

(IV.146) DEFINICJA. Moduł \mathcal{G} nazywamy *podmodulem z iloczynem skalarnym* modułu \mathcal{H} z iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{G} jest podmodulem modułu \mathcal{H} i iloczyn skalarny w \mathcal{G} jest iloczynem skalarnym modułu \mathcal{H} zredukowanym do podmodułu \mathcal{G} . ■

(IV.147) PRZYKŁAD. Moduł wierszowy i moduł kolumnowy dowolnej macierzy $A_{[m,n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} rozpatrujemy z reguły jako podmoduły z iloczynem skalarnym (IV.143) modułu ciągowego odpowiednio n -wymiarowego i m -wymiarowego nad pierścieniem \mathcal{A} . ■

§ IV.7. Moduły unormowane

(IV.148) DEFINICJA. Moduł \mathcal{H} nazywamy *unormowanym* wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° \mathcal{H} jest regularnym modulem nad pierścieniem \mathcal{A} z wartością bezwzględną,

2° jest określona funkcja zwana *normą*, która każdemu półwektorowi $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ przyporządkowuje element $\|\mathbf{x}\| \in \text{re } \mathcal{A}$ ze spełnieniem dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ i dowolnego $a \in \mathcal{A}$ następujących warunków:

$$(IV.149) \quad \|\mathbf{x}\| \geq 0,$$

$$(IV.150) \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$(IV.151) \quad \|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|,$$

$$(IV.152) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \quad \blacksquare$$

(IV.153) DEFINICJA. Normę w module \mathcal{H} z iloczynem skalarnym nazywamy *naturalną* wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat tej normy jest normą kwadratową (IV.122). ■

(IV.154) TWIERDZENIE. W module \mathcal{H} z iloczynem skalarnym nad pierścieniem \mathcal{A} z wartością bezwzględną norma naturalna istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego półwektora $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ istnieje pierwiastek kwadratowy $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \in \text{re } \mathcal{A}$.

Dowód. Jeżeli w module \mathcal{H} istnieje norma naturalna, to na mocy (IV.122) dla każdego półwektora $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ istnieje pierwiastek kwadratowy $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \in \text{re } \mathcal{A}$.

Jeżeli – odwrotnie – dla każdego półwektora $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ istnieje $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \in \text{re } \mathcal{A}$, rozważmy funkcję

$$(IV.155) \quad \|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Spełnia ona na mocy (IV.110) i (IV.111) warunki (IV.149) i (IV.150), a na mocy (IV.129) warunek (IV.151). Na mocy (I.187) i (I.184) jest dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^*| + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|,$$

a ponieważ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \text{re } \mathcal{A}$, więc na mocy (IV.130)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

i na mocy (IV.127)

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|,$$

skąd wynika spełnienie przez funkcję (IV.155) także warunku (IV.152). Zatem funkcja (IV.155) jest normą naturalną w module \mathcal{H} . ■

(IV.156) TWIERDZENIE. W każdym module macierzowym n -tego stopnia \mathcal{H} nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} z iloczynem skalarnym (IV.136) istnieje norma naturalna, która dla dowolnej macierzy $A_{[n]} \in \mathcal{H}$ jest dana wzorem:

$$(IV.157) \quad \|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^*GA)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{lj}^* g_{lk} a_{kj}} = \\ = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^n c_{ml} a_{lj} \right)^* \left(\sum_{l=1}^n c_{ml} a_{lj} \right)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \left| \sum_{l=1}^n c_{ml} a_{lj} \right|^2},$$

który w przypadku, gdy iloczyn skalarny (IV.136) ma postać (IV.140), można napisać w postaci

$$(IV.158) \quad \|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}^* a_{jk}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2}.$$

Dowód wynika z definicji (I.169), twierdzenia (IV.154) oraz wzorów (IV.110) i (IV.138). ■

(IV.159) TWIERDZENIE. Dla każdego modułu ciągowego n -tego stopnia \mathcal{S} nad pierścieniem z pierwiastkowaniem \mathcal{A} z iloczynem skalarnym (IV.143) istnieje norma naturalna, która dla dowolnego ciągu $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n)$, $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, jest dana wzorem:

$$(IV.160) \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_l^* g_{lk} a_k} = \sqrt{\sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^n c_{ml} a_l \right)^* \left(\sum_{l=1}^n c_{ml} a_l \right)} = \\ = \sqrt{\sum_{m=1}^n \left| \sum_{l=1}^n c_{ml} a_l \right|^2},$$

który w przypadku, gdy iloczyn skalarny (IV.143) ma postać (IV.145), można napisać w postaci

$$(IV.161) \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^* a_k} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2}.$$

Dowód wynika ze wzoru (IV.143) i twierdzenia poprzedniego. ■

(IV.162) TWIERDZENIE. Jeżeli \mathcal{H} jest modulem z normą naturalną, to dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ jest

$$(IV.163) \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$

gdzie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy półwektory \mathbf{x} i \mathbf{y} są liniowo zależne.

Dowód wynika ze wzorów (IV.119) i (I.168). ■

(IV.164) TWIERDZENIE. Dla każdego modułu unormowanego \mathcal{H} funkcja określona dla dowolnych półwektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ wzorem

$$(IV.165) \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

jest metryką.

Dowód. Na mocy (IV.149) i (IV.150) funkcja (IV.165) spełnia warunki (IV.101) i (IV.102). Następnie na mocy (IV.151)

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(-1)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| = |-1| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

co oznacza, że funkcja (IV.165) spełnia warunek symetrii (IV.103). Wreszcie na mocy (IV.152) mamy dla dowolnego $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}),$$

co oznacza spełnienie przez funkcję (IV.165) również warunku trójkąta (IV.104). Wobec powyższego funkcja (IV.165) na mocy definicji (IV.100) jest metryką. ■

(IV.166) DEFINICJA. Metrykę określoną w module unormowanym \mathcal{H} wzorem (IV.165) nazywamy *naturalną*. ■

(IV.167) PRZYKŁAD. Niech \mathcal{H} będzie modulem z iloczynem skalarnym określonym w przykładzie (IV.133). W module \mathcal{H} można dla dowolnego wielomianu $\mathbf{u} := a_0\mathbf{e} + a_1\lambda + a_2\lambda^2$ określić normę naturalną wzorem

