mieni kół stycznych, łączących punkta przecięcia się tych okręgów z linią JN, przeto przez punkt J żądanego okręgu poprowadziwszy linie równoległe do tych promieni, one przecinając się z połowiącą FE dają środek S i F żądanego koła i pozostaje tylko z tego punktu zakreślić okręg styczny do jednéj z linii danych CD. Jeśli punkt dany J (fig. 177), leży na linii połowiącéj EF to prostopadła JG wyprowadzona z tego punktu do linii EF jest styczną do okręgu żądanego, a że i linia CD jest także styczną, przeto punkt G jest zbiegiem stycznych parzystych; odciąwszy więc GH równe GJ otrzymamy punkt H dotknięcia się stycznéj CD z okręgiem szukanym (182. *b*), a linia HS prostopadła do stycznéj CD w punkcie jéj dotknięcia H, przecinając się z linią środków EF, daje środek S żądanego okręgu. Odcinając GD=GJ otrzymamy drugi okręg styczny do linii danych.

225. *Zt.* Jeżeli dwa bloki (fig. 178) połączymy sznurem lub rzemieniem wyprężonym DCGF z połączonemi końcami, wtedy obracając jeden z nich, obracamy i drugi, w tym samym lub w przeciwnym kierunku, podług tego, jak te sznury styczne leżą z téj saméj, lub z przeciwnych stron sznura.

§ III. Linie potęgowe okręgów.

(Axe radical,—Potenzlinien).

226. Linią potęgową dwóch okręgów zowie się taka prosta, z któréj wyprowadzone styczne do tych

okręgów, są sobie równe; zowie się tak dla tego, że iloczyny z odcinków siecznych tych kół, rachowane od punktu ich przecięcia się z dwoma ze stycznych równych, jako równe kwadratom z tych stycznych (185. Wn.) są sobie równe, a iloczyny te zowią się *potęgami okręgów* (Potenz der Kreise), a że styczne poprowadzone z każdego punktu linii potęgowéj do dwóch okręgów, są sobie równe, przeto i sieczne poprowadzone z każdego punktu téj linii względem tych dwóch okręgów, mają równe iloczyny ze swych odcinków, rachowanych od tego punktu linii potęgowéj. Przecięcie się linii potęgowych zowie się *środkiem potęgowym* (centre radical). Okręg zowie się potęgowym (orthogonalnym) względem drugiego okręgu, gdy jego promień jest średnio-jeometrycznie proporcyonalnym między odległościami jego środka od końców średnicy leżącéj na linii środków— Okręg może być potęgowym wewnętrznie lub zewnętrznie podług tego, czy środek jego leży wewnątrz lub zewnątrz drugiego okręgu. I tak: *a*) jeśli (fig. 115) ze spodka prostopadłéj DC do średnicy AB zakreślimy okręg koła, to promień jego CD jest śred.-jeom.-prop. między odległościami CA i CB (177. Wn. 1). *b*) Z punktu zbiegu stycznych parzystych (fig. 179) BD i BC zakreśliwszy okręg, styczne te będą prostopadłemi do promieni okręgu A, i nawzajem promienie okręgu A jako prostopadłe do promieni okręgu B są styczne względem tego okręgu; tak promień okręgu B jest średnio-jeom. prop. między odległościami swego środka od końców średnicy GF okręgu A, jako też i promień okręgu A jest śred.-prop. między odległościami środka A od końców średnicy EH (185), i dla tego okręgi potęgowe zewnętrznie, są wzajemnie potęgowemi. Okręgi mające środek potęgowy w punkcie sprzężonym linii środków dwóch innych okręgów, zowią się *okręgami wzajemnemi* (cercle reciproque).

227. *Tw. Cięciwy łączące punkta dotknięcia linii stycznych wspólnych, dwóch okręgów, są względem siebie równoległe* (fig. 180).

W każdym z tych dwóch okręgów, styczne wyprowadzone z punktu sprzężonego, jako parzyste, są sobie równe (182. Wn. 6), przeto stosunek dwóch stycznych jednego, równa się stosunkowi dwóch stycznych drugiego, czyli styczne te są proporcyonalne, a zatém linie łączące ich końce są względem siebie równoległe (139. Wn. 2).

228. *Tw. Równoległa i równo oddalona od dwóch cięciw łączących punkta dotknięcia się dwóch stycznych wspólnych dla dwóch okręgów,—jest linią potęgową tych okręgów* (fig. 180. I. II i III).

