nia roboty, po wpisaniu w pierwszy kwadrat AK. ośmiokąta aefMo... przenoszę linię Aa w obie strony, od każdego wierzchołka kwadratu F,H...q,f i punkta czg, dzh i t. d. łączę prostemi przerywanemi tak, aby ciągnione były zawarte między leżącemi przy sobie bokami kwadracików.

d). *Z dwunastokąta* i trójkątów foremnych (fig. 83). Na boku danym dwunastokąta AC, kreślę trójkąt foremny ABC, prowadzę oś jego symetryi DB, i na jéj przedłużeniu odcinam BE=AC i EF=BD. Z punktu E wyprowadzam HG prostopadłą do EF, i odcinam FG i FH równe połowie AC a trójkąt EHG, jest także foremny, jako przystający po położeniu podstaw do trójkąta ABC i t. d. Wielokąt tym sposobem utworzony eBEg...jest foremny, gdyż z wykreślenia ma boki równe, kąty zaś jego B, D... równają się II bez połowy kąta trójkąta foremnego t. j. 180°—30°= 150°, jak w dwunastokącie.

D) *Odcinki zbiegających się połączonych z równoległemi czyli proporcyonalność linii.*

138. *Tw. linie równoległe* EF,GH,IK *dzielące jedną ze zbiegających się* AB, *na odcinki* EG i GI *równe, dzielą także i drugą* CD *na odcinki równe* FH i HK (fig. 84).

Przez punkta E i G prowadzę EL i GM, równoległe do CD (81), to EL=FH i GM=HK (115 b). Trójkąty GEL i JGM mające EG=GI, kąt EGL=GIM jako jednostronne względem poprzecznéj AB, równoległych GH i IK; kąt GEL=IGM, jako jednostronne, równoległych EL i GM (78 Wn 2), względem téj saméj poprzecznéj;—mają i bok EL=GM, a tém samém FH=HK.

Wn. Jeżeli odcinek BG > GI, to i odcinek CH > HK. Prowadzę równolegle BN=CH i GM=HK, biorę GE=GI i prowadzę EF równoległe do GH, to EL =FH jest mniéjsze od CH, aże EL=GM=HK, przeto i HK < CH. *Równoległe* więc *dzieląc jedną ze zbiegających się* AB *na części nierówne, dzielą także i drugą tak, że naprzeciw większego odcinka jednéj, leży odcinek większy drugiéj.*

139. *Tw. gl. Odcinki* EG, GI FH, HK *zbiegających się* AB i CD, *utworzone przez równoległe* EF, GH i IK *są proporcyonalne;* czyli *stosunek odcinków* EG i GJ *jednéj linii, równa się stosunkowi odcinków* FH i HK *drugiéj linii* CD (fig. 85).

Odcinki EG i GI nie są równe i odcinek EG > GI, więc i odcinek FH > HK (138. Wn). Przenoszę odcinek IG na EG; zawiera się on w nim od G do L cztery razy i pozostaje LE < GI, przez punkta a,b,c, powstałe z przenoszenia odcinka GI prowadzę równoległe do GH, aż do przecięcia się z drugą linią CD w punktach a', b', c', odcinki Ga, ab, bc i cL równają się odcinkowi IG, przeto i odcinki Ha', a'b', b'c', c'M równają się odcinkowi HK (138), lecz że odcinek EL < GI, więc i odcinek FM < HK 138. Wn.),— a zatém ile razy odcinek IG zawiera się w GE, tyle razy i odcinek HK zawiera się w odcinku HF. Odcinek LE przenoszę na IG i zawiera się w nim dwa razy od I do e; przez punkta d i e prowadzę równoległe do HJK: odcinki Id, de równają się odcinkowi EL przeto i odcinki Kd'; d'e' są równe odcinkowi MF, odcinek zaś eG < EL to i e'H < MF,—a zatém ile razy reszta LE zawiera się w linii GI od któréj przenoszenia wypadła, tyle razy i reszta MF zawiera się w linii KH od któréj przenoszenia wypadła,... i t. d. Stosunek więc odcinka GE do IG taką samą wyraz się liczbą jak i stosunek odcinka HF do kH (11), przeto stosunki te są sobie równe (14) i składają proporcyą: EG: GI=FH: HK.

Wn. 1. Punkt zbiegu jest dowolny, przeto może być albo na jednéj ze skrajnych równoległych (fig. 86), albo na środkowéj (fig. 87): w pierwszym razie (fig. 86) stosunek odcinków IG i GB równa się stosunkowi odcinków KH i HB, czyli te odcinki są proporcyonalne, co się wyrazi: *w trójkącie* IBK *linia* GH *równoległa do podstawy, dzieli boki* IB i KB *trójkąta na części proporcyonalne* JG: GB=KH: HB, co można wprost dowieść podobnie jak dowiedliśmy twierdzenie,—w drugim razie (fig 87) stosunek odcinków IB i BF równa się stosunkowi odcinków BK i BE, co się wyrazi: *jeżeli dwie linie zbiegające się przetniemi dwoma liniami równoległemi, z przeciwnych stron punktu ich zbiegu, to one podzielą się na części proporcyonalne* IB: BF=KB: BE, co wprost można dowieść prowadząc FL równolegle do EK, bo podług pierwszego przypadku IB: BF= LH: HF, zaś LH=KB HF=BE (115,b).

