ROZDZIAŁ III.

Równoważność i stosunek figur.

§ 1. Równoważność.

274. *Tw. gł. Linia łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoważne* (fig. 233).

Ze środka podstawy prowadzę dwie linie równoległe do boków, które połowią te boki (138); trójkąty DCE i DAF są równe, bo mają po trzy boki równe: DC=AD z założenia, EC=BE=FD, i DE=FB =AF; dla podobnéj przyczyny i trójkąt DEB=DFB.

Wn. 1. Dzieląc podstawę AB (fig. 234) trójkąta ACB na trzy równe części i prowadząc linie z wierzchołka kąta przeciwległego do środka tych podziałów, podzielimy trójkąt na trzy trójkąty równoważne, gdyż podług twierdzenia środkowy jest równoważny z każdym ze skrajnych. Jeżeli z punktów D i E podziału, poprowadzimy linię równoległe do boków tych trójkątów, to one podzielą je na części równoważne i tak: trójk. AKD=DHE gdyż w trójkącie ACE linia CD poprowadzona do środka podstawy AE i linie DK, DH są równoległe do boków CE i CA; trójkąt DNE= AFD bo mają po boku i po dwa kąty przy nim leżące równe, przeto i trójkąty HNE i KFD jako ich różnice są sobie równe; — podobnie trójk. DHC= DKC i DGN=GLC, jako mające kąty przy G równe (48), kąt GDN=GCL (78. Wn. 9.) i bok GD=GC, bo równoległe CB, GE, dzielące DB na części równe, dzielą i DC na części równe, a przeto i ich różnice,—t. j. czworokąty KLGD i NHCG są sobie równe. Podobnie dowiedlibyśmy że: DNE=EMB, DNG=EMJ, ENH=HPC i CGNH=HPJE t. j. *odpowiednie części trójkątów są sobie równe.* Gdybyśmy podstawy podzielili na ilekolwiek części równych, podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że trójkąty równoważne powstałe z połączenia wierzchołka z punktami podziałów podstawy, przez linie równoległe do boków tych trójkątów dzielą się na części odpowiednie równe.

Wn. 2. *Trójkąty mające podstawy i wysokości równe są równoważne* (fig. 235, I, II i III). Przykładam podstawy AB trójkątów tak, aby przystawały,—to wtedy albo *a*) dwa boki AC i AD są na jednéj linii prostéj (fig. 235, I.), albo nie na jednéj linii prostéj; w drugim przypadku albo *b*) obie wysokości padają na podstawę (fig. 235, II.), albo *c*) jedna na podstawę, zaś druga na jéj przedłużenie (fig. 235, III).

a) Wysokość DF=CE to i DA=AC (139. Wn. 5) i trójk. CBD przez BA jest podzielony na części równoważne (174). *b*) Dla równości prostych CG=GD trój. CAG z GAD i CBG z BGD są równoważne a tém samém i ich summy CAG+CBG z GAD+BGD są równoważne. *c*) Podobnie trój. CAG z GAD i CBG z BGD są równoważne, przeto i ich różnice CAB z BAD są równoważne.

Wn. 3. *I nawzajem, dwa trójkąty mające podstawy i powierzchnie równe, mają i wysokości równe* (fig. 236).

Zestawiwszy trójkąty na wspólnéj podstawie AB tak, aby wierzchołki ich C i D były z jednéj strony téj linii, jeśliby wysokości ich nie były równe, linia DC nie byłaby równoległą do AB; poprowadziwszy więc linię CE równoległą do AB do spotkania się z bokiem AD lub jego przedłużeniem w punkcie E, trójkąt AEB jako równoważny trójkątowi ACB byłby równoważny i trójkątowi ADB, co być nie może.

Wn. 4. *Równoległoboki mające podstawy i wysokości równe są równoważne*, gdyż podzieliwszy każdy z nich przekątnią na dwa trójkąty mające z niémi podstawy i wysokości równe, trójkąty jednego są równoważne trójkątom drugiego.

Wn. 5. Dzieląc podstawę równoległoboku na ilekolwiek części równych, i przez punkta podziału prowadząc linie równoległe do boku leżącego przy podstawie, równoległobok podzieli się na równoległoboki równe, jako mające podstawy i wysokości równe.

Wn. 6. Trójkąt mający z równoległobokiem równą podstawę i wysokość jest jego połową, gdyż równoległobok dzieli się na dwa trójkąty mające z danym podstawę i wysokość równą.

Wn. 7. Trójkąt jest równoważny równoległobokowi mającemu z nim równą podstawę a wysokość dwa razy mniejszą, lub równą wysokość a podstawę dwa razy mniejszą — gdyż przedłużywszy bok przyległy podstawie równoległoboku tak, aby przedłużenie równało się temu bokowi i dokończywszy tego nowego równoległoboku, ten mieć będzie wysokość równą wysokości trójkąta (138), przeto jest dwa razy większy od trójkąta i od równoległoboku danego, a zatém trójkąt jest równoważny równoległobokowi danemu; podobnie jeśli podstawa jest dwa razy mniejsza, przedlużam ją tak, aby przedłużenie równało się samėj podstawie, prowadzę równoległą do boku przyległego podstawie i dokończam równoległoboku, a ten równoległobok jest dwa razy większy tak od trójkąta jak od danego równoległoboku.

275. *Tw. Z punktu przekątniėj równoległoboku poprowadziwszy linie równoległe do boków, otrzymamy cztery równoległoboki, z których dwa nie mające téj przekątniéj* zwane dopełnieniami równołeglołoboku, *są równoważne* (fig. 237).

