tróykątnych baniastey powierzchni płatków. Sklepienie, które tę ostatnią powierzchnię ma za podniebienie, nazywamy sklepieniem *chełmiastém* (pendentif). Wzór 5.

Wzór 6. Wzór 6 wyobraża sklepienie *gockie* czyli *strzałkowate* (voûte en ogive). Sklepienia strzałkowate są prawie zawsze sklepieniami krzyżowemi. Postać swą podniosłą, biorą od dwóch ią tworzących łukow koła, lecz zawsze takiego koła, którego promień nie iest mnieyszym od połowy cięciwy sklepienia. Sklepienie strzałkowate składa się pospolicie z *żył* (nervures) wydatnych po krawędziach, brzegach i pośrzednie prowadzonych, tudzież ze wklęsłych pomiędzy niemi *tróykątnych płatków* (pendence).

NAUKA O RÓWNOWADZE I PARCIU SKLEPIEŃ.

Na czém zależy wewnętrzna równowaga sklepienia?

14. Iakiekolwiek będzie podniebienie sklepienia, zawsze ściany spoień i łożyska sklepieniowych klinów czyli *klińcow*, (voussoire) powinny bydź węgielnemi do tey wewnętrzney powierzchni. To prawidło w przyciosywaniu klińców bardziey iest istotném, niż rozdział całey wewnętrzney powierzchni na równe sobie cząstkowe ich podniebienia. Albowiem takie tylko klińce, maiąc we wzaiemném przyleganiu kąty bryłowe równe, mogą mieć opór iednaki i iednako przelewać swóy ciężar z iednego na drugi, począwszy od leżącego naywyżey, który się mianuie *zamkiem* lub *zwornikiem* sklepienia (clef), aż do nayniższey, na płaszczyźnie poziomey leżącey bryły, która się zowie *wezgłowiem* sklepienia; a którey tu nie będziemy iuż uważali za należącą do sklepienia, ale raczey do iego podstawy.

Każdy zosobna kliniec ciężarem swoim usiłuie odeprzeć te klińce, z któremi się styka; a to usiłowanie w każdym iest odmienne, iako w leżącym na płaszczyźnie odmienney pochyłości, zawisłey od mieysca i linii tworzącey podniebienie (*).

Sklepienie, oprócz siły własnego ciężaru, dotknięte iescze bydź może obcemi siłami. W tym razie, maiąc wyśle-

(*) Nadto, różne to ich działanie iest tylko skutkiem odmiennego położenia, gdy klińce są równey obiętości czyli równego ciężaru. I tak naprzykład: w sklepieniu kolebkowatém półokręgowém, zamek sklepienia nie całym swoim ciężarem dąży do upadku, lecz pewną tylko iego częścią i to tém większą, im iego łożyska mniey do poziomu są nachylone, tak dalece; iż ieśliby do niego pionowemi były, a zatém i ściany zamka pionowemi, wówczas całąby potęgę swoiego ciężaru wywarł ku upadnieniu, i niczém niepodparty rzeczywiścieby upadł, ieśliby nie tarcie, moc wiążąca zaprawy, albo żelaza (których tu sił cale nie uważamy) upadnieniu temu nie przeszkadzały. Drugi także, tuż po zamku z prawey lub lewey iego strony, na stoczystey, a bardziey niż tamtego do poziomu nachyloney płaszczyźnie, położony kliniec w dążeniu do upadku wywiera mnieyszą część siły swego ciężaru, niż zamek. Toż samo rozumieć należy o drugich klińcach. Aż nakoniec ostatni, iako na poziomey płaszczyźnie leżący, zgoła nie iest powodowany do upadku i dla tego właśnie odnieśliśmy go, ieszcze nie do sklepienia, lecz do iego podstawy. Aby to wzaiemne działanie klińców łacniey można było poiąć, zastanowić się nad tém potrzeba: iż żaden z nich inaczey upaśdź nie może, tylko podniosłszy w górę ten, na którym leży. To zaś podniesienie nie inaczey nastąpić może, tylko przez obrócenie się iego, i podważenie w górę końca grubszego. Temu zaś skutkowi opieraią się klińce tym większą częścią swoiego ciężaru, im niżey są położone. Sklepienie więc kołowe, maiące wszędy iednaką grubość, nie możę bydź równoważącém się; gdyż ciężary klińców iego, lubo iednakie bydź mogą, w odmienném przecię położeniu różnie działaią. Chcąc tedy, aby w takiém sklepieniu, wszystkie klińce miały iednakie do upadku dążenie, albo, co iedno znaczy, w równowadze między sobą były; nie masz innego ku temu środka, tylko powiększać ciężary wszystkich następnie od zamka aż do podstawy. Pierwszy Lahire okazał, w iakim stosunku powiększać należy grubość kolébkowatego, półokręgowego sklepienia, aby części iego w równowadze zostawać mogły. Prawidło Lahira iest następuiące: *Powiększysz ciężar każdego po zamku idącego klińca tyle, ile styczna łuku iego przewyższa styczną łuku połowy zamka.* Styczna łuku od środka zamka po łożysko wezgłowia wziętego, iest nieskończenie wielką, a następnie iest takiż i ciężar wezgłowia. Przeto, aby wezgłowie na swoiey podstawie posunąć się nie mogło, i aby cały układ był w doskonałym spoczynku, dostatecznie ie tylko obciążysz. Podług tego prawidła Parent wykreślił przez punkta liniią tworzącą grzbiet półokręgowey kolébki.

