skąd $$R_{k+r} = u_{k1}R_1 + \dots + u_{kr}R_r$$

Wobec tego dla każdego $s = 1, \dots, m-r$ jest

$$w_{ks} = u_{k1}v_{1s} + \dots + u_{kr}v_{rs}$$

co oznacza, że $W = UV$. Na mocy twierdzenia 12 macierz $\mathcal{X}$ jest wtedy g-odwrotnością wzajemną.

Załóżmy teraz, że - odwrotnie - g-odwrotność $\mathcal{X}$ jest wzajemna, czyli macierz $A_{[m,n]}$ jest g-odwrotnością macierzy $\mathcal{X}_{[n,m]}$. Wobec tego na mocy własności 9 oprócz nierówności

$$\rho(A) \leqslant \rho(\mathcal{X}) \leqslant \min(m,n)$$

mamy również

$$\rho(\mathcal{X}) \leqslant \rho(A) \leqslant \min(m,n)$$

skąd wynika równość (63). ■

7. g-ODWROTNOŚCI H-SYMETRYCZNE

g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ będziemy nazywać H-symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy

(65) $$H^* = H$$

gdzie $H = \mathcal{X}A$.

Twierdzenie 16

Macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością H-symetryczną macierzy $A_{[m,n]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek

(66) $$A = AA^*\mathcal{X}^*$$

Dowód

1) Jeśli macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością H-symetryczną macierzy A, to spełnia warunek

$$A = A\mathcal{X}A = AH$$

a ponadto jest $H^* = H$. Zatem

$$A = AH^* = AA^*\mathcal{X}^*$$

2) Jeśli macierz $\mathcal{X}$ spełnia warunek (66), to mnożąc go lewostronnie przez $\mathcal{X}$ otrzymujemy

$$\mathcal{X}A = \mathcal{X}AA^*\mathcal{X}^* = (\mathcal{X}AA^*\mathcal{X}^*)^* = (\mathcal{X}A)^* = A^*\mathcal{X}^*.$$

Mnożąc otrzymaną równość lewostronnie przez A otrzymujemy

$$A\mathcal{X}A = AA^*\mathcal{X}^* = A.$$

Zatem macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy A, a z otrzymanej już równości

$$\mathcal{X}A = (\mathcal{X}A)^*$$

wynika, że ta g-odwrotność jest H-symetryczna. ■

Twierdzenie 17

g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy A dana wzorem (44) jest H-symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$U = \Psi\Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1} \tag{67}$$

gdzie Φ i Ψ są macierzami określonymi wzorem (20).

Dowód

1) Jeśli g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy A dana wzorem (44) jest H--symetryczna, to na mocy (50)

$$\Phi^*(D^* + U^*E^*) = (D + EU)\Phi.$$

Mnożąc obie strony prawostronnie przez Φ^* otrzymujemy na mocy (23)

$$\Phi^* = (D + EU)\Phi\Phi^*.$$

Ponieważ w paragrafie 3 wykazaliśmy, że macierz $\Phi\Phi^*$ ma odwrotność, więc

$$D + EU = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}.$$

Mnożąc obie strony lewostronnie przez Ψ otrzymujemy na mocy (23) wzór (67).

2) Jeśli - na odwrót - jest spełniony warunek (67), to na mocy (21)

$$D + EU = D + E\Psi\Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1} = D + (I_{[n]} - D\Phi)\Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1} =$$
$$= D + \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1} - D = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}$$

i na mocy (50)

$$H = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}\Phi$$

skąd wynika wzór (65), czyli g-odwrotność $\mathcal{X}$ jest H-symetryczna. ■

Twierdzenie 18

Macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością H-symetryczną macierzy $A_{[m,n]}$, wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci

(68) $$\mathcal{X} = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}F + (DV + EW)G$$

gdzie - jak poprzednio - macierze D, E, F, G, V, W są określone jak we wzorze (44), a macierz Φ jak we wzorze (20).

Dowód

Twierdzenie 18 jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzeń 5 i 17. ■

W przypadku gdy rząd macierzy A jest $r = m$, wzór (68) przyjmuje jednoznaczną postać

$$\mathcal{X} = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}F = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}B = \Phi^*(B^{-1}\Phi\Phi^*)^{-1} = \Phi^*(\Gamma\Phi\Phi^*)^{-1} =$$
$$= \Phi^*(A\Phi^*)^{-1}$$

Twierdzenie 19

Norma

$$\| \Xi A - I \|$$

osiąga minimum wtedy i tylko wtedy, gdy Ξ jest g-odwrotnością H-symetryczną macierzy A.

