dzieli się na dwie części,—w pierwszéj uważają się własności co do kształtu, w drugiéj zaś co do wielkości.

Część Isza.

Księgi Iszéj Planimetryi i Księgi IIéj Solidometryi.

Jeometryczne wielkości naprzód uważać należy same w sobie czyli oddzielnie, i dla tego: Rozdział I.

a) w Planimetryi, linie: 1) prosta, 2) łamana jako złożona z części linii prostéj, i 3) okrąg koła.

b) w Solidometryi: powierzchnie 1) płaska, 2) walcowa, 3) ostrokręgowa i 4) kulista.

Poznawszy własności każdéj z jeometrycznych wielkości, następnie możemy poznać własności ich połączeń, i dla tego: Rozdział IIgi.

a) w Planimetryi: połączenia linii prostych.

Linie leżące na płaszczyźnie, a nawet jakiekolwiek linie mogą mieć: 1) jeden lub kilka punktów wspólnych, i wtedy zowią się: *a*) *przecinającemi się*, *b*) *stycznemi*, gdy punkta przecięcia się zlewają się w jeden, tak że w ogólności jedna linia leży zewnątrz drugiéj. Linie styczne są tylko szczególnym przypadkiem przecinających, przejście zaś od przecinania się do styczności przedstawia się nam w ten sposób: jeśli przecinająca obraca się około jednego z punktów wspólnych, to inne stopniowo zbliżają się do tego punktu i gdy jeden zleje się z nim, wtedy przecinająca staje się styczną. Gdyby linia nie przestałaby się obracać, to punkt przecięcia się oddalałby się od punktu obrotu; i znowu linia byłaby przecinającą. Dla tego to przejście z przecinania się do przecinania się zowie się stycznością; 2) mogą nie mieć punktów wspólnych i wtedy zowią się: *a*) *oddzielnemi*, *b*) *równoległemi*, gdy punkta jednéj linii są jednakowo oddalone od linii drugiéj.

Uważając linie leżące na płaszczyznie, zwracamy uwagę na zależność od nich ograniczonéj płaszczyzny. I tak: jeśli dwie proste przechodzą przez jeden punkt, to one z dwóch tylko stron ograniczają płaszczyznę, zowiącą się *kątem*. Przeto kąt pod względem kształtu, jest nachyleniem się dwóch prostych przecinających się, pod względem zaś wielkości jest częścią nieograniczonéj płaszczyzny. Prosta spotykając drugą linię prostą czyni z nią równe lub też nierówne kąty przyległe—i podług tego zowie się prostopadłą lub pochyłą.—Położenie linii zależy od kątów, tak, że położenie dwóch prostych na płaszczyznie, oznacza się za pomocą kątów, które one czynią z przecinającą je linią prostą czyli *poprzeczną*. Proste nieprzecinające się są względem siebie równoległe; przecinające się zaś tworzą z poprzeczną trzy odcinki, i trzy kąty zawarte między temi odcinkami; te trzy odcinki równie jak i płaszczyzna zawarta między temi odcinkami zowią się trójkątem, który ma tę własność, że trzy z jego części wyznaczają wielkość lub stosunek trzech innych. Z połączenia przecinających się z równoległemi wynika proporcyonalność linii, z któréj wynika własność ogólnego połączenia prostych.

b) w Solidometryi połączenie płaszczyzny *A*) z liniami prostemi, *B*) z płaszczyznami nieograniczającemi lub téż ograniczającemi przestrzeń.

Płaszczyzna jest miejscem linii prostych, przeto własności połączenia prostéj z płaszczyzną, zasadzają się na własnościach połączania linii prostych, tak, że warunki prostopadłości, pochyłości, równoległości prostéj do płaszczyzny, sprowadzają się do warunków odpowiednich połączeń linii prostych. Linia pochyła czyni nieograniczoną liczbę kątów z prostemi tworzącemi płaszczyznę, przechodzącemi przez spodek pochyłéj, z których najmniejszy wyraża najmniejsze, a tém samém prawdziwe nachylenie się linii do płaszczyzny.

Dwie płaszczyzny, podobnie jak linie mogą być przecinające lub nieprzecinające się, prostopadle, pochyłe, albo równoległe. Wzajemne ich położenie zależy od przestrzeni zawartéj między dwoma przecinającemi się płaszczyznami, zwanéj *kątem dwuściennym*, kąt ten pod względem kształtu jest nachyleniem się płaszczyzn, pod względem wielkości jest częścią nieograniczonéj przestrzeni. Stosunek zaś tych kątów równa się stosunkowi odpowiednich im kątów płaskich.

Przestrzeń ograniczona więcéj aniżeli dwoma płaszczyznami przechodzącemi przez jeden punkt, zowie się *kątem bryłowym*. Uważając ten kąt pod względem kształtu, wyrażamy zależność między jego kątami płaskiemi i dwuściennemi; pod względem zaś wielkości, wyrażamy jaką częścią całéj nieograniczonéj przestrzeni jest przestrzeń tego kąta.

Nakoniec uważając połączenie płaszczyzn ograniczających przestrzeń, wskazujemy własności powierzchni ograniczających bryły, a tém samém i bryły, szczególniéj co do ich tworzenia się, symetryi, foremności.

Poznawszy własności połączenia linii prostych i płaszczyzn, pozostaje wskazać te własności dla połączeń linii prostéj z krzywemi t. j. okręgami kół tudzież płaszczyzny z powierzchniami krzywemi, i dla tego: Rozdział III

a) w Planimetryi: połączenie linii prostych i wielokątów z okręgami;

b) w Solidometryi: połączenie płaszczyzny z powierzchniami walca, ostrokręgu i kuli, przeto własności trójkąta i wielokąta kulistego.

Poczém pozostaje tylko uważać własności połączeń linii krzywych z krzywemi, powierzchni krzywych z takiemiż powierzchniami, i dla tego Rozd. IV.

a) w Planimetryi, połączenie okręgów w których zwracamy uwagę na punkta sprzężone z linią środków (centre de similitude directe et inverse), koła potęgowe (cercles radicaux), oś i środek tych kół (axe et centre radical), obopólne okręgi (cercles reciproques) i t. p.

b) w Solidometryi: połączenie krzywych powierzchni.

Część II.

Księgi Iszéj Planimetryi i Księgi IIéj Solidometryi.

Własności płaszczyzn ograniczonych liniami i własności brył ograniczonych powierzchniami.

Powierzchnie równie jak bryły, mogą mieć jednakowy kształt i wielkość, albo jednakowy kształt przy różnéj wielkości t. j. przy jednakowym kształcie stosunek linii łączących odpowiednie punkta, może być równy lub nierówny jedności;—podobnie figury uważane co do wielkości bez względu na kształt, mogą być równe lub w pewnym stosunku;—i nakoniec przy równéj wielkości ograniczeń, mogą mieć wielkość jednakową lub niejednakową,—a ztąd tak Planimetrya jako téż i Solidometrya (Stereometrya) rozdziela się na:

Rozd. I. *Równość.*

Rozd. II. *Podobieństwo.*

Rozd. III. *Równoważność i stosunek wielkości.*

Rozd. IV. *Izoperymetryczność* czyli *równoobwodowość.*

XVII. Techniczne wyrazy używane w Jeometryi, poznamy w ciągu téj nauki, gdyż tam poznamy tylko właściwe ich znaczenie, tu zaś wyłożymy ściągające się do samego jéj wykładu:

1° *Pewnik* jest prawda przyjęta za oczywistą, bez żadnego dowodzenia.

2° *Twierdzenie* jest to prawda stająca się widoczną za pomocą dowodzenia.

