§. II. Dwie linie proste nieograniczone uważane ze wspólną ich poprzeczną.

69. Dwie linie proste, nieograniczone, leżące na jednéj płaszczyznie, albo mają jeden punkt wspólny (4 wn. 2), czyli *przecinają się*; albo też niemają żadnego punktu wspólnego czyli *nieprzecinają się*.

Jeśli obracamy jedną z przecinających się około punktu przecięcia, to oba jéj końce naprzód zbliżają się do drugiéj i przystaną do niéj, a następnie znowu linie staną się przecinającemi. *Przejście z przecinania się do przecinania się zowie się stycznością*, przeto przystawanie linii prostych jest ich stycznością, czyli *linia prosta jest styczną względem saméj siebie*.

Linie są równoległe wtenczas, gdy punkta jednéj linii znajdują się w jednakowéj odległości od linii drugiéj, a zatem równoległość jest tylko szczególnym przypadkiem nieprzecinania się.

70. Jeśli uważać będziemy na płaszczyznie *dwie proste* ze wspólną poprzeczną, spostrzeżemy, że każda tworzy cztery kąty, będące dwoma parami przyległych, lub dwoma przeciwległych. Ośm tych kątów względem poprzecznéj, są albo *jednostronne* albo *naprzemianległe*, to jest: po dwa brane leżą z jednéj, lub z przeciwnych stron poprzecznéj. Kąty tych dwóch rodzajów, mogą być trojakie: a) *wewnętrzne* b) *zewnętrzne* i c) *odpowiednie*, podług tego czy oba leżą wewnątrz, zewnątrz albo jeden wewnątrz a drugi zewnątrz linji przez poprzeczną przeciętych. Z ka-

żdéj strony linji są dwa kąty, przeto kątów tak wewnętrznych jako i zewnętrznych są dwie pary; odpowiednich zaś jako łączących po dwa, wszystkie ośm kątów, są cztery pary.—I tak (fig: 31 lub 32).

A) Kąty *jednostronne*, *a*) wewnętrzne: 1) AHJ z HJC, 2) BHJ z HJD; *b*) zewnętrzne: 1) FHA z CJG, 2) FHB z DJG; *c*) odpowiednie: zewnętrzne względem AB z wewnętrznemi względem CD, 1) AHF z CJH, 2) FHB z HJD, — wewnętrzne względem AB z zewnętrznemi względem CD, 3) AHJ z CJG, 4) BHJ z DJG.

B) Kąty *naprzemianległe*: *a*) wewnętrzne: 1) AHJ z HJD, 2) BHJ z HJC: *b*) zewnętrzne: 1) FHA z DJG; 2) FHB z CJG, *c*) odpowiednie: zewnętrzne względem AB z wewnętrznemi względem CD, 1) FHA z HJD, 2.) FHB z HJC, — wewnętrzne względem AB z zewnętrznemi względem CD 3) AHJ z DJG, 4) BHJ z CJG. W każdym więc rodzaju kątów jestośm par, i one stanowią 16 warunków przecinania się, lub nieprzecinania się dwóch linji prostych.

71. *Tw. Kąty jednostronne wewnętrzne, zewnętrzne i naprzemianległe odpowiednie mają tę własność, że każda para jednych z parą drugich, czyni cztery kąty proste* (fig. 31 lub 32).

Kąt wewnętrzny AHJ z zewnętrznym AHF, jako przyległe względem poprzecznéj FG, utworzone przez linię AH, spełniają się do dwóch kątów prostych; — dla podobnéj przyczyny, drugi kąt wewnętrzny HJC, z drugim zewnętrznym CJG, spełniają się także do dwóch kątów prostych: przeto kąty wewnętrzne AHJ

+ HJC z zewnętrznemi AHF + CJG czynią cztery kąty proste. Podobnie kąty wewnętrzne AHJ + HJC z naprzemianległemi odpowiedniemi FHA + HJD są równe 2 Il, — bo AHJ z FHA, równie jak HJC z HJD są kątami spełnienia (46). Własność ta służy dla wszystkich kątów tych trzech gatunków, gdyż tak jednostronne zewnętrzne AHF, CJG, jak i naprzemianległe odpowiednie AHF, HJD równają się drugiéj parze wewnętrznych BHJ, HJD (48), która w ich miejsce może być wzięta.

Uw. Te trzy gatunki kątów, jako mające jednakowy charakter, nazwiemy *pierwszą grupą* kątów utworzonych przez poprzeczną z dwoma liniami prostemi na płaszczyznie.

