

lub w innej postaci

$$H_{th\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} \quad (11.3)$$

Przypomnijmy, że pierwszy wyraz określa dynamiczną wysokość podnoszenia (równoważną przyrostowi wysokości prędkości na wirniku)

$$H_{dyn\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} \quad (11.4)$$

zaś dwa pozostałe potencjalną wysokość podnoszenia (równoważną przyrostowi ciśnienia na wirniku)

$$H_{p\infty} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} \quad (11.5)$$

Pierwszy wyraz określa przyrost wysokości ciśnienia na skutek działania siły odśrodkowej, drugi wyraz — przyrost ciśnienia w wyniku zmniejszenia prędkości z ω_1 do ω_2 .

Teoretyczna wysokość podnoszenia zależy również od wartości kąta łopatki na wylocie β_2 ; łatwo to udowodnić na podstawie trójkąta prędkości (rys. 11.2c)

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{c_{m2}}{u_2 - c_{u2}} = \frac{c_{m2}}{w_{u2}} \quad (11.6)$$

oraz po podstawieniu do wzoru (11.2)

$$H_{th\infty} = \frac{1}{g} u_2 \left(u_2 - \frac{c_{m2}}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) \quad (11.7)$$

Ze wzoru (11.7) wynika, iż $H_{th\infty}$ rośnie ze wzrostem kąta β_2 .

11.3. Przepływ cieczy przez wirnik o skończonej liczbie łopatek

11.3.1. Rozkład ciśnień i prędkości w kanale międzyłopatkowym

Z założenia jednowymiarowej teorii przepływu wynika równomierność rozkładu prędkości i ciśnień w kanałach międzyłopatkowych.

W rzeczywistości stwierdzono w kanale międzyłopatkowym większe prędkości po stronie biernej, a mniejsze po stronie czynnej łopatki przy odwrotnym rozkładzie ciśnień, wyższych po stronie czynnej, a niższych po stronie biernej tejże łopatki.

Odmienny od teoretycznego rozkład prędkości powoduje przede wszystkim zmniejszenie wysokości podnoszenia $H_{th\infty}$ oraz poboru mocy P_w i w mniejszym stopniu zwiększenie strat przepływu przez wirnik. W dalszych ustępach przedstawiono kilka interpretacji tego zjawiska, łącznie z podaniem sposobów ujęcia liczbowego wpływu skończonej liczby łopatek na parametry pracy wirnika.

11.3.2. Oddziaływanie łopatek

Przeniesienie momentu obrotowego z wirnika na ciecz (w celu wytworzenia wymuszonego krążenia cieczy) jest możliwe tylko przez oddziaływanie łopatek na ciecz z pewnymi siłami, a to działanie wywołuje zwiększenie ciśnienia na czynnej powierzchni łopatek, (gdyż akcja równa się reakcji).

Dla dowolnego punktu na linii środkowej kanału międzyłopatkowego (rys. 11.3) przyrost całkowity ciśnienia wyrazi się zależnością (na podstawie wzoru (11.5) przy pomnożeniu przez γ)

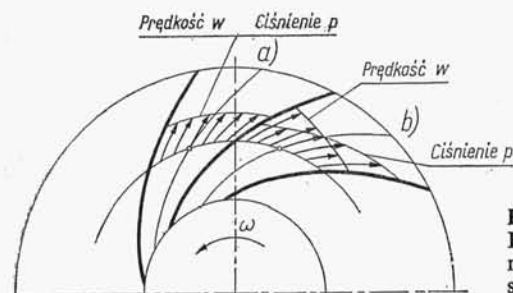
$$p - p_1 = \frac{\gamma}{2g} (u^2 - u_1^2 + w_1^2 - w^2) \quad (11.8)$$

lub w innej formie

$$p + \frac{\gamma}{2g} w^2 - \frac{\gamma}{2g} u^2 = p_1 + \frac{\gamma}{2g} w_1^2 - \frac{\gamma}{2g} u_1^2 = \text{const} \quad (11.9)$$