Prowadzę styczne wspólne A*a* i B*b* do dwóch okręgów C i *c*, których cięciwy AB i *ab* są względem siebie równoległe (227) i zarazem prostopadłe do linii środków, jako przechodzącéj przez punkt O zbiegu stycznych parzystych (182. Wn. c); ze środka L linii P*p* mierzącéj oddalenie się cięciw równoległych AB i *ab* wyprowadzam prostopadłą LK, a mam dowieść że styczne KH i Kh wyprowadzone z punktu K téj linii do okręgów C i c są sobie równe.

Punkt K i punkt G przecięcia się linii LK ze wspólną styczną Aa, ze środkami okręgów C i c łączę liniami prostemi i uważam że: $\overline{CK}^2-\overline{CL}^2=\overline{cK}^2-\overline{cL}^2$ jako równe kwadratowi z $\overline{KL}^2$ (141. Wn. 1), podobnie $\overline{CG}^2-\overline{CL}^2=\overline{cG}^2-\overline{cL}^2$, przeto $(\overline{CK}^2-\overline{CL}^2)-(\overline{CG}^2-\overline{CL}^2)=(\overline{cK}^2-\overline{cL}^2)-(\overline{cG}^2-\overline{cL}^2)$; lecz różnica dwóch liczb nie zmienia się gdy odjemną i odjemnik powiększymy o jednakową liczbę, przeto powiększywszy odjemną i odjemnik z pierwszéj strony o $\overline{CL}^2$ zaś z drugiéj o $\overline{cL}^2$ mamy $\overline{CK}^2-\overline{CG}^2=\overline{cK}^2-\overline{cG}^2$. Linia AG=G$a$, gdyż PL=L$p$ (138), przeto $\overline{CG}^2-\overline{CA}^2=\overline{cG}^2-\overline{ca}^2$, jako równe kwadratom z liczebnéj wartości linji sobie równych AG i Ga; dodając ostatnią równość do poprzedzającéj otrzymamy: $\overline{CK}^2-\overline{CG}^2+\overline{CG}^2-\overline{CA}^2=\overline{cK}^2-\overline{cG}^2+\overline{cG}^2-\overline{ca}^2$ czyli $\overline{CK}^2-\overline{CA}^2=\overline{cK}^2-\overline{ca}^2$ t.j. $\overline{CK}^2-\overline{CH}^2=\overline{cK}^2-\overline{ch}^2$ gdyż CA=cH zaś $ca=ch$; a że $\overline{CK}^2-\overline{CH}^2=\overline{KH}^2$ zaś $\overline{cK}^2-\overline{ch}^2=\overline{Kh}^2$ przeto $\overline{KH}^2=\overline{Kh}^2$ czyli KH=Kh.

Wn. 1. Linia równooddalona od cięciw równoległych, jest miejscem wszystkich punktów z których można poprowadzić styczne równe do dwóch okręgów, gdyż $\overline{KL}^2+\overline{CL}^2=\overline{CK}^2$ i $\overline{KL}^2+\overline{cL}^2=\overline{Kc}^2$, odejmując otrzymamy: $\overline{CL}^2-\overline{cL}^2=\overline{CK}^2-\overline{cK}^2$ tudzież $\overline{KH}^2+\overline{CH}^2=\overline{CK}^2$ i $\overline{Kh}^2+\overline{hc}^2=\overline{Kc}^2$, odejmując mamy: $\overline{CH}^2-$

$\overline{hc}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{Kc}^2$ gdyż podług twierdzenia $KH = Kh$, przeto $\overline{CL}^2 - \overline{cL}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{ch}^2$, jako dwie ilości równe trzeciéj $\overline{CK}^2 - \overline{Kc}^2$, a że różnica promieni $\overline{CH}^2 - \overline{ch}^2$ jest stałą, przeto i $\overline{CL}^2 - \overline{cL}^2$ jest także stałą, czyli przez punkt L przechodzą wszystkie prostopadłe wyprowadzone z takich punktów, z których poprowadzić można styczne równe do dwóch okręgów, czyli że te wszystkie punkta są na jednéj prostopadłéj KL.

Wn. 2. W okręgach przecinających się (fig. 180. III), wspólna cięciwa FJ jest linią równo oddaloną od cięciw AB i *ab*, gdyż z punktu K leżącego na téj cięciwie poprowadzone styczne KH i K*h* są sobie równe, bo kwadraty z liczebnéj wartości tych stycznych równają się iloczynowi KF, KJ.

Wn. 3. Do okręgów stycznych zewnętrznie lub wewnętrznie wspólna styczna GC (fig. 166 i 168) jest linią potęgową, gdyż styczne GL i LM z punktu jéj poprowadzone, jako równe stycznéj GC są sobie równe.

Wn. 4. Dla okręgów oddzielnych równych, linia potęgowa połowi linię środków, gdyż cięciwy łączące punkta dotknięcia stycznych wspólnych, są średnicami prostopadłemi do linii środków.

