = \det_n A + \sum_{j=1}^{k-1} a_j \det_n [A_1 \dots A_{k-1} A_j A_{k+1} \dots A_n] + \\ + \sum_{j=k+1}^n a_j \det_n [A_1 \dots A_{k-1} A_j A_{k+1} \dots A_n], \end{aligned}$$

skąd na mocy twierdzenia (III.106) otrzymujemy tezę. Dowód dla wierszy jest analogiczny, jeśli zamiast twierdzenia (III.106) użyć twierdzenia (III.107). ■

(III.112) TWIERDZENIE. WZÓR BINETA-CAUCHY'EGO. Dla dowolnych macierzy $A_{[n,s]}$, $B_{[s,n]}$, $C_{[n]}$, $n, s \in \mathfrak{N}$, nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A}

$$C_{[n]} = A_{[n,s]} B_{[s,n]} \wedge n \leq s \Rightarrow \det_n C = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq s}} A \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Dowód. Z założenia jest

$$\det_n C = \det_n \begin{bmatrix} \sum_{j_1=1}^s a_{1j_1} b_{j_11} & \dots & \sum_{j_n=1}^s a_{1j_n} b_{j_n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j_1=1}^s a_{nj_1} b_{j_1n} & \dots & \sum_{j_n=1}^s a_{nj_n} b_{j_nn} \end{bmatrix}.$$

Stosując tu wielokrotnie twierdzenie (III.110), a następnie wielokrotnie twierdzenie (III.108), otrzymujemy

$$\det_n C = \sum_{j_1=1}^s \dots \sum_{j_n=1}^s \det_n \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \dots & a_{1j_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nj_1} & \dots & a_{nj_n} \end{bmatrix} b_{j_11} \dots b_{j_nn}.$$

Pomijając na mocy twierdzenia (III.106) wyznaczniki macierzy o powtarzających się kolumnach, otrzymujemy

$$\det_n C = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \\ j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, s\} \\ j_u \neq j_v \text{ dla } u \neq v}} A \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ j_1, \dots, j_n \end{pmatrix} b_{j_11} \dots b_{j_nn}.$$

Niech $(k_1, \dots, k_n) := \langle (j_1, \dots, j_n) \rangle$. Na mocy twierdzeń (III.105) i (III.84)

$$\begin{aligned} \det_n C &= \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq s}} \left(A \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \\ \{j_1, \dots, j_n\} = \{k_1, \dots, k_n\}}} \sigma(j_1, \dots, j_n) b_{j_1 1} \dots b_{j_n n} \right) = \\ &= \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq s}} \left(A \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \\ \{j_1, \dots, j_n\} = \{k_1, \dots, k_n\}}} \sigma(j_1, \dots, j_n) b_{1 j_1} \dots b_{n j_n} \right), \end{aligned}$$

skąd na mocy (III.87) otrzymujemy tezę. ■

(III.113) TWIERDZENIE. Dla dowolnych macierzy $A_{[n]}, B_{[n]}, C_{[n]}, \dots$, nad pierścieniem przemennym z transpozycją \mathcal{A}

$$\det_n AB = \det_n A \det_n B, \quad \det_n ABC = \det_n A \det_n B \det_n C, \quad \dots$$

Dowód. Pierwsza równość wynika bezpośrednio z twierdzenia (III.112) dla $s=n$. Następne dowodzimy z łatwością przez indukcję. ■

(III.114) TWIERDZENIE. Wyznacznik n -tego stopnia każdej macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi n pierwszych wyrazów diagonalnych.

Dowód. Załóżmy, że A jest macierzą trójkątną dolną. Stosujemy dowód indukcyjny. Jedynym wyrazem pierwszego wiersza macierzy A , który może nie być zerem, jest a_{11} . Wobec tego we wzorze (III.87) można ograniczyć się do iloczynów rozpoczynających się od a_{11} . Jeżeli ograniczyliśmy się do iloczynów rozpoczynających się od $a_{11} \dots a_{kk}$, to następnym czynnikiem może być $a_{k+1, k+1}, a_{k+1, k+2}, \dots, a_{k+1, n}$. Z nich tylko $a_{k+1, k+1}$ może nie być zerem. Wobec tego możemy ograniczyć się do iloczynów rozpoczynających się od $a_{11}, \dots, a_{k+1, k+1}$. Na mocy indukcji otrzymujemy tezę.

Dla macierzy trójkątnych górnych dowód jest analogiczny. ■

(III.115) TWIERDZENIE. Wyznacznik n -tego stopnia każdej macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi n pierwszych wyrazów diagonalnych.

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego. ■

(III.116) TWIERDZENIE. Dla dowolnych macierzy $A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_k]}^{(k)}$, $k, n_1, \dots, n_k \in \mathfrak{N}$, nad pierścieniem \mathcal{A}

$$\det_{n_1 + \dots + n_k} \text{diag}(A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_k]}^{(k)}) = \det_{n_1} A^{(1)} \dots \det_{n_k} A^{(k)}.$$

Dowód. Jeśli zastosować wzór (III.87) do wyznacznika występującego po lewej stronie znaku równości, to widać, że można ograniczyć się do iloczynów, które występują w wyrażeniu $\det_{n_1} A^{(1)} \dots \det_{n_k} A^{(k)}$ po rozwinięciu wyznaczników według tegoż wzoru (III.87), ponieważ pozostałe iloczyny są równe zeru. Zauważmy teraz, że przedstawienia w każdej permutacji (j_1, \dots, j_n) , gdzie $n = n_1 + \dots + n_k$, uwzględnionej w zredukowanej w powyższy sposób sumie (III.87), mogą powstać jedynie wewnątrz każdej permutacji częściowej

$$(j_1, \dots, j_{n_1}), (j_{n_1+1}, \dots, j_{n_1+n_2}), \dots, (j_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, j_n),$$

wobec czego

$$\sigma(j_1, \dots, j_n) = \sigma(j_1, \dots, j_{n_1}) \dots \sigma(j_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, j_n)$$

i otrzymujemy tezę. ■

(III.117) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą nad pierścieniem przemennym z transpozycją, to dla dowolnych $k, l \in \{1, \dots, n\}$

$$(III.118) \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} \alpha_{n/lj} = \begin{cases} \det_n A & \text{dla } k=l, \\ 0 & \text{dla } k \neq l, \end{cases}$$

$$(III.119) \quad \sum_{j=1}^n a_{jk} \alpha_{n/lj} = \begin{cases} \det_n A & \text{dla } k=l, \\ 0 & \text{dla } k \neq l, \end{cases}$$

gdzie dopełnienia algebraiczne $\alpha_{n/lj}$ i $\alpha_{n/jl}$ są określone wzorem (III.92).

