liniał tak, aby on przechodząc przez punkt C, punktem D padł na okręgu koła, zaś punktem E na przedłużeniu średnicy; wtedy kąt DEA który on czyni z średnicą jest trzecią częścią kąta danego A; gdyż kąt A $=a+b$, jako zewnętrzny, $a=b+DAE=2b$ (90) jako równy kątowi CDA; przeto $A=2b+b=3b$.

B) *Odcinki czterech linii prostych przecinających się czyli: czworobok.*

113. *Czworobokiem zupełnym* zowiemy odcinki czterech prostych (fig. 58) FA, FD, EA, EB leżących na płaszczyznie, przecinających się po dwie, tudzież samą płaszczyznę ograniczoną temi odcinkami. On się czyta ABFCDE. Części jego ograniczające płaszczyznę zowią się także czworobokami, i tak: 1) ABCD zowie się *wypukłym* albo *czworokątem* od liczby kątów; 2) FAEC *wklęsłym* i 3) FBCED *podwójnie wklęsłym*. Głównie zajmować się będziemy czworobokiem wypukłym. *Czworokątem* takim *zowiemy cztery linie proste ograniczone, z których dwie po sobie idące mają końce wspólne*, lub też *płaszczyznę ograniczoną temi prostemi*. Linie tę podobnie jak w trójkącie zowią się *bokami—boki przeciwległe* są te które nie mają końców wspólnych, a *kąty przeciwległe* te które niemają ramienia wspólnego. Odcinek wspólnéj poprzecznéj dla dwóch par boków, czyli linia łącząca wierzchołki kątów przeciwległych zowie się *przekątnią* czworokąta lub téż czworoboku, i tak:

1) Czworobok zupełny ABFCDE ma trzy przekątnie: dwie wewnętrzne AC i BD, a trzecią zewnętrzną FE; 2) wypukły ABCD ma dwie przekątnie wewnętrzne: AC i BD, każda z nich dzieli czworokąt na dwa trójkąty, przeto summa jego kątów równa się 2Π; 3) wklęsły AFCE ma jedną przekątną wewnętrzną AC, zaś drugą zewnętrzną FE, i 4) podwójnie wklęsły FBCED ma dwie przekątne zewnętrzne: BD i FE. Czworobok wypukły zowie się jeszcze *czworobokiem pierwszego rzędu*; — jeżeli boki jego przeciwległe przedłużymy do spotkania się z sobą AD z BC w punkcie E, AB z DC w punkcie F, otrzymamy *czworobok drugiego rzędu* AFCE; ta sama własność służy i dla wielokątów.

114. *Równoległobok* jest to czworokąt w którym boki przeciwległe są równoległe. *Romb* jest czworokąt mający boki równe; *prostokąt* jest czworokąt mający kąty proste; *kwadrat* jest prostokąt mający dwa boki przy sobie leżące równe. *Trapez* jest czworokąt mający dwa boki równoległe, a dwa drugie nierównoległe. *Wysokością* tych figur jest prostopadła, spuszczona z jednego boku na bok do niego równoległy. Boki równoległe w trapezie zowią się jego *podstawami*—Trapez mający boki jednakowo nachylone do podstawy zowie się *symetrycznym*, mający zaś jeden bok prostopadły do postawy, *prostokątnym*.

115. *W równoległoboku*: a) *kąty przeciwległe są sobie równe*, b) *boki przeciwległe są sobie równe*,

c) *przekątnie dzielą się na dwie równe części*; d) *naprzeciw kąta większego leży przekątna większa*. (fig. 59).

a) Kąt B=D i kąt A=C jako mające ramiona równoległe i skierowane w przeciwne strony (78. Wn. 9).

b) Bok BC=AD i bok AB=DC, gdyż trójkąty BDA i BDC mają bok BD wspólny i dwa kąty przy nim leżące jako naprzemianległe równe (96).

c) Odcinek przekątnéj EB=ED i EC=EA, gdyż trójkąty BEC i AED mają bok BC=AD i kąty przy nich leżące jako naprzemianległe, równe.

d) Jeżeli kąt A < B to BD < AC; gdyż trójkąty BDA i ACB mają dwa boki równe AB wspólny, AD =BC a kąt A zawarty między temi bokami w pierwszym trójkącie, mniejszy od kąta B zawartego między odpowiedniemi bokami w drugim trójkącie (99).

116. *Tw. Czworokąt jest równoległobokiem gdy*: 1) *kąty przeciwległe są sobie równe*; 2) *boki przeciwległe są sobie równe*; 3) *przekątnie dzielą się na dwie równe części*; 4) *dwa boki przeciwległe równe i równoległe*; 5) *dwa kąty przeciwległe równe, a dwa boki przeciwległe równoległe* (fig. 59).

