rą wziętą ze skali, a ile ona zawiera miar kwadratowych linii z której zrobiona skala, tyle grunt zawiera miar kwadratowych jedności której skala jest częścią. *d*) Podział gruntu niewymagający wielkiej ścisłości uskutecznia się na planie, a następnie linie dzielące przez punkta odpowiednie wytykają się na gruncie.

ROZDZIAŁ IV.

Zależność wielkości figur od kształtu.

297. Wielkość figur zależy od ich kształtu i tak, figury mające obwody jednakowe nie mają jednakowéj wielkości, mające zaś jednakową wielkość mają nierówne obwody. Dwa główne pytania należy tu roztrząsnąć: z figur mających jednakowe obwody, t. j. równoobwodowych (izoperymetrycznych), jakiego kształtu figury mają wielkość największą (maximum; nawzajem z mających wielkość jednakową, jakiego kształtu figury mają obwód najmniejszy (minimum), i dla tego to własności te figur znane są pod nazwą Izoperymetryczności lub maximów i minimów.

298. *Tw. gł. Z trójkątów stojących na jednéj podstawie i mających wierzchołki na jednéj linii prostéj, ten ma najmniejszą summę dwóch innych boków, w którym te boki są równo nachylone do linii wierzchołków* (fig. 257).

Zak. kąt ADB = CDE. *Tw.* AD + DC < AB + BC.

Z końca C podstawy AC wyprowadzam prostopadłę do linii wierchołków BD i odcinam EF = EC; punkt F łączę z punktami D i B. Linia CD = DF i CB = BF jako równo oddalone od spodka prostopadłéj DE (51), przeto kąt CDE = EDF (91. Wn. 3), zaś linie AD i DF stanowią jedną linię prostą, gdyż kąt ADB = FDE jako równe kątowi CDE (49), a tém samém AD + DF < AB + BF czyli AD + DC < AB + BC.

Wn. 1. Gdy linia wierzchołków jest równoległą do podstawy, wysokości trójkątów są sobie równe a tém samem i ich powierzchnie, a trójkąt ADC mający boki równo nachylone do równoległéj linii wierzchołków BE, ma także boki równonachilone i do wysokości DG, gdyż te kąty nachylenia są dopełnieniami kątów pierwszych, czyli trójkąt ADC jest równoramienny (91. Wn. 3); a zatém *z trójkątów równoważnych mających podstawy rowne, trójkąt symetryczny ma najmniejszy obwód.* I nawzajem: *z trójkątów równo-obwodowych o jednakowych podstawach, trójkąt symetryczny jest największym* (fig. 258); poprowadziwszy z wierzchołka D, niesymetrycznego trójkąta, linię DE równoległą do podstawy AC, aż do przecięcia się w E z wysokością trójkąta symetrycznego ABC i połączywszy ten punkt z końcami podstawy AC, utworzy się trójkąt symetryczny AEC, równoważny trójkątowi ADC, a zatém podług poprzedzającego AE + EC < AD + DC, lecz AD + DC = AB + BC przeto AE + EC < AB + BC, więc linia AEC jest objętą przez ABC i trójkąt

ABC, jako całość, większy od trójkąta AEC równoważnego z ADC.

Wn. 2. *Ze wszystkich trójkątów równoważnych, trójkąt foremny ma najmniejszy obwód.* Jeśli bowiem na boku trójkąta foremnego wystawimy jakikolwiek trójkąt z nim równoważny, to obwód jego jest większy od obwodu danego trójkąta. I nawzajem: *ze wszystkich trójkątów równo-obwodowych foremny ma największą powierzchnię*, gdyż powierzchnia jakiegokolwiek trójkąta wystawionego na jego boku jest mniejsza.

Wn. 3. *Z wielokątów równoważnych o jednakowéj liczbie boków, równoboczny ma najmniejszy obwód* (fig. 259); gdyż wielokąt ABCDE niemający boków równych nie może mieć najmniejszego obwodu; jeśli bowiem bok BC nierówny bokowi CD, to wystawiwszy trójkąt BFD równoramienny równoważny trójkątowi BCD, summa boków BF + FD < BC + CD, a tém samém obwód ABFDE < ABCDE. I nawzajem: *z wielokątów równoobwodowych równoboczny ma największą powierzchnię*; gdyż wielokąt ABCDE nierównoobwodowy niemoże mieć największéj powierzchni; jeśli bowiem BC i CD nie są równe, to wystawiwszy trójkąt równoramienny BFD równoobwodowy z trójkątem BCD, powierzchnia BFD > BCD a tém samém i powierzchnia ABFDE > ABCDE.