Trójkąty JED i DEG równie jak i trójkąty BFE i BHE są sobie równe, przeto JED+BFE równe DEG +BHE; jeśli więc od trójkątów równych DAB i BCD odejmiemy te ilości równe, reszty pozostaną równe AE=EC.

Wn. 1. Jeśli równoległobok jest kwadratem, dopełnienia są prostokątami (fig. 238), a niedopełnienia JF i HG kwadratami, gdyż przekątnia AC połowi ich kąty.

276. *Tw. Kwadrat z summy dwóch linii równa się summie kwadratów z tych linii, powiększonéj dwoma prostokątami z tychże linii* (fig. 238).

Na linii AD będącéj summą dwóch linii AJ+JD wystawiam kwadrat BD, z punktu J wyprowadzam prostopadłą JH do przecięcia się z przekątnią AC w E i przez E, linię FG równoległą do AD. Figura

FJ jest kwadratem z linii AJ, HG kwadratem z linii HC=JD (175. Wn. 1), zaś prostokąty FH i JG mają podstawy FE i EJ równe linii AJ, jako boki kwadratu FJ; wysokości EG i HE równe, jako boki kwadratu HG i równe drugiéj linii JD, przeto: $AD^2=AJ^2+JD^2+2.AJ.JD$.

Wn. Jeśli obie linie są sobie równe, to prostokąt mający jedną z nich za podstawę a drugą za wysokość, jest kwadratem, zatém kwadrat z summy tych linii równa się czterem kwadratom wystawionym na jednéj z tychże linii i nawzajem.

277. *Tw. Kwadrat z różnicy dwóch linii, równa się summie kwadratów z tych linii, zmniejszonéj dwoma prostokątami z tychże linii* (fig. 238).

Linia AJ jest różnicą linii AD i JD, kwadrat zaś FJ otrzymamy, odejmując od kwadratu BD prostokąt BG i GJ; dodając do odjemnika i odjemnéj kwadrat HG, mamy: kwadrat FJ równy summie kwadratów BD i HG, zmniejszonéj prostokątem BG i prostokątem JG z kwadratem HG; lecz prostokąt JG z kwadratem HG składają prostokąt HD, mający z prostokątem BG podstawy BC i CD równe AD jako boki kwadratu BD; zaś wysokości GC i CH równe sobie i linii JD, — przeto kwadrat FJ równa się summie kwadratów BD i HG zmniejszonéj dwoma prostokątami mającemi za podstawę AD a za wysokość JD; co przez skrócenie wyrazi się $AJ^2=AD^2+JD^2-2\,AD.JD$.

278. *Tw. Prostokąt* AH *mający za podstawę summę dwóch linii* AC + CB *a za wysokość różnicę tychże*

linii $AC-CB=AD$, *równa się różnicy kwadratów z tych linii* (fig. 239).

Na linii AC kreślę kwadrat AF, odcinam $CD=CB$ i z punktu D wyprowadzam prostopadłę DK; prostokąt $AH=AL+LB$, lecz $LB=EJ$ gdyż $AC=AE$ z wykreślenia, $AD=AG$ z założenia, przeto różnice ich GE i DC są sobie równe t. j. $DC=CB=GE$,—wysokość $BH=AD$ z wykreślenia zaś $AD=GJ$ (115, 6) to i $BH=GJ$; a zatém prostokąt $AH=AL+EJ$ czyli równy kwadratowi AF mniéj kwadratem KL, czyli prostokąt mający za podstawę $(AC+CB)$, a za wysokość $(AC-CB)=AC^2-CB^2$.

279. *Tw. Kwadrat z przeciwprostokątniéj równa się summie kwadratów z ramion kąta prostego* (Pythagoras) (fig. 240).

Bok kwadratu BH z ramieniem kąta prostego AB są na jednéj linii prostéj, gdyż kąty HBC i CBA jako proste są równe II (47), podobnie JB i BC są jedną linią prostą. Poprowadziwszy linie KC i BD trójk. KAC i BAD są sobie równe, jako mające po dwa boki i po kącie zawartym równym (253. Wn. 2: $KA=AB$, $AC=AD$ jako boki kwadratów zaś kąty są kątami prostemi powiększonemi kątem BAC; lecz że pierwszy trójkąt jest połową kwadratu JA zaś drugi połową prostokąta AF, bo mają z niémi podstawy KA i AD wspólne i wierzchołki na liniach JC i FB równoległych do podstaw,—przeto kwadrat AJ jest równoważny prostokątowi AF. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że kwadrat HC jest równoważny prostokątowi CF, a zatém summa kwadratów JA i HC równoważna summie prostokątów AF i FC czyli kwadratowi AE z przekątniéj AC.

Wn. Kwadrat z ramienia kąta prostego równa się kwadratowi z przeciwprostokątniéj zmniejszonemu kwadratem z drugiego ramienia kąta prostego.

Uw. Wn. ten od 141 Wn. 1 różni się tém, że tam kwadrat z liczby wyrażającéj przeciwprostokątnią równał się podobnym kwadratom z ramion, tu zaś powierzchnia figury zwanéj kwadratem równa się powierzchni dwóch takich figur wystawionych na ramionach kąta prostego. Jak późniéj zobaczymy jedna z tych prawd pociąga za sobą drugą.