Wn. Ponieważ jedna para kątów pierwszéj grupy z drugą parą czyni cztery kąty proste, przeto jeśli jedna para równa się dwóm kątom prostym, to i każda z pozostałych równa się także dwóm kątom prostym, — tudzież jeśli jedna para nie równa się dwóm kątom prostym, to i każda z pozostałych także nie równa się dwom kątom prostym. Tak więc pierwsza grupa kątów daje albo ośm równości, albo też ośm nierówności, podług tego czy mamy jedną równość lub nierówność.

72. *Kąty naprzemianległe wewnętrzne, zewnętrzne i jednostronne odpowiednie, mają tę własność, że jeśli kąty jednéj pary są sobie równe, to i kąty każdéj z pozostałych par są także sobie równe; jeśli zaś kąty jednéj pary są nierówne, to i w pozostałych parach są nierówne* (fig 31 lub 32).

Kąty jednostronne odpowiednie FHA i HJC, dopełniają drugą parę jednostronnych odpowiednich FHB i HJD, tudzież AHJ i CJG, zaś względem BHJ i DJG kąty FHA i HJC są przeciwległe, przeto gdy kąty jednostronne odpowiednie jednéj pary są sobie równe albo nierówne: to takiemiż są i kąty pozostałych par. Kąty naprzemianległe BHJ, HIC pojedynczo wzięte równają się jednostronnym odpowiednim FHA i HJC, gdyż BHJ z FHA są przeciwległe, podobnie AHJ + HJD = FHB + HJD; a zewnętrzne GJD + AHF = CJH + AHF i GJC + BHF = DJH + BHF zatém taż sama własność ściąga się i do kątów naprzemianległych.

Uw. Kąty jednostronne odpowiednie, tudzież naprzemianległe, wewnętrzne i zewnętrzne jako mające jedną własność, nazwiemy *drugą grupą.*

Ta grupa daje albo ośm równości, albo ośm nierówności, podług tego, czy kąty jednéj jéj pary są sobie równe lub nierówne.

73. *Tw. Jeśli kąty jednostronne-wewnętrzne spełniają się, to jednostronne-odpowiednie są sobie równe: jeśli zaś wewnętrzne nie spełniają się, to i odpowiednie nie są równe* (fig. 31 lub 32).

1° Zk. że kąt AHJ + HJC = II. Tw. że kąt FHA = HJC.

Kąt FHA + AHJ = II jako przyległe, z założenia zaś kąt AHJ + HJC = II, przeto FHA + AHJ = AHJ + HJC. Od tych ilości równych odjąwszy kąt AHJ, pozostanie FHA = HJC.

2° Zk. że kąt AHJ + HJC nie=II. Twier. kąt FHA nie=HJC.

Kąt FHA + AHJ=II, z założenia mamy kąt AHJ + HJC nie=II, przeto kąt FHA + AHJ nie=kątowi AHJ + HJC. Od tych nierównych kątów odejmując kąt AHJ, pozostaną reszty nierówne kąt FHA nie=kątowi HJC.

Wn. Ponieważ kąty, tak pierwszéj jako i drugiéj grupy, dają ośm równości albo ośm nierówności, podług tego czy jedna równość lub niarówność ma miejsce (71 Wn. i 72 Uw.), przeto jeśli kąty któréjkolwiek pary pierwszéj grupy są kątami spełnienia, albo też niespełniają się, to kąty w każdéj parze drugiéj grupy są sobie równe lub nierówne. A zatem *kąty utworzone przez poprzeczną dają albo* 16 *równości, albo* 16 *nierówności, podług tego, czy pierwsza grupa daje jedną równość lub nierówność.*

74. *Tw.* odw. *Jeśli z kątów jednostronnych, odpowiednie są sobie równe, to wewnętrzne spełniają się do dwóch kątów prostych; jeśli zaś odpowiednie nie są równe, to i wewnętrzne nie spełniają się do do dwóch prostych.*

Zak. FHA=HJC, Tw. AHJ + HJC=II.

Kąt FHA + AHJ=II jako przyległe, ażc kąt FHA=HJC z założenia, przeto zamiast FHA biorąc HJC, mamy kąt HJC + AHJ=II.

Zak. FHA nie=HJC; Tw. AHJ + HJC nie=II.

Kąt AHF + AHJ=II, biorąc więc zamiast kąta AHF kąt nierówny jemu HJC, otrzymamy kąt HJC + AHJ nie=II.

Kąty utworzone przez poprzeczną dają 16 równości lub nierówności, podług tego, czy druga grupa dadaje jedną równość lub nierówność.

