

(IV.186) i (IV.187). Tworzą one układ ortogonalny i macierz

$$U_{[m,n]} := \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

jest wierszowo ortogonalna w m -tym stopniu. Ze wzorów (IV.186) i (IV.187) wynika ponadto istnienie takiej macierzy trójkątnej dolnej $T_{[m]}$ quasi-nieosobliwej w m -tym stopniu, że $U = TA$. Dowód dla macierzy $A_{[m,n]}$ kolumnowo pełnego rzędu n jest analogiczny. ■

(V.172) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} jest wierszowo pełnego rzędu m (kolumnowo pełnego rzędu n), to istnieje taka macierz trójkątna dolna $T_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ (trójkątna górna $T_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$) quasi-nieosobliwa w m -tym stopniu (w n -tym stopniu) i taka macierz $U_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ wierszowo quasi-ortonormalna w m -tym stopniu (kolumnowo quasi-ortonormalna w n -tym stopniu), że $U = TA$ ($U = AT$). Jeżeli ponadto pierścień \mathcal{A} jest ciałem, to istnieje taka macierz trójkątna dolna $T_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ (trójkątna górna $T_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$) nieosobliwa w m -tym stopniu (w n -tym stopniu) i taka macierz $U_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ wierszowo ortonormalna w m -tym stopniu (kolumnowo ortonormalna w n -tym stopniu), że $U = TA$ ($U = AT$).

Dowód wynika z twierdzeń (V.171), (V.56) i (V.57). ■

§ V.6. Twierdzenia o diagonalizacji

(V.173) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ istnieją takie macierze $M_{[m]}, N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ będące iloczynami macierzy elementarnych odpowiednio m -tego i n -tego stopnia, i taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że

$$(V.174) \quad MAN = aI_{[r]},$$

gdzie r jest rzędem macierzy A .

Dowód. Dla $A = O$ mamy $r = 0$ i przyjmując umowę, że $I_{[0]} = O$, mamy (V.174) dla dowolnych M, N i a , na przykład, dla $M = I_{[m]} = E_{[m]}^{(1)}(1, 1)$, $N = I_{[n]} = E_{[n]}^{(1)}(1, 1)$, $a = 1$. Możemy odąd założyć, że $A \neq O$ i $1 \leq r \leq \min(m, n)$. Rozważmy ciąg macierzy postaci

$$(i) \quad A_{[m,n]}^{(k)} := \begin{bmatrix} D_{[k]}^{(k)} & \\ & B_{[m-k, n-k]}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, \min(m, n),$$

$$A_{[m,n]}^{(0)} := B_{[m,n]}^{(0)} := A,$$

gdzie $D_{[k]}^{(k)}$, $k = 1, \dots, \min(m, n)$, jest macierzą diagonalną quasi-nieosobliwą w k -tym stopniu. Załóżmy, że istnieje wyraz $b_{u_k, v_k}^{(k)} \neq 0$, gdzie $1 \leq u_k \leq m - k$, $1 \leq v_k \leq n - k$. Mnożąc macierz $A^{(k)}$ lewostronnie przez macierz elementarną $E_{[m]}^{(k,1)} := E_{[m]}^{(1)}(k+1, k+u_k)$, a prawostronnie przez macierz elementarną $E_{[n]}^{(k,2)} := E_{[n]}^{(1)}(k+1, k+v_k)$, otrzymujemy macierz postaci

$$(ii) \quad E^{(k,1)} A^{(k)} E^{(k,2)} = \begin{bmatrix} D_{[k]}^{(k)} & \\ & C_{[m-k, n-k]}^{(k)} \end{bmatrix},$$

gdzie $c_{11}^{(k)} \neq 0$. Niech

$$F_{[m]}^{(k,1)} := \prod_{j=k+2}^m (E_{[m]}^{(2)}(j, k+1, -c_{j-k,1}^{(k)}) E_{[m]}^{(3)}(j, c_{11}^{(k)})),$$

$$F_{[n]}^{(k,2)} := \prod_{j=k+2}^n (E_{[n]}^{(3)}(j, c_{11}^{(k)}) E_{[n]}^{(2)}(k+1, j, -c_{1,j-k}^{(k)})),$$

czyli

$$(iii) \quad F_{[m]}^{(k,1)} = \begin{bmatrix} I_{[k]} & & & \\ & 1 & & \\ & -c_{21}^{(k)} c_{11}^{(k)} & & \\ & \vdots & & \\ & -c_{m-k,1}^{(k)} & & c_{11}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad F_{[n]}^{(k,2)} = \begin{bmatrix} I_{[k]} & & & \\ & 1 & -c_{12}^{(k)} & \dots & -c_{1,n-k}^{(k)} \\ & & c_{11}^{(k)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_{11}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Mnożąc macierz (ii) lewostronnie przez macierz $F^{(k,1)}$, a prawostronnie przez macierz $F^{(k,2)}$, otrzymujemy macierz, która w $(k+1)$ -ym wierszu i w $(k+1)$ -ej kolumnie ma tylko jeden wyraz różny od zera, a mianowicie $c_{11}^{(k)}$. Pozwala to przyjąć, że

$$(iv) \quad A_{[m,n]}^{(k+1)} = F^{(k,1)} E^{(k,1)} A E^{(k,2)} F^{(k,2)}.$$

W ciągu macierzy (i) związanych wzorem rekurencyjnym (iv) musi pojawić się macierz $A_{[m,n]}^{(r)} = D_{[r]}^{(r)} = \text{diag}(c_{11}^{(0)}, \dots, c_{11}^{(r-1)})$, gdzie $c_{11}^{(0)}, \dots, c_{11}^{(r-1)} \neq 0$. Mamy wtedy

$$(V.175) \quad F^{(1)} A F^{(2)} = D^{(r)},$$

gdzie

$$(v) \quad F^{(1)} := \prod_{j=0}^{r-1} (F^{(j,1)} E^{(j,1)}), \quad F^{(2)} := \prod_{j=0}^{r-1} (E^{(j,2)} F^{(j,2)}).$$