280. *Tw. Kwadrat z przeciwrozwartokątniéj równa się summie kwadratów z ramion kąta rozwartego zwiększonéj podwójnym prostokątem jednego z nich przez odległość prostopadłéj nań spuszczonéj od wierzchołka kąta rozwartego* (fig. 241).

Poprowadziwszy prostopadłą na przedłużony bok AC mamy $AB^2 = BD^2 + AD^2$, lecz $BD^2 = BC^2 - CD^2$ (279. Wn.), zaś $AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + CD^2 + 2.AC.CD$ (276), to $AB^2 = BC^2 - CD^2 + AC^2 + CD^2 + 2.AC.CD = BC^2 + AC^2 + 2.AC.CD$.

281. *Tw. Kwadrat z przeciwostrokątniéj równa się summie kwadratów z ramion kąta ostrego, zmniejszonéj podwójnym prostokątem jednego z nich, przez odległość prostopadłéj nań spuszczonéj od wierzchołka kąta ostrego* (fig. 242).

Poprowadziwszy prostopadłą BD, $AB^2=BD^2+AD^2$ lecz $BD^2=BC^2-DC^2$ zaś $AD^2=(AC-DC)^2=AD^2+DC^2-2.AD.DC$ (277), przeto postawiwszy za BD^2 i AD^2 ich wartości, będzie: $AB^2=BC^2-DC^2+AD^2+DC^2-2.AD.DC=BC^2+AD^2-2.AD.DC$.

282. *Tw. W trójkącie, summa kwadratów z dwóch boków równa się podwójnemu kwadratowi z połowiącej bok trzeci, zwiększonemu podwójnym kwadratem z połowy boku trzeciego* (fig. 243).

Poprowadziwszy prostopadłę BE, połowiąca BD jest pochyłą, a zatém kąt BDA jest rozwarty zaś BDC ostry; przeto: $AB^2=BD^2+AD^2+2\,AD.DE$ i $BC^2=BD^2+DC^2-2\,DC.DE$ lecz że $AD=DC$ z założenia, przeto: $AB^2+BC^2=2BD^2+2AD^2$.

283. *Tw. W równoległoboku, kwadraty z dwóch przekątnich, są równe kwadratom z czterech boków* (fig. 244).

Przekątnie w równoległoboku połowią się (115, *c*) przeto: $AB^2+BC^2=2AE^2+2BE^2$ tudzież $CD^2+DA^2=2\,AE^2+2\,ED^2$ przeto $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=4\,AE^2+4\,BE^2=AC^2+BD^2$ (276. Wn.)

284. *Tw. Czworokąt jest połową równoległoboku z jego przekątnich i kąta między niemi zawartego* (fig. 250).

Przez wierzchołki A, B, C, D prowadzę linie równoległe do przekątnich a równoległobok HF ma boki przy sobie leżące EH i HG równe przekątnim (115, *b*) i kąt między nimi zawarty H równy kątowi BJC zawartemu pomiędzy przekątniemi. Czworokąt ABCD jest połową równoległoboku HF, gdyż równoległobok przez przekątnie czworokąta dzieli się na cztery równoległoboki, czworokąt zaś na cztery trójkąty będące połowami tych równoległoboków: AJD połową HJ, DJC połową GJ i t. d.

Wn. Na téj własności opiera się sposób zamiany czworokąta na równoległobok.

285. *Zg. Zamienić a) trójkąt* ABC *na inny z nim równoważny* 1) *pod danym kątem* (fig. 236); przez wierzchołek C trójkąta ABC prowadzę linię CD równoległą do podstawy i linię AD czyniącą z podstawą AB kąt dany, to trójkąt ADB jest równoważny danemu i ma bok AD czyniący z podstawą kąt dany; 2) *pod danym bokiem*, poprowadziwszy równoległą CD przecinam ją z punktu A promieniem równym bokowi danemu w punkcie D, to trójkąt ADB jest żądany, gdyż ma bok dany AD; bok więc dany nie może być mniejszy od wysokości danego trójkąta.

b) *trójkąt na równoległobok* (fig. 245); na trójkącie ABC dopełniam równoległoboku AD, który jest dwa razy większy od trójkąta ABC (274. Wn. 6) połowiąc ten równoległobok linią EF równoległą do boku i przechodzącą przez środek podstawy AC, otrzymam równoległobok AF równoważny trójkątowi (274. Wn. 7).

c) *równoległobok* AF *na trójkąt*; przedłużam podstawę AE o nią samą i punkt B z C łączę prostą a trójkąt ABC jest żądany (274. Wn. 7).

d) *równoległobok* AD *na inny* 1) *pod danym kątem* (fig. 245); z końców podstawy AC prowadzę linię AG i CH pod danym kątem do spotkania się z przedłużoną podstawą górną, a równoległobok AH jest żądany (274. Wn. 4); 2) *o danym boku*; z końca A podstawy, promieniem równym danemu bokowi przecinam w G przedłużoną podstawę górną i dokończam równoległoboku GACH, którego bok AG jest dany.

e) *wielokąt* ABCDE *na trójkąt* (fig. 246); jeśli chcemy aby podstawa trójkąta leżała na prostéj AE, zaś wierzchołek był w wierzchołku C, z punktu C prowadzę przekątnie CE, CA, przez punkta D i B równoległe do odpowiednich przekątnich aż do spotkania się w F i G z bokiem przedłużonym mającym z przekątnią koniec wspólny, a trójkąty CFE i CGA równoważne z trójkątami CDE i CBA (274. Wn. 2), w miejsce ich wzięte, dają trójkąt GCF równoważny wielokątowi; takim samym sposobem postępujemy z wielokątami mającemi więcéj boków.

f) *równoległobok na inny pod danym bokiem i kątem* (fig. 247); prowadzę linię AE czyniącą z podstawą AD kąt dany, i odcinam EF równe bokowi danemu,—prowadzę DG równoległą do AF i punkt przecięcia się G z przedłużoną podstawą gorną z punktem F łączę linią,—na trójkącie ACH dokończam równoległoboku AJ a równoległobok GJ dopełnienia z AG jest żądanym, gdyż AC równoważne z AG(274.Wn.4) zaś AG z GJ (275) w którym kąt KGL=EAD danemu i bok GK=EF danemu.

