Dowód.

Mamy

$$A = A_1A_2 = A_1\mathcal{X}_1A_1A_2\mathcal{X}_2A_2 = A_1H_1L_2A_2$$

$$A\mathcal{X}A = A_1A_2\mathcal{X}_2\mathcal{X}_1A_1A_2 = A_1L_2H_1A_2$$

Zatem

$$A\mathcal{X}A = A \iff A_1L_2H_1A_2 = A_1H_1L_2A_2$$

Jeśli macierz H_1L_2 jest idempotentna, tzn.

$$H_1L_2H_1L_2 = H_1L_2$$

to mnożąc tę równość stronami lewostronnie przez A_1 a prawostronnie przez A_2 otrzymujemy

$$A_1L_2H_1A_2 = A_1H_1L_2A_2$$

a stąd $A\mathcal{X}A = A$, czyli $\mathcal{X}$ jest wtedy g-odwrotnością macierzy A.

Jeśli - odwrotnie - jest $A\mathcal{X}A = A$, czyli

$$A_1L_2H_1A_2 = A_1H_1L_2A_2$$

to mnożąc tę równość stronami lewostronnie przez $\mathcal{X}_1$ a prawostronnie przez $\mathcal{X}_2$ otrzymujemy

$$H_1L_2H_1L_2 = H_1H_1L_2L_2 = H_1L_2$$

Zatem macierz H_1L_2 jest wtedy idempotentna. ■

5. ODWROTNOŚCI LEWO- I PRAWOSTRONNE

Definicja

Odwrotnością lewostronną macierzy $A_{[m,n]}$ nazywamy każdą taką macierz A^L, że

(56) $$A^L A = I_{[n]}.$$

Odwrotnością prawostronną macierzy $A_{[m,n]}$ nazywamy każdą taką macierz A^P, że

(57) $$AA^P = I_{[m]}.$$

Własność 13

Każda odwrotność lewostronna i każda odwrotność prawostronna macierzy A jest g-odwrotnością tej macierzy.

Dowód

Mnożąc lewostronnie obie strony równości (56) przez A otrzymujemy $AA^LA = A$, co oznacza, że A^L jest, istotnie, g-odwrotnością macierzy A. Analogicznie, mnożąc prawostronnie obie strony równości (57) przez A, otrzymujemy $AA^PA = A$, co oznacza, że A^P jest g-odwrotnością macierzy A. ■

Własność 14

Jeśli istnieje odwrotność lewostronna A^L (prawostronna A^P) macierzy A, to wszystkie g-odwrotności macierzy A są jej odwrotnościami lewostronnymi (prawostronnymi).

Dowód

Jeśli istnieje odwrotność lewostronna A^L macierzy A, to jest ona również g-odwrotnością na mocy własności 13. Przyjmując $\mathcal{X} = A^L$ mamy $H = \mathcal{X}A = A^LA = I_{[n]}$ oraz $L = AA^L$. Wobec tego na mocy twierdzenia 6 każdą g-odwrotność $\mathcal{X}_1$ macierzy A można przedstawić w postaci

$$\mathcal{X}_1 = A^L + T - TAA^L$$

gdzie T jest dowolną macierzą o tych samych co $\mathcal{X}_1$ wymiarach i wobec tego

$$\mathcal{X}_1 A = A^L A + TA - TAA^L A = I_{[n]} + TA - TA = I_{[n]},$$

co oznacza, że $\mathcal{X}_1$ jest odwrotnością lewostronną macierzy A.

Dowód dla odwrotności prawostronnych przeprowadzamy analogicznie. ■

Twierdzenie 9

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby macierz $A_{[m,n]}$ miała odwrotność lewostronną, jest $\rho(A) = n$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby macierz $A_{[m,n]}$ miała odwrotność prawostronną, jest $\rho(A) = m$.

Dowód

Jeśli macierz $A_{[m,n]}$ ma odwrotność lewostronną $A^L = \mathcal{X}$, to $H = I_{[n]}$ i na mocy własności 11 $\rho(A) = \rho(H) = n$. Jeśli macierz $A_{[m,n]}$ ma odwrotność prawostronną $A^P = \mathcal{X}$, to $L = I_{[m]}$ i na mocy tejże własności $\rho(A) = \rho(L) = m$.