Na mocy twierdzenia (V.30) macierze A i $D^{(r)}$ mają ten sam rząd, skąd $r = r(A)$. Niech

$$D_{[m]}^- := \text{diag}(c_{11}^{(1)} \dots c_{11}^{(r-1)}, c_{11}^{(0)} c_{11}^{(2)} \dots c_{11}^{(r-1)}, \dots, c_{11}^{(0)} \dots c_{11}^{(r-2)}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-r \text{ razy}}),$$

czyli

$$D_{[m]}^- = E_{[m]}^{(3)}(1, c_{11}^{(1)} \dots c_{11}^{(r-1)}) E_{[m]}^{(3)}(2, c_{11}^{(0)} c_{11}^{(2)} \dots c_{11}^{(r-1)}) \dots E_{[m]}^{(3)}(r, c_{11}^{(0)} \dots c_{11}^{(r-2)}).$$

Mamy wtedy na mocy (V.175)

$$D_{[m]}^- F^{(1)} A F^{(2)} = (c_{11}^{(0)} \dots c_{11}^{(r-1)}) I_{[r]}$$

i kładąc $M := D_{[m]}^- F^{(1)}$, $N := F^{(2)}$, $a := c_{11}^{(0)} \dots c_{11}^{(r-1)}$, otrzymujemy tezę. ■

(V.176) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} istnieją takie macierze $M_{[m]}$, $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}]$ będące iloczynami macierzy elementarnych nieosobliwych w m -tym i n -tym stopniu, że

$$(V.177) \quad MAN = I_{[r]},$$

gdzie r jest rzędem macierzy A .

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego, ponieważ wszystkie macierze elementarne

p -tego stopnia ($p=m$ lub $p=n$) nad ciałem \mathcal{F} są nieosobliwe w p -tym stopniu, a równość (V.174) można po obu stronach pomnożyć lewostronnie przez iloczyn $E := E_{[m]}^{(3)} \left(1, \frac{1}{a}\right) \dots \dots E_{[m]}^{(3)} \left(r, \frac{1}{a}\right)$ otrzymując po prawej stronie macierz $I_{[r]}$, a po lewej zamiast M macierz EM , będącą iloczynem macierzy elementarnych nieosobliwych w m -tym stopniu. ■

(V.178) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem \mathcal{A} z podzielnością i funkcją porządkującą o wartościach całkowitych istnieje taka macierz diagonalna $D_{[r]} := \text{diag}(d_1, \dots, d_r) \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, $d_1, \dots, d_r \in \mathcal{A}$, quasi-nieosobliwa w r -tym stopniu, gdzie r jest rzędem macierzy A , i takie macierze $M_{[m]}$, $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, będące iloczynami macierzy elementarnych nieosobliwych odpowiednio w m -tym i w n -tym stopniu, że

$$(V.179) \quad MAN = D,$$

a ponadto $d_1, \dots, d_r \neq 0$ i element d_j ($j=2, \dots, r$) jest podzielny przez element d_{j-1} .

Dowód. Jeżeli $A=O$, to dla $D=O$, $M=I_{[m]}$, $N=I_{[n]}$ twierdzenie jest prawdziwe. Możemy zatem odtąd przyjąć, że $A \neq O$ i $1 \leq r \leq \min(m, n)$. Konstruujemy ciąg macierzy postaci (i), gdzie $D_{[k]}^{(k)} := \text{diag}(d_1, \dots, d_k)$, $d_1, \dots, d_k \neq 0$ i dla $k \geq 2$ d_j ($j=2, \dots, k$) jest podzielne przez d_{j-1} . Załóżmy, że w macierzy $B^{(k)}$ istnieje wyraz $b_{u_k v_k}^{(k)} \neq 0$ taki, że dla każdego jej niezerowego wyrazu $b_{ji}^{(k)}$ jest $\varphi(b_{ji}^{(k)}) \geq \varphi(b_{u_k v_k}^{(k)}) > 0$, gdzie φ jest funkcją porządkującą. Istnieją zawsze takie macierze elementarne $E^{(k,1)}$ i $E^{(k,2)}$ nieosobliwe odpowiednio w m -tym i w n -tym stopniu, że jest (ii), gdzie $c_{11}^{(k)} \neq 0$ i dla każdego niezerowego wyrazu $c_{ji}^{(k)}$ macierzy $C^{(k)}$ jest $\varphi(c_{ji}^{(k)}) \geq \varphi(c_{11}^{(k)}) > 0$. Do $(k+1)$ -ej kolumny macierzy (ii) stosujemy algorytm Euklidesa, co — jak łatwo spostrzec — dokonuje się przez lewostronne mnożenie według wzoru (I.326) przez odpowiednie macierze elementarne II rodzaju, nieosobliwe w m -tym stopniu. Jeżeli $c_{11}^{(k)}$ był dzielnikiem wszystkich wyrazów $(k+1)$ -ej kolumny, to w wyniku wraz $c_{11}^{(k)}$ pozostaje na swym miejscu, a inne wyrazy $(k+1)$ -ej kolumny ulegają wyzerowaniu. W przeciwnym razie jedynym niezerowym wyrazem $(k+1)$ -tej kolumny jest w wyniku algorytmu jakiś wyraz $\hat{c}_{11}^{(k)}$, który przez mnożenie lewostronne przez odpowiednią macierz elementarną I rodzaju sprowadzamy do $(k+1)$ -ego wiersza i dla którego jest