1) *Zak.* Kąt A=C, kąt B=D; uważam że kąt A+B +C+D=2Π, przeto 2A+2B=2Π a tém samém A+ B=Π i linia AD równoległa do BC, gdyż z poprzeczną AB czynią kąty jednostronne wewnętrzne dopełniające się (78. Wn. 1); dla podobnéj przyczyny i AB równoległe do DC.

2) *Zak.* Bok AB=DC i BC=AD. Trójkąty BDA i BDC mające po trzy boki równe, mają kąt ADB=DBC i kąt ABD=BDC (93), przeto linia AD równoległą do BC i AB do DC, jako czyniące kąty naprzemianległe równe.

3) *Zak.* EB=ED i EA=EC. Trójkąty AED i BEC, jako mające po dwa boki równe z założenia i kąty między nimi zawarte równe jako przeciwległe, mają kąt EDA=EBC a tém samém i AD równolegle do BC; dla podobnéj przyczyny i AB równoległe do DC.

4) *Zak.* Bok BC równy i równoległy do boku AD. Trójkąty BDC i BDA mające po dwa boki równe i po kącie zawartym równym t. j. bok BD wspólny, bok BC=AD z założenia i kąt CBD=BDA jako naprzemianległe, mają kąt BDC=DBA, przeto DC równoległe do AB.

5) *Zak.* Kąt C=A i bok DC równoległy do AB. Trójkąty BDC i BDA mające bok BD wspólny, kąt C=A z założenia i kąt BDC=DBA, jako naprzemianległe, mają kąt DBC=BDA (97), przeto DA równoległe do CB, gdyż czynią z BD kąty naprzemianległe równe.

Wn. Romb jest równoległobokiem, bo ma boki przeciwległe równe; *prostokąt* jest równoległobokiem, bo ma kąty przeciwległe, jako proste równe; *kwadrat* jest również równoległobokiem, bo ma kąty przeciwległe równe, jako proste: przytém ma wszystkie boki równe, gdyż boki przeciwległe w równoległoboku są sobie równe. Własności więc równolegloboków ściągają się do rombów, prostokątów i kwadratów.

117. *Tw. W rombie przekątne są do siebie prostopadłe* (fig. 60).

Trójkąty ACE i CED mające po trzy boki równe AE =ED, jako w równoległoboku (115. c.), EC wspólny i AC=CD z założenia, mają i kąt AEC=CED; a że te kąty są przyległe i równe, więc są proste a przekątnia CB prostopadła do AD.

Wn. Przekątnie w rombie połowią jego kąty, gdyż kąt ACE=ECD i są jego *osiami symetryi*, gdyż trójkąt CDB obracany około CB, przystanie do trójkąta CAB, prostopadła bowiem ED padnie na swoje przedłużenie dla równości kątów prostych DEC i CEA, zaś punkt D padnie na A, dla równości linii ED z EA. Punkt E przecięcia się osi jest *środkiem symetryi*, lecz że osie są prostopadłe, przeto on jest zarazem i środkiem figury. I tak linia GH połowi się w punkcie E, gdyż położywszy ADB na ADC, EB przystanie do EC i EH padnie na EH' tak, że kąt BEH= CEH'; położywszy CBD na CBA, EH' padnie na EG dla równości kątów H'EC i CEG równych kątowi HEB; a że EH=EH' z przeniesienia, zaś EH'=GE z przystawania, przeto EH=EG.

118. *Tw. W prostokącie przekątne są sobie równe* (fig. 61).

Trójkąty ACB i BDC mające po dwa boki i po kącie zawartym równym, bok AB=CD i BC wspólny, a kąty zawarte proste, mają i bok AC=BD.

Wn. 1. Prostopadłe HK i FG poprowadzone z punktu E przecięcia się przekątnych do boków równoległych, przechodzą przez środki tych boków, jako prostopadłe trójkątów równoramiennych AED i BEC tudzież DEC i AEB (90. Wn. 3), i są osiami symetryi prostokąta, gdyż HCDK obracane około HK przystaje do HBAK, podobnie i FBCG do FADG. Osie te są względem siebie prostopadłe, jako równoległe, do linii AB i BC prostopadłych, przeto punkt ich przecięcia się jest środkiem symetryi i środkiem figury czyli wszystkie linie przez punkt E przechodzące połowią się w nim.

Wn. 2. Kwadrat ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste, przeto jest czworokątem foremnym a zarazem rombem i prostokątem, ma więc cztery osie symetryi: dwie przekątne (fig. 62) AD i BC, jak w rombie; dwie zaś równoległe do boków HK i FG, jak w prostokącie t. j. liczba osi symetryi równa liczbie boków.

