ROZDZIAŁ IV.

Połączenia okręgów kół.

§ 1. Warunki nieprzecinania się i równoległości; przecinania się i styczności.

214. Prosta łącząca środki dwóch okręgów zowie się *linią środków*, linia ta może być albo mniejsza, albo równa, albo większa od różnicy promieni; będąc większą od różnicy promieni, może być mniejszą, równą lub większą od summy promieni. Z tych sześciu stosunków linii środków do promieni, wynikają warunki wzajemnego położenia okręgów leżących na płaszczyznie. Koła leżące na płaszczyznie mogą mieć dwa punkta wspólne (26) i zowią się *przecinającemi się*, gdy zaś te dwa punkta zlewają się w jeden, okręgi zowią się *stycznemi*; albo też okręgi nie mają żadnego punktu wspólnego i są *oddzielnemi*, jeśli zaś punkta jednego okręgu są jednakowo oddalone od okręgu drugiego, okręgi zowią się *równoległemi* jakiemi są *wspól-środkowe*. Okręgi mogą być styczne i oddzielne wewnętrznie lub zewnętrznie, podług tego, czy punkta jednego leżą wewnątrz lub zewnątrz drugiego.

215. *Tw. gł. Okręgi kół są: a) oddzielne lub b) styczne wewnętrznie, c) przecinające się, d) styczne lub e) oddzielne zewnętrznie,—gdy linia środków jest:* a) *mniejsza lub* b) *równa różnicy promieni*—c) *większa od różnicy, lecz mniejsza od summy*—d) *równa lub* e) *większa od summy promieni.*

a) *Zak.* AB $\prec$ AC—BD. *Tw.* że wszystkie punkta okręgu B leżą wewnątrz okręgu A (fig. 165).

Przedłużam linię środków AB do przecięcia się z okręgami w punktach D i C; punkt D leży w okręgu A, gdyż odległość jego DA od środka tego koła, jest mniejsza od promienia AC, bo z założenia różnica promieni jest większa od linii środków AB. Punkt H okręgu B leży wewnątrz okręgu A, gdyż oddalenie jego AH od środka tego okręgu, jest mniejsze od promienia AC, bo AH $\prec$ AB+BH czyli od AD, lecz AD $\prec$ AC to tém bardziéj AH $\prec$ AC.

b) *Zak.* AB=AC—BC. *Tw.* że okręgi A i B są styczne wewnętrznie (fig. 166).

Przedłużam linię środków AB do przecięcia się z okręgami; punkt C przecięcia się téj linii z okręgiem B, leży na okręgu A, gdyż odległość jego od środka tego koła równa się promieniowi,—bo jeśli linia środków AB równa się różnicy promieni, to promień koła mniejszego BC, powiększony linią środków, równa się promieniowi okręgu A większego; punkt H okręgu koła B leży wewnątrz okręgu A, gdyż AH $\prec$ AB+BH czyli od AC, przeto wszystkie punkta okręgu koła B, oprócz punktu C leżącego na okręgu A, leżą wewnątrz tego okręgu, a tém samém okręg B jest styczny wewnętrznie z okręgiem koła A.

c) *Zak.* AB $\succ$ AC—BD czyli AB+BD $\succ$ AC i AB $\prec$ AC+BD czyli AB—BD $\prec$ AC. *Tw.* że okręgi przecinają się (fig. 167).

Punkt D okręgu koła B leży wewnątrz okręgu A, gdyż AD=AB—BD, a że AB—BD podług założenia jest mniejsze od promienia okręgu A to i $AD < AC$; punkt K okręgu B leży zewnątrz okręgu A, gdyż $AK = AB + BK$, a że podług założenia linia środków z promieniem koła mniejszego, jest większa od promienia koła większego A to i $AK > AC$; a zatém okręg B jako mający jeden punkt wewnątrz zaś drugi zewnątrz okręgu A, przecina się z tym okręgiem.

d) *Zak.* $AB = AC + BC$. *Tw.* że okręgi są styczne zewnętrznie (fig. 168).

Punkt D przecięcia się z okręgiem B znajduje się na okręgu A gdyż $CA = AB - BD$, t. j. promieniowi koła większego, dla podobnéj przyczyny i punkt C przecięcia się z okręgiem koła A leży na okręgu B, przeto te punkta przecięcia się linii środków z okręgami są jednym punktem wspólnym dla tych obu okręgów; wszystkie inne punkta okręgu B leżą zewnątrz okręgu A, gdyż połączywszy punkt H ze środkami kół A i B, linia $AH + HB > AC + CB$ czyli $AH > AC$.

e) *Zak.* $AB > AC + BD$. *Tw.* że okręgi są oddzielne zewnętrznie (fig. 169).