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2}.$$

Jako metrykę naturalną otrzymujemy dla dowolnych $\mathbf{u} := a_0\mathbf{e} + a_1\lambda + a_2\lambda^2$, $\mathbf{v} := b_0\mathbf{e} + b_1\lambda + b_2\lambda^2 \in \mathcal{H}$

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sqrt{|a_0 - b_0|^2 + |a_1 - b_1|^2 + |a_2 - b_2|^2}. \quad \blacksquare$$

(IV.168) PRZYKŁAD. Każdy pierścień z wartością bezwzględną \mathcal{A} może być traktowany jako moduł unormowany nad samym sobą, jeżeli określić w nim dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ normę

$$\|\mathbf{x}\| := |\mathbf{x}|.$$

Sprawdzamy, że są tu spełnione wszystkie warunki dla normy, tzn. (IV.149), ..., (IV.152). Jeżeli w pierścieniu \mathcal{A} został określony iloczyn skalarny jak w przykładzie (IV.134), to na mocy (I.168) powyższa norma jest naturalna. ■

(IV.169) DEFINICJA. Moduł \mathcal{G} nazywamy *podmodulem unormowanym* modułu unormowanego \mathcal{H} wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{G} jest podmodulem modułu \mathcal{H} i norma w \mathcal{G} jest normą modułu \mathcal{H} zredukowaną do podmodułu \mathcal{G} . ■

Przestrzeń unitarną n -tego stopnia ($n \in \mathbb{N}$) rozpatrujemy z reguły jako moduł ciągowy n -tego stopnia nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} z iloczynem skalarnym (IV.145), normą (IV.161) i metryką (IV.165).

Przestrzeń euklidesową n -tego stopnia ($n \in \mathbb{N}$) rozpatrujemy z reguły jako moduł ciągowy n -tego stopnia nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} z iloczynem skalarnym (IV.145), normą (IV.161) i metryką (IV.165).

Normę półwektora interpretujemy często jako jego długość.

(IV.170) DEFINICJA. Metrykę euklidesową albo *odległością euklidesową* nazywamy metrykę naturalną określoną w dowolnej unormowanej przestrzeni euklidesowej $\mathcal{H}_{[n]}$ dla dowolnych $\mathbf{u} := (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{v} := (b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{H}_{[n]}$ wzorem

$$(IV.171) \quad \rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \quad \blacksquare$$

§ IV.8. Półwektory ortogonalne

Pojęcie iloczynu skalarnego pozwala określić ortogonalność (tzn. prostopadłość) półwektorów. Dla uproszczenia przyjmujemy w niniejszym paragrafie, że symbol \mathcal{H} oznacza dowolny moduł z iloczynem skalarnym nad pierścieniem \mathcal{A} .

(IV.172) DEFINICJA. Półwektory $u, v \in \mathcal{H}$ nazywamy *ortogonalnymi* i piszemy $u \perp v$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle u, v \rangle = 0$. ■

Jak wynika z powyższej definicji i wzoru (IV.117), półwektor zerowy $0 \in \mathcal{H}$ jest ortogonalny do każdego półwektora z modułu \mathcal{H} .

(IV.173) DEFINICJA. Półwektory $u, v \in \mathcal{H}$ nazywamy *ściśle ortogonalnymi* wtedy i tylko wtedy, gdy są ortogonalne i żaden z nich nie jest zerowy. ■

(IV.174) DEFINICJA. Półwektory $u, v \in \mathcal{H}$ nazywamy *ortonormalnymi* wtedy i tylko wtedy, gdy są ortogonalne i $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = 1$. ■

(IV.175) DEFINICJA. Półwektory $u_1, u_2, \dots \in \mathcal{H}$ nazywamy *ortogonalnymi (ściśle ortogonalnymi, ortonormalnymi)* wtedy i tylko wtedy, gdy są parami ortogonalne (ściśle ortogonalne, ortonormalne). ■

(IV.176) DEFINICJA. Półwektory $u_1, u_2, \dots \in \mathcal{H}$ nazywamy *quasi-ortonormalnymi* wtedy i tylko wtedy, gdy są ortogonalne i istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq 0$, że $\langle u_k, u_k \rangle = \alpha$ dla $k = 1, 2, \dots$ ■

(IV.177) DEFINICJA. Ciąg $u_1, u_2, \dots \in \mathcal{H}$, skończony lub nieskończony, nazywamy *układem ortogonalnym (quasi-ortonormalnym, ortonormalnym)* wtedy i tylko wtedy, gdy półwektory u_1, u_2, \dots są ściśle ortogonalne (quasi-ortonormalne, ortonormalne). ■

(IV.178) TWIERDZENIE. Półwektory $u_1, u_2, \dots \in \mathcal{H}$ tworzą układ ortonormalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(IV.179) \quad \langle u_k, u_l \rangle = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathfrak{N},$$

gdzie δ_{kl} jest symbolem Kroneckera, a układ quasi-ortonormalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki element $\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq 0$, że

$$(IV.180) \quad \langle u_k, u_l \rangle = \alpha \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathfrak{N}.$$

Dowód wynika wprost z definicji (IV.177), (IV.175) i (IV.176). ■

(IV.181) PRZYKŁAD. Niech \mathcal{H} będzie modułem z przykładu (IV.133). Wielomiany

$$u := 2e - 3\lambda - \lambda^2, \quad v := -e - 2\lambda + 4\lambda^2, \quad w := 2e + \lambda + \lambda^2$$

tworzą układ ortogonalny, ponieważ

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 = 0, & \langle u, u \rangle &= 2^2 + (-3)^2 + (-1)^2 = 14, \\ \langle u, w \rangle &= 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, & \langle v, v \rangle &= (-1)^2 + (-2)^2 + 4^2 = -21, \\ \langle v, w \rangle &= (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 0, & \langle w, w \rangle &= 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6. \end{aligned}$$

Układ ten nie jest ortonormalny ani nawet quasi-ortonormalny. Jak łatwo spostrzec wielomiany

$$\frac{2}{\sqrt{14}}e - \frac{3}{\sqrt{14}}\lambda - \frac{1}{\sqrt{14}}\lambda^2, \quad -\frac{1}{\sqrt{21}}e - \frac{2}{\sqrt{21}}\lambda + \frac{4}{\sqrt{21}}\lambda^2, \quad \frac{2}{\sqrt{6}}e + \frac{1}{\sqrt{6}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{6}}\lambda^2$$

tworzą układ ortonormalny. ■

(IV.182) TWIERDZENIE. *Każdy układ ortogonalny jest układem półwektorów liniowo niezależnych.*