Wn. 4. *Z trapezów równoważnych symetryczny ma najmniejszy obwód* (fig. 260); dopełniwszy bowiem trójkąta AED i nakreśliwszy na *ad*=AD trójkąt symetryczny *aed*, z nim równoważny, linia *bc* równoległa do podstawy ad i oddalona od niéj na wysokość danego trapeza AC, odcina trapez $abcd$ symetryczny i równoważny z danym trapezem, gdyż bc=BC jako będące do równych podstaw AD i ad w jednakowym stosunku, równym stosunkowi wysokości całego do wysokości odciętego trójkąta (139. Wn. 5); lecz że AE+ED > $ae+ed$ to i jednakowe części pierwszych boków AB+CD > $ab+dc$ gdyż stosunki AE:AB, ED:CD i $ea:ab$, $ed:cd$ równają się stosunkowi $ef:gf$ przeto AE+ED:AB+CD=$ea+ed:ab+cd$, bo każdy z tych stosunków równy $ef:gf$, a że poprzednik większy od poprzednika przeto i następnik większy od następnika.

299. *Tw. Z trójkątów* ABC i DEF *mających wysokości i summy dwóch boków równe, symetryczny* ABC *ma największą podstawę* AC (fig. 261).

Wystawiwszy na podstawie DF trójkąta niesymetrycznego DEF, trójkąt symetryczny DHF mający z nim równą wysokość DH+HF < DE+EF (298. Wn. 1), przeto i DH+HF < AB+BC a tém samém DH < AB, odciąwszy więc JK=GD, linia JK < JA, gdyż w tym tylko razie pochyła BK=HD jest mniejszą od BA.

300. *Tw. Z trójkątów mających jednakowe dwa boki, ten jest największy, w którym te boki tworzą kąt prosty.* Gdyż biorąc jeden z nich za podstawę, ten trójkąt ma największą powierzchnię w którym wysokość największa, a zatém w którym ta wysokość

równa się bokowi przyległemu podstawie, gdyż prostopadła będąc najkrótszą ze wszystkich pochyłych, byłaby krótszą od każdego innego boku.

Wn. 1. Ze wszystkich równoległoboków mających boki dane prostokąt jest największy, gdyż składa się z największych dwóch trójkątów.

301. *Tw. gł. Jeśli w wielokącie* ABC *poprowadzimy dowolną linię* BT *i weźmiemy oś symetryi df prostopadłą do téj linii, zaś z wierzchołków poprowadzimy linie prostopadłe do osi i odetniemy na nich odcinki połowiące się na osi i równe odcinkom tych linii, zawartym między obwodem danego wielokąta, to końce połowiących się odcinków, są wierzchołkami wielokąta równoważnego, mającego mniejszy obwód* (fig. 362).

1° W trójkącie ABC linia dowolna BT, do któréj oś symetryi *df* jest prostopadłą, połowi podstawę AC; odcinam *eg*=BT połowiące się w O i punkta *d* i *f*, oznaczone na osi przez prostopadłe A*d* i C*f*, łączę z punktami *e*, *g* i otrzymałem kwadrat skośny *defg*, którego punkt O jest środkiem symetryi, gdyż osie są prostopadłe i *d*O=O*f* dlatego, że AT=TC (138). Kwadrat ten jest równoważny trójkątowi ABC i ma od niego mniejszy obwód, gdyż trójkąt *efg* równoramienny, jest równoważny trójkątowi BTC zaś *deg* trójk. ABT.

2° Prowadzę linię JK połowiącą kąt między osiami symetryi i oś symetryi *lh* prostopadłą do téj linii, to wielokąt P jest równoważny skośnemu kwadratowi, gdyż trój. symetr. *ihn* równoważny trójkątowi *Hfg*, prostokąt *Ln* równoległobokowi *eg* i t. d.

Wn. 1. Im daléj posuwamy podobnym sposobem przemianę wielokąta, tém więcéj on ma osi symetryi i tém mniéj one różnią się od siebie, a tém samém bardziéj wielokąt zbliża się do figury równoważnéj mającéj najmniejszy obwód. Lecz że w téj przemianie liczba boków powiększa się tak, że w ogólności każden z wierzchołków, prócz dwóch skrajnych, tworzy w następnéj dwa wierzchołki, przeto zarazem wielokąt zbliża się do linii krzywéj.

Wn. 2. Wielokąt foremny ma mniejszy obwód od równoważnego z nim wielokąta nieforemnego o téj samėj liczbie boków; gdyż ma tyle równych sobie osi symetryi ile wierzchołków (130), co niema miejsca w nieforemnym o téj saméj liczbie boków; z wielokątów zaś foremnych ten ma mniejszy obwód, który ma większą liczbę boków, gdyż więcéj ma sobie równych osi symetryi.