Twierdzenie składa się z dwóch części: z *założenia*, tego co przypuszczamy, albo co wiemy że tak jest; i z *właściwego twierdzenia*, czyli tego, czego na mocy założenia dowieść mamy. Tak, że każde twierdzenie da się wyrazić w ten sposób: Zakładam że..., a mam dowieść że ...—

Odróżniamy w twierdzeniach następujące przypadki:

a) *Twierdzeniem odwrotném* nazywać będziemy takie, w którém za złożenie służy to, co dowiedliśmy w poprzedzającém twierdzeniu, a dowieść mamy tego co było założeniem.

b) *Twierdzenie główne*, w którem dowodzimy głównéj własności figury, a przeto takiéj, na której opiera się dowodzenie prawie wszystkich innych własności tego kształtu.

3° Często dowodząc twierdzenia dowodzimy zarazem i innéj własności téj figury, która dla proszczenia twierdzenia nie była w niém umieszczona. Te to prawdy po twierdzeniu umieszczają się jako *Wnioski*.

Wnioskiem zowie się także prawda, chociaż nie dowiedziona dowodzeniem twierdzenia, jednak bezpośrednio z niego wypływająca.

4° *Uwaga* jest jakoby wnioskiem wynikającym z porównania kilku twierdzeń.

5° *Zagadnienie* ma za przedmiot oznaczenie, zazwyczaj co do formy, kilku ilości nieznanych, za pomocą rysunku, uskutecznionego na zasadzie prawd jeometrycznych.

6° *Zadanie* ma za przedmiot oznaczenie, zazwyczaj co do wielkości, jednéj lub kilku ilości nieznanych, za pomocą rachunku; ono więc należy tak do Jeometryi, jak i do Arytmetyki lub Algebry.

XVIII. Dowodzenia są pięciorakie:

1° *Zbiorowe* (syntetyczne) idą od znanych do nieznanych, to jest: biorą w pomoc dowiedzione poprzednio prawdy, tak, że w końcu z nich wypadnie co miało być dowiedzionem. Zasadą tego dowodzenia jest to: że z prawd wyprowadzone następstwa same są prawdami.

Dowodzenia tego rodzaju przyprowadzają drogą rozumową do prawdy, a tym sposobem najbardziéj ułatwiają tak przyswojenie dowodzenia, jako téż i saméj prawdy, czyniąc ją dalszym rozwojem już znanych— są więc najwłaściwsze w elementarnych naukach.

2° *Rozbiorowe* (analityczne) postępują od nieznanych do znanych, to jest: uważają że to, czego dowieść potrzeba jest rzeczywiście prawdą. Zasadą tego dowodzenia jest to: że tylko prawda do prawd prowadzi. Dowodzenia tego rodzaju, wyprowadzają prawdę w sposób oddzielny od poprzedzających, i dla tego unikać ich potrzeba w elementarnéj matematyce.

3° Przez przypuszczenie (apagogiczne) przypuszczamy że to czego mamy dowieść jest nieprawdą, i na zasadzie prawd poprzedzających wywodzą się następstwa, niezgodne z prawdami już dowiedzionemi; a zatém okazujemy, że przypuszczenie nasze było fałszywe, a tém samém to co twierdziliśmy jest prawdą. Zasadą tego dowodzenia jest to: że z fałszu prawda nie może być wyprowadzoną.

4° *Przez prawdopodobieństwo* (indukcyą). Z kilku przypadków, w których twierdzenie pokazuje się prawdziwém, wnosi się o wszystkich. Dowodzenia tego rodzaju, właśnie dla tego że tylko są prawdopodobne, nie mają matematycznéj ścisłości. Nabierają jéj dopiero, kiedy tak się urządzi dowodzenie, iż w każdym dowiedzionym pojedynczym przypadku, leży zaraz dowód następnego przypadku.

5° *Przez przybliżenie* (aproximacyą), kiedy różnica między dwoma wielkościami jest mniejsza od dowolnie wziętéj ilości, wtedy one są równe. Dowodzenia te miejsca mieć niepowinny w elementarnéj matematyce, gdyż zasada ich: że ilości różniące się o ilosć nieskończenie małą, t. j. mniejszą od wszelkiéj dowolnéj ilości są sobie równe, dowodzi się dopiero w wyższéj matematyce.

XIX. Pewniki.

1) Każda ilość jest sobie saméj równą.

2) Część mniejsza jest od całości, a całość większa od swojéj części.

3) Całość jest równa wszystkim częściom swoim.

4) Dwie ilości równe trzeciéj są między sobą równe.

5) Jeżeli jedna ilość nie jest równa drugiéj, wtedy jest od niéj większą albo mniejszą.

6) Jeśli ilość ani jest mniejsza, ani większa od drugiéj, wtedy musi jéj być równa; kiedy linia prosta nie może paść ani pod, ani nad linią, to padnie na tą linię.

7) Kiedy jedna ilość jest mniejsza od drugiéj, a ta mniejsza od trzeciéj, to pierwsza tém bardziej mniejsza jest od trzeciéj; a tém samém jeśli ilość trzecia jest większa od drugiéj,a druga większa od pierwszéj, to tém bardziéj trzecia jest większa od pierwszej.

8) Jeśli dwie ilości są sobie równe, a jedna z nich mniejsza lub większa od trzeciéj to i druga jest taką samą względem trzeciéj.

9) Dodając ilości większe do siebie i ilości mniejsze do siebie, summa pierwszych będzie większa od summy drugich.

10) Gdy do ilości równych dodamy lub odejmiemy ilości równe, wypadki będą równe.

11) Do dwóch ilości równych dodawszy ilości nierówne, ta summa będzię większa, gdzieśmy więcéj dodali, a ta mniejsza gdzieśmy mniéj dodali — tudzież od dwóch ilości równych, odjąwszy części nierówne, tam zostanie więcéj gdzieśmy mniéj odjęli, a tam mniéj gdzieśmy więcéj odjęli.

XX. Znaki i skrócenia.

36. Znak ≺ pokazuje że ilość przy wierzchołku napisana jest mniejsza od napisanéj przy rozwartości.

Znak = pokazuje, że ilości z obu stron tego znaku napisane są równe co do wielkości.

37. *Tw.*	znaczy	Twierdzenie.
Tw. od.	„	Twierdzenie odwrotne.
Tw. gł.	„	Twierdzenie główne.
Wn.	„	Wniosek.
Uw.	„	Uwaga.
Zg.	„	Zagadnienie.
Zd.	„	Zadanie.
Zt.	„	Zastososowanie.

38. Rysunek jeometryczny powinien wskazywać sposób kreślenia i dla tego:

1° Linie dane proste lub krzywe prowadzą się cienko ciągnione.

2° Linie otrzymane z zadania prowadzą się grubiéj ciągnione.

3° Linije służące do rysunku, do dowodzenia, prowadzą się cienko; przerywane, przerwy i linijki ciągnione powinny byc równe. Gdy ich jest wiele, linie jednego od drugiego gatunku odróżniają stawiając w przerwach jeden, dwa i t. d. punktów.

4° Linie dane w rysunku, lecz zakryte innemi częściami rysunku, lub części ich zakryte oznaczają się punktami.

KSIĘGA I. PLANIMETRYA.

CZĘŚĆ I.

Linie uważane na płaszczyznie i ich połączenia.

ROZDZIAŁ I.

Linie uważane oddzielnie.

§ 1. Linia prosta.

1. *Linia prosta jest miejscem wszystkich punktów bez przerwy po sobie idących, jednakowo położonych względem dwóch jakichkolwiek jéj punktów.*

Jeśliby punkt C (fig. 1.) uważany od punktu A ku B, znajdował się z lewéj strony tych punktów, to uważany od punktu B ku A, leżałby z prawéj strony, a tém samem nie na prostéj, któréj punktami są A i B. W ogólności jeśli punkt C leży z boku punktów A, B, to uważany od punktu A leży z jednéj strony, uważany zaś od punktu B leży z przeciwnéj strony, a zatém nie jednakowo jest położony względem punktów A i B.