Dowód. Wykażemy najpierw prawdziwość wzoru (III.118) w przypadku $k=l$. W każdym iloczynie wchodzącym w skład sumy (III.87) występuje dokładnie jeden wyraz z k -tego wiersza. Wobec tego wyrazy tej sumy można uporządkować do postaci

$$\det_n A = \sum_{s=1}^n a_{ks} \sum_{(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_{k-1}, s, j_{k+1}, \dots, j_n) \times \\ \times a_{1j_1} \dots a_{k-1, j_{k-1}} a_{k+1, j_{k+1}} \dots a_{nj_n},$$

czyli na mocy twierdzenia (III.82)

$$\det_n A = \sum_{s=1}^n a_{ks} (-1)^{k+s} \sum_{(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n) \times \\ \times a_{1j_1} \dots a_{k-1, j_{k-1}} a_{k+1, j_{k+1}} \dots a_{nj_n},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie permutacje $(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n)$ ciągu $(1, \dots, s-1, s+1, \dots, n)$. Na mocy wzorów (III.87) i (III.90) otrzymujemy stąd

$$\det_n A = \sum_{s=1}^n a_{ks} (-1)^{k+s} \mu_{n/ks},$$

a następnie na mocy (III.92) żądany wzór.

Gdy $k \neq l$, wprowadzamy macierz B , jaka powstaje z macierzy A przez zastąpienie l -tego wiersza k -tym. Mamy

$$b_{rs} = \begin{cases} a_{rs} & \text{dla } r \neq l, \\ a_{ks} & \text{dla } r = l. \end{cases}$$

Na mocy przypadku już udowodnionego otrzymujemy wtedy

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \alpha_{n/lj} = \sum_{j=1}^n b_{lj} \beta_{n/lj} = \det_n B,$$

gdzie $\beta_{n/lj}$ oznacza dopełnienie algebraiczne n -tego stopnia wyrazu b_{lj} macierzy B . Ponieważ macierz B ma wiersze k -ty i l -ty identyczne, więc na mocy twierdzenia (III.107) jest $\det_n B = 0$, skąd otrzymujemy żądany wzór.

Dowód wzoru (III.119) jest analogiczny. ■

(III.120) TWIERDZENIE. Dla dowolnej macierzy A i dowolnego $n \in \mathfrak{N}$

$$(III.121) \quad \det_n A = \sum_{j=1}^n a_{1j} a_{n/1j}.$$

Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego, ponieważ w rozpatrywanym przypadku szczególnym nie jest potrzebne założenie o przemienności pierścienia. ■

Wzór (III.118) dla $k=l$ nazywamy *rozwinięciem wyznacznika $\det_n A$ względem k -tego wiersza*, a wzór (III.119) dla $k=l$ — *rozwinięciem tego wyznacznika względem k -tej kolumny*.

Wzór (III.121) jest zatem rozwinięciem wyznacznika $\det_n A$ względem pierwszego wiersza.

(III.122) PRZYKŁAD. Obliczymy wyznacznik trzeciego stopnia macierzy (i) rozwijając go według pierwszego wiersza zgodnie ze wzorem (III.121). Mamy

$$\begin{aligned} \det_3 A &= a_{11} \cdot \det_2 \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \det_2 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \det_2 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

zgodnie z wynikiem już poprzednio otrzymanym. ■

Obliczanie wyznacznika stopnia $n > 3$ danej macierzy wykonuje się zazwyczaj przez rozwinięcie tego wyznacznika względem któregoś wiersza lub którejś kolumny. Jeśli mamy do czynienia z macierzą nad pierścieniem nieprzemiennym, to korzystamy ze wzoru (III.121), czyli rozwijamy wyznacznik względem pierwszego wiersza. Jeśli mamy natomiast do czynienia z macierzą nad pierścieniem przemennym, to wykorzystujemy wzory (III.118) albo (III.119). Najczęściej przed tym wykorzystujemy jeszcze twierdzenie (III.111), aby do wybranego wiersza lub kolumny wprowadzić zera, co ułatwia późniejsze rozwinięcie.

(III.123) PRZYKŁAD. Obliczymy wyznacznik czwartego stopnia macierzy nad pierścieniem (przemennym) liczb całkowitych

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

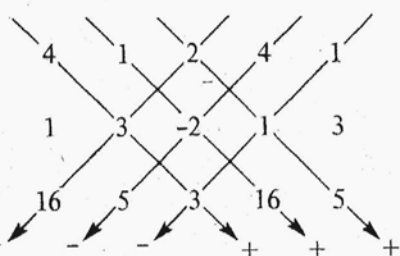
Ze względu na występujące zera dążymy do rozwinięcia wyznacznika $\det_4 A$ względem drugiego wiersza. Przed tym jednak dodamy do pierwszej kolumny potrojoną kolumnę trzecią, aby wprowadzić do drugiego wiersza jeszcze jedno zero. Na mocy twierdzenia (III.111) mamy

$$\det_4 A = \det_4 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 16 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

a rozwijając ten wyznacznik względem drugiego wiersza według wzoru (III.118)

$$\det_4 A = -2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det_3 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 16 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det_3 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 16 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Posługując się teraz regułą Sarrusa mamy według schematu



$$\det_3 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 16 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 36 + (-32) + 10 - 96 - (-40) - 3 = -45,$$

skąd $\det_4 A = -90$. ■

(III.124) PRZYKŁAD. Dla zilustrowania twierdzeń (III.106) i (III.107) rozpatrzmy macierze nad pierścieniem \mathcal{A}

$$A := \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Dla pierwszej z nich mamy $\det_2 A = ab - ab = 0$, zgodnie z twierdzeniem (III.106). Dla drugiej natomiast jest $\det_2 B = ab - ba$ i $\det_2 B = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ab = ba$. Stąd założenie o przemienności w twierdzeniu (III.107). ■

(III.125) TWIERDZENIE. ROZWINIĘCIE LAPLACE'A I. Dla dowolnych macierzy $A_{[p,n]}$, $B_{[n-p,n]}$, $C_{[n]}$ ($1 \leq p \leq n-1$) nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A}

$$C_{[n]} = \begin{bmatrix} A_{[p,n]} \\ B_{[n-p,n]} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det_n C = (-1)^{\frac{p^2+p}{2}} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_p) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n}} (-1)^{k_1 + \dots + k_p} A \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ k_1, \dots, k_p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1, \dots, n-p \\ l_1, \dots, l_{n-p} \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\{l_1, \dots, l_{n-p}\} = \{1, \dots, n\} - \{k_1, \dots, k_p\} \wedge l_1 < \dots < l_{n-p}.$$

Dowód. Na mocy (III.87)

$$\det_n C = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_n) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} b_{1j_{p+1}} \dots b_{n-p, j_n}$$

i na mocy twierdzenia (III.85)

$$\det_n C = (-1)^{\frac{p^2+p}{2}} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{j_1 + \dots + j_p} \sigma(j_1, \dots, j_p) \sigma(j_{p+1}, \dots, j_n) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} b_{1j_{p+1}} \dots b_{n-p, j_n},$$