Wn. 3. Figura niemająca w jakimkolwiek kierunku osi symetryi, lub w któréj osie symetryi nie są sobie równe, niemoże miéć najmniejszego obwodu, gdyż w tym kierunku poprowadziwszy linię i oś symetryi do niéj prostopadłą, otrzymamy figurę jéj równoważną mającą mniejszy obwod a zatém figura, w któréj we wszystkich kierunkach są osie symetryi przechodzące przez środek i równe sobie, ma najmniejszy obwód. Koło więc ma najmniejszy obwód ze wszystkich figur, gdyż średnice są jego osiami symetryi.

302. *Tw. gł. Z wielokątów mających wszystkie boki dane prócz jednego, ten jest największy, który*

jest wpisany w półkole, a tém samém za bok nieoznaczony ma średnicę.

Wielokąt, w którym, którykolwiek z wierzchołków nieleży na okręgu, nie może być największym; gdyż dwie przekątnie poprowadzone z końców boku niedanego do tego wierzchołka, nietworzą kąta prostego, a zatém trójkąt prostokątny mający te przekątnie za przyprostokątnie, jest większy od trójkąta odpowiedniego danego wielokąta; wystawiwszy więc na przyprostokątnich wielokąty równe wielokątom stojącym na przekątnich danego wielokąta, otrzymamy wielokąt większy od danego i mający boki dane.

Wn. 1. *Z wielokątów mających boki równe w jednakowym porządku ten jest największy, który może być wpisanym w koło*; gdyż średnica poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków, dzieli go razem z trójkątem mającym za podstawę bok przecięty przez tą średnicę a za wierzchołek drugi koniec téj średnicy, na dwa wielokąty wpisane w półokręgu; przekątnia zaś poprowadzona z wierzchołka odpowiedniego wielokąta niemogącego być wpisanym w koło, do wierzchołka trójkąta równego trójkątowi dodanemu do pierwszego wielokąta i wystawionego na odpowiednim boku, dzieli wielokąt nie mogący być wpisanym w koło, na dwa wielokąty niemogące być wpisane w półkole a mające boki równe i w tym samym porządku co w wielokącie wpisanym; lecz że wielokąty pierwsze są większe od drugich, przeto wielokąt wpisany w koło z trójkątem, jest większy od wielokąta niemogącego być wpisanym z tymże samym trójkątem, czyli wielokąt pierwszy jest większy od drugiego.

Wn. 2. *Wielkość wielokątu wpisanego w koło mającego boki dane, niezależy od porządku tych boków*; gdyż w jakimkolwiek porządku będą boki, trójkąty utworzone z tych boków i promieni poprowadzonych do ich końców, są sobie równe, jako mające po trzy boki równe, a zatém i ich summy są sobie równe.

Wn. 3. *Z wielokątów równoobwodowych o jednakowéj liczbie boków największym jest foremny*; gdyż jako mający boki równe jest większy od niemającego boków równych (298. Wn. 3) a jako wpisany w koło jest większy od równobocznego niemogącego być wpisanym. I nawzajem: *z wielokątów równoważnych o jednakowéj liczbie boków foremny ma najmniejszy obwód*; gdyż nie może mieć obwodu równego, bo miałby większą powierzchnię, ani większego bo wielokąt równoobwodowy z foremnym, a podobny nieforemnemu byłby mniejszy od foremnego, zaś większy od niefor. jako mu podobny i mający obwód większy; a zatém i wielokąt foremny témbardziéj byłby większy od nieforemnego.

303. *Tw. Powierzchnia koła jest średnioproporcyonalna między powierzchniami dwoch wielokątów podobnych z których jeden opisany na kole, zaś drugi równoobwodowy z kołem.*

Powierzchnia koła równa się iloczynowi z okręgu przez połowę promienia $\frac{1}{2}O\times r$; zaś wielokąta opisanego, z obwodu Ob równa się iloczynowi przez połowę wysokości jednego z trójkątów składających ten wielokąt, mających wierzchołki we środku koła, równéj promieniowi; gdyż każdego trójkąta powierzchnia równa się iloczynowi z podstawy przez wspólną wysokość; powierzchnia zaś wielokąta równoobwodowego z kołem równa się iloczynowi z obwodu przez połowę prostopadłéj jednego z trójkątów mających wierzchołek w środku i podobnych trójkątom opisanego wielokąta t. j. $\frac{1}{2}Ok.w$; zatém Pow. wiel. opis: Pow. koła$=$ $\frac{1}{2}Ob.r:\frac{1}{2}Ok.r=Ob:Ok$, i Pow. koła: Pow. wiel. równoobw.$=\frac{1}{2}Ok.r:\frac{1}{2}Ok.w=r:w$; lecz w wielokątach podobnych obwody są w stosunku wysokości, więc $Ob:Ok=r:w$; przeto w dwóch poprzednich proporcyach drugie stosunki są sobie równe, to i pierwsze są równe, czyli Pow. wiel. opis: Pow. koła$=$Pow. koła: Pow. wiel. równoobw. z kołem.