229. *Tw. Osie zasadnicze trzech okręgów* A, B i C *brane po dwie przecinają się w jednym punkcie, czyli mają jeden środek zasadniczy* (fig. 181).

Linie potęgowe LD i ND okręgów A z B i A z C przecinają się w punkcie D, a mam dowieść że linia potęgowa okręgów C i B przechodzi przez punkt D. Punkt D leży na linii potęgowéj DL, przeto styczne poprowadzone z punktu D do okręgów A i B są sobie równe, dla podobnéj przyczyny styczne D*b* i D*c* do okręgów A i C są także równe, przeto D*a*=D*b*=D*c*, a zatém punkt D znajduje się na potęgowéj okręgów B i C.

230. *Tw. Jeżeli dwa okręgi* A i B *przetniemy siecznemi* JD i JC, *wychodzącemi z punktu sprzężonego* J, *to dwa punkta jednéj siecznéj, wejścia i wyjścia, wzięte nie na jednym okręgu, z podobnemi dwoma punktami drugiéj siecznéj, leżą na jednym okręgu.* (fig. 182).

Aby dowieść że cztery punkta F, E, D, C znajdują się na jednym okręgu, potrzeba dowieść że odległości punktu zbiegu J od tych punktów, są odwrotnie proporcyonalne, t. j. JD: JC=JF: JE. Promienie AD i BG są równoległe (220), przeto JG: JD=JB: JA, podobnie JH: JC=JB: JA, a zatém JG: JD=JH: JC, czyli JG: JH=JD: JC; dla okręgu B sieczne JG i JH dają JG: JH=JF: JE (177); w dwóch ostatnich proporcyach piérwsze stosunki równe, więc i drugie są także równe: JD: JC=JF: JE. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że i punkta E, D, H, L;—D, E, L, H;—G, K, F, C;—G, K, H, L leżą na jednym okręgu.

Wn. Jeśli do okręgów A i B poprowadzimy styczne wspólne JN i JO, to punkta ich dotknięcia się M, N, O, P leżą na okręgu, gdyż JN=JO i JM=JP (182. Wn. 6), przeto JN: JO=JP: JM.

231. *Tw. Wszystkie okręgi obopólne dwóch kół danych, mają środek potęgowy w punkcie sprzężonym tych kół* (fig. 182).

Okręgi obopólne przechodzące przez punkta E, D i F, C lub H, L; tudzież okręgi przechodzące przez punkta G, K i F, C lub H, L, mają cięciwę wspólną JD za linię potęgową; podobnie okręgi przechodzące przez punkta F, C i E, D lub G, K tudzież przez H, L i E, D lub G,K mają cięciwę wspólną JC za linię potęgową—a zatém punkt przecięcia się J linii potęgowych, jest środkiem potęgowym wszystkich okręgów obopólnych.

232. *Zg. Do trzech okręgów danych* A, B, C, *poprowadzić okręg styczny* (fig. 183).

1) Oznaczam punkta sprzężone zewnętrzne tych trzech okręgów branych po dwa: A z B, w punkcie D,—A z C w D' i B z C w D",—które leżą na osi podobieństwa prostego D"D (221); 2) Prowadzę okręg obopólny do danych trzech okręgów A, B i C kreśląc z punktu zewnętrznie sprzężonego okręgów A i B sieczną DE, która oznaczy punkta F i E leżące na tym okręgu i z punktu D" sprzężonego okręgów B i C sieczną D"F, która oznacza punkta F i G,—okręg *o* przechodzący przez punkta E, F, G, jest obopólnym dla okręgów A z B i B z C, a zatém jest obopólnym dla tych trzech okręgów. 3) Cięciwa FJ wspólna dla okręgów B i *o* jest ich osią potęgową, a że linia DD" jest osią potęgową wszystkich okręgów obopólnych względem trzech kół danych, a tém samém i szukanych

okręgów stycznych, przeto punkt L ich przecięcia się jest środkiem potęgowym czterech okręgów B. o i szukanych stycznych, t.j. że linie potęgowe tych okręgów branych po dwa, przechodzą przez punkt L; — linią potęgową okręgu B i okręgów z nim stycznych, jest wspólna ich styczna (228. Wn. 3), przeto styczne LM i LN poprowadzone z punktu L do okręgu B, są zarazem stycznemi do szukanych okręgów, LM do stycznego zewnętrznie dla A, B, C, zaś LN do stycznego wewnętrznie. Otrzymawszy podobnym sposobem środek potęgowy okręgów *o*, C i szukanych stycznych, otrzymamy linię potęgową tych stycznych i okręgu C prowadząc styczne L'M' i L'N', pozostaje tylko do linii LM i L'M' nakreślić okręg styczny w punktach M i M' i drugi okręg styczny do linii LN i L'N' w punktach N i N' których środki O i O' leżą na liniach prostopadłych, wyprowadzonych z punktów dotknięcia M, M' i N, N'.