Wn. 2. I nawzajem: *W trójkącie* (fig. 86) IBK *linia* GH *dzieląca boki trójkąta na części proporcyonalne jest równoległa do podstawy* IK. Jeśliby linia GN była równoległa do IK, to BG:GI=BN:NK, lecz z założenia BG:GI=BH:HK, w tych proporcyach pierwsze stosunki są sobie równe, więc i drugie jako im równe, byłyby także sobie równe t. j. BN: NK=BH: HK, co być nie może, gdyż BN > BH zaś NK < HK; azatém linia GN nie może być równoległą do JK. Podobnie *linie leżące z przeciwnych stron przecięcia się dwóch linii dzielące te linie na części proporcyonalne, są względem siebie równoległe.*

Wn. 3. W trójkącie (fig. 86) JBK, linia GH równoległa do podstawy, dzieli boki trójkąta na części proporcyonalne t. j. JG: GB=KH: HB; w proporcyi téj można robić odmiany tak co do miejsca, jako téż co do wartości, mianowicie przez dodawanie, przeto: BG: GJ=BH: HK lub téż BG: BH=GJ: HK;—tudzież BG+GJ: JG=KH+HB: HK, czyli JB: JG=KB: KH t. j. *boki mają się do siebie jak odcinki*, i t. p. W proporcyi twierdzenia EG: GJ=FH: HK można robić podobne przemiany, tak co do miejsca, jako téż i co do wartości.

Wn. 4. *W trójkącie* ABD *linie* LM, JK, GH *równoległe do podstawy, dzielą boki trójkąta na części proporcyonalne*, gdyż stosunek BG do BH równa się stosunkowi GJ do HK (Wn. 2), a ten ostatni równa się stosunkowi JL do KM i t. d., przeto wszystkie stosunki są sobie równe i składają proporcyą ciągłą BG:BH

=GJ: HK=JL: KM=LA: MD czyli BG: GJ: JL: LA= BH: HK: KM: MD.

Wn. 5. *Odcinki* JK i GH *równoległych są proporcyonalne do odległości ich końców* J, G lub K, H od *punktu zbiegu* B, *lub też do odległości* RB i PB *samych równoległych* JK i GH *od tego punktu* B(fig. 86).

Co do pierwszego: Prowadzę równoległą GO do BK, to JK: OK=JB: GB: zamiast OK biorąc GH (115, 6) i otrzymuję JK: GH=JB: GB.—Jeśliby punkt zbiegu B był między równoległemi (fig. 87), to poprowadziwszy FL równolegle do EK, mamy: JK:KL =JB: BF; zamiast KL biorąc EF będzie JK: EF=JB: BF. *Co do drugiego*: Prowadzę z punktu zbiegu B prostopadłą BR (fig. 86) do równoległych JK i GH (78. Wn. 7), to stosunek linii BR do BP równa się stosunkowi linii JK do GH gdyż każdy z nich równa się stosunkowi BJ do BG, a przeto złożą proporcyę JK: GH=BR: BP.

Wn. 6. *Linie równoległe* AB i CD *dzielą się na części proporcyonalne, przez poprzeczne* EA, Ea, Eb, EB *wychodzące z jednego punktu* E (fig. 88); stosunek linii Aa i Ca', równie jak i stosunek linii ab i a'b', jako równe stosunkowi linii Ea i Ea', są sobie równe; podobnie stosunek linii ab i a'b' jest równy stosunkowi bB i b'D, gdyż każdy z nich równy stosunkowi Eb do Eb'; a zatém trzy stosunki Aa do Ca', ab do a'b' i bB do b'D są sobie równe i składają proporcyą ciągłą Aa: Ca'=ab: a'b'=bB: b'D.

Wn. 7. *Dwa trójkąty* ABC i FGH *mające po kącie równym i po dwa boki zawierające ten kąt propor-*

cyonalne, BA: GF=BC: GH, *mają i pozostałe kąty leżące naprzeciw boków proporcyonalnych, równe* A=F i C=H, *tudzież boki trzecie* AC i FH *w tym samym co dwa pierwsze stosunku* (fig. 89); przeniosłszy bowiem trójkąt FGH na ABC, tak aby kąt G przystał do kąta B równego sobie, punkta F i H padną na bokach AB i BC w punktach D i E; trójkąt DBE z trójkątem FGH mają boki i kąty równe (92), przeto BA: BD= BC: BE i linia DE jest równoległa do AC (Wn. 2), a tém samém kąt BDE=A i BED=C (78), tudzież AC: DE=AB: BD (Wn. 5).

Wn. 8. *Trójkąty* ABC i FGH *mające kąty równe* B=G, A=F, C=H *mają i boki naprzeciw tych kątów leżące proporcyonalne* AC: FH=BC: GH=AB: FG (fig. 89); przeniosłszy bowiem trójkąt FGH na ABC tak, aby kąty równe przystały do siebie, punkta F i H padną na boki tego trójkąta w D i E, i trójkąty DBE i FGH mające po kącie i po dwa boki z przeniesienia równe, mają wszystkie boki i kąty równe (92); lecz że kąt A=F=BDE, przeto linia DE równoległa do AC (77), a zatém AC: DE=BC: BE=AB: BD (Wn. 5), DE=FH, BE=GH, BD=GF; wstawiając za DE, BE, BD równe im linie, będzie: AC: FH=BC:GH= AB: FG.

Uw. Ztąd widzimy, że jeżeli jakakolwiek liczba zbiegających się przecina się z równoległemi, to odcinki ztąd wynikłe tak zbiegających się, jako i równoległych, są względem siebie proporcyonalne; odcinki zaś równoległych są zarazem proporcyonalne do odległości ich końców od punktu zbiegu.

140. *Tw. od: Jeżeli dwie zbiegające się* AB i CD *przecięte dwoma równoległemi* EF i GH, *przetniemy linią trzecią* JK *tak, że odcinki* JG i HK *przez nią utworzone są proporcyonalne, do odcinków zawartych między równoległemi, to linia ta* JK *jest równoległą do dwóch pierwszych* EF i GH (fig. 85).

Gdyby linia JK nie była równoległą do GH to byłaby inna linia JN równoległą, przeto EG: GJ=FH: HN a że z założenia EG: GJ=FH: HK przeto HN równałoby się HK, co być nie może.

