§ IV. Połączenie okręgu koła z linią prostą zewnętrzną.

196. Jeżeli na średnicy weźmiemy punkt to on z punktem swym sprzężonym, zowią się *sprzężonemi względem okręgu koła*; prostopadła wyprowadzona z jednego z tych punktów zowie się *biegunową drugiego punktu*, a zarazem *biegunową okręgu koła.*

197. *Tw. Najkrótszą odległością okręgu koła od linii zewnętrznéj, jest odcinek prostopadłéj wyprowadzonéj ze środka koła na tę linię* (fig. 153).

Linia $OA + AB < OD < OC + CD$; a że $OC = OA$ przeto $AB < CD$.

198. *Tw. Promień koła jest średnio-jeometrycznie proporcyonalny między odległościami środka koła od punktów sprzężonych* P i Q (fig. 154).

Z założenia mamy $AP : PB = AQ : BQ$ przeto i $AP : AQ = PB : BQ$ czyli $AO - OP : OQ - AO = AO + OP : OQ + AO$; lecz w proporcyi różnica lub summa wyrazów pierwszego stosunku, z różnicą lub summą wyrazów drugiego stosunku, składają ten sam co i te wyrazy stosunek, przeto AO i OP są wyrazami pierwszego, zaś OQ i AO drugiego stosunku, tak że $AO : OP = OQ : AO$ czyli $OP : AO = AO : OQ$.

I nawzajem: *jeśli promień koła jest średnio-jeometrycznie proporcyonalny między odległościami środka od punktu* P *wziętego na średnicy i punktu* Q *leżącego na jéj przedłużeniu, to punkta te są sprzężo-*

ne; gdyż z założenia: $OP : AO = AO : OQ$ czyli $AO : OP = OQ : AO$ a ztąd $AO - OP : OP = OQ - AO : AO$ i $AO + OP : OP = OQ + AO : AO$, następniki równe, przeto i poprzedniki złożą proporcyę:

$AO - OP : OQ - AO = AO + OP : OQ + AO$ t. j.

$AP : AQ = BP : BQ$.

199. *Tw. Cięciwa łącząca punkta dotknięcia stycznych parzystych, jest linią biegunową punktu przecięcia się stycznych* (fig. 154).

Prowadzę promień OM i odcinam na nim $OP' = OP$, trójkąty więc OMP i OAP' mające kąt O wspólny zawarty między bokami równemi $OM = OA$, $OP = OP'$ mają i pozostałe części równe t. j. kąt $P = P'$; kąt M jest prosty i kąt P' prosty, przeto linia P'A równoległa do MQ daje: $OP' : OM = OM : OQ$ czyli $OP : OA = OA : OQ$, azatém punkta P i Q są sprzężone (198. W.), zaś prostopadła MP przechodząca przez jeden z nich P, jest biegunową drugiego punktu Q.

200. *Tw. Jeżeli cięciwa* mn *łącząca punkta zetknięcia się stycznych parzystych* Q'm i Q'n, *przechodzi przez punkt sprzężony* P, *to punkt zbiegu* Q *stycznych leży na biegunowéj* QQ' fig. 154).

Z punktu Q prowadzę styczne parzyste QM i QN, odpowiednia im cięciwa MN jest prostopadła do QO i wyznacza punkt P sprzężony z Q; prowadzę cięciwę *mn* przez punkt P, i z punktów *m* i *n* wyprowadzam styczne przecinające się w punkcie Q', a mam dowieść że linia QQ' jest prostopadła do QO, czyli że jest biegunową punktu P.— Dla stycznych parzystych wychodzących z punktu Q mamy: OP: OA = OA: OQ czyli OA: OP = OQ: OA, dla wychodzących z Q', Op: OC = OC: OQ'; mnożę przez siebie dwie ostatnie proporcye, zaś wypadłą proporcyę dzielę przez promień i będzie Op: OP = OQ: OQ'; trójkąty więc OPp i OQQ' mające kąt O wspólny a boki zawierające ten kąt proporcyonalne, mają i kąt OpP = OQQ' (139. Wn. 7), lecz kąt OpP jest prosty (182. Wn. c), przeto i kąt OQQ' jest także prosty i linia OQ' prostopadła do QO.