119. *Tw. W trapezie* AC *linia* FE *łącząca środki* F i E *boków nierównoległych* AB i CD, *równa się połowie summy dwóch jego podstaw* BC i AD *i jest do nich równoległa* (fig. 63).

Prowadzę przez punkt E linię HG równoległą do AB: trójkąty CGE i HED mające po boku równym, CE=ED i po dwa kąty przy nim leżące równe CEG =HED, jako przeciwległe i GCE=EDH, jako naprzemianległe, mają HD=CG i GE=EH; a zatém GE=

BF jako połowy boków przeciwległych równoległoboku AG (115, 6.) i linia EF równoległa do BG (116, 4.)—Summa podstaw AD+BC=AH+BG, gdyż od pierwszéj AD odjęliśmy tyle, ile dodaliśmy do drugiéj podstawy BC; a że linia FE łącząca środki boków nierównoległych, równa się tak linii AH jak i BG (115, 6.), przeto jest równa połowie ich summy, a tém samém i połowie summy podstaw.

Uw. Jeżeli trapez AC jest symetryczny, to prostopadła KL wyprowadzona ze środka podstawy BC na drugą podstawę, jest jego *osią symetryi.* Kąt A=D to i kąt B=C, jako dopełnienia; obracając trapez prostokątny KCDL około KL, przystanie on do trapeza KBAL, gdyż KC przystanie do KB i t. d.

120. *Tw. W czworokącie* AC *mającym kąty przeciwległe* A i C *proste, środek* E *przekątnéj* BD *łączącéj dwa inne kąty, jest równo oddalony od jego wierzchołków* A, B C, D (fig. 64).

Punkt E jako środek przeciwprostokątnéj BD, jest równo oddalony od wierzchołków B, C, D i D, A, B, przeto od wszystkich wierzchołków czworokąta ABCD.

121. *Zg. Wykreślić* a) *Równoległobok*: 1) *mając dwa boki i kąt między niemi zawarty*; 2) *mając przekątne i kąt między niemi zawarty* (fig. 59).

1) Kreślę kąt dany BAD, na jedném ramieniu odcinam jeden bok dany AD, na drugiém zaś drugi bok dany AB; przez koniec pierwszego boku D prowadzę

DC równoległą do boku drugiego AB, zaś przez koniec drugiego boku B, prowadzę BC równoległą do pierwszego boku AD, a figura AECD jest żądanym równoległobokiem (114).

2) Kreślę kąt dany AEB, na ramieniu BE. odcinam połowę jednej przekątnéj, na drugiém ramieniu połowę drugiéj przekątnéj, i przedłużam je za wierzchołek E o ich wielkość, punkta A, B, C, D łączę prostemi i otrzymam równoległobok żądany (116, 3.).

b) *Romb: 1) mając bok i kąt*; 2) *dwie przekątne* (fig. 60).

1) Kreślę kąt dany, na obu ramionach odcinam bok dany i postępuję jak z równoległobokiem; 2) kreślę linie AD i BC pod kątem prostym, od punktu E ich przecięcia się na pierwszą przenoszę, w obie strony połowę pierwszéj przekątnéj, zaś na drugą, połowę drugiéj przekątnéj, a linie łączące punkta A, C, D, B dają romb żądany.

c) *Prostokąt.* 1) *mając dwa boki*; 2) *przekątną i kąt między niemi zawarty* (fig. 61).

1) jak w równoległoboku; tylko że kąt zawarty między bokami danemi jest prosty; 2) że przekątne są równe.

d) *Trapez symetryczny, mając wysokość i podstawy* (fig. 63).

Na linii nieograniczonéj odcinam wysokość KL, z punktów K i L prowadzę prostopadle BC i AD a z obu ich stron odcinam połowę podstaw; punkt A z B i C z D łączę prostemi, a figura jest żądaną (78. Wn. 3).

122. *Zt.* Klucze sklepienia (fig. 65) płaskiego, ciosane z kamienia, w przecięciu pionowém mają kształt trapezów. Środkowy jest trapezem symetrycznym, końcowe zaś prostokątnemi.

123. *Zt. Za pomocą równoległoboku można ruch postępowy i wsteczny po prostéj zamienić na ruch postępowy i wsteczny po kole t. j. na ruch wahadłowy i nawzajem.* (fig. 66).