Uw. Z poprzedzających dwóch wniosków widzimy: że *kąty utworzone przez poprzeczną dwóch linji prostych na płaszczyznie, dają zawsze albo* 16 *równości, albo* 16 *nierówności, podług tego czy jedna równość lub nierówność ma miejsce.*

75. *Tw. Dwię proste czyniące z poprzeczną kąty jednostronne odpowiednie nierówne, przecinają się z téj strony poprzecznéj, z któréj kąt zewnętrzny większy od wewnętrznego.* (fig. 31).

Niech poprzeczna FG przecina dwie linie proste nieograniczone AB i CD.—Zk. kąt DJG > BHG. Tw. linia AB przecina CD nad poprzeczną FG.

Ponieważ kąty jednostronne BHG i DJG mają po jedném ramieniu HG i JG na poprzecznéj FG, a drugie ich dwa ramiona HB i JD, znajdują się nad poprzeczną FG; przeto: jeśliby ramię HB kąta wewnętrznego BHG nie przecinało, czyli nie wychodziło za ramie JD kąta zewnętrznego DJG, to kąt BHG obejmując kąt DJG niebyłby od niego mniejszy; coby się sprzeciwiało założeniu.

Kąty GJC i GHA leżące z drugiéj strony poprzecznéj FG, są spełnieniami kątów GJD i GHB; przeto u spodu poprzecznéj, kąt zewnętrzny GJC, jest mniejszy od wewnętrznego GHA, a proste rozchodzą się.

76. *Tw. od. Dwie proste przecinające się uważa-*

ne z poprzeczną, czynią kąty jednostronne-odpowiednie nierówne—tak, że od strony przecięcia się, kąt zewnętrzny większy od wewnętrznego. (fig. 31.)

Kąt zewnętrzny GJD, więcéj płaszczyzną HEJ ograniczoną odcinkami trzech przecinających się, równa się kątowi wewnętrznemu GHB więcéj kątem BED, jako części składające jedną płaszczyznę DEBHG. Jeżeli od dwóch ilości równych DJG + pł. HEJ = GHB + BED odejmiemy ilości nierówne: z pierwszéj strony pł. HEJ, zaś z drugiéj kąt BED, jako równy kątowi AEC (48), większy od téj płaszczyzny, będącéj częścią kąta AEC, zostanie kąt DJG większy od kąta GHB; bośmy mniéj odjęli z pierwszéj aniżeli z drugiéj strony. *)

Wn. Nierówność kątów jednostronnych odpowiednich, pociąga za sobą wszystkie 16 nierówności (74. Uw.); przeto linie proste przecinają się, gdy którekolwiek z kątów jednostronnych-wewnętrznych, zewnętrznych; równie jak i naprzemianległych-odpowiednich nie spełniają się do dwóch kątów prostych lub téż jakiekolwiek z kątów naprzemianległych-we-

*) Dla okazania tego przybierano twierdzenie: że jakkolwiek małym byłby kąt, zawsze on zawiera się w płaszczyznie tylko ograniczoną liczbę razy; a następnie że płaszczyzna ograniczona zawsze jest mniejsza od kąta; jak Vincent w Cours de Geometrie, adopté par L'Université No 69 i 94. Drugiego wydania. Lecz jeśli płaszczyzna podzieloną zostanie na nieskończenie wielką liczbę części, równych, przez linie wychodzące z punktu na niéj wziętego, a nawet na *nieskończoną liczbę części*, to te będą kątami, niezawierającemi się ograniczoną liczbę razy w płaszczyznie.

wnętrznych i zewnętrznych, lub jednostronnych odpowiednich, są sobie nierówne i odwrotne.

77. *Tw. Dwie proste czyniące z poprzeczną kąty jednostronne odpowiednie równe, nie przecinają się* (fig. 32.)

Jeśliby te proste przecięły się z sobą z którejkolwiek strony poprzecznej, to kąty jednostronne byłyby nierówne, coby się sprzeciwiało założeniu.

78. *Tw. od Dwie proste nieprzecinające się czynią kąty jednostronne odpowiednie równe.*

Gdyby kąt zewnętrzny nie był równy wewnętrznemu, to byłby od niego albo większy, albo mniejszy,—w obu razach proste przecięłyby się z téj strony poprzecznej, z któréj kąt zewnętrzny większy od wewnętrznego (75), coby się sprzeciwiało założeniu.