Wn. Ilekolwiek cięciw poprowadzimy przez punkt P, to styczne im odpowiednie przecinają się na prostopadłéj do połowiącéj kąt stycznych parzystych, wyprowadzonéj z punktu ich zbiegu i przechodzącéj przez punkt P.

201. *Zg. Mając punkt, znaleźć drugi punkt z nim sprzężony względem danego okręgu koła* (fig. 154).

Jeżeli punkt dany leży *a*) *wewnątrz okręgu*, to przez ten punkt P prowadzę cięciwę MN a punkt przecięcia się stycznych MQ i NQ, wyprowadzonych z końca cięciwy jest żądanym (198); *b*) *zewnątrz okręgu*, to przez ten punkt prowadzę styczne parzyste QN i QM, a przecięcie się linii OQ połowiącej kąt, z odpowiednią im cięciwą MN daje punkt żądany.

202. *Zt.* Na własności linii polarnéj punktu leżącego wewnątrz okręgu koła, opiera się sposób zamiany ruchu kołowego na ruch po prostéj i wzajemnie; jeśli cię-

ciwa MN obracać się będzie około punktu P w wyżłobionym okręgu koła O, zaś drągi QN i QM' nie mogą oddalić się od okręgu koła, to punkt ich przecięcia się Q posuwać się będzie po linii QQ' równoległéj do pierwotnego położenia drąga MN — i nawzajem jeśli punkt Q posuwa się po linii QQ', to drągi QM i QN nie mogące oddalić się od drąga MN, przecięciem się z drągiem MN opiszą łuk okręgu koła.

§ V. Połączenie okręgu koła z liniami łamanemi.

203. Wielokąty mające wszystkie wierzchołki na okręgu koła zowią się *wpisanemi w koło*, mające zaś wszystkie boki styczne do okręgu, zowią się opisanemi na kole; z poprzedzającego wynika: 1° *trójkąt* a) *może być wpisany w koło*, gdyż punkt przecięcia się prostopadłych wyprowadzonych ze środka boków, jest równo oddalony od wierzchołków (104), przeto jeżeli z tego punktu przez jeden z wierzchołków zakreślimy okręg koła, to on przejdzie i przez dwa inne, jako będące w odległości promienia od środka okręgu (24); b) *może być opisany na kole*, gdyż punkt przecięcia się połowiących kąty, jest w jednakowéj odległości od boków (103), czyli że prostopadłe wyprowadzone z tego punktu na boki są sobie równe, biorąc więc ten punkt za środek, zaś jedną z prostopadłych za promień, dwie drugie prostopadłe, jako jéj równe, będą także promieniami, a boki trójkąta jako prostopadłe do promieni są stycznemi.

2° *Prostokąt może być wpisany w koło*, gdyż środek jego przekątniéj, jako środek przeciwprostokątniéj, jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków (106). 3° *W czworokącie wpisanym w koło, kąty przeciwległe, jako mające za miarę połowę okręgu, spełniają się.* 4° *Wielokąt foremny może być* a) *wpisany w koło*, gdyż linie połowiące kąty są sobie równe (128); b) *opisany na kole*, bo linie połowiące boki są do nich prostopadłe i równe sobie; osie symetryi połowiące kąty są średnicami koła opisanego, zaś połowiące boki, wpisanego. 5° Łuki odpowiednie bokom wielokąta for. wpis. są sobie równe, dla równości cięciw (27); i nawzajem: jeśli okręg podzielimy na równe części, to cięciwy tych łuków składają wielokąt for., jako mający boki równe (28) i kąty równe, bo mające za miarę cały okręg koła, bez łuków odpowiednich ramionom kąta, które z założenia są sobie równe. 6° Podzieliwszy okręg koła na części równe (fig. 156), i przez punkta podziałów A, B, C, D, E poprowadziwszy styczne, one złożą wielokąt foremny opisany na kole; gdyż linie OF, OG... połowiące kąty stycznych parzystych przechodzą przez środek koła (182. Wn.), są sobie równe, linie bowiem łączące punkta A z B... składają wielokąt for. wpis. w koło, przeto OL=OM, zaś LF=MG jako boki trójkątów prostokątnych mających BL=BM, kąt FBL=GBM, bo spełnienia ich LBO i OBM równe. 7° Mając wielokąt foremny wpisany w koło, aby wpisać wielokąt o podwójnéj liczbie boków, połowimy łuki odpowiednie bokom i łączymy je z wierzchołkami wielokąta; liczba jego boków będzie dwa razy większa, bo każdemu bokowi danego, odpowiadają dwa boki w powstałym tym sposobem wielokącie,— on zaś jest foremny, bo łuki odpowiednie bokom są sobie równe. Podobnie mając wielokąt for. opisany na kole, chcąc opisać wielokąt o podwójnéj liczbie boków, połowimy łuki zawarte między punktami zetknięcia, i przez te punkta prowadzimy styczne.