Niech promieniem ruchu wahadłowego będzie AE, a przestrzeń przebiegana ruchem po prostéj dd' t. j. drąg jakikolwiek podnosi się i opada w ten sposób, że koniec jego przebiega tą linię. Chcąc za pomocą tego ruchu, nadać ruch wahadłowy przez środek J prostéj dd' prowadzę prostopadłą JE, na któréj od dowolnego punktu A' odcinam A'E, równe danemu promieniowi i tym promieniem z E kreślę łuk AA'A'', zaś promieniem mniejszym EB' z tego samego środka, łuk BB'B''. Z punktem d i d' prowadzę prostopadłe do dd', aż do spotkania się z łukiem AA'A'' w punktach A i A'' i do tych punktów prowadzę promienie EA i EA'' przecinające łuk BB'B'' w B i B''. Na prostych równych sobie, jako różnice równych promieni, AB, A'B i A''B'' kreślę równoległoboki, których bok drugi, równy prostéj AD, tak, aby jego koniec znajdował się na linii dd'. Równoległoboki te mają boki równe, przeto gdy boki te są ruchome około wierzchołków, równoległobok B''D'' posuwając się z promieniem EA'', mając wierzchołek D'' na dd', zamieni się na równoległobok B'D', skoro promień EA" przyjmie położenie EA', zaś na równoległobok BD, wtenczas gdy promień przyjmie położenie EA.

Umieściwszy więc, na drągu obracającym się około E, równoległobok i przytwierdziwszy jego wierzchołek do końca podnoszącego się drąga dd', drąg ten przy podnoszeniu się swojém podnosić będzie drąg A"E opisujący końcem A" łuk A"A'A.

W czasie tego ruchu wierzchołek C" opisuje łuk C"C'C, którego środek jest w G. Chcąc więc ruch wahadłowy po A"A'A zamienić na ruch po prostéj dd', przytwierdzamy drąg GC", a w czasie obrotu promienia EA" po łuku A"A'A, wierzchołek D posuwać się będzie po prostéj dd'—Cięciwa AA" łuku wahadłowego równa się prostéj dd' (115, 6).

124. *Zt.* Za pomocą rombu można zamienić ruch po prostéj GH, na ruch po prostéj EF, prostopadłéj do jéj środka (fig. 67). Przez dowolny punkt D prostéj EF, i końce prostéj GH prowadzę linie, na których odcinam DC=DA i dopełniam rombu, którego wierzchołek B znajduje się także na EF (117). Boki rombu swobodnie mogą się obracać około wierzchołków, przybliżając więc końce G i H do środka téj linii, wierzchołek B posuwać się będzie po prostopadłéj EF.

Aby ruch wahadłowy po łuku GFH (fig. 68), zamienić na prosty Db, po prostopadłéj do środka cięciwy tego łuku; punkt D przytwierdzam nieruchomie, to w czasie przybliżania się punktu G i H do F romb

AC zwęży się i punkt B posunie się w górę po Db prostopadłéj do GH.

125. *Zt.* Jeżeli boki kwadratu (fig. 69), podzielimy na równe części i poprowadzimy linie równoległe do boków, to kwadrat podzieli się na kwadraciki, których przekątnie stanowią jedną linię AD, gdyż one połowią kąty kwadracików. Podobnie przekątne prostokątów, utworzonych z dwóch kwadracików, mających kąty przeciwległe, stanowią jedną prostą jak TR; to samo ściąga się do prostokątów złożonych z trzech kwadracików i t. d. Dla téj to przyczyny podobna szachownica używa się przy zasadzaniu ogrodów spacerowych, drzewa bowiem zasadzone w punktach przecięcia się, w każdym kierunku stanowią gęstszą lub rzadszą aleję. Szczotki druciane do czesania wełny robią się w podobny sposób.

C) *Własności wielokątów.*

126. Wielokątem wypukłym zowie się linia łamana wypukła, leżąca na płaszczyznie, lub część płaszczyzny, ograniczonéj tą linią łamaną. Trójkąt i czworokąt są także wielokątami, jeden o trzech, zaś drugi o czterech bokach. Nazwiska: kąt, boki, przekątnia, mają toż samo znaczenie jak w czworokącie. Wielokąt bierze nazwisko od liczby boków lub kątów, i tak zowie się *pięciokątem* lub *pięciobokiem* gdy ma pięć boków a tém samém i pięć kątów, *sześciokątem* i t. d. Wielokąty te są wielokątami pierwszego rzę-

du. Jeżeli ich boki oddzielone jednym bokiem, przedłużymy do spotkania się z sobą, otrzymamy wielokąt drugiego rzędu: gdy przedłużymy boki oddzielone dwóma bokami do spotkania się z sobą, otrzymamy wielokąt trzeciego rzędu i t. d. Stąd widzimy, że boki wielokątów są odcinkami ograniczonemi prostych leżących na płaszczyznie. Wielokąty zowią się foremne, gdy mają wszystkie boki i kąty sobie równe. Widzieliśmy już trójkąt i czworokąt foremny—trójkąt równoboczny był zarazem i równokątny, czworokąt mógł być równoboczny nie będąc równokątny jak romb. W każdym gatunku wielokątów jest jeden foremny i tak: otrzymamy pięciokąt foremny zestawiając wierzchołkami pięć trójkątów równoramiennych równych, których kąty przeciwległe podstawie są piątą częścią 2Π—podobnie otrzymamy foremny sześcio-kąt, siedmiokąt i t. d.