Wzdłuż danego okręgu koła o promieniu r u^2 jest stałe, więc

$$p + \frac{\gamma}{2g} w^2 = \text{const} \quad (11.10)$$

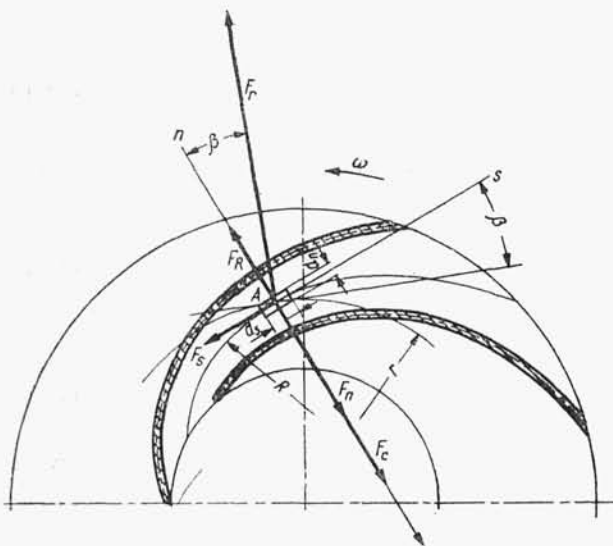


Rys. 11.3
Rozkład prędkości względnej w : a) przy nieskończonej liczbie łopatek, b) przy skończonej liczbie łopatek wirnika

Zatem wzdłuż okręgu, przy stałej wartości u , większemu ciśnieniu na stronie czynnej łopatek towarzyszy mniejsza prędkość względna w (rys. 11.3b), przy biernej stronie łopatek odwrotnie — występuje wzrost prędkości w przy spadku ciśnienia p . Przy nieskończonej wielkiej liczbie łopatek różnice ciśnień, a więc i prędkości byłyby nieskończenie małe (rys. 11.3a).

11.3.3. Rozkład sił działających na cząsteczkę cieczy w kanale międzyłopatkowym

W kanale międzyłopatkowym wirnika (rys. 11.4) występuje przepływ wymuszony, w wyniku którego cząsteczki cieczy poruszają się z prędkością względną w , w stosunku do wirnika obracającego się ze stałą prędkością kątową ω . Niech w punkcie A , na środkowej linii prądu, znajduje się w danej chwili elementarna cząsteczka o masie dm . Oznaczmy przez R promień krzywizny linii środkowej w pobliżu punktu A i przez β kąt nachylenia wektora prędkości w względem stycznej do obwodu koła o promieniu r . W punkcie A obierzmy układ współrzędnych naturalnych (s, n) , gdzie oś współrzędnych s jest styczna do środkowej linii prądu, a oś współrzędnych n jest do niej prostopadła.



Rys. 11.4. Rozkład sił działających na cząsteczkę cieczy w kanale międzyłopatkowym

Na cząsteczkę cieczy o masie dm w punkcie A działają:

- siła odśrodkowa $F_r = dm r \omega^2$, jako skutek wymuszonego krążenia cieczy,
- siła odśrodkowa $F_R = dm \omega^2 / R$, wywołana ruchem względnym cząsteczki z prędkością w po linii środkowej o promieniu krzywizny R ,
- siła G. Coriolisa $F_c = dm 2\omega w$, powstająca w wyniku ruchu obrotowego układu względnego, jakim jest masa cieczy przepływająca przez obracający się kanał międzyłopatkowy wirnika,
- siła powierzchniowa wypadkowa F_n proporcjonalna do spadku lub przyrostu ciśnienia $\partial p / \partial n$ od strony czynnej do strony biernej łopatki.

Określimy masę cząsteczki

$$dm = ds dn b \frac{\gamma}{g} \quad (11.11)$$

gdzie: ds, dn — elementarne wymiary cząsteczki w kierunku osi s i n , b — wymiar w kierunku prostopadłym do rysunku (odpowiada szerokości wirnika na promieniu r).