Niech

$$(k_1, \dots, k_p) := \langle j_1, \dots, j_p \rangle, \quad (l_1, \dots, l_{n-p}) := \langle j_{p+1}, \dots, j_n \rangle.$$

Wtedy $j_1 + \dots + j_p = k_1 + \dots + k_p$ oraz

$$\det_n C = (-1)^{\frac{p^2+p}{2}} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_p) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n}} (-1)^{k_1 + \dots + k_p} \left(\sum_{\substack{(j_1, \dots, j_p) \\ (j_1, \dots, j_p) = (k_1, \dots, k_p)}} \sigma(j_1, \dots, j_p) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} \right) \times \\ \times \left(\sum_{\substack{(r_1, \dots, r_{n-p}) \\ (r_1, \dots, r_{n-p}) = (l_1, \dots, l_{n-p})}} \sigma(r_1, \dots, r_{n-p}) \cdot b_{1r_1} \dots b_{(n-p)r_{n-p}} \right),$$

gdzie $r_u := j_{p+u}$ dla $u = 1, \dots, n-p$. Stąd wynika teza. ■

(III.126) TWIERDZENIE. ROZWINIĘCIE LAPLACE'A II. Dla dowolnych macierzy $A_{[n,p]}$, $B_{[n,n-p]}$, $C_{[n]}$ ($1 \leq p \leq n-1$) nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A}

$$(vii) \quad C_{[n]} = [A_{[n,p]} \quad B_{[n,n-p]}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det_n C = (-1)^{\frac{p^2+p}{2}} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_p) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n}} (-1)^{k_1 + \dots + k_p} A \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} l_1, \dots, l_{n-p} \\ 1, \dots, n-p \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\{l_1, \dots, l_{n-p}\} = \{1, \dots, n\} - \{k_1, \dots, k_p\} \wedge l_1 < \dots < l_{n-p}.$$

Dowód. Wprowadzamy macierze

$$P_{[n,n+p]} := [A_{[n,p]} \quad I_{[n]}], \quad Q_{[n+p,n]} := \begin{bmatrix} I_{[p]} & O_{[p,n-p]} \\ O_{[n,p]} & B_{[n,n-p]} \end{bmatrix}.$$

Mamy $C = PQ$ i na mocy twierdzenia (III.112) (tzn. wzoru Bineta-Cauchy'ego)

$$(viii) \quad \det_n C = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq n+p}} P \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ j_1, \dots, j_n \end{pmatrix} \cdot Q \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że jeżeli $(j_1, \dots, j_p) \neq (1, \dots, p)$, to $Q \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix}$ jest wyznacznikiem macierzy, która pomiędzy pierwszymi p kolumnami zawiera co najmniej jedną zerową, skąd na mocy twierdzenia (III.102) $Q \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix} = 0$. Wobec tego możemy ograniczyć się do ciągów postaci $(1, \dots, p, j_{p+1}, \dots, j_n)$, gdzie $p+1 \leq j_{p+1} < \dots < j_n \leq n+p$. Kładąc $l_r = j_{p+r}$ dla $r = 1, \dots, n-p$, otrzymujemy na mocy twierdzenia (III.116)

$$(ix) \quad Q \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} l_1, \dots, l_{n-p} \\ 1, \dots, n-p \end{pmatrix}.$$

Mamy dalej

$$P \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ j_1, \dots, j_n \end{pmatrix} = \det_n [A_{[n,p]} \quad R_{[n,n-p]}],$$

gdzie R jest macierzą utworzoną przez kolumny macierzy $I_{[n]}$ o numerach l_1, \dots, l_{n-p} . Przesuwając w macierzy $[A_{[n,p]} \quad R_{[n,n-p]}]$ — drogą $(p+1) - l_1$ zamian sąsiednich wierszy —

l_1 -szy wiersz na miejsce $(p+1)$ -sze, następnie – drogą $(p+2)-l_2$ zamian – l_2 -gi wiersz na miejsce $(p+2)$ -gie itd., po

$$\sum_{u=1}^{n-p} (p+u-l_u) = (n-p)p + (1+\dots+(n-p)) - ((1+\dots+n) - (k_1+\dots+k_p)) =$$

$$= k_1 + \dots + k_p - \frac{p^2+p}{2}$$

zamianach sąsiednich wierszy, gdzie $\{k_1, \dots, k_p\} = \{1, \dots, n\} - \{l_1, \dots, l_{n-p}\} \wedge k_1 < \dots < k_p$, otrzymujemy na mocy twierdzeń (III.104) i (III.116)

$$(x) \quad P \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ j_1, \dots, j_n \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{p^2+p}{2}} (-1)^{k_1+\dots+k_p} A \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix}.$$

Po podstawieniu (ix) i (x) do wzoru (viii) i uwzględnieniu, że sumowanie po wszystkich możliwych ciągach $(1, \dots, p, j_{p+1}, \dots, j_n) = (1, \dots, p, l_1, \dots, l_{n-p})$ jest równoważne sumowaniu po wszystkich możliwych ciągach (k_1, \dots, k_p) , otrzymamy tezę. ■

(III.127) PRZYKŁAD. Obliczymy wyznacznik z przykładu (III.123) opierając się na twierdzeniu (III.125) dla $p=2$. Mamy

$$A_{[2,4]} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{[2,4]} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\det_4 C = - \left(-A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 3, 4 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 3 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 4 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 4 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 3 \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 3 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 4 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 4 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 3 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 3, 4 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det_2 \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \det_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \det_2 \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \det_2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \det_2 \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \det_2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \det_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \det_2 \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} -$$

$$- \det_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \det_2 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \det_2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \det_2 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -90. \quad \blacksquare$$

(III.128) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{[n]}^D$ jest macierzą dołączoną n -tego stopnia macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem przemennym z transpozycją \mathcal{A} , to

$$A_{[n]} A_{[n]}^D = A_{[n]}^D A_{[n]} = \det_n A \cdot I_{[n]} \quad (I_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]).$$

Dowód wynika ze wzorów (III.94), (III.118) i (III.119). ■

(III.129) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą regularną to dla dowolnego $n \in \mathfrak{N}$

$$\det_n A_{[n]}^D = (\det_n A)^{n-1}.$$

Dowód. Z twierdzeń (III.128), (III.113) i (III.109) wynika, że

$$\det_n A \cdot \det_n A_{[n]}^D = (\det_n A)^n,$$

skąd w przypadku $\det_n A \neq 0$ otrzymujemy żadaną własność. Gdy $\det_n A = 0$, zauważmy, że można ograniczyć się do przypadku $A = A_{[n]}$, ponieważ to nie zmienia ogólności w stosunku do macierzy $A_{[n]}^D$ i wyznacznika $\det_n A$. Na mocy twierdzenia (III.128) mamy wtedy

$$A_{[n]} A_{[n]}^D = O, \quad A_{[n]}^D (A_{[n]}^D)^D = \det_n A_{[n]}^D \cdot I_{[n]},$$

skąd

$$A_{[n]} \cdot A_{[n]}^D (A_{[n]}^D)^D = A \cdot \det_n A_{[n]}^D \cdot I_{[n]} = O,$$

a następnie

$$A_{[n]} = O \vee \det_n A_{[n]}^D = 0.$$

Ponieważ $A_{[n]} = O \Rightarrow A_{[n]}^D = O \Rightarrow \det_n A_{[n]}^D = 0$, więc i w tym przypadku otrzymujemy żadaną własność. ■