Wielokąt zowie się parzystym, gdy ma parzystą liczbę boków, w przeciwnym razie zowie się nieparzystym. Wielokąty drugiego, trzeciego i t. d. rzędu otrzymane z wielokątów foremnych, zowią się *gwiaździstemi*. Oś symetryi tak jak w trójkącie i czworokącie, jestto linia dzieląca wielokąt na dwie części, przystające w czasie obrotu jednéj z nich około téj linii, t. j. mające boki i kąty równe w przeciwnym porządku.

127. *Tw. Summa kątów w wielokącie równa się tyle razy wziętym dwom kątom prostym, ile on ma więcéj boków od dwóch.*

Poprowadziwszy bowiem z wierzchołka jednego z kątów przekątnie do wierzchołków nieleżących przy ramionach tego kąta, wielokąt podzieli się na tyle trójkątów, ile ma boków, mniéj dwa; a że w każdym trójkącie summa kątów równa się dwom kątom prostym, przeto we wszystkich trójkątach czyli w wielokącie summa kątów równa się dwom kątom prostym, tyle razy wziętym ile wielokąt ma boków mniéj dwa.

Wn. 1. *Summa kątów zewnętrznych wielokąta równa się* 2Π;—gdyż przy każdym wierzchołku kąt wewnętrzny z zewnętrznym równa się dwom kątom prostym, przeto summa kątów wewnętrznych z zewnętrznemi równa się dwom kątom prostym, tyle razy wziętym, ile wielokąt ma boków; a że wewnętrzne równają się Π wziętemu tyle razy ile wielokąt ma boków bez dwóch, przeto na zewnętrzne pozostaje Π wzięte dwa razy, czyli cztéry kąty proste.

Wn. 2. Jeżeli kąty w wielokącie są sobie równe, to wielkość każdego otrzymuje się dzieląc summę wszystkich kątów przez ich liczbę. I tak w trójkącie summa kątów równa się Π raz wziętemu, to kąt trójkąta równokątnego równa się $^2/_3$ kąta prostego, kwadratu $^4/_4 = 1$ kątowi prostemu, pięciokąta, $\frac{(5-2)2}{5}=\frac{6}{5}$ kąta prostego, sześciokąta, $\frac{(6-2)\times 2}{6}=\frac{8}{6}$ kąta prostego i t. d

128. *Tw. W wielokącie foremnym* ABCD... *linie* AO, BO, CO. . *połowiące kąty* A, B, C... *są sobie równe i przecinają się w jednym punkcie* O. (fig. 70).

Prowadzę linie AO i BO połowiące kąty A i B, one przetną się w punkcie O, gdyż summa kątów jednostronnych wewnętrznych, jako równa kątowi wielokąta, jest mniejsza od II, linie te są sobie równe, jako leżące naprzeciw kątów równych (91). Punkt O łączę z wierzchołkiem następnego kąta C, trójkąty AOB i BOC mające po dwa boki i po kącie zawartym równym, —OB wspólny, BA=BC jako boki wielok. for., kąty przy B równe z wykreślenia,—mają i kąt OAB= OCB, a że OAB jest połową kąta A, więc i OCB jest połową kąta C równego kątowi A, czyli linia OC połowi kąt C i jest równa linii OA. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że linie OD, OE... połowią kąty D, E... i są równe liniom OA, OB...

Wn. 1. Punkt O leży na połowiących kąty wielokąta, przeto jest równo oddalony od jego boków (102) czyli *prostopadłe wyprowadzone z punktu O na boki wielokąta są sobie równe, przytém prostopadłe te połowią boki*, jako w trójkątach symetr. (91. Wn. 3).

Wn. 2. Kąty zawarte między liniami połowiącemi kąty wielok. są sobie równe, gdyż leżą w trójkątach mających po trzy boki równe, prostopadłe zaś na boki połowią te kąty jako osie symetrycznych trój. (91, Wn. 3), zatém kąty zawarte między liniami po sobie idącemi, połowiącemi kąty a prostopadłemi połowiącemi boki są sobie równe a tém samém i kąty zawarte między prostopadłemi są także równe. Przytém kąty te są częścią 2II wyrażoną przez liczbę boków.

129. *Tw. od. Wielokąt jest foremny, gdy linie połowiące jego kąty są sobie równe i schodzą się w jednym punkcie* (fig. 70).