Punkt D przecięcia się linii środków AB z okręgiem B leży zewnątrz okręgu A, gdyż $AD = AB - BD$, a że z założenia promień okręgu A jest mniejszy od linii środków zmniejszonéj promieniem drugiego okręgu, przeto $AD > AC$; wszystkie inne punkta okręgu koła B leżą zewnątrz okręgu koła A, gdyż $AH + HB > AD + DB$ czyli $AH > AD$ zaś $AD > AC$, to tém bardziéj $AH > AC$.

216. *Tw. od. W okręgach:* a) *oddzielnych, linia środków jest mniejsza od różnicy, lub większa od sum-*

my promieni; b) *w przecinających się, większa od różnicy, lecz mniejsza od summy*; c) *w stycznych równa różnicy lub summie promieni.*

a) Linia środków jest mniejsza od różnicy promieni lub większa od summy; gdyż jeśliby była równa różnicy, to okręgi byłyby styczne wewnętrznie, jeśliby była większa od różnicy a mniejsza od summy, okręgi przecinałyby się i nakoniec jeśliby była równa summie, okręgi byłyby styczne, co się sprzeciwia założeniu. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy innych przypadków.

Wn. 1. Punkt C dotknięcia się okręgów stycznych leży na linii środków, gdyż jeśliby leżał zewnątrz téj linii w punkcie H (fig. 166 i 168), to poprowadziwszy promienie do tego punktu, w pierwszym razie różnica promieni byłaby mniejszą, w drugim summa promieni większą od linii środków AB, a tém samém okręgi niebyłyby styczne; styczna więc w punkcie zetknięcia się okręgów, jest ich wspólną styczną, jako linia prosta prostopadła do obudwóch promieni.

Wn. 2. *W okręgach oddzielnych zewnętrznie, odcinki linii środków, utworzone przez okręgi, mierzą najmniejsze i największe oddalenie się punktów tych okręgów; w oddzielnych zaś wewnętrznie, odcinek od strony środka mniejszego okręgu, mierzy najkrótsze oddalenie*; dla oddzielnych wewnętrznie (fig. 165) linia $CD = AC - (AB + BD)$, zaś $HE + HB + AB > AE$ czyli $HE > AE - (HB + BA)$ przeto $CD < HE$; dla oddzielnych zewnętrznie (fig. 169), *a*) $Bd + dc + cA >$

BD+DC+CA czyli $dc > DC$, *b*) $Bd'+BA+Ac' > d'c'$ czyli $D'C' > d'c'$.

Wn. 3. W kołach przecinających się (fig. 167), linia środków jest prostopadłą do cięciwy łączącéj punkta E, H przecięcia się, gdyż środki kół A i B są równo oddalone od końców téj cięciwy.

217. *Tw. Okręgi oddzielne wewnętrznie, mające środki w jednym punkcie, są względem siebie równoległe* (fig. 170).

Odcinek CD wspólnego promienia zawarty między temi okręgami, mierzy najkrótsze oddalenie się punktu D jednego okręgu od okręgu drugiego; gdyż CD równa się różnicy promieni, zaś każda inna linia DE jest od niéj większa; linie te mierzące najkrótsze oddalenie punktów jednego okręgu od okręgu drugiego są sobie równe, jako różnice równych promieni, przeto i oddalenia punktów jednego okręgu od współśrodkowego są jednakowe, czyli okręgi współśrodkowe są względem siebie równoległe.

Wn. Łuki GC i FD okręgów współśrodkowych, zawarte między promieniami koła większego, zawierają jednakową liczbę stopni, jako odpowiednie kątowi CAG zawartemu między temi promieniami.

218. *Zg. Względem okręgu danego* A, *danym promieniem* BD *nakreślić okręg* a) *oddzielny wewnętrznie albo zewnętrznie.* Na promieniu (fig. 165) AC okręgu, albo (fig. 169) od punktu D wziętego na przedłużeniu promienia AC odcinam promień dany DB i

tym promieniem z punktu B zakreślam okręg koła; b) *przecinający go w punktach* H i E (fig. 167). Z punktu B leżącego w odległości promienia BD od punktów H i E zakreślam okręg koła i ten jest żądanym; c) *styczny wewnętrznie lub zewnętrznie*. Od końca promienia C na tym promieniu (fig. 166) lub jego przedłużeniu (fig. 168) odcinam promień dany od C do B to punkt B jest środkiem żądanego okręgu.