Jeśli punkt C uważany z dołu leży nad punktami A i B, to uważany z góry leży pod temi punktami, a tém samém nie leży na linii prostéj, któréj punktami są punkta A i B, gdyż nie jest jednako położony względem tych punktów. Wogólności, jeśli uważając z jakiejkolwiek strony punkta A i B, punkt C leży z boku tych punktów, to uważany z przeciwnéj strony, leży z przeciwnego boku tych punktów, przeto nie jednakowo względem nich jest położony, i niejest punktem prostéj, któréj punktami są punkta A i B.

2. *Tw. Jedno tylko jest jednakowe położenie punktów, względem dwóch innych jakichkolwiek.*

Uważając od punktu A do B, punkt C o tyle leży z lewéj strony tych punktów, o ile uważając od B do A leży z prawéj ich strony; gdyż lewa strona w odwrotném uważaniu staje się prawą. Jeśli więc punkt C posuwać się będzie ku prawéj stronie, to oddalenie jego w pierwszém uważaniu w lewą, a w drugiém w prawą stronę zmniejszać się będzie jednakowo, tak, że stanie się u C′ jednakowo oddalonym w obie strony, czyli niebędzie oddalony w żadną stronę; a przeto położenie jego będzie jednakowém względem punktów A i B. Jeśliby ten punkt posuwał się jeszcze daléj w prawo, to położenie jego u C″, względem punktów A i B stałoby się niejednakowem, gdyż uważając od A do B punkt C″, byłby z prawéj zaś od B do punktów A i B z lewéj strony, a zatém w jedném tylko położeniu punkt, może leżeć jednakowo względem dwóch punktów. To samo ściąga się i do innych położeń uważanych z góry i z dołu, ku prawéj i ku lewéj stronie punktów A i B. A że każdy punkt w jedném tylko położeniu leży jednakowo względem punktów A i B, przeto *jeden* jest tylko szereg punktów po sobie leżących, jednakowo położonych względem tych punktów.

Uw. Linia prosta pod względem kształtu jest miejscem punktów bez przerwy po sobie idących jednakowo położonych względem dwóch swoich punktów, pod tym więc względem wyraża *kierunek* w jakim się punkt posuwa, i względem niéj uważamy zboczenia tego punktu.

3. *Tw. Linia prosta jest najkrótszą odległością między dwoma punktami na niéj wziętemi.* (fig. **1**).

Punkta prostéj przechodzącéj przez punkta A i B nie zbaczają w żadną stronę; przeto punkt A posuwając się po linii AB do punktu B nie zboczy w żadną stronę. Droga przez ten punkt przebieżona jest najkrótszą ze wszystkich, jakieby punkt A przebiegł, dla dojścia do punktu B, bo na każdéj innéj robiłby zboczenia dla tego, że tylko jeden jest szereg punktów, bez przerwy po sobie idących i nie mających żadnych zboczeń — przeto linia prosta jest najkrótszą odległością dwóch punktów.

Wn. 1. *Zmierzyć odległość między dwoma punktami, jest to zmierzyć linią prostą zawartą między temi punktami*, gdyż ona jako najkrótsza, jest prawdziwą odległością.

Wn. 2. Jeśli między dwoma punktami poprowadzimy linię prostą i inne jakiekolwiek linie, to prosta jest najkrótszą ze wszystkich tych linii — i to jest główna jéj własność pod względem wielkości.

4. *Tw. Linie proste* CB i FE *są sobie równe* czyli *jedna położona nad drugą, przystaje do niéj we wszystkich punktach.* (fig. 2).

Przenoszę prostą CB na FE, tak aby jakikolwiek punkt A prostéj CB padł na punkt D prostéj FE. Obracam linię CB będącą w tém nowem położeniu około punktu D, póki jakikolwiek jéj punkt B nie padnie na punkt E linii FE. Wtedy linie DB i DE, będą miały dwa punkta E i D wspólne, przeto wszystkie punkta prostéj DB padną na prostą DE, gdyż punkta obu tych linii są jednakowo położone między punktami D i E, a jeden tylko może być szereg takich punktów bez przerwy po sobie idących (2).

Wn. 1. Ponieważ linie proste przystają do siebie, przeto mają wielkość i kształt jednakowy, czyli są sobie równe i podobne.

Wn. 2. Dwie proste mające końce wspólne przystają do siebie, czyli przez dwa punkta jedna tylko linia prosta przechodzić może. Dwie więc proste, mogą mieć tylko jeden punkt wspólny, t. j. przecinają się w jednym punkcie, bo mając dwa lub więcéj punktów wspólnych zlewają się w jedną linię prostą.

Wn. 3 Przez jeden punkt dowolna liczba prostych przechodzić może, gdyż przez ten punkt i jakikolwiek punkt drugi może poprowadzić linię prostą; przez trzy punkta dowolnie wzięte A, C, B, niemożna poprowadzić prostéj; (fig. 3), gdyż poprowadziwszy przez każde dwa z tych punktów, proste AB, AC, CB, to: linia AB jest prosta, przeto linia ACB nie może być prostą, gdyż przez dwa punkta A i B niemożna poprowadzić dwóch prostych (Wn. 2). — Dla podobnéj przyczyny przez cztery i t. d. punktów dowolnie wziętych niemoże przechodzić linia prosta. Przeto przez dwa tylko punkta zawsze poprowadzić można prostą i tylko jedną, a zatém *dwa punkta oznaczają położenie linii prostéj*, i dla tego ona się czyta tylko dwoma punktami.

Wn. 4. *Końce dwóch prostych* AB i CD *jednakowo długich przystają do siebie* (fig. 4). Przenoszę prostą AB na CD tak aby punkt A padł na C i linia AB przystała do linii CD (4). Mam dowieść że punkt B padnie na punkt D; gdyby punkt B niepadł na punkt D, to padłby albo przed punktem D w punkcie F, albo za punktem D w E. W pierwszym przypadku linia AB równałaby się linii CF, — a że z założenia równa się linii CD, przeto dwie ilości CD i CF równe trzeciéj AB, byłyby sobierówne, co być niemoże; bo całość CD równałaby się jednéj ze swych części CF; a tém samém punkt B nie może paść przed punktem D. Dla podobnéj przyczyny punkt B nie może paść za punktem D, przeto pada na ten punkt. — W przenoszeniu więc figur *punkt pada na punkt dla równości linii prostych.*

Un. Jeżeli na prostéj nieograniczonéj obierzemy punkt, to części téj prostéj rachowane od tego punktu w jedną i drugą stronę zowią się odcinkami linii, które są także nieograniczone. Jeśli na jednéj z tych części AB, wezmiemy punkt B, to także utworzą się dwa odcinki (fig. 2) jeden BA ograniczony, a drugi BF nieograniczony. Każda więc linia ograniczona, jest tylko odcinkiem linii nieograniczonéj. Jeśli na linii ograniczonej CD (fig. 4) wezmiemy punkt F, to oba odcinki FC i FD są ograniczone i zawsze zawierają się między punktem wziętym F a końcami linii C i D, tak że jeśli punkt E wzięlibyśmy na przedłużeniu prostéj ograniczonéj CD, to odcinki przez ten punkt utworzone są EC i ED. — *Środkiem* prostéj ograniczonéj (fig. 1) AB zowie się taki punkt któren dzieli ją na dwa równe odcinki ĆA i ĆB; przeto linia prosta AB może mieć tylko jeden środek, gdyż jeśliby oprócz środka Ć, miała jeszcze środek D to: ĆA=ĆB i DA=DB a że ĆA > DA to ĆB > DB co być nie może.

5. *Zg. Nakreślić linię prostą, zapomocą liniału.* Uskuteczniamy to na téj zasadzie, że linie proste przystają do siebie (4), a tém samém że linia przystająca do prostéj, sama jest prostą. Uważając więc krawędź liniału za prostą, staramy się nakreślić taką linię, która przystawałaby do krawędzi. Dla tego, przykładamy do krawędzi ołówek, grafion i t. p. ostrze jego uważane za punkt kładziemy na płaszczyznie, na któréj leży liniał. Posuwając więc ołówek przy krawędzi, punkt ten utworzy szereg punktów bez przerwy po sobie idących, które składają linią przystającą do krawędzi, a zatém prostą.