$$(vi) \quad \varphi(c_{11}^{(k)}) > \varphi(\hat{c}_{11}^{(k)}) > 0.$$

Stosując następnie algorytm Euklidesa — jak wyżej — na przemian do $(k+1)$ -ego wiersza (przez mnożenia prawostronne) i do $(k+1)$ -ej kolumny (przez mnożenia lewostronne), możemy przedłużyć ciąg (vi) jedynie o skończoną liczbę wyrazów, ponieważ jest on utworzony z liczb naturalnych. Musimy zatem dojść do macierzy, która w $(k+1)$ -ym wierszu i w $(k+1)$ -ej kolumnie ma tylko jeden wyraz niezerowy, wspólny dla tego wiersza i tej kolumny. Niech $\hat{\hat{C}}^{(k)}$ będzie macierzą otrzymaną w powyższy sposób z macierzy $C^{(k)}$, a $\hat{c}_{11}^{(k)}$ niech będzie wymienionym wyrazem niezerowym. Jest zatem $\hat{c}_{12}^{(k)} = \dots = \hat{c}_{1, n-k}^{(k)} = 0$ i $\hat{c}_{21}^{(k)} = \dots = \hat{c}_{m-k, 1}^{(k)} = 0$. Dla każdego niezerowego wyrazu $\hat{c}_{ji}^{(k)}$ macierzy $\hat{\hat{C}}^{(k)}$ istnieją takie elementy $q_{ji}^{(k)}$ i $r_{ji}^{(k)}$, że $\hat{c}_{ji}^{(k)} = q_{ji}^{(k)} \hat{c}_{11}^{(k)} + r_{ji}^{(k)}$ i $\varphi(r_{ji}^{(k)}) < \varphi(\hat{c}_{11}^{(k)})$. Jeżeli dla każdego wyrazu $\hat{c}_{ji}^{(k)}$

jest $r_{jl}^{(k)} = 0$, oznacza to, że $\hat{c}_{11}^{(k)}$ jest największym wspólnym dzielnikiem wyrazów macierzy $\hat{C}^{(k)}$. Jeżeli natomiast istnieje wyraz $\hat{c}_{jl}^{(k)} \neq 0$ taki, że $r_{jl}^{(k)} \neq 0$, to $\varphi(\hat{c}_{11}^{(k)}) > \varphi(r_{jl}^{(k)}) > 0$ i mnożąc macierz

$$\hat{A}^{(k)} := \begin{bmatrix} D_{[k]}^{(k)} & \\ & \hat{C}_{[m-k, n-k]}^{(k)} \end{bmatrix}$$

lewostronnie przez macierz elementarną $E_{[m]}^{(2)}(k+j, k+1, 1)$ nieosobliwą w m -tym stopniu, a prawostronnie przez macierz elementarną $E_{[n]}^{(2)}(k+1, k+l, -q_{jl}^{(k)})$ nieosobliwą w n -tym stopniu, otrzymujemy macierz, w której na miejscu wyrazu $\hat{c}_{jl}^{(k)}$ jest wyraz $r_{jl}^{(k)}$. Mamy wtedy $\varphi(c_{11}^{(k)}) \geq \varphi(\hat{c}_{11}^{(k)}) > \varphi(r_{jl}^{(k)}) > 0$. Powtarzając dla otrzymanej w rezultacie dokonanych mnożeń macierzy całe postępowanie od początku przedłużamy ten ciąg utworzony z liczb naturalnych. Wynika stąd, że można powyższe postępowanie powtórzyć tylko skończoną liczbę razy i wobec tego musimy dojść do takiej macierzy $\check{C}^{(k)}$, która w pierwszym wierszu i w pierwszej kolumnie ma tylko jeden wyraz niezerowy, a mianowicie $\check{c}_{11}^{(k)}$, a ponadto $\check{c}_{11}^{(k)}$ jest wspólnym dzielnikiem wszystkich wyrazów macierzy $\check{C}^{(k)}$. Oznacza to, że istnieją takie macierze $F_{[m]}^{(k,1)}, F_{[n]}^{(k,2)} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, będące iloczynami macierzy elementarnych nieosobliwych odpowiednio w m -tym i w n -tym stopniu, taka macierz $B_{[m-k-1, n-k-1]}^{(k+1)}$ i taki element $d_{k+1} = \check{c}_{11}^{(k)}$, że

$$F^{(k,1)} \begin{bmatrix} D_{[k]}^{(k)} & \\ & C_{[m-k, n-k]}^{(k)} \end{bmatrix} F^{(k,2)} = \begin{bmatrix} D_{[k]}^{(k)} & & \\ & d_{k+1} & \\ & & B_{[m-k-1, n-k-1]}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

i d_{k+1} jest wspólnym dzielnikiem wszystkich wyrazów macierzy $B^{(k+1)}$. Pozwala to napisać wzór rekurencyjny

$$(vii) \quad F^{(k,1)} E^{(k,1)} A^{(k)} E^{(k,2)} F^{(k,2)} = A^{(k+1)}$$

i stwierdzić, że d_{k+1} jest dzielnikiem wyrazów d_{k+2}, \dots, d_r , skąd wynika, że każdy wyraz d_j ($j=2, \dots, r$) jest podzielny przez d_{j-1} . Wzór (vii) jest analogiczny do (iv), ale o tyle różny, że obecnie $F^{(k,1)}, E^{(k,1)}, E^{(k,2)}, F^{(k,2)}$ są iloczynami macierzy elementarnych nieosobliwych odpowiednio w m -tym i w n -tym stopniu.

Analogicznie dochodzimy do wzoru (V.175) i kładąc $M := F^{(1)}, N := F^{(2)}$, otrzymujemy tezę. ■

(V.180) TWIERDZENIE. I PODSTAWOWE TWIERDZENIE O DIAGONALIZACJI. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest

$$(V.181) \quad A \sim_{[m,n]} I_{[r]},$$

gdzie r jest rzędem macierzy A .

