E) *Odcinki dowolnego połączenia prostych, czyli linie poprzeczne.*

151. *Tw. W trójkącie* BAC *poprzeczna* ED *przecinająca boki lub ich przedłużenia, dzieli te boki na sześć odcinków tak, że iloczyn z trzech odcinków niemających końców wspólnych* EA, FC i DB *równa się iloczynowi trzech pozostałych* (fig. 110).

Poprzeczna ED przecinając bok, dzieli go na dwa odcinki rachowane od punktu przecięcia się do końców boku (4.Uw), przeto trzy boki trójkąta dzielą się na sześć odcinków; biorąc z każdego boku kolejno po jednym do wierzchołków po sobie idących z boku BA do wierzchołka A, odcinek EA, z boku AC do wierzchołka C odcinek FC, z boku CB do wierzchołka B odcinek DB, otrzymamy trzy odcinki nie mające końców wspólnych; biorąc zaś wierzchołki w przeciwnym porządku otrzymamy trzy inne odcinki; EB, DC; FA—pozostaje tylko dowieść że iloczyn z trzech pierwszych odcinków równa się iloczynowi z trzech drugich.

Przez punkt C prowadzę CG równolegle do AB; stosunek odcinków równoległych równa się stosunkowi odległości ich końców od punktu zbiegu (139 Wn.5), przeto: EA:CG=FA:FC tudzież CG:EB=DC:DB; pomnożywszy te dwie proporcye, będzie EA. CG CG. EB,=FA.DC:FC.DB; dzieląc pierwszy stosunek przez CG, i biorąc iloczyny średnich i skrajnych, otrzymamy: EA. FC. DB=EB. CD. FA.

Wn. W trójkącie EAF uważając BD za poprzeczną mamy: BA.CF.DE=BE.CA.DF; poprzeczna AC trójkąta CFD daje: BD. EF. AC=BC. ED. AF. poprzeczna AC trójkąta BDE daje: AE. FD. CB=AB. FE. CD.

158. *Tw. od. Jeżeli trzy punkta* E, F, D *leżące na trzech bokach trójkąta lub ich przedłużeniu, dzielą te boki na takie odcinki, że: iloczyny z trzech niemających wspólnych końców są sobie równe* EA. FC. DB =EB. FA. DC, *to trzy te punkta leżą na jednej linii prostéj* ED.

Gdyby punkt F nie leżał na prostéj ED, toby ona przecinała bok AC w innym punkcie H, a wtedy podług poprzedzającego twierdzenia EA. HC. DB=EB. HA. DC. lecz z założenia mamy: EA. FC. DB=EB. FA. DC, przeto: EA. HC. DB: EB. HA. DC=EA. FC. DB:EB. FA. DC; dzieląc poprzedniki przez EA i DB, zaś następniki przez EB i DC, otrzymamy: HC: HA=FC: FA; a że poprzednik HC większy od poprzednika FC więc i następnik HA powinien być większy od następnika FA co być niemoże.

159. *Tw. Jeżeli z punktu* D *wziętego na płaszczyznie trójkąta* ABC, *poprowadzimy linie do jego wierzchołków* A, B, C, *to one podzielą boki na takie odcinki że iloczyn z trzech niemających końców wspólnych równa się iloczynowi podobnych trzech innych odcinków*, EA. GC. FB=EB. GA. FC. (fig. 11 lub 12).

Uważam dwa trójkąty BAF i FAC, na które dzieli się dany trójkąt ABC przez jedną z poprzecznych AF, zaś dwie inne poprzeczne biorę za poprzeczną tych trójkątów; to trójkąt BAF z poprzeczną CE daje EA. DF. CB=EB. DA. CF (157); trójkąt FAC z poprzeczną BG daje: GC. DA. BF=GA. DF. BC. iloczyny ilości równych są sobie równe, mnożę te równości tak, aby linie jednakowe były z przeciwnych stron równości: EA. DF. CB. GC. DA. BF=EB. DA. CF. GA. DF. BC; dzieląc obie strony przez DF. CB. DA. otrzymamy: EA. GC. BF=CF. AG.