11.3.3.1. Działanie sił na cząsteczkę cieczy w przekroju prostopadłym do kierunku s . Z warunku równowagi sił w przekroju prostopadłym do kierunku przepływu s otrzymamy równanie

$$F_n + F_c - F_R - F_r \cos \beta = 0 \quad (11.12)$$

lub po podstawieniu wielkości dm ze wzoru (11.11) oraz wielkości poszczególnych sił i po przekształceniu

$$F_n = ds dn b \frac{\gamma}{g} \left(\frac{w^2}{R} + r \omega^2 \cos \beta - 2\omega w \right) \quad (11.13)$$

W przypadku łopatek zagiętych do przodu, tzn. w kierunku wirowania (kąt $\beta_2 > 90^\circ$), siła F_c zmieni znak na przeciwny, czyli

$$F_c = -dm 2\omega w.$$

Wyrażając siłę

$$F_n = \frac{\partial p}{\partial n} dn ds b \quad (11.14)$$

(przyrost ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial n}$ działający na drodze dn na element powierzchni dsb) otrzymamy

$$\frac{\partial p}{\partial n} dn ds b = ds dn b \frac{\gamma}{g} \left(\frac{w^2}{R} + r\omega^2 \cos \beta - 2\omega w \right) \quad (11.15)$$

a po skróceniu, wyrażenie na przyrost ciśnienia przyjmie postać

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\gamma}{g} \left(\frac{w^2}{R} + r\omega^2 \cos \beta - 2\omega w \right) \quad (11.16)$$

Dla danej szerokości a przekroju kanału międzyłopatkowego całkowity przyrost ciśnienia określa wzór

$$\Delta p = a \frac{\gamma}{g} \left(\frac{w^2}{R} + r\omega^2 \cos \beta - 2\omega w \right) \quad (11.17)$$

Interesujący jest wzajemny stosunek poszczególnych ciśnień cząstkowych. Miarą tego są stosunki wartości poszczególnych wyrazów w nawiasie. Zakładając przybliżone średnie wartości dla przekroju $r = r_{sr} = \frac{r_1 + r_2}{2}$, $\beta = 25^\circ$, $R = 3r$ oraz przyjmując, że $w \approx r\omega$, otrzymamy

$$\frac{w^2}{R} = \frac{r^2 \omega^2}{3r} = \frac{1}{3} r\omega^2 \quad (11.18)$$

$$r\omega^2 \cos \beta = r\omega^2 \cos 25^\circ \approx 0,9 r\omega^2 \quad (11.19)$$

$$2\omega w = 2\omega r\omega = 2r\omega^2 \quad (11.20)$$

Po podstawieniu do wzoru (11.17) otrzymamy

$$\Delta p = a \frac{\gamma}{g} \left(\frac{1}{3} r\omega^2 + 0,9 r\omega^2 - 2r\omega^2 \right) \approx -0,8 a \frac{\gamma}{g} r\omega^2 \quad (11.21)$$

Znak „-” oznacza kierunek ujemny przyrostu ciśnienia we współrzędnych n, s .

Znając wymiary wirnika i prędkość kątową ω można obliczyć wartość liczbowa Δp .

Z równania (11.21) można wnioskować, iż na przyrost ciśnienia w przekroju międzyłopatkowym w kierunku n największy wpływ ma siła G. Coriolisa, przewyższająca znacznie wartość składowej siły odśrodkowej F_r i siły F_R .

Należy ponadto podkreślić, że (jak wynika ze wzoru (11.21)) również przy łopatkach prostych (o nieskończeniu wielkim R) wystąpi przyrost ciśnienia głównie dzięki działaniu siły G. Coriolisa, ponieważ $F_R = dm \frac{w^2}{R} = 0$.

11.3.3.2. Działanie sił na cząsteczkę cieczy wzdłuż kierunku przepływu s w kanale międzyłopatkowym. W kierunku s działają siły:

$$\text{— składowa siły odśrodkowej } F_r, \sin \beta = dm r \omega^2 \sin \beta = \frac{\gamma}{g} b ds dn r \omega^2 \sin \beta.$$

— siła wywołana przyrostem ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial s}$ w kierunku przepływu $F_s = dn b \frac{\partial p}{\partial s} ds$.