Wn. 1. Równość kątów jednostronnych odpowiednich pociąga za sobą równość kątów naprzemianległych-wewnętrznych i zewnętrznych; tudzież spełnianie się jednostronnyzh wewnętrznych i zewnętrznych, równie jak i naprzemianległych odpowiednich;—a nawet wynika z każdej z tych równości (74. Uw.)—przeto: *warunkiem nieprzecinania się prostych jest każda z powyższych szesnastu równości, i nawzajem linie równoległe dają szesnaście równości.*

Wn. 2. *Dwie proste* AB i CD *nieprzecinające się z trzecią* KL (fig. 32.) *nie przecinają się z sobą*, gdyż kąty FHB i FJD jako równe kątowi FML (73), są sobie równe; a zatem proste nieprzecinają się (77).

Wn 3. *Proste* EG i HF, *prostopadłe do trzeciéj* CD (fig. 33.) *nieprzecinają się*; gdyż czynią kąty jednostronne DHF i DGE, równe, jako proste.

Wn. 4. *Prosta* HF *nie przecinająca się z prostopadłą* EG *sama jest prostopadłą*, gdyż kąt DHF jako równy kątowi DGE jest prosty.

Wn. 5. *Prostopadła* CD *do jednéj z nieprzecinających się* GE, *jest prostopadłą i do drugiéj* FH; dla równości kątów DHF i DGE, z których drugi jest prostym.

Wn. 6. *Przez punkt* H, (fig. 32.) *dany nad prostą* CD, *jedna tylko nieprzecinająca ją linia prosta* AB *przechodzić może*; w przeciwnym razie kąt jednostronny HJD równałby się każdemu z odpowiednich mu kątów FHB i FHP nierównych sobie.

Wn. 7. *Pochyła* FH (fig. 32.) *do jednéj z nieprzecinających się* AB, *jest pochyłą i do innych* CD i KL. przez punkt bowiem H, jedna tylko linia AB nieprzecinająca się z dwoma innemi nieprzecinającemi się CD i KL przechodzić może (Wn. 6.) przeto linia FH przecina linie CD i KL. Przytem linia FH jest do nich pochyłą, gdyż kąty FHB, FJD, FML są sobie równe (78); że zaś kąt FHB nie jest prosty z założenia, zatem takiemi są i kąty FJD i FML.*)

Wn. 8. *Prostopadłe* (fig. 31.) HL i MJ *do przeci-*

---

*) Podług tego wniosku pochyła HN do AB nie przecinającéj się z CD, przecina CD, co stanowi twierdzenie: *że kąt* AHN, *jest większy od płaszczyzny* AHJC *zawartéj między równoległemi* AH i JC.

nających się AB i CD, *same się przecinają*, gdyż każdy z kątów jednostronnych wewnętrznych LHJ i MJH, utworzonych przez poprzeczną HJ łączącą ich spodki, jest mniejszy od kąta prostego; a zatem kąty te LHJ i MJH nie spełniają się do dwóch kątów prostych.

Wn. 9. *Kąty mające ramiona nieprzecinające się skierowane w jedną lub przeciwne strony, są sobie równe, kąty zaś mające parę ramion skierowanych w jedną, zaś drugą parę w przeciwne strony, spełniają się do dwóch kątów prostych* (fig. 34).

a) ABC=FED, gdyż każdy z nich równa się kątowi EGB, jako naprzemianległe wewnętrzne, pierwszy względem ramienia AB, drugi zaś względem EG.

b) ABC = HEK, bo każdy z nich równy kątowi FED.

c) ABC+DEK=II, gdyż kąt ABC=FED (46).

Wn. 10. *Kąty mające wierzchołek wspólny* (fig. 35.), *a ramiona* AO z CO i BO z DO *prostopadłe są sobie równe, gdy jeden z tych kątów lub jemu przeciwległy nie obejmuje drugiego: w przeciwnym razie spełniają się.*

a) AOB=DOC, jako reszty pozostałe z odjęcia kąta BOC od kątów prostych AOC i BOD,

b) AOB+COd=II, gdyż kąt AOB=COD.

Kąty więc jakiekolwiek, mające ramiona prostopadłe, albo są równe, albo spełniają się, podług tego, czy przez wierzchołek jednego z nich poprowadzone nieprzecinające się do ramion drugiego kąta, będąc prostopadłemi (Wn. 4.)—czynią kąty równe lub spełnienia.

Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że własność ta służy i dla kątów, w których ramiona jednego są jednakowo nachylone do ramion drugiego kąta.

79. *Tw. Dwie proste nieprzecinające się są względem siebie równoległe, czyli punkta jednéj są jednakowo oddalone od prostéj drugiej.* (fig. 33.)

Biorę dowolne dwa punkta E i F na jednéj z nieprzecinających się AB, i z tych punktów, równie jak ze środka prostéj niemi ograniczonéj EF, wyprowadzam FH, JK i EG prostopadłe do CD, a mam dowieść: że prostopadłe FH i EG są sobie równe.