dzone prawo sił obcych, na sklepienie działaiących, zdołamy zawsze ustanowić równowagę, między niemi a częściami sklepienia; miarkuiąc, stosownie do tego prawa, obiętość klińców.

Tak tedy, wszystkie przyczyny nieiednostaynego parcia i oporu klińców, (które to siły porównać z sobą powinniśmy, chcąc mieć równoważące się sklepienie), zależą ostatecznie od podniebienia i grzbietu, iako granic ich obiętości. Cała więc nauka o wewnętrzney równowadze sklepień, czyli raczey o równoważeniu się klińców, zawiera się koniecznie w rozwiązaniu następuiącego zadania:

Maiąc daną liniią podniebienia naleźć liniią tworzącą grzbiet sklepienia, i wzaiemnie; albo maiąc dane podniebienie naleźć prawo sił, i wzaiemnie (*).

Nie mogąc tu wyłuszczyć w całey obszerności nauki o równowadze sklepień, przestać musimy na przytoczeniu iey wypadków. Roztrząśniemy tedy pokrótce: *Naprzód*, warunki równowagi między częściami wszelkich kolebkowatych i z nich złożonych sklepień, tudzież sklepień baniastych. *Powtóre*, uważaiąc zawsze wezgłowia tych sklepień, iakoby leżące na niewzruszoney płaszczyźnie poziomey, myślą za podstawę sklepieniom przybraney, przytoczymy wyrażenia parcia i ciśnienia, których doznaią od obarczaiących ie sklepień.

Równowaga sklepień kolébkowatych.

Zrównania równowagi między klińcami,

15. Polegaiąc na tey zasadzie, iż każdy kliniec iednakie

(*) I. B. Berard. Statique des voûtes etc. 1810.

mieć powinien dążenie do upadku, tudzież, że parcie i opór przyległych klińców, bydź maią sobie równe wzaiemnie; łacno iest przyyśdź do wyrażenia równowagi między trzema osobnemi klińcami, z których całe sklepienie złożone bydź wyobrażamy.

w przypadku, gdy sklepienie poddane iest samey tylko sile cięzkości.

Zrównanie w tym przypadku, w którym klińce ulegaią samey tylko sile własnego ciężaru, iest następuiące:

$$M\frac{dx}{dy}=(M+N)\ \mathrm{sty}\,\alpha \ldots . \ 1)\ (^*).$$

gdzie $2M$, znaczy obiętość czyli bryłowatość lub ciężar części śrzodkowey sklepienia, zawartey pomiędzy grzbietem, podniebieniem i ścianami spoień, symetrycznie względem strzały położonemi.

N, obiętość każdego z dwóch klińców sklepienia, sobie równych, a śrzodkowemu z obustron przyległych.

Obiętości te, czyli ciężary M i N, wyobrażone tu są, w poprzeczném sklepienia kolebkowatego rozcięciu, przez powierzchnie płaskie.

x,y, współuszykowane linii tworzącey podniebienie, których początek iest na wierzchołku strzały.

α, kąt, który spoienie dwóch przyległych klińców M i N czyni z pionową strzałą sklepienia.

N, iest funkcyą x, y; która daną bydź powinna, bądźto przez położenie linii tworzącey grzbiet, kiedy ta iest znaną, bądź przez inny iakikolwiek warunek zadania.