Jeśliby okręgi A, B i C były równych promieni (fig. 184), wtedy przez środki tych zakreślam okręg (178) i środek jego O łączę ze środkami A, B, C okręgów równych, a odcinki ich zawarte między środkiem O a punktami przecięcia się z okręgami danemi, dają promienie OD, OF, OE tudzież OJ, OH, OG okręgów stycznych;—gdyż *a*) linie OD, OF, OE są sobie równe, jako różnice pomiędzy promieniami okręgu przechodzącego przez środki i okręgów A, B, C równych — okręg zakreślony promieniem OD jest styczny wewnętrznie do okręgów danych, bo linie środków OC, OA, OB równają się summie promieni OD

+DC, OF+FA, OE+EB; *b*) linie OJ, OH, OG są równe, jako summy promieni okręgu przechodzącego przez środki A, B, C i okręgów danych równych; okrąg zakreślony promieniem OJ jest styczny, gdyż linie środków OC, OA i OB są różnicą promieni: OJ—OD, OH—OA, OG—OB. Jeśliby okrąg styczny miał być takim, żeby okręgi B i C były do niego stycznemi wewnętrznie zaś A zewnętrznie lub nawzajem, wtedy zamiast prowadzić linie przez trzy punkta sprzężone zewnętrzne, poprowadzilibyśmy przez dwa wewnętrzne okręgów A z B i A z C a na niéj leży i zewnętrzny okręgów B z C i postępujemy tak jak poprzednio (fig. 185).

233. *Zg. Danym promieniem nakreślić okrąg styczny do dwóch okręgów: a) zewnętrznie* (fig. 186). Na przedłużeniu promienia AB odcinam BF równe promieniowi okręgu C i z punktu C promieniem AF zakreślam łuk, odcinam BE=JD i z punktu D promieniem AE przecinam ten łuk w punkcie G, który jest środkiem żądanego okręgu, gdyż proste środków GC i GD równają się summie promieni; *b*) *wewnętrznie* (fig. 187). Ze środka pierwszego okręgu C różnicą promieni danego AB i okręgu C zakreślam łuk, ze środka zaś drugiego D podobną różnicą promieni przecinam łuk w punkcie G, a on jest środkiem żądanego okręgu, gdyż linie środków GC i GD są różnicą promieni GJ i JC tudzież GH i HD; *c*) *do okręgu C styczne wewnętrznie, zaś do D zewnętrznie* (fig. 188); ze środka C różnicą promieni, zaś z D summą promieni zakreślamy łuki, które przecinając się w G

dają środek żądanego okręgu, gdyż dla okręgów G i C linia środków GC równa różnicy, zaś dla G i D summie promieni.

234. *Zg. Przez punkt dany* C *poprowadzić koło styczne do dwóch okręgów* A *i* B (fig. 189).

Punkt C można uważać za okręg zlewający się z swoim środkiem, który jest punktem sprzężonym względem okręgu A i C, B i C — połączywszy go z punktem sprzężonym okręgów A i B otrzymamy linię potęgową okręgów obopolnych do A i B przechodzących przez punkt C, postępujemy daléj jak N° 232, pamiętając że punkt C zastępuje miejsce punktów D' i D''. Jeżeli okręgi mają być styczne w jednakowy sposób, to bierzemy punkt D sprzężony zewnętrzny okręgów A i B, w przeciwnym razie wewnętrzny.

235. *Zg. Nakreślić okręg styczny do dwóch okręgów* A, B *i prostéj* C'C (fig. 190).

Jeżeli prostą C'C uważać będziemy za łuk okręgu bardzo wielkiego, to styczne jego zlewają się z prostą CC' (69), punkt więc sprzężony okręgu A i linii CC' jest na średnicy okręgu A prostopadłéj do CC', bo wtedy ona przechodzi i przez środek okręgu za łuk którego bierzemy CC', jako prostopadła do jego stycznéj, punkta sprzężone są końcami średnicy, wewnętrzny od strony linii, zewnętrzny z przeciwnéj strony, gdyż jeśli promień jednego okręgu jest tak wielki, że przy nim opuścić można promień drugiego okręgu, to poprzedniki w proporcyi N⁰ 220 można uważać za równe t. j. promień okręgu większego i linią środków okręgów a zatém i następniki, czyli promień okręgu mniejszego i odległość punktu sprzężonego od środka tego okręgu. Zagadnienie więc to rozwiązuje się jak N⁰ 232, t. j. 1) prowadzi się oś sprzężona zewnętrzna DD'D''; 2) sieczne DE i D'F, to okręg GFE jest obopolnym okręgów A, B i prostéj CC'; 3) oznaczam punkta L i L' przecięcia się cięciw wspólnych z osią sprzężoną; 4) punkta N, M i *n*, *m* stycznych parzystych wyprowadzonych z punktu L i L' do okręgów A i B, a one są stycznemi do okręgów szukanych w punktach N i *n* tudzież M i *m*.

