10. g-ODWROTNOŚCI MAKSYMALNEGO RZĘDU

g-odwrotność $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ będziemy nazywać <u>g-odwrotnością maksymalnego rzędu</u> wtedy i tylko wtedy, gdy - zgodnie z własnością 10 -

(76) $$\varrho(\mathcal{X}) = \min(m,n)$$

czyli gdy

(77) $$\varrho(\mathcal{X}) = m \quad \text{albo} \quad \varrho(\mathcal{X}) = n$$

Twierdzenie 29

Każda macierz $A_{[m,n]}$ ma g-odwrotność maksymalnego rzędu.

Dowód

Na mocy własności 4 g-odwrotnością maksymalnego rzędu macierzy A jest macierz $\mathcal{X} = CYB$, gdzie na mocy lematu 2

(78) $$Y = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} I_{[m]} \\ \hline 0_{[n-m,m]} \end{array}\right] & \text{gdy } m < n \\ \left[\begin{array}{c|c} I_{[n]} & 0_{[n,m-n]} \end{array}\right] & \text{gdy } m > n \\ I_{[m]} & \text{gdy } m = n \end{cases}$$

a macierze B i C są określone wzorem (2). ■

Zauważmy, że aby otrzymać g-odwrotność $\mathcal{X}$ maksymalnego rzędu dla macierzy A, potrzeba i wystarcza, aby we wzorze (36) użyć jakiejkolwiek macierzy $Y_{[n,m]}$ postaci (43) i rzędu $\varrho(Y) = \min(m,n)$. Wtedy macierz $\mathcal{X} = CYB$ jest g-odwrotnością maksymalnego rzędu.

11. ALGORYTM OBLICZANIA g-ODWROTNOŚCI

Ze względu na wzory (36) i (44) algorytm obliczania g-odwrotności $\mathcal{X}$ macierzy $A_{[m,n]}$ sprowadza się do obliczenia macierzy B i

C, nałożenia na macierz Y odpowiednich warunków i wykonania mnożeń według wzoru (36) lub (44).

Niezależnie od algorytmu ogólnego wyprowadzimy algorytm liczenia MP-odwrotności bezpośrednio ze wzoru (75), do czego jest potrzebna jedynie znajomość macierzy Γ^* i Φ^*, a więc wystarczy znajomość macierzy $(B^*)^{-1}$ i $(C^*)^{-1}$.

Ideą przewodnią algorytmu są działania przeprowadzone w trakcie dowodu twierdzenia 1. Zauważmy mianowicie, że na mocy (18) i (19)

$$B = B_2^{(r-1)} B_1^{(r-1)} \dots B_2^{(0)} B_1^{(0)} I_{[m]} \tag{79}$$

oraz

$$C = I_{[n]} C_1^{(0)} C_2^{(0)} \dots C_1^{(r-1)} C_2^{(r-1)} \tag{80}$$

co oznacza, że macierz B można otrzymać z macierzy $I_{[m]}$, przeprowadzając na niej kolejno wszystkie te same operacje wierszowe co na macierzy A w trakcie sprowadzania jej do postaci J, a macierz C można otrzymać z macierzy $I_{[n]}$, przeprowadzając na niej kolejno wszystkie te same operacje kolumnowe co na macierzy A.

A oto algorytm ogólny obliczania g-odwrotności X danej macierzy $A_{[m,n]}$, obejmujący również przypadek, gdy $r = 0$:

1) Rozpoczynamy obliczenia wychodząc z danych trzech macierzy: $A_{[m,n]}$, $I_{[m]}$, $I_{[n]}$. W kolejnych cyklach będziemy nazywać macierzą pierwszą macierz A lub macierz z niej powstałą na skutek dokonanych przekształceń. Podobnie, macierzą drugą będziemy nazywać macierz $I_{[m]}$ lub macierz z niej powstałą, a macierzą trzecią macierz $I_{[n]}$ lub macierz z niej powstałą.

2) Otwieramy cykl kładąc $k = 0$ i $A^{(0)} = A$.