Jeśli - odwrotnie - $\rho(A) = n$, to na mocy (20) macierze E i Ψ znikają i

(58) $$C = D, \quad C^{-1} = \Phi.$$

Wobec tego na mocy twierdzenia 5 każda g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy A ma postać

$$\mathcal{X} = CF + CVG$$

skąd na mocy (25) i (58)

$$\mathcal{X}A = CFA + CVGA = C\Phi = CC^{-1} = I_{[n]}$$

co dowodzi, że $\mathcal{X}$ jest odwrotnością lewostronną macierzy A. Analogicznie przeprowadzamy dowód w przypadku, gdy $\rho(A) = m$. ■

Twierdzenie 10

Macierz $A_{[m,n]}$ ma odwrotność lewostronną i odwrotność prawostronną wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratowa nieosobliwa. W takim przypadku odwrotność lewostronna i odwrotność prawostronna są określone jednoznacznie i pokrywają się obie ze zwykłą odwrotnością A^{-1}, która jest zarazem jedyną g-odwrotnością macierzy A.

Dowód

Na mocy twierdzenia 9 macierz $A_{[m,n]}$ ma zarówno odwrotność lewostronną, jak i odwrotność prawostronną wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho(A) = m = n$, czyli gdy macierz A jest kwadratowa i nieosobliwa. W tym przypadku macierz A ma odwrotność A^{-1} jednoznacznie określoną i będącą zarazem g-odwrotnością macierzy A, ponieważ $AA^{-1}A = A$. Kładąc $\mathcal{X} = A^{-1}$, mamy $H = A^{-1}A = I_{[n]}$, $L = AA^{-1} = I_{[m]} = I_{[n]}$ i na mocy twierdzenia 6 dla każdej g-odwrotności $\mathcal{X}_1$ jest $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} = A^{-1}$. ■

Twierdzenie 11

Jeśli $\mathcal{X}_1$ jest g-odwrotnością macierzy $A_{1\,[m,n]}$, a $\mathcal{X}_2$ jest g-odwrotnością macierzy $A_{2\,[n,p]}$ i albo $\varrho(A_1) = n$, albo $\varrho(A_2) = n$, czyli macierz A_1 ma odwrotność lewostronną albo macierz A_2 - odwrotność prawostronną, to macierz $\mathcal{X}_2\mathcal{X}_1$ jest g-odwrotnością macierzy $A_{[m,p]} = A_1A_2$.

Dowód

Załóżmy, że $\varrho(A_1) = n$. Na mocy własności 12 jest wtedy $H_1 = \mathcal{X}_1A_1 = I_{[n]}$. Zatem dla $L_2 = A_2\mathcal{X}_2$ jest

$$H_1L_2H_1L_2 = H_1L_2L_2 = H_1L_2$$

i na mocy twierdzenia 8 macierz $\mathcal{X}_2\mathcal{X}_1$ jest g-odwrotnością macierzy A. W przypadku $\varrho(A_2) = n$ mamy $L_2 = A_2\mathcal{X}_2 = I_{[n]}$ i dowód jest analogiczny. ■

6. g-ODWROTNOŚCI WZAJEMNE

g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ będziemy nazywać wzajemną wtedy i tylko wtedy, gdy

(59) $$\mathcal{X}A\mathcal{X} = \mathcal{X}$$

czyli, gdy zarazem macierz A jest g-odwrotnością dla macierzy $\mathcal{X}$.

Twierdzenie 12

Macierz $\mathcal{X}$ jest wzajemną g-odwrotnością macierzy $A_{[m,n]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

(60) $$W = UV$$

gdzie U, V, W są macierzami określonymi wzorem (44). W takim przypadku wzór (44) można napisać w postaci

(61) $$\mathcal{X} = (D + EU)(F + VG)$$

W szczególności, gdy $r = m$ lub $r = n$, każda g-odwrotność macierzy $A_{[m,n]}$ jest wzajemna.

Dowód

Załóżmy najpierw, że $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością wzajemną macierzy A. Na mocy (44), (45) i (50) mamy

$$\mathcal{X}A\mathcal{X} = H\mathcal{X} = (D + EU)\Phi\mathcal{X} = (D + EU)(F + VG) =$$

$$= DF + EUF + DVG + EUVG$$

skąd na mocy (59) i (44)

$$EWG = EUVG$$

a następnie

$$\Psi EWG\Delta = \Psi EUVG\Delta$$

Stąd na mocy (22) i (23) otrzymujemy (60), a następnie (44) w postaci (61).

Załóżmy teraz, że zachodzi równość (60), czyli wzór (44) ma postać (61). Wtedy

$$\mathcal{X}A\mathcal{X} = (D + EU)(F + VG)A(D + EU)(F + VG) =$$

$$= (D + EU)(FA + VGA)(D + EU)(F + VG)$$

i na mocy (25), a następnie (23)

$$\mathcal{X}A\mathcal{X} = (D + EU)\Phi(D + EU)(F + VG) =$$

$$= (D + EU)(\Phi D + \Phi EU)(F + VG) =$$

$$= (D + EU)(F + VG) = \mathcal{X}$$

czyli g-odwrotność $\mathcal{X}$ jest wzajemna.