Wn. 1. Względem trójkąta BDC linii AB, AD., AC są poprzeczne, przeto: GB. FC. ED=GD. FB EC; i t. p.

Wn. 2. Jeżeli by poprzeczna (fig. 113.) BG przechodziła przez środek boku AC t. j. AG=GC, to w równości EA. GC. FB=EB. GA. FC podzieliwszy pierwszą stronę przez GC zaś z drugą przez AG, otrzymamy: EA. FB=EB. FC. gdyż ilorazy ilości równych są sobie równe; czyli AE : EB=FC: FB, więc linia EF równoległa do AC (139. Wn. 2); a zatem: *jeżeli jedna poprzeczna* BG *przechodzi przez środek boku* AC *to końce dwóch innych dzielą dwa pozostałe boki na części proporcyonalne, i leżą na linii równoległéj do boku pierwszego*; i nawzajem: *jeżeli dwie poprzeczne* AF i CE *dzielą boki* AB i BC *na części proporcyonalne, to punkt ich przecięcia się* D *leży na poprzecznéj połowiącéj bok* AC; gdyż założenia mamy że BE : EA=BF: FC czyli BE. FC=EA. BF a podług twierdzenia BE. FC. GA=EA. BF. GC. przeto podzieliwszy pierwszą stronę przez BE. FC zaś drugą przez EA. BF, zostaje GA=GC. *Jeżeli z końców boku* AC *prowadzimy linie do końców linii do* *niego równoległych* e'f', EF, ef, *to punkta ich przecięcia się* d', D. d, *leżą na linii* BG *łączącej środek tego boku* AC *z punktem przecięcia się dwóch innych boków* AB i CB; linia ta GB połowiąc bok AC połowi zarazem i równolegle e'f', EF, ef, gdyż linie równoległe dzielą się przez linie wychodzące z jednego punktu B na części proporcyonalne (139. Wn. 6). Z téj przyczyny w trapezie prosta łącząca środki podstaw przechodzi przez punkt przecięcia się boków nierównoległych.

160. *Tw. od. Linie* AF, BG i CE *przechodzące przez wierzchołki trójkąta* ABC *i przecinające boki lub ich przedłużenia tak, że iloczyny z trzech odcinków niemających końców wspólnych są sobie równe,* EA. GC. FB=EB. FC. GA *przecinają się w jednym punkcie* D (fig. 111).

Gdyby linia AF nie przechodziła przez punkt D przecięcia się dwóch innych poprzecznych BG i CE, to linia przechodząca przez ten punkt D nie przecinałaby boku BC w punkcie F, lecz w innym punkcie H, przeto AE. GC. HB=EB. HC. GA (159), z założenia zaś EA. GC. FB:=EB. FC. GA azatém: AE. CG. HB: EB. HC. GA=EA. GC. FB: EB. FC. GA; dzieląc poprzedniki przez AE. GC zaś następniki przez EB. GA, otrzymamy: HB: HC=FB: FC, co być nie może gdyż HB < FB zaś HC > FC.

Wn. 1. *Linie proste* FA, CE i BG *poprowadzone z wierzchołków trójkąta* ABC *do środków boków przecinają się w jednym punkcie* D *tak, że odległość tego* *punktu od środka podstawy jest dwa razy mniejsza od odległości do wierzchołka*, czyli punkt przecięcia się jest w odległości jednéj trzeciéj od podstawy. *a*) Linie te przecinają się w jednym punkcie, gdyż odcinki każdego boku są sobie równe z założenia, a że jeden wchodzi do jednego iloczynu trzech odcinków, drugi zaś do drugiego, przeto te iloczyny są sobie równe. *b*) Linia DA jest dwa razy większa od DF, gdyż w trójkącie FAC poprzeczna BG daje: AG. CB. FD=CG. AD. FB, a że AG=CG przeto: CB. FD=AD. FB, czyli CB: FB=AD: DF; bok CB jest dwa razy większy od swojéj połowy FB, to i AD dwa razy większe od DF.

161. *Tw. W czworoboku zupełnym* ADECFB, *punkta przecięcia się* G i G' *dwóch przekątnich* AC, BD *z trzecią* FE *są jéj punktami sprzężonemi*: GE: GF=G'E: G'F (fig. 114).

