

2.10. Wyrażenia boolowskie

Podobnie jak wyrażenia arytmetyczne były tworzone z elementów podstawowych przez łączenie ich operatorami arytmetycznymi i ujmowanie w nawiasy okrągłe, tak analogicznie buduje się wyrażenia boolowskie z boolowskich elementów podstawowych, łącząc je operatorami logicznymi i ujmując w nawiasy okrągłe. Podobnie jak dla wyrażeń arytmetycznych, zajmamy się opisem budowy jedynie prostego wyrażenia boolowskiego, ponieważ budowa wyrażeń alternatywnych została już opisana w paragrafie 2.4.

Podstawowymi elementami boolowskimi są:
wartości logiczne true i false,
zmiennie boolowskie (mogą być z indeksami),
funkcje o wartościach boolowskich,
relacje,

dowolne wyrażenia boolowskie ujęte w nawiasy okrągłe,
zaprzeczenia podstawowych elementów boolowskich.

Z powyższych elementów nie znamy jeszcze relacji i zaprzeczeń. Otóż przez relację (relation; czytaj: relajzjn) rozumiemy dwa proste wyrażenia arytmetyczne połączone jednym z następujących tzw. operatorów relacji:

$$< \leq = \geq > \neq$$

Operatory te czytamy: mniejsze, nie większe, równe, nie mniejsze, większe, nierówne.

Oto przykłady relacji:

$$a \wedge 3 \geq c - d$$

$$xxx - x \wedge a[2] / (x + 3xy)$$

$$u = -3.1$$

$$w < 0$$

Należy pamiętać, że wyrażenia arytmetyczne po obu stronach operatora relacji muszą być proste. Zakładamy, że czytelnik zna znaczenie operatorów relacji ze szkoły średniej.

W zależności od wartości zmiennych i funkcji występujących w relacji, relacja może być prawdziwa lub nie. Mówimy wtedy, że ma ona wartość true albo false. Widzimy zatem, że relacje przyjmują wartości logiczne na równi ze zmiennymi boolowskimi czy funkcjami boolowskimi.

Należy zapamiętać, że - podobnie jak w języku tradycyjnym - ustalenie wartości logicznej relacji wymaga przede wszystkim obliczenia wartości liczbowych obu wyrażeń arytmetycznych leżących po obu stronach operatora relacji.

Z aprzeczenie wyrażenia boolowskiego uzyskuje się przez poprzedzenie go operatorem -. Jeżeli np. a jest zmienną boolowską, a więc tym samym podstawowym elementem boolowskim, to -a w myśl podanego wyżej określenia - podstawowym elementem boolowskim jest również -a (czytamy: nie a). Jeżeli a ma wartość true, to -a ma wartość false i na odwrót.

Analogicznie, zaprzeczenie np. relacji

$$a \wedge 3 \geq c - d$$

znaczy to samo, co

$a \wedge c = d$

a

$-, u = -3.1$

znaczy to samo, co

$u \neq -3.1$

Obowiązuje tu zasada, że najpierw obliczamy wartość logiczną relacji, a potem dopiero zaprzeczamy ją przez uwzględnienie operatora \neg .

Na podstawowych elementach booleowskich mogą być wykonywane cztery działania logiczne: koniunkcja czyli iloczyn logiczny, alternatywa czyli suma logiczna, implikacja i równoważność. W wyniku tych działań otrzymujemy nowe wartości logiczne wg tabeli 1, w której podano również odpowiednie operatory logiczne:

T a b e l a 1

	a	b	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>false</u>
			<u>true</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>
Koniunkcja	$a \wedge b$		<u>true</u>	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>false</u>
Alternatywa	$a \vee b$		<u>true</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>false</u>
Implikacja	$a \Rightarrow b$		<u>true</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>true</u>
Równoważność	$a \equiv b$		<u>true</u>	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>true</u>

Na przykład:

true \wedge false ma wartość false, true \vee false ma wartość true, false \equiv false ma wartość true itp.

Jak widać z tabeli 1, koniunkcja jest po prostu warunkiem, aby równocześnie i a i b były prawdziwe, natomiast alternatywa jest warunkiem, aby co najmniej jeden z elementów a i b był prawdziwy.