Gdy $r = m$ lub $r = n$, macierze V i W lub U i W znikają i warunek (60) jest zawsze spełniony. ■

Twierdzenie 13

g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ jest wzajemną wtedy i tylko wtedy, gdy we wzorze (36) macierz Y jest wzajemną g-odwrotnością macierzy J.

Dowód

Jeśli $\mathcal{X}$ jest wzajemną g-odwrotnością macierzy A, to $\mathcal{X}A\mathcal{X} = \mathcal{X}$, czyli na mocy (36)

$$CYBACYB = CYB$$

a następnie na mocy (2)

$$CYJYB = CYB$$

Mnożąc obie strony lewostronnie przez C^{-1} i prawostronnie przez B^{-1} otrzymujemy $YJY = Y$, czyli Y jest wtedy wzajemną g-odwrotnością macierzy J.

Jeśli - odwrotnie - Y jest wzajemną g-odwrotnością macierzy J, to $YJY = Y$ czyli na mocy (38)

$$C^{-1}\mathcal{X}B^{-1}\mathcal{J}C^{-1}\mathcal{X}B^{-1} = C^{-1}\mathcal{X}B^{-1}$$

Mnożąc obie strony lewostronnie przez C i prawostronnie przez B otrzymujemy

$$\mathcal{X}B^{-1}\mathcal{J}C^{-1}\mathcal{X} = \mathcal{X}$$

czyli na mocy (38) $\mathcal{X}A\mathcal{X} = \mathcal{X}$. Zatem $\mathcal{X}$ jest wtedy wzajemną g-odwrotnością macierzy A. ■

Własność 15

Jeśli $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ są dwiema dowolnymi g-odwrotnościami macierzy A, to $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 A \mathcal{X}_2$ jest g-odwrotnością wzajemną macierzy A.

Dowód

Mamy

$$A\mathcal{X}A = A\mathcal{X}_1 A\mathcal{X}_2 A = A\mathcal{X}_2 A = A$$

$$\mathcal{X}A\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 A\mathcal{X}_2 A\mathcal{X}_1 A\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 A\mathcal{X}_1 A\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 A\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}$$

czyli $\mathcal{X}$ jest, istotnie, g-odwrotnością wzajemną macierzy A. ■

Zauważmy, że własność 15 pozostaje prawdziwa również w przypadku, gdy $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$. Pozwala to z dowolnej g-odwrotności $\mathcal{X}_1$ macierzy A otrzymać g-odwrotność wzajemną tej macierzy jako $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 A \mathcal{X}_1$.

Twierdzenie 14

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by macierz $\mathcal{X}_1$ była g-odwrotnością wzajemną macierzy $A_{[m,n]}$ jest możliwość przedstawienia jej w postaci

$$\mathcal{X}_1 = \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right] \tag{62}$$

gdzie P i Q są dowolnymi macierzami o wymiarach $n \times m$, $\mathcal{X}$ jest ustaloną dowolnie g-odwrotnością (niekoniecznie wzajemną) macierzy A, a H i L macierzami określonymi wzorami (47).

Dowód

1) Załóżmy najpierw, że $\mathcal{X}_1$ jest g-odwrotnością wzajemną macierzy A i na mocy twierdzenia 7 istnieją takie macierze $P_{[n,m]}$ i $Q_{[n,m]}$, że zachodzi (55). Wtedy

$$\mathcal{X}_1 A \mathcal{X}_1 =$$

$$= \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P + Q(I_{[m]} - L)\right]\left[A\mathcal{X} + A(I_{[n]} - H)P + AQ(I_{[m]} - L)\right]$$

i na mocy (49)

$$\mathcal{X}_1 A \mathcal{X}_1 = \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P + Q(I_{[m]} - L)\right]\left[A\mathcal{X} + AQ(I_{[m]} - L)\right] =$$

$$= \left[\mathcal{X}A + (I_{[n]} - H)PA + Q(I_{[m]} - L)A\right]\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right] =$$

$$= \left[\mathcal{X}A + (I_{[n]} - H)PA\right]\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right] =$$

$$= \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right]$$

skąd na mocy równości $\mathcal{X}_1 A \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1$ otrzymujemy (62).