W trójkącie AEF poprzeczna G'B daje: AB. FG'. ED =AD. EG' FB (157); w tym samym trójkącie poprzeczne CA, CF, CE wyprowadzone z punktu C do wierzchołków dają: AD. EG. FB=AB. FG. ED; iloczyny ilości równych są sobie równe, przeto: AB. FG'. ED. AD. EG.FB=AD. EG'. FB. AB. FG. ED; podzieliwszy obie strony przez AB. ED. AD. FB otrzymamy: FG'. EG=EG'. FG czyli GE: GF=G'E: G'F.

Wn. 1. Podobnie G''C: G''A=GC: GA i G''B G''D =G'B: G'D. Punkta sprzężone G i G'' jednéj przekątniéj AC mają tę własność, że przecięcie się dwóch innych przekątnich EF i DB jest ich wspólnym punktem sprzężonym dla punktów G i G'', względem tychże przekątnich.

Wn. 2. *Jeden tylko być może punkt* G *sprzężony z punktem* G' *względem linii* EF; bo gdyby oprócz punktu G był punkt *g*, to G'E: G'F=GE: GF i G'E: G'F=*g*E: *g*F, przeto GE: GF=*g*E: *g*F; lecz GE> *g*E zaś GF < *g*F, co być nie może.

Wn. 3. Punkt G linii EF dla którego szukamy punktu sprzężonego, nie może leżeć w środku téj linii, gdyż wyrazy pierwszego stosunku byłyby sobie równe, zaś w drugim stosunku nie mogą być sobie równe; jeżeli GE < GF, to punkt sprzężony G' leży ze strony końca E, gdyż G'E powinno być mniejsze od G'F.

Wn. 4. Połączywszy wierzchołek A z punktem G' przecięcia się przekątnich FE i BD, otrzymamy cztery promienie harmonijne: AF, AG, AE, AG', dzielące linię G'F harmonijnie; *promienie* te podobnie jak nro 143 *dzielą harmonijnie każdą prostą g'b względem nich poprzeczną*, gdyż poprowadziwszy przez punkt G' linię G'B' równoległą do *g'b*, i dopełniwszy czworoboku zupełnego AD'EC'FB' przez linie D'F i B'E, linie te przetną się na linii AG; gdyż jeśliby się przecięły nie na téj linii, to AG' nie byłaby przekątnią tego czworoboku, i przekątnia jego dałaby inny punkt sprzężony *g* z punktem G' względem linii EF, co być nie może (Wn. 2), a że linia G'B' dzieli się harmonijnie, więc podobnie się dzieli i linia *g'b* do niéj równoległa (139. Wn. 6).

162. *Zg. Za pomocą liniału przez punkt dany* E, *poprowadzić linię równoległą do linii danéj* AC (fig. 113).

W trójkącie gdy jedna z poprzecznych przechodzących przez wierzchołek połowi bok przeciwległy, drugie dwie dzielą dwa inne boki na części proporcyonalne (159. Wn. 2), przeto biorę linię AC za bok przez którego środek G ma przechodzić poprzeczna, przez punkta A i E prowadzę drugi bok AB, trzeci zaś BC dowolnie; kreślę poprzeczną BG przez środek G boku AC i poprzeczną CE, ta poprzeczna trzecia, AD podzieli bok BC w tym samym stosunku, w jakim punkt E podzielił bok AB, a tém samém linia EF jest równoległą do AC (139. Wn. 2).

163. *Zg. Ze środka linii prostéj ograniczonéj* AC *wyprowadzić prostopadłą* (fig. 113).

Prostopadła ze środka linii AC wyprowadzona ma wszystkie swe punkta równo oddalone od końców linii AC (44); położenie prostéj oznacza się dwoma jéj punktami;—jeden z nich znajdziemy kreśląc na linii AC trójkąt równoramienny przez poprowadzenie linii AB i CB pod jednakowemi kątami (91), na zasadzie n° 59 lub 66; drugi zaś znajdując środek linii AC. W tym celu przez punkt dowolny E prowadzę EF równoległą do AC, tak jak w n° 162 lub 81, 83, 145, a przecięcie się poprzecznych AF i CE daje punkt D leżący na linii BG przechodzącéj przez środek boku AC (159. Wn. 2), a tém samém prostopadléj do linii AC

164. *Zg. Znaleźć punkt sprzężony z punktem* G *leżącym na prostéj ograniczonéj* EF (fig. 114).

