a ze wzorów (29), (27) i (25)

$$ADFA = A \tag{30}$$

Z faktu, że macierze B i C są nieosobliwe, wynika, że dla każdej macierzy A obie macierze Γ i Φ są rzędu r. Wobec tego dla każdej macierzy A macierze $\Gamma^*\Gamma$ oraz $\Phi\Phi^*$ są obie macierzami kwadratowymi nieosobliwymi stopnia i rzędu r i mają macierze odwrotne $(\Gamma^*\Gamma)^{-1}$ i $(\Phi\Phi^*)^{-1}$. Również na mocy (29) dla każdej macierzy A macierz

$$\Gamma^*A\Phi^* = (\Gamma^*\Gamma)(\Phi\Phi^*)$$

jest macierzą kwadratową nieosobliwą stopnia i rzędu r i ma macierz odwrotną

$$(\Gamma^*A\Phi^*)^{-1} = (\Phi\Phi^*)^{-1}(\Gamma^*\Gamma)^{-1}$$

Skorzystamy z tego w dalszych rozważaniach.

Obecnie z łatwością udowodnimy drugie twierdzenie o diagonalizacji.

Twierdzenie 2

Dla każdej macierzy $A_{[m,n]}$ rzędu r istnieją takie macierze $F_{[r,m]}$ i $D_{[n,r]}$ rzędu r, że

$$FAD = I_{[r]} \tag{31}$$

Dowód

Wzór (31) wynika bezpośrednio z pierwszego wzoru (25) i pierwszego wzoru (23), ponieważ z faktu, że macierze B i C są nieosobliwe, wynika, że macierze F i D są obie rzędu r. ■

4. OKREŚLENIE g-ODWROTNOŚCI I ICH PODSTAWOWE WŁASNOŚCI

Definicja

Odwrotnością uogólnioną albo g-odwrotnością macierzy $A_{[m,n]}$ nazywamy każdą taką macierz $\mathcal{X}$, że dla każdej macierzy Y, dla której równanie

(32) $$A\Xi = T$$

jest niesprzeczne, macierz

(33) $$\Xi = \mathcal{X}T$$

jest rozwiązaniem.

Własność 1 $$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{[n,m]}$$

Dowód

Na mocy (33) liczba wierszy w macierzy $\mathcal{X}$ jest taka, jak w macierzy Ξ, a na mocy (32) liczba wierszy macierzy Ξ jest równa liczbie kolumn macierzy A. Zatem macierz $\mathcal{X}$ ma n wierszy.

Na mocy (33) liczba kolumn macierzy $\mathcal{X}$ jest równa liczbie wierszy macierzy T, a zatem na mocy (32) jest równa liczbie wierszy macierzy A, czyli równa m. ■

Własność 2

Macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy

(34) $$A\mathcal{X}A = A$$

Dowód

1) Załóżmy najpierw, że $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy $A_{[m,n]}$. Ponieważ równanie

(35) $$A\Xi = A$$

nie jest sprzeczne, gdyż $AI_n = A$, zatem z definicji wynika, że macierz $\Xi = \mathcal{X}A$ jest rozwiązaniem równania (35), czyli zachodzi związek (34).

2) Załóżmy teraz, że macierz $\mathcal{X}$ spełnia warunek (34), a równanie (32) nie jest sprzeczne. Wtedy jest ono równoważne równaniu

$$A\mathcal{X}A\Xi = T$$

skąd po podstawieniu (32)

$$A\mathcal{X}T = T$$

co oznacza, że macierz $\Xi = \mathcal{X}T$ jest rozwiązaniem równania (32). Ponieważ równanie (32) było dowolnym równaniem niesprzecznym, macierz $\mathcal{X}$ jest zatem g-odwrotnością macierzy A. ■

Własność 2 pozwala traktować (34) jako równoważną definicję g-odwrotności macierzy A.

Twierdzenie 3

Dla każdej macierzy istnieje g-odwrotność.