Dowód wynika z (V.174). Na mocy bowiem twierdzeń (V.104) i (III.154) macierze M i N są quasi-nieosobliwe pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu i na mocy twierdzenia (III.140) istnieje taka macierz $N_{[n]}^-$ i taki element $v \in \mathcal{A}$, $v \neq 0$, że $NN_{[n]}^- = N_{[n]}^- N = vI_{[n]}$, skąd na mocy (V.174) $(vM)A = I_{[r]}(aN_{[n]}^-)$, gdzie vM i $aN_{[n]}^-$ są macierzami quasi-nieosobliwymi odpowiednio w m -tym i n -tym stopniu. Na mocy definicji relacji $\sim_{[m,n]}$

otrzymujemy stąd tezę. ■

(V.182) TWIERDZENIE. II PODSTAWOWE TWIERDZENIE O DIAGONALIZACJI. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} jest

$$(V.183) \quad A_{[m,n]} \approx I_{[r]},$$

gdzie r jest rzędem macierzy A .

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego, ponieważ w pierścieniu macierzowym nad ciałem pojęcia macierzy quasi-nieosobliwej w n -tym stopniu i macierzy nieosobliwej w n -tym stopniu pokrywają się. ■

(V.184) TWIERDZENIE. III PODSTAWOWE TWIERDZENIE O DIAGONALIZACJI. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem \mathcal{A} z podzielnością i funkcją porządkującą o wartościach całkowitych istnieje taka macierz diagonalna $D_{[r]} := \text{diag}(d_1, \dots, d_r) \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, $d_1, \dots, d_r \in \mathcal{A}$, quasi-nieosobliwa w r -tym stopniu, gdzie r jest rzędem macierzy A , że

$$(V.185) \quad A_{[m,n]} \approx D_{[r]},$$

a ponadto $d_1, \dots, d_r \neq 0$ i element d_j ($j=2, \dots, r$) jest podzielny przez element d_{j-1} .

Dowód wynika z twierdzenia (V.178), ponieważ wzór (V.179) jest równoważny wzorowi $MA = DN_{[n]}^{-1}$. ■

Z twierdzeń (V.173), (V.176) i (V.178) wynika, że przez działania elementarne można każdą macierz regularną $A_{[m,n]}$ sprowadzić do macierzy quasi-skalarnej r -tego stopnia, gdzie r jest rzędem macierzy A , każdą macierz $A_{[m,n]}$ nad ciałem do macierzy $I_{[r]}$, a każdą macierz regularną $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem z podzielnością z funkcją porządkującą o wartościach całkowitych do macierzy diagonalnej $D_{[r]}$ quasi-nieosobliwej w r -tym stopniu, której każdy wyraz diagonalny jest podzielny przez poprzedni wyraz diagonalny.

(V.186) PRZYKŁAD. Znajdziemy przekształcenie (V.179) dla macierzy

$$A_{[2,3]} := \begin{bmatrix} 2 & 33 & 57 \\ -6 & -60 & -102 \end{bmatrix}$$

nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z} (a więc pierścieniem z podzielnością z wartością bezwzględną jako funkcją porządkującą) wykonując wyłącznie działania elementarne odwracalne, co odpowiada mnożeniu lewostronnemu lub prawostronnemu przez macierze elementarne odwracalne odpowiednio w drugim lub trzecim stopniu. Możemy zatem – zgodnie z twierdzeniem (V.108) – wykonywać dowolne działania elementarne I i II rodzaju oraz mnożenie wierszy lub kolumn przez -1 . Zauważmy, że macierze M i N otrzymamy wychodząc z trzech macierzy $I_{[m]}$, A , $I_{[n]}$, jeżeli wszystkie działania elementarne na wierszach będziemy wykonywać równolegle na macierzach pierwszej i drugiej, a wszystkie działania elementarne na kolumnach równolegle na macierzach drugiej i trzeciej. Z chwilą, gdy druga macierz stanie się żadaną macierzą diagonalną, pierwszą będzie macierz M , a trzecią macierz N .

Rozpoczynamy zatem obliczenia od trzech macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 33 & 57 \\ -6 & -60 & -102 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Do drugiego wiersza macierzy pierwszej i drugiej dodajemy potrojony pierwszy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 33 & 57 \\ 0 & 39 & 69 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Od drugiej kolumny macierzy drugiej i trzeciej odejmujemy szesnastokrotną pierwszą, a od trzeciej dwudziestoósmiokrotną pierwszą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 39 & 69 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -16 & -28 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Od trzeciej kolumny macierzy drugiej i trzeciej odejmujemy drugą, a od pierwszej podwojoną drugą:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -78 & 39 & 30 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 33 & -16 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do pierwszej kolumny macierzy drugiej i trzeciej dodajemy potrojoną trzecią:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 12 & 39 & 30 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & -16 & -12 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Od trzeciej kolumny macierzy drugiej i trzeciej odejmujemy podwojoną pierwszą:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 12 & 39 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & -16 & -6 \\ -5 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Od pierwszej kolumny macierzy drugiej i trzeciej odejmujemy podwojoną trzecią:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 39 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & -16 & -6 \\ -23 & 1 & 9 \\ 13 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Od drugiego wiersza macierzy pierwszej i drugiej odejmujemy trzydziestodwiewięciokrotny pierwszy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -36 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & -16 & -6 \\ -23 & 1 & 9 \\ 13 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

W macierzach drugiej i trzeciej zamieniamy kolumny pierwszą i drugą:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -36 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -16 & 9 & -6 \\ 1 & -23 & 9 \\ 0 & 13 & -5 \end{bmatrix}.$$

W macierzach drugiej i trzeciej zamieniamy kolumny drugą i trzecią, i otrzymujemy ostatecznie

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -36 & 1 \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 1 & \\ & 6 \end{bmatrix}, \quad N := \begin{bmatrix} -16 & -6 & 9 \\ 1 & 9 & -23 \\ 0 & -5 & 13 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy, że zachodzi równość (V.179). ■