Wypadkową siłę F_w działającą na cząsteczkę dm i nadającą jej przyspieszenie $\frac{dw}{dt}$ czyli

$$F_w = dm \frac{dw}{dt} = \frac{\gamma}{g} b dn ds \frac{dw}{dt} \quad (11.22)$$

określi zależność

$$F_w = \frac{\gamma}{g} b dn ds \frac{dw}{dt} = \frac{\gamma}{g} b ds dn r \omega^2 \sin \beta - dn b \frac{\partial p}{\partial s} ds \quad (11.23)$$

Podstawiając zależność

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\partial w}{\partial s} w$$

i skracając przez b i dn , otrzymamy

$$\frac{\gamma}{g} w \frac{\partial w}{\partial s} ds = \frac{\gamma}{g} r \omega^2 \sin \beta ds - \frac{\partial p}{\partial s} ds \quad (11.24)$$

a po uproszczeniu

$$\frac{\gamma}{g} w dw = \frac{\gamma}{g} r \omega^2 \sin \beta ds - dp \quad (11.25)$$

Ponieważ $\sin \beta ds = dr$, więc ostatecznie równanie przyjmie postać

$$\frac{\gamma}{g} w dw - \frac{\gamma}{g} r \omega^2 dr + dp = 0 \quad (11.26)$$

lub po scałkowaniu

$$\frac{\gamma}{2g} w^2 - \frac{\gamma}{2g} r^2 \omega^2 + p = \text{const} \quad (11.27)$$

Przyjmując granice całkowania od wlotu 1 do wylotu 2 i przekształcając, otrzymamy

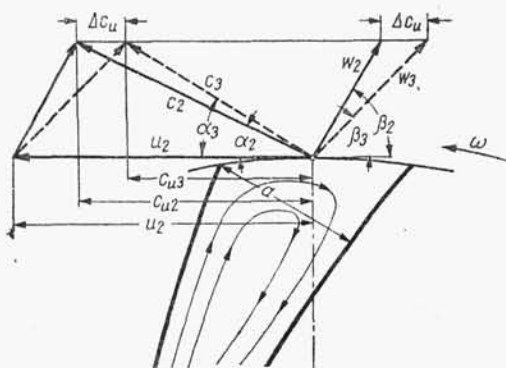
$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = H_p \quad (11.28)$$

Zatem wyrażenie określa przyrost wysokości ciśnienia w wirniku, identyczny z wyrażeniem (11.5), dla nieskończonej liczby łopatek. Całkowita wysokość podnoszenia musi uwzględniać także przyrost wysokości prędkości na wirniku, wyrażający się przyrostem prędkości bezwzględnej c_1 na c_2 , czyli

$$H_{th\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} \quad (11.29)$$

11.3.4. Wpływ wiru międzyłopatkowego na rozkład prędkości na wylocie z wirnika

A. Stodola w 1924 r. jako pierwszy tłumaczył zmienność rozkładu prędkości w kanale międzyłopatkowym istnieniem względnego wiru międzyłopatkowego o prędkości kątowej ω i o kierunku wirowania przeciwnym do obrotu wirnika (rys.



Rys. 11.5
Zmiana składowej obwodowej c_{u2} jako
skutek zawirowania międzyłopatkowego
(wg A. Stodoli)

11.5). W celu liczbowego ujęcia występującego wiru A. Stodola przyjął w pierwszym przybliżeniu jego składową wzdłuż krawędzi wylotowej wirnika równą zmniejszeniu składowej obwodowej c_{u2} o wielkości Δc_u , czyli

$$\Delta c_u = \frac{a}{2} \omega \quad (11.30)$$

gdzie a — szerokość kanału międzyłopatkowego na wylocie.

Rzeczywista składowa obwodowa c_{u3} będzie więc mniejsza od c_{u2}

$$c_{u3} = c_{u2} - \Delta c_u \quad (11.31)$$

oraz w konsekwencji mniejsza wysokość podnoszenia przy skończonej liczbie łopatek (w odniesieniu do wzoru (11.2))

$$H_{th} = \frac{1}{g} u_2 c_{u3} \quad (11.32)$$

Ten sposób ujęcia wpływu zawirowania międzyłopatkowego uwzględnia tylko szerokość wylotu międzyłopatkowego, a przez to i liczbę łopatek. Pomija natomiast niewątpliwie wpływ krzywizny łopatek oraz kąta nachylenia łopatki na wylocie β_2 . Ze względu na prostotę obliczenia sposób ten może oddać duże usługi w przybliżonych obliczeniach.