204. *Tw.* (Ptolomeuszowe). *W czworoboku wpisanym w koło, iloczyn z dwóch przekątnich równa się iloczynowi z boków przeciwległych*: AD.BE=AB.ED +BD AE fig. 155).

Prowadzę cięciwę EK=BD; trójkąty ABD i AFE mające kąt D=E jako mierzące się połową łuku AB, kąty A równe dla równości łuków BD i KE,— mają i boki proporcyonalne (139. Wn. 8): AD: DB = AE: EF, a ztąd AD.EF=DB.AE; trójkąty DAE i BAF mające kąt D=B jako mierzone połową łuku AE,—kąt EAK=DAB, dodawszy więc kąt KAD, będzie kąt EAD=FAB,—mają boki proporcyonalne: AD: DE= AB: BF, a ztąd AD.BF=DE.AB;— dodając te dwie równości do siebie otrzymamy AD.EF+AD.BF=DB. AE+DE.AB czyli: AD.(EF+BF)=DB.AE+DE.AB, albo AD.BE=DB.AC+DE.AB.

105. *Tw. Obwód wielokąta foremnego wpisanego w koło, jest mniejszy od okręgu tego koła,—opisanego zaś jest większy od okręgu koła* (fig. 156).

a) Obwód wielokąta foremnego ma tyle boków równych sobie, z ilu łuków równych składa się okręg koła, lecz że każden bok jest mniejszy od odpowiedniego łuku (3. Wn. 2), przeto i obwód jest mniejszy od okręgu. *b*) Linia łamana AFB jest większa od łuku AB, uważając go za linię łamaną złożoną z najdrobniejszych części linii prostej 20), przeto obwód wielok. opis. jest większy od okręgu; *albo*: obwód wielokąta opisa. GHJ... nie może być równy okręgowi, bo obwód opisanego o podwójnéj liczbie boków, jako mniejszy od obwodu tego wielokąta (20. Wn.), byłby mniejszy od okręgu koła, i to tém mniéjszy im bardziéjby się zbliżał do okręgu t. j. że różnica między obwodem wielok. a okręgiem powiększałaby się w miarę zbliżania się tych linii, przeto obwód wielokąta opisan. nie może być ani równy, ani mniejszy, a zatém jest większy od okręgu koła.

106. *Tw. W wielokątach for. równoobwodowych, różnica między promieniem a prostopadłą do boku tém jest mniejsza, im wielokąt ma większą liczbę boków* (fig. 157).

Linia AB jest bokiem wielokąta, bok więc wielokąta równoobwodowego o podwójnéj liczbie boków, równać się będzie połowie AB, zaś kąt odpowiedni mu we środku koła będzie połową kąta AOB odpowiedniego bokowi AB. Dla znalezienia boku wielokąta o podwójnéj liczbie boków, ze środka cięciwy AB wyprowadzam prostopadłą PC i punkt C przecięcia się jéj z okręgiem z punktami A i B łączę prostemi i ze środka linii AC prowadzę A'B' równolegle do AB; linia więc A'B' jest bokiem wielokąta o podwójnéj liczbie boków (139. Wn. 5), potrzeba dowieść że różnica między promieniem CA' a prostopadłą CP' jest mniejsza aniżeli między promieniem CA a prostopadłą CP. *a)* Widzimy, że $CP'=\frac{1}{2}CP=\frac{1}{2}(CO+OP)$, przeto $CP'>OP$, gdyż w CP' wchodzi połowa OP z połową promienia która jest większa od połowy OP. *b)* W trójkącie prostokątnym CA'O, — $CO:CA'=CA':CP'$ a że $CP'<CA'$ przeto i $CA'<CO$. Mamy więc dwie nierówności $OA>OP$ i $CA'>CP'$ lecz że $OA>CA'$ i $OP<CP'$, przeto większa jest różnica pomiędzy OA i OP aniżeli między CA' i CP'.