(V.187) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m, n]}$ wierszowo pełnego rzędu m z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest

$$(V.188) \quad A_{[m, n]} \stackrel{k}{\sim} I_{[m]}.$$

Dla każdej macierzy $A_{[m, n]}$ kolumnowo pełnego rzędu n z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ jest

$$(V.189) \quad A_{[m, n]} \stackrel{w}{\sim} I_{[n]}.$$

Dowód. Jeżeli A jest macierzą wierszowo pełnego rzędu m , to na mocy twierdzenia (V.12) można ją uzupełnić $n-m$ wierszami tworzącymi macierz $B_{[n-m, n]}$ tak, że macierz

$$N_{[n]} := \begin{bmatrix} A_{[m, n]} \\ B_{[n-m, n]} \end{bmatrix}$$

jest pełnego rzędu n i na mocy definicji (V.1) jest macierzą quasi-nieosobliwą w n -tym stopniu. Ponieważ zachodzi równość

$$(V.190) \quad A_{[m, n]} = I_{[m]} N_{[n]},$$

otrzymujemy stąd tezę. W przypadku macierzy kolumnowo pełnego rzędu n dowód jest analogiczny i zamiast równości (V.190) otrzymujemy

$$(V.191) \quad A_{[m, n]} = M_{[m]} I_{[n]},$$

gdzie $M_{[m]}$ jest macierzą quasi-nieosobliwą w m -tym stopniu. ■

§ V.7. Rozkład macierzy nieosobliwych i quasi-nieosobliwych

(V.192) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[n]}$ quasi-nieosobliwej w n -tym stopniu z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq 0$, że macierz αA jest iloczynem macierzy elementarnych n -tego stopnia.

Dowód. Na mocy twierdzeń (V.104) i (III.154) macierze M i N we wzorze (V.174) są w rozpatrywanym obecnie przypadku quasi-nieosobliwe w n -tym stopniu i jeżeli

$$(i) \quad M = E_1 \dots E_p, \quad N = F_1 \dots F_q,$$

gdzie $E_1, \dots, E_p, F_1, \dots, F_q$ są macierzami elementarnymi n -tego stopnia, których quasi-odwrotnościami n -tego stopnia, zgodnie z twierdzeniem (V.108), są macierze elementarne n -tego stopnia odpowiednio $E_1^-, \dots, E_p^-, F_1^-, \dots, F_q^-$, to na mocy twierdzenia (III.152) macierze

$$(ii) \quad M_{[n]}^- := E_p^- \dots E_1^-, \quad N_{[n]}^- := F_q^- \dots F_1^-$$

są quasi-odwrotnościami n -tego stopnia macierzy odpowiednio M i N i istnieją takie elementy $\mu, \nu \in \mathcal{A}$, $\mu, \nu \neq 0$, że $MM_{[n]}^- = M_{[n]}^- M = \mu I_{[n]}$ oraz $NN_{[n]}^- = N_{[n]}^- N = \nu I_{[n]}$. Wobec tego ze wzoru (V.174) otrzymujemy $\mu\nu A = M_{[n]}^- (aI_{[n]}) N_{[n]}^-$. Kładąc $\alpha := \mu\nu$, otrzymujemy stąd tezę, ponieważ

$$aI_{[n]} = \prod_{j=1}^n E_{[n]}^{(3)}(j, a). \quad \blacksquare$$

(V.193) TWIERDZENIE. Każda macierz $A_{[n]}$ nieosobliwa w n -tym stopniu z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} jest iloczynem macierzy elementarnych n -tego stopnia.

Dowód. Jeżeli w (V.177) jest (i), to na mocy twierdzeń (V.108) i (III.152) macierze

$$(iii) \quad M_{[n]}^{-1} := (E_p)_{[n]}^{-1} \dots (E_1)_{[n]}^{-1}, \quad N_{[n]}^{-1} := (F_q)_{[n]}^{-1} \dots (F_1)_{[n]}^{-1}$$

są również iloczynami macierzy elementarnych n -tego stopnia i na mocy (V.177) mamy $A = M_{[n]}^{-1} N_{[n]}^{-1}$, skąd wynika teza. \blacksquare

(V.194) TWIERDZENIE. Każda macierz $A_{[n]}$ nieosobliwa w n -tym stopniu z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nad pierścieniem \mathcal{A} z podzielnością z funkcją porządkującą o wartościach całkowitych jest iloczynem macierzy elementarnych n -tego stopnia nieosobliwych w n -tym stopniu.

Dowód. Na mocy twierdzenia (III.154) we wzorze (V.179) w rozpatrywanym obecnie przypadku macierz $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ jest nieosobliwa w n -tym stopniu. Na mocy twierdzenia (I.123) wszystkie elementy d_1, \dots, d_n są odwracalne w \mathcal{A} , wobec czego macierz

$$D = \prod_{j=1}^n E_{[n]}^{(3)}(j, d_j)$$

na mocy twierdzenia (V.108) jest iloczynem macierzy elementarnych n -tego stopnia nieosobliwych w n -tym stopniu. Jeżeli jest (i), to macierze (iii) są również iloczynami macierzy elementarnych n -tego stopnia nieosobliwych w n -tym stopniu i na mocy wzoru $A = M_{[n]}^{-1} D N_{[n]}^{-1}$ otrzymujemy tezę. \blacksquare