(III.130) DEFINICJA. Wyznacznikiem Vandermonde'a n -tego stopnia ($n \geq 2$) nazywamy wyznacznik

$$v(x_1, \dots, x_n) := \det_n \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie $1, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}$, a \mathcal{A} jest pierścieniem przemiennym z transpozycją. ■

(III.131) TWIERDZENIE. Wyznacznik Vandermonde'a

$$(III.132) \quad v(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\substack{j, k \in \{1, \dots, n\} \\ j > k}} (x_j - x_k).$$

Dowód. Przeprowadzamy indukcję zupełną. Dla $n=2$ wzór (III.132) jest oczywisty. Na mocy twierdzenia (III.111) i wzoru (III.118) dla $k=l=1$ mamy

$$\begin{aligned} v(x_1, \dots, x_{m+1}) &= \det_{m+1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ x_1 - x_{m+1} & \dots & x_m - x_{m+1} & x_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^m - x_{m+1}^m & \dots & x_m^m - x_{m+1}^m & x_{m+1}^m \end{bmatrix} = \\ &= (-1)^m \det_m \begin{bmatrix} x_1 - x_{m+1} & \dots & x_m - x_{m+1} \\ x_1^2 - x_{m+1}^2 & \dots & x_m^2 - x_{m+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^m - x_{m+1}^m & \dots & x_m^m - x_{m+1}^m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

a stąd na mocy twierdzenia (III.108)

$$v(x_1, \dots, x_{m+1}) = (x_{m+1} - x_1) \dots (x_{m+1} - x_m) \times$$

$$\times \det_m \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 + x_{m+1} & \dots & x_m + x_{m+1} \\ x_1^2 + x_1 x_{m+1} + x_{m+1}^2 & \dots & x_m^2 + x_m x_{m+1} + x_{m+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{m-1} + x_1^{m-2} x_{m+1} + \dots + x_{m+1}^{m-1} & \dots & x_m^{m-1} + x_m^{m-2} x_{m+1} + \dots + x_{m+1}^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Odejmując od l -tego wiersza $(l-1)$ -szy pomnożony przez x_{m+1} kolejno dla $l=m, m-1, \dots, 2$ otrzymujemy na mocy twierdzenia (III.111)

$$v(x_1, \dots, x_{m+1}) = (x_{m+1} - x_1) \dots (x_{m+1} - x_m) \cdot v(x_1, \dots, x_m).$$

Jeżeli zatem wzór (III.132) jest prawdziwy dla $n=m$, to jest również prawdziwy dla $n=m+1$. ■

(III.133) PRZYKŁAD. Obliczmy wyznacznik Vandermonde'a

$$v(1, 2, 3, 4) := \det_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}.$$

Na mocy (III.132) mamy

$$v(1, 2, 3, 4) = (2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3) = 12. \quad \blacksquare$$

§ III.6. Odwrotności macierzy

Ponieważ macierze są elementami pierścienia macierzowego, odnosi się do nich wszystko, co było powiedziane na temat lewych i prawych odwrotności oraz odwrotności w § 1.4. A zatem *lewą (prawą) odwrotnością macierzy* A z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy każdą taką macierz $X \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że

$$(III.134) \quad XA = I \quad (AX = I),$$

a *odwrotnością macierzy* $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ taką macierz $A^{-1} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że

$$(III.135) \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

gdzie $I \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$. Zauważmy jednak, że iloczyn macierzy skończonej, zarówno lewostronny jak i prawostronny, przez dowolną inną macierz jest zawsze macierzą skończoną, natomiast macierz I jest nieskończona, wobec czego żadna macierz skończona nie ma odwrotności w sensie (III.135), ani nawet odwrotności lewych czy prawych w sensie (III.134). Ponieważ w teorii macierzy główną rolę odgrywają macierze skończone, więc pojęcie odwrotności w sensie (III.135) czy (III.134) nie odgrywa większej roli, wprowadzamy natomiast inne.

(III.136) DEFINICJA. *Lewą (prawą) quasi-odwrotnością n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) macierzy* $A_{[p,n]}(A_{[n,q]})$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy każdą taką macierz $X_{[n,p]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ($X_{[q,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$), dla której istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}$ nie będący dzielnikiem zera, że

$$XA = \alpha I_{[n]} \quad (AX = \alpha I_{[n]}).$$

Lewą (prawą) odwrotnością n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) macierzy $A_{[p,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ($A_{[n,q]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$) nazywamy każdą taką macierz $X_{[n,p]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ($X_{[q,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$), że

$$XA = I_{[n]} \quad (AX = I_{[n]}). \quad \blacksquare$$

(III.137) DEFINICJA. *Quasi-odwrotnością n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) macierzy $A_{[n]}$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy każdą taką macierz $A_{[n]}^- \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, dla której istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}$ nie będący dzielnikiem zera, że*

$$(III.138) \quad A_{[n]}^- A = A A_{[n]}^- = \alpha I_{[n]}.$$

Odwrotnością n -tego stopnia ($n \in \mathfrak{N}$) macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy taką macierz $A_{[n]}^{-1} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że

$$(III.139) \quad A_{[n]}^{-1} A = A A_{[n]}^{-1} = I_{[n]}.$$

Macierz $A_{[n]}$ nazywamy *quasi-odwracalną (odwracalną) w n -tym stopniu* wtedy i tylko wtedy, gdy ma quasi-odwrotność (odwrotność) n -tego stopnia. ■

Wszystkie macierze n -tego stopnia nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} tworzą podpierścień macierzowy (III.47) pierścienia macierzowego (III.7). W tym podpierścieniu odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^{-1}$ dowolnej macierzy $A_{[n]}$ jest zwykłą odwrotnością w sensie przedstawionym w § I.4. Wobec tego z twierdzenia (I.117) wynika, że, jeżeli macierz $A_{[n]}$ ma odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^{-1}$, to ma ją tylko jedną. Zauważmy ponadto, że dla macierzy nad ciałem pojęcia macierzy quasi-odwracalnej w n -tym stopniu i macierzy odwracalnej w n -tym stopniu pokrywają się.