3) Jeśli w macierzy

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} I_{[k]} & 0_{[k,n-k]} \\ \hline 0_{[m-k,k]} & A_{0[m-k,n-k]}^{(k)} \end{array}\right] \tag{81}$$

gdzie

$$A_0^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,k+1}^{(k)} & \dots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

macierz $A_0^{(k)}$ znika (tzn. $k = m$ albo $k = n$) albo nie zawiera wyrazu niezerowego, to $r = \varrho(A) = k$, $A^{(k)} = J$, macierz B jest równa macierzy drugiej, a macierz C jest równa macierzy trzeciej. Przechodzimy do punktu 11.

4) W macierzy $A_0^{(k)}$ wybieramy wyraz pilotujący $a_{uv}^{(k)} \neq 0$ ($k<u\leq m$, $k<v\leq n$). Ze względów numerycznych jest wskazane wybierać tu wyraz o największym module (wartości bezwzględnej).

5) Jeśli $u \neq k+1$, to w macierzach pierwszej i drugiej zamieniamy wiersze u-ty i $(k+1)$-szy.

6) Jeśli $v \neq k+1$, to w macierzach pierwszej i trzeciej zamieniamy ze sobą kolumny v-tą i $(k+1)$-szą.

7) Dzielimy w macierzach pierwszej i trzeciej kolumnę $(k+1)$-szą przez wyraz pilotujący, który obecnie znajduje się w wierszu $(k+1)$-ym i kolumnie $(k+1)$-ej. W ten sposób macierz pierwsza ma postać (10).

8) Jeśli $m \neq k+1$, to dla $i = k+2, \ldots, m$ odejmujemy od i-go wiersza macierzy pierwszej i drugiej wiersz $(k+1)$-szy pomnożony przez $\beta_{i,k+1}^{(k)}$.

9) Jeśli $n \neq k+1$, to dla $j = k+2, \ldots, n$ odejmujemy od j-ej kolumny macierzy pierwszej i trzeciej kolumnę $(k+1)$-szą pomnożoną przez $\beta_{k+1,j}^{(k)}$. (Zauważmy, że przez działania wykonane w punkcie 8 wyrazy w $(k+1)$-ym wierszu nie uległy zmianie).

10) Kończymy cykl powiększając wartość k o 1 i wracając do punktu 3 z macierzą pierwszą jako $A^{(k)}$.

11) Wybieramy odpowiednią macierz Y zgodnie ze wzorem (43) i obliczamy g-odwrotność X ze wzoru $X = CYB$.

Przechodzimy teraz do skonstruowania algorytmu specjalnego dla obliczania MP-odwrotności. Mamy na mocy (20)

$$(B^*)^{-1} = \left[\begin{array}{c} \Gamma^*_{[r,m]} \\ \hline \Delta^*_{[m-r,m]} \end{array}\right], \qquad (C^*)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \Phi^*_{[n,r]} & \Psi^*_{[n-r,n]} \end{array}\right].$$

Zatem znajomość macierzy $(B^*)^{-1}$ i $(C^*)^{-1}$ pozwala łatwo znaleźć macierze Γ^* i Φ^*. Na mocy (79) i (80) mamy

$$(82) \quad (B^*)^{-1} = (B_2^{(r-1)*})^{-1}(B_1^{(r-1)*})^{-1} \ldots (B_2^{(0)*})^{-1}(B_1^{(0)*})^{-1} I_{[m]}$$

oraz

$$(83)\quad (C^{*})^{-1} = I_{[n]}\,(C_1^{(0)}{}_*)^{-1}(C_2^{(0)}{}_*)^{-1}\ \dots\ (C_1^{(r-1)}{}_*)^{-1}(C_2^{(r-1)}{}_*)^{-1}$$

gdzie na mocy (8)

$$(84)\qquad (B_1^{(k)}{}_*)^{-1} = B_1^{(k)} \quad \text{dla} \quad k = 0, \dots, r-1$$

na mocy (11)

$$(85)\qquad (B_2^{(k)}{}_*)^{-1} = I_{[m]} \quad \text{gdy } m = k+1$$

$$(B_2^{(k)}{}_*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \bar{\beta}^{(k)}_{k+2,k+1} & \dots & \bar{\beta}^{(k)}_{m,k+1} \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{gdy } m \neq k+1$$