Z twierdzeń (V.193) i (V.194) wynika metoda obliczania odwrotności n -tego stopnia dla dowolnej macierzy regularnej $A_{[n]}$ nieosobliwej w n -tym stopniu nad dowolnym ciałem \mathcal{F} lub nad pierścieniem \mathcal{A} z podzielnością z funkcją porządkującą o wartościach

całkowitych. Jeżeli bowiem jest $A_{[n]}^{-1} A_{[n]} = A_{[n]} A_{[n]}^{-1} = I_{[n]}$ i $A_{[n]}^{-1} = E_1 \dots E_p$, gdzie E_1, \dots, E_p są macierzami elementarnymi n -tego stopnia odwracalnymi w n -tym stopniu, to

$$E_1 \dots E_p A = I_{[n]} \wedge E_1 \dots E_p I_{[n]} = A_{[n]}^{-1},$$

$$A E_1 \dots E_p = I_{[n]} \wedge I_{[n]} E_1 \dots E_p = A_{[n]}^{-1}.$$

Jeżeli zatem wyjdziemy z macierzy $A_{[n]}$ i $I_{[n]}$ i będziemy na obu równolegle wykonywać takie same działania elementarne na wierszach lub takie same działania elementarne na kolumnach, to z chwilą, gdy pierwszą sprowadzimy do $I_{[n]}$, jako drugą otrzymamy $A_{[n]}^{-1}$.

(V.195) PRZYKŁAD. Obliczymy macierz odwrotną w trzecim stopniu dla macierzy nad pierścieniem liczb całkowitych \mathcal{Z} (a więc pierścieniem z podzielnością z wartością bezwzględną jako funkcją porządkującą)

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozpoczynamy obliczenia od macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

i decydujemy się na działania elementarne na wierszach. Od pierwszego wiersza odejmujemy potrojony trzeci, a następnie od drugiego poczwórny trzeci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamieniamy wiersze pierwszy i trzeci:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Od drugiego wiersza odejmujemy poczwórny trzeci:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Od trzeciego wiersza odejmujemy drugi, a następnie zamieniamy wiersze drugi i trzeci:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -11 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Do pierwszego wiersza dodajemy drugi i otrzymujemy

$$I_{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{[3]}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -10 \\ 5 & -1 & -11 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

(V.196) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ rzędu r z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, że macierz aA można przedstawić jako iloczyn macierzy $F_{[m,r]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ kolumnowo pełnego rzędu r i macierzy $G_{[r,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ wierszowo pełnego rzędu r , tzn.

$$(V.197) \quad aA_{[m,n]} = F_{[m,r]} G_{[r,n]}.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia (V.180) istnieją takie macierze quasi-nieosobliwe $M_{[m]}$, $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu, że $MA = I_{[r]}N$. Niech $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, będzie takim elementem, a $M_{[m]}^{-1} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ taką macierzą, że $MM_{[m]}^{-1} = M_{[m]}^{-1}M = aI_{[m]}$, skąd $aA = M_{[m]}^{-1}I_{[r]}I_{[r]}N$. Kładąc $F := M_{[m]}^{-1}I_{[r]}$, $G := I_{[r]}N$, otrzymujemy wzór (V.197). Na mocy twierdzeń (V.21), (V.28) i wzoru (V.197) jest $r = r(A) = r(aA) \leq r(F)$ i $r = r(A) = r(aA) \leq r(G)$, a na mocy (V.5) jest $r(F) \leq r$ i $r(G) \leq r$, wobec czego $r(F) = r(G) = r$. Macierz F jest zatem macierzą kolumnowo pełnego rzędu r , a macierz G macierzą wierszowo pełnego rzędu r . \blacksquare

(V.198) TWIERDZENIE. Każdą macierz $A_{[m,n]}$ rzędu r z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, gdzie \mathcal{A} jest dowolnym ciałem lub pierścieniem z podzielnością z funkcją porządkującą o wartościach całkowitych, można przedstawić jako iloczyn macierzy $F_{[m,r]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ kolumnowo pełnego rzędu r i macierzy $G_{[r,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ wierszowo pełnego rzędu r , tzn.

$$(V.199) \quad A_{[m,n]} = F_{[m,r]} G_{[r,n]}.$$

Dowód. Na mocy twierdzeń (V.182) i (V.184) istnieje taka macierz diagonalna $D_{[r]}$ quasi-nieosobliwa w r -tym stopniu i takie macierze $M_{[m]}$, $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nieosobliwe pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu, że $MA = DN$, czyli $A = M_{[m]}^{-1}D_{[r]}I_{[r]}N_{[n]}$. Kładąc $F := M_{[m]}^{-1}D_{[r]}$ i $G := I_{[r]}N_{[n]}$, otrzymujemy wzór (V.199). Dalej dowód przebiega analogicznie jak dla twierdzenia poprzedniego. \blacksquare

Następujący przykład pokazuje, że nie dla każdej macierzy regularnej $A_{[m,n]}$ można we wzorze (V.197) przyjąć $a=1$, tzn. nie dla każdej macierzy regularnej $A_{[m,n]}$ zachodzi wzór (V.199).

(V.200) PRZYKŁAD. Niech

$$A_{[2]} := \begin{bmatrix} 2+2i & -2+2i \\ 2-2i & 2+2i \end{bmatrix}$$

będzie macierzą nad pierścieniem \mathcal{A} z przykładu (I.315). Macierz A jest rzędu 1, ponieważ $\det_2 A = 0$. Załóżmy, że zgodnie z (V.199)

$$(iv) \quad A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} [c \ d], \quad a, b, c, d \in \mathcal{A}.$$

Zatem

$$ac=2+2i, \quad ad=-2+2i, \quad bc=2-2i, \quad bd=2+2i.$$

Otrzymalibyśmy stąd

$$aci=ad, \quad -aci=bc.$$

Ponieważ $a \neq 0$ i $c \neq 0$, więc

$$(v) \quad b = -ai, \quad d = ci.$$

Ale elementy a, b, c, d należałyby do pierścienia \mathcal{A} , więc byłyby postaci

$$a = a_1 + 2a_2i, \quad b = b_1 + 2b_2i, \quad c = c_1 + 2c_2i, \quad d = d_1 + 2d_2i,$$

gdzie $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ byłyby liczbami całkowitymi i na mocy (v)

$$a_1 = -2b_2, \quad b_1 = 2a_2, \quad c_1 = 2d_2, \quad d_1 = -2c_2.$$

Zatem element 2 byłby dzielnikiem zarówno a jak i c , wobec czego element 4 byłby dzielnikiem $ac=2+2i$, co dałoby sprzeczność. Wynika stąd, że przedstawienie macierzy A w postaci (iv) nie jest możliwe. ■