(III.140) TWIERDZENIE. *Macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest quasi-odwracalna (odwracalna) w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest quasi-nieosobliwa (nieosobliwa) w n -tym stopniu. Jeżeli $A_{[n]}$ jest odwracalna w n -tym stopniu, to*

$$(III.141) \quad A_{[n]}^{-1} = (\det_n A)^{-1} A_{[n]}^D,$$

gdzie $A_{[n]}^D$ jest macierzą⁴ dołączoną n -tego stopnia macierzy A .

Dowód. Jeżeli macierz A ma quasi-odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^-$, to spełnia warunek (III.138) i na mocy twierdzeń (I.111) i (III.113) element

$$\det_n A_{[n]}^- \cdot \det_n A = \det_n A \det_n A_{[n]}^- = \alpha^n$$

nie jest dzielnikiem zera, skąd $\det_n A$ nie jest dzielnikiem zera, czyli A jest macierzą quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu. Jeżeli — odwrotnie — A jest macierzą quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu, to na mocy twierdzenia (III.128) ma quasi-odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^D$.

Jeżeli macierz A ma odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^{-1}$, to spełnia warunek (III.139) i na mocy twierdzenia (III.113)

$$(III.142) \quad \det_n A_{[n]}^{-1} \cdot \det_n A = \det_n A \cdot \det_n A_{[n]}^{-1} = 1,$$

skąd wynika, że $\det_n A$ jest elementem odwracalnym i A jest zatem macierzą nieosobliwą w n -tym stopniu. Jeżeli — odwrotnie — A jest macierzą nieosobliwą w n -tym stopniu, to istnieje macierz (III.141), która na mocy twierdzenia (III.128) spełnia warunek (III.139) i jest wobec tego odwrotnością n -tego stopnia macierzy A . ■

(III.143) TWIERDZENIE. *Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} i istnieje taka macierz $X_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, że $XA = I_{[n]}$ albo $AX = I_{[n]}$, to X jest odwrotnością n -tego stopnia macierzy A . Jeżeli natomiast istnieje taka macierz $X_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i taki*

element $\alpha \in \mathcal{A}$ nie będący dzielnikiem zera, że $XA = \alpha I_{[n]}$ albo $AX = \alpha I_{[n]}$, to X jest quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy A .

Dowód. Jeżeli $A_{[n]}$ jest macierzą nad pierścieniem przemiennym z transpozycją i $XA = I_{[n]}$ albo $AX = I_{[n]}$, to na mocy twierdzenia (III.113) $\det_n X \cdot \det_n A = \det_n A \cdot \det_n X = 1$, co oznacza, że A jest macierzą nieosobliwą w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (III.140) ma odwrotność n -tego stopnia (III.141). Jeżeli $XA = I_{[n]}$, to $XAA_{[n]}^{-1} = A_{[n]}^{-1}$, skąd $X = A_{[n]}^{-1}$. Jeżeli $AX = I_{[n]}$, to $A_{[n]}^{-1}AX = A_{[n]}^{-1}$, skąd $X = A_{[n]}^{-1}$.

Jeżeli $XA = \alpha I_{[n]}$, gdzie α nie jest dzielnikiem zera, to na mocy twierdzeń (I.111) i (III.113) $\det_n X \cdot \det_n A = \alpha^n$ nie jest dzielnikiem zera, skąd A jest macierzą quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (III.140) istnieje taka jej quasi-odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^{-1}$ i taki element $\beta \in \mathcal{A}$ nie będący dzielnikiem zera, że $AA_{[n]}^{-1} = A_{[n]}^{-1}A = \beta I_{[n]}$. Wobec tego $XAA_{[n]}^{-1} = \alpha A_{[n]}^{-1}$ i $\beta X = \alpha A_{[n]}^{-1}$, a stąd $\beta AX = \alpha AA_{[n]}^{-1} = \alpha \beta I_{[n]}$, skąd $AX = \alpha I_{[n]}$. Analogicznie dowodzimy, że $AX = \alpha I_{[n]} \Rightarrow XA = \alpha I_{[n]}$. Na mocy (III.138) X jest quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy A . ■

(III.144) PRZYKŁAD. Na mocy twierdzenia (III.140) macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z} ma odwrotność n -tego stopnia wtedy i tylko wtedy, gdy $\det_n A = \pm 1$. Obliczmy odwrotność trzeciego stopnia macierzy nad pierścieniem \mathcal{Z} :

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

posługując się wzorami (III.141), (III.94) i (III.92). Mamy

$$\begin{aligned} \mu_{3/11} &= \det_2 \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 1, & \mu_{3/12} &= \det_2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2, & \mu_{3/13} &= \det_2 \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 10, \\ \mu_{3/21} &= \det_2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = -2, & \mu_{3/22} &= \det_2 \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -5, & \mu_{3/23} &= \det_2 \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = -25, \\ \mu_{3/31} &= \det_2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = 1, & \mu_{3/32} &= \det_2 \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 3, & \mu_{3/33} &= \det_2 \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 14, \end{aligned}$$

$$A_{[3]}^p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 10 & 25 & 14 \end{bmatrix}.$$

Rozwijając wyznacznik $\det_3 A$ względem pierwszego wiersza, mamy

$$\det_3 A = -5\mu_{3/11} - 3\mu_{3/12} + 1\mu_{3/13} = -1,$$

wobec czego odwrotność trzeciego stopnia A_3^{-1} istnieje i na mocy (III.141)

$$A_{[3]}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -10 & -25 & -14 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

(III.145) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $B_{[n]}$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest quasi-odwrotnością (odwrotnością) n -tego stopnia macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, to macierz $A_{[n]}$ jest quasi-odwrotnością (odwrotnością) n -tego stopnia macierzy $B_{[n]}$.

Dowód wynika bezpośrednio z definicji (III.137). ■

(III.146) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest quasi-nieosobliwa (nieosobliwa) w n -tym stopniu, to macierz $A_{[n]}^-$ ($A_{[n]}^{-1}$) jest również quasi-nieosobliwa (nieosobliwa) w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzenia (III.140) i (III.145). ■

(III.147) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją nieosobliwej w n -tym stopniu

$$(III.148) \quad \det_n A_{[n]}^{-1} = (\det_n A)^{-1}.$$

Dowód wynika ze wzoru (III.142). ■

(III.149) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ ma quasi-odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^-$, to macierze \bar{A} , A^T , A^* mają odpowiednio następujące quasi-odwrotności n -tego stopnia:

$$(III.150) \quad (\bar{A})_{[n]}^- = \overline{(A_{[n]}^-)}, \quad (A^T)_{[n]}^- = (A_{[n]}^-)^T, \quad (A^*)_{[n]}^- = (A_{[n]}^-)^*.$$

Jeżeli macierz $A_{[n]}$ ma odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^{-1}$, to macierze \bar{A} , A^T , A^* mają odpowiednio następujące odwrotności n -tego stopnia:

$$(III.151) \quad (\bar{A})_{[n]}^{-1} = \overline{(A_{[n]}^{-1})}, \quad (A^T)_{[n]}^{-1} = (A_{[n]}^{-1})^T, \quad (A^*)_{[n]}^{-1} = (A_{[n]}^{-1})^*.$$