Dowód

Dla macierzy zerowej $0_{[m,n]}$ mamy

$$0_{[m,n]}\,0_{[n,m]}\,0_{[m,n]} = 0_{[m,n]}$$

skąd wynika, że macierz $0_{[n,m]}$ jest jej g-odwrotnością. Dla macierzy niezerowej $A_{[m,n]}$ istnieją macierze D i F jako podmacierze macierzy B i C (patrz (20)) i wobec tego na mocy (30) macierz $\mathcal{X} = DF$ jest g-odwrotnością macierzy A. ■

Własność 3

$$AXA = A \Leftrightarrow A'\mathcal{X}'A' = A' \Leftrightarrow \overline{A\mathcal{X}A} = \bar{A} \Leftrightarrow A^*\mathcal{X}^*A^* = A^*.$$

Dowód

Własność 3 wynika z podstawowych działań na macierzach. ■

Własność 4

Macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Y określona wzorem

$$\mathcal{X} = CYB \tag{36}$$

gdzie macierze B i C spełniają warunek (2), jest g-odwrotnością macierzy J z warunku (2), tzn.

$$JYJ = J \tag{37}$$

Dowód

Na mocy (34), (24) i (26) mamy

$$AXA = A \Leftrightarrow BAXAC = BAC \Leftrightarrow JC^{-1}XB^{-1}J = J \Leftrightarrow JYJ = J$$

ponieważ wzór (36) jest równoważny wzorowi

$$Y = C^{-1}X B^{-1} \tag{38}$$

Tym samym własność 4 została udowodniona. ■

Lemat 1

Macierz Y jest g-odwrotnością macierzy J, tzn. spełnia warunek (37) wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci

$$Y = J' + Z - J'JZJJ' \tag{39}$$

gdzie $Z = Z_{[n,m]}$ jest dowolną macierzą o podanych wymiarach.

Dowód

1) Załóżmy najpierw, że Y jest g-odwrotnością macierzy J. Ze wzoru (37) wynika, że

$$J'JYJJ' = J'JJ'$$

Ale na mocy (3) zachodzą równości

$$JJ'J = J, \qquad J'JJ' = J' \tag{40}$$

które sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, więc

$$J'JYJJ' = J' \tag{41}$$

i wobec tego macierz Y można napisać w postaci

$$Y = J' + Y - J'JYJJ'$$

czyli w postaci (39).

2) Załóżmy teraz, że macierz Y ma postać (39). Wtedy

$$JYJ = JJ'J + JZJ - JJ'JZJJ'J$$

i na mocy pierwszego ze wzorów (40) zachodzi warunek (37), czyli Y jest g-odwrotnością macierzy J. ■

Twierdzenie 4

Macierz X jest g-odwrotnością macierzy $A_{[m,n]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci

$$X = C(J' + Z - J'JZJJ')B \tag{42}$$

gdzie $Z = Z_{[n,m]}$ jest dowolną macierzą o podanych wymiarach a B, C, J są macierzami określonymi wzorami (2) i (3).

Dowód

Twierdzenie 4 wynika bezpośrednio z własności 4 i lematu 1. ■

W niektórych przypadkach jest wygodniej korzystać zamiast z lematu 1 i twierdzenia 4 z następującego lematu 2 i twierdzenia 5.

Lemat 2

Macierz Y jest g-odwrotnością macierzy J, tzn. spełnia warunek (37) wtedy i tylko wtedy, gdy ma postać

$$Y = \left[\begin{array}{c|c} I_{[r]} & V_{[r,m-r]} \\ \hline U_{[n-r,r]} & W_{[n-r,m-r]} \end{array}\right] \tag{43}$$

gdzie U, V, W są dowolnymi macierzami o podanych wymiarach.

Dowód

1) Załóżmy najpierw, że Y jest g-odwrotnością macierzy J, tzn. spełnia warunek (37). Wynika stąd, że $Y = Y_{[n,m]}$ i daje się przedstawić w postaci

$$Y = \left[\begin{array}{c|c} T_{[r]} & V_{[r,m-r]} \\ \hline U_{[n-r,r]} & W_{[n-r,m-r]} \end{array}\right]$$

Sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że jest wtedy

$$JYJ = \left[\begin{array}{c|c} T_{[r]} & 0_{[r,m-r]} \\ \hline 0_{[n-r,r]} & 0_{[n-r,m-r]} \end{array}\right]$$

i na mocy (37) $T_{[r]} = I_{[r]}$, czyli macierz Y daje się przedstawić w postaci (43).

2) Załóżmy teraz, że macierz Y ma postać (43). Wtedy sprawdzamy rachunkiem, że $JYJ = J$, co oznacza, że Y jest g-odwrotnością macierzy J. ■

Twierdzenie 5

Macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy $A_{[m,n]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci

$$\mathcal{X} = DF + EUF + DVG + EWG \tag{44}$$

gdzie $U = U_{[n-r,r]}$, $V = V_{[r,m-r]}$, $W = W_{[n-r,m-r]}$ są dowolnymi macierzami o podanych wymiarach, $r = \varrho(A)$, a macierze D, E, F, G są określone wzorami (20).