Na przykład zapis tradycyjny $2 \leq x < 5$ oznacza, że muszą być równocześnie spełnione dwie relacje

$$x \geq 2 \quad \text{ i } \quad x < 5$$

Oznacza on zatem koniunkcję tych dwu relacji, co w ALGOLu zapisujemy następująco

$$x \geq 2 \wedge x < 5$$

Natomiast w przypadku, gdy jest $x < 4$ albo $x > 6$, mamy do czynienia z alternatywą tych relacji, co w ALGOLu zapisujemy następująco:

$$x < 4 \vee x > 6$$

Korzystając z podanej tabeli sprawdzamy, że dla $x = 3$ zarówno wyrażenie booleowskie

$$x \geq 2 \wedge x < 5$$

jak i

$$x < 4 \vee x > 6$$

mają wartość true, natomiast dla $x = 4,5$ pierwsze z nich ma wartość true, a drugie false.

Implikacja $a \Rightarrow b$ oznacza, że z a wynika b .

Na przykład z relacji $x < 2$ wynika $x < 4$ i możemy napisać, że implikacja

$$x < 2 \Rightarrow x < 4$$

ma wartość true (niezależnie od tego, czy sama relacja $x < 2$ ma wartość true czy false, bo ważne jest tylko, aby z prawdziwości relacji $x < 2$ wynikała prawdziwość $x < 4$, a to jest zapewnione). Natomiast implikacja

$$x < y \Rightarrow x < z$$

ma dla $y \leq z$ wartość true, a dla $y > z$ może mieć wartość false, mianowicie w przypadku, gdy prawdziwe będzie wyrażenie

$$x < y \wedge x \geq z$$

tzn. gdy równocześnie będzie $x < y$ i $x \geq z$.

Łatwo zauważyć, że implikacja $a \Rightarrow b$ jest równoznaczną z wyrażeniem boolowskim

$$\text{if } a \text{ then } b \text{ else true}$$

co wynika z tabeli 1.

Równoważność $a \equiv b$ oznacza pełną wymiennność a na b lub odwrotnie. Sprawdzamy, że równoważność $a \equiv b$ znaczy to samo, co wyrażenie

$$a \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow a$$

(posługujemy się podaną wyżej tabelą).

Podobnie jak w wyrażeniach arytmetycznych, mamy również w wyrażeniach boolowskich ustaloną kolejność działań. O ile w wyrażeniach arytmetycznych rozróżniliśmy trzy stopnie w kolejności działań, a mianowicie:

- I potęgowanie
- II mnożenie, dzielenie, dzielenie algolowskie
- III dodawanie, odejmowanie

to w wyrażeniach boolowskich stopni tych jest aż sześć:

- I relacja
- II zaprzeczenie
- III koniunkcja
- IV alternatywa
- V implikacja
- VI równoważność

Działania tego samego stopnia wykonujemy kolejno od lewej strony do prawej.

W razie konieczności zmiany kolejności działań, stosujemy nawiasy okrągłe, analogicznie jak w wyrażeniach arytmetycznych.

Proste wyrażenia boolowskie powstają z podstawowych elementów boolowskich przez wykonywanie czterech działań logicznych: najpierw na podstawowych elementach boolowskich, a następnie na powstających na skutek tych działań prostych wyra-

żeniach booleowskich. Należy zapamiętać, że operatory logiczne łączą tylko proste wyrażenia booleowskie.

A oto przykłady wyrażeń booleowskich:

- 1) $\alpha = 3$
- 2) $X1 < X2 \vee a > W1W$
- 3) $x \geq 0 \wedge x \leq 1 \vee x \geq 3 \wedge x \leq 5$
- 4) $\neg, F1 = Ps1 \wedge 2 \vee Ps1 = -3$
- 5) $\neg, (A < B \wedge B < C) \vee \neg, B < 0$
- 6) $A \wedge B \vee \neg, C \wedge D \wedge \neg, E \Rightarrow F \vee \neg, G = a < b \vee a < 0$
- 7) if $X < -2$ then $Y > 0$ else $Y > 5$
- 8) if $z < -1 \vee z > 3$ then $A \wedge B$ else $A \Rightarrow B$
- 9) if $c < 0$ then $U > W + 1$ else if $c > 2$ then $U < W \wedge 2$ else true
- 10) if if if A then B else C then D else E then F else $G \wedge x > y$
- 11) (if if A then B else C then D else $E)$ vee (if if E then D else C then B else $A)$
- 12) if if $x > 0$ then $A = B$ else $B = C$ then $A \wedge B \vee C$ else $\neg, A \wedge x < 5$

W przykładzie 1 mamy do czynienia z relacją, a więc z podstawowym elementem booleowskim, który jest najprostszym przypadkiem wyrażenia booleowskiego.