Uważam że prostopadłe FH, JK i EG są zarazem prostopadłe do obu nieprzecinających się (78 Wn. 5.) Obracam płaszczyznę BJKD około prostopadłéj JK i kładę ją na płaszczyznę AJKC, zatem odcinek JF przystanie do odcinka JE, HK do KG dla równości kątów prostych FJK z KJE, tudzież HKJ z JKG, punkt F padnie na E dla równości JF z JE; prostopadła FH przystanie do prostopadłej EG, dla równości kątów prostych F i E; a że prosta KH przystała do KG i FH do EG, przeto i punkt H padł na punkt G, gdyż proste KG i EG, z któremi zlewają się proste KH i FH, przecinają się w jednym tylko punkcie. Przeto prostopadłe FH i EG, z dowolnych punktów wyprowadzone, są sobie równe, czyli że dwa dowolne punkta jednéj linii, są jednakowo oddalone od drugiéj nieprzecinającéj się. Wszystkie więc punkta linji AB, jako jednakowo z punktem E oddalone od linjі CD są w równéj odległości od téj linji; a zatém linie proste nieprzecinające się są względem siebie równoległe.

Wn. 1. Z punktu, wziętego nad linią prostą, jedną tylko nieprzecinającą poprowadzić można (78 Wn. 6), przeto: *nie może być nieprzecinającéj się, któraby nie była równoległą.*

Wn. 2. *Linia prosta równoległa do drugiéj, jest miejscem wszystkich punktów jednakowo oddalonych od téj linji.*

Punkta A i E leżą na AE równoległéj do CD, potrzeba dowieść, że punkt jakikolwiek F jednakowo z niemi oddalony od prostéj CD, leży na równoległéj AE.

Punkta E i F łączę prostą EF, ze środka GH wyprowadzam KJ prostopadłą do CD. Obracam JFHK około JK i kładę na pł. EJKG, wtedy KH przystanie do KG, FH do EG i punkt F padnie na E, gdyż prostopadłe FH i EG są równe z założenia, przeto JF padło na JE, a kąty przy J przystające i przyległe są proste; linia więc EF jest równoległą do CD, bo kąty jednostronne wewnętrzne, J i K oba proste, spełniają się do II.—Jeśliby linia EF, nie zlewała się z linią AE, to z punktu E dwie równoległe EF i AE, czyli nieprzecinające się z CD, poprowadzićby można. Dla podobnéj przyczyny wszystkie punkta z punktem E jednakowo oddalone od linji CD, leżą na jednéj równoległéj do téj linji.

Uw. Jeżeli kąt FHB, (fig. 32). posuwać będziemy po płaszczyznie, tak, aby ramie jego FH, posuwało się po linii FG, gdy wierzchołek H padnie na wierzchołek I kąta HID, to i ramie HB, przystanie do ramienia ID, gdyż ono posuwając się nieprzestało być równoległem (77) czyli wszystkie jego punkta są jednakowo oddalone od linii CD (79 wn. 2); zatém gdy jeden punkt H padł na linię CD, to i wszystkie punkta padną na tą linię. Kąty więc FHB i FJD są sobie równe (40), gdyż ramiona ich przystają do siebie we wszystkich punktach, kąt więc FHB nie jest częścią kąta FJD, lecz każdy z nich jest jednakową częścią swojéj płaszczyzny t. j. płaszczyzny dwóch zbiegających się FH z HB i FJ z ID, które są sobie równe (18).

80. *Tw. Summa trzech kątów* EHJ, HJE, JEH, *zawartych między ograniczonemi odcinkami* HE, EJ, JH *dwóch przecinających się* AB, DC *i poprzecznéj* FG, *równa się dwóm kątom prostym.* (fig. 31.)

Na dowiedzenie tego przez punkt J prowadzę JN, równoległą do AB. Kąt HEJ=EJN jako kąty naprzemianległe wewnętrzne, dwóch równoległych AB i JN względem poprzecznéj DC (78 Wn. 1.), kąt EHJ=NJG, jako jednostronne odpowiednie tych samych równoległych, względem poprzecznej FG—przeto kąt HEJ+EHJ=EJN+NJG; — a że summa dwóch drugich kątów EJN+NJG z kątem EJH spełnia się do II, (46 Wn. 1.), zatem i summa pierwszych z tymże kątem EJH, spełnia się także do II, gdyż summa pierwszych, za summę drugich, może być wziętą.