Ieżeli w zrównaniu 1) na równowagę klińców, α będzie

(*) Zrównanie to i następuiące, wzięte są z wyżey wymienionego dzieła P. Berarda.

zmienne, czyli, co iest iedno, gdy kliniec N przyległy śrzodkowemu, wezmie się za przyrostek obiętości M, to iest: $N = dM$, a $\frac{dx}{dy} = \text{sty}\,\alpha + d.\text{sty}\,\alpha$ iest wówczas

$$\frac{M}{\text{sty}\,\alpha} = \frac{dM}{d.\text{sty}\,\alpha}$$

to zrównanie zintegrowane daie

$$\frac{M}{\text{sty}\,\alpha} = C, \text{ albo } M = C.\text{sty}\,\alpha \;\ldots\; 2);$$

i uczy tych dwóch znamienitych w sklepieniach kolebkowatych własności:

1° *Że stosunek obiętości albo ciężaru każdego klińca (gdy są iednorodne), do styczney kąta między łożyskiem tego klińca a liniią pionową zawartego, iest zawsze stały.*

2° *Iż obiętość każdego klińca M, więc i całego sklepienia, iest zawsze ilością skończoną; a przeto da się zawsze* skostkować, *czyli wyrazić w miarach sześciennych.*

Zrównanie na długość spoienia i zastosowanie iego do kilku szczególnych przypadków.

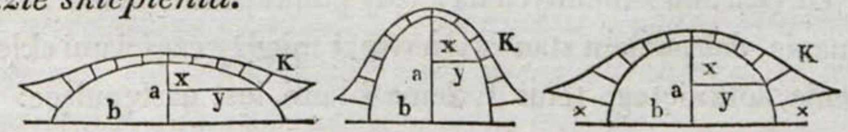
16. Ieżeli liniia tworząca podniebienie sklepienia iest daną, natenczas do oznaczenia grzbietu tego sklepienia, naydziemy prawo, skoro oznaczymy w każdém mieyscu długość spoienia. Widoczna bowiem, iż w tym razie szereg rzeczonych spoień, iakby przystaw iakich, naysnadniey posłuży do wykreślenia linii tworzącey grzbiet sklepienia. Zrównanie na tę długość spoienia w każdym punkcie linii krzywey podniebienia, iest następuiące:

$$K = -R \pm \sqrt{(k^2 + 2rk)\frac{ds^2}{dy^2} + R^2} \;\ldots\; 3);$$

w którém *K*, znaczy szukaną długość spoienia, *k* długość spoienia u wierzchu strzały sklepieniowey, czyli grubość sklepienia w zamku; ilość dana z doświadczenia, a wypadaiąca ze względu na obszerność sklepienia i moc do budowania użytego kamienia. *R*, promień koła przystaiącego do podniebienia w tém mieyscu, w którém *K* iest spoieniem; *r* promień także koła przystaiącego, lecz u wierzchołka strzały; *s*, długość łuku podniebienia, poczynaiąca się od połowy zamka do punktu, w którym szukamy długości spoienia; *y*, przystawa wytykaiąca punkt podniebienia, w którym szukamy spoienia. Początek współuszykowanych bierzemy zawsze u wierzchołka strzały. W zrównanie więc 5) kładąc zamiast wyrażeń ogólnych, szczególne, wydobyte z linii tworzącey podniebienie, zawsze potrafimy oznaczyć postać grzbietu równoważącego się sklepienia.

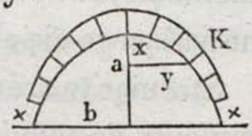
Stosuiąc to zrównanie do szczególnych przykładow, otrzymuiemy następuiące wypadki:

Ieżeli liniią tworzącą podniebienie, spłaszczonego lub wzniosłego sklepienia, iest połowa elipsy; albo sklepienia półokręgowego liniią tworzącą iest połowa okręgu; natenczas zawsze w tych trzech razach, wielkość spoienia czyli grubość sklepienia ciągle wzrasta idąc od zamka, i iest nieskończenie wielką przy nasadzie sklepienia.



Stąd wnosimy, iż ściśle rzeczy biorąc i nie uważaiąc skutku tarcia, które iest w dotknięciu pomiędzy klińcami, niepodobna byłaby klińców, tuż przy nasadzie sklepienia leżących, w równowagę z innemi wprowadzić: gdyż niepodobna dadź ich spoieniom długości nieskończenie wielkiey. Wszelako w praktyce inaczey się dzieie; bo tarcie przeszkadzaiące posunięciu, wynagradza niedostatek ciężaru i czyni spoienie nasady skończoney długości.