Dowód. Z równości $AA_{[n]}^- = A_{[n]}^-A = \alpha I_{[n]}$, gdzie α nie jest dzielnikiem zera, wynika, że $\bar{A}(\bar{A}_{[n]}^-) = (\bar{A}_{[n]}^-)\bar{A} = \bar{\alpha}I_{[n]}$, gdzie $\bar{\alpha}$ nie jest dzielnikiem zera, skąd wynika pierwszy ze wzorów (III.150). Pozostałe wzory (III.150) i wzory (III.151) dowodzimy analogicznie. ■

(III.152) TWIERDZENIE. Jeżeli $A_{1[n]}^-, \dots, A_{k[n]}^-$ są quasi-odwrotnościami n -tego stopnia odpowiednio macierzy A_1, \dots, A_k n -tego stopnia nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} , to $A_{k[n]}^-, \dots, A_{1[n]}^-$ jest quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy $A_1 \dots A_k$. Jeżeli $A_{1[n]}^{-1}, \dots, A_{k[n]}^{-1}$ są odwrotnościami n -tego stopnia odpowiednio macierzy A_1, \dots, A_k n -tego stopnia z dowolnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, to

$$(III.153) \quad (A_1 \dots A_k)_{[n]}^{-1} = A_{k[n]}^{-1} \dots A_{1[n]}^{-1}.$$

Dowód. Z założenia istnieją takie elementy $\alpha_j \in \mathcal{A}$ nie będące dzielnikami zera ($j = 1, \dots, k$), że $A_j A_{j[n]}^- = A_{j[n]}^- A_j = \alpha_j I_{[n]}$. Wobec tego na mocy indukcji

$$\begin{aligned} (A_1 \dots A_k)(A_{k[n]}^- \dots A_{1[n]}^-) &= A_1 \dots A_{k-1} (A_k A_{k[n]}^-) A_{k-1[n]}^- \dots A_{1[n]}^- = \\ &= \alpha_k A_1 \dots A_{k-1} A_{k-1[n]}^- \dots A_{1[n]}^- = \dots = \alpha_k \dots \alpha_1 I_{[n]} = \alpha_1 \dots \alpha_k I_{[n]} \end{aligned}$$

i, analogicznie, $(A_{k[n]}^- \dots A_{1[n]}^-)(A_1 \dots A_k) = \alpha_1 \dots \alpha_k I_{[n]}$, skąd wynika pierwsza część tezy. Drugą dowodzimy analogicznie. ■

(III.154) TWIERDZENIE. Iloczyn macierzy n -tego stopnia nieosobliwych w n -tym stopniu nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest również macierzą nieosobliwą w n -tym

stopniu. Iloczyn macierzy n -tego stopnia quasi-nieosobliwych w n -tym stopniu nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest również macierzą quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu.

Dowód wynika z twierdzeń (III.140) i (III.152). ■

(III.155) TWIERDZENIE. *Quasi-odwrotność (w szczególności odwrotność) n -tego stopnia macierzy samosprężonej (macierzy symetrycznej, macierzy skośnie symetrycznej, macierzy hermitowskiej, macierzy skośnie hermitowskiej) jest również samosprężona (symetryczna, skośnie symetryczna, hermitowska, skośnie hermitowska).*

Dowód wynika ze wzorów (III.150) i (III.151). ■

(III.156) TWIERDZENIE. *Macierz trójkątna górna (dolna) $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest odwracalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jej wszystkie wyrazy diagonalne a_{11}, \dots, a_{nn} są odwracalne w \mathcal{A} . Jej odwrotność n -tego stopnia jest też macierzą trójkątną górną (dolną) o pierwszych n wyrazach diagonalnych $a_{11}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}$.*

Dowód. Macierz A jest odwracalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy $\det_n A = a_{11} \dots a_{nn}$ jest elementem odwracalnym w \mathcal{A} , a więc na mocy twierdzenia (I.123) wtedy i tylko wtedy, gdy elementy a_{11}, \dots, a_{nn} są odwracalne w \mathcal{A} . Na mocy twierdzenia (I.120) żaden z elementów a_{11}, \dots, a_{nn} nie jest wtedy dzielnikiem zera.

Przyjmijmy, że A jest macierzą trójkątną górną odwracalną w n -tym stopniu i że $X_{[n]}$ jest jej odwrotnością n -tego stopnia. Jest zatem $AX = I_{[n]}$. Mnożąc kolejne wiersze macierzy A , poczynając od n -tego, przez k -tą kolumnę macierzy X , otrzymujemy

$$a_{nn}x_{nk}=0, \quad a_{n-1,n-1}x_{n-1,k}+a_{n-1,n}x_{nk}=0, \quad \dots$$

$$\dots, \quad a_{k+1,k+1}x_{k+1,k}+\dots+a_{k+1,n}x_{nk}=0, \quad a_{kk}x_{kk}+\dots+a_{kn}x_{nk}=1, \quad k=1, \dots, n,$$

skąd, biorąc pod uwagę, że a_{nn}, \dots, a_{11} nie są dzielnikami zera, mamy $x_{nk}=\dots=x_{k+1,k}=0$ oraz $x_{kk}=a_{kk}^{-1}$.

Dowód dla macierzy trójkątnej dolnej jest analogiczny. ■

(III.157) TWIERDZENIE. *Macierz trójkątna górna (dolna) $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest quasi-odwracalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy jej wszystkie wyrazy diagonalne a_{11}, \dots, a_{nn} nie są dzielnikami zera. Jej quasi-odwrotność n -tego stopnia jest też macierzą trójkątną górną (dolną) o pierwszych n wyrazach diagonalnych nie będących dzielnikami zera.*

Dowód. Macierz A jest quasi-odwracalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy $\det_n A = a_{11} \dots a_{nn}$ nie jest dzielnikiem zera, czyli na mocy twierdzenia (I.111) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyrazy a_{11}, \dots, a_{nn} nie są dzielnikami zera. Dalszy dowód przebiega analogicznie, jak dla twierdzenia poprzedniego, jeżeli przyjąć, że $AX = \alpha I_{[n]}$, gdzie $\alpha \in \mathcal{A}$ nie jest dzielnikiem zera. ■

(III.158) TWIERDZENIE. *Macierz $A := \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest odwracalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyrazy*

a_{11}, \dots, a_{nn} są odwracalne w \mathcal{A} . Jest wtedy

$$(III.159) \quad (\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}))_{[n]}^{-1} = \text{diag}(a_{11}^{-1}_{[n]}, \dots, a_{nn}^{-1}_{[n]}).$$

Macierz A jest quasi-odwracalna w n -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy a_{11}, \dots, a_{nn} nie są dzielnikami zera, i jej quasi-odwrotność n -tego stopnia jest też macierzą diagonalną o pierwszych n wyrazach diagonalnych nie będących dzielnikami zera.