Wn. 1. *Kąt zewnętrzny* EJG *równa się summie dwóch kątów wewnętrznych* JHE i HEJ *jemu nieprzyległych.*

Wn. 2. *Jeśli jeden z kątów wewnętrznych* JHE, HEJ i EJH, *jest prosty lub rozwarty, to dwa inne kąty są ostre*; gdyż summa ich jest równa lub mniejsza od kąta prostego.

Wn. 3. *Mając dwa kąty wewnętrzne, gdy summę ich odejmiemy od dwóch kątów prostych, otrzymamy kąt trzeci.*

81. *Zg. Przez punkt dany nad linią poprowadzić do niéj równoległą.*

1o. Na zasadzie No 79. Wn. 2 (fig. 33). Z punktu danego E prowadzę prostopadłą EG, i odcinam na dowolnéj prostopadłéj HF do linii danéj CD, część HF=GE, a linia EF jest żądaną.

2o. Na zasadzie No. 77, (fig. 32.) Przez punkt dany H prowadzę HJ przecinającą linię daną CD, i przy punkcie H kreślę kąt FHB=HJD (59), a linia HB jest żądaną.

Na zasadzie Wn. 1. No. 78. Kreślę kąt JHA=HJD zakreślając dla pierwszego łuk z punktu H, promieniem HJ, zaś dla drugiego z J promieniem HJ.

3o. *Za pomocą węgielnicy rysunkowéj* (61.) (fig. 36.)

Przykładam węgielnicę największą jéj stroną do linii danéj AB, zaś przy drugiéj stronie przykładam liniał i węgielnicę z liniałem posuwam po linii danéj AB, dopóki brzeg liniału nie padnie na punkt dany

C; — wtedy nie ruszając liniału, posuwam po jego krawędzi węgielnicę, aż póki największy jéj bok nie padnie na punkt C; — bok ten, a tém samem linia przy nim nakreślona jest równoległa do linii danéj, gdyż czynią z krawędzią liniału kąty jednostronne odpowiednie równe sobie, jako równe kątowi węgielnicy. Sposób ten nie zależy od dokładności węgielnicy. To samo można uskutecznić innym sposobem (fig. 37): przykładam krawędź jednéj węgielnicy ACB do linii danéj EF, i do największéj krawędzi AB przykładam największą krawędzią drugą, jéj równą, węgielnicę ADB. Krawędzie AC i DB są równoległe, dla równości kątów CAB i ABD, jako należących do równych węgielnic. Posuwam węgielnicę ADB po krawędzi AB aż krawędź DB padnie na punkt dany, a linia przy niéj nakreślona jest żądaną. Ten sposób zależy od równości węgielnic, i mniéj wymaga w prawy od poprzedzającego.

Obadwa te sposoby korzystnie używają się przy prowadzeniu wielu równoległych do linii danéj.

82. *Zg. Z punktu danego nad prostą, poprowadzić linię pod kątem danym* (fig. 32.)

Przez punkt dany H prowadzę równoległą AB do linii danéj CD (81), i przy punkcie H linii AB, kreślę kąt FHB, równy danemu (59). Linia FH jest żądaną gdyż przechodzi przez punkt H i czyni z linią CD kąt FJD, który jako równy kątowi FHB (78), jest równy kątowi danemu.

Albo jeśli do linii FG mamy poprowadzić przez punkt B linię pod kątem danym, to przez punkt dowolny J wzięty na téj linii, prowadzimy linią ID czyniącą z linią daną kąt dany DIF, zaś przez punkt dany B prowadzimy równoległą BH do linii DJ. Kąty DJF i BHF są sobie równe (78).

83. *Zt. Przez punkt dany poprowadzić na gruncie linię równoległą do linii danéj.*

1e. Jeżeli grunt jest równy, można prowadzić linię równoległą tak, jak w rysunku (81, 1o, 2o); łuki się kreślą za pomocą sznura (29), i dostatecznem jest wyznaczyć ich końce. Lecz błąd popełniony wielce wpływa na położenie linii, przeto tego sposobu używać można tylko przy prowadzeniu linii niewielkiéj długości.

2e. Jeśli grunt jest nierówny, to łuk nakreślony nie leży na płaszczyznie (fig. 32.), a przeto nie jest łukiem okręgu koła (22). Postępując podług sposobów podanych w No 81 doprowadzenia linii nachylonych pod kątem żądanym, używamy narzędzi służących do zdejmowania kąta na gruncie (66), i zdjąwszy z punktu I linii danéj CD, kąt HJD zawarty między punktem 'danym H a punktem téj linii D; z punktu danego H jako ze stanowiska, wytykamy za pomocą tego narzędzia linię HB, czyniącą kąt JHB dopełniający kąt HJD do II; t. j. ustawiwszy nieruchome prawidło w kierunku linii HJ ustawiamy ruchome względem pierwszego pod kątem JHB, i w tym kierunku wytykamy linię prostą HB i ta jest żądaną.