Dowód

Twierdzenie 5 wynika bezpośrednio z własności 4 i lematu 2. ■

Ze wzorów (44), (22) i (23) wynikają wzory

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\Gamma &= D + EU, & \mathcal{X}\Delta &= DV + EW, \\ \Phi\mathcal{X} &= F + VG, & \Psi\mathcal{X} &= UF + WG \end{aligned} \tag{45}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Phi\mathcal{X}\Gamma &= I_{[r]}, & \Phi\mathcal{X}\Delta &= V, \\ \Psi\mathcal{X}\Gamma &= U, & \Psi\mathcal{X}\Delta &= W. \end{aligned} \tag{46}$$

Wzory (46) wynikają również bezpośrednio ze wzorów (43), (38) i (20).

W rozważaniach nad g-odwrotnościami $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ jak również w ich zastosowaniach dużą rolę odgrywają macierze H i L określone wzorami

$$H = \mathcal{X}A, \qquad L = A\mathcal{X}. \tag{47}$$

Ze wzorów tych wynika, że obie macierze H i L są kwadratowe, $H = H_{[n]}$ oraz $L = L_{[m]}$.

Własność 5

Macierze $H, L, I_{[n]} - H, I_{[m]} - L$ są idempotentne, tzn.

$$(48)\quad H^2 = H,\quad L^2 = L,\quad (I-H)^2 = I - H,\quad (I-L)^2 = I - L$$

Dowód

Na mocy (34) jest

$$H^2 = XAXA = XA = H, \qquad L^2 = AXAX = AX = L$$

a następnie

$$(I - H)^2 = I^2 - HI - IH + H^2 = I - H - H + H = I - H,$$

$$(I - L)^2 = I^2 - LI - IL + L^2 = I - L - L + L = I - L. \blacksquare$$

Własność 6

Zachodzą równości

$$(49)\quad AH = A,\quad LA = A,\quad A(I_{[n]} - H) = 0,\quad (I_{[m]} - L)A = 0.$$

Dowód

Pierwsze dwa wzory wynikają bezpośrednio z (47) i (34). Z nich otrzymujemy dwa pozostałe, ponieważ

$$A(I - H) = A - AH, \qquad (I - L)A = A - LA. \blacksquare$$

Własność 7

Każda z macierzy $H, L, I_{[n]} - H, I_{[m]} - L$ jest sama swoją własną g-odwrotnością.

Dowód

Własność 7 wynika bezpośrednio ze wzorów

$$H^3 = H, \quad L^3 = L, \quad (I - H)^3 = I - H, \quad (I - L)^3 = I - L$$

jakie otrzymujemy stosując dwukrotnie wzory (48). ■

Zauważmy, że własność 7 mają wszystkie macierze idempotentne.

Własność 8

Jeśli g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ jest dana wzorem (44), to

$$(50) \qquad H = (D + EU)\Phi, \qquad L = \Gamma(F + VG),$$
$$I_{[n]} - H = E(\Psi - U\Phi), \qquad I_{[m]} - L = (\Delta - \Gamma V)G$$

Dowód

Mamy

$$H = \mathcal{X}A = DFA + EUFA + DVGA + EWGA$$

$$L = A\mathcal{X} = ADF + AEUF + ADVG + AEWG$$

i na mocy (25), (27) pierwsze dwa ze wzorów (50). Na mocy (21) mamy wtedy

$$I - H = (D\Phi + E\Psi) - (D + EU)\Phi = E(\Psi - U\Phi)$$
$$I - L = (\Gamma F + \Delta G) - \Gamma(F + VG) = (\Delta - \Gamma V)G. \blacksquare$$

Własność 9

Jeśli g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy A jest dana wzorem (44), to zachodzą następujące związki:

$$HD = D + EU, \quad HE = 0, \quad \Phi HD = I_{[r]},$$
$$\Phi H = \Phi, \quad \Psi H = U\Phi, \quad \Psi HD = U,$$
$$(51)$$
$$FL = F + VG, \quad GL = 0, \quad FL\Gamma = I_{[r]}$$
$$L\Gamma = \Gamma, \quad L\Delta = \Gamma V, \quad FL\Delta = V$$

oraz

$$(I_{[n]}-H)D=-EU,\quad (I_{[n]}-H)E=E,\quad \Psi(I_{[n]}-H)D=-U,$$

$$\Phi(I_{[n]}-H)=0,\quad \Psi(I_{[n]}-H)=\Psi-U\Phi,\quad \Psi(I_{[n]}-H)E=I_{[n-r]},$$