Punkt dowolny A łączę z punktem danym G i z końcami linii danéj; uważając więc EF. AG za przekątnie czworoboku zupełnego, którego bokami są linie AE i AF dla znalezienia trzeciéj przekątniéj, dopełniam czworoboku prowadząc linie FD i EB przecinające się na przekątniej AG, a linia DB łącząca ich końce jest trzecią przekątnią czworoboku i przetnie przekątnią EF w punkcie żądanym G' (161).

165. *Zg. Znaleźć dwa punkta leżące na przedłużeniu prostéj danéj* AB (fig. 116).

Chcąc znaleźć dwa punkta leżące w kierunku AB, biorę na téj linii punkt G ze strony końca B (161. Wn. 3), to punkt z nim sprzężony leży na przedłużeniu téj linii od końca B. Dla znalezienia punktu sprzężonego z punktem G, prowadzę DB, DG i DA i dopełniam czworoboku przez linie Ba i Ab, które dają trzecią przekątnią *ab*, przechodzącą przez punkt sprzężony z G,— dopełniwszy czworoboku przez inne linie Ba' i Ab' otrzymamy przekątnią *a'b'* która przechodzi także przez punkt sprzężony, przeto przekątnie *ab* i *a'b'* przecinają się w punkcie sprzężonym G', który jest na przedłużeniu linii AB. Podobnym sposobem biorąc drugi punkt *g* bliżéj końca Ba niżeli A, otrzymamy drugi punkt *g'* z nim sprzężony, a tym sposobem będziemy mieli dwa punkta G' i g' leżące na przedłużeniu linii AB.

166. *Znaleźć punkt leżący na prostéj przechodzącej przez punkta przecięcia się boków przeciwległych czworokąta* ABCD, *gdy punkta przecięcia się tych boków nie są dane* (fig. 117).

Punkta przecięcia się boków przeciwległych AB z CD i AD z BC są wierzchołkami czworoboku zupełnego, utworzonego z tego czworokąta, a linia łącząca te wierzchołki jest jego przekątnią zewnętrzną; poprowadziwszy więc dwie przekątnie wewnętrzne AC i BD, te przetną przekątnią zewnętrzną w punktach sprzężonych,—trzeba więc tylko znaleźć drugą linię przechodzącą przez punkt sprzężony zewnętrzny, a ta przecinając się z przekątnią BD, oznaczy punkt żądany, leżący na przekątniéj zewnętrznéj. Punkt szukany jest zarazem sprzężonym punktu G'' przekątniéj wewnętrznéj (161. Wn. 1); dopełniwszy więc czworoboku przez linie B*d* i D*b*, przekątnia wewnętrzna *db'* przejdzie przez ten punkt, a przeto przetnie przekątnią BD w punkcie szukanym G'.

167. *Zg. Przez punkt dany* Y *poprowadzić linię przechodzącą przez punkt przecięcia się dwóch prostych danych* BD i bd *nie mając tego punktu przecięcia się* G' (fig. 117).

W czworoboku zupełnym przekątnia wewnętrzna z wewnętrzną przecinają się w punkcie sprzężonym zewnętrznym, który jest ich wspólnym punktem sprzężonym względem punktów ich przecięcia się z trzecią przekątnią (161. Wn. 1); jedną linię daną BD biorę za przekątnię wewnętrzną czworoboku zupełnego, który otrzymuje się: prowadząc dowolne zbiegające się AY i AD i łącząc punkta ich przecięcia się z liniami danemi, B z *d* i D z *b*; linia A*c* jest trzecią przekątnią tego czworoboku. Punkt Y biorę za wierzchołek drugiego czworoboku zupełnego przez który przechodzi przekątnia jego zewnętrzna, a którego dwoma bokami są linie AY i AD zaś przekątniemi wewnętrznemi BD i Ac; linia YD łącząca punkt Y z punktem przecięcia się boku AD z przekątnią BD, daje bok trzeci, czwarty zaś BC przechodzi przez punkt B i punkt C przecięcia się boku trzeciego YD z przekątnią AC; bok czwarty YC przecinając się z bokiem przeciwległym AD daje punkt X, przez który przechodzi linia żądana YX. Linia ta bowiem przechodzi przez punkt G' przecięcia się linii danych DB i *db*, gdyż on jest punktem sprzężonym punktów G'' i *g* przekątnich BD i bd czworoboku A*b*Bc D*d*, tudzież punktem sprzężonym względem punktów G'' i G przekątnich BD i YX czworoboku BDYCXD.