207. *Tw. Stosunek boku kwadratu opisanego do promienia równa się stosunkowi* $\sqrt{2}:1$ (fig. 158).

Przekątnie w kwadracie są prostopadłe (118. Wn. 2 i 117), przeto w trójkącie prostokątnym AOB, — $\overline{AO}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$ czyli $2\,\overline{AO}^2=1.\,\overline{AB}^2$, a ztąd $\overline{AB}^2:\overline{AO}^2=2:1$ albo $AB:AO=\sqrt{2}:1$.

Wn. 1. Stosunek średnicy do boku równa się stosunkowi boku do promienia, gdyż $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$ czyli $2\,\overline{AB}^2=1.\,\overline{AC}^2$, ztąd $\overline{AC}^2:\overline{AB}^2=2:1$ lub $AC:AB=2\sqrt{2}:1$

Wn. 2. Prostopadła OE równa się połowie boku AB, bo linia łącząca środki boków EF równa się bokowi.

208. *Tw. Bok sześciokąta for. wpisanego w koło, równa się promieniowi tego koła* (fig. 159).

Trójkąt AOB, ma kąt O równy $^1/_6$ czterech kątów prostych, czyli $^1/_3$ Π, przeto kąt $A+B=^2/_3$ Π, a że one są sobie, jako leżące naprzeciw promieni, przeto i każdy z nich jest $^1/_3$ Π, a zatém bok AB sześciokąta, równa się promieniowi OA.

Wn. $\overline{OE}^2+\overline{EA}^2=\overline{AO}^2$ czyli $\overline{EO}^2=\overline{AO}^2-\overline{EA}^2=\overline{AO}^2-{}^1/_4\,\overline{AO}^2={}^3/_4\,\overline{AO}^2$ czyli prostopadła $OE=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\overline{AO}^2$.

209. *Tw. Bok dziesięciokąta for. wpisanego w koło, równa się większéj części promienia podzielonego w średnio-skrajnym stosunku* (fig. 160).

Linia AB jest bokiem dziesięcioboku for. wpisanego w koło, przeto w trójkącie BOA kąt O jest $^1/_{10}$ częścią 2Π czyli $^2/_{10}$ Π, przeto dwa pozostałe kąty czynią $^8/_{10}$ Π, a że są sobie równe, więc każdy jest $^4/_{10}$ częścią Π, azatém dwa razy większy od kąta AOB; poprowadziwszy linię BJ połowiącą kąt B, linia BJ=JO jako leżące naprzeciw kątów równych O i JBO; w trójkącie ABJ bok BJ=AB dla równości kątów przeciwległych, kąt bowiem zewnętrzny BJO równa się $^6/_{10}$ Π (80. Wn.), przeto wewnętrzny $BJA=^4/_{10}\,\Pi=A$;— w trójkącie OBA linia BJ połowiąca kąt B, dzieli podstawę na odcinki proporcyonalne do boków (142): OB: AB=OJ. AJ czyli OA: AB=AB: JA, a zatém bok AB dziesięciokąta for. wpis. w koło równa się większéj i t. d.

210. *Tw. Łuk odpowiedni bokowi pietnastokąta for. wpis. w koło, równa się różnicy łuków, odpowiednich bokom sześciokąta i dziesięciokata.*

Łuk odpowiedni bokowi sześciokąta jest $\frac{1}{6}$ okręgu zaś dziesięciokąta $\frac{1}{10}$ okręgu, przeto różnica ich $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{10-6}{60}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$ okręgu koła.

211. *Tw. Jeżeli bok* AB *wielokąta for. wpisanego w koło przyjmiemy za bok wielokąta o podwójnéj liczbie boków, to środek koła opisanego na tym drugim wielokącie leży na przecięciu się prostopadłéj* ED *wyprowadzonéj ze środka boku z okręgiem opisanym na pierwszym wielokącie* (fig. 161).