Linie OA i OB są sobie równe, przeto kąt OAB= OBA, a że one są połowami kątów A i B, przeto kąt A=B. podobnym sposobem dowiedlibyśmy że i wszystkie kąty są sobie równe. Trójkąty AOB i BOC mające bok OB wspólny, kąty przy B równe z założenia i kąt OAB=OCB, jako połowy kątów A i C równych, mają bok AB=BC (97); podobnym sposobem dowiedlibyśmy że i pozostałe boki są sobie równe.

130. *W wielokącie foremnym liczba osi symetryi równa się liczbie boków.*

1° W wiel. parzystym linie połowiące kąty przeciwległe, stanowią jedną linię prostą, bo liczba kątów zawartych między idącemi po sobie liniami połowiącemi kąty, z obu stron tych linii jest jednakowa, gdyż przeciwległe wierzchołki są oddzielone z obu stron jednakową liczbą boków; a że te kąty są sobie równe, przeto i summy ich z obu stron linii połowiących przeciwległe kąty są sobie równe i równają się Π; linia ta jest osią symetryi, bo jedna połowa wielokąta obracana około niej przystaje do drugiej; liczba tych osi równa się połowie liczby boków. Linie prostopadłe do środków boków przeciwległych dla podanej przyczyny składają jedną linię prostą będącą osią symetryi i liczba ich równa się liczbie poprzedzających.

2° W wiel. nieparzystym linia połowiąca kąt z prostopadłą do środka boku przeciwległego, stanowią jedną linię prostą, gdyż liczba kątów zawartych między liniami po sobie idącemi połowiącemi kąty a prostopadłemi do środka boków jest jednakowa—one są osiami symetryi a liczba ich równa się liczbie wierzchołków.

131. *Zg. Narysować na danym boku wielokąt foremny* (fig. 70).

Wynajduję kąt wewnętrzny wielokąta foremnego i przy boku danym AB prowadzę linię BC, pod tym kątem; odcinam BC=AB i przy punkcie C kreślę kąt równy kątowi B i t. d.

132. *Zg. Na danym wielokącie ABCD.. opisać wielokąt o podwojnej liczbie boków* (fig. 70).

Przedłużam prostopadłe OL, OK i t. d. tak aby one z przedłużeniem równały się liniom połowiącym kąty wielokąta, i koniec ich łączę z wierzchołkami wielokąta, tym sposobem utworzy się wielokąt foremny, o podwójnéj liczbie boków Wielokąt NEP..jest foremny, gdyż linie NO,EO,PO i t. d. równe z wykreślenia połowią kąty N, EP. i t. d.; trójkąty bowiem NLF i NLE tudzież NLE i EPK mające po dwa boki i po kącie zawartym prostym pierwsze mają kąty przy N równe; a drugie kąt NEL=PEK (129).

133. Zg. *W dany wielokąt foremny* ABCD... *wpisać* 1) *wielokąt o téj saméj*, 2) *o podwójnéj i* 3) *o dwa razy mniejszéj liczbie boków* (fig. 71).

1) Końce linii połowiących boki łączę liniami prostemi, i otrzymam wielokąt żądany; linie bowiem Oa, Ob... połowią kąty a, b... i są sobie równe, gdyż trójkąty fOa i Oab mające po dwa boki: Oa wspólny, Of=Ob i kąty między nimi zawarte równe, mają i kąt Oaf =Oab.

2). Na liniach połowiących kąty, odcinam linie Og, Oh, równe liniom połowiącym boki i końce ich łączę z końcami linii połowiących boki, a tym sposobem otrzymam wielokąt żądany; linie bowiem Oa, Og Ob, są sobie równe z wykreślenia i połowią kąty a, g, b...bo trójkąty Apa, aBg, gBb, pierwszy z drugim mają kąt paA=gaB, zaś drugi z trzecim kąty przy g równe (92)

3). Łączę wierzchołki linii połowiących kąty, opuszczając jeden, i otrzymam wielokąt żądany; gdyż w trójkątach BAF i FED bok BF=FD (92); w trójkątach FOB i FOD kąt OFB=OFD (93) czyli linia FO połowi kąt F, dla podobnej przyczyny OD połowi kąt D zaś te linie są sobie równe.

134. *Zg. Na danym boku narysować sześciokąt foremny* (fig 70).

Kąt sześciokąta foremnego $= \frac{8}{6}$ kąta prostego

czyli $\frac{8\times 90}{6} = \frac{720}{6} = 120^0$, kąt zaś trójkąta foremnego $= 60^0$, jeżeli więc narysuje sześć trójkątów foremnych na danym boku, mających wierzchołek wspólny otrzymam sześciokąt żądany.

Albo na boku (fig 72) AB, trzy razy większym od boku danego, kreslę trójkąt foremny ABC i na każdy bok jego przenoszę bok sześciokąta trzy razy; podziały odpowiednie łączę prostemi, i otrzymam sześciokąt żądany. Boki jego są sobie równe, z foremności trójkątów Aaf eCd, Bbc; kąty zaś są równe, jako równe dwom kątom trójkąta foremnego.