na mocy (9)

$$(C_1^{(k)}{}_*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \bar{a}^{(k)}_{uv} & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{gdy } v = k+1$$

$$(86)\qquad (C_1^{(k)}{}_*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & \bar{a}^{(k)}_{uv} & & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{gdy } v \neq k+1$$

oraz na mocy (12)

$$(C_2^{(k)*})^{-1} = I_{[n]}, \qquad \text{gdy } n = k+1$$

(87)
$$(C_2^{(k)*})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \bar{\beta}^{(k)}_{k+1,k+2} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \bar{\beta}^{(k)}_{k+1,n} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{gdy } n \neq k+1$$

Powyższe wzory mają prostą interpretację.

Jeśli w macierzy pierwszej zamieniamy ze sobą dwa wiersze, to w macierzy drugiej należy zrobić to samo (wzór (84)).

Jeśli w macierzy pierwszej odejmujemy od i-go wiersza ($i = k+2, \ldots, m$) wiersz $(k+1)$-szy pomnożony przez $\beta^{(k)}_{i,k+1}$, to w macierzy drugiej do $(k+1)$-go wiersza należy dodać wiersz i-ty pomnożony przez liczbę sprzężoną $\bar{\beta}^{(k)}_{i,k+1}$. (Wzór (85)).

Jeśli w macierzy pierwszej zamieniamy ze sobą dwie kolumny, to w macierzy trzeciej należy zrobić to samo (wzór (86)).

Jeśli w macierzy pierwszej dzielimy j-tą kolumnę przez $a^{(k)}_{uv}$, to w macierzy trzeciej należy j-tą kolumnę pomnożyć przez liczbę sprzężoną $\bar{a}^{(k)}_{uv}$ (wzór (86)).

Jeśli w macierzy pierwszej od j-ej kolumny odejmujemy kolumnę $(k+1)$-szą pomnożoną przez $\beta^{(k)}_{k+1,j}$ ($j = k+2, \ldots, n$), to w macierzy trzeciej należy do $(k+1)$-ej kolumny dodać kolumnę j-tą pomnożoną przez liczbę sprzężoną $\bar{\beta}^{(k)}_{k+1,j}$ (wzór (87)).

Powyższe reguły wykorzystuje się przy układaniu algorytmu dla obliczania macierzy $(B^*)^{-1}$ i $(C^*)^{-1}$ według wzorów (82) i (83).

A oto algorytm specjalny dla obliczania MP-odwrotności $\mathcal{X}$ danej macierzy $A_{[m,n]}$:

1) Rozpoczynamy obliczenia wychodząc z trzech danych macierzy: $A_{[m,n]}$, $I_{[m]}$, $I_{[n]}$.

2) Otwieramy cykl kładąc $k = 0$ i $A^{(0)} = A$.

3) Jeśli w macierzy (84) macierz $A_0^{(k)}$ znika (tzn. $k = m$ albo $k = n$) albo nie zawiera wyrazu niezerowego, to $r = \varrho(A) = k$, $A^{(k)} = J$, macierz $(B^*)^{-1}$ jest równa macierzy drugiej, a macierz $(C^*)^{-1}$ macierzy trzeciej. Przechodzimy do punktu 11.

4) W macierzy $A_0^{(k)}$ wybieramy wyraz pilotujący $a_{uv}^{(k)} \neq 0$ $(k<u\leqslant m, k<v\leqslant n)$. Ze względów numerycznych jest wskazane wybierać tu wyraz o największym module (wartości bezwzględnej).

5) Jeśli $u \neq k+1$, to w macierzach pierwszej i drugiej zamieniamy ze sobą wiersze u-ty i $(k+1)$-szy.

6) Jeśli $v \neq k+1$, to w macierzach pierwszej i trzeciej zamieniamy ze sobą kolumny v-tą i $(k+1)$-szą.

7) W macierzy pierwszej dzielimy kolumnę $(k+1)$-szą przez wyraz pilotujący, który obecnie znajduje się w wierszu $(k+1)$-ym i kolumnie $(k+1)$-ej. W macierzy trzeciej mnożymy kolumnę $(k+1)$-szą przez liczbę sprzężoną z wyrazem pilotującym. W ten sposób macierz pierwsza ma postać (10).