286. *Zg. Znaleźć kwadrat równy a) summie ilukolwiek kwadratów danych lub ilekolwiek razy większy od kwadratu danego* (fig. 248). Na ramionach kąta prostego odcinam od wierzchołka boki kwadratów danych, punkta B i C otrzymane z odcięcia łączę linią prostą BC, a kwadrat z téj linii jest równy summie dwóch kwadratów, których boki odcięliśmy na ramionach kąta prostego (279),—z końca linii BC wyprowadzam prostopadłą CD i odcinam na niéj bok trzeciego kwadratu, a kwadrat wystawiony na linii BD równa się summie trzech kwadratów danych i t. d. Jeśliby kwadraty były równe, to tym sposobem otrzymamy bok kwadratu większego daną liczbę razy od kwadratu danego; *b) różnicy dwóch kwadratów danych*; na ramieniu AC kąta prostego odcinam bok kwadratu mniejszego AC od A do C i z punktu C promieniem równym bokowi kwadratu większego przecinam drugie ramię kąta w punkcie B, a linia AB jest bokiem kwadratu szukanego (279. Wn.)

287. *Zl.* Na własnościach równoważności figur opiera się sposób dzielenia wielokątów na pewną liczbę części równych lub proporcyonalnych, mający zastosowanie przy podziale gruntu stosownie do danych warunków.

§ II. Stosunek powierzchni figur.

288. *Tw. gł. Prostokąty mające równe podstawy mają się do siebie jak wysokości*; t. j. liczba wyraża-

jącą stosunek wielkości prostokątów, równa się liczbie wyrażającej stosunek ich wysokości (fig. 249).

Dowodzenie 1sze. Przenoszę wysokość EG na wysokość AC, zawiera się ona w niéj od A do *b* dwa razy i pozostaje *b*C $<$ EG; przez punkta *a* i *b* prowadzę linie równoległe do podstawy AB, które odetną od prostokąta AD dwa prostokąty B*a* i *cb* równe prostokątowi FG (253. Wn. 4), tak, że pozostały prostokąt *b*D $<$ FG; przeto ile razy wysokość GE zawiera się w wysokości AC, tyle razy i prostokąt FG zawiera się w prostokącie AD. Przenoszę *b*C na wysokość EG, zawiera się w niéj raz jeden od E do *g* i pozostaje G*g* $<$ *b*C.— równoległa przez punkt *g* do podstawy odcina prostokąt F*g* równy prostokątowi *b*D i pozostaje prostokąt *g*H $<$ *b*D; przeto reszta *b*C tyle razy zawiera się w wysokości EG, od przenoszenia któréj wypadła, ile razy reszta *b*D zawiera się w prostokącie FG i t. d. A zatém stosunki wysokości i powierzchni tych prostokątów jednakową wyrażają się liczbą (11) czyli stosunki te są sobie równe.

Dowodzenie 2gie. Prostokąt AD tworzy się posuwaniem podstawy jego AB po liniach równoległych AC i BD, równoległym od pierwotnego swego położenia, lecz że wielkość linii AB zależy tylko od jéj długości, przeto wielkość prostokąta zależy jedynie od długości posuwającéj się linii AB i od dległości na którą ona posunęła się, mierzonéj wspólną prostopadłą AC, tak, że jeśli w dwóch prostokątach A*c* i EH tak posuwające się linie AB i EF jak i odległości A*a* i EG są sobie równe, to wielkości tych prostokątów są także równe. Jeżeli tworzące linie AB i EF w dwoch prostokątach AD i EH są sobie równe a oddalenia AC i EG nierówne, to prostokąt AD tém jest większy od prostokąta EH, im odległość AC jest większa od odległości EG, gdyż na ile razy większą odległość posunie się linia AB, tyle razy większą przebieży drogę, czyli tyle razy większy utworzy prostokąt — to samo ściąga się i do równoległoboków, tylko że oddalenia mierzy nie bok lecz prostopadła.

Wn. 1. W prostokącie podstawa może być wzięta za wysokość, przeto prostokąty mające wysokości równe mają się jak podstawy.

Wn. 2. Ponieważ równoległoboki są równoważne prostokątom mającym z niémi równe podstawy i wysokości, przeto i równoległoboki mające wspólne podstawy mają się do siebie jak wysokości, mające zaś wspólne wysokości mają się do siebie jak podstawy.

Wn. 3. Trójkąty są połową prostokątów mających z niémi wspólne podstawy i wysokości, przeto i trójkąty mające podstawy równe, są w stosunku wysokości, i nawzajem.