W przykładzie 2 mamy alternatywę dwu relacji. Dla obliczenia wartości takiego wyrażenia należy - zgodnie z ustaloną kolejnością działań - najpierw ustalić wartość logiczną obu relacji, a następnie dopiero rozpatrzyć prawdziwość alternatywy. Używając nawiasów okrągłych można by - dla uwypuklenia kolejności działań - napisać to samo wyrażenie w postaci

$$(X1 < X2) \vee (a > W1W)$$

Wyrażenie to na przykład dla $X1 = 5$, $X2 = -7$, $a = 0$, $W1W = -1$ ma wartość true, ponieważ relacja $X1 < X2$ ma wtedy co prawda wartość false, ale relacja $a > W1W$ ma wartość true i alternatywa false vee true daje ostatecznie wartość true.

W przykładzie 3 - zgodnie z przyjętą kolejnością działań - mamy do czynienia z alternatywą dwu koniunkcji dwu par relacji, co można by wyraźniej napisać w postaci

$$((x \geq 0) \wedge (x \leq 1)) \vee ((x \geq 3) \wedge (x \leq 5))$$

W tradycyjnym języku matematycznym można by to samo wyrażenie napisać w postaci

$$0 \leq x \leq 1 \text{ albo } 3 \leq x \leq 5.$$

Wyrażenie to ma na przykład dla $x = 1$ wartość true a dla $x = 2$ wartość false.

W p r z y k ł a d z i e 4 mamy alternatywę zaprzeczenia relacji $F_1 = \Psi_1 \wedge 2$ i relacji $\Psi_1 = -3$, co można by uwypuklić następująco:

$$(\neg, (F_1 = \Psi_1 \wedge 2)) \vee (\Psi_1 = -3)$$

Wyrażenie to jest oczywiście równoznaczne z wyrażeniem

$$(F_1 \neq \Psi_1 \wedge 2) \vee (\Psi_1 = -3)$$

W języku tradycyjnym zapisalibyśmy to następująco:

$$\varphi \neq \psi^2 \text{ albo } \psi = -3.$$

Wyrażenie z przykładu 4 ma na przykład dla $F_1 = 4$ i $\Psi_1 = 2$ wartość false, a dla $F_1 = 0$ i $\Psi_1 = 1$ wartość true.

W p r z y k ł a d z i e 5 - zgodnie z przyjętą kolejnością działań - mamy do czynienia z alternatywą dwu zaprzeczeń: zaprzeczenia koniunkcji

$$(A < B) \wedge (B < C)$$

oraz zaprzeczenia relacji $B < 0$. Zaprzeczenie koniunkcji $(A < B) \wedge (B < C)$ oznacza, że albo jest $B \leq A$ albo $B \geq C$. Zaprzeczenie relacji $B < 0$ oznacza po prostu $B \geq 0$. Wobec tego całe nasze wyrażenie można by równie dobrze napisać w postaci

$$(B \leq A) \vee (B \geq C) \vee (B \geq 0)$$

co w języku tradycyjnym brzmiałoby:

B nie większe od A albo nie mniejsze od C albo nieujemne.

Gdybyśmy na przykład mieli $A = -2$, $B = -1$, $C = -3$, w wyrażeniu wyjściowym relacja $A < B$ miałaby wartość true, relacja $B < C$ wartość false, skąd koniunkcja $(A < B) \wedge (B < C)$ wartość true \wedge false czyli false, a jej zaprzeczenie wartość true. Wobec tego całe wyrażenie miałoby już na pewno wartość true, bez względu na wartość $-$, $B < 0$, ponieważ tworzyłoby ono alternatywę dwu wyrażen, z których jedno ma wartość true. Tę samą wartość można by otrzymać i z zapisu tradycyjnego, ponieważ dla danych wartości A , B i C oczywiście B jest nie mniejsze od C .

W p r z y k ł a d z i e 6 - według przyjętej kolejności działań - podano wyrażenie, będące równoważnością dwu wyrażen, co można by uwypuklić następująco:

$$(A \wedge B \vee \neg, C \wedge D \wedge \neg, E \Rightarrow F \vee \neg, G) \equiv (a \leq b \vee a < 0).$$

Pierwsze z tych wyrażen jest implikacją, którą można by napisać następująco:

$$(A \wedge B \vee \neg, C \wedge D \wedge \neg, E) \Rightarrow (F \vee \neg, G)$$

a drugie alternatywą dwu relacji, którą można by napisać w postaci

$$(a \leq b) \vee (a < 0)$$

Wyrażenie po lewej stronie napisanej wyżej implikacji jest z kolei znowu alternatywą

$$(A \wedge B) \vee (\neg, C \wedge D \wedge \neg, E)$$

w której prawą część można by wyraźniej napisać jako podwójną koniunkcję

$$(-,C) \wedge D \wedge (-,E)$$

Z budowy danego wyrażenia wynika, że A, B, C, D, E, F, G są zmiennymi booleowskimi, a a, b zmiennymi liczbowymi.