2) Załóżmy teraz, że macierz $\mathcal{X}_1$ spełnia warunek (62). Wtedy na mocy (49)

$$A\mathcal{X}_1 A = A\left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right]A =$$

$$= \left[A\mathcal{X} + A(I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X}A + Q(I_{[m]} - L)A\right] = A\mathcal{X}A\mathcal{X}A = A\mathcal{X}A = A$$

$$\mathcal{X}_1 A \mathcal{X}_1 =$$

$$= \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right]\left[A\mathcal{X} + A(I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right] =$$

$$= \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right]A\mathcal{X}A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right] =$$

$$= \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right]A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right] =$$

$$= \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X}A + Q(I_{[m]} - L)A\right]\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right] =$$

$$= \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P\right]A\mathcal{X}A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right] =$$

$$= \left[\mathcal{X} + (I_{[n]} - H)P\right]A\left[\mathcal{X} + Q(I_{[m]} - L)\right] = \mathcal{X}_1$$

czyli $\mathcal{X}_1$ jest wtedy g-odwrotnością wzajemną macierzy A. ■

Twierdzenie 15

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by dla g-odwrotności $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ był spełniony warunek

(63) $$\varrho(\mathcal{X}) = \varrho(A)$$

jest wzajemność g-odwrotności $\mathcal{X}$.

Dowód

Załóżmy najpierw, że $r = \varrho(\mathcal{X}) = \varrho(A)$. Gdy $r = 0$, wtedy $\mathcal{X} = 0_{[n,m]}$ i równość (59) jest spełniona, czyli $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością wzajemną macierzy $A = 0_{[m,n]}$. Gdy $r = m$ lub $r = n$, wtedy na mocy twierdzenia 12 każda g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy A jest wzajemna. Gdy wreszcie $r \neq 0$, $r \neq m$, $r \neq n$, wtedy równość (63) pociąga za sobą na mocy (38)

(64) $$\varrho(Y) = r$$

gdzie na mocy lematu 2 macierz Y ma postać

$$Y = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & v_{11} & \dots & v_{1,m-r} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & v_{r1} & \dots & v_{r,m-r} \\ \hline u_{11} & \dots & u_{1r} & w_{11} & \dots & w_{1,m-r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-r,1} & \dots & u_{n-r,r} & w_{n-r,1} & \dots & w_{n-r,m-r} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_{[r]} & V \\ \hline U & W \end{array}\right]$$

Niech R_1 $(i = 1, \dots, n)$ oznacza i-ty wiersz tej macierzy. Ponieważ wiersze $R_1, \dots, R_r$ są liniowo niezależne, więc na mocy (64) dla każdego wiersza R_{k+r} $(k = 1, \dots, n - r)$ istnieją takie liczby $\alpha_{k+r,1}, \dots, \alpha_{k+r,r}$, że

$$R_{k+r} = \alpha_{k+r,1} R_1 + \dots + \alpha_{k+r,r} R_r$$

Analizując pierwsze r wyrazów wiersza R_{k+r} dochodzimy do wniosku, że

$$\alpha_{k+r,j} = u_{kj} \quad \text{dla} \quad j = 1, \dots, r$$

skąd $$R_{k+r} = u_{k1}R_1 + \dots + u_{kr}R_r$$

Wobec tego dla każdego $s = 1, \dots, m-r$ jest

$$w_{ks} = u_{k1}v_{1s} + \dots + u_{kr}v_{rs}$$

co oznacza, że $W = UV$. Na mocy twierdzenia 12 macierz $\mathcal{X}$ jest wtedy g-odwrotnością wzajemną.

Załóżmy teraz, że - odwrotnie - g-odwrotność $\mathcal{X}$ jest wzajemna, czyli macierz $A_{[m,n]}$ jest g-odwrotnością macierzy $\mathcal{X}_{[n,m]}$. Wobec tego na mocy własności 9 oprócz nierówności

$$\rho(A) \leqslant \rho(\mathcal{X}) \leqslant \min(m,n)$$

mamy również

$$\rho(\mathcal{X}) \leqslant \rho(A) \leqslant \min(m,n)$$

skąd wynika równość (63). ■

7. g-ODWROTNOŚCI H-SYMETRYCZNE

g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ będziemy nazywać H-symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy

(65) $$H^* = H$$

gdzie $H = \mathcal{X}A$.

Twierdzenie 16

Macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością H-symetryczną macierzy $A_{[m,n]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek

(66) $$A = AA^*\mathcal{X}^*$$

Dowód

1) Jeśli macierz $\mathcal{X}$ jest g-odwrotnością H-symetryczną macierzy A, to spełnia warunek