(52)

$$F(I_{[m]}-L)=-VG,\quad G(I_{[m]}-L)=G,\quad F(I_{[m]}-L)\Delta=-V,$$

$$(I_{[m]}-L)\Gamma=0,\quad (I_{[m]}-L)\Delta=\Delta-\Gamma V,\quad G(I_{[m]}-L)\Delta=I_{[m-r]}.$$

Dowód

Wzory (51) i (52) wynikają w sposób oczywisty ze wzorów (50), (22) i (23). ■

Gdy jest znana jakakolwiek g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy A, można łatwo podać wzór na wszystkie g-odwrotności tej macierzy bez odwoływania się do rozkładu (2). Mówią o tym dwa następujące twierdzenia.

Twierdzenie 6

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by macierz $\mathcal{X}_1$ była g-odwrotnością macierzy $A_{[m,n]}$, jest możliwość przedstawienia jej w postaci

(53) $$\mathcal{X}_1=\mathcal{X}+R-HRL$$

gdzie $R=R_{[n,m]}$ jest dowolną macierzą o podanych wymiarach, $\mathcal{X}$ dowolnie ustaloną g-odwrotnością macierzy A, a H i L macierzami określonymi wzorem (47).

Dowód

1) Załóżmy najpierw, że $\mathcal{X}_1$ jest g-odwrotnością macierzy A. Zatem na mocy własności 2 mamy

(54) $$A\mathcal{X}_1A=A,\quad A\mathcal{X}A=A.$$

Połóżmy $R = \mathcal{X}_1 - \mathcal{X}$. Wtedy na mocy (54)

$$HRL = \mathcal{X}A(\mathcal{X}_1 - \mathcal{X})A\mathcal{X} = \mathcal{X}A\mathcal{X}_1A\mathcal{X} - \mathcal{X}A\mathcal{X}A\mathcal{X} = \mathcal{X}A\mathcal{X} - \mathcal{X}A\mathcal{X} = 0$$

i wobec tego zachodzi równość (53).

2) Załóżmy teraz, że macierz $\mathcal{X}_1$ jest dana wzorem (53). Wtedy na mocy (34) i (49)

$$A\mathcal{X}_1A = A\mathcal{X}A + ARA - AHRLA = A + ARA - ARA = A$$

wobec czego $\mathcal{X}_1$ jest g-odwrotnością macierzy A. ■

Twierdzenie 7

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by macierz $\mathcal{X}_1$ była g-odwrotnością macierzy $A_{[m,n]}$ jest możliwość przedstawienia jej w postaci

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P + Q(I_{[m]} - L) \tag{55}$$

gdzie $P = P_{[n,m]}$, $Q = Q_{[n,m]}$ są dowolnymi macierzami o podanych wymiarach, $\mathcal{X}$ jest dowolnie ustaloną g-odwrotnością macierzy A, a H i L macierzami określonymi wzorami (47).

Dowód

1) Załóżmy najpierw, że $\mathcal{X}_1$ jest g-odwrotnością macierzy A i wobec tego zachodzą równości (54). Połóżmy

$$P = \mathcal{X}_1 - \mathcal{X}, \qquad Q = H\mathcal{X}_1 - H\mathcal{X}.$$

Mamy wtedy

$$(I - H)P + Q(I - L) = \mathcal{X}_1 - \mathcal{X} - H\mathcal{X}_1 + H\mathcal{X} + H\mathcal{X}_1 - H\mathcal{X} - H\mathcal{X}_1L + H\mathcal{X}L =$$

$$= \mathcal{X}_1 - \mathcal{X} - \mathcal{X}A\mathcal{X}_1A\mathcal{X} + \mathcal{X}A\mathcal{X}A\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 - \mathcal{X} - \mathcal{X}A\mathcal{X} + \mathcal{X}A\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 - \mathcal{X}$$

i wobec tego zachodzi równość (55).