168. *Zg. Społowić kąt zawarty między dwoma danemi liniami* EB i FC (fig. 113).

W trójkącie równoramiennym linia łącząca wierzchołek kąta ze środkiem podstawy, połowi kąt tego trójkąta (91. Wn. 3), tudzież jeśli w trójkącie dwie poprzeczne przechodzące przez wierzchołki dzielą boki na części proporcyonalne, to trzecia przechodzi przez środek boku (159. Wn. 2): przeto jeżeli 1°. wierzchołek kąta B jest dany, odcinam BA=BC, przez punkt dowolny E prowadzę EF równoległą do CA, to poprzeczne AF i CE przecinając się w D dają punkt leżący na linii przechodzącej przez środek boku AC, przeto linia BD jest żądaną; 2° jeśli wierzchołek B nie jest dany, to przez punkt *b* wzięty na ramieniu

AE, prowadzę *bc* równoległe do drugiego ramienia FC i odcinam $bA = bc$; linia Ac jest podstawą trójkąta równoramiennego, gdyż kąt $A = c$ jako leżące naprzeciw boków równych (90), zaś $c = C$ jako jednostronne odpowiednie, przeto $A = C$ i trójkąt któryby się utworzył z przecięcia się boków AE i CF jest równoramienny (91): podobnie jak w pierwszym przypadku znalazłem punkt D leżący na połowiącéj podstawę, wynajduję dwa punkta D i *d* leżące na téj linii, a ona jest żądaną.

169. *Zt.* N⁰ 165 używa się czasami korzystnie przy prowadzeniu drogi przez las, dla pośpiechu potrzeba wycinać las z obu stron, na ten koniec z przeciwnéj strony lasu trzeba mieć dwa punkta leżące na prostéj w kierunku któréj prowadzimy drogę: wyłącznie zaś używa się w miernictwie do przedłużania prostéj za przeszkodę, przez którą tyki nie mogą być widzialne. N⁰ 166 używa się w artyleryi do sypania bateryi, przy zdobywaniu warowni armaty powinny być ustawione w kierunku ściany fortecy. Jeżeli końce ściany XY (fig. 117) nie są wyraźnie widzialne, oznaczają się dwie rysy utworzone na gruncie od kul wypuszczonych z armaty stojącéj w końcu X t. j. DA i CB a następnie dwie pochodzące od armaty stojącej w końcu Y, a tym sposobem oznaczy się kierunek téj ściany przez punkt G, i drugi punkt znaleziony takimże sposobem. N⁰ 168 używa się w miernictwie do połowienia kąta na gruncie, w artyleryi zaś do połowienia kąta między dwoma ścianami warowni, których kierunek oznacza się za pomocą

najbezpieczniéj jest postępować w czasie szturmu po linii połowiącéj ten kąt.

170. *Zt. Zmierzyć długość linii* G'Y *poziomej widzialnéj, niedostępnéj z końca* G' (fig. 117).