Jeśliby okręg miał być stycznym wewnętrznie do okręgów A i B, to wzięlibyśmy punkta sprzężone wewnętrzne okręgów A, B z prostą CC'; jeśliby zaś do okręgów A, B było styczne nie w jednakowy sposób, wzięlibyśmy dla okręgów A i B punkt sprzężony wewnętrzny, dla linii i jednego okręgu wewnętrzny, zaś dla linii i drugiego okręgu zewnętrzny.

236. *Zg. Danym promieniem* AB *nakreślić okręg styczny do drugiego* C *i przechodzący przez punkt* D *leżący: a) na okręgu* C (fig. 191); przez punkta C i D prowadzę linię i od puktu D odcinam promień dany w jedną lub drugą stronę podług tego, czy okręg ma być stycznym wewnętrznie lub zewnętrznie (215); *b) za okręgiem* (fig. 192); summą lub różnicą promieni zakreślam okręg ze środka okręgu danego i

z punktu D danym promieniem przecinam ten okręg w dwóch punktach.

237. *Zg. Promieniem* AB *nakreślić okręg styczny do okręgu* C *i prostéj* DE (fig. 193).

Okręg promienia AB ma być stycznym do okręgu C, przeto odległość jego środka od środka C jest równa summie lub różnicy promieni podług tego, czy ma być stycznym zewnętrznie lub wewnętrznie; z punktu więc C promieniem równym summie zakreślam okręg, a na nim leżą środki wszystkich okręgów promienia AB, stycznych do okręgu C. Okręg szukany jest stycznym do prostéj DE, przeto jego środek leży w odległości promienia AB od téj linii (172), a zatém środek stycznego okręgu do okręgu C i linii DE znajduje się w wspólném przecięciu się K i J okręgu zakreślonego z C z linią KJ równoległą do DE w odległości AB.

238. *Zg. Nakreślić okręg styczny do okręgu* A *w punkcie* B *i przechodzący przez punkt* C (fig. 194).

Okręg ma być stycznym do okręgu A w punkcie B, przeto środek jego znajduje się na promieniu AB; a że ma przechodzić przez punkta B i C przeto środek jego znajduje się także na prostopadłéj wyprowadzonéj ze środka linii CB, a zatem na wspólném przecięciu się linii AB z prostopadłą DE.

239. *Zg. Przez dwa punkta* B i C *nakreślić okręg styczny do okręgu* A (fig. 195).

Uważając punkta B i C za okręgi zlewające się ze swemi środkami, punkta ich sprzężone z okręgiem A znajdować się będą w samychże punktach B i C; punkta B i C jako okręgi równe mają punkt sprzężony wewnętrzny w środku linii BC (220. Wn.), przeto linia BC jest osią sprzężoną punktów B, C, uważanych za okręgi w granicy zmniejszania się i okręgu A; okręg przechodzący przez punkta B, C i przecinający okręg A jest okręgiem obopólnym, bo linie BE i BC są sieczne wychodzące z punktu sprzężonego C do punktu B zaś z tego punktu do okręgu A; środki więc okręgów obopólnych i szukanego okręgu leżą na prostopadłéj, wyprowadzonéj ze środka linii BC i na promieniach okręgu A przechodzących przez punkta N i M dotknięcia stycznych parzystych, wyprowadzonych z punktu L przecięcia się wspólnéj cięciwy z osią BC potęgową okręgów obopólnych.

240. *Zg. Przez punkt dany* B *nakreślić okręg styczny zewnętrznie do okręgu* A *i do prostéj* CC (fig. 196).

Uważając punkt B i prostą CC za granicę zmniejszania i powiększania się okręgu: 1) oznaczam punkta sprzężone D i D' okręgu A i prostéj CC, zaś sam punkt B jest punktem sprzężonym okręgu A i punktu B; — prosta BD jest osią sprzężoną, a tém samém potęgową okręgów obopolnych względem okręgu A, punktu B i prostéj CC; 2) prowadzę sieczne DE i DB i przez punkta GEB okręg *o* tudzież cięciwę EL wspólnego przecięcia się tego okręgu z A; 3) oznaczam punkta M i N dotknięcia się stycznych LM i LN, a okręgi przechodzące przez punkta N, B lub M, B styczne do prostéj CC (190), są żądane.