289. *Tw. gł.* *Dwa jakiekolwiek prostokąty mają się do siebie jak iloczyny z podstaw przez wysokości,* czyli jeden prostokąt tyle razy zawiera się w drugim, ile razy iloczyn z liczebnéj wartości podstawy przez wysokość jednego, zawiera się w podobnym iloczynie drugiego, byleby podstawy były mierzone jednakową miarą, podobnie i wysokości.

Nazwawszy jeden prostokąt dany przez A drugi przez *a*, podstawę pierwszego przez P drugiego *p*, wysokość przez W i *w*, i kreśląc trzeci prostokąt B mający za podstawę P a za wysokość *w* mamy: A : B $=$ W : *w* (288), gdzie W i *w* jako składające jeden stosunek są jednorodne czyli mierzone jednakową miarą; podobnież B: $a =$ P: *p*; mnożąc te dwie proporcye otrzymujemy A. B: B. $a =$ W. P: *w*. *p*; czyli: A : $a =$ W. P: *w*. *p*.

Wn. 1. To dowodzenie ściąga się do równoległoboków i trójkątów; biorąc zamiast prostokąta *a* równoległobok jemu równoważny mający za podstawę *p* a za wysokość *w* mamy że *prostokąt* A *tyle razy zawiera się w równoległoboku a, ile razy liczba wypadła z pomnożenia podstawy przez wysokość prostokąta, zawiera się w podobnym iloczynie równoległoboku*; biorąc zaś zamiast prostokąta *a* trójkąt *a'* jemu równoważny, mający z nim równą podstawę *p*, a wysokość *w'* dwarazy większą od *w*, możemy także zamiast wysokości *w* wstawić $\frac{1}{2}w'$ i będzie A:$a' =$ P.W:$\frac{1}{2}pw$ t.j. *prostokąt* A, *tyle razy zawiera się w trójkącie a', ile razy liczba* P.W *wypadła z pomnożenia jego podstawy przez wysokość, zawiera się w połowie iloczynu p.w' z podstawy przez wysokość trójkąta.* Podobnym sposobem zamiast prostokąta A moglibyśmy wziąść równoważny z nim równoległobok lub trójkąt.

Wn. 2. Zmierzyć jakąkolwiek powierzchnię znaczy dowiedzieć się ile razy powierzchnia przyjęta za jedność czyli miarę zawiera się w mierzonéj powierzchni; mierzenie więc powierzchni, podobnie jak linii należałoby uskutecznić przez nakładanie powierzchni przyjętéj za jedność np. prostokąta na powierzchnię, tyle razy ile się daje,—tak jak nakładają się tafle na posadzkę, aby się dowiedzieć ile razy tafla zawiera się w posadzce. Bez poznania własności figur pod względem proporcyonalności, tym tylko sposobem moglibyśmy się dowiedzieć, ile razy powierzchnia przyjęta za jedność, zawiera się w mierzonéj powierzchni; mimo niedogodności pochodzącéj z samego uskuteczniania podobnego mierzenia, ono może być tylko przybliżoném, gdyż w ogólności jedność niezawiera się zupełnie w mierzonéj powierzchni lub choćby się zawierała, kształt ograniczenia nie dozwala z ścisłością uskutecznić tego nakładania np. prostokąta na trójkąt. Lecz na zasadzie wniosku poprzedzającego dla dowiedzenia się ile razy prostokąt A zawiera się w prostokącie *a* lub równoległoboku, niepotrzebujemy nakładać jedności A na mierzoną powierzchnię *a* lecz tylko dowolną linijną jednością zmierzyć ich podstawy (11 lub 155), następnie tą samą lub inną miarą zmierzyć wysokości; dla A i *a* zrobić iloczyny z liczebnych wartości podstawy przez wysokość i przez arytmetyczne dzielenie dowiedzieć się ile razy iloczyn W.P dla A zawiera się w iloczynie *w.p* dla *a*, gdyż tyle razy i prostokąt A zawiera się w równoległoboku *a*. Podobnie aby się dowiedzieć ile razy prostokąt zawiera się w trójkącie, potrzeba zmierzyć ich podstawy i wysokości i dowiedzieć się ile razy iloczyn prostokąta zawiera się w połowie iloczynu trójkąta. Ztąd widzimy że dla zmierzenia powierzchni mierzą się tylko dwie linie podstawa i wysokość od których wielkość powierzchni zależy, i dla tego one zowią się wymiarami.

Wn. 3. Za jedność do mierzenia powierzchni używamy zazwyczaj kwadratu, którego podstawa i wysokość równa się jedności czyli mierze linijnéj, a który zowie się sążniem łokciowym, stopą, całem kwadratowym. Iloczyn więc z podstawy przez wysokość dla tego prostokąta równa się jedności, a zatem jedność ta, tyle razy zawiera się w powierzchni, ile razy jedność arytmetyczna zawiera się w iloczynie podstawy przez wysokość zmierzonych miarą linijną czyli bokiem kwadratu t. j. ile ten iloczyn zawiera jedności. W takiém rozumieniu przez skrócenie mówimy, że *powierzchnia równoległoboku równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość; powierzchnia trójkąta równa się połowie iloczynu z podstawy przez wysokość, lub iloczynowi z podstawy przez połowę wysokości, albo z połowy podstawy przez wysokość; powierzchnia kwadratu równa się kwadratowi z boku, gdyż podstawa równa wysokości.*