141. *Tw. Przeciwprostokątnia* BC *przez prostopadłę* AD *wyprowadzoną z wierzchołka kąta przeciwległego dzieli się na dwa odcinki, tak że:* 1) *ramiona kąta prostego są średnio-jeometrycznie-proporcyonalne między przeciwprostokątnią a odcinkami przyległemi t. j.* BC: AC=AC: CD; 2) *prostopadła* AD *jest średnio-jeometrycznie-proporcyonalna pomiędzy dwoma odcinkami t. j.* CD: AD=AD: DB; 3) *przeciwprostokątnia tak się ma do jednego z ramion jak drugie ramię do prostopadłej* (fig. 90).

1) Trójkąty prostokątne ABC i ADC, mają kąt C wspólny, przeto jako równokątne mają boki proporcyonalne i BC: AC=AC: CD (40 Wn. 8), boki pierwszego stosunku leżą naprzeciw kątów prostych (43), drugiego zaś naprzeciw kątów równych B i DAC spełniających kąt C (46. Uw. 2).

2) Trójkąty prostokątne BAD i DAC mające kąty równe (gdyż kąt B=DAC), mają i boki proporcyonalne t. j. CD: DA=DA: DB; boki składające pier-

wszy stosunek leżą naprzeciw kątów równych DAC i B, zaś drugi, naprzeciw kątów równych C i DAB, jako spełniających pierwsze.

3) Trójkąty BAC i DAC równokątne mają boki odpowiednie proporcyonalne, przeto BC: AC= BA: AD, boki pierwszego stosunku leżą naprzeciw kątów prostych, zaś drugiego naprzeciw kąta wspólnego C.

Wn. 1. *Kwadrat* z liczebnéj wartości *przyprostokątniéj* AC *równa się iloczynowi* z liczebnych wartości *przeciwprostokątniéj* CB *przez odcinek* CD *leżący przy tym boku* t. j. $\overline{AC}^2=BC.DC$, gdyż w proporcyi BC: AC=AC: CD iloczyn średnich równa się iloczynowi skrajnych; podobnie $\overline{AB}^2=BC.BD$;—zatém $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=BC.DC+BC.BD$ czyli $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=BC(DC+BD)=BC.BC=\overline{BC}^2$ t. j. *kwadrat* z liczebnéj wartości *przeciwprostokątniéj równa się summie* podobnych *kwadratów z ramion kąta prostego.*

Wn. 2. *Kwadrat* z liczebnéj wartości *prostopadłéj na przeciwprostokątnią, równa się iloczynowi* z liczebnych wartości *odcinków przeciwprostokątniéj*, gdyż w proporcyi CD: AD=AD: BD iloczyn średnich równy iloczynowi skrajnych t. j. $\overline{AD}^2=CD.BD$.

Wn. 3. *Kwadraty* z liczebnéj wartości *przyprostokątnich mają się do siebie* jak odcinki im przyległe; gdyż $\overline{AB}^2=BC.BD$ i $\overline{AC}^2=BC.DC$ przeto $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BC.BD:BC.DC$ czyli $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BD:DC$. *Kwadrat z przeciwprostokątniéj tak się ma do kwadratu z przy-*

prostokątniéj, jak przeciwprostokątnia do odcinka przyległego temu bokowi, w proporcyi bowiem $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BD:DC$, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2:AC^2=BD+DC:DC$ czyli $\overline{BC}^2:\overline{AC}^2=BC:DC$.

Wn. 4. *Kwadrat z odcinka, tak się ma do kwadratu z prostopadłéj, jak ten odcinek do drugiego odcinka*, gdyż $\overline{AD}^2=CD.DB$ i $\overline{CD}^2=CD.CD$, przeto $\overline{AD}^2:\overline{CD}^2=CD.DB:CD.CD$ czyli $\overline{AD}^2:\overline{CD}^2=BD:CD$.

142. *Tw. W trójkącie* BAC *linia* AD *połowiąca kąt* A *wewnętrzny lub zewnętrzny, dzieli bok przeciwległy* BC *na dwa odcinki* BD i DC *proporcyonalne do boków* AB i AC *przy nich leżących* AB: AC= BD: DC (fig. 91).

1) Prowadzę z wierzchołków B i C prostopadłe BE i CF na połowiącą AE, trójkąty prostokątne BAE i ACF, mające kąty równe przy A z założenia, mają boki proporcyonalne: AB:AC=BE:CF (139. Wn. 8), dla podobnéj przyczyny trójkąty BED i DFC mają boki proporcyonalne t. j. BE: CF = BD: DC; w tych dwóch proporcyach dwa stosunki są równe, przeto i dwa drugie są także równe i składają proporcyą AB: AC=BD: DC.

2) *Linia* AD' *połowiąca kąt zewnętrzny* GAC, *dzieli także podstawę na dwa odcinki* D'B i D'C *proporcyonalne do boków im przyległych* AB i AC. Summa kątów BAC i CAG równa dwom kątom prostym, przeto połowa ich DAC+CAD=kątowi prostemu, czyli połowiąca AD kąt zewnętrzny, jest prostopadłą do

połowiącéj AD kąt wewnętrzny, połowiąca więc AD' wtedy tylko nie przetnie się z przedłużeniem podstawy BC, kiedy połowiąca AD kąt wewnętrzny A jest prostopadłą do podstawy, gdyż kąty jednostronne D'AD i D'DE, jako proste byłyby równe (75), t. j. gdy trójkąt ABC jest równoramienny (91. Wn. 3); w każdym zaś innym razie połowiąca AD' przecina przedłużoną podstawę BC w punkcie D'. Z dwóch innych wierzchołków B i C prowadzę prostopadłe BE' i CF' na E'D' połowiącą kąt zewnętrzny GAC; trójkąty ABE' i ACF' mające kąty równe, mają boki proporcyonalne t. j. AB:AC=BE': CF', podobnie trójkąty E'D'B i F'D'C dają; BE': CF'=D'B: D'C, aże dwa stosunki są jednakowe, przeto dwa drugie, jako im równe, są sobie równe i złożą proporcyę AB: AC =D'B: D'C.