241. *Zt.* Przy kreśleniu połączenia kół w maszynach, mianowicie zębczastych, w celu zamienienia ruchu obrotowego około jednéj osi, na ruch obrotowy około drugiéj; rysunek zasadza się na zagad. poprzedzających, a obracanie się kół na téj własności: że gdy odległość środków równa się summie lub różnicy promieni, okręgi są stycznemi, przeto jeśli środki okręgów niezmienne, koła styczne w jednym położeniu, są stycznemi w ciągu ruchu. Obrót jednego okręgu nadaje drugiemu ruch w przeciwną stronę, jak okręg A okręgowi B (fig. 197), lub w tę samą jak okręg A okręgowi B (fig. 198), lub okręg E okręgowi C za pośrednictwem koła D (fig. 199).

242. *Zt.* Ozdoby architektoniczne wklęsło-wypukłe (doucine renversée) można rysować za pomocą N° 256, *a*; lecz że promienie równają się połowie linii pochyłéj AB (fig. 200), i okręgi są stycznemi w jéj środku, przeto na połowach linii AE i EB kreślę trójkąty foremne ACE i EDB i z ich wierzchołków C i D promieniami CE i ED zakreślam łuki, a one są stycznemi w punkcie E, gdyż kąt AEC=DEB, przeto linie CE i ED są jedną prostą (49), i linia środków CD równa summie promieni.

243. *Zt.* Rysunek muru utrzymującego nakrycie kuchennego komina, wymaga niekiedy kreślenia łu-

ków stycznych. Niech (fig. 201) EC przedstawia zewnętrzną ścianę komina mającego kształt kosza przewróconego, K mur utrzymujący komin, J listwę utrzymującą ten mur, BM' sztabę żelazną danéj wielkości i położenia, opierającą się na postumencie G;— potrzeba koniec sztaby M' połączyć z krawędzią dolną listwy J za pomocą łuków stycznych (*zgodzonych*) zewnętrznie. Przedłużam BM' do spotkania się z dolną krawędzią listwy LJ w F,— promieniem AJ prawie równym połowie M'F zakreślam łuk,— prowadzę promień AD tego łuku, prostopadły do M'F i koniec jego D z punktem M' łączę prostą przecinającą łuk A w M; zaś do linii BM' w M' środek łuku stycznego do łuku A w punkcie M' leży na prostopadłéj do BM' wyprowadzonéj z punktu M' (172), na linii środków AM (216. Wn. 1), przeto we wspólnym ich przecięciu się O.

244. *Zt. Kreślenie owalów używanych przy rysowaniu łęków arkady.*

a) *Linia trzech środków* (fig. 202). Linie AM i BN wyrażają mury podpierające arkadę, AB szerokość zaś DC wysokość arkady. Na połowie szerokości AC kreślę trójkąt foremny i odcinam CF = CD, przez punkta D i F prowadzę prostą do przecięcia się z EA w punkcie G i przez G prowadzę równoległą do CE przecinającą DC w J, zaś AB w H; punkta J i H są środkami łuków żądanych mających za promienie JD i HA. Linia JD = JG bo ich stosunek równa się stosunkowi linii CD i CF (139. Wn. 5) równych z wykreślenia, linia HA=HG jako boki trójkąta równokątnego;—łuk DG styczny do GA, gdyż linia środków JH równa JG—HG różnicy promieni, łuk zaś GA styczny do AM, gdyż promień jego jest prostopadły do téj linii. Łuk GA=60° jako odpowiedni kątowi GHA trójkąta foremnego, łuk DG=30° jako odpowiedni kątowi J równemu DCF=DCA—FCA=90°—60° *b*) Gdy wysokość arkady nie jest daną (fig. 203), długość AB dzielę na trzy części równe i z punktów C i D kreślę okręgi, a punkta ich przecięcia się C, D, E, F są środkami łuków GH, KJ, GJ, HK stycznych (216), a że trójkąt CFD jest równoboczny, przeto łuki HA, HK, KB mają po 60°. *c*) Jeśli owal ma być bardziéj podłużnym, wtedy szerokość jego AB (fig. 204) dzielę na cztery części i z punktów C, D i E czwartą częścią szerokości zakreślam okręgi, ze środka AB wyprowadzam prostopadłą do spotkania się z cięciwami EN i EM w punktach L i K i te punkta są środkami okręgów stycznych do okręgów C i E w punktach F, G i H, J. Trójkąt DNE jest foremny, jako mający promienie za boki, przeto łuk JB=60°, łuk PG=30° gdyż kąt PKG trójkąta KDE jest dopełnieniem kąta DEK do 90°; a zatém łuki JBG i HAF mają po 120°, zaś FPG i HOJ po 60°. *d*) Powyższe sposoby dają owal złożony z łuków znacznie różniących się promieni; chcąc zaś nakreślić owal dowolnie zbliżony do utworzonego ciągłym ruchem, ze środka szerokości B, wyprowadzam prostopadłą BC (fig. 205), połową AB szerokości i połową BS wysokości zakreślam okręgi współśrodkowe i ich ćwiartki