11.3.5. Wpływ zawirowania przed wirnikiem jako przyczyna zawirowania między łopatkami

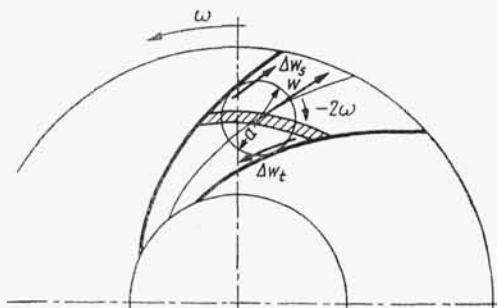
Według J. Rabbego [7] cząsteczka cieczy przed wpłynięciem do wirnika ma już zawirowanie względem wirnika równe -2ω wzdłuż pewnej zamkniętej linii. Zawirowanie to utrzymuje się w dalszym ciągu również po wpłynięciu cząsteczki w obręb wirnika. W rezultacie do pewnej średniej prędkości względnej w kanale międzyłopatkowym (rys. 11.6) dodają się przyrosty prędkości Δw_t — po stronie czynnej łopatki o kierunku przeciwnym prędkości w i po stronie biernej łopatki Δw_s o kierunku zgodnym z kierunkiem w . Przy czym $\Delta w_t = \Delta w_s$.

Na średnim promieniu $r_{sr} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ i przy małych odległościach między łopatkami w kształcie łuków kół wystąpi zależność

$$\Delta w_t = \frac{a}{2} 2\omega = a\omega \quad (11.33)$$

gdzie a — szerokość kanału międzyłopatkowego na promieniu r_{sr} .

W wyniku opisanego zawirowania międzyłopatkowego otrzymujemy wypadkowy zmienny rozkład prędkości.

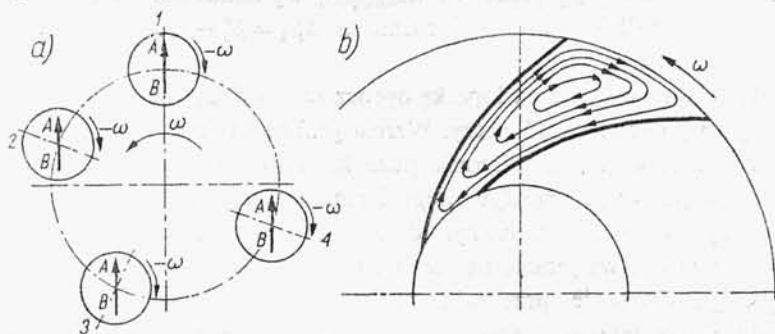


Rys. 11.6
Zawirowanie międzyłopatkowe jako przyczyna zmiennego rozkładu prędkości względnej w (wg J. Raabego)

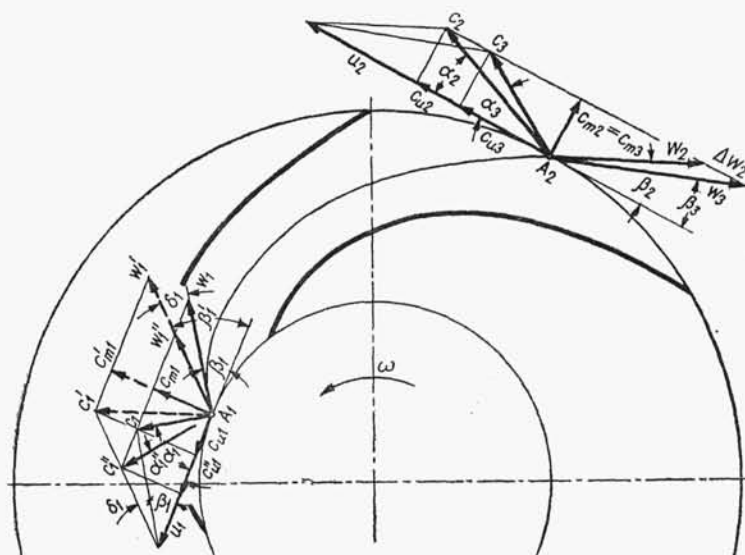
11.3.6. Siły bezwładności jako przyczyna zawirowania międzyłopatkowego przy skończonej liczbie łopatek

Zjawisko zawirowania międzyłopatkowego i jego wpływ na rozkład prędkości względnej oraz na wysokość podnoszenia wyjaśnił i ujął w szczegółowe formuły obliczeniowe C. Pfeleiderer [4].