Kąt środkowy w wielokącie o podwójnéj liczbie boków, jest połową kąta środkowego danego wielokąta, gdyż podwójną liczbę razy zawiera się w 2Π, przytém środki obudwóch wielokątów leżą na prostopadłéj do środka boku AB, jako wspólnéj średnicy kół opisanych na tych wielokątach, przeto środek drugiego wielokąta leży na przecięciu się téj linii z okręgiem C, bo w tym tylko razie kąt jego środkowy ADB jest połewą kąta środkowego ACB·

212. *Zg. W dane koło wpisać* a) *kwadrat* (f. 158.) Prowadzę średnice prostopadłe AC i DB i końce ich łączę prostemi, to czworobok jest kwadratem, gdyż przekątnie są prostopadłe, przeto wszystkie boki równe, a że przekątnie są sobie równe, przeto kąty proste (118. Wn. 1) b) *Sześciokąt for.* przenoszę promień koła na okręg sześć razy, i otrzymam wielokąt szukany, gdyż bok sześciokąta równa się promieniowi (208). c) *Ośmiokąt for.* (fig. 158), wpisuję kwadrat ABCD

i połowię łuki odpowiednie bokom przez prostopadłe OE.. wyprowadzone do tych boków, środki łuków połączone z wierzchołkami kwadratu dają wiel. żądany (203. 5°); *albo*: środki L, M.. łuków AG, GB i t. d. łączę prostemi. d) *Dziesięciokąt for.*; promień tego okręgu dzielę w stosunku średnio-skrajnym i część większą przenoszę na okręg (209). e) *Piętnastokąt for.* (fig. 160); Z końca A promieniem boku AB dziesięciokąta, zakreślam łuk OC, a on na okręgu O odetnie łuk BC odpowiedni bokowi wielok. żądanego (210).

213. *Zg. Na danym boku narysować* a) *sześciokąt foremny* (fig. 157); na danym boku AB kreślę trójkąt foremny AOB, z wierzchołka O promieniem OA zakreślam okręg, na który bok AB przenoszę sześć razy; b) *ośmiokąt foremny* (fig. 162); ze środka boku AB wyprowadzam prostopadłą i odcinam na niéj EC=EB, a punkt C jest środkiem koła opisanego na kwadracie, którego bokiem jest AB, gdyż prostopadła równa się połowie boku; biorąc więc AB za bok ośmiokąta, środek koła opisanego na tym wielokącie leży na przecięciu się prostopadłéj EC z okręgiem opisanym na kwadracie t. j. w punkcie D, pozostaje więc z punktu D promieniem DB zakreślić okręg, i przenieść na niego bok dany AB ośm razy; c) *dziesięciokąt foremny* (fig. 163); promieniem równym połowie boku danego, kreślę okręg styczny do tego boku w punkcie A i prowadzę sieczną BC przez środek tego koła, to BC:AB=AB:DB czyli BC:CD=CD:DB, linia więc CB jest pro-

mieniem podzielonym w średnio-skrajnym stosunku, którego część większa równa się bokowi danemu,— pozostaje tylko tym promieniem zakreślić okręg koła i przenieść na niego bok AB dziesięć razy; d) *pięciokąt foremny* (fig. 163); środek koła wielokąta o podwójnéj liczbie boków znajduje się na okręgu opisanym na wielokącie o dwa razy mniejszéj liczbie boków, przeto znalazłszy środek koła opis. na dziesięciokącie foremnym, którego bok CF=AB, uważam ten bok za bok pięciokąta foremnego, przeto okręg koła opisany na pięciokącie przechodzi przez trzy punkta C, F, B—i pozostaje tylko na ten okręg przenieść bok CF pięć razy; e) *dwunastobok foremny* (fig. 164), bok dany AB biorę za bok sześciokąta for., którego środek jest na prostopadłéj CD i na łuku zakreślonym z punktu A promieniem AB;—okręg więc zakreślony promieniem DA jest okręgiem opisanym na sześciokącie, przeto środek koła opisanego na szukanym dwunastokącie jest w punkcie E przecięcia się prostopadłéj z okręgiem D,—pozostaje tylko z punktu E promieniem EB zakreślić okręg i przenieść nań bok AB dwanaście razy.