Ztąd widzimy, że nakreślona linia tém bardziéj zbliża się do wyobrażalnéj, im bardziéj ostrze którém kreślimy zbliża się do punktu, czyli im jest delikatniejsze. Jeśli przy kreśleniu zmienialiśmy położenie ołówka, to ostrze jego robiło zboczenia w jedną lub drugą stronę, i nakreślona linia nie jest prostą. Dla uniknienia tego błędu przykładamy ołówek przy całéj płaszczyznie kantu, i prowadzimy go od początku do końca tą samą stroną.

6. Zg. *Przez punkt dany poprowadzić prostą.* Ostrze narzędzia ustawiamy na punkcie danym, i postępujemy jak w N. 5.

7. Zg. *Przez dwa punkta dane poprowadzić prostą* Przykładamy tak liniał przy tych punktach, aby ostrze ołówka przylegającego do całéj krawędzi, z jednéj strony padało (fig. 4) na punkt A. z drugiéj zaś na B, i postępujemy jak w N 5.

8. Zg. *Znaleść linią równą dwóm lub ilukolwiek liniom danym* (fig. 5).

Kreślę linię nieograniczoną AB, biorę w cyrkiel linię m i przenoszę ją od punktu A do C, to linia m równa się linii AC, jako mająca z nią jednakową długość (4 wn 4); biorę w cyrkiel linię n i odcinam ją od C do D, to linia n równa się linii AD. Przeto linia AD równa się linii m więcéj n gdyż $AD=AC+CD=m+n$.

9. Zg. *Znaleść prostą równą różnicy dwóch linii.* (fig. 5).

Niech AD będzie większa od *n*, odcinam *n* na AD od punktu D do C, to prosta AC będzie szukaną; gdyż AC=AD—CD=AD—*n*.

10. *Zg. Daną linię prostą pomnożyć przez liczbę całą.*

Na prostéj nieograniczonéj AB, odcinam w jednym ciągu, linię daną *n* tyle razy, ile jest jedności w liczbie danéj 3. To każda z linii AC, CD i DE równa się linii danéj *n*. Prosta AE=AC+CD+DE=n+n+n=3n.

11. *Zg. Daną jednością* CD *zmierzyć linię prostą* AB (fig. 7).

Przenoszę jedność CD na prostą AB od A do E, od E do F i od F do G, i pozostaje jeszcze linia GB mniejsza od CD. Gdyby przy przenoszeniu nie zostało reszty, to linia AC równałaby się trzem liniom CD czyli trzem jednościom; lecz że postała reszta GB, przeto trzeba się dowiedzieć jaką częścią jedności CD jest ta reszta, gdyż linia AB oprócz trzech jedności AE, EF, FG, zawiera jeszcze linią GB mniejszą od jedności, czyli linią będącą pewną częścią jedności CD.

Aby się dowiedzieć jaką częścią jedności jest GB, potrzeba wiedzieć ile razy ona zawiera się w jedności, jeśli zawiera się dwa razy jest połową, jeśli trzy razy, jest trzecią częścią i t. p. W ogólności zaś ta część wyraża się ułamkiem mającym za licznik jedność a za mianownik liczbę pokazującą ile razy w CD zawiera się GB t. j. $\dfrac{1.}{\dfrac{CD}{GB}}$ Przenoszę więc GB na

CD, mieści się raz tylko od C do H, i pozostaje reszta HD mniejsza od GB; przeto $\frac{CD}{GB} = 1 + \cfrac{1}{\frac{GB}{HD}}$ a tem samém

$$\frac{AB}{CD} = 3 + \cfrac{1}{\frac{CD}{GB}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{GB}{HD}}}$$

Dla dowiedzenia się ile razy w GB zawiera się HD, przenoszę HD na GB, i zawiera się raz jeden, pozostaje zaś JB, przeto $\frac{GB}{HD} = 1 + \cfrac{1}{\frac{HD}{JB}}$ zatem $\frac{AB}{CD} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{HD}{IB}}}}$. Dla dowiedzenia się ile razy w HD zawiera się IB, przenoszę IB na HD i zawiera się w niéj 4 razy bez reszty, przeto $\frac{HD}{IB} = 4$, zaś $\frac{AB}{CD} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = 3^5/_9$.

Ztąd widzimy, że dla zmierzenia linii przenosi się jedność na tę linię, reszta pozostała na jedność i tak następnie, każdą resztę na tę linię, od któréj przenoszenia wypadła. Liczba zaś wyrażająca wielkość linii czyli stosunek jéj do linii przyjętéj za jedność, składa się z tylu jedności, ile razy linia przyjęta za jedność mieściła się w mierzonéj linii, i ułamkowi ciągłemu, wyrażającemu jaką częścią jedności jest reszta pozostała od jéj przeniesienia. W ułamku tym mianowniki ogniw wyrażają kolejno ile razy każda zreszt zawiera się w prostéj od przenoszenia któréj wypadła ta reszta. Tak że jeśli jedność w mierzonéj linii zawiera się 5 razy, pozostała reszta w jedności 3 razy, reszta ztąd pozostała w poprzedzającéj reszcie zawiera się 4 razy i t. d, to wielkość mierzonéj linii czyli stosunek jéj do jedności równa się $5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}$ i t. d.

12. *Uw.* 1. *Jeśli przenosząc* tyle razy ile się daje *linią mniejszą* CD (fig. 7) *na większą* AB, *resztę* GB *na linię przenoszoną* CD *i tak następnie* HD na GB, JB na HD, *otrzymujemy resztę* IB *mieszczącą się zupełnie w linii* HD, *od któréj przenoszenia wypadła, to ta reszta* IB a) *jest wspólną miarą dwóch linii danych* AB i CD czyli przeniesiona na te linie zawiera się w nich bez reszty b) żadna linia od niéj większa nie zawiera się w dawnych liniach bez reszty, czyli ta reszta GB *jest największą wspólną miarą* linii AB i CD. I tak:

a). IB zawiera się bez reszty w liniach CD i AB, gdyż IB zawiera się bez reszty w HD, przeto zawiera się także w HD + IB = GB; zawiera się więc także w GB + HD = CD, a tém samém w CD + CD + CD + GB = AB. Znalazłszy wspólną miarę IB mierzymy nią tak linię CD, jako też i AB, co możemy uskutecznić bez przenoszenia wspólnéj miary IB na obiedwie linie, bo HD $=$ 4 IB;—GB $=$ HD$+$IB $=$ 4 IB$+$IB$=$ 5 IB;—CD $=$ GB$+$HD $=$ 5 IB$+$4 IB$=$9 IB;—AB$=$ 3 CD$+$GB $=$ 3$\times$9IB$+$5 IB $=$ 32 IB; zatem $\frac{AB}{CD} =$

$$\frac{32\ IB}{9\ IB} = \frac{32}{9} = 3^5/_9 \text{ jak wyżéj}$$

b) Prosta IB jest największą wspólną miarą linii CD i AB. Gdyż jeśliby linia p q $>$ IB, zawierała się bez reszty wobudwu tych liniach, to zawierając się bez reszty w CD, zawierałaby się także w równych jéj liniach AE, EF, FG czyli w AG, a że zawiera się bez reszty i w AB$=$AG$+$GB przeto zawiera się i w GB; zawierając się w CH $=$ GB i w CD $=$ CH$+$HD zawiera się i w HD, zawierając się w GI$=$HD i w GB $=$ GI$+$IB, musi się zawierać i w IB. Prosta p q z założenia większa od IB, nie może się wniéj zawierać a tém samem i w liniach AB i CD.