219. *Zt.* W rzemiosłach, koła współśrodkowe kreślą się na téj zasadzie, że są względem siebie równoległe; do okręgu koła wytoczonego A przykłada się prostokąt niemający boku BC, opatrzony liniałem FG, prostopadłym do środka boku DE; gdy końce liniałów BC leżą na okręgu, cięciwa łuku BC jest czwartym bokiem prostokąta, przeto liniał FG jest także prostopadły i do jéj środka, a zatém przechodzi przez środek koła A,—umieściwszy więc ostrze w pewnéj odległości na liniale FG, ono zakreśli okręg współśrodkowy, gdyż różnica promieni KG dla okręgu A i rysowanego ostrzem G, jest jednakowa.

§ II. Punkta sprzężone z linią środków.

(Centre de similitude directe et inverse).

220. *Tw. Linie łączące końce promieni równoległych, skierowanych w jedną stronę, przecinają się z linią środków w punkcie sprzężonym zewnętrznym, zaś łączące końce promieni skierowanych w przeciwne strony, przecinają się w punkcie sprzężonym zewnętrznym względem linii środków.*

1° Linie łączące końce promieni równoległych przecinają się w jednym punkcie (fig. 172); linia Aa przecina się z linią środków Oo, bo promienie równoległe OA i oa są nierówne,—linie GA i GO przecięte równoległemi, dają (139. Wn. 5): OA: oa=OG: oG a ztąd OA—oa: oa=OG—oG: oG; trzy wyrazy téj proporcyi dla wszystkich promieni równoległych nie zmieniają się, przeto i czwarty oG jest stały, czyli wszystkie linie łączące końce promieni równoległych przecinają się w jednym punkcie. Podobnie promienie OD i od skierowane w przeciwne strony dają: OD: od=Og: go, a ztąd OD+od: od=Og+og: og, dla wszelkich promieni skierowanych w przeciwne strony trzy wyrazy téj proporcyi nie zmieniają się, przeto i czwarty og jest stały, czyli linie łączące końce tych promieni przecinają się w jednym punkcie. 2° Punkta G i g są sprzężone względem linii środków Oo, gdyż tak stosunek odległości punktu G, jak i punktu g od końców téj linii, jako równe stosunkowi promieni, są sobie równe, przeto GO: Go=gO: go.

Wn. Proporcyje OA—oa: oa=Oo: oG tudzież OD +od: od=Oo: og pokazują, że dla kół a) *oddzielnych wewnętrznie* OA—oa > Oo przeto i oa > oG, t. j. punkt sprzężony zewnętrzny jest wewnątrz koła mniejszego, gdyż odległość jego oG od środka tego koła mniejsza od promienia, podobnie i punkt sprzężony wewnętrzny; b) *stycznych wewnętrznie*, OA—oa=Oo przeto i oa=oG t. j. zewnętrzny w punkcie dotknięcia się, zewnętrzny zaś wewnątrz mniejszego, gdyż OD + od > Oo to od > og; c) *przecinających się*, OA—oa <

O*o* to *oa* $<$ *o*G zewnętrzny leży zewnątrz koła mniejszego wewnętrzny wewnątrz, gdyż OD + *od* $>$ O*o* to i *od* $>$ *og*; d) *stycznych zewnętrznie*, OA – *oa* $<$ O*o* to i *oa* $<$ *o*G zewnątrz mniejszego, zaś wewnętrzny w punkcie dotknięcia się, gdyż OD + *od* = O*o* to i *od* = *og*; e) *dla oddzielnych zewnętrznie*, zewnętrzny zewnątrz mniejszego—wewnętrzny między okręgami.

Uw. Punkta sprzężone linii środków wyznaczane przez linie łączące końce promieni równoległych, najdokładniéj wyznaczają się przez wspólne styczne do tych okręgów, gdyż przecinają linię środków pod kątem większym od innych linii.

221. *Tw. Punkta sprzężone zewnętrzne, względem linii środków trzech okręgów* A, B i C, *leżą na jednéj linii prostéj* (fig. 173).

Do okręgów A i B, A i C, B i C prowadzę wspólne styczne KL, MN i ON łączące końce promieni równoległych i skierowanych w jedną stronę, które przecinając się z liniami środków AB, AC i BC dają trzy punkta D, E, F sprzężone zewnętrzne względem tych linii, potrzeba dowieść że te trzy punkta leżą na jednéj linii prostéj. Dla okręgów A i B mamy: AD: DB = AK: BL zaś dla A i C, EC: EA = CN: AM, mnożąc te proporcye otrzymamy: AD.EC: DB.EA = CN: BL gdyż drugi stosunek ma wspólny czynnik AK i AM; lecz CN: BL = FC: FB, przeto i AD.EC:DB. EA = FC: FB a ztąd AD.EC.FB = DB.EA.FC, azatém trzy punkta D, E i F leżące na przedłużeniu boków trójkąta ACB, są w kierunku linii prostéj (158).