Dowód. Gdyby układ ortogonalny $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)$ nie był układem półwektorów liniowo niezależnych, wtedy zawierałby półwektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ liniowo zależne. Zatem istniałyby takie $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ nie wszystkie równe zeru, że $\sum_{j=1}^k a_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$. Przyjmijmy, że półwektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ zostały tak uporządkowane, że $a_k \neq 0$. Wtedy

$$a_k \mathbf{v}_k = - \sum_{j=1}^{k-1} a_j \mathbf{v}_j,$$

wobec czego byłoby

$$a_k \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_k, a_k \mathbf{v}_k \rangle = - \langle \mathbf{v}_k, \sum_{j=1}^{k-1} a_j \mathbf{v}_j \rangle = - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \mathbf{v}_k, a_j \mathbf{v}_j \rangle = - \sum_{j=1}^{k-1} a_j \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle = 0,$$

skąd $\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = 0$, wbrew założeniu. Wynika stąd teza. ■

(IV.183) TWIERDZENIE. *W n -wymiarowym module z iloczynem skalarnym układ ortogonalny może składać się z co najwyżej n półwektorów.*

Dowód wynika z twierdzeń (IV.182) i (IV.80). ■

§ IV.9. Półbazy i bazy ortogonalne

Dla uproszczenia przyjmujemy, że w tym i następnym paragrafie symbol $\mathcal{H}_{[n]}$ ($n \in \mathbb{N}$) oznacza dowolny n -wymiarowy moduł z iloczynem skalarnym nad pierścieniem \mathcal{A} , a symbol $\mathcal{L}_{[n]}$ dowolną n -wymiarową przestrzeń liniową z iloczynem skalarnym nad ciałem \mathcal{F} .

(IV.184) DEFINICJA. Półbazę modułu $\mathcal{H}_{[n]}$ (bazę przestrzeni liniowej $\mathcal{L}_{[n]}$) nazywamy *ortogonalną* (quasi-ortonormalną, ortonormalną) wtedy i tylko wtedy, gdy jest układem ortogonalnym (quasi-ortonormalnym, ortonormalnym) albo zbiorem pustym. ■

(IV.185) TWIERDZENIE. *Każdy moduł $\mathcal{H}_{[n]}$ z iloczynem skalarnym ma półbazę ortogonalną.*

Dowód. Gdy $n=0$, czyli półbaza jest zbiorem pustym, twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy zatem, że $n>0$ i niech $\mathfrak{B} := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ będzie dowolną półbazą modułu $\mathcal{H}_{[n]}$. Na mocy twierdzenia (IV.59) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \neq \mathbf{0}$, wobec czego na mocy (IV.110) i (IV.111) $\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle > 0$ dla $k=1, \dots, n$. Półwektor

(IV.186)

$$\mathbf{v}_1 := \mathbf{u}_1$$

przyjmujemy jako pierwszy półwektor półbazy ortogonalnej. Następne określamy rekurencyjnie:

$$(IV.187) \quad \mathbf{v}_{k+1} := \left(\prod_{j=1}^k \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle \right) \mathbf{u}_{k+1} - \sum_{l=1}^k \left(\prod_{j=1}^{l-1} \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle \right) \left(\prod_{j=l+1}^k \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle \right) \langle \mathbf{v}_l, \mathbf{u}_{k+1} \rangle \mathbf{v}_l,$$

$$k=1, \dots, n-1.$$

Mamy wtedy dla $p=1, \dots, k$

$$(i) \quad \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{k+1} \rangle = \left(\prod_{j=1}^k \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle \right) \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_{k+1} \rangle - \left(\prod_{j=1}^k \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle \right) \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_{k+1} \rangle = 0.$$

Gdyby $\langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1} \rangle = 0$, wtedy na mocy (IV.111) byłoby $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$, co na mocy (IV.187) oznaczałoby, że półwektory $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ są liniowo zależne, a po kolejnym podstawieniu wzorów (IV.187) dla $\mathbf{v}_k, \dots, \mathbf{v}_1$, że półwektory $\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_1$ są liniowo zależne, wbrew założeniu. Zatem $\langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1} \rangle > 0$. Na mocy (i) ciąg $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jest półbazą ortogonalną modułu $\mathcal{H}_{[n]}$. ■

W przypadku przestrzeni liniowej $\mathcal{L}_{[n]}$ zamiast (IV.187) można przyjąć

$$(IV.188) \quad \mathbf{v}_{k+1} := \mathbf{u}_{k+1} - \sum_{l=1}^k \frac{\langle \mathbf{v}_l, \mathbf{u}_{k+1} \rangle}{\langle \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_l \rangle} \mathbf{v}_l, \quad k=1, \dots, n-1.$$

Metoda zamiany w przestrzeni liniowej $\mathcal{L}_{[n]}$ bazy $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ na bazę ortogonalną $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ oparta na wzorach (IV.186) i (IV.188) nosi nazwę *metody ortogonalizacji Grama-Schmidta*.

(IV.189) TWIERDZENIE. *Każdy układ ortogonalny $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ w module $\mathcal{H}_{[n]}$ ($p < n$) daje się uzupełnić $q-p$ półwektorami ($p < q \leq n$) do układu ortogonalnego $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q)$. Każdy układ ortogonalny w $\mathcal{H}_{[n]}$ złożony z n półwektorów jest półbazą ortogonalną tego modułu.*

Dowód. Na mocy twierdzenia (IV.80) istnieją takie półwektory $\mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_q \in \mathcal{H}_{[n]}$, że półwektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_q$ są liniowo niezależne. Stosując począwszy od $k=p$ wzór (IV.187), otrzymujemy układ ortogonalny $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q)$. Każdy układ ortogonalny złożony z n półwektorów jest półbazą ortogonalną na mocy twierdzeń (IV.182) i (IV.80). ■

(IV.190) TWIERDZENIE. *Każdy moduł $\mathcal{H}_{[n]}$ z normą naturalną ma półbazę quasi-ortonormalną.*