Wn. gł. Powierzchnia koła jest największa ze wszystkich wielokątów równoobwodowych; gdyż wszelki wielokąt wpisany w koło jest większy od wszelkiego innego wielokąta o tych samych bokach, zaś koło jest większe od wielokąta z nim równoobwodowego mogącego być wpisanym w koło, gdyż powierzchnia wielokąta opisanego na kole jest większa od powierzchni koła jako całość od swojéj części, a te powierzchnie są w jednakowym stosunku. I nawzajem (301. Wn. 3), co moglibyśmy jeszcze dowieść podobnie jak w N. 302. Wn. 3.

303. *Tw. Z wielokątów foremnych opisanych na*

kole ten jest większy który ma mniejszą liczbę boków (fig. 263).

Linia AD jest połową boku wielokąta forem. o n. bokach opisanego na kole, którego promień SA, zaś AC połową boku takiegoż wielokąta mającego jednym bokiem więcéj t. j. $n+1$ boków. Kąt ASD jako połowa kąta środkowego, wielokąta, jest taką częścią Π jaką kąt środkowy 2Π t. j. $\frac{\Pi}{n}$; dla podobnéj przyczyny kąt ASC jest $\frac{\Pi}{n+1}$; zatém kąt ASD: ASC

$$=\frac{\Pi}{n}:\frac{\Pi}{n+1}=\frac{(n+1)\Pi}{n(n+1)}:\frac{n\Pi}{(n+1)n}=n+1:n$$

czyli kąt ASD ma takich kątów $n+1$, jakich ASC ma n. Poprowadziwszy linie dzielące kąt ASD na $n+1$ części, linia CD jest większa od $\frac{AD}{n+1}$, gdyż jest większą od części poprzedzającéj BC będąc z nią w stosunku linii SD : SB (142); przeto i pozostała część AC jest mniejsza od n takich części $\frac{AD}{n+1}$ t. j. $AC < n.\frac{AD}{n+1}$; zkąd $AC(n+1) < n.AD$ czyli pół obwodu wielokąta o większéj liczbie boków jest mniejsze od połobwodu wielokąta mającego boków jednym więcéj a tém samém i cały obwód, większy od obwodu. Lecz powierzchnia każdego z nich równa się iloczynowi z obwodu przez połowę promienia koła wspieranego, przeto i powierzchnia wielokąta mającego więcéj boków jest mniejsza od powierzchni wiel. mającego mniéj boków.

304. *Tw. Opisawszy na kole K dwa wielokąty A i B, to dwa inne wielokąty C i D równoobwodowe z kołem K i im podobne A z C, B z D, są względem ich w stosunku odwrotnym t. j.* D : C = A : B.

Koło jest średnio proporcyonalne między wielokątem opisanym i podobnym mu równoobwodowym (302), przeto A: K = K : C i B : K = K : D czyli K : B = D: K, pomnożywszy tę proporcyę przez pierwszą i podzieliwszy wszystkie wyrazy wypadłéj proporcyi przez K, otrzymamy: A:B = D: C.

Wn. 1. *Z wielokątów foremnych* C i D *równoobwodowych, wielokąt* C *mający więcéj boków ma większą powierzchnię*; albowiem na kole z nimi równoobwodowym opisawszy wielokąty im podobne A i B wielokąt A jako mający większą liczbę boków jest mniejszy od wielokąta B, a zatém i wielokąt D < C gdyż A: B = D: C. I nawzajem: *Z wielokątów foremnych równoważnych wielokąt* E *mający więcéj boków od* F, *ma obwód mniejszy*, gdyż jeśliby obwód E = ob. F to E > F; jeśliby zaś ob. E > ob. F. to wielokąt G podobny E a równoobwodowy z F byłby mniejszy od E, bo ich powierzchnie są w stosunku kwadratów z obwodów, a *ob.* E > *ob.* F jest także większy i od *ob.* G = *ob.* F, lecz G > F jako równoobwodowe, to tém bardziéj E byłoby większe od F, coby się sprzeciwiało założeniu.

KONIEC KSIĘGI PIERWSZÉJ.