Dowód wynika z twierdzeń (III.156) i (III.157). ■

(III.160) TWIERDZENIE. Macierz $A_{[n_1 + \dots + n_k]} = \text{diag}(A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_k]}^{(k)})$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest odwracalna (quasi-odwracalna) w $(n_1 + \dots + n_k)$ -tym stopniu wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $A_{[n_s]}^{(s)}$ jest odwracalna (quasi-odwracalna) w n_s -tym stopniu dla każdego $s = 1, \dots, k$. Dla macierzy A odwracalnej jest wtedy

$$(III.161) \quad \text{diag}(A_{[n_1]}^{(1)}, \dots, A_{[n_k]}^{(k)})_{[n_1 + \dots + n_k]}^{-1} = \text{diag}((A_{[n_1]}^{(1)})_{[n_1]}^{-1}, \dots, (A_{[n_k]}^{(k)})_{[n_k]}^{-1}),$$

a dla macierzy A quasi-odwracalnej i dowolnych quasi-odwrotności $(A_{[n_1]}^{(1)})_{[n_1]}^{-1}, \dots, (A_{[n_k]}^{(k)})_{[n_k]}^{-1}$ macierz $\text{diag}((A_{[n_1]}^{(1)})_{[n_1]}^{-1}, \dots, (A_{[n_k]}^{(k)})_{[n_k]}^{-1})$ jest quasi-odwrotnością w $(n_1 + \dots + n_k)$ -tym stopniu macierzy A .

Dowód opiera się na rozumowaniu analogicznym do przeprowadzonego w dowodach twierdzeń (III.156), (III.157) i (III.158). ■

(III.162) TWIERDZENIE. W dowolnym pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest $I_{[n]}^{-1} = I_{[n]}$.

Dowód wynika wprost z definicji (III.137). ■

(III.163) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} jest odwracalna w n -tym stopniu, a α jest elementem odwracalnym w \mathcal{A} , to macierz αA jest też odwracalna w n -tym stopniu i

$$(III.164) \quad (\alpha A)_{[n]}^{-1} = \alpha^{-1} A_{[n]}^{-1}.$$

Jeżeli macierz $A_{[n]}$ jest quasi-odwracalna w n -tym stopniu, to dla każdego elementu $\alpha \in \mathcal{A}$ nie będącego dzielnikiem zera, macierz αA jest też quasi-odwracalna w n -tym stopniu i każda quasi-odwrotność $A_{[n]}^{-}$ macierzy A jest zarazem quasi-odwrotnością n -tego stopnia macierzy αA .

Dowód. Dla macierzy $A_{[n]}$ nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A} odwracalnej w n -tym stopniu mamy

$$(\alpha A)(\alpha^{-1} A_{[n]}^{-1}) = (\alpha \alpha^{-1})(A A_{[n]}^{-1}) = I_{[n]},$$

$$(\alpha^{-1} A_{[n]}^{-1})(\alpha A) = (\alpha^{-1} \alpha)(A_{[n]}^{-1} A) = I_{[n]},$$

skąd pierwsza część tezy i wzór (III.164). Dla macierzy $A_{[n]}$ quasi-odwracalnej w n -tym stopniu istnieje taka macierz $A_{[n]}^{-} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i taki element $\beta \in \mathcal{A}$ nie będący dzielnikiem zera, że $AA_{[n]}^{-} = A_{[n]}^{-}A = \beta I_{[n]}$, wobec czego

$$(\alpha A)A_{[n]}^{-} = \alpha(AA_{[n]}^{-}) = \alpha\beta I_{[n]}, \quad A_{[n]}^{-}(\alpha A) = \alpha(A_{[n]}^{-}A) = \alpha\beta I_{[n]},$$

gdzie $\alpha\beta$ nie jest dzielnikiem zera. Ze względu na dowolność quasi-odwrotności $A_{[n]}^{-}$ otrzymujemy stąd drugą część tezy. ■

(III.165) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A}

$$(III.166) \quad A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathcal{A},$$

jest nieosobliwa w drugim stopniu, tzn. element $\det_2 A = ad - bc$ jest odwracalny, to

$$(III.167) \quad A_{[2]}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Dowód wynika z twierdzenia (III.140) i wzoru (III.141). ■

(III.168) TWIERDZENIE. Jeżeli w pierścieniu macierzowym $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$

$$(III.169) \quad A_{[p+q]} := \begin{bmatrix} P_{[p]} & Q_{[p,q]} \\ R_{[q,p]} & S_{[q]} \end{bmatrix}, \quad P, Q, R, S \in \mathcal{M}[\mathcal{A}],$$

i jeżeli macierz P ma odwrotność p -tego stopnia $P_{[p]}^{-1}$, a macierz

$$(III.170) \quad M_{[q]} := RP_{[p]}^{-1}Q - S$$

ma odwrotność q -tego stopnia $M_{[q]}^{-1}$, to macierz A ma odwrotność $(p+q)$ -tego stopnia określoną wzorem:

$$(III.171) \quad A_{[p+q]}^{-1} = \begin{bmatrix} (P_{[p]}^{-1} - P_{[p]}^{-1}QM_{[q]}^{-1}RP_{[p]}^{-1})_{[p]} & (P_{[p]}^{-1}QM_{[q]}^{-1})_{[p,q]} \\ (M_{[q]}^{-1}RP_{[p]}^{-1})_{[q,p]} & (-M_{[q]}^{-1})_{[q]} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} P_{[p]}^{-1} & \\ & M_{[q]}^{-1} \end{bmatrix} \left(A - \begin{bmatrix} (QM_{[q]}^{-1}R)_{[p]} & \\ & (RP_{[p]}^{-1}Q)_{[q]} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} P_{[p]}^{-1} & \\ & M_{[q]}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Jeżeli natomiast macierz S ma odwrotność q -tego stopnia $S_{[q]}^{-1}$, a macierz

$$(III.172) \quad N_{[p]} := QS_{[q]}^{-1}R - P$$

ma odwrotność p -tego stopnia $N_{[p]}^{-1}$, to macierz A ma odwrotność $(p+q)$ -tego stopnia określoną wzorem:

$$(III.173) \quad A_{[p+q]}^{-1} = \begin{bmatrix} -N_{[p]}^{-1} & (N_{[p]}^{-1}QS_{[q]}^{-1})_{[p,q]} \\ (S_{[q]}^{-1}RN_{[p]}^{-1})_{[q,p]} & (S_{[q]}^{-1} - S_{[q]}^{-1}RN_{[p]}^{-1}QS_{[q]}^{-1})_{[q]} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} N_{[p]}^{-1} & \\ & S_{[q]}^{-1} \end{bmatrix} \left(A - \begin{bmatrix} (QS_{[q]}^{-1}R)_{[p]} & \\ & (RN_{[p]}^{-1}Q)_{[q]} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} N_{[p]}^{-1} & \\ & S_{[q]}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Dowód polega na sprawdzeniu, że odwrotności (III.171) i (III.173) spełniają warunki $AA_{[p+q]}^{-1} = A_{[p+q]}^{-1}A = I_{[p+q]}$. ■