3e. W braku narzędzi do zdejmowania kąta na gruncie, prowadzi się równoległa zapomocą dwóch żerdzi, przecinających się pod jakimkolwiek kątem (fig. 38). Ustawiam kół z przecinającemi się żerdziami CA i CB na linii danéj CD (fig. 32.) w punkcie I, tak aby w poziomem położeniu jedna z nich CA, padała na linię JD, a druga CB na linię JH przechodzącą przez punkt dany H; następnie w punkcie H ustawia się narzędzie, żerdz CA zgadza się z HJ a linia HA wytknięta w kierunku żerdzi BC, jest żądaną.

4e. *Za pomocą węgielnicy* t. j. dwóch prawideł (liniałów) przecinających się pod kątem prostym, prowadzi się linia równoległa do danéj, *albo* używając jéj podobnie jak poprzedzającego narzędzia, tak, aby kąt zdejmowany (fig. 33), HGE i kąt GEA pod którym prowadzimy linię, były brane między temi samemi liniałami;—wtedy błąd narzędzia nie wpływa na wyprowadzoną linię EA, gdyż kąty HGE i GEA jako równe kątowi zawartemu między temi prawidłami są sobie równe, *albo* prowadzimy dwie równe prostopadłe jedną GE przechodzącą przez punkt dany E, drugą zaś jéj równą dowolną HF; końce ich E i F leżą na żądanéj linii (79 Wn. 2). Przytem dwie ostróżności zachować należy: 1) aby odległość między prostopadłemi była jak największa, gdyż wtedy niedokładność w mierzeniu prostopadłych mniéj wpływa na jednakowość oddalenia punktów linii EF od linii CD; 2) aby linie GE i FH były prowadzone podług jednego i tegoż samego kąta węgielnicy t. j. aby kąty DHF i HGE były równe jednemu i temuż samemu kątowi węgielnicy, gdyż wtedy, jeśli dla niedokładności narzędzia kąty DHF i DGE nie będą proste, to przynajmniéj będą równe, a linie HF i GE równoległe; co jak zobaczymy nie pociąga za sobą błędu.

5te. *Zapomocą Bussoli* (68). (fig. 39). Ustawiam narzędzie w punkcie A, i uważam jaki kąt z igłą magnesową NM czyni liniał zgadzający się z linią daną AB; ustawiam narzędzie w punkcie danym C, i podług liniału, taki sam kąt z igłą magnesową czyniącego, wytykam linię CD i ta jest żądaną; gdyż kąty NAB i NCD są sobie równe, a że ramiona NA i NC są równoległe i skierowane w jedną stronę, przeto i ramiona CD i AB (78 Wn. 9.) także są równoległe.

6te. W praktyce można uważać za równoległe dwie takie linie, które się przecinają w bardzo wielkiej odległości, dla tego, że nie da się ocenić różnica między odległościami punktów jednéj linii od drugiéj.

Na téj zasadzie jeśli z dwóch punktów zapomocą lunety lub dioptry, wytkniemy linię w kierunku gwiazdy stałéj, lub widzianego w odległości przedmiotu, to można je uważać za równoległe.

Cień przedmiotów pada w kierunku ciała i punktu świecącego, przeto jeżeli z rana lub w wieczór, gdy cień jest największy, wytkniemy dwie linie współcześnie w kierunku cienia tyk pionowych, wysokich i dość grubych, to linie te, dla powyższéj przyczyny, można uważać za równoległe.

84. *Zt.* Punkta ciała posuwającego się zostają w jednakowéj odległości, a tem samem kreślą linie równoległe. Jeśli więc punkt ciała posuwa się po linii

prostéj, to wszystkie punkta posuwają po liniach do niéj równoległych i jéj równych. Z tego to powodu 1e Jeśli ciało mające jakąkolwiek powierzchnią potrzeba posuwać w wyżłobieniu, to dla każdego punktu powierzchni w wyżłobieniu, znajdować się powinna linia równoległa. 2. Chcąc narysować linię, równą danéj, przez punkta jéj prowadzimy proste równoległe równéj wielkości, a ich końce leżeć będą na linii równéj linii danéj; bo jeśli dana linia posuwa się punktami swemi po prostych równoległych, to kiedy jeden punkt padnie na koniec swéj prostéj, wtenczas i wszystkie jéj punkta przyjdą do końców swych równoległych, gdyż jednakowo oddalały się od pierwotnego położenia. Tym sposobem przy robieniu statków rzecznych przerysowują się na deskach linie modelu, podług których obciosują się te deski.