Dowód

Połóżmy

$$\Xi = \mathcal{X} + \Lambda$$

gdzie $\mathcal{X}$ jest dowolną g-odwrotnością H-symetryczną macierzy A. Mamy wtedy na mocy (66)

$$\| \Xi A - I \|^2 = \| \mathcal{X}A - I + \Lambda A \|^2 =$$

$$= \| \mathcal{X}A - I \|^2 + \| \Lambda A \|^2 + 2 \operatorname{Tr} \operatorname{Re} [\Lambda A (A^* \mathcal{X}^* - I)] =$$

$$= \| \mathcal{X}A - I \|^2 + \| \Lambda A \|^2$$

Norma powyższa osiąga minimum wtedy i tylko wtedy, gdy Λ jest macierzą spełniającą warunek

$$\Lambda A = 0$$

Ale wtedy

$$AA^*\Xi^* = AA^*\mathcal{X}^* + AA^*\Lambda^* = AA^*\mathcal{X}^* = A$$

i na mocy twierdzenia 16 Ξ jest g-odwrotnością H-symetryczną macierzy A. Odwrotnie, jeśli Ξ jest g-odwrotnością H-symetryczną macierzy A, to zachodzi ostatnia równość, a stąd

$$AA^*\Lambda^* = 0$$

a następnie

$$\Lambda AA^*\Lambda^* = 0$$

skąd $\Lambda A = 0$. ■

Twierdzenie 19 daje naturalną charakterystykę g-odwrotności H-symetrycznych.

Twierdzenie 20

Jeśli macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy A, to macierz $\mathcal{X}^*\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy AA^* wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\mathcal{X}$ jest H-symetryczna.

Dowód

Jeśli $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością H-symetryczną macierzy A, to na mocy (66) jest

$$(AA^*)(\mathcal{X}^*\mathcal{X})(AA^*) = (AA^*\mathcal{X}^*)(\mathcal{X}AA^*) = AA^*$$

czyli $\mathcal{X}^*\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy AA^*.

Jeśli - na odwrót - macierz $\mathcal{X}^*\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy AA^*, to na mocy twierdzenia 8 jest

$$HH^* = HH^*HH^*$$

gdzie $H = \mathcal{X}A$. Wobec tego mamy

$$H(H^* - H)(H - H^*)H^* = HH^*HH^* - HHHH^* - HH^*H^*H^* + HHH^*H^* =$$

$$= HH^* - HH^* - HH^* + HH^* = 0$$

a stąd

$$H(H^* - H) = 0$$

a następnie

$$H = HH^* = (HH^*)^* = H^*$$

Macierz $\mathcal{X}$ jest zatem H-symetryczna. ■

8. g-ODWROTNOŚCI L-SYMETRYCZNE

g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ będziemy nazywać L-symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy

(69) $$L^* = L$$

gdzie $L = A\mathcal{X}$.

Twierdzenie 21

Macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością L-symetryczną macierzy $A_{[m,n]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek

(70) $$A = \mathcal{X}^*A^*A$$

Dowód jest symetryczny do dowodu twierdzenia 16.

Twierdzenie 22

$\mathcal{G}$-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy A dana wzorem (44) jest $\mathcal{L}$-symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy

(71) $$V = (\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*\Delta$$

gdzie Γ i Δ są macierzami określonymi wzorem (20).

Dowód jest symetryczny do dowodu twierdzenia 17.

Twierdzenie 23

Macierz $\mathcal{X}$ jest $\mathcal{G}$-odwrotnością $\mathcal{L}$-symetryczną macierzy $A_{[m,n]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci

(72) $$\mathcal{X} = D(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^* + E(UF + WG)$$

gdzie - jak poprzednio - macierze D, E, F, G, U, W są określone jak we wzorze (44), a macierz Γ jak we wzorze (20).

Dowód jest symetryczny do dowodu twierdzenia 18.

W przypadku gdy rząd macierzy A jest $r = n$, wzór (72) przyjmuje jednoznaczną postać

$$\mathcal{X} = D(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^* = C(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^* = (\Gamma^*\Gamma C^{-1})^{-1}\Gamma^* = (\Gamma^*\Gamma\Phi)^{-1}\Gamma^* =$$

$$= (\Gamma^*A)^{-1}\Gamma^* .$$

Twierdzenie 24

Norma

$$\| A\Xi - I \| .$$

osiąga minimum wtedy i tylko wtedy, gdy Ξ jest g-odwrotnością L-symetryczną macierzy A.

Dowód jest symetryczny do dowodu twierdzenia 19.

Twierdzenie 25

Jeśli macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością macierzy A, to macierz $\mathcal{X}\mathcal{X}^*$ jest g-odwrotnością macierzy A^*A wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\mathcal{X}$ jest L-symetryczna.