Dowód. Na mocy twierdzenia (IV.185) w module $\mathcal{H}_{[n]}$ istnieje półbazę ortogonalną $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Sprawdzamy, że $(c_1 \mathbf{v}_1, \dots, c_n \mathbf{v}_n)$, gdzie

$$(IV.191) \quad c_k := \|\mathbf{v}_1\| \dots \|\mathbf{v}_{k-1}\| \|\mathbf{v}_{k+1}\| \dots \|\mathbf{v}_n\|, \quad k=1, \dots, n,$$

jest półbazą quasi-ortonormalną. ■

(IV.192) TWIERDZENIE. *W każdym module $\mathcal{H}_{[n]}$ z normą naturalną dla każdej półbazy ortogonalnej $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ istnieją takie elementy quasi-rzeczywiste $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{A}$, że $(c_1 \mathbf{v}_1, \dots, c_n \mathbf{v}_n)$ jest półbazą quasi-ortonormalną.*

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego. ■

(IV.193) TWIERDZENIE. W module $\mathcal{H}_{[n]}$ z normą naturalną każdy układ quasi-ortonormalny złożony z n półwektorów jest półbazą quasi-ortonormalną tego modułu.

Dowód wynika z twierdzenia (IV.189). ■

(IV.194) TWIERDZENIE. Każda przestrzeń liniowa $\mathcal{L}_{[n]}$ z normą naturalną ma bazę ortonormalną.

Dowód. Na mocy twierdzenia (IV.185) w $\mathcal{L}_{[n]}$ istnieje baza ortogonalna $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Sprawdzamy, że ciąg

$$(IV.195) \quad \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1, \dots, \frac{1}{\|\mathbf{v}_n\|} \mathbf{v}_n \right)$$

jest bazą ortonormalną. ■

(IV.196) TWIERDZENIE. Każdy układ ortonormalny $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ ($p < n$) w przestrzeni liniowej $\mathcal{L}_{[n]}$ z normą naturalną daje się uzupełnić $q-p$ wektorami ($p < q \leq n$) do układu ortonormalnego $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q)$. Każdy układ ortonormalny w $\mathcal{L}_{[n]}$ złożony z n wektorów jest bazą ortonormalną tej przestrzeni liniowej.

Dowód. Na mocy twierdzenia (IV.189) istnieją takie wektory $\mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_q \in \mathcal{L}_{[n]}$, że ciąg $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_q)$ jest układem ortogonalnym w $\mathcal{L}_{[n]}$. Wobec tego ciąg

$$\left(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \frac{1}{\|\mathbf{w}_{p+1}\|} \mathbf{w}_{p+1}, \dots, \frac{1}{\|\mathbf{w}_q\|} \mathbf{w}_q \right)$$

jest układem ortonormalnym. Na mocy twierdzeń (IV.182) i (IV.80) każdy n -wektorowy układ ortonormalny w $\mathcal{L}_{[n]}$ jest bazą ortonormalną tej przestrzeni. ■

(IV.197) TWIERDZENIE. Jeżeli w module $\mathcal{H}_{[n]}$ z iloczynem skalarnym istnieje półbaza ortonormalna $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, to jest ona bazą dla modułu $\mathcal{H}_{[n]}$, a dowolny półwektor $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{[n]}$ można przedstawić w postaci:

$$(IV.198) \quad \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_j.$$

Dowód. Dla dowolnego półwektora $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{[n]}$ istnieją z założenia takie elementy $c, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ ($c \neq 0$), że

$$c\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{v}_j.$$

Wobec tego dla dowolnego półwektora $\mathbf{v}_k \in \mathcal{B}$

$$\zeta \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}_k, c\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}_k, \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle = a_k$$

i mamy

$$(IV.199) \quad c\mathbf{u} = c \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_j,$$

skąd otrzymujemy wzór (IV.198). Z uwagi na dowolność półwektora \mathbf{u} otrzymujemy stąd tezę. ■

§ IV.10. Współrzędne półwektora względem bazy

Przyjmujemy w niniejszym paragrafie, że symbol $\mathcal{H}_{[n]}$ oznacza dowolny moduł n -wymiarowy nad pierścieniem \mathcal{A} .

(IV.200) TWIERDZENIE. Jeżeli moduł $\mathcal{H}_{[n]}$ ma bazę

$$(IV.201) \quad \mathfrak{B} := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), \quad \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathcal{H}_{[n]},$$

to istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między półwektorami $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{[n]}$ a ciągami elementów $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ takimi, że

$$(IV.202) \quad \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{u}_j.$$

Dowód wynika z twierdzenia (IV.87). ■

Odpowiedniość określoną w twierdzeniu (IV.200) zapisujemy w postaci:

$$(IV.203) \quad \mathbf{u} = (a_1, \dots, a_n)_{\mathfrak{B}}.$$

(IV.204) DEFINICJA. Współzrędnymi półwektora $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{[n]}$ względem bazy (IV.201) nazywamy takie elementy $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, że zachodzi równość (IV.202), czyli (IV.203). ■

(IV.205) TWIERDZENIE. W module $\mathcal{H}_{[n]}$ mającym bazę (IV.201) dla dowolnych półwektorów

$$(i) \quad \mathbf{u} := (a_1, \dots, a_n)_{\mathfrak{B}}, \quad \mathbf{v} := (b_1, \dots, b_n)_{\mathfrak{B}}$$

i dowolnego $c \in \mathcal{A}$ jest

$$(IV.206) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)_{\mathfrak{B}},$$

$$(IV.207) \quad -\mathbf{u} = (-a_1, \dots, -a_n)_{\mathfrak{B}},$$

$$(IV.208) \quad \mathbf{0} = (0, \dots, 0)_{\mathfrak{B}},$$

$$(IV.209) \quad c\mathbf{u} = (ca_1, \dots, ca_n)_{\mathfrak{B}},$$

a gdy $\mathcal{H}_{[n]}$ jest modulem z iloczynem skalarnym, wtedy

$$(IV.210) \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j^* b_k \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle a_j \mathbf{u}_j, b_k \mathbf{u}_k \rangle$$

i w przypadku, gdy \mathfrak{B} jest bazą ortonormalną

$$(IV.211) \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k^* b_k.$$

Dowód polega na sprawdzeniu wzorów (IV.206), ..., (IV.211) na podstawie równości wzorów (IV.202) i (IV.203). ■

(IV.212) PRZYKŁAD. Jak wynika z przykładu (IV.68), moduł utworzony ze wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej n nad pierścieniem \mathcal{A} ma bazę $(\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^n)$. Spraw-

dzamy z łatwością, że współrzędnymi dowolnego wielomianu $u \in \mathcal{H}$ względem tej bazy są współczynniki wielomianu u . ■

(IV.213) TWIERDZENIE. W module regularnym $\mathcal{H}_{[n]}$ nad pierścieniem częściowo uporządkowanym \mathcal{A} dla każdej bazy (IV.201) — o ile, oczywiście, taka baza istnieje — można tak określić iloczyn skalarny, aby ta baza była ortonormalna.