Wn. 4. Trapez przez przekątnię dzieli się na dwa trójkąty, mające za wysokość, wysokość trapeza a za podstawy, jeden podstawę dolną, zaś drugi podstawę górną trapeza; a że powierzchnia każdego z nich zawiera w sobie tyle kwadratów przyjętych za miarę, ile jedności zawiera iloczyn z połowy podstawy przez wysokość przeto powierzchnia ich summy, czyli trapeza zawiera tyle kwadratów przyjętych za miarę, ile ma jedności summa iloczynów z połowy jednéj, tudzież z połowy drugiéj podstawy, przez wysokość; czyli iloczyn z połowy summy podstaw przez wysokość t. j. *powierzchnia trapezu równa się iloczynowi z połowy summy podstaw, lub linii łączącéj środki boków nierównoległych, przez wysokość.*

Wn. 5. Powierzchnia koła tworzy się posuwaniem bez przerwy zmniejszającego się okręgu równolegle do pierwotnego położenia t. j. mającego środek nieruchomy, który to okręg zmniejsza się w stosunku promienia (265. Wn. 1); — podobnie powierzchnia trójkąta tworzy się posuwaniem bez przerwy zmniejszającéj się podstawy równolegle do pierwotnego położenia, mającéj swe końce na dwóch bokach, która to podstawa zmniejsza się w stosunku wysokości (139. Wn. 5); lecz że bezwzględna wielkość równie jak i stosunek powierzchni zależy jedynie od wielkości posuwającéj się linii i od odległości na którą się posunęła, przeto jeśli okręg koła równy podstawie trójkąta a promień równa się jego wysokości, to wielkość powierzchni koła i trójkąta jest jednakowa a tém samém kwadrat przyjęty za miarę tyle razy zawiera się w powierzchni koła, ile jedności ma iloczyn z okręgu przez połowę promienia, mierzonych bokiem tego kwadratu, czyli *powierzchnia koła równa się iloczynowi z okręgu koła przez połowę promienia.* Okręg koła równa się $2\Pi R$ (268) przeto powierzchnia równa się $2\Pi R \cdot \frac{R}{2} = \Pi R^2$. Dla podobnéj przyczyny *powierzchnia wycinka równa się iloczynowi z łuku przez po-*

łowę promienia czyli jest taką częścią powierzchni całego koła, jaką łuk jego okręgu; a przeto otrzymuje się mnożąc powierzchnię koła przez stosnek łuku do okręgu. *Powierzchnia zawarta między okręgami oddzielnemi wewnętrznie, jako różnica kół równa się*, $\Pi R^2 - \Pi r^2 = \Pi (R^2 - r^2)$, t.j. *stosunkowi okręgu do średnicy pomnożonemu przez różnicę kwadratów promieni. Powierzchnia odcinka równa się różnicy pomiędzy powierzchnią wycinka tego samego koła mającego ten łuk za podstawę, a powierzchnią trójkąta mającego za podstawę cięciwę tego łuku a wierzchołek w środku koła.*

Wn. 6. Wielokąt for. przez linie połowiące kąty dzieli się na tyle trójkątów równych ile ma boków, a że powierzchnia każdego trójkąta zawiera w sobie tyle kwadratów przyjętych za miarę, ile ma jedności iloczyn z podstawy przez połowę wysokości, zmierzonych bokiem tego kwadratu, przeto znajdziemy liczbę kwadratów zawierających się w wiel. for., mnożąc liczbę kwadratów zawierających się w jednym z trójkątów, przez liczbę tych trójkątów, czyli przez liczbę boków.

Wn. 7. Powierzchnia nieforemnego wiel. znajduje się, *a*) dzieląc go na trójkąty lub trapezy i dochodząc ich pwierzchni; *b*) dzieląc na same trapezy (fig. 252) przez prostopadłe CD, EF.. do linii AB łączącéj dwa najodleglejsze punkta, których podstawami są prostopadłe CD, EF, GH... wysokości zaś są odcinkami linii AB. Gdy odcinki te są sobie równe, to i wysokości trapezów są także równe, a zatém w summie ich powierzchni, wysokość wspólna NO mnoży się przez summę podstaw EF, GH, JK, służących dla dwóch trapezów, powiększoną połową podstaw CD i LM służących dla jednego tylko trapeza jak w figurze CDML, gdyż powierzchnia $CDML = \frac{1}{2}(CD + EF).NO + \frac{1}{2}(EF + GH).NO + \frac{1}{2}(GH + JK).NO + \frac{1}{2}(JK + LM).NO = \frac{1}{2}(CD + EF + EF + GH + GH + JK + JK + LM).NO = \frac{1}{2}(CD + 2EF + 2GH + 2JK + LM).NO = (\frac{1}{2}CD + EF + GH + JK + \frac{1}{2}LM).NO.$

290. *Tw. Trójkąty* ABC i DBE *mające po kącie równym mają się do siebie jak iloczyny z boków zawierających te kąty* (fig. 253).

Kładę jeden trójkąt na drugi tak, aby kąty równe przystały do siebie i końce D i C boków BD i BC zawierających kąty równe łączę linią prostą DC; trójkąty ABC i DBC jako mające wysokości równe mają się do siebie jak podstawy (288. Wn. 3) $ABC:DBC = AB:DB$; podobnie $DBC:DBE = BC:BE$ przeto $ABC.DBC:DBC.DBE = AB.BC:DB.BE$, dzieląc zaś pierwszy stosunek przez DBC będzie: $ABC:DBE = AB.BC:DB.BE$.