143. *Uw.* Stosunek boków trójkąta równa się stosunkowi odcinków podstawy, utworzonych tak przez AD połowiącą kąt wewnętrzny BAC, jak i przez AD' połowiącą kąt zewnętrzny GAC, przeto stosunek pierwszych odcinków równa się stosunkowi drugich, czyli odcinki te są proporcyonalne t. j. DB: DC=D'B: D'C. *Punkta* D i D' *dzielące linie* BC *na odcinki proporcyonalne, zowią się punktami sprzężonemi*, linia zaś BC jest podzielona *harmonijnie* przez punkta D i D' i *proporcyą* DB: DC=D'B: D'C zowie się *harmonijną* i w téj proporcyi biorąc poprzednik do poprzednika, zaś następnik do następnika, będzie BD: BD'= CD: CD' linia więc DD' przez punkta B i C jest podzielona *har-*

monijnie, czyli *punkta* B, C, D, D' są *harmonijne. Linie zbiegające się w jednym punkcie* AB, AC, AD i AD' *i dzielące linię* BC *harmonijnie*, *zowią się promieniami harmonijnemi*, AD względem kąta BAC, zaś AC względem kąta DAD', *wszelka linia przecinająca promienie harmonijne, jest podzielona harmonijnie*, gdyż warunkiem harmonii było to, aby AD połowiło kąt BAC, zaś AD' było do niéj prostopadłem, co i przy każdéj innéj podstawie ma miejsce.

Jeżeli promień harmonijny AD *połowi kąt* BAC, *to promień z nim sprzężony* AD' *jest do niego prostopadły.*

144. *Zg. Daną linię prostą* AB *podzielić na ilekolwiek części równych np. na pięć* (fig. 92).

1o. Przez koniec A danej linii prowadzę prostą AG i przenoszę na nią dowolną linią pięć razy od A do G; punkt E z B łączę prostą GB, zaś przez punkta F, E, D, C prowadzę równoległe FH, EJ.. do GB, które dzielą linię daną na części równe (138).

Sposób ten jest dogodny gdy równoległe prowadzą się zapomocą węgielnicy rysunkowej (81, 3).

2re. Odciąwszy na linii AG części równe, przez punkt B prowadzę BP równoległą do AG i przenoszę od punktu B linię, równą przenoszonéj na AG; punkta podziałów połączone prostemi FM, EP i t. d. dają linie równoległe do BG, gdyż czworokąty EB, EM są równoległobokami (116), przeto linia AB jest podzielona w punktach H, J K, L na części równe.

3*ie*. Do linii danéj AB (fig. 93) prowadzą równoległą CD, i odcinam na niej od C do D pięć części równych, koniec danej linii AB z końcami linii CD łączę prostemi, które przetną się w punkcie J, jeśli AB nie jest równa CD (116,4); linie łączące punkt J z podziałami linii CD, dzielą AB na części równe, gdyż w jakim stosunku są odcinki linii CD, w takim samym stosunku są odcinki linii AB (139. Wn 6), aże odcinki linii CD są sobie równe, przeto i odcinki AK,KL.. linii AB są sobie równe.

4*te*. Daną linię AB podzielić na trzy równe części (fig, 94). Prowadzę linię AC i odcinam na niéj od punktu A do C cztery części równe t. j. o jedną więcéj aniżeli linia AB ma mieć części, koniec ostatniego podziału z drugim końcem danej linii łączę prostą CB i przenoszę na jej przedłużenie od punktu B linię CB trzy razy t.j. tyle, na ile części ma być podzielona linia AB; punkta odpowiednie linii CA i CK łączę prostemi, a te podzielą linię AB na równe części, gdyż linie HJ, MG i NA są równoległe jako dzielące linie CA i CN na części proporcyonalne, — przeto linie BA i BN są przecięte równoległemi HJ, MG i NA, a że linia BN jest podzielona na części BH, HM i MN równe, więc i linia BA jest także podzielona na części BL, LK i KA równe (138).

145. *Zg. Przez punkt dany* C *poprowadzić linię równoległą do* AB, *nieużywając kątów*(fig.95).

Punkt C z punktem A łączę linią prostą, przez środek E téj linii prowadzę prostą EB, przecinającą daną linię w B, i na jéj przedłużeniu odcinam ED=EB, a linia CD jest żądaną, gdyż linie AC i DB są podzielone na części proporcyonalne (139. Wn. 2).

Podobnym sposobem prowadzi się równoległa na gruncie.

146. *Zg. Do trzech linii danych* A, B, C *znaleść czwartą proporcyonalną* t. j. oznaczyć wielkość nieznanéj linii x takiéj aby A: C=B:x (fig. 96).

Prowadzę dwie zbiegające się DE i DF, na jedną przenoszę linię A od D do G, linię B od GH, na drugiéj zaś, linię C od D do J; punkt G z J łączę prostą GJ i przez punkt H prowadzę do niéj równoległą HK a linia JK jest żądaną, gdyż DG:GH=DJ:JK (139. Wn. 3), czyli A: B=C: JK, przeto x=JK.

Jeśliby linia szukana nie była czwartym wyrazem proporcyi, to za pomocą zmiany miéjsca w proporcyi, możemy zrobić ją czwartym wyrazem.

Proporcya A. B=C: x daje $x=\frac{B.\,C}{A}$ przeto znajdując x *wykreślimy stosunek iloczynu dwóch linij do linii trzeciéj*; stosunek ten jest linią, gdyż stosunek $\frac{B}{A}$ jest liczbą, przez którą pomnożone C (10) daje linię żądaną x, i tak jeśli $x=\frac{5}{3}C$, to linię C podzielilibyśmy na 3 części, a pięć tych części byłoby linią żądaną x.