Dowód. Jeżeli dla dowolnych półwektorów (i) określić iloczyn skalarny wzorem (IV.211), to

$$\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk} \quad \text{dla} \quad j, k = 1, \dots, n,$$

co oznacza, że baza \mathcal{B} jest ortonormalna. ■

§ IV.11. Moduły izomorficzne

(IV.214) DEFINICJA. Moduły

$$\mathcal{H} := (\mathfrak{H}, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot) \quad \text{i} \quad \mathcal{G} := (\mathfrak{G}, (+), (-), (\mathbf{o}), \mathcal{B}, (\cdot))$$

nazywamy *izomorficznymi* wtedy i tylko wtedy, gdy pierścienie \mathcal{A} i \mathcal{B} są izomorficzne i istnieje funkcja odwracalna $\varphi: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}$ taka, że dla dowolnych półwektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{G}$ i dowolnego $a \in \mathcal{B}$

$$(IV.215) \quad \varphi(\mathbf{x} (+) \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}),$$

$$(IV.216) \quad \varphi((-) \mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}),$$

$$(IV.217) \quad \varphi((\mathbf{o})) = \mathbf{o},$$

$$(IV.218) \quad \varphi(a (\cdot) \mathbf{x}) = \psi(a) \cdot \varphi(\mathbf{x}),$$

gdzie $\psi(a)$ jest obrazem izomorficznym elementu $a \in \mathcal{B}$ w pierścieniu \mathcal{A} .

Gdy \mathcal{G} i \mathcal{H} są modułami z iloczynem skalarnym, który w module \mathcal{G} oznaczamy nawiasami $\langle \rangle$, a w module \mathcal{H} nawiasami $\langle \rangle$, wtedy dla izomorfizmu \mathcal{G} i \mathcal{H} prócz (IV.215), ..., (IV.218) żądamy jeszcze spełnienia warunku

$$(IV.219) \quad \langle \varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}) \rangle = \psi(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle),$$

a gdy \mathcal{G} i \mathcal{H} są modułami unormowanymi z normą w \mathcal{G} oznaczaną nawiasami $||| |||$, a w \mathcal{H} nawiasami $|| ||$, warunku

$$(IV.220) \quad ||| \varphi(\mathbf{x}) ||| = \psi(||| \mathbf{x} |||). \quad \blacksquare$$

(IV.221) TWIERDZENIE. Każdy moduł $\mathcal{H}_{[n]} := (\mathfrak{H}, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot)$ rozpięty na bazie \mathcal{B} jest izomorficzny z modulem ciągowym n -wymiarowym $\mathcal{S}_{[n]} := (\mathfrak{U}^n, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot)$, gdzie zbiór \mathfrak{U} jest podstawą pierścienia \mathcal{A} .

Dowód. Niech $\varphi: \mathfrak{U}^n \rightarrow \mathfrak{H}$ będzie funkcją określoną dla dowolnego ciągu $(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{U}^n$ wzorem:

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) := (a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{B}}.$$

Na mocy twierdzenia (IV.200) funkcja ϕ jest odwracalna, a na mocy (IV.206), ..., (IV.209) są spełnione warunki (IV.215), ..., (IV.218), co oznacza, że moduły $\mathcal{H}_{[n]}$ i $\mathcal{S}_{[n]}$ są izomorficzne. ■

(IV.222) TWIERDZENIE. *Każdy moduł $\mathcal{H}_{[n]} = (\mathcal{H}, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot)$ z iloczynem skalarnym rozpięty na bazie ortonormalnej \mathcal{B} jest izomorficzny z modulem ciągowym n -wymiarowym $\mathcal{S}_{[n]} = (\mathcal{A}^n, +, -, \mathbf{o}, \mathcal{A}, \cdot)$, gdzie \mathcal{A} jest podstawą pierścienia \mathcal{A} , z iloczynem skalarnym (IV.211).*

Dowód wynika z twierdzeń (IV.221) i (IV.205). ■

(IV.223) TWIERDZENIE. *Każda przestrzeń liniowa $\mathcal{L}_{[n]}$ jest izomorficzna z n -wymiarową przestrzenią ciągową.*

Dowód wynika z twierdzeń (IV.221) i (IV.91) oraz definicji (IV.97). ■

(IV.224) TWIERDZENIE. *Każda przestrzeń liniowa $\mathcal{L}_{[n]}$ nad ciałem liczb zespolonych \mathcal{C} (rzeczywistych \mathcal{R}) jest izomorficzna z n -wymiarową przestrzenią unitarną (euklidesową).*

Dowód wynika z twierdzeń (VI.221) i (IV.91) oraz definicji (IV.98) i (IV.99). ■

Na skutek istnienia izomorfizmu między modułami rozpiętymi na bazach a modułami ciągowymi (w szczególności między przestrzeniami liniowymi i przestrzeniami ciągowymi), fakty obserwowane w jednym z nich mają swoje odpowiedniki w drugim i odwrotnie. Ze względu na liczbowy charakter modułów ciągowych są one łatwiejsze do rozumienia i z tego względu traktujemy je zazwyczaj jako obrazy izomorficzne innych modułów. Pozwala to abstrahować od natury półwektorów tworzących moduły wyjściowe i badać ich własności na liczbowych obrazach izomorficznych. Zwłaszcza, gdy przez izomorfizm można przejść do przestrzeni euklidesowych, wyobraźnia geometryczna z nimi związana pozwala o wiele łatwiej zrozumieć wiele faktów.