Wn. Podobnie i równoległoboki EK i DL (fig. 247) mające po kącie równym, mają się do siebie jak iloczyny z boków zawierających te kąty, gdyż zestawiwszy je tak, aby kąty równe DGL i EGK były wierzchołkiem przeciwległe i dokończywszy na bokach GK i GL równoległoboku KL, równoległoboki DL i GJ jako mające wysokości równe mają się jak podstawy: $DL:GJ = DG:GK$ podobnie $GJ:EK = GL:GE$

przeto i DL.GJ:GJ.EK=DG.GL:GK.GE czyli DL:EK =DG.GL:GK.GE.

291. *Tw. gł. Powierzchnie figur podobnych mają się do siebie jak kwadraty z linii odpowiednich.*

1⁰ Oznaczywszy powierzchnie trójkątów podobnych przez T i t, ich popstawy przez P i p, wysokości przez W i w, to $T:t=P.W:p.w$ (289. Wn. 1); lecz $P:p=W:w$ przeto pomnożywszy poprzedniki przez P a następniki przez p, lub poprzeduiki przez W a następniki przez w otrzymamy: $P^2:p^2=WP:wp$ lub $P.W:pw=W^2:w^2$ a zatém w pierwszéj i tych proporcyach dwa stosunki równe trzeciemu $P.W:p.w$ są sobie równe t. j. $T:t=P^2:p^2$ lub $T:t=W^2:w^2$. Ponieważ linie odpowiednie w figurach podobnych są proporcyonalne, przeto $P:p=L:l$ czyli $P^2:p^2=L^2:l^2$ przeto i $T:t=L^2:l^2$ t. j. powierzchnie trójkątów mają się do siebie jak kwadraty z linii odpowiednich.

2⁰ Wielokąty podobne mają się do siebie jak kwadraty z linii odpowiednich, gdyż składają się z równéj liczby trójkątów podobnych i podobnie położonych (262. Wn. 1), a że każde dwa trójkąty odpowiednie są w stosunku kwadratów z linii odpowiednich, przeto i summy ich są w tymże samym stosunku.

3⁰ Powierzchnie kół są w stosunku kwadratów z linii odpowiednich, gdyż one równają się iloczynowi z okręgu przez połowę promienia, a zatém są w stosunku tych iloczynów t. j. $K:k=\frac{1}{2}OR:\frac{1}{2}or=OR:or$; lecz $O:o=R:r$, przeto mnożąc poprzedniki przez R

a następniki przez r będzie: $OR: or = R^2 : r^2$ przeto i $K : k = R^2 : r^2$. Podobnie wycinki i odcinki kół, których łuki zawierają jednakową liczbę stopni, są w stosunku kwadratów z linii odpowiednich.

Wn. Jeżeli kwadrat z dwóch linii równa się kwadratowi z linii trzeciéj, to i summa figur podobnych, których liniami odpowiedniemi są dwie pierwsze linie, równa się figurze im podobnéj w któréj linia trzecia jest odpowiednią pierwszéj: oznaczywszy bowiem trzy figury podobne przez A, B, C ich linie odpowiednie przez a, b, c mamy: $A : B = a^2 : b^2$ to i $A + B : B = a^2 + b^2 : b^2$; podobnie $C : B = c^2 : b^2$ przeto jeśli $c^2 = a^2 + b^2$ to te dwie proporcye mają trzy wyrazy równe a tém samém i czwarty A + B równy czwartemu C.

292. *Zg. Wykreślić* 1) *kwadrat równoważny a) równoległobokowi.* Między podstawą a wysokością równoległoboku szukam linii średnio proporcyonalnéj (151 lub 177. Wn. 1, albo 185), a ona jest bokiem szukanego kwadratu (289. Wn. 3); *b) trójkątowi*: bok jego jest średnio proporcyonalny między podstawą a połową wysokości trójkąta; a że każdy wielokąt można zamienić na trójkąt jemu równoważny (285, *e*), przeto kwadrat równoważny z tym trójkątem jest równoważny i z danym wielokątem; *c) wykreślić kwadrat któryby się miał do danego* AB *w stosunku danym* $m : n$ (fig. 254); na linii nieograniczonéj odcinam EF$= m$ i FG$= n$, z punktu F wyprowadzam prostopadłą do spotkania się w H z okręgiem koła, którego średnicą EG, trójkąt EKG jest prosto-

kątny (176. Wn.), przeto $EK^2 : KG^2 = EF : FG$; na ramieniu EK kąta prostego odcinam $KH = AC$ i prowadzę HJ równolegle do EG to KJ jest bokiem kwadratu szukanego, gdyż $KE : KG = KH : KJ$ czyli $KE^2 : KG^2 = KH^2 : KJ^2$ przeto dwa stosunki $KH^2 : KJ^2$; $EF : FG$ równe trzeciemu $KE^2 : KG^2$ są sobie równe, a że $KH^2 = AB$ przeto KJ^2 jest z danym kwadratem w stosunku $m:n$. 2) *Wykreślić prostokąt równoważny z kwadratem danym, a) którego summa boków przy sobie leżących równałaby się linii danéj* AB (fig. 255). Na linii danéj AB jako na średnicy kreślę pół okręgu koła i z końca A wyprowadzam prostopadłą AE równą bokowi kwadratu danego, zaś z końca jéj E linię EG równoległą do linii danéj AB, to prostopadłe FC i GD wyprowadzone do linii danéj z punktów F i G przecięcia się równoległej z okręgiem, są równe bokowi kwadratu danego (79. Wn. 2), a tém samém prostokąt z BC przez AC jest żądanym (177. Wn. 1); — *b) różnica boków przy sobie leżących równałaby się linii danéj* AB (fig. 256); na linii danéj AB jako na średnicy kreślę okręg koła i z końca A wyprowadzam prostopadłą AE równą bokowi kwadratu danego przez punkt E prowadzę sieczną EC przechodzącą przez środek a prostokąt z EC przez ED jest żądanym (185. Wn.).