Przyczyną zmiennego rozkładu prędkości w są wg C. Pfeleiderera siły bezwładności. Ciecz zawarta między dwiema sąsiednimi łopatkami zachowuje się podobnie jak ciecz w naczyniu przemieszczanym ruchem wirującym wokół osi znajdującej się na zewnątrz naczynia (rys. 11.7a). Wskutek bezwładności cieczy w naczyniu strzałka AB nie zmienia swej orientacji w stosunku do nieruchomego układu i jest skierowana ku górze w każdym dowolnym położeniu naczynia ($1 \div 4$). Strzałka wiruje względem naczynia w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu układu z tą samą prędkością kątową ω (przy pominięciu tarcia cieczy o ścianki). Podobnego zawirowania względem wirnika doznaje ciecz zawarta między łopatkami (rys. 11.7b). Względna prędkość wirowania międzyłopatkowego nakłada się na przepływ średni z prędkością w dając w wyniku zmienny rozkład prędkości w przedstawiony na rys. 11.3b.



Rys. 11.7. Wpływ sił bezwładności na względny ruch wirowy cieczy: a) w zamkniętym naczyniu, b) w kanale międzyłopatkowym



Rys. 11.8. Teoretyczny i rzeczywisty rozkład prędkości względnej (wg C. Pfleiderera)

Zawirowanie międzyłopatkowe spowoduje zmianę względnych prędkości na wlocie i wylocie z wirnika, a ponadto prędkości rzeczywiste w będą teraz inne przed i za łopatką. Do dalszych rozważań należy brać pod uwagę wieloboki prędkości na środkowej linii prądu (rys. 11.8). Rzeczywiste pole geometryczne prądu na wirniku odbiega znacznie od pierwotnie założonego ruchu osiowo-symetrycznego, jako założenia do wyprowadzenia podstawowego równania L. Eulera. Przy skończonej liczbie łopatek wirnik dzieli się na skończoną liczbę odrębnych kanałów, w których występujące względne zawirowania powodują zmianę kierunku i wartości prędkości względnych w i związanych z nimi prędkości bezwzględnych c , kątów nachylenia α prędkości bezwzględnych c i kątów nachylenia β prędkości względnych w do kierunku obwodowego. Należy zwrócić uwagę na to, iż na wylocie zawirowanie powoduje (teoretycznie biorąc) zmiany o przeciwnych skutkach niż na wlocie. I tak na wylocie następuje zwiększenie kąta z α_2 do α_3 na wlocie zaś zmniejszenie z α_1 do α'_1 . Prędkość bezwzględna na wylocie c_2 maleje przy tym do c_3 , przy czym maleje również jej składowa obwodowa z c_{u2} do c_{u3} . Na wlocie występują przeciwne zmiany: c_1 rośnie do c'_1 przy zwiększaniu się (względnie pojawianiu przy $\alpha_1 = 90^\circ$) składowej obwodowej c_{u1} . Kąt wylotowy β_2 prędkości względnej w_2 zmniejsza się o $\Delta\beta_2 = \beta_2 - \beta_3$, zaś kąt β_1 prędkości wlotowej rośnie o $\Delta\beta_1 = \beta'_1 - \beta_1$. Wymienione zmiany przedstawiono na rys. 11.8.