8) Jeśli $m \neq k+1$, to w macierzy pierwszej odejmujemy od i-go wiersza wiersz $(k+1)$-szy pomnożony przez $\beta_{i,k+1}^{(k)}$, a w macierzy drugiej dodajemy do $(k+1)$-go wiersza wiersz i-ty pomnożony przez liczbę sprzężoną $\bar{\beta}_{i,k+1}^{(k)}$ $(i = k+2, \ldots, m)$.

9) Jeśli $n \neq k+1$, to w macierzy pierwszej odejmujemy od j-ej kolumny $(j \neq k+2, \ldots, n)$ kolumnę $(k+1)$-szą pomnożoną przez $\beta_{k+1,j}^{(k)}$, a macierzy trzeciej dodajemy do kolumny $(k+1)$-ej kolumnę j-tą pomnożoną przez liczbę sprzężoną $\bar{\beta}_{k+1,j}^{(k)}$.

10) Kończymy cykl powiększając k o 1 i wracając do punktu 3 z macierzą pierwszą jako $A^{(k)}$.

11) Z macierzy $(B^*)^{-1}$ wyłączamy pierwszych r wierszy, które tworzą macierz Γ^*. Z macierzy $(C^*)^{-1}$ wyłączamy pierwszych r kolumn, które tworzą macierz Φ^*.

12) Obliczamy MP-odwrotność macierzy A ze wzoru

$$\mathcal{X} = \Phi^*(\Gamma^* A \Phi^*)^{-1}\Gamma^*$$

gdzie do obliczenia odwrotności macierzy $\Gamma^* A \Phi^*$ można ewentualnie użyć algorytm ogólny.

Zauważmy, że w rachunkach odręcznych można odstępować od powyższych sztywnych schematów, wykonując działania elementarne na macierzach w innym porządku czy inną drogą. Należy jednak przestrzegać odpowiednich reguł dla macierzy drugiej i trzeciej. Między innymi można przy obliczaniu MP-odwrotności oprócz podanych wyżej reguł korzystać jeszcze z następującej:

Jeśli w macierzy pierwszej dzielimy i-ty wiersz przez liczbę $a \neq 0$, to w macierzy drugiej należy i-ty wiersz pomnożyć przez liczbę sprzężoną $\bar{a}$.

Przykład 1

Obliczymy dowolną g-odwrotność macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozpoczynamy obliczenia od trzech macierzy

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do pierwszego wiersza macierzy pierwszej i drugiej dodajemy wiersz drugi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Od drugiego wiersza macierzy pierwszej i drugiej odejmujemy potrojony wiersz pierwszy

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & -23 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Od drugiej kolumny macierzy pierwszej i trzeciej odejmujemy potrojoną kolumnę pierwszą, a od trzeciej kolumny tychże macierzy - dziewięciokrotną kolumnę pierwszą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -23 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Od kolumny trzeciej macierzy pierwszej i trzeciej odejmujemy potrojoną kolumnę drugą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Od kolumny drugiej macierzy pierwszej i trzeciej odejmujemy poczwórną kolumnę trzecią

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 13 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Do kolumny trzeciej macierzy pierwszej i trzeciej dodajemy podwojoną kolumnę drugą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 13 & 23 \\ 0 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

Wynika stąd, że

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r = \varrho(A) = 2 \quad (\text{jest zatem } r = m)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 13 & 23 \\ 0 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

a następnie na mocy (20)

$$F = B, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 13 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} -6 \\ 23 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Na mocy twierdzenia 5 ogólny wzór na g-odwrotność $\mathcal{X}$ danej macierzy A ma postać

$$\mathcal{X} = (D + EU)B$$

gdzie U jest dowolną macierzą o wymiarach 1×2, tzn.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \end{bmatrix}$$

Przyjmujemy $U = [0 \quad 0]$. Wtedy $\mathcal{X} = DB$, czyli

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 13 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -39 & -26 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Przykład 2

Obliczmy *MP*-odwrotność dla macierzy podanej w przykładzie 1.