135. *Zg. W dany kwadrat* ABCD *wpisać ośmiokąt foremny* (fig. 73).

Prowadzę przekątnie AC i DB, i na każdym boku odcinam połowę przekątnéj, zakreślając nią łuk z każdego wierzchołka; punkta podziałów: I z H, G z E i t. d. łączę prostemi i otrzymam wielokąt żądany.

Trójkąty prostokątne EDG, FCM i t. d. są równoramienne, gdyż przyprostokątne są różnicą między bokami kwadratu a połową przekątniej, przeto kąty ich ostre mają po 45^0; kąty więc G, E, F... wielokąta jako kąty zewnętne tych trójkątów prostokątnych równają się 90°+45°=135°, są więc kątami ośmiokąta foremnego. Linie OA, OD.. połowią kąty kwadratu przeto kąt OAG=45°, w trójkącie więc AOG, bok AO =AG zwykreślenia, przeto kąt O=G, a że summa ich równa 180°—45° (80. Wn. 3) t. j. 135° przeto kąt HGO równa się połowie kąta HGE, a zatém linia OG połowi ten kąt, dla podobnej przyczyny linia OE połowi kąt E i t. d. Trójkąty OGE,OEF i t. d. są równoramienne, gdyż kąty ich OGE, OEG jako połowy kątów wielokąta G, E.. równych, są sobie równe, więc linie OG, OE.. są także równe; a że one połowią kąty i przecinają się w jednym punkcie O, przeto wielokąt GEFM.. jest foremny (129).

136. *Zg. Z danego wielokąta foremnego narysować wielokąt gwiaździsty* 2°, 3°, i t. d. *rzędu* (fig. 74)

Przedłużam boki opuszczając jeden i otrzymam wielokąt 2° rzędu a' b' c' d'... opuszczając dwa otrzymam wielokąt 3° rzędu a'' b'' c'' d''... i t. d Z ośmiokąta więc abc... można otrzymać dwa tylko wielokąty; gdyż opuszczając trzy boki będziemy mieli boki fe z ab i t. d. równoległe, a tém samem nieprzecinające się; liczba więc wielokątów gwiaździstych, tworzących się z wielokątów foremnych jest ograniczona.

137. *Zt. Rysowanie taflowych posadzek za pomocą wielokątów foremnych i czworokątów.*

Gdybyśmy miejsce około jednego punktu, zapełnić chcieli kątami wielokątów foremnych, moglibyśmy wziąć kąty tylko pewnej liczby tych wielokątów, gdyż dla zapełnienia miejsca, potrzeba najmniej trzech kątów, a ich summa powinna się równać 2Π. Zapełnić więc możemy tylko kątami trójkąta, kwadratu i sześciokąta, kąt bowiem pięciokąta ma 108° (127, Wn. 2); przeto 3 czynią mniej od 2Π t. j. 324°, zaś cztery więcéj t. j. 432°; trzy kąty siedmiokąta, a tém bardziéj wielokąty o więcéj bokach; czynią więcéj od 2Π. Lecz używając kątów, niejednego wielokąta, do zupełnienia miejsca około punktu, w większéj liczbie przypadków możemy zapełnić to miejsce. To nam służy za zasadę do układania taflowych posadzek z wielokątów foremnych, i tak:

a). Z trójkątów foremnych (fig. 75)

1). Na linii nieograniczonéj przenoszę od A do B bok Ah trójkąta, mającego być taflą, dowolną liczbę razy t. j. 5: na téj linii kryślę trójkąt foremny ACB (109, 2°) i na boki Ac i BC przenoszę ten sam bok Ah. 2) Punkta odpowiednie podziałów łączą liniami prostemi: h z punktami a, i, i z punktem b i t. d. a otrzymam posadzkę żądaną. Trójkąty bowiem Aih, cCa, bBk, są foremne gdyż bok Ah = Ai przeto kąt i = h; a że kąt A = 60°, jako kąt trójkąta foremnego BCA (91, Wn. 2), więc kąt i + h = 180° — 60° = 120°, czyli każdy z nich ma po 60°. Bok Ah = ca, jako bok trójkątów foremnych Aih i cCa, mających bok Ai = cC; linia Ac = ha, gdyż każda z nich zawiera w sobie 4 razy bok tafli, przeto czworokąt Acah jest równoległobokiem (116, 2) zatém ma boki równoległe, dla podobnej przyczyny i czworokąty Cahi, aCkb, caBk bBhi, bkAi są równoległobokami, i mają boki równoległe. Lecz że trójkąt hil jest foremny, jako równy trójkątowi Aih, gdyż czworokąt Al jest równoległobokiem (114); i trójkąt lid jest także foremny, jako mający boki id i il równe, kąt zaś i=A (78) jest kątem trójkąta foremnego. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że i drugie z porządku linie są równoległe do boków trójkąta i t. d., przeto boki utworzonych trójkątów są równe bokom trójkąta Aih, idl i t. d., jako równoległe zawarte między równoległemi (115, b). Posadzka taka jest nietrwała, gdyż sześcią kątami zapełniamy miejsce około jednego punktu.