2) Załóżmy teraz, że macierz $\mathcal{X}_1$ jest dana wzorem (55). Wtedy na mocy (34) i (49)

$$AX_1A = AXA + (A - AH)PA + AQ(A - LA) = AXA = A$$

wobec czego X_1 jest g-odwrotnością macierzy A. ■

Własność 10

Jeśli X jest g-odwrotnością macierzy $A_{[m,n]}$, to

$$\rho(A) \leqslant \rho(X) \leqslant \min(m,n)$$

Dowód

Na mocy własności 4 mamy

$$\rho(X) = \rho(Y)$$

a na mocy (43)

$$r = \rho(A) \leqslant \rho(Y) \leqslant \min(m,n). \blacksquare$$

Własność 11

Jeśli macierze H i L są określone wzorami (47), to

$$\rho(H) = \rho(L) = \rho(A) = r, \ \rho(I_{[n]} - H) = n - r, \ \rho(I_{[m]} - L) = m - r.$$

Dowód

Na mocy (47)

$$\rho(H) \leqslant r, \qquad \rho(L) \leqslant r$$

a na mocy (49)

$$\rho(H) \geqslant r, \qquad \rho(L) \geqslant r.$$

Zatem

$$\rho(H) = \rho(L) = r.$$

Z równości

$$H(I_{[n]} - H) = 0, \qquad L(I_{[m]} - L) = 0$$

wynika, że

$$\varrho(H) + \varrho(I_{[n]} - H) \leqslant n, \qquad \varrho(L) + \varrho(I_{[m]} - L) \leqslant m$$

a z równości

$$H + (I_{[n]} - H) = I_{[n]}, \qquad L + (I_{[m]} - L) = I_{[m]}$$

że

$$\varrho(H) + \varrho(I_{[n]} - H) \geqslant n, \qquad \varrho(L) + \varrho(I_{[m]} - L) \geqslant m$$

Zatem

$$\varrho(H) + \varrho(I_{[n]} - H) = n, \qquad \varrho(L) + \varrho(I_{[m]} - L) = m,$$

skąd

$$\varrho(I_{[n]} - H) = n - r, \qquad \varrho(I_{[m]} - L) = m - r. \blacksquare$$

Własność 12

Równość $H = I_{[n]}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $r = \varrho(A) = n$, a równość $L = I_{[m]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r = m$.

Dowód

Gdy $H = I_{[n]}$, to $\varrho(H) = n$ i stąd $\varrho(A) = \varrho(H) = n$ na mocy własności 11. Gdy $r = \varrho(A) = n$, wtedy $\varrho(I_{[n]} - H) = 0$, skąd $I_{[n]} - H = 0_{[n]}$, czyli $H = I_{[n]}$.

Dowód dla macierzy L jest analogiczny. $\blacksquare$

Twierdzenie 8

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by macierz $\mathcal{X} = \mathcal{X}_2\mathcal{X}_1$ była g-odwrotnością macierzy $A = A_1A_2$, gdzie $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ są g-odwrotnościami odpowiednio macierzy A_1 i A_2, jest idempotentność macierzy H_1L_2, gdzie $H_1 = \mathcal{X}_1A_1$ i $L_2 = A_2\mathcal{X}_2$.

Dowód.

Mamy

$$A = A_1A_2 = A_1\mathcal{X}_1A_1A_2\mathcal{X}_2A_2 = A_1H_1L_2A_2$$

$$A\mathcal{X}A = A_1A_2\mathcal{X}_2\mathcal{X}_1A_1A_2 = A_1L_2H_1A_2$$

Zatem

$$A\mathcal{X}A = A \Leftrightarrow A_1L_2H_1A_2 = A_1H_1L_2A_2$$

Jeśli macierz H_1L_2 jest idempotentna, tzn.

$$H_1L_2H_1L_2 = H_1L_2$$

to mnożąc tę równość stronami lewostronnie przez A_1 a prawostronnie przez A_2 otrzymujemy

$$A_1L_2H_1A_2 = A_1H_1L_2A_2$$

a stąd $A\mathcal{X}A = A$, czyli $\mathcal{X}$ jest wtedy g-odwrotnością macierzy A.

Jeśli - odwrotnie - jest $A\mathcal{X}A = A$, czyli

$$A_1L_2H_1A_2 = A_1H_1L_2A_2$$

to mnożąc tę równość stronami lewostronnie przez $\mathcal{X}_1$ a prawostronnie przez $\mathcal{X}_2$ otrzymujemy

$$H_1L_2H_1L_2 = H_1H_1L_2L_2 = H_1L_2$$

Zatem macierz H_1L_2 jest wtedy idempotentna. ■

5. ODWROTNOŚCI LEWO- I PRAWOSTRONNE

Definicja

Odwrotnością lewostronną macierzy $A_{[m,n]}$ nazywamy każdą taką macierz A^L, że