293. *Zg. Wykreślić wielokąt a) równoważny summie dwóch danych wielok. podobnych, im podobny.* Bok kwadratu równoważnego summie kwadratów z dwóch boków odpowiednich figur danych jest bo-

kiem szukanego wielokąta odpowiednim tym bokom (291. Wn.), który znajdziemy jak w N° 256, pozostaje tylko na tym boku wykreślić wiel. foremny (263). Jeśli wielokąt szukany ma być równym różnicy dwóch wielok., to szukamy boku kwadratu będącego różnicą kwadratów z boków odpowiednich. Podobnie wynajduje się wielokąt ilekolwiek razy większy lub mniejszy od danego: *b*) *któryby z danym wielokątem był w stosunku danym*; bok kwadratu będącego w stosunku danym z kwadratem z boku wielokąta danego (292, *c*) jest bokiem odpowiednim wielokąta szukanego; *c*) *podobny danemu wielokątowi* P *i który byłby z wielokątem danym* K *był w stosunku danym* $m:n$. Dla znalezienia boku wielokąta danego 1) wielokąty P i K zamieniam na kwadraty (292, *b*) których bokami są linie p i k; 2) wynajduję bok a, kwadratu będącego z kwadratem K w stosunku $m:n$ a tem samém równoważnego wiel. szukanemu (292. *c*); 3) znajduję linię x będącą w takim stosunku do boku a kwadratu równoważnego z szukanym wielokątem, w jakim jest bok b danego wielokąta P, do boku p kwadratu z nim równoważnego, a ona jest bokiem szukanego wielokąta; gdyż $x:a=b:p$ czyli $x^2.\ a^2=b^2:p^2$ a że $a^2=$ wiel. szukanemu X zaś $p^2=\mathrm{P}$, przeto $x^2:X=b^2:P$, lecz że a^2 z wielokątem K jest w stosunku danym $m:n$, i figury podobne mają się jak kwadraty z boków odpowiednich, przeto x jest bokiem wielokąta szukanego. Jeśliby wielokąt szukany był równoważny wielokątowi K, wtedy k byłoby bokiem kwadratu równoważnego danemu wielokątowi.

294. *Zg. Dany trójkąt podzielić na części proporcyonalne do linii danych, przez proste wychodzące z wierzchołka.*

Podstawę trójkąta dzielę na części proporcyonalne do linii danych (147), a punkta podziałów połączone z wierzchołkiem, dzielą trójkąt na trójkąty żądane; gdyż one jako mające równe wysokości, mają się do siebie jak podstawy.

295. *Zg. Znaleść prostą* n *będącą z daną* m *w stosunku kwadratów danych* $KH^2 : KJ^2$ (fig. 254.).

Na ramionach kąta prostego EKG odcinam boki kwadratów danych KH i KJ, i z wierzchołka kąta prostego prowadzę prostopadłą KL a ona podzieli linię HJ w stosunku kwadratów danych (279), a zatém linia szukana *n* jest proporcyonalna do linii HL, LJ i *m*.

296. *Zt.* *a*) Powierzchnia kwadratu równa się kwadratowi z liczebnéj wartości z boku, przeto łokieć kwadratowy ma ćwierci kwadr. 16, ćwierć 36 cali i t. d. t. j. miara wyższa na niższą zamienia się mnożąc przez kwadrat z liczby wyrażającéj podziały i nawzajem. *b*) Jeśli skala wyraża 900-tne części miary, to plan zrobiony podług téj skali jest $(900)^2 =$ 810000 razy mniejszy od mierzonéj przestrzeni; gdyż figury podobne są w stosunku kwadratów z linii odpowiednich. *c*) Chcąc obliczyć powierzchnię zmierzonej przestrzeni, obrachowywamy trójkąty, trapezy i t.d. i dochodzimy ich powierzchni mierząc linie mia-

rą wziętą ze skali, a ile ona zawiera miar kwadratowych linii z którój zrobiona skala, tyle grunt zawiera miar kwadratowych jedności którój skala jest częścią. *d*) Podział gruntu niewymagający wielkiej ścisłości uskutecznia się na planie, a następnie linie dzielące przez punkta odpowiednie wytykają się na gruncie.

ROZDZIAŁ IV.

Zależność wielkości figur od kształtu.

297. Wielkość figur zależy od ich kształtu i tak, figury mające obwody jednakowe nie mają jednakowéj wielkości, mające zaś jednakową wielkość mają nierówne obwody. Dwa główne pytania należy tu roztrząsnąć: z figur mających jednakowe obwody, t.j. równoobwodowych (izoperymetrycznych), jakiego kształtu figury mają wielkość największą (maximum; nawzajem z mających wielkość jednakową, jakiego kształtu figury mają obwód najmniejszy (minimum), i dla tego to własności te figur znane są pod nazwą Izoperymetryczności lub maximów i minimów.

298. *Tw. gł. Z trójkątów stojących na jednéj podstawie i mających wierzchołki na jednéj linii prostéj, ten ma najmniejszą summę dwóch innych boków, w którym te boki są równo nachylone do linii wierzchołków* (fig. 257).