Rozpoczynamy obliczenia od trzech macierzy:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do pierwszego wiersza macierzy pierwszej dodajemy wiersz drugi, a od drugiego wiersza macierzy drugiej odejmujemy wiersz pierwszy

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Od drugiego wiersza macierzy pierwszej odejmujemy potrojony wiersz pierwszy, a do pierwszego wiersza macierzy drugiej dodajemy potrojony wiersz drugi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & -23 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Od drugiej kolumny macierzy pierwszej odejmujemy potrojoną kolumnę pierwszą, a od trzeciej kolumny tej macierzy odejmujemy dziewięciokrotną kolumnę pierwszą. Odpowiednio do kolumny pierwszej macierzy trzeciej dodajemy potrojoną kolumnę drugą i dziewięciokrotną trzecią

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -23 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Od kolumny trzeciej macierzy pierwszej odejmujemy potrojoną kolumnę drugą, a do kolumny drugiej macierzy trzeciej dodajemy potrojoną kolumnę trzecią

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Od kolumny drugiej macierzy pierwszej odejmujemy poczwórną kolumnę trzecią, a do kolumny trzeciej macierzy trzeciej dodajemy poczwórną kolumnę drugą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

Do kolumny trzeciej macierzy pierwszej dodajemy podwojoną kolumnę drugą, a od kolumny drugiej macierzy trzeciej odejmujemy podwojoną kolumnę trzecią

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 4 \\ 9 & -23 & 13 \end{bmatrix}$$

Wynika stąd, że

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad r = \varrho(A) = 2$$

$$(B^*)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (C^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 4 \\ 9 & -23 & 13 \end{bmatrix}$$

i następnie

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Phi^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -7 \\ 9 & -23 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\Gamma^* A \Phi^* = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -7 \\ 9 & -23 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 43 & -74 \\ -1 & 16 \end{bmatrix}$$

Obliczamy teraz, że

$$(\Gamma^{*}A\Phi^{*})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{16}{614} & \frac{74}{614} \\ \frac{1}{614} & \frac{43}{614} \end{bmatrix}$$

Wobec tego otrzymujemy ostatecznie

$$\mathcal{X} = \Phi^{*}(\Gamma^{*}A\Phi^{*})^{-1}\Gamma^{*} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -7 \\ 9 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{16}{614} & \frac{74}{614} \\ \frac{1}{614} & \frac{43}{614} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{106}{614} & \frac{122}{614} \\ -\frac{3}{614} & \frac{44}{614} \\ \frac{81}{614} & \frac{40}{614} \end{bmatrix}$$

<u>Przykład 3</u>

Obliczymy MP-odwrotność macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \qquad a_1 \neq 0.$$

Obliczenia rozpoczynamy od trzech macierzy

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ kolumn}} \; n \text{ wierszy}$$

Dzielimy pierwszą kolumnę macierzy pierwszej przez a_1, a mnożymy pierwszą kolumnę macierzy trzeciej przez $\bar{a}_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

W macierzy pierwszej odejmujemy od j-ej kolumny pierwszą pomnożoną przez a_j kolejno dla $j = 2, \dots, n$. W macierzy trzeciej do pierwszej kolumny dodajemy j-tą pomnożoną przez $\bar{a}_j$ kolejno dla $j = 2, \dots, n$. Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & & & \\ \bar{a}_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{a}_n & & & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix}, \qquad r = \varrho(A) = 1$$

$$(B^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad (C^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & & & \\ \bar{a}_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{a}_n & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad \Phi^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix}$$

a stąd

$$\Gamma^* A \Phi^* = \left[|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 \right]$$

$$(\Gamma^* A \Phi^*)^{-1} = \left[\frac{1}{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2} \right]$$

i ostatecznie

$$\mathcal{X} = \Phi^* (\Gamma^* A \Phi^*)^{-1} \Gamma^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{a}_1}{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\bar{a}_n}{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2} \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że w przypadku gdy wektor wierszowy A ma długość 1, tzn. w przypadku gdy

$$|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 = 1$$

mamy

$$\mathcal{X} = A^*.$$