(III.174) PRZYKŁAD. Obliczymy odwrotność czwartego stopnia macierzy nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} :

$$A_{[4]} := \begin{bmatrix} P_{[2]} & Q_{[2]} \\ R_{[2]} & S_{[2]} \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{cc|cc} -5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ \hline -3 & 0 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \end{array} \right],$$

korzystając z twierdzenia (III.168). Mamy na mocy (III.167)

$$P_{[2]}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{bmatrix},$$

$$M := RP_{[2]}^{-1}Q - S = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{17}{9} \end{bmatrix}, \quad M_{[2]}^{-1} = -\frac{18}{275} \begin{bmatrix} -\frac{17}{9} & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34}{275} & -\frac{42}{275} \\ -\frac{9}{55} & -\frac{18}{55} \end{bmatrix},$$

a następnie na mocy wzoru (III.171)

$$A_{[4]}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & -\frac{8}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{11} & -\frac{61}{275} & -\frac{34}{275} & \frac{42}{275} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{34}{55} & \frac{9}{55} & \frac{18}{55} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

§ III.7. Ślad macierzy skończonej

(III.175) DEFINICJA. Śladem macierzy skończonej $A \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nazywamy element

$$\text{tr } A := \sum_{j=1}^{\infty} a_{jj} \in \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

Symbol tr jest skrótem wyrazu angielskiego *trace* (=śląd). W literaturze spotyka się zamiast tr symbol Sp będący skrótem wyrazu niemieckiego *Spur* (=śląd).

Z definicji (III.175) wynika, że

$$(III.176) \quad \text{tr } A_{[n]} = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

(III.177) PRZYKŁAD. Dla macierzy nad ciałem liczb zespolonych \mathbb{C}

$$A_{[4]} := \begin{bmatrix} 3-i & 2i & 1-3i & 0 \\ -1 & 5+2i & 2+4i & -i \\ 0 & -6 & -8-3i & 7 \\ 1+i & 4 & 6 & 2-6i \end{bmatrix}$$

ślądem jest

$$\text{tr } A = (3-i) + (5+2i) + (-8-3i) + (2-6i) = 2-8i. \quad \blacksquare$$

(III.178) TWIERDZENIE. Dla dowolnych macierzy skończonych A i B nad pierścieniem z transpozycją \mathcal{A} i dowolnego elementu $\alpha \in \mathcal{A}$

$$(III.179) \quad \text{tr}(A+B) = \text{tr } A + \text{tr } B,$$

$$(III.180) \quad \text{tr}(\alpha A) = \alpha \cdot \text{tr } A,$$

$$(III.181) \quad \text{tr } \bar{A} = \overline{\text{tr } A}.$$

$$(III.182) \quad \operatorname{tr} A^T = (\operatorname{tr} A)^T,$$

$$(III.183) \quad \operatorname{tr} A^* = (\operatorname{tr} A)^*.$$

Dowód wynika wprost z definicji śladu macierzy skończonej. ■

(III.184) TWIERDZENIE. Dla dowolnych macierzy skończonych A i B nad pierścieniem przemiennym z transpozycją \mathcal{A}

$$(III.185) \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Dowód wynika z równości

$$(i) \quad \operatorname{tr}(AB) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} b_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{kj} a_{jk} = \operatorname{tr}(BA). \quad \blacksquare$$

(III.186) TWIERDZENIE. Dla dowolnych macierzy skończonych A i B nad pierścieniem przemiennym \mathcal{A} z transpozycją trywialną $a^T := a$ dla dowolnego $a \in \mathcal{A}$ jest:

$$(III.187) \quad \operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A,$$

$$(III.188) \quad \operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A},$$

$$(III.189) \quad \operatorname{tr}(A^* A) = \overline{\operatorname{tr}(A^* A)} = (\operatorname{tr}(A^* A))^* = \operatorname{tr}(AA^*),$$

$$(III.190) \quad \operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(AB^T) = \operatorname{tr}(B^T A) = \operatorname{tr}(BA^T),$$

$$(III.191) \quad \operatorname{tr}(A^* B) = \overline{\operatorname{tr}(AB^*)} = \overline{\operatorname{tr}(B^* A)} = \operatorname{tr}(BA^*).$$

Dowód. Wzory (III.187) i (III.188) wynikają z (III.182) i (III.183). Równość $\operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(B^T A)$ wynika z (III.187), a równości $\operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(BA^T)$ i $\operatorname{tr}(AB^T) = \operatorname{tr}(B^T A)$ z (III.185), skąd otrzymujemy (III.190). Analogicznie dowodzi się (III.191). Wzór (III.189) wynika z (III.191) dla $B=A$ oraz z (III.187). ■

(III.192) TWIERDZENIE. Dla dowolnej macierzy skończonej A nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} jest:

$$(III.193) \quad \operatorname{tr}(A^* A) = \operatorname{tr}(AA^*) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^* a_{jk} \geq 0,$$

$$(III.194) \quad \operatorname{tr}(A^* A) = 0 \Leftrightarrow A = O,$$

$$(III.195) \quad A^* A = O \Leftrightarrow AA^* = O \Leftrightarrow A = O.$$

Dowód. Na mocy definicji (I.156) pierścień $\operatorname{re} \mathcal{A}$ jest uporządkowany, $a_{jk}^* a_{jk} \in \operatorname{re} \mathcal{A}$ i $a_{jk}^* a_{jk} \geq 0$ dla $j, k \in \mathfrak{N}$. Stąd i ze wzoru (i) dla $B=A^*$ wynika wzór (III.193). Jeśli $A=O$, to $A^* A = O$ i $\operatorname{tr}(A^* A) = 0$. Jeżeli $\operatorname{tr}(A^* A) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^* a_{jk} = 0$, to na mocy (I.145) $a_{jk}^* a_{jk} = 0$, stąd $a_{jk} = 0 \vee a_{jk}^* = 0$, a stąd $a_{jk} = 0$ dla $j, k \in \mathfrak{N}$, czyli $A = O$. Wzór (III.195) wynika z (III.194) i (III.185). ■

Zauważmy, że dla dowolnej macierzy skończonej A nad pierścieniem częściowo uporządkowanym wzór (III.193) na mocy (I.166) przyjmuje postać

$$(III.196) \quad \operatorname{tr}(A^*A) = \operatorname{tr}(AA^*) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \geq 0.$$

Ślad macierzy wykorzystujemy, między innymi, dla przechodzenia od macierzy pierwszego stopnia $[a]$ do elementu a . Mamy mianowicie

$$(III.197) \quad \operatorname{tr}[a] = a.$$