§ IV.12. Ortogonalność półwektora do podmodułu z iloczynem skalarnym

(IV.225) DEFINICJA. Półwektor $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, gdzie \mathcal{H} jest modulem z iloczynem skalarnym, nazywamy *ortogonalnym* do podmodułu \mathcal{G} i piszemy $\mathbf{u} \perp \mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ortogonalny do każdego półwektora $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$. ■

(IV.226) TWIERDZENIE. *Jeżeli $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ jest dowolną pólbazą podmodułu \mathcal{G} modułu \mathcal{H} z iloczynem skalarnym, to dla dowolnego półwektora $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ mamy*

$$(IV.227) \quad \mathbf{u} \perp \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u} \perp \mathbf{v}_k.$$

Dowód. Prawa strona równoważności (IV.227) wynika z lewej na mocy definicji (IV.225). Dla każdego półwektora $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ istnieją takie elementy c, a_1, \dots, a_k , że

$$c\mathbf{v} = \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{v}_j, \quad c \neq 0,$$

wobec czego

$$c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{j=1}^k a_j \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Jeżeli $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u} \perp \mathbf{v}_k$, to $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ dla $j=1, \dots, k$, a ponieważ $c \neq 0$, otrzymujemy $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, czyli $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Ze względu na dowolność półwektora \mathbf{v} , otrzymujemy $\mathbf{u} \perp \mathcal{G}$. ■

(IV.228) PRZYKŁAD. Niech $\mathcal{L}_{[6]}$ będzie przestrzenią liniową utworzoną przez wszystkie wielomiany stopnia co najwyżej piątego nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} , a $\mathcal{G}_{[4]}$ jej podprzestrzenią utworzoną przez wszystkie wielomiany stopnia co najwyżej trzeciego. Niech iloczyn skalarny dwu dowolnych wielomianów

$$\mathbf{u} := \sum_{j=0}^5 a_j \lambda^j, \quad \mathbf{v} := \sum_{j=0}^5 b_j \lambda^j$$

będzie określony wzorem

$$(i) \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \sum_{j=0}^5 a_j b_j.$$

Wektor λ^4 jest ortogonalny do podprzestrzeni liniowej \mathcal{G} , ponieważ $(e = \lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ jest bazą w \mathcal{G} i na mocy (i)

$$\langle \lambda^4, e \rangle = \langle \lambda^4, \lambda \rangle = \langle \lambda^4, \lambda^2 \rangle = \langle \lambda^4, \lambda^3 \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

(IV.229) TWIERDZENIE. Jeżeli \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 są podmodułami modułu \mathcal{H} z iloczynem skalarnym i \mathcal{G}_1 jest podmodulem \mathcal{G}_2 , to dla dowolnego $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$

$$\mathbf{u} \perp \mathcal{G}_2 \Rightarrow \mathbf{u} \perp \mathcal{G}_1.$$

Dowód wynika bezpośrednio z definicji (IV.225). ■

§ IV.13. Dopełnienie ortogonalne podmodułu z iloczynem skalarnym

(IV.230) TWIERDZENIE. W module $\mathcal{H} := (\mathcal{S}, +, -, 0, \mathcal{A}, \cdot)$ z iloczynem skalarnym zbiór wszystkich półwektorów ortogonalnych do podmodułu \mathcal{G} tworzy podmoduł modułu \mathcal{H} .

Dowód. Na mocy definicji (IV.225) dla dowolnych półwektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$ i dowolnego $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \perp \mathcal{G} \wedge \mathbf{v} \perp \mathcal{G} &\Rightarrow \bigwedge_{\mathbf{w} \in \mathcal{G}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0 \wedge \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bigwedge_{\mathbf{w} \in \mathcal{G}} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \wedge \langle -\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \perp \mathcal{G} \wedge -\mathbf{u} \perp \mathcal{G}, \\ \mathbf{u} \perp \mathcal{G} &\Rightarrow \bigwedge_{\mathbf{w} \in \mathcal{G}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0 \Rightarrow \bigwedge_{\mathbf{w} \in \mathcal{G}} \langle a\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0 \Rightarrow a\mathbf{u} \perp \mathcal{G}, \end{aligned}$$

wobec czego na mocy twierdzenia (IV.31) otrzymujemy tezę. ■

(IV.231) DEFINICJA. *Dopełnieniem ortogonalnym podmodułu \mathcal{G} w module \mathcal{H} z iloczynem skalarnym nazywamy podmoduł utworzony ze wszystkich półwektorów ortogonalnych do \mathcal{G} .* ■

Dopełnienie ortogonalne podmodułu \mathcal{G} oznaczamy symbolem \mathcal{G}^\perp .

(IV.232) TWIERDZENIE. *Dopełnienie ortogonalne k -wymiarowego podmodułu w module $\mathcal{H}_{[n]}$ z iloczynem skalarnym jest $(n-k)$ -wymiarowym podmodulem modułu $\mathcal{H}_{[n]}$.*

Dowód. Niech \mathcal{G} będzie k -wymiarowym podmodulem modułu $\mathcal{H}_{[n]}$, a \mathcal{G}^\perp jego dopełnieniem ortogonalnym. Na mocy twierdzenia (IV.185) w \mathcal{G} istnieje półbaza ortogonalna (v_1, \dots, v_k) , a w \mathcal{G}^\perp półbaza ortogonalna (w_1, \dots, w_l) , gdzie l jest wymiarem podmodułu \mathcal{G}^\perp . Na mocy definicji (IV.231) $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l)$ jest układem ortogonalnym w $\mathcal{H}_{[n]}$, wobec czego na mocy twierdzenia (IV.183) jest $k+l \leq n$, czyli $l \leq n-k$. Ale z drugiej strony na mocy twierdzenia (IV.189) półbazę (v_1, \dots, v_k) można uzupełnić półwektorami v_{k+1}, \dots, v_n tak, aby (v_1, \dots, v_n) był półbazą ortogonalną modułu $\mathcal{H}_{[n]}$. Na mocy definicji (IV.231) jest $v_{k+1}, \dots, v_n \in \mathcal{G}^\perp$. Podmoduł \mathcal{G}^\perp zawiera tym samym układ $n-k$ półwektorów liniowo niezależnych, skąd $l \geq n-k$. W połączeniu z poprzednią nierównością daje to $l = n-k$. ■