AC i RS dzielę na jednakową liczbę równych części,—odpowiednie podziały okręgu większego łączę cięciwami DF, EU, FV równoległemi do średnicy CX (173. Wn. 2), w okręgu mniejszym prowadzę cięciwy równoległe do drugiéj średnicy AB, które przecinając się z cięciwami okręgu większego dają punkta K, L, M leżące na żądanym owalu, pozostaje tylko przez punkta A, K; K, L... nakreślić łuki styczne wewnętrznie. Środek łuku AK jako przechodzącego przez punkta A i K leży na prostopadłéj do środka cięciwy AK (173), jako zaś stycznego do następnego łuku w punkcie K, leży na prostopadłéj do stycznéj przez punkt K poprowadzonéj (172), przeto leży we wspólném ich przecięciu się N; środek łuku przechodzącego przez punkta K, L, leży także na prostopadłéj do cięciwy KL i na linii KN (216. Wn. 1) t. j. we wspólném ich przecięciu się O; środek łuku LM leży na przedłużonym promieniu łuku KL przechodzącym przez punkt dotknięcia się L i na prostopadłéj do środka cięciwy LM i t. d. *e)* Owal ciągłym ruchem kreśli się w ten sposób: ze środka szerokości AB (fig. 206) wyprowadzam prostopadłą CD i odcinam CE równe wysokości, z punktu C połową szerokości AB zakreślam łuk przecinający się z AB w punktach F i G,—w tych punktach zatykam dwa ostrza i nić z łączonemi końcami wkładam na te ostrza; nić ta powinna być tak długą, aby po naciągnięciu jéj końcem ołówka, koniec ten padł na punkt A;—prowadząc koniec ołówka tak, aby nić obracająca się około ostrzów F i G była wyprężoną, narysujemy owal. Im dokładniéj kreślenie to będzie wykonane, tém bardziéj owal będzie się zbliżał do linii krzywéj zwanéj *Elipsą*.

245. *Zt. Kreślenie pochyłych owalów.*

Gdy podstawa arkady nie jest poziomą, czyli prostopadłą do jéj uszaków, wtedy półokręg nie może służyć za arkadę, gdyż styczne do okręgu względem siebie równoległe, są zawsze prostopadłe do średnicy, łączącéj ich punkta dotknięcia; arkada więc w tym razie składa się z dwóch łuków spojonych (stycznych wewnętrznie), stycznych do uszaków w końcach podstawy AB; wspólna styczna do tych okręgów zowie się *linią wierzchołkową*. Przy kreśleniu takiego owalu, jeżeli jest dana *a) podstawa* AB *co do kierunku i wielkości, zaś spojenie leży na prostéj* CD *pionowéj przechodzącéj przez jéj środek* (fig. 207); odcinam CD=CA i przez punkt D prowadzę KG równoległe do AB; jeden więc łuk będzie stycznym do uszaku w punkcie B zaś do KG w D tak, że linie GD i GB sobie równe, jako boki rombu,—są jego stycznemi parzystemi,—przeto środek jego leży na promieniach prostopadłych do tych stycznych przechodzących przez punkta dotknięcia B i D t. j. w punkcie F, podobnie środek drugiego okręgu tycznego do KG w punkcie D zaś do uszaku w punkcie A, leży w punkcie E przecięcia się prostopadłych wyprowadzonych z punktów zetknięcia;—łuki te mają w punkcie D styczną wspólną, przeto są stycznemi. *b) Prosta wierzchołkowa* KG *co do wielkości i położe-*