Czworokąty Ailh, iled... są rombami, gdyż przekątnia Al prostopadła do przekątniéj ih (91. Wn. 4); przeto chcąc pokryć posadzkę taflami mającemi kształt rombu, łączymy podziały h z a.... i z b...; lub z rombami niezawartemi między równo liniami ległemi jak hilg i dile, i wtedy łączymy h z i.... i z b...

Sześciokąt defghi jest foremny, jako składający się z sześciu trójkątów foremnych (126); otrzymamy posadzkę złożoną z tafli sześciokątnych, gdyż boki trójkątów zrysowanych ołówkiem, naprowadzimy tuszem, opuszczając dwa.

Posadzka taka jest trwała, gdyż w niéj najmniejsza liczba kątów wchodzi do zapełnienia miejsca około jednego punktu.

Z tychże trójkątów otrzymamy posadzkę złożoną z sześciokątów i trójkątów (fig. 76), i miejsce około jednego punktu zapełniać się będzie dwoma kątami sześciokąta i dwoma trójkąta: jeżeli opuszczając jeden, naprowadzimy boki trójkąta, sześciokąt kagbhi z trójkątami bhl i bib. Przytém możemy jeszcze otrzymać w środku posadzki sześciokąt gwiazdzisty abcdef.

Otrzymamy zaś posadzkę złożoną z sześciokątów i rombów (fig. 77): jeżeli opuszczając jeden bok trójkąta inne naprowadzimy tuszem tak, aby boki naprowadzane leżały nad sobą. Miejsce przy jednych punktach c, d.. zapełnia się trzema kątami, a przy drugich b, e.. czterema.

b) Z kwadratów, prostokątów i rombów.

1) Przenoszę połowę boku kwadratu na długość, zaś cały bok kwadratu na szerokość prostokąta BAC (fig. 78), mającego się zapełnić kwadratami; przez podziały szerokości AC prowadzę linie ciągnione, równoległe do AB, zaś przez podziały długości AB przerywane, równoległe do AC i utworzy się posadzka żądana, gdyż czworokąty utworzone przez te linie mają boki równe z odcięcia i kąty proste, jako równe kątom prostokąta (78. Wn. 9).

2) *Z prostokątów. Albo*: podobnie jak z kwadratów, przenosząc połowę podstawy na AD (fig. 79), zaś wysokość na AB. *Albo*: jeżeli prostokąty mają iść w zygzak (fig. 80), na prostokącie ABCD mającym się pokryć prostokącikami, odcinam DF i CE równe wysokości DC, to czworokąt FDCE jest kwadratem a przekątnie jego FC i DE są prostopadłe (118. Wn. 2). Od punktu G, przecięcia się przekątnich, przenoszę na nie w obie strony wysokość prostokąta, będącego taflą, a przez punkta ztąd otrzymane jednéj, prowadzę ołówkiem linie równoległe do drugiéj; tym sposobem prostokąt ABCD podzieli

się na kwadraciki, mające za bok wysokość tafli.—Na przekątnię FC przenoszę podstawę tafli i przez punkta ztąd otrzymane prowadzę OH, JK... równoległe do AD. Proste równoległe do przekątniéj FC, naprowadzam tuszem aż do prostéj OH, poprowadzonéj ołówkiem; proste równoległe do ED, naprowadzam tuszem od prostych poprzednio naprowadzonych gf, hi... do JK i t. d. Lecz w takim kreśleniu podstawa tafli powinna być dwa, trzy i t. d. razy większa od wysokości, inaczéj proste OH, JK.. niebyłyby przekątniemi kwadracików, a tém samém nie leżałyby na nich kąty prostokątów. W tym przypadku naprowadzamy tuszem proste równoległe do ED, zawarte między AD i OH, a następnie przez punkta e, f, g, h, i.. prowadzimy równoległe do FC, zawarte między linią leżącą pod punktami f, i.. a prostą JK; i t. d.

3) *Z rombów.* Kreślę ołówkiem posadzkę, złożoną z trójkątów foremnych, mających bok tafli rombowéj a potém naprowadzam boki tuszem, opuszczając trzeci (fig. 81); posadzka ta jest zarazem gwiaździstą, gdyż romby