Przywiedziona tu własność iasno nam tłumaczy, dla czego sklepienia kolébkowate równey wciąż grubości, zwyczaynie pękaią u tak nazwanych *pach* (reins); które pęknienia w sklepieniach takich półokręgowych, przypadaią pod kątem około 45°. Stąd ieszcze wypada prawidło, iżby buduiąc takie sklepienia, wzmacniać ie przez nałożenie pach ciężarem, poczynaiąc od 45^{go} stopnia aż do nasady.



Ieżeli liniią tworzącą podniebienie sklepienia iest parabola, wtenczas otrzymamy wypadek przeciwny poprzedzaiącemu; albowiem w niém długość spoień, idąc od zamka, maleie bezprzerwy aż do nasady.

Zrównania ogólne na ten przypadek, kiedy sklepienie, oprócz ciężkości, dotknięte będzie innemi ieszcze siłami.

17. Kiedy klińce sklepień kolébkowatych dotknięte będą innemi ieszcze, prócz własnego ciężaru, siłami; podówczas wszystkie te, razem zebrane, dadzą się przywieśdź do sił dwoiakiego rodzaiu: iednych węgielnych P, drugich pionowych Q, a obu zmiennych na każdy punkt podniebienia. Zrównanie, daiące nam stan równowagi między częściami sklepienia, dotkniętego temi dwiema siłami, iest następuiące:

$$d\left(PR\frac{dy}{ds}\right)+d\left(QR\frac{dy^2}{ds^2}\right)+Pdx=0;\ \ldots\ 4).$$

gdzie R, znaczy promień krzywizny punktu wytkniętego przystawą y; reszta zaś ilości oprócz P i Q wzięta iest ze zrównania na podniebienie.

Inną wprawdzie drogą przychodzimy do następuiącego ieszcze zrównania:

$$d(PR)+d\left(QR\frac{dy}{ds}\right)-Qdx=o; \ldots . 5).$$

które na iedno wychodzi ze zrównaniem 4) i daie też same wypadki. Ze zrównania 4) łatwiey otrzymuiemy integralne, kiedy sił P nie będzie; i przeciwnie zrównanie 5) iest dogodnieysze, gdy siły Q są równe zeru.

Roztrząsaiąc powyższe zrównania, przypuśćmy, że klińce są uległe tylko sile własnego ich ciężaru, czyli, że iest $P=o$. Zrównanie 4) zcałkowane daie $Q=\frac{cds^2}{Rdy^2}$; dla nalezienia c, daymy, że u zamka, gdzie iest $dy=ds$, mamy: $Q=q$, $R=r$, a będzie $c=qr$, i następnie:

$$Q=\frac{qr}{ds}\cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right).$$

Kładąc w to zrównanie za ds, dy, dx, wartości ich wydobyte ze zrównania na pewną liniią tworzącą podniebienie, mieć będziemy wielkość siły Q, uciskaiącey każdy punkt podniebienia. I tak naprzykład:

Ieżeli podniebienie iest eliptyczne, albo kołowe, wtedy nayduiemy iż w takiém sklepieniu ciężary klińców powinny się powiększać, począwszy od zamka aż do podstawy, gdzie są nieskończenie wielkie.

Wypadek ten zgodny iest z wypadkiem otrzymanym wyżey (16) przez użycie zrównania 3) w tymże samym składzie rzeczy.

Daymy teraz, że siły $Q=o$; zrównanie wówczas 5) po zcałkowaniu daie wprost $P=\frac{c}{R}$, a oznaczywszy ilość c iak wyżey, mamy $P=\frac{pr}{R}$.

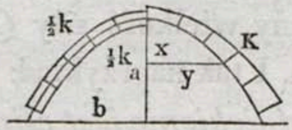
Wypadek ten uczy: że *siły węgielne P czyli do krzywizny podniebienia w każdém iego mieyscu prostopadłe, powinny bydź w stosunku odwrótnym promieni krzywizny w tychże punktach.*

I tak stosuiąc to do eliptycznego sklepienia, otrzymamy następuiący wniosek: *parcie na środek zamka, do parcia przy nasadzie sklepienia iest iak* $a^3:b^3$; gdzie a znaczy strzałę, b zaś połowę cięciwy sklepienia.