nia względem uszaków i punkt D *spojenia łuków* (fig. 208); odcinam GB=DG i DK=KA i linie te będą styczne parzyste; podstawą zaś jest AB,—promienie więc BF i DF prostopadłe do stycznych w punktach dotknięcia B i D dają środek F jednego łuku, zaś promienie DE i AE punkt E środek drugiego łuku;— *c*) *podstawa* AB *i położenie linii wierzchołkowéj* K'G' (fig. 209); odcinam K'd'=AK' i G'd=G'B, a punkt D przecięcia się linii Ad' i Bd jest punktem spojenia okręgów, gdyż poprowadziwszy przez ten punkt linią KG równoległą do K'G' ona jest wierzchołkową, gdyż KD=KA jako będące w tym samym stosunku co Ak' i K'd' (139. Wn. 5), podobnie DG=GB a zatém te linie są stycznemi parzystemi, a punkta E i F środkami łuków; *d*) *położenie stycznéj spojenia* KG *i podstawy* AB, *tudzież jeden uszak* AM (fig. 210); odcinam KD=AK to będą styczne parzyste łuku pierwszego, którego środek E,—dla znalezienia środka drugiego łuku, a tém samém i uszaka, odcinam EL=ED i prowadzę DL do spotkania się z daną podstawą w B i z tego punktu prowadzę prostopadłą do KA, która przecinając się z ED, daje środek szukany F, prosta bowiem DF=FB gdyż DE=EL a łuk zakreślony którąkolwiek z nich jest styczny do DG i GB w punktach D i B. *e*) Aby narysować cały owal skośny (fig.211) na liniach równych AB i DD' połowiących się w punkcie C,—z końców jednéj linii prowadzę prostopadłe na drugą, które przecinając się dadzą cztery środki łuków: E i F łuków AD i DB, E' i F' łuków BD' i D'A.

246. *Zt. Kreślenie woluty jonicznéj* (fig. 212).

Niech BC oznacza promień oka woluty, t. j. koła do którego ta krzywa ma być styczną,—promieniem tym BC kreślę koło, prowadzę średnice do siebie prostopadłe BC i BE i końce ich łączę cięciwami, ze środka B prowadzę prostopadłe do tych cięciw 2, 4 i 1, 3 i dzielę je na sześć równych cięciw, podziały te oznaczam liczbami 1, 2, 3... 12, a punkta te wzięte w odwrotnym porządku są środkami łuków stycznych wewnętrznie, których proste środków są 12, 11; 11, 10... 2, 1. Promieniem pierwszego łuku jest zazwyczaj 12C, lecz w takim razie łuk ten nie jest stycznym do oka, lepiéj więc brać 12D, albo *a* C, bo wtedy będzie styczny; łuk ten skończy się w R na linii 12, 11 środek przejdzie do punktu 11 i promień powiększy się o linię 11, 12; promieniem 11R kreślę łuk do punktu Q, środek przejdzie do punktu 10 zaś promień powiększy się o linię 11, 10 i t. d.

247. *Zt. Linia Jajowata* (*ove*) fig. 213).

Linia AB jest szerokością krzywéj, ze środka jéj C wyprowadzam prostopadłą CK, linię CB połowię w punkcie D i odcinam AF i BE równe AD t. j. ¾ szerokości; na linii AB jako średnicy zakreślam okręg i przez punkta H i G połowiące ćwiartki dolne BN i NA z punktami E i F łączę prostemi i z punktów E i F promieniami EA i FB zakreślam łuki AL i BM; z punktów G i H promieniami GM i HL zakreślam łuki przez środek cięciwy GH równoległéj do AB, będącéj linią środków tych łuków; prostą NK połowię w J i prowadzę linie GJ, a ta daje promień JS łuku SO, stycznego do łuków LO i MS.

248. *Zt.* Krzywą zbliżoną do spiralnéj kreślimy dwoma sposobami, albo rozwijając, albo zwijając obwód wielokąta. W pierwszym razie, wierzchołki linii łamanéj są środkami łuków stycznych wewnętrznie, promieniem pierwszego jest bok a następnie promień powiększa się o bok idący potym wierzchołku—przeto im mniejsze boki, tém linia bardziéj zbliża się do spiralnéj: za pomocą tego sposobu można nakreślić arkadę, niemającą pozioméj podstawy, zbliżoną do linii ciągnionéj. Niech AB (fig. 214) wyraża wzniesienie jednego końca arkady nad poziomą przechodzącą przez drugi koniec i AC szerokość krzywéj; arkada powinna zawierać 180°, przeto potrzeba rozwinąć połowę tylko wielokąta. Chcąc aby krzywa składała się z ośmiu łuków, na AB kreślę dziewięciokąt, mający bok pierwszy i ostatni prostopadły do téj linii, dla tego aby łuki były styczne do AB i linii do niéj równoległéj t. j. do drugiego uszaku. Odcinam AD równe obwodowi wielokąta bez jego podstawy AB i odcinam CE=AD,—wyprowadzam prostopadłą EF i rysuję na niéj wielokąt AG zrysowany na AB, a wierzchołki jego, wzięte za środki łuków stycznych, dają żądany owal.