13. *Uw.* 2. Jeżeli mierząc linię prostą, linią przyjętą za jedność, czyli szukając stosunku dwóch linii, otrzymujemy resztę zawierającą się zupełnie w linii od przenoszenia któréj wypadła, to ta reszta mieści się zupełnie w mierzonéj linii i jedności, przeto otrzymamy zupełną jéj wielkość, czyli stosunek tych dwóch linii—i dla tego linia mierzona zowie się *wymierną*, że jednością można zmierzyć, lub *współmierną* z jednością: że mają wspólną miarę zawierającą się zupełnie w tych liniach. Jeśli zaś nieotrzymujemy takiéj reszty,

wtedy niemożemy ze wszelką ścisłością zmierzyć linii, gdyż niemożemy otrzymać ułamku ciągłego skończonego, wyrażającego, jaką częścią jedności jest reszta pozostała od jéj przeniesienia (11), a tem samem nie możemy liczebnie wyrazić stosunku mierzonéj linii do jedności. Linia mierzona wtedy zowie się *niewymierną*, czyli linia mierzona i przyjęta za jedność są *niewspółmierne*, gdyż wspólną ich miarą jest reszta, któréj niemożemy otrzymać. Lecz wielkość linii mierzonéj, czyli stosunek jéj do jedności wyrazi się tylko przez przybliżenie, i ta wartość może być większą lub mniejszą od rzeczywistéj a zarazem do niéj zbliżoną podług upodobania, co wynika z własności ułamków ciągłych.

14. *Uw.* 3. To cośmy powiedzieli o wynajdywaniu stosunku liczebnego dwóch prostych (11 i 12), ściąga się do wszystkich ilości jeometrycznych, mających tę własność, że przeniesione przystają do siebie; gdyż prawda ta wyłącznie wypływa z téj własności linii prostych. *Stosunki* zaś *wielkości jeometrycznych są sobie równe gdy liczebne ich wyrażenia są jednakowe*; bez względu na to czy wyrażają się liczbą całą, z ułamkiem zwyczajnym, ciągłym skończonym lub nieskończonym, w zwyczajnéj formie lub w formie niewymiernego arytmetycznego wyrażenia. Przeto *aby dowieść że stosunek dwóch wielkości jeometrycznych, równa się stosunkowi dwóch innych*, wyrażamy obadwa te stosunki liczbą, zazwyczaj w kształcie ułamku ciągłego — i *potrzeba dowieść że ułamki cią-*

gle będą jednakowe, czyli że reszty odpowiednie będą się zawierały jednakową liczbę razy w ilościach od przenoszenia których wypadły.

Na téj zasadzie dowodzi się równość wszelkich stosunków jeometrycznych, i chociaż ona wypada czasem z własności figur, jednak własność ta figur była wyprowadzona z równości stosunków dowiedzionych na powyższéj zasadzie: t. j. że wyrażają się jednakową liczbą.

15. *Zt.* Na téj zasadzie że linie proste są sobie równe czyli przystają do siebie, opiera się sposób sprawdzenia liniału. Prowadzimy przy sprawdzonéj krawędzi na płaszczyznie, linię, przykładamy tę krawędź z drugiéj strony poprowadzonéj linii, jeśli ona w tém nowem położeniu przykrywa poprowadzoną linię, to linia ta i krawędź sprawdzana, są prostemi — w przeciwnym razie nie są proste, gdyż nie mają własności przystawania (4).

Rzemieślnicy sprawdzają liniał innym sposobem. Umieściwszy liniał tak, aby oko było na przedłużeniu krawędzi, patrzą na tą krawędź; jeśli ona wydaje się punktem, to liniał jest prosty, gdyż punkta jego niezbaczają w żadną stronę (1). Ten sposób jako zależący od wprawy oka jest tylko przybliżony.

16. *Zt.* Ogrodnicy, mularze, brukarze prowadzą prostą za pomocą sznuru przytwierdzonego do tyk; lecz sznur powinien być jaknajbardziéj wyprężony, gdyż prosta jest najkrótszą odległością dwóch pun-

któw, zaś naciągając sznur zmniejszamy jego długość między tykami.

Cieśle do prowadzenia długich prostych używają sznura natartego kredą, okrą (farbą żółtą) lub sadzą rozpuszczoną w oliwie. Taki sznur przykłada się dwoma punktami do końców mającéj się prowadzić prostéj, naciąga się i przytrzymuje się mocno; po środku sznur podejmuje się prosto nad płaszczyzną i puszcza się go. Ślad utworzony na płaszczyznie tém bardziéj zbliża się do prostéj, im bardziéj sznur był naciągnięty. Jeśli pł. jest poziomą (jak powierzchnia spokojnie stojącéj wody) to sznur podnosi się w kierunku pionowym (nici na końcu z ciężarkiem) i wtedy ślad ten jest prawie linią prostą. Sposób takowy opiera się na téj saméj zasadzie co i poprzedzający.

17. *Zt.* W zdejmowaniu planów, podziale gruntu np. na morgi, oznaczają się tylko końce prostych. Dla oznaczenia innych punktów tych prostych, między dwoma tykami stojącemi na końcach pionowo, ustawiamy inne, tak, aby patrząc przez jedną z końcowych na drugą, środkowe zasłaniały drugą, czyli zakrywały ją; wtedy bowiem tyki nie zbaczają w żadną stronę, a ich punkta są na prostéj(1).

18. *Uw.* Płaszczyzna jest miejscem prostych przecinających się z dwoma zbiegającemi się prostemi. Ztąd wynika:

1º *Prosta mająca z płaszczyzną dwa punkta wspólne cała leży na téj płaszczyznie*, gdyż te dwa punkta można wziąść za punkta, przez które przechodzą dwie zbiegające się.

2º *Płaszczyzny przechodzące przez trzy punkta są tylko jedną płaszczyzną*, czyli przystają do siebie we wszystkich punktach; gdyż połączywszy jeden z tych punktów C, z dwoma innemi A i B, każda z płaszczyzn przez nie przechodzących jest miejscem prostych przecinających linie zbiegające się AC i CB; proste więc przecinające są wspólnemi dla tych płaszczyzn, a zatém te płaszczyzny, są tylko jedną płaszczyzną.

3º *Dwie jakiekolwiek proste przechodzące przez jeden punkt, tudzież proste przecinające się zniemi leżą na jednéj płaszczyznie.*

§ II. Linia łamana.

19. Linia łamana jest to linia złożona z części linii prostych, z których każde dwie po sobie idące mają końce wspólne. Jeżeli końcowe proste mają końce wspólne, to łamana zowie się *zamkniętą*, w przeciwnym razie *otwartą*, i wtedy końce prostych skrajnych, zowią się końcami linii łamanéj.

Linia łamana zowie się *wypukłą*, gdy z prostą nieograniczoną może mieć tylko dwa punkta wspólne, w przeciwnym razie zowie się *zygzakowatą*. Każda z tych linii czyta się głoskami postawionemi u końców linij prostych, zwanych bokami linij łamanych.

Własności odnoszące się do kształtu linii łamanych, należą do połączeń prostych, tu tylko wskażemy główną własność odnoszącą się co do ich wielkości.

20. *Tw. Z linii łamanych wypukłych, mających końce wspólne, obejmująca jest większa od objętéj.*

1° Jeśli łamane składają się z dwóch prostych (fig. 8) Przedłużam AD do przecięcia się z BC, zatem AB + BE > AD + DE (3) tudzież DE + EC > DC, do ilości nierównych dodawszy ilości nierówne, większe do większych zaś mniéjsze do mniéjszych, summa pierwszych będzie większa od summy drugich, przeto AB + BE + DE + EC > AD + DE + DC; odejmując z obu stron DE, będzie AB + BE + EC > AD + DC czyli AB + BC > AD + DC.