Jeżeli linia B=C, to tym sposobem *do dwóch linii* A i B *znajdziemy trzecią proporcyonalną* (fig. 97).

147. *Zg. Daną prostą* AC *podzielić w stosunku danym* (fig. 98).

Przez końce A i C danéj prostéj AC prowadzę dwie równoległe AB i CD w przeciwnym kierunku; jeżeli stosunek jest dany w liniach, to jedną z nich przenoszę od A do B, a drugą od C do D, jeżeli zaś w liczbach np. 3:2 na AB przenoszę dowolną linię trzy razy od A do B, a na CD tę samą linię dwa razy od C do D, punkt B z D łączę prostą BD i ona podzieli linię AC w stosunku żądanym, gdyż AE: EC= AB: CD (139. Wn. 5), przeto stosunek linii AE i EC równa się albo stosunkowi linii danych, albo stosunkowi 3 i 2, bo AB ma takich linii trzy jakich CD dwie (12).

148. *Zg. Dane proste* a, b, c *podzielić razem na trzy części równe* (fig. 99).

Na linii AB większéj od każdej z linji danych odcinam trzy równe części od A do B i kreślę trójkąt foremny (109. 2°); od punktu C na dwóch innych bokach odcinam linie dane CF=CJ=a, CE=CH=b, CD=CG=c; linie więc FJ, EH i DG są równoległe, gdyż w trójkącie CEH, linia DG dzieląca boki trójkąta na części proporcyonalne jest równoległą do podstawy (139. Wn. 2), podobnie EH równoległa do FJ zaś FJ do AB. Linia FJ równa się linii a, gdyż AB: AC=FJ: FC (139. Wn. 5); aże AB=AC z wykreślenia przeto i FJ=FC, lecz FC=a to i FJ=a, podobnie EH =b, DG=c. Punkt C z punktami K i L łączę prostemi, a linie równoległe dzielą się przez nie na części proporcyonalne do odcinków linii AB (139. Wn. 6), a tém samém na części równe.

149. *Zg. Przez punkt dany* A *w kącie* BCD *poprowadzić prostą połowiącą się w tym punkcie* (fig. 100).

Przez punkt A prowadzą linię AE równoległą do jednego z ramion GD, przecinającą się z drugiém ramieniem w punkcie E; odcinam EF=EC, a linia FA jest żądaną, gdyż równoległe GC i AE dzieląc jedną zbiegającą się EF na części równe, dzielą także i drugą FG (138).

150. *Zg. W trójkącie równoramiennym* BAC *poprowadzić równoległą tak, aby odległość końca jej odcinka od końca odpowiedniego podstawy, równała się odcinkowi równoległéj* (fig. 101.)

Przedłużam podstawę BC tak, aby to przedłużenie CD równało się ramieniowi AC, punkt A z D łączę linią prostą AD i przez wierzchołek C prowadzę do niej równoległą CE, a ona na drugim boku wyznacza punkt E, przez który poprowadzona równoległa EF EF jest żądaną; poprowadziwszy FG równolegle do AD, linia EF=CG, jako równoległe zawarte między równoległemi (115, 6); lecz CD=CA zwykreślenia, przeto CG=CF; aże AC=AB założenia więc i FC=EB (139. Wn. 3), odcinek zaś CF=CG=EF przeto odcinki te równe odcinkowi EF równoległej.

151. *Zg. Do dwóch danych* a i b *znaleźć średnio jeometrycznie-proporcyonalną* (fig. 102).

Na linii nieograniczonej odcinam linię *a* od B do D zaś *b* od D do C, z punktu D wyprowadzam prostopadłą, która ma przechodzić przez wierzchołek trójkąta prostokątnego, lecz że wierzchołek trójkąta prostokątnego znajduje się od środka przeciw prostokątnéj BC w takiéj odległości, jak końce B i C (107), przeto ze środka S prostej BC zakreślam łuk przecinający prostopadłą w A i linia DA jest żądaną gdyż w trójkącie prostokątnym BAC mamy, BD: DA =DA: DC (141. 2).

152. *Zg. Daną linię prostą* BC *podzielić harmonijnie* (fig. 91).

Na linii danéj BC kreślę trójkąt nierównoramienny BAC, połowię kąt A i do połowiącéj DA, przez punkt A prowadzę prostopadłą AD', a punkta D i D' są sprzężone i dzielą harmonijnie linię BC (143).

153. *Zt.* W przerysowywaniu figur często potrzeba je zmniejszać lub powiększać, przyczém linie proste, łączące odpowiednie wierzchołki narysowane lub wyobrażalne, powinny być jednakowo powiększane lub zmniejszane.

Stosunek linii przerysowanéj figury lub przedmiotu do linii kopii, może być liczebny lub linijny, b) niewiele lub wiele różniący się od jedności. Dla znalezienia każdej linii kopii odpowiedniéj linii figury potrzeba by do dwóch linii wyrażających stosunek i do każdej z linii figury, szukać czwartej jeometrycznie proporcyonalnéj. Dla uniknienia tego, jeżeli dany stosunek nie bardzo różni się od jedności, używamy.