(V.201) PRZYKŁAD. Znajdziemy przedstawienie macierzy A z poprzedniego przykładu w postaci (V.199) przy założeniu, że jest to macierz nad pierścieniem \mathcal{A} z przykładu (I.317), a więc nad pierścieniem z podzielnością z funkcją porządkującą o wartościach całkowitych. Jak w poprzednim przykładzie wykazujemy, że macierz A jest rzędu 1 i szukamy jej przedstawienia w postaci (iv), skąd dochodzimy do równości (v). Przyjmując $a=2$ i $c=1+i$, mamy spełnioną równość $ac=2+2i$, a na mocy (v) mamy $b=-2i$ oraz $d=-1+i$. Sprawdzamy, że

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2i \end{bmatrix} [1+i \quad -1+i].$$

Rzecz leży w tym, że występująca tu macierz $[1+i \quad -1+i]$ jest macierzą nad pierścieniem z przykładu (I.317), a nie jest macierzą nad pierścieniem z przykładu (I.315). ■

(V.202) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ wierszowo pełnego rzędu m (kolumnowo pełnego rzędu n) z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ istnieje taki element $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, i taka macierz $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ (macierz $M_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$) quasi-nieosobliwa w n -tym (w m -tym) stopniu, będąca iloczynem macierzy elementarnych n -tego (m -tego) stopnia, że

$$(V.203) \quad AN = aI_{[n]} \quad (MA = aI_{[m]}).$$

Dowód. Niech $A_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ będzie macierzą wierszowo pełnego rzędu m . Na mocy twierdzenia (V.187) istnieje taka macierz $N_{[n]}^- \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i taki element $v \in \mathcal{A}$, $v \neq 0$, że $NN_{[n]}^- = vI_{[n]}$ i $AN_{[n]}^- = vI_{[m]}$. Na mocy twierdzenia (V.192) istnieje taki element $\mu \in \mathcal{A}$, $\mu \neq 0$, że macierz $\mu N_{[n]}^-$ jest iloczynem macierzy elementarnych n -tego stopnia. Mamy $A(\mu N_{[n]}^-) = (\mu v)I_{[m]}$ i stąd otrzymujemy tezę. Dowód dla macierzy A kolumnowo pełnego rzędu n jest analogiczny. ■

(V.204) TWIERDZENIE. Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ wierszowo pełnego rzędu (kolumnowo pełnego rzędu n) z pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ nad ciałem z transpozycją \mathcal{F} istnieje taka macierz $N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}]$ (macierz $M_{[m]} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}]$) będąca iloczynem macierzy elementarnych n -tego (m -tego) stopnia, że

$$(V.205) \quad AN = I_{[m]} \quad (MA = I_{[n]}).$$

Dowód. Niech $A_{[m,n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{F}]$ będzie macierzą wierszowo pełnego rzędu m . Na mocy (V.190) jest $AN_{[n]}^{-1} = I_{[m]}$, skąd na mocy twierdzenia (V.193) wynika teza. Dowód dla macierzy A kolumnowo pełnego rzędu n jest analogiczny. ■

§ V.8. Nierówności Sylwestera i Frobeniusa

(V.206) TWIERDZENIE. NIERÓWNOŚĆ SYLWESTERA. Jeżeli $A_{[m,n]}$ i $B_{[n,p]}$ są macierzami z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, to

$$(V.207) \quad r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia (V.180) istnieją takie macierze $M_{[m]}, N_{[n]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ quasi-nieosobliwe pierwsza w m -tym, a druga w n -tym stopniu, że $MA = I_{[r]}N$, gdzie r jest rzędem macierzy A . Na mocy twierdzenia (V.30) $r(AB) = r(MAB)$, wobec czego

$$(i) \quad r(AB) = r(I_{[r]}NB).$$

Macierz $I_{[r]}NB$ ma $r(AB)$ liniowo niezależnych wierszy i $r - r(AB)$ związków liniowych między pierwszymi r wierszami. Ta liczba nie może przekraczać liczby związków liniowych między wierszami macierzy NB , tzn. $r - r(AB) \leq n - r(NB) = n - r(B)$. Stąd otrzymujemy (V.207). ■

(V.208) TWIERDZENIE. NIERÓWNOŚĆ FROBENIUSA. Jeżeli $A_{[m,n]}, B_{[n,p]}, C_{[p,q]}$ są macierzami z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, to

$$(V.209) \quad r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B).$$

Dowód. Na mocy twierdzenia (V.180) istnieją takie macierze $N_{[n]}, P_{[p]} \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ quasi-nieosobliwe pierwsza w n -tym, a druga w p -tym stopniu, że $NB = I_{[r]}P$, gdzie $r = r(B)$, i istnieje taka macierz $N_{[n]}^- \in \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ i taki element $v \in \mathcal{A}$, $v \neq 0$, że $NN_{[n]}^- = N_{[n]}^-N = vI_{[n]}$, wobec czego

$$(ii) \quad vB = N_{[n]}^- I_{[r]} P_{[p]}.$$

Na mocy twierdzenia (V.28) mamy dla $S := AN_{[n]}^- I_{[r]}$ i $T := I_{[r]}PC$

$$r(ABC) = r(vABC) = r(A(vB)C) = r(AN_{[n]}^- I_{[r]}PC) = r(ST).$$

Na mocy twierdzeń (V.30), (V.28) i wzoru (ii) jest

$$(iii) \quad \begin{aligned} r(S) &= r(AN_{[n]}^- I_{[r]}P) = r(vAB) = r(AB), \\ r(T) &= r(N_{[n]}^- I_{[r]}PC) = r(vBC) = r(BC), \end{aligned}$$