Kierunek linii prostéj oznacza się dwoma punktami czyli tykami. Przedłużam prostą G'Y t. j. ustawiam dowolną tykę X w kierunku przedmiotów Y i G' z punktu dowolnego A prowadzę linie AY i AX t. j. ustawiam dowolną tykę A; przez punkt dowolny C leżący z téj saméj strony linii YX co i punkt A, lecz bliżéj punktu Y aniżeli X (161. Wn. 3) prowadzę linie XB i YD t. j. zatknąwszy tykę w punkcie C, posuwam się z tyką po linii XC tak, aby moja tyka zakrywając tykę C, zakrywała zarazem i tykę X, aż póki stanę w kierunku linii AY t. j. póki tyka A zakrywając tykę Y, zakryje zarazem i moją tykę—podobnym sposobem ustawiam i tykę D,—przedłużam linię AC do przecięcia się z linią XY t. j. posuwam się z tyką w kierunku linii AC czyli tak, aby moja tyka zakrywając tykę C, zakrywała i tykę A, aż póki ona zakryje przedmioty Y i G'. Tyka G jest w punkcie sprzężonym punktu G', względem linii XY, przeto GY: GX $=$G'Y: G'X zatém GY: GX$-$GY$=$G'Y: G'X$-$G'Y.— Zmierzywszy odległości poziome GY$=p$ i GX$=$P, zaś długość linii szukaną G'Y oznaczywszy przez d

będzie: p: P-$p = d$: P$+p$ przeto $d = p \times \frac{P+p}{P-p}$

t. j. *równa się odległości punktu sprzężonego od dostępnego końca linii, pomnożonéj przez odległość te-*

go końca od punktu przybranego na kierunku tej linii, podzielonemu przez różnicę odległości punktu sprzężonego od końca linii i punktu wziętego na téj linii. Sposób ten używa się do mierzenia szerokości rzeki i odległości dwóch tyk od mierzonego przedmiotu pionowego (156), gdy spodek jego jest niedostępny.

171. *Zt. Zmierzyć odległość między dwoma punktami* Y i G', *z których jeden jest niewidzialny z punktu drugiego* (fig. 117).

1° Stawiam tykę w punkcie B, z którego oba końce linii danéj są widzialne, w kierunku linii YB stawiam dwie tyki w dowolnych punktach *b* i *A*; w kierunku prostéj G'*b* ustawiam tykę *d*, po linii A*d* postępuję z tyką dopóty dopóki ona nie będzie na przedłużeniu prostéj G'B; ustawiam tykę w punkcie *c* przecięcia się prostych B*d* i D*b*, następnie w przecięciu się C prostych YD i A*c*, tudzież prostych BC i AD w punkcie X, a naostatek w G przecięciu się prostych AC z XY. Punkta *g* i G'' przekątniéj czworoboku zupełnego A*b*B*c*D*d* mają wspólny punkt sprzężony w G', podobnie punkta G'' i G przekątniéj czworoboku ABYCXD mają punkt sprzężony w tym samym punkcie G' a zatem punkt G' jest sprzężonym punktu G linii XY a tém samém $G'Y = \frac{GY.\ XY}{GX - GY}$ Sposób ten używa się z korzyścią do mierzenia odległości między punktami leżącemi z przeciwnych stron góry, miasta i t. d.

2°. Obieram punkt C, (fig. 118) z którego końce linii AB są widzialne, mierzę długość linii AC i CB niedostępnych z jednego tylko końca (169), i odległość między punktami *a* i *b* leżącemi w ½, ⅓, ¼ téj i t. p. odległości od punktu C t. j. między punktami dzielącemi te linie na części proporcyonalne, linia *ab* jest równoległą do AB przeto AB: *ab*=AC: *a*C, a ztąd AB=*ab*. AC: *a*C—sposób ten jest dogodny przy mierzeniu linii będącéj w znacznéj odległości, lub gdy do niéj nie możemy się zbliżyć.

3°. Jeżeli z punktu D leżącego w kierunku linii AB są widzialne oba jéj końce, wtedy od długości linii DB z jednego końca niedostępnej, odejmujemy długość linii DA także z jednego końca niedostępnéj.

ROZDZIAŁ III.

Połączenia okręgu koła z liniami prostemi.

§ 1. Ogólne własności.

172. Okrąg koła może się przecinać lub nie przecinać z linią prostą, w pierwszym przypadku linia zowie się sieczną, w drugim oddzielną. Sieczna AB (fig. 119) przecina okrąg koła C w dwóch tylko punktach, gdyż promienie poprowadzone do punktów D, E.. wspólnych dla siecznéj i okręgu są sobie równe, a dwa