1° *Kąta przywiedzenia* (angle de réduction). Jeżeli potrzeba aby linie proste figury do linji kopii były w stosunku prostych a:b lub liczby 5:2 co na jedno wychodzi, gdyż wtedy linia *a* zawierałaby 5 takich części, jakich *b* dwie; — to na linii nieograniczonéj od A do D (fig. 103) odcinam linię *a*, z punktu D promieniem *b* zakreślam łuk, zaś z punktu A promieniem *a* przecinam ten łuk w punkcie C, linia więc *b* nie może być dwa razy większą od linii *a*, gdyż koła nie przecięłyby się; punkt C z punktami A i D łączę prostemi i kąt CAD jest kątem przywiedzenia. Odcinki AD i AC są sobie równe, przeto i odcinki AE i AF utworzone przez wszelką równoległą EF do CD, jako będące w tym samym co odcinki AD i AC stosunku, są sobie równe. *Dla znalezienia linii odpowiedniéj prostéj* n *figury, przenoszę tę linię od wierzchołka* A *na ramiona kąta* CAD *przywiedzenia, a drugie ich końce* F i E *są końcami linii szukanej*; gdyż linie AE i AF, tak jak linie AD i AC, są sobie równe przeto stosunki ich jako równe jedności są jednakowe i one składają proporcyę, a tém samém linie DC i EF są równoległe (139. Wn. 2); a zatém stosunek prostych AD i DC równa się stosunkowi prostych AE i EF czyli linia EF jest w danym stosunku do linii *n*.

2re Żeby nie rysować za każdym razem kąta przywiedzenia, używamy w tym celu *cérkla proporcyonalnego*. Narzędzie to składa się z dwóch metalicznych liniałów złączonych zawiaską, na których są poprowadzone dwie linie proste przecinające się w środku sztyfcika, około którego obracają się te liniały; proste te są podzielone na części, z których tylko dziesiąte oznaczają się liczbami.—Użycie cérkla proporcyonalnego jest takież same jak i kąta przywiedzenia, którego ramionami są proste poprowadzone na liniałach; na te linie od punktu ich przecięcia się przenosimy linię figury, i roztwieramy cérkiel tak, aby odległość między drugiemi ich końcami równała się linii kopii. Gdy stosunek jest liczebny np. 5:6. roztwieram cerkiel tak, aby odległość między 50temi podziałami prostych będących na liniałach, równała się 60 podziałom, wtedy te linie są ramionami kąta przywiedzenia.

3cie Kąt przywiedzenia, równie jak cerkiel proporcyonalny, używa się tylko do pomniejszania przerysowywanego przedmiotu; do powiększania wtedy tylko służyć mogą, gdy stosunek jest mniejszy od dwóch. Narzędzie zarówno służące do powiększania i zmniejszania, zowie się *cérklem czterokończastym*. Urządza się na téj zasadzie, że stosunek równoległych będących z przeciwnych stron punktu zbiegu, równa się stosunkowi odległości ich końców od tego punktu. Jeśli linię EK (fig. 87) podzielimy w danym stosunku w punkcie B i z tego punktu promieniem BK zakreślimy łuk, zaś z punktu K promieniem równym linii przedmiotu, przetniemy ten łuk w punkcie J, punkt J z B połączymy prostą JB i przedłużymy ją tak, aby BF=BE, to linia EF jest równoległa do JK, gdyż stosunki odcinków JB, BK i BF, BE jako równe jedności są sobie równe; — przeto stosunek linii JK:EF równy stosunkowi KB:BE, czyli te linie są w stosunku danym; a zatém: *linii prostej figury zawartéj między jednemi dwóma końcami* JK, *odpowiada w kopii linia zawarta między drugiemi dwóma końcami* EF. Cerkiel czterokończasty składa się z dwóch liniałów równéj długości mających podłużne wyżłobienie w którém znajduje się sztyfcik posuwający się razem w obu wycięciach: obrączka obejmująca oba liniały łączy je z sobą. Z boków tego wycięcia przechodzą linie zakończone ostrzami cerkla, podzielone na równe części. Dla ustawienia nóżek przy danym stosunku, linię EK równą długości prostéj liniału dzielimy w tym stosunku (47), od ostrza przenosimy odcinek BK na prostą cerkla i jeśli ona pada na 60ty podział, to sztyft ustawiamy w przecięciu się 60tych podziałów linii prostych cerkla; wtedy odcinki z każdéj strony punktu przecięcia się są sobie równe, linie przez ostrza przechodzące są równoległe i znajdują się w danym stosunku.

4te Przerysowywane proste, mogą być tak długie, że nie możemy użyć żadnego z powyższych sposobów, *np.* linie proste wyobrażalne wyrażające odległość poziomą między pionowemi liniami, przechodzącemi przez punkta wzięte na gruncie; do zmniejszania ich w jednakowym stosunku używamy *podziałki* czyli *skali.* Linie te nie zmniéjszają się wprost jak poprzedzające, ale naprzód ich długość wyraża się w sznurach i przy zdejmowaniu planu, niewymagającego wielkiéj ścisłości, mierzą się sznurem lub półsznurem czyli łańcuchem. Sznur składa się z dziesięciu prętów, pręt z dziesięciu pręcików, pręcik z dziesięciu ławek równających się trzem ćwierciom łokcia; sznur przeto ma łokci 75=ćwierci 300=cali 1800. Stosunek linii poziomej zawartej między dwoma przedmiotami do linii prostej rysunku, wyraża się liczbą. Dla zmniejszenia linii poziomej w danym stosunku zmniejszyć tylko potrzeba linię przyjętą za jedność do jej mierzenia czyli sznur; np. gdy linię A długą 5 sznurów (zaś sznur jest linią prostą, długą 75 łokci) trzeba zmniejszyć o 12 razy, wtedy biorąc 5 razy dwunastą część sznura, otrzymamy linię 12 razy mniejszą od linii danej, gdyż stosunek można mnożyć przez jednakową liczbę, czyli: w jakim stosunku zmniejszymy wszystkie części linii poziomej, w takim samym zmniejszy się i cała linia. Skala więc służy do tego aby tak jedność przyjętą do mierzenia, jako też i jej jednostki, czyli części jedności, zmniejszyć jednakową liczbę razy, t. j. aby linię, daną liczbę razy mniejszą od linii przyjętej za jedność, podzielić na takie części na jakie podzielona ta jedność np. łokieć jest podzielony na cztery części zwane ćwierciami, ćwierć na sześć części zwanych calami; podobnie sznur na 10 części równych zwanych prętami, pręt na dziesięć części równych zwanych pręcikami.