2° Jakiekolwiek łamane (fig. 9). Przedłużam AE i EF do spotkania się z łamaną obéjmującą w punktach G i H. Uważam że AB + BG > AE + EG (3), EG + GC + CH > EF + FH, i FH + HD > FD. Summa ilości większych jest większa od summy ilości mniéjszych, przeto AB + BG + EG + GC + CH + FH + HD > AE + EG + EF + FH + FD. Odéjmując z obu stron EG i FH, otrzymujemy AB + BG + GC + CH + HD > AE + EF + FD czyli linia łamana ABCD > AEFD.

Wn. Linia łamana wypukła zamknięta obejmująca jest większa od objętéj (fig. 11).

Przedłużam GF i HI do przecięcia się z obejmującą w punktach L i M. Podług Tw. LB+BC+CD+DM > LF+FG+GH+HI+IM, podobnie IM+ME+EA+AL+LF > IK+KF, więc LB+BC+CD+DM+IM+ME+EA+AL+LF > LF+FG+GH+HI+IM+IK+KF. Odejmując po obu stronach FL i IM, będzie LB+BC+CD+DM+ME+AE+AL > FG+GH+HI+IK+KF czyli łamana AKCDE > FGHIK.

21. *Tw. Summa dwóch prostych przechodzących przez jeden punkt, jest większa od dwóch linii łączących ich końce* (fig. 10) AB+CD > AD+CB.

Uważam że AE+ED > AD (3); EB+EC > BC. Dodaję odpowiednie wyrazy i będzie AE+EB+DE+EC > AD+BC czyli AB+DC > AD+BC.

§ III. Okrąg koła.

22. *Okrąg koła jest to linia krzywa zamknięta, któréj punkta leżą na jednéj płaszczyznie, w jednakowéj odległości od punktu téj płaszczyzny zwanego środkiem koła.*

Proste, łączące środek koła z punktami okręgu, zowią się *promieniami*. Odległości środka koła od punktów okręgu są sobie równe, i mierzą się promieniami (3 *Wn.* 1), przeto promienie koła są sobie równe (4 wn. 4.)

Okrąg koła czyta się albo jedną głoską będącą w jego środku, albo trzema, leżącemi na samym okręgu, dla odróżnienia od prostéj, która się oznacza dwoma punktami. Późniéj zobaczymy, że jak dwa punkta oznaczają prostą, tak trzy oznaczają zupełnie okrąg koła.

Każda część okręgu koła zowie się *łukiem*. Łuk czyta się trzema głoskami z których dwie leżą na jego końcach.

Prosta łącząca dwa końce łuku zowie się *cięciwą*. Cięciwa przechodząca przez środek koła zowie się *średnicą*, a łuki przez nią podparte: *półokręgami*.

Średnica przechodzi przez środek koła, zatém każdy z niéj dwóch odcinków (4 Uw.), zawartych między środkiem koła a jéj końcami, jest promieniem, przeto średnica równa się dwom promieniom, a tém samém średnice w kole są sobie równe. Przytem średnica jest największa ze wszystkich cięciw, gdyż każda cięciwa jest mniejsza od dwóch promieni poprowadzonych do jéj końców (3 Uw. 2), średnica zaś równa się summie dwóch promieni.

23. *Tw. Jeśli punkt leży wewnątrz okręgu koła, na okręgu, lub zewnątrz niego; to odległość tego punktu od środka, jest mniejsza, równa lub większa od promienia tego koła* (fig. 12.)

1° Prowadzę przez punkt B promień AC, prosta AB mierząca odległość punktu B od środka koła, jest mniejsza od promienia jako część od swojéj całości (Praw. oczy).

2° Jeśli punkt D leży na okręgu koła, to prosta AD, mierząca odległość tego punktu od środka koła jest promieniem.

3° Punkt E leży zewnątrz koła, łączę prostą EA ze środkiem koła, która przetnie ten okrąg w punkcie D, gdyż okrąg koła jest linią zamkniętą. Prosta EA mierząca odległość punktu E od środka koła, jest większa od promienia AD, jako całość od swojéj części.

24. *Tw. od. Jeśli odległość punktu od środka koła jest mniejsza, równa lub większa od promienia, wtedy ten punkt znajduje się wewnątrz, na okręgu lub zewnątrz okręgu koła* (fig. 12).

1° Punkt B nie może się znajdować ani na okręgu koła, ani zewnątrz niego, gdyż w pierwszym razie odległość tego punktu od środka równałaby się promieniowi, w drugim zaś razie byłaby większa od promienia, coby się sprzeciwiało założeniu; a zatém punkt B leży wewnątrz okręgu koła.

Podobnym sposobem można dowieść i dwóch innych przypadków.

Wn. Okrąg koła jest miejscem wszystkich punktów jednakowo oddalonych od środka gdyż każdy punkt jednakowo oddalony od środka koła leży na okręgu koła.

25. *Tw. gł. Okręgi kół równych promieni są sobie równe, czyli przystają do siebie we wszystkich punktach.* (fig. 13.)

Przenoszę okrąg koła F na A, tak aby środek F padł na środek A, i płaszczyzna pierwszego okręgu przystała do płaszczyny drugiego okręgu (18). Punkta okręgu F znajdują się w odległości promienia od środka A, gdyż z założenia promienie tych kół są sobie równe, przeto znajdują się na okręgu koła A (24. Przytém wszystkie punkta okręgu F przystają do okręgu A, gdyż jeśliby którykolwiek punkt okręgu F nie przystał do takiegoż punktu okręgu A, wtedy okrąg A, niezawierałby tego punktu, pomimo że on jest w odległości promienia od jego środka.

26. *Tw. Dwa okręgi kół przecinające się, mają tylko dwa punkta wspólne; jeden nad prostą a drugi pod prostą łączącą ich środki.* (fig. 14.)

Okrąg koła C przecinając okrąg koła A w punkcie B wchodzi wewnątrz tego okręgu: lecz że oba okręgi są liniami zamkniętemi, przeto okrąg koła C wychodząc z okręgu A przecina go także w punkcie E. Punkt B jest punktem wejścia, zaś E wyjścia okręgu koła C z okręgu A, przeto ani nad punktem B ani pod punktem E okręgi te nie mają wspólnego punktu, potrzeba więc tylko dowieść że niema punktu wspólnego tym dwóm okręgom między punktami B i E. Jeśli punkt D leżący nad linią środków AC byłby wspólny dla tych okręgów, to poprowadziwszy promienie do punktów B i D, $AB=AD$ i $CB=CD$ zatem i $AB+BC=AD+DC$ co być niemoże (20), przeto punkt wspólny nie może znajdować się nad linią AC. Niemoże się także znajdować na linii środków, gdyż $AC=AB+BC$ (3); przeto oprócz punktu B niema innego punktu wspólnego tym dwóm okręgom nad linią AC. Dla podobnéj przyczyny jeden tylko punkt E jest wspólny dla tych okręgów pod linią AC.

Wn. Jeden tylko jest punkt nad prostą w danéj odległości od jéj końców. Wszystkie punkta leżące w danéj odległości (fig. 14) AB od końca A prostéj AC, leżą na okręgu koła opisanego z punktu A promieniem AB, (21 Wn.); wszystkie punkta leżące w oddaleniu CB od końca C leżą na okręgu koła zakreślonego z punktu C, a zatem punkt leżący nad linią AC; oddalony od A na AB a od C na CB leży na wspólném przecięciu się tych okręgów. Lecz okręgi te przecinają się w jednym tylko punkcie nad linią AC, przeto jeden jest tylko punkt nad linią w danem oddaleniu od końców téj linii.

27. *Tw. W kole albo w kołach równych, cięciwy równe podpierają łuki równe.* (fig. 13)

Zakładam, że okrąg koła F równy okręgowi koła A, i cięciwa KM=GI. *Twierdzę*, że łuk KLM=GHI. Posuwam okrąg F na płaszczyznie rysunku, tak aby punkt K padł na G, prosta KM na prostą GI, zatém punkt M padnie na punkt I, dla równości tych dwóch linii (4 Wn. 4); a że promienie tych kół są sobie równe (25), przeto punkt F równie jak i A znajdują się od końca G i I w odległości promienia, są więc jednym tylko punktem (26 Wn.), czyli punkt F padł na punkt A; a zatém okrąg koła F przystał do okręgu koła A, i łuk KLM do łuku GHI; że zaś te łuki mają końce wspólne, zatém przystają do siebie we wszystkich punktach czyli są sobie równe; to samo ściąga się i do łuków KOM i GCI.