Wn. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że punkta sprzężone wewnętrzne dwóch linii środków z punktem sprzężonym zewnętrznym trzeciéj, leżą na jednéj linii prostéj. Linie przechodzące przez podobne punkta sprzężone zowią się *osiami sprzężonemi* (axe de similitude directe et inverse), trzy więc okręgi mają cztery osie sprzężone: jedną zewnętrzną, a trzy wewnętrzne.

222. *Zg. Znaleźć punkta sprzężone dwóch okręgów* O i *o* (fig. 172).

Prowadzę promienie równoległe OA i *oa* skierowane w jedną stronę, a linia łącząca ich końce A*a* przecinając się z linią środków O*o* daje punkt G sprzężony zewnętrzny, linia zaś E*e* łącząca końce promieni skierowanych w przeciwne strony, przecinając się z linią środków daje punkt *g* wewnętrzny.

223. *Zg. Do dwóch danych okręgów* O i *o poprowadzić linie styczne.*

Gdy promienie okręgów danych a) *znacznie się różnią* (fig. 172), wynajduję ich punkta sprzężone G i *g* (222) a styczne G*a*, G*c*, *ge* i *gd* poprowadzone do jednego okręgu *o* są zarazem stycznemi i do drugiego O, gdyż jeden jest tylko punkt sprzężony; b) *mało się różnią* (fig. 174); różnicą promieni tych okręgów, ze środka A koła większego, zakreślam okręg, do którego ze środka koła mniejszego B prowadzę styczną BC, przedłużam promień AC prostopadły do tej stycznéj, a on przecinając się z okręgiem A daje punkt D, przez który przechodzi styczna żądana; poprowadziwszy promień BE równoległy do AD, otrzymamy i drugi punkt E leżący na téj stycznéj DE; — czworokąt bowiem CE jest równoległobokiem (116, 4), a że w nim kąt C jest prosty, przeto on jest prostokątem, a zatém linia DE prostopadła do promieni okręgów, jest ich wspólną styczną; — c) *nieróżnią się* (fig. 175) czyli są sobie równe; do linii środków AB prowadzę promienie AC i BD prostopadłe, a linia CD łącząca ich końce jest żądaną, gdyż czworokąt AD jest prostokątem.

224. *Zg. Przez punkt dany J nakreślić koło styczne do dwóch prostych zbiegających się* (fig. 176).

Prowadzę linię EF połowiącą kąt zawarty między danemi prostemi AB i CD, która jako równo oddalona od ramion kąta (102. Wn. 1), zawiera środki wszystkich okręgów stycznych do obu tych linii; punkt J łączę z punktem zbiegu prostych danych AB i CD (167), a że punkt zbiegu jest sprzężonym zewnętrznym dla okręgów stycznych do linii danych (220), przeto linia JN łącząca punkt J, mającego się nakreślić okręgu, z punktem sprzężonym, przechodzi przez końce promieni równoległych w okręgach stycznych do linii danych; — jeśli więc z punktu dowolnego K połowiącéj EF, promieniem równym prostopadłéj KG, wyprowadzonéj z tego punktu na ramię CD, zakreślimy okręg koła, to on będzie stycznym do linii danych, jako będących w odległości promienia od środka tego koła (172), promienie zaś KN i KL są równoległe do promieni kół stycznych, łączących punkta przecięcia się tych okręgów z linią JN, przeto przez punkt J żądanego okręgu poprowadziwszy linie równoległe do tych promieni, one przecinając się z połowiącą FE dają środek S i F żądanego koła i pozostaje tylko z tego punktu zakreślić okręg styczny do jednéj z linii danych CD. Jeśli punkt dany J (fig. 177), leży na linii połowiącéj EF to prostopadła JG wyprowadzona z tego punktu do linii EF jest styczną do okręgu żądanego, a że i linia CD jest także styczną, przeto punkt G jest zbiegiem stycznych parzystych; odciąwszy więc GH równe GJ otrzymamy punkt H dotknięcia się stycznéj CD z okręgiem szukanym (182. *b*), a linia HS prostopadła do stycznéj CD w punkcie jéj dotknięcia H, przecinając się z linią środków EF, daje środek S żądanego okręgu. Odcinając GD=GJ otrzymamy drugi okręg styczny do linii danych.

225. *Zł.* Jeżeli dwa bloki (fig. 178) połączymy sznurem lub rzemieniem wyprężonym DCGF z połączonemi końcami, wtedy obracając jeden z nich, obracamy i drugi, w tym samym lub w przeciwnym kierunku, podług tego, jak te sznury styczne leżą z téj saméj, lub z przeciwnych stron sznura.

§ III. Linie potęgowe okręgów.

(Axe radical,—Potenzlinien).

226. Linią potęgową dwóch okręgów zowie się taka prosta, z któréj wyprowadzone styczne do tych