Jeżeli linię prostą ograniczoną, zwaną sznurem, chcemy zmniejszyć o 900 razy, to biorąc 900tną część długości tej linii wyrażonej *np* w calach, otrzymamy długość linii o 900 razy mniejszej od sznura t. j. dwa cale (fig. 104): Linia AB w rysunku wyraża sznur, dzielę ją na dziesięć części równych B1,12... to każda z nich w rysunku wyrażać będzie pręt, gdyż jest 900 razy mniejsza od dziesiątej części sznura dla otrzymania dziesiątéj części linii B1, odpowiadającéj dziesiątej części pręta, z przyczyny małej długości tej linii niemożemy jéj dzielić wprost na 10 części równych, gdyż podziały zlewałyby się z sobą, ale uskuteczniamy to na zasadzie proporcyonalności linii. Na linii AB rysuję prostokąt AE lub równoległobok (121, a lub c), którego bok BE dowolny, bok BE i jemu przeciwległy AF dzielę na 10 części równych, bok FE przeciwległy bokowi AB dzielę także na 10 części równych; punkt pierwszego podziału linii AB z punktem drugiego podziału linii FE łączę linią prostą, drugiego AB, z trzecim—boku FE i t. d. punkta zaś odpowiednie podziałów dwóch drugich przeciwległych boków łączę liniami prostemi. Linia ac jest dziesiątą częścią linii DE a tém samém i równéj jej linii B1, gdyż linia Bc jest dziesiątą częścią linii BE (139.Wn. 5), a przeto odpowiada w rysunku dziesiątéj części pręta, czyli pręcikowi; podobnie linia *bd* jest dwoma dziesiątemi częściami lini B1=DE, gdyż linia Bd zawiera dwie dziesiąte części: *Bc* i *cd*, linii BE, przeto odpowiada w rysunku dwóm pręcikom; linia 3e trzem pręcikom, 4f czterem pręcikom i t. d.

Jeśli więc przerysowana linia zawiera w sobie sznur 1, prętów 5, i pręcików 4, to linia odpowiednia jéj w rysunku będzie KL, gdyż K4 jest 900 razy mniejsza od sznura fL=B5 (115, 6), jest 900 razy mniejsza od pięciu prętów, zaś 4f od 4 pręcików, a zatém KL jest 900 razy mniejsza od zamierzonéj linii na gruncie. Punkt L jest przecięciem się linii przechodzących przez podziały odpowiednie liczbie prętów 5 i pręcików 4.

Skala zazwyczaj robi się na metalu lub kości, żeby się nie zniszczyła przez częste używanie. Gdy skala jest zrobiona, dla znalezienia stosunku zmniejszania, mierzymy długość linii wyrażającéj sznur i szukamy ile razy jéj długość, wyrażona w liczbie, jest mniejsza od podobnie wyrażonéj długości sznura, np. jeśli równa się 15 linijkom, to ponieważ sznur zawiera w sobie linijek $12 \times 1800 = 21600$, a 15 linijek od 21600 linijek jest mniejsze 1440 razy, przeto za pomocą téj skali zmniejszymy linie brane na gruncie 1440 razy.

5te Podobnym sposobem robimy podziałkę do zmniejszania w danym stosunku i innych miar, i tak jeśli chcielibyśmy podzielić linię prostą AB, 72 razy mniéjszą od sążnia t. j. długą na cal na części odpowiednie stopom i calom, czyli na sześć części równych a jedną z tych części na dwanaście części równych, linię tę (fig. 105), dzielimy na sześć części równych BE, EF... i rysujemy na niéj prostokąt AH lub równoległobok,—bok BH leżący przy AB i jemu przeciwległy AF dzielimy na 12 części równych, podziały boków AB i FH łączymy prostemi BJ... zaś podziały boków BH i AF łączymy odpowiednio, a linia *ab* jest dwunastą częścią linii JH=EB, gdyż B*a* jest takąż częścią linii BH (139. Wn. 5), podobnie *cd* stanowi dwie dwunaste części linii JH=EB, gdyż Be zawiera dwie linie Ba i ac będące dwunastą częścią linii BH i t. d. Chcąc mieć linię 72 razy mniejszą od sąż. 2, stop. 3, cali 8, od punktu K przecięcia się prostych przechodzących przez podziały odpowiednie liczbie stop i cali t. j. trzeci linii BA i ósmy linii BH, bierzemy linię KL równoległą do AB aż do linii DM przechodzącéj przez drugi podział D, otrzymany z przeniesienia linii AB na swoje przedłużenie, linia KL jest 72 razy mniejsza od sąż 2—stop. 3—cali 8, gdyż linia 8L jest 72 częścią 2 sążnie, Ko=3B takąż częścią stop 3, zaś oS, cali 8miu.

154. *Zt.* Przez dwa punkta A i B (fig. 106) prowadząc linię prostą AB, gdy popełnimy błąd np. o piątą część linijki t. j. linia AB przechodząc przez punkt A przechodzi z boku punktu B w odległości ⅕ linijki (51. Wn. 1) przez punkt C, to przedłużając tę linię omyłka się powiększa tak, że jeśli linię AC przedłużymy o sto cali, omyłka powiększy się sto razy; czyli koniec E linii AC będzie w odległości ⅕ linii $\times$ 100=25 lin. od linii AB gdyż linie DE i BC są w stosunku odległości ich końców odpowiednich od punktu zbiegu A (139. Wn. 5). Dla zmniejszenia więc błędu potrzeba prowadzić prostą przez końcowe, nie zaś przez środkowe jej punkta, *np.* w kreśleniu skali, przez podziały boków przeciwległych prostokąta lub równoległoboku.