(IV.233) PRZYKŁAD. W przestrzeni liniowej $\mathcal{L}_{[6]}$ z przykładu (IV.228) dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni $\mathcal{G}_{[4]}$ utworzonej przez wszystkie wielomiany stopnia co najwyżej trzeciego jest dwuwymiarowa podprzestrzeń liniowa utworzona przez wszystkie wielomiany postaci $a_4 \lambda^4 + a_5 \lambda^5$. ■

(IV.234) TWIERDZENIE. *Jeżeli \mathcal{G}^\perp jest dopełnieniem ortogonalnym podmodułu \mathcal{G} w module $\mathcal{H}_{[n]}$ z iloczynem skalarnym, to \mathcal{G} jest dopełnieniem ortogonalnym podmodułu \mathcal{G}^\perp .*

Dowód. Na mocy twierdzeń (IV.232) i (IV.185) podmoduł \mathcal{G} ma półbazę ortogonalną (v_1, \dots, v_k) , gdzie k jest wymiarem podmodułu \mathcal{G} , a jego dopełnienie ortogonalne \mathcal{G}^\perp ma półbazę ortogonalną (v_{k+1}, \dots, v_n) . Na mocy definicji (IV.231) układ półwektorów (v_1, \dots, v_n) jest półbazą ortogonalną modułu $\mathcal{H}_{[n]}$. Ponieważ na mocy twierdzenia (IV.226) jest $v_1 \perp \mathcal{G}^\perp, \dots, v_k \perp \mathcal{G}^\perp$, więc na mocy twierdzenia (IV.232) (v_1, \dots, v_k) jest półbazą ortogonalną dopełnienia ortogonalnego $(\mathcal{G}^\perp)^\perp$, wobec czego $\mathcal{G} = (\mathcal{G}^\perp)^\perp$. ■

(IV.235) TWIERDZENIE. *Jeżeli ciąg (v_1, \dots, v_n) jest półbazą ortogonalną modułu $\mathcal{H}_{[n]}$ z iloczynem skalarnym, a ciąg (v_1, \dots, v_k) , gdzie $k < n$, półbazą podmodułu \mathcal{G} , to (v_{k+1}, \dots, v_n) jest półbazą ortogonalną dopełnienia ortogonalnego \mathcal{G}^\perp .*

Dowód wynika z faktu, że na mocy twierdzenia (IV.226) $v_{k+1} \perp \mathcal{G}, \dots, v_n \perp \mathcal{G}$. ■

(IV.236) TWIERDZENIE. *Dla dowolnych podmodułów \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 w module $\mathcal{H}_{[n]}$ z iloczynem skalarnym*

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}_2^\perp \subset \mathcal{G}_1^\perp.$$

Dowód. Z uwagi na twierdzenie (IV.234) wystarczy wykazać, że $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \Rightarrow \mathcal{G}_2^\perp \subset \mathcal{G}_1^\perp$. Niech $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k)$ będzie półbazą ortogonalną podmodułu \mathcal{G}_1 . Na mocy twierdzenia (IV.189) można ją uzupełnić tak, aby $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m)$, $k \leq m \leq n$, był półbazą ortogonalną podmodułu \mathcal{G}_2 , a następnie tak, aby ciąg (v_1, \dots, v_n) był półbazą ortogonalną modułu $\mathcal{H}_{[n]}$. Na mocy twierdzenia (IV.235) ciąg $\mathcal{D} = (v_{m+1}, \dots, v_n)$ jest półbazą ortogonalną podmodułu

\mathcal{G}_2^\perp , a ciąg $\mathcal{E} := (\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ pólbażą ortogonalną podmodułu \mathcal{G}_1^\perp . Ponieważ $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$, więc $\mathcal{G}_2^\perp \subset \mathcal{G}_1^\perp$. ■

(IV.237) DEFINICJA. Moduł \mathcal{H} nazywamy *sumą prostą modułów* \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 wtedy i tylko wtedy, gdy:

- 1° \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 są podmodułami modułu \mathcal{H} ,
- 2° jedynym wspólnym półwektorem dla \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 jest półwektor zerowy,
- 3° $\bigwedge_{\mathbf{u} \in \mathcal{H}} \bigvee_{\mathbf{v} \in \mathcal{G}_1} \bigvee_{\mathbf{w} \in \mathcal{G}_2} \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. ■

(IV.238) TWIERDZENIE. Dowolny moduł $\mathcal{H}_{[n]}$ z iloczynem skalarnym rozpięty na swej bazie ortogonalnej $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jest sumą prostą swego podmodułu \mathcal{G} rozpiętego na bazie $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ i jego dopełnienia ortogonalnego \mathcal{G}^\perp .

Dowód. Na mocy twierdzenia (IV.235) ciąg $(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ jest bazą ortogonalną podmodułu \mathcal{G}^\perp . Każdy półwektor $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{[n]}$ można przedstawić w postaci $\mathbf{u} = (a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_k \mathbf{v}_k) + (a_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \dots + a_n \mathbf{v}_n)$, $a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_k \mathbf{v}_k \in \mathcal{G}$ i $a_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \dots + a_n \mathbf{v}_n \in \mathcal{G}^\perp$. ■

§ IV.14. Rzut ortogonalny półwektora na podmoduł z iloczynem skalarnym

(IV.239) DEFINICJA. Rzutem ortogonalnym półwektora $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, gdzie \mathcal{H} jest modulem z iloczynem skalarnym, na podmoduł \mathcal{G} nazywamy taki półwektor \mathbf{p} , że

$$(IV.240) \quad \mathbf{p} \in \mathcal{G} \wedge \mathbf{u} - \mathbf{p} \perp \mathcal{G}. \quad \blacksquare$$

(IV.241) TWIERDZENIE. Jeżeli moduł \mathcal{H} z iloczynem skalarnym ma podmoduł \mathcal{G} posiadający bazę ortonormalną $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, to dla każdego półwektora $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ istnieje dokładnie jeden rzut ortogonalny \mathbf{p} tego półwektora na podmoduł \mathcal{G} . Ten rzut jest określony wzorem

$$(IV.242) \quad \mathbf{p} = \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_j.$$