Jeśliby cięciwy KM i PQ równe, należały do jednego koła, wtedy w okręgu A równym okręgowi F, poprowadziwszy cięciwę GI=KM a tém samém i cięciwie PQ, łuki KLM i POQ, jako równe podług twierdzenia łukowi GHI, będą sobie równe.

Uw. Na téj własności łuków okręgów równych, możemy na okręgu, odciąć łuk równy łukowi danemu.

28. *Tw. od. W kole albo w kołach równych, łuki równe mają cięciwy równe.* (fig. 13).

Zak. Okrąg F= okręgowi A i łuk KLM = łukowi GHI. Tw: Cięciwa KM = cięciwie GI.

Przenoszę okrąg F na A, tak aby ich środki i płaszczyzny przystały do siebie, zatém i okrąg F przystanie do okręgu A. Obracam okrąg F na płaszczyznie tak, aby punkt K padł na punkt G, łuk KLM poszedł po łuku GHI, to punkt M padnie na punkt I dla równości tych dwóch łuków a tem samém cięciwa KM przystaje do cięciwy GI i jest jéj równa.

Jeśli łuki równe KLM i POQ należą do jednego koła, wtedy poprodziwszy cięciwę GI, równą cięciwie PQ, łuk POQ będzie równy łukowi GHI, a tém samem i łukowi KLM, przeto podług poprzedzającego, cięciwa KM = GI, zaś GI = PQ z odcięcia, więc i KM = PQ.

Wn. Średnica RS dzieli okrąg koła F na dwie równe części, gdyż poprowadziwszy w okręgu A równym okręgowi F średnicę NT, ponieważ cięciwa

RS = NT, więc łuk RLS = NGT, bo po przeniesieniu średnic i środki ich kół przystają do siebie (4 Uw.). Dla podobnéj przyczyny i łuk ROS = NGT, przeto łuk RLS = ROS (Praw. oczy), i dla tego one zowią się półokręgami.

Wn. 2. *Cięciwa* K M *dzieli koło na dwie nierówne części*, czyli łuk KLM < KOM, pierwszy bowiem jest mniejszy, a drugi większy od półokręgu koła.

29. *Zg. Nakreślić okrąg koła.*

Jeżeli na płaszczyznie weźmiemy jeden punkt, zaś drugi na téj płasczyznie posuwać będziemy tak, aby odległość tego punktu od wziętego na płaszczyznie niezmieniała się, to on opisze okrąg koła (22).

Narzędzie więc służące do kreślenia okręgu koła, powinno mieć dwa punkta, którym nadana odległość niezmieniałaby się, i gdy jeden zostaje w spoczynku; żeby drugi mógł swobodnie posuwać się po płaszczyznie. Punkta te są to ostrza, przeto im będą delikatniejsze, tembardziéj zbliżą się do punktu, a nakreślony okrąg koła do wyobrażalnego.

Błędy w kreśleniu okręgu z dwóch przyczyn pochodzić mogą: 1) jeśli punkt około którego obracamy, zmieni swoje położenie; gdyż wtedy punkta krzywéj opisanéj będą równo oddalone nie od jednego punktu; 2) Gdy w czasie obrotu zmieni się odległość punktów; gdyż wtedy punkta krzywéj nie będą równo oddalone od punktu mającego być środkiem.

Narzędzia do kreślenia koła są różne, podług tego jak wielki ma być okrąg koła. I tak: 1. Cerkiel metalowy lub drewniany. 2. liniał ze szpicem ruchomym i nieruchomym (fig. 15). Miejsce liniału zastąpić może tyka lub sznur.

30. *Zg. Na okręgu danym, odciąć łuk, równy łukowi danemu* (fig. 13).

Stawiam jedną nóżkę cerkla w jednym końcu G łuku danego GHI, zaś drugą w I, drugim końcu tego łuku i przenoszę otwartość cerkla na okrąg dany jednakowego promienia F, od K do M. Łuk KLM = GHI (27). Jeśli punkt K byłby dany na okręgu F, od którego odciąć potrzeba łuk GHI, wtedy przenosząc roztwartość cerkla, jedną nóżkę stawiamy w tym punkcie K.

31. *Zg. Obrotem płaszczyzny nakreślić okrąg koła.*

Płaszczyzny przystają do siebie we wszystkich punktach (18), przeto jeśli położymy jedną płaszczyznę na drugiéj, i na niéj będziemy obracali około punktu stałego, to każdy punkt obracanéj płaszczyzny, posuwać się będzie w jednakowéj odległości od punktu obrotu i opisze okrąg koła (22).

Jeśli obracając piérwszą płaszczyznę około punktu stałego, na drugiéj płaszczyznie w pewnéj odległości postawimy ostrze stałe, to wszystkie punkta pierwszéj płaszczyzny, oddalone jednakowo z ostrzem od punktu obrotu, przystawać będą do końca ostrza (4 Wn. 4), a że punkta płaszczyzny jednakowo oddalone od jednego punktu składają okrąg koła, przeto ostrze zakreśli na płaszczyznie okrąg koła.

32. *Zg. Stosunek dwóch łuków równych promieni wyrazić liczbą.* (fig. 17)

Łuk mniejszy CD Przeniesiony na większy AB, zawiera się w nim dwa razy od A do F i pozostaje $FB < CD$. Przenoszę FB na CD zawiera się w nim 4 razy od C do K, i pozostaje $KD < FB$; przenoszę KD na FB, zawiera się trzy razy od F do N i pozostaje $NB < KD$.—Jeżeli narzędzie nie pozwala przenosić NB na KD, albo ścisłość rachunku tego niewymaga, opuszczamy NB i uważamy że KD mieściło się bez reszty 3 razy.

$$\text{Przeto } \frac{AB}{CD} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{3}} = 2 + \tfrac{3}{13} \quad (11)$$

$$\text{błąd jest mniejszy od } \frac{1}{4 \times 13} = \frac{1}{52} \ (*)$$

Jeśli łuk CD przyjmujemy za jedność do mierzenia łuku AB to $2\frac{3}{13}$ wyraża ile razy jedność zawiera się w AB czyli wielkość tego łuku w danéj jedności.

(*) Własność ułamków ciągłych jest ta, że biorąc piérwszą przybliżoną wartość czyli piérwsze ogniwo $\frac{1}{4}$, drugą przybliżoną wartość t. j. dwa pierwsze ogniwa $\frac{1}{4\frac{1}{3}} = \frac{3}{13}$ i t. d. popełniamy błąd mniejszy od jedności podzielonéj przez iloczyn mianownika téj wartości przez mianownik wartości poprzedzającéj $\frac{1}{13 \times 4} = \frac{1}{52}$

33. *Uw. Podział okręgu koła dawny i nowy; mierzenie łuku.*

Podług dawnego podziału, bardziéj używanego, cały okrąg koła jest podzielany na 360 części równych zwanych *stopniami*, stopień dzieli się na 60 części równych zwanych *minutami*, minuta na 60 części równych zwanych *sekundami* i t. d., i podziału tego zazwyczaj używamy tylko do sekund. Łuk wyraża się przez liczbę zawierających się w nim stopni minut i sekund. Stopnie oznaczają się zerem napisaném z prawéj strony nad liczbą, minuty jedną kréską, sekundy dwoma kréskami, tercye trzema kréskami i t. d. np. $25^0\,3'\,46''$

Podług nowego podziału okrąg koła dzieli się na 400 części równych zwanych *stopniami*, stopień na 10 części równych zwanych minutami i t. d. tak że stopień jest 400 częścią okręgu, minuta dziesiątą częścią stopnia, sekunda dziesiątą częścią minuty, czyli setną stopnia, tercya dziesiątą częścią sekundy czyli tysiączną częścią stopnia i t. d. Jeśli więc łuk podług tego podziału wyrazimy liczbą, stopnie będą liczbą całą, minuty zaś sekundy i tercye dziesiętnemi, setnemi i tysiącznemi częściami całości, tak że łuk oznaczy się w stopniach liczbą całą z ułamkiem dziesiętnym.