Dowód jest symetryczny do dowodu twierdzenia 20.

9. ODWROTNOŚCI MOORE'A-PENROSEGO, CZYLI MP-ODWROTNOŚCI

g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ będziemy nazywać odwrotnością Moore'a-Penrosego albo krócej MP-odwrotnością wtedy i tylko wtedy, gdy jest wzajemna, H-symetryczna i L-symetryczna. Innymi słowy, macierz $\mathcal{X}$ jest MP-odwrotnością macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

$$
\begin{aligned}
A\mathcal{X}A &= A \\
\mathcal{X}A\mathcal{X} &= \mathcal{X} \\
H^* &= H \\
L^* &= L
\end{aligned} \tag{73}
$$

gdzie $H = \mathcal{X}A$, $L = A\mathcal{X}$.

Na mocy twierdzenia 16 warunki (73) są równoważne warunkom

$$
\begin{aligned}
AA^*\mathcal{X}^* &= A \\
\mathcal{X}\mathcal{X}^*A^* &= \mathcal{X}
\end{aligned} \tag{74}
$$

Twierdzenie 26

Każda macierz $A_{[m,n]}$ ma dokładnie jedną MP-odwrotność. Odwrotność tę można przedstawić w postaci

(75) $$\mathcal{X} = \Phi^*(\Gamma^* A \Phi^*)^{-1}\Gamma^*$$

gdzie macierze Φ i Γ są dane wzorami (20).

Dowód

1) Wzór (75) określa MP-odwrotność macierzy A, ponieważ na mocy (29) jest

$$\mathcal{X} = \Phi^*(\Gamma^*\Gamma\Phi\Phi^*)^{-1}\Gamma^* = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*$$

a następnie zgodnie z warunkami (74)

$$AA^*\mathcal{X}^* = \Gamma\Phi\Phi^*\Gamma^*\mathcal{X}^* =$$
$$= \Gamma(\Phi\Phi^*)(\Gamma^*\Gamma)(\Gamma^*\Gamma)^{-1}(\Phi\Phi^*)^{-1}\Phi =$$
$$= \Gamma\Phi = A$$

$$\mathcal{X}\mathcal{X}^*A^* = \mathcal{X}\mathcal{X}^*\Phi^*\Gamma^* =$$
$$= \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*\Gamma(\Gamma^*\Gamma)^{-1}(\Phi\Phi^*)^{-1}\Phi\Phi^*\Gamma^* =$$
$$= \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^* = \mathcal{X}$$

2) Odwrotnie, jeśli macierz $\mathcal{X}$ spełnia warunki (73), to na mocy twierdzeń 12, 17 i 22 można ją przedstawić w postaci

$$\mathcal{X} = \left[D + E\Psi\Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}\right]\left[F + (\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*\Delta G\right]$$

skąd na mocy (21) i (29)

$$\mathcal{X} = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^* = \Phi^*(\Gamma^*\Gamma\Phi\Phi^*)^{-1}\Gamma^* =$$
$$= \Phi^*(\Gamma^*A\Phi^*)^{-1}\Gamma^*$$

czyli macierz $\mathcal{X}$ ma wtedy postać (75) i jest określona jednoznacznie. ■

W przypadku $r = 0$, gdzie - jak poprzednio - r oznacza rząd macierzy A, czyli w przypadku, gdy macierz A jest zerowa, wzór (75) przyjmuje postać $\mathcal{X} = 0$. W przypadku $r = m \neq n$, wzór ten przyjmuje postać

$$\mathcal{X} = \Phi^*(A\Phi^*)^{-1}$$

w przypadku $r = n \neq m$ postać

$$\mathcal{X} = (\Gamma^* A)^{-1}\Gamma^*$$

a w przypadku $r = m = n$ postać

$$\mathcal{X} = A^{-1}$$

<u>Twierdzenie 27</u>

MP-odwrotność macierzy A jest tą spośród g-odwrotności tej macierzy, która ma najmniejszą normę.