Dowód. Na mocy (IV.240) i twierdzenia (IV.226) rzut \mathbf{p} musi spełniać warunki

$$(i) \quad \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u} - \mathbf{p} \rangle = 0 \quad \text{dla} \quad j = 1, \dots, k,$$

czyli

$$(ii) \quad \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u} \rangle \quad \text{dla} \quad j = 1, \dots, k,$$

skąd na mocy wzoru (IV.198) zastosowanego do półwektora \mathbf{p} otrzymujemy wzór (IV.242). Jeżeli zatem istnieje rzut ortogonalny \mathbf{p} , to musi być postaci (IV.242) i tym samym jest tylko jeden. Z drugiej strony półwektor (IV.242) spełnia warunek $\mathbf{p} \in \mathcal{G}$ oraz warunki (ii), czyli (i), i na mocy twierdzenia (IV.226) warunek $\mathbf{u} - \mathbf{p} \perp \mathcal{G}$, wobec czego jest żądanym rzutem ortogonalnym. ■

(IV.243) TWIERDZENIE. W dowolnej przestrzeni liniowej $\mathcal{L}_{[n]}$ z iloczynem skalarnym dla każdego wektora $u \in \mathcal{L}_{[n]}$ i każdej podprzestrzeni \mathcal{G} istnieje dokładnie jeden rzut ortogonalny p wektora u na podprzestrzeń \mathcal{G} . Gdy $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_k)$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni \mathcal{G} (na mocy twierdzenia (IV.185) taka baza zawsze istnieje), wtedy rzut ortogonalny p jest określony wzorem:

$$(IV.244) \quad p = \sum_{j=1}^k \frac{\langle v_j, u \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j.$$

Dowód. Dla dowolnego wektora $u \in \mathcal{G}$ istnieją takie a_1, \dots, a_k , że $u = \sum_{j=1}^k a_j v_j$. Dla dowolnego wektora $v_q \in \mathcal{B}$ jest wtedy

$$\langle v_q, u \rangle = \sum_{j=1}^k a_j \langle v_q, v_j \rangle = a_q \langle v_q, v_q \rangle.$$

Wynika stąd, że dla dowolnego wektora $u \in \mathcal{G}$ mamy

$$(IV.245) \quad u = \sum_{j=1}^k \frac{\langle v_j, u \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j.$$

Dalej dowód przebiega analogicznie jak dla twierdzenia poprzedniego, jeśli zamiast (IV.198) użyć wzoru (IV.245). ■

(IV.246) PRZYKŁAD. W przestrzeni liniowej $\mathcal{L}_{[6]}$ z przykładu (IV.228) znajdziemy rzut ortogonalny p wielomianu $u := \lambda - 3\lambda^2 + \lambda^4$ na podprzestrzeń $\mathcal{G}_{[3]}$ utworzoną ze wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

Jak wynika z przykładu (IV.68), ciąg $(e = \lambda^0, \lambda^1, \lambda^2)$ jest bazą podprzestrzeni \mathcal{G} . Sprawdzamy, że jest to baza ortonormalna. Wobec tego na mocy (IV.244)

$$\begin{aligned} p &= \langle e, \lambda - 3\lambda^2 + \lambda^4 \rangle e + \langle \lambda, \lambda - 3\lambda^2 + \lambda^4 \rangle \lambda + \langle \lambda^2, \lambda - 3\lambda^2 + \lambda^4 \rangle \lambda^2 = \\ &= 0 \cdot e + 1 \cdot \lambda + (-3) \lambda^2 = \lambda - 3\lambda^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(IV.247) TWIERDZENIE. Jeżeli p jest rzutem ortogonalnym półwektora u na podmoduł \mathcal{G} w module \mathcal{H} z iloczynem skalarnym, to

$$(IV.248) \quad \bigwedge_{w \in \mathcal{G}} \langle w, u \rangle = \langle w, p \rangle.$$

Dowód. Na mocy (IV.240) dla każdego $w \in \mathcal{G}$ mamy $u - p \perp w$, czyli $\langle u - p, w \rangle = 0$, skąd wynika (IV.248). ■

(IV.249) TWIERDZENIE. Jeżeli p jest rzutem ortogonalnym półwektora u na podmoduł \mathcal{G} w module \mathcal{H} z iloczynem skalarnym, to

$$(IV.250) \quad \|p\|^2 = \langle p, u \rangle,$$

gdzie $\|p\|^2$ jest normą kwadratową półwektora p .

Dowód wynika z twierdzenia poprzedniego dla $w = p$. ■

§ IV.15. Związek między teorią modułów a teorią wektorów i macierzy

Związek teorii modułów z teorią wektorów wynika z faktu, że wektory zostały zdefiniowane jako elementy przestrzeni liniowej, a pojęcie modułu jest rozszerzeniem pojęcia przestrzeni liniowej. W tej sytuacji przestrzenie liniowe mają wszystkie własności modułów, a wektory wszystkie własności półwektorów, określonych jako elementy modułów. Ze względu na duże znaczenie pojęcia ortogonalności wektorów szczególną rolę odgrywa teoria przestrzeni liniowych z iloczynem skalarnym i jej uogólnienie, którym jest teoria modułów z iloczynem skalarnym.

Teoria macierzy nie ma tak ścisłego powiązania z teorią modułów jak teoria wektorów, niemniej jednak powiązania istnieją, są liczne i ważne. Jak zobaczymy później, pojęcie macierzy jest ściśle związane z pojęciem transformacji przestrzeni liniowych. Poza tym niektóre pojęcia z teorii macierzy definiuje się na gruncie teorii modułów, jak na przykład pojęcie iloczynu skalarnego czy normy macierzy. Wiersze i kolumny macierzy traktuje się często jako półwektory, a więc jako elementy pewnych modułów. Odwrotnie, półwektory dane przez swoje współrzędne względem pewnej bazy \mathfrak{B} , a więc półwektory $\mathbf{v} := (a_1, \dots, a_n)_{\mathfrak{B}}$ utożsamia się zazwyczaj z półwektorami kolumnowymi

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Niektóre zagadnienia ekstremalne z teorii macierzy sprowadzają się do znalezienia rzutu ortogonalnego wektora na podprzestrzeń liniową z iloczynem skalarnym. Nie bez znaczenia jest również fakt, że teoria przestrzeni liniowych pozwala w teorii macierzy wprowadzać wygodne i przejrzyste interpretacje geometryczne.

W rozdziale niniejszym zostały wyłożone tylko najważniejsze fakty z teorii modułów i przestrzeni liniowych. Inne poznamy w późniejszych rozdziałach.