A zatém w sklepieniu, którego tworzącą podniebienie iest półokrąg koła, parcie to będzie statecznie wszędy iednakie.

Daymy teraz, że idzie nam o znalezienie takiego podniebienia, na które prawo sił działaiących iest znane, takie naprzykład: iż ciężar iest proporcyonalny odpowiadaiącemu łukowi linii podniebienia. W tym razie zrównanie 5) po założeniu $P=o$, a $Q=1$ wezmie postać następuiącą:

$$Sdy=cdx.$$



Założyć bowiem, że ciężar iest proporcyonalnym łukowi, iest iedno i toż samo, co uczynić w ogólném zrównaniu, siły węgielne równe zeru, a siły pionowe równe ilości stałey; równe, naprzykład, iedności; iakeśmy tu uczynili.

Zrównanie poprzedzaiące, zcałkowane przez logarytmy, wyda zrównanie pierwotne na liniią, która będzie liniią *łańcużkową*. Potrafimy z niego szukaną liniią wykreślić i kierunek spoień sklepienia przez nię utworzonego oznaczyć. W naznaczeniu zaś przyzwoitey sklepieniu grubości dwiema drogami postąpić można. Naprzód, wykreślić grzbiet iego podług zrównania 3), a wówczas grubość sklepienia nieznacznie wzrastać będzie od zamka do nasady. Powtóre, wziąść połowę k, i poodznaczać ią na spoieniach wewnątrz i zewnątrz wykreśloney linii łańcużkowey. Dla przekonania się o dobroci tego drugiego sposobu, dosyć byłoby szukać linii tworzącey podniebienie sklepienia równey wciąż grubości, a łatwo ze zrównania 3), przyyśdź byłoby można do zrównania na liniią szukaną, która wszakże niebyłaby, łańcużkową, a tylko liniią równolegle do niey prowadzoną w odległości połowy k. Z tego dowiaduiemy się, że sama tylko liniia łańcużkowa zadosyć uczynić może temu warunkowi, który chce mieć grzbiet sklepienia równoległym do podniebienia; czyli, co iedno iest, w którym ciężary klińców byłyby proporcyonalne łukom podniebienia. Ieżeli w budowli iakiey, samę tylko iey trwałość mamy mieć na baczeniu, wówczas liniią łańcużkową przed wszelkiemi wziąć należy za tworzącą sklepienie kolebkowate; albowiem, w takiém sklepieniu, gdzie bez pomocy tarcia i siły wiążącey w zaprawie, klińce są iuż z sobą w równowadze, trwałość za przyczyną tychto ieszcze środków i czasu znacznie się powiększyć musi.

Wprawdzie mamy śrzodek nalezienia linii tworzącey grzbiet, sprawuiący równowagę w sklepieniu, iakąkolwiek będzie liniia tworząca iego podniebienie (16); lecz sama tylko liniia łańcuźkowa służy na ten przypadek, kiedy sklepienie ma bydź wciąż równey grubości, biorąc tę iego grubość k po połowie wewnątrz linii i zewnątrz (*).

Równowaga sklepień baniastych.

Zrównania na równowagę sklepień baniastych.

18. Ieżeli okrąg koła, będącego rzutem poziomym podniebienia bani kołowey, rozdzielimy na części równe, i przez punkta podziałów tudzież oś bani poprowadzimy płaszczyzny pionowe, tedy sklepienie podzielone zostanie na pewną liczbę *wykrawków* (onglets), równych sobie i symetrycznie względem osi położonych. Z tych każde dwa przeciwległe sobie spieraią się ostrzami w mieyscu wspólney osi, i wzaiemnie się równoważą.

Oczywista z tego iż warunki równowagi między dwóma któremikolwiek wykrawkami będą dla wszystkich iednakie, i aby można było naleźć ie dla całego sklepienia, szukać należy dla któreykolwiek ich pary. Szukaiąc tedy warunków równowagi między nieskończenie małemi dwóma wykrawkami czyli pierwiastkami miąszości kołowey bani, przychodzimy z P. Berard (**) do złożenia dwóch następuiących zrównań.

$$d\left(\frac{PRydy}{ds}\right)+d\left(\frac{QRydy^2}{ds^2}\right)+Pydx=0\ldots6).$$

$$d(PRy)+d\left(\frac{QRydy}{ds}\right)-Qydx=0\ldots7).$$

(*) Berard 13, 14, 15.

(**) Berard. Sect. 3. part. I, 140.