Dowód

Niech $\mathcal{X}$ będzie MP-odwrotnością macierzy A i niech będzie dana wzorem (75). Jak to już znaleźliśmy w trakcie dowodzenia twierdzenia 26, jest wtedy

$$H = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}\Phi, \quad L = \Gamma(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*$$

a na mocy twierdzenia 7 każda g-odwrotność $\mathcal{X}_1$ macierzy A daje się przedstawić w postaci

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} + (I - H)P + Q(I - L)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X}_1\|^2 &= \|\mathcal{X}\|^2 + \|(I - H)P + Q(I - L)\|^2 + \\ &\quad + 2\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{X}^*(I - H)P + \mathcal{X}^*Q(I - L)\right] = \\ &= \|\mathcal{X}\|^2 + \|(I - H)P + Q(I - L)\|^2 + 2\mathrm{Tr}\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{X}^*(I - H)P\right] + \\ &\quad + 2\mathrm{Tr}\,\mathrm{Re}\left[Q(I - L)\mathcal{X}^*\right]\end{aligned}$$

3 4

Ale na mocy (73)

$$\mathcal{X}^*(I - H) = \mathcal{X}^*(I - H^*) = \left[(I - H)\mathcal{X}\right]^* = \left[\mathcal{X} - H\mathcal{X}\right]^* =$$

$$= \left[\mathcal{X} - \mathcal{X}A\mathcal{X}\right]^* = \Theta$$

$$(I - L)\mathcal{X}^* = (I - L^*)\mathcal{X}^* = \left[\mathcal{X}(I - L)\right]^* = \left[\mathcal{X} - \mathcal{X}L\right]^* =$$

$$= \left[\mathcal{X} - \mathcal{X}A\mathcal{X}\right]^* = 0$$

i wobec tego

$$\left\|\mathcal{X}_1\right\|^2 = \left\|\mathcal{X}\right\|^2 + \left\|(I - H)P + Q(I - L)\right\|^2$$

Wynika stąd, że norma

$$\left\|\mathcal{X}_1\right\|$$

osiąga minimum wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(I - H)P + Q(I - L) = 0$$

czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$. ■

Twierdzenie 27 daje naturalną charakterystykę MP-odwrotności.

Twierdzenie 28

Jeśli macierz $\mathcal{X}$ jest MP-odwrotnością macierzy A, to macierz $\mathcal{X}^*\mathcal{X}$ jest MP-odwrotnością macierzy AA^*, a macierz $\mathcal{X}\mathcal{X}^*$ MP-odwrotnością macierzy A^*A.

Dowód

Na mocy (74) mamy

$$(AA^*)(AA^*)^*(\mathcal{X}^*\mathcal{X})^* = AA^*(AA^*\mathcal{X}^*)\mathcal{X} = AA^*A\mathcal{X} = AA^*(A\mathcal{X}\mathcal{X}^*)A^* =$$

$$= (AA^*\mathcal{X}^*)A^* = AA^*$$

$$(\mathcal{X}^*\mathcal{X})(\mathcal{X}^*\mathcal{X})^*(AA^*)^* = \mathcal{X}^*\mathcal{X}\mathcal{X}^*(\mathcal{X}AA^*) = \mathcal{X}^*(\mathcal{X}\mathcal{X}^*A^*) = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$$

i wobec tego macierz $\mathcal{X}^*\mathcal{X}$ jest MP-odwrotnością macierzy AA^*.

Dowód drugiej części twierdzenia jest symetryczny do powyższego. ■

10. g-ODWROTNOŚCI MAKSYMALNEGO RZĘDU

g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ będziemy nazywać g-odwrotnością maksymalnego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy - zgodnie z własnością 10 -

$$\rho(\mathcal{X}) = \min(m,n) \tag{76}$$

czyli gdy

$$\rho(\mathcal{X}) = m \quad \text{albo} \quad \rho(\mathcal{X}) = n \tag{77}$$

Twierdzenie 29

Każda macierz $A_{[m,n]}$ ma g-odwrotność maksymalnego rzędu.

Dowód

Na mocy własności 4 g-odwrotnością maksymalnego rzędu macierzy A jest macierz $\mathcal{X} = CYB$, gdzie na mocy lematu 2

$$Y = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_{[m]} \\ \hline 0_{[n-m,m]} \end{bmatrix} & \text{gdy } m < n \\ \begin{bmatrix} I_{[n]} & \vdots & 0_{[n,m-n]} \end{bmatrix} & \text{gdy } m > n \\ I_{[m]} & \text{gdy } m = n \end{cases} \tag{78}$$

a macierze B i C są określone wzorem (2). ■

Zauważmy, że aby otrzymać g-odwrotność $\mathcal{X}$ maksymalnego rzędu dla macierzy A, potrzeba i wystarcza, aby we wzorze (36) użyć jakiejkolwiek macierzy $Y_{[n,m]}$ postaci (43) i rzędu $\rho(Y) = \min(m,n)$. Wtedy macierz $\mathcal{X} = CYB$ jest g-odwrotnością maksymalnego rzędu.

11. ALGORYTM OBLICZANIA g-ODWROTNOŚCI

Ze względu na wzory (36) i (44) algorytm obliczania g-odwrotności $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ sprowadza się do obliczenia macierzy B i