Obliczmy na przykład wartość tego wyrażenia, gdy A, C, E, G mają wartość true, B, D, F wartość false, $a = -1$, $b = -3$. Ponieważ D ma wartość false, koniunkcja $(-,C) \wedge D \wedge (-,E)$ ma również wartość false. Ponieważ znowu B ma wartość false, koniunkcja $A \wedge B$ ma też wartość false. Wynika stąd, że także alternatywa

$$(A \wedge B) \vee (-,C \wedge D \wedge -,E)$$

ma wartość false. Ponieważ alternatywa ta tworzy lewą stronę implikacji

$$(A \wedge B \vee -,C \wedge D \wedge -,E) \Rightarrow (F \vee -,G)$$

implikacja ta ma wartość true bez względu na wartość alternatywy $F \vee -,G$ (por. tab. 2). Tym samym lewa strona wyjściowej równoważności ma wartość true. Prawa strona jest alternatywą dwu relacji

$$(a \leq b) \vee (a < 0)$$

z których pierwsza ma wartość false, a druga true. Wobec tego ich alternatywa ma wartość true i całe dane wyrażenie jest równoważnością dwu wyrażeń, z których każde ma wartość true. Wobec tego całe wyrażenie ma również wartość true.

W przykładzie 7 mamy do czynienia z alternatywnym wyrażeniem booleowskim. W przypadku, gdy $X < -2$, jest ono równoznaczne z relacją $Y \geq 0$, a w przypadku, gdy $X \geq -2$, z relacją $Y > 5$.

W przykładzie 8 mamy również alternatywne wyrażenie booleowskie, które w przypadku, gdy alternatywa $z < -1 \vee z > 3$ ma wartość true, jest równoznaczne z wyrażeniem $A \wedge B$, a w przypadku, gdy wspomniana alternatywa ma wartość false, z wyrażeniem $A \Rightarrow B$. Z budowy wyrażenia wynika, że A i B są zmiennymi booleowskimi, a z zmienną liczbową. Obliczmy na przykład wartość danego wyrażenia, gdy A ma wartość true, B wartość false, a $z = 0$.

Ponieważ relacja $z < -1$, jak również relacja $z > 3$ mają w tym przypadku wartość false, również ich alternatywa

$$z < -1 \vee z > 3$$

ma wartość false i całe dane wyrażenie staje się wobec tego równoznaczne z implikacją

$$A \Rightarrow B$$

Jak wynika z tabeli 1, dla A o wartości true i B o wartości false implikacja ta, a z nią i całe wyrażenie, ma wartość false.

Podane w przykładzie 9 alternatywne wyrażenie booleowskie jest dla $c < 0$ równoznaczne z relacją

$$U > W + 1$$

a dla $c \geq 0$ z alternatywnym wyrażeniem boolowskim

if $c > 2$ then $U \leq W \wedge 2$ else true

Wynika stąd, że dla $c < 0$ dane wyrażenie jest równoznaczne z relacją $U > W + 1$, dla $c > 2$ z relacją $U \leq W \wedge 2$, a dla $0 \leq c \leq 2$ ma zawsze wartość true.

Wyrażenie w p r z y k ł a d z i e 10 najłatwiej rozszyfrować poczynając od ostatniego wyrazu if. Rozpoczyna ono bowiem alternatywne wyrażenie boolowskie, które może mieć tylko następującą postać:

if A then B else C

i tworzy warunek "jeśli" dla następnego z kolei alternatywnego wyrażenia boolowskiego, które może mieć tym samym tylko następującą postać:

if (if A then B else C) then D else E

To znowu wyrażenie tworzy warunek "jeśli" dla zewnętrznego alternatywnego wyrażenia boolowskiego, które wobec tego ma postać:

if (if (if A then B else C) then D else E) then F else ($\forall x \exists y$)

Należy tu podkreślić, że interpretacja danego wyrażenia jako

(if if if A then B else C then D else E then F else G) \wedge ($x > y$)

nie jest dozwolona, gdyż - jak to już było powiedziane - operatory logiczne (a więc i operator \wedge) łączą tylko proste wyrażenia boolowskie, a nigdy nie alternatywne.