155. *Zt. Mierzenie linii prostéj* AB *za pomocą po-*

działu linii CD, *przyjętéj za jedność na części równe* (fig. 107).

Przenoszę linię CD na AB, zawiera się w niéj 3 razy od A do a i pozostaje linia aB $<$ CD;—dla dowiedzenia się jaką częścią aB jest jedności CD zamiast przenosić aB na CD (11), przenoszę połowę jedności Cc na aB zawiera się raz od a do b i pozostaje bB mniéjsze od Cc; przeto linia AB$=$A$a$$+$$ab$$+$$bB=$3 jednościom CD$+$połowie jedności i więcéj linią bB; dla dowiedzenia się jaką częścią linia bB jest jedności, przenoszę trzecią część jedności, Cd na bB; jeśli ona jest większa od bB, to przenoszę czwartą część jedności Ce, jeśli i ta jest większa od bB, przenoszę piątą część jedności Cf, która jeśli jest mniejsza od bB, to zawiera się w niéj raz tylko od b do g, gdyż $\frac{1}{4} < \frac{2}{5}$, i t. d.—azatém linia CD $= 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$... jedności CD, gdzie pierwsza przybliżona wartość jest 3, druga $3 + \frac{1}{2}$, trzecia $3\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ i t. d. Jeżeli tym sposobem otrzymamy jakąkolwiek część jedności zawierającą się zupełnie w reszcie, to linia AB jest wymierzoną względem jedności CD, w przeciwnym razie jest nie wymierną. Tym sposobem starożytni wyrażali stosunki wielkości.

Na téj zasadzie robią się wszelkie miary, i uskuteczni się za pomocą ich mierzenie, i tak: mierząc sążniem, przenosimy go na linię mierzoną, zaś na resztę ztąd pozostałą połowę łokcia, czyli stopę$=\frac{1}{6}$ sąż. na resztę ztąd otrzymaną, ćwierć$=\frac{1}{12}$ sąż.—następnie cal$=\frac{1}{6 \cdot 12}=\frac{1}{72}$ sąż. linię$=\frac{1}{12 \cdot 72}=\frac{1}{864}$ i t. d. Mierząc więc sążniem lub inną miarą, nie przenosimy jéj części kolejno po sobie idących t. j. $1/2$, $1/3$, $1/4$ i t. d. ale tylko niektóre części jak w sążniu $1/3$, $1/6$, $1/12$, $1/72$, $1/864$, przeto linia niewymierna przy tém mierzeniu sążniem może być wymierną np. $1/5$ sążnia, gdyż liczby 3, 6, 12, 72... niezawierają czynnika 5. Podział więc miary długości na jednostki tém jest lepszy, im więcéj ma czynników, gdyż więcéj części jedności przenosimy na mierzoną linię, a tém samém większe prawdopodobieństwo, że linia wymierna da się zupełnie zmierzyć jednością. Liczba $72=2.2.2.3.3$, zaś $100=2.2.5.5$ i dla tego podział dziesiątkowy lubo dogodniejszy przy rachunku, przy mierzeniu jest niedogodny, gdyż trzecia część jedności podług niego nie da się zmierzyć. Przy dzieleniu miary na jednostki, na trzy rzeczy zwracać powinniśmy uwagę: *a*) aby liczby wyrażające części z jak najwięcéj składały się czynników *b*) aby czynniki początkowe 2. 3. 5. w ich skład wchodziły *c*) aby liczba podziałów była jak najmniejsza;—wszystkich tych warunków razem uskutecznić niemożna, lecz rachunek wskazuje jaki podług nich najdogodniejszy jest podział; dawny podział okręgu koła, piękny tym względzie przedstawia przykład.

Dla rachunku dogodniejszy jest ten drugi sposób mierzenia linii, lecz przy mierzeniu dogodniejszy jest pierwszy (11), chociaż prawie nieużywany nawet przy najściślejszém mierzeniu; łatwiéj bowiem przenosić linię, aniżeli ją dzielić na równe części.

156. Zt. *Zmierzyć wysokość pionowego przedmiotu* (fig. 108).

1° Jeżeli grunt przy podstawie jest prawie poziomy w pewnej odległości dwie tyki CF i DE pionowo wkierunku linii prostéj AD i patrząc przez wierzchołek E drugiéj tyki DE na wierzchołek B mierzonego przedmiotu AB, naznaczony na pierwszéj tyce punkt F leżący na wyobrażalnéj prostéj EB; mierzymy wysokość tyk DE i CF do punktu F, tudzież proste poziome CD i CA. Wyobraziwszy prostą EH poziomą ta na przedmiocie AB odetnie AH=ED (115. Wn. 2) odcinki BH i GF równoległych są w stosunku odległości ich końców H i G do punktu zbiegu E (139 Wn. 5), przeto HB : FG=HE : GE, a ztąd $BH=\frac{FG \cdot HE}{GE}$ dodawszy do wynalezionéj wartości wysokość tyki mniejszéj ED; otrzymamy wysokość AB mierzonego przedmiotu.

2°. Jeżeli grunt nie jest poziomy, lub mierzenie wymaga większéj ścisłości (fig. 109), ustanawiam tyki DE i CF; — oznaczam różnicę odległości punktów A, F, D i C z D od poziomu (64). mierzę linie poziome *gh* i *hk* żerdzią ustawianą poziomo za pomocą poziomu mularskiego (63) lub libelli (67), podobnie jak poprzednio wynalazłszy wysokość *n*B, dodawszy do niej *Ac*—*cn*, otrzymamy wysokość AB—Przytem trzeba uważać że od wysokości żerdzi CF, odejmuje się lub dodaje się, różnica odległości punktów C i D od poziomu, podług tego czy punkt C, jest bardziej oddalony, lub bliżéj leży poziomu a niżeli punkt D.