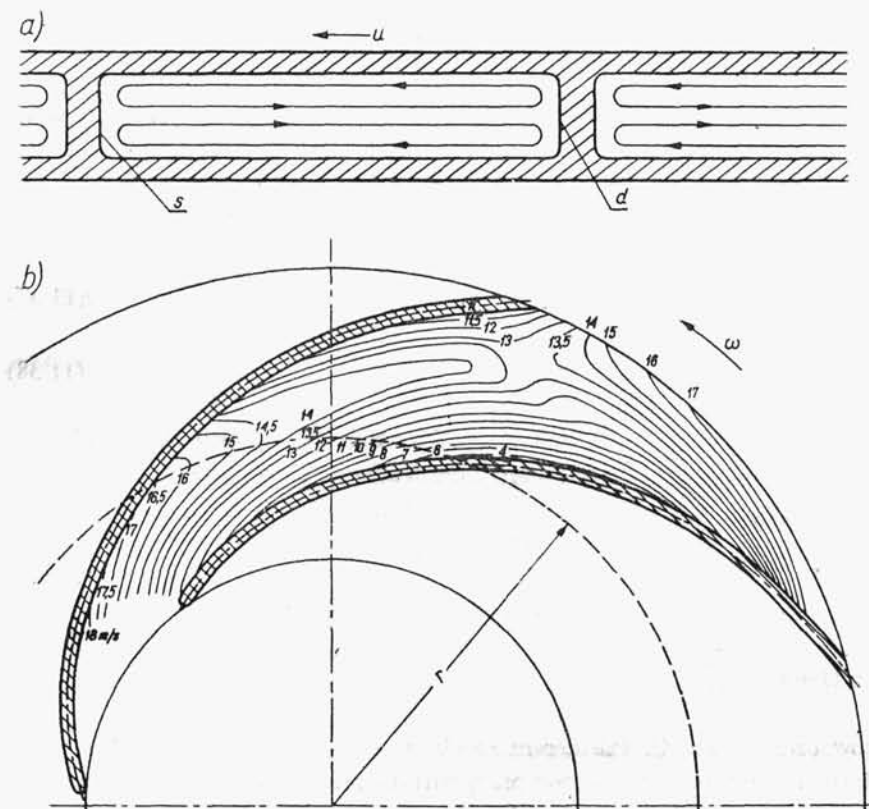
Na kształt pola prądu na wlocie na łopatkę oprócz zawirowania międzyłopatkowego znaczny wpływ wywiera lepkość cieczy. Wzrost grubości warstwy przyściennej na biernej powierzchni łopatki (bezpośrednio poza krawędzią wlotową) powoduje zwężenie swobodnego przekroju przepływowego i zmianę kierunku wektora prędkości bezwzględnej c_1 w kierunku przeciwnym do zmiany wywołanej zawirowaniem. Można przyjąć, iż zmiany te wzajemnie się znoszą, tak że w dalszych rozważaniach przyjmujemy $c'_{u1} \approx c_{u1}$. Zwężenie przekroju swobodnego powoduje zwiększenie prędkości z c_{m1} do c'_{m1} , a przez to i wzrost kąta wlotowego łopatki o kąt natarcia

$$\delta_1 = \beta'_1 - \beta_1 \quad (11.34)$$

Zmiany te przedstawiono na rys. 11.8 liniami przerywanymi. Należy przy tym podkreślić, że warunki przepływu na wlocie do wirnika przy $\alpha_1 = 90^\circ$ nie mają prawie żadnego wpływu (przy stycznym napływie na łopatki) na wysokość podnoszenia ani na pobór mocy; z tych powodów nie uwzględniamy wpływu zawirowania na wlocie, a tylko wpływ zwężenia przekroju i konieczność przyjmowania kąta natarcia δ_1 .

11.3.7. Wpływ zawirowania międzyłopatkowego na powstawanie wtórnego przepływu

Przy przepływie cieczy rzeczywistej występuje tarcie cieczy o ścianki kanałów międzyłopatkowych, powodujące istotne zmiany pola prądu. Przedstawiony na rys. 11.3b rozkład prędkości względnej jest słuszny tylko do pewnej odległości od wlotu na łopatkę. W dalszej części występuje przepływ wtórny, powodujący przemieszczanie maksymalnych prędkości w od powierzchni biernej łopatki w kierunku powierzchni czynnej (rys. 11.9b). Ponieważ w pobliżu ścian opory przepływu cząsteczek cieczy są większe niż wewnątrz strumienia, przyływ wtórny w kierunku powierzchni czynnej łopatki występuje głównie wewnątrz strumienia (przede wszystkim działa tu siła G. Coriolisa), powodując powrotne przepływy w pobliżu ścian, jak to przedstawiono na rys. 11.9a.



Rys. 11.9. Dodatkowe zawirowanie w kanale międzyłopatkowym: a) przepływ wtórny występujący w przepływie międzyłopatkowym, b) rzeczywisty rozkład prędkości w kanale międzyłopatkowym