a na mocy (V.207)

$$r(ABC) = r(ST) \geq r(S) + r(T) - r,$$

skąd po podstawieniu (iii) otrzymujemy (V.209). ■

§ V.9. Macierze normalne

(V.210) DEFINICJA. *Macierzą normalną* nazywamy każdą macierz spełniającą warunek

$$(V.211) \quad AA^* = A^*A. \quad \blacksquare$$

Sprawdzamy z łatwością, że macierze hermitowskie, macierze skośnie hermitowskie, macierze quasi-ortonormalne w n -tym stopniu nad pierścieniami przemiennymi z transpozycją, macierze ortonormalne w n -tym stopniu, macierze diagonalne nad pierścieniami przemiennymi z transpozycją są szczególnymi przypadkami macierzy normalnych.

(V.212) PRZYKŁAD. Macierz zespolona

$$A := \begin{bmatrix} -3+i & 7-i \\ 5+5i & 2i \end{bmatrix}$$

jest normalna, ponieważ

$$AA^* = A^*A = \begin{bmatrix} 60 & -12+6i \\ -12-6i & 54 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

(V.213) TWIERDZENIE. Jeżeli A jest macierzą normalną, to macierze \bar{A} , A^T i A^* są też normalne.

Dowód wynika ze wzorów:

$$\begin{aligned} \overline{A(\bar{A})^*} &= \bar{A}(\bar{A}^*) = \overline{AA^*} = \overline{A^*A} = \overline{(A^*)^T A} = (\bar{A})^* \bar{A}, \\ A^T(A^T)^* &= A^T(A^*)^T = (A^*)^T = (AA^*)^T = (A^*)^T A^T = (A^T)^* A^T, \\ A^*(A^*)^* &= A^*A = AA^* = (A^*)^* A^*. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(V.214) TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ z regularnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ quasi-nieosobliwa w n -tym stopniu jest normalna, to każda jej quasi-odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^-$ jest też normalna. Jeżeli macierz $A_{[n]}$ z dowolnego pierścienia macierzowego $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ nieosobliwa w n -tym stopniu jest normalna, to jej odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^{-1}$ jest też normalna.

Dowód. Niech $AA_{[n]}^- = A_{[n]}^-A = aI_{[n]}$, gdzie $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$. Wobec tego $A^*(A_{[n]}^-)^* = (A_{[n]}^-)^*A^* = a^*I_{[n]}$. Jeżeli $AA^* = A^*A$, to

$$\begin{aligned} (A^*A)((A_{[n]}^-)^*A_{[n]}^-) &= (AA^*)((A_{[n]}^-)^*A_{[n]}^-) = A(A_{[n]}^-A)^*A_{[n]}^- = a^*AA_{[n]}^- = a^*aI_{[n]}, \\ (A^*A)(A_{[n]}^-)(A_{[n]}^-)^* &= A^*(AA_{[n]}^-)(A_{[n]}^-)^* = aA^*(A_{[n]}^-)^* = a^*aI_{[n]}, \end{aligned}$$

skąd

$$(A^*A)(A_{[n]}^-(A_{[n]}^-)^*) = (A^*A)((A_{[n]}^-)^*A_{[n]}^-).$$

Mnożąc tę równość stronami lewostronnie przez $A_{[n]}^-(A_{[n]}^-)^*$, otrzymujemy

$$a^*aA_{[n]}^-(A_{[n]}^-)^* = a^*a(A_{[n]}^-)^*A_{[n]}^-,$$

a ponieważ $a^*a \neq 0$, więc $A_{[n]}^-(A_{[n]}^-)^* = (A_{[n]}^-)^*A_{[n]}^-$, co oznacza, że obrona dowolnie quasi-odwrotność n -tego stopnia $A_{[n]}^-$ jest normalna.

Jeżeli $A_{[n]}$ z dowolnego pierścienia macierzowego jest macierzą odwracalną w n -tym stopniu, to

$$A_{[n]}^{-1}(A_{[n]}^{-1})^* = (A^*A)_{[n]}^{-1} = (AA^*)_{[n]}^{-1} = (A_{[n]}^{-1})^*A_{[n]}^{-1},$$

skąd wynika teza. ■

(V.215) TWIERDZENIE. Jeżeli macierze normalne A i B spełniają warunek

$$(V.216) \quad A^*B = BA^*,$$

to macierz AB jest też normalna.

Dowód wynika ze wzoru

$$\begin{aligned} (AB)(AB)^* &= ABB^*A^* = AB^*BA^* = (BA^*)^*(BA^*) = \\ &= (A^*B)^*(A^*B) = B^*AA^*B = B^*A^*AB = (AB)^*(AB). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(V.217) TWIERDZENIE. Iloczyn AB macierzy symetrycznych A i B jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(V.218) \quad AB = BA.$$

Dowód wynika ze wzoru

$$(AB)^T = AB \Leftrightarrow B^T A^T = AB \Leftrightarrow BA = AB. \quad \blacksquare$$

(V.219) TWIERDZENIE. Iloczyn AB macierzy hermitowskich A i B jest macierzą hermitowską wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(V.220) \quad AB = BA.$$

Dowód wynika ze wzoru

$$(AB)^* = AB \Leftrightarrow B^*A^* = AB \Leftrightarrow BA = AB. \quad \blacksquare$$

§ V.10. Macierze idempotentne i macierze rzutu

(V.221) DEFINICJA. Macierzą idempotentną nazywamy każdą macierz A spełniającą warunek

$$(V.222) \quad A^2 = A. \quad \blacksquare$$