Dogodność piérwszego podziału jest ta, że więcéj części okręgu koła wyraża się liczbą całą stopni, aniżeli podług drugiego, to samo ściąga się do liczby części stopni wyrażających się zupełnie w minutach, części minut wyrażających się w sekundach i t. d.

gdyż $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ zaś $400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$. Podług piérwszego więc podziału 3cie, 6te, 9te, i t. d. części wyrażają się całą liczbą stopni, zaś podług drugiego nie, gdyż nie wchodzi czynnik 3; tak że podług piérwszego 23 części okręgu wyraża się całą liczbą stopni t. j. połowa, trzecia część, czwarta, piąta i t. d. podług drugiego tylko 14cie. Co do części stopnia $60 = 2.\ 2.\ 3.\ 5$; $10 = 2.\ 5$. t. j. podług dawnego, ośm części stopnia wyraża się całą liczbą minut, a podług nowego trzy tylko części.

Do mierzenia prostych, mogliśmy wziąć za jedność jakąkolwiek linję prostą, gdyż wszystkie te linje przystają do siebie; okręgi zaś przystają tylko wtenczas, gdy mają promienie równe; przeto łuk można tylko mierzyć łukiem tego samego promienia, czyli łukiem tego samego okręgu koła. Zmierzyć łuk jestto dowiedzićć się, jaką on jest częścią swego okręgu koła. Ogólny sposób (32), chociaż ścisły, jest zadługi, i dla tego łuki się mierzą stopniami, minutami i t. d. Podług dawnego podziału za jedność do mierzenia łuku bierzemy 360tą część jego okręgu koła. Jeślibyśmy przenieśli ten stopień na łuk mierzony, tyle razy, ile się on w nim zawiera, czyli dopóki reszta nie będzie mniejsza od stopnia, jeżeli wtenczas stopień zawiera się 5 razy, to łuk zawiera w sobie 5 stopni i jeszcze łuk mniejszy od stopnia. Dla dowiedzenia się jaką częścią stopnia jest ten łuk, zamiast przenosić go na stopień (11), przenosimy na tę resztę 60tą część stopnia; jeśli ona zawiera się

3 razy, to łuk mierzony zawiera 5. stopni, 3 minuty i jeszcze łuk mniejszy od minuty. Dla poznania jaką część minuty łuk ten stanowi, przenosimy nań 60tą część minuty, na ten łuk dopóki reszta nie będzie mniejsza od téj części; jeśli sekunda zawiera się 4 razy, to łuk mierzony zawiera $5^0 3' 4''$ i jeszcze łuk mniejszy od sekundy, i t. d. Przeto: gdy poprzestaniemy na samych stopniach, opuścimy łuk mniejszy od stopnia, i wartość wynaleziona będzie mniejszą od rzeczywistéj o mniéj niżeli stopień czyli $^1/_{360}$ okręgu; jeżeli poprzestaniemy na stopniach i minutach, to opuścimy łuk mniejszy od minuty, i wartość jego będzie mniéjszą od rzeczywistéj o mniéj, aniżeli minuta, czyli $\frac{1}{60}$ stopnia $= \frac{1}{60} \times \frac{1}{360} = \frac{1}{360 \times 60} = \frac{1}{21600}$ okręgu; poprzestając na sekundach, dla podobnéj przyczyny, popełniamy błąd mniejszy od $\frac{1}{21600 \times 60} = \frac{1}{1296000}$ okręgu i t. d.

Łuk więc $5^0 3' 4'' = \frac{5}{360} + \frac{3}{21600} + \frac{4}{1296000}$ okręgu, jest summą ułamków, których jednostki są jedna od drugiéj o 60 razy mniejsze; biorąc zaś pierwszy, dwa pierwsze, trzy pierwsze ułamki, otrzymujemy pierwszą, drugą i trzecią przybliżoną wartość łuku i błąd jest coraz o 60 razy mniéjszy.

Mierząc tym sposobem łuk, przykładany do niego łuk jemu równy podzielony na stopnie, lub na stopnie i minuty, albo na stopnie minuty i sekundy, i łuk ten zowie się przenośnikiem, a ile stopni, minut i sekund zawiera łuk przenośnika równy mierzonemu, tyle stopni, minut i sekund zawiera łuk mierzony.

34 *Uw. Przenośnik.* (fig. 16)
Narzędzie to zazwyczaj miedziane składa się z półkola wydrążonego, i liniału EG będącego jego średnicą, wycięcie zaś D oznacza jéj środek; wyjęcia A i C służą do dokładnego przykładania wewnętrznego brzegu liniału do średnicy mierzonego koła. Brzeg okręgu dzieli się na stopnie, które często bywają podwójne, aby zarazem łuk można było czytać z prawéj i z lewéj strony. Chcąc zmierzyć łuk z wszelką dokładnością, kładziemy wewnętrzną stronę liniału przy średnicy mierzonego łuku, przechodzącéj przez jeden z jego końców, środek D przykładamy do środka koła, którego łuk jest częścią. Liczba stopni odpowiadająca drugiemu końcowi, wtenczas gdy pierwszemu odpowiada zero, jest liczbą stopni mierzonego łuku.

35 *Zt.* Na téj zasadzie że średnice w kole są sobie równe (22), sprawdzają się wydrążenia kołowe. Wkłada się największy liniał jaki może wejść w wydrążenie, a który jest jego średnicą, jako największy ze wszystkich cięciw, probuje się czy w każdym kierunku jednakowo przylega do ścian wydrążenia w tém tylko razie, ponieważ średnie są sobie równe, wyprężenie jest okręgiem

36 *Zt.* Koła równych promieni, mające środki wspólne i leżące na jednéj płaszczyznie, przystają od

siebie w każdem położeniu (25); przeto jeśli narysowawszy koło na tekturze, wytniemy je z tektury ostrém i cienkiém narzędziem, to otrzymamy dwa okręgi równe, zewnętrzny, wyciętego koła, i wewnętrzny, otworu pozostałego w tekturze. Krążek wycięty będzie się mógł obracać w otworze, przylegając do niego we wszystkich punktach. Ta własność wyłącznie należąca do okręgu koła, ma liczne zastosowania w rzemiosłach. Na téj zasadzie robią się krany, zatyczki w karafkach i t. p., których dokładność zależy od równości promieni kół wypukłych i wydrążeń.

W odlewaniu ciał okrągłych, wydrążenie modelu powinno mieć promień zupełnie równy promieniowi żądanego odlewu; aby zaś nie było nierówności, przy odlewie w piasku, wybiera się piasek bardzo miałki; jeżeli zaś model wyrabia się w ziemi, to wydrążenie wylewa się płynną gliną. Przed wyjęciem odlewu obracamy go w jedną i drugą stronę dla zrównania jego powierzchni.

Jeżeli na płaszczyznie mamy nakreślić łuk równy łukowi modelu danego w naturalnéj wielkości, wtedy jeśli środek łuku niemieści się na danéj płaszczyznie wycinamy ten łuk z modelu z jego cięciwą, kreślimy na płaszczyznie prostą mającą podpierać łuk żądany, przykładamy cięciwę łuku wyciętego z modelu do téj prostéj, i przy brzegu zewnętrznym kreślimy linię która będzie łukiem żądanym (35 i 27). Ten sposób jest zwykle używany przy wyrabianiu ornamentów.

Garncarze i tokarze kreślą koła zapomocą obrotu płaszczyzny.