85. *Zt. Przerysowywanie linii krzywych* (fig. 40)

1. Punkta linii krzywéj łączymy z punktami dowolnéj prostéj AG liniami równoległemi, i zarazem prostopadłemi do prostéj AG (78 Wn. 5). — 2) Na dowolnéj prostéj odcinamy ab=AB, bc=BC i t. d. i z punktów a, b, c i t. d. prowadzimy prostopadłe do linii ag, równe odpowiednim prostopadłym, ah=AH, bi=BI i t. d., punkta h, i, k i t. d. leżą na linii równéj linii danéj GJK...O; gdyż położywszy ag na AG, prostopadłe ah, bi i t. d. padną na AG, BI i t. d. (49) i końce ich przystaną do siebie (4 Wn. 4).

Podobnym sposobem możemy narysować krzywą, mając liczebną wielkość i wzajemne oddalenie prostopadłych. I tak: szukając różnicy między odległościami punktów A i F wziętych na gruncie, od przyjętego poziomu (fig. 28), gdy punkta A, B, C, D, E, F, są w kierunku linii prostéj (17), możemy oznaczyć kształt i wielkość linii krzywéj leżącéj na gruncie i przechodzącéj przez punkta A, B, C, D, E, F. Jeśli przyjęty poziom jest w odległości 30 stóp od punktu A (5 Wn. 1.), to punkt B leżący o 5 stóp bliżej tego poziomu, jest od niego oddalony na 25 stóp, punkt C leżący o jedną stopę bliżej tego poziomu aniżeli punkt B, jest od niego oddalony o 24 stóp i t. d. Zmierzywszy odległość po linii prostéj poziomej między tykami pionowemi A, B, C i t. d., otrzymamy długość linii MN, NO i t .d. (79. Wn. 3. i 51. Wn. 1.); gdy zatem na linii nieograniczonéj odetniemy linie równe liniom MN, NO i t. d. i wyprowadzimy prostopadłe. zawierające jednakową liczbę stopni z odpowiedniemi sobie prostopadłemi, otrzymamy punkta leżące na krzywéj, równéj krzywéj będącéj na gruncie.

86. *Zt. Rysowanie pochyłych konturów z prostych modeli* (fig. 41).

1. Z punktów modelu prostego prowadzę linie prostopadłe do prostéj XY, równoległéj do osi AB, a przez ich spodki linie równoległe czyniące z XY kąt spełnienia z kątem żądanéj pochyłości: 2). prowadzę oś pochyłego konturu ab równoległą do XY, i odcinam cd=CD, ef=EF; gh=GH i t. d. które się dzielą przez oś ab na dwie równe części. Punkta c,

d, e, f, g, h, i t. d. są punktami żądanego konturu, odpowiedniemi punktom C, D, E, F, G, G, i. t. d. modelu.

§. III. Połączenia linii prostych ograniczonych.

A.) *Odcinki dwóch linii prostych przecinających się, uważane z odcinkiem poprzecznej, czyli: trójkąt.*

87. Dwie linie proste nieograniczone przecinające się (fig. 31.) AB i CD, przecięte poprzeczną FG, tworzą trzy odcinki ograniczone EH, EJ, i HJ, leżące na płaszczyznie linii przecinających się AB i C,D składają linię łamaną, zamkniętą, złożoną z trzech linii prostych, zwaną *trójkątem*. Trójkąt HEJ ogranicza część płaszczyzny linii przecinających się AB i CD która to płaszczyzna także zowie sią trójkątem.

Trójkątem więc zowią się albo trzy linie ograniczone z których dwie po sobie idące mają końce wspólne; albo: trójkąt jest to płaszczyzna ograniczona trzema liniami, po dwie przecinającemi się. — *W téj części uważając tylko własności połączenia linii, określamy trójkąt jako połączenie linii. Linie* HE, EJ i JH, *składające trójkąt, zowią się bokami trójkąta. Kąty* JHE. HEJ i EJH *zawarte między bokami*, wyrażające wzajemne ich względem siebie położenie, *zowią się kątami wewnętrznemi trójkąta*, lub téż *kątami trójkąta*; wierzchołki zaś tych kątów H, E, I, wierzchołkami trójkąta. *Kąt* EIH *zawarty między bokiem* EI *trójkąta a przedłużeniem JG boku HJ z nim przecinającego*