Obliczmy na przykład wartość danego wyrażenia, gdy A, C, E, G mają wartość true, B, D, F wartość false oraz $x = y = 0$.

Ponieważ A ma wartość true, wyrażenie

if A then B else C

staje się równoznaczne z B i ma tym samym wartość false. Wobec tego wyrażenie

if (if A then B else C) then D else E

staje się równoznaczne z E i ma tym samym wartość true. Wobec tego wyrażenie wyjściowe, które można było napisać w postaci

if (if (if A then B else C) then D else E) then F else ($\forall x \exists y$)

staje się równoznaczne z F i ma wartość false.

Wyrażenie w p r z y k ł a d z i e 11 nie przeczy podanej regule, że operatory logiczne łączą tylko proste wyrażenia boolowskie, ponieważ dwa alternatywne wyrażenia boolowskie po obu stronach operatora \vee przez wzięcie ich w nawiasy okrągłe stały się prostymi. Analogicznie jak w przykładzie poprzednim, możemy dane wyrażenie napisać wyraźniej w postaci

(if (if A then B else C) then D else E) \vee (if (if E then D else C) then B else A)

Obliczmy na przykład wartość tego wyrażenia, gdy A, C, D mają wartość true, a B i E wartość false.

Ponieważ A ma wartość true, wyrażenie

if A then B else C

staje się równoznaczne z B i ma tym samym wartość false.
Wobec tego wyrażenie

if (if A then B else C) then D else E

staje się równoznaczne z E i ma również wartość false.
Analogicznie, ponieważ E ma wartość false, wyrażenie

if E then D else C

staje się równoznaczne z C i ma wartość true. Wobec tego wyrażenie

if (if E then D else C) then B else A

staje się równoznaczne z B i ma tym samym wartość false.

Całe wyrażenie jest alternatywą dwu wyrażeń o wartościach false i tym samym ma również wartość false.

Wyrażenie z przykładu 12 można - analogicznie do poprzednich - przepisać w postaci

if (if $x \geq 0$ then $A=B$ else $B > C$) then $(A \wedge B) \vee C$ else $(\neg A) \wedge (x < 5)$

Obliczmy na przykład wartość tego wyrażenia, gdy A ma wartość false, B wartość true, C wartość false, a $x = 1$.

Ponieważ w danym przypadku $x \geq 0$, więc wyrażenie

if $x \geq 0$ then $A=B$ else $B > C$

staje się równoznaczne z wyrażeniem $A \equiv B$ i dla podanych wartości A i B ma wartość false. Wobec tego całe dane wyrażenie staje się równoznaczne z wyrażeniem

$(\neg A) \wedge (x < 5)$

i ma tym samym wartość true, ponieważ zarówno $\neg A$, jak relacja $x < 5$ mają w danym przypadku wartości true.

Zwróćmy uwagę na to, że w podanych przykładach operowaliśmy zmiennymi zarówno liczbowymi, jak i booleowskimi. Zarówno zmienne liczbowe, jak i liczby, czy ogólniej wyrażenia arytmetyczne mogą w wyrażeniach booleowskich występować tylko jako argumenty relacji. Wszystkie inne działania logiczne wymagają argumentów booleowskich.

2.11. Zadanie

Obliczyć wartości logiczne wyrażeń booleowskich podanych w przykładach 1-12 w poprzednim paragrafie dla następujących wartości zmiennych:

Przykład 1:

a) $\alpha = -1$ b) $\alpha = 3$ c) $\alpha = -3$

Przykład 2:

	X1	X2	a	W1W
a)	0	0	0	0
b)	0.1	0	0.3	0
c)	-1	-2	-3	-4

P r z y k ł a d 3:

a) $x = 0$

b) $x = 2.5$

c) $x = 4$

P r z y k ł a d 4:

	Fi	Psi
a)	-1	0
b)	0	0
c)	19	-3

P r z y k ł a d 5:

	A	B	C
a)	0	0	0
b)	-2	-1	0
c)	-4	-1	-7

P r z y k ł a d 6:

	A	B	C	D	E	F	G	a	b
a)	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	2	1
b)	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	0	0
c)	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	-1	-4

P r z y k ł a d 7:

	X	Y
a)	0	0
b)	-5	1
c)	-1	-6

P r z y k ł a d 8:

	A	B	z
a)	<u>false</u>	<u>true</u>	1
b)	<u>false</u>	<u>false</u>	5
c)	<u>true</u>	<u>true</u>	-7

P r z y k ł a d 9:

	U	W	c
a)	1	-1	0.5
b)	1	-1	-5
c)	4	4	2.4

P r z y k ł a d 10:

	A	B	C	D	E	F	G	x	y
a)	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	0	0
b)	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	-1	1
c)	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	1	2

P r z y k ł a d 11:

	A	B	C	D	E
a)	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>
b)	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>true</u>
c)	<u>false</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>false</u>

Przykład 12:

	A	B	C	x
a)	<u>true</u>	<u>false</u>	<u>true</u>	-2
b)	<u>false</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	-1
c)	<u>true</u>	<u>true</u>	<u>false</u>	4

2.12. Zadanie

Które z podanych niżej wyrażeń są wyrażeniami algolowskimi, a które nie:

- 1) if 0>0 then true else true
- 2) if x<0 then if a then b^c else b^c else b=c
- 3) sin(x-3xy)^(-2+entier(x)) = if x>0 then 2 else 3
- 4) 2 > if x>0 then 2 else 3
- 5) 2 > (if x>0 then 2 else 3)
- 6) (-,a^(b<(c+d))^(-,g)
- 7) if x+2<3 then a^b else a^b
- 8) (if x>0 then 2' else 3) = (if x>0 then y else -y)
- 9) x<2 ^ if y=0 then x<0 else x<1
- 10) if X>0 then Y^Z else X^Z

2.13. Zadanie

Następujące warunki zapisać w ALGOLu:

- 1) $-1 \leq x < 0$ albo $3 < x \leq 7$,
- 2) $-1 \leq x < 0$ i $y > -3$,
- 3) $0 \leq y \leq 2$ dla $x < 0$,
 $y = 2$ dla $x = 0$,
 $y \geq 2$ dla $x > 0$,
- 4) o ile $x > 0$, to musi być $y > z$,
- 5) albo $x=y=0$ albo $x \neq 0$ i $y \neq 0$,
- 6) jeżeli $x+y \leq 1$, to $x-y < 2$,
- 7) jeżeli $x+y \leq 1$, to $x-y < 2$, i na odwrót, jeżeli $x-y < 2$, to $x+y \leq 1$,
- 8) jeżeli równocześnie $x > 0$ i $y > 0$ albo $x \leq 0$ i $y \leq 0$, to musi być $x=y=z$,
- 9) k ma być podzielne przez 5,
- 10) jeżeli całkowite X jest podzielne przez całkowite s, to całkowite Y nie jest podzielne przez s i na odwrót,
- 11) jeśli $x > 0$ pociąga za sobą $y > 0$, to z tego wynika, że $x > 0$ pociąga za sobą również $z > 0$,

- 12) nie wszystkie wyrazy A_1, A_2, \dots, A_6 są równe,
 13) co najmniej jeden ze współczynników a_1, a_2, \dots, a_5 jest różny od zera,
 14) całkowite Z jest parzystą liczbą naturalną,
 15) q nie jest wielokrotnością liczby $\frac{1}{3}$,
 16) albo $X=Y=Z=1$ albo żadna ze zmiennych X, Y, Z nie przyjmuje wartości 1,
 17) jeżeli c jest liczbą całkowitą, to musi być większe od 3,
 18) liczby A i B są obie całkowite albo żadna z nich nie jest całkowita,
 19) jeżeli $-1 < \alpha < 1$, to $-0.5 < \beta < 0.5$; w przeciwnym razie $\beta = 0.5$,
 20) dla $x \geq 0, y \geq 0$ ma być $x+y \leq 1$, dla $x \geq 0, y \leq 0$ ma być $x-y \leq 1$, dla $x \leq 0, y \geq 0$ ma być $y-x \leq 1$ a dla $x \leq 0, y \leq 0$ ma być $-x-y \leq 1$.

2.14. Zadanie

Sprawdzić, że następujące wyrażenia booleowskie są zawsze prawdziwe, czyli mają zawsze wartość true:

- 1) $a \vee b \equiv \neg(\neg(a \wedge b))$
- 2) $a \wedge b \equiv \neg(\neg(a \vee b))$
- 3) $a \Rightarrow b \equiv \neg(a \wedge \neg b)$
- 4) $(a \equiv b) \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$
- 5) $(\neg(a \vee b) \Rightarrow \neg(a \wedge b)) \wedge (\neg(a \wedge b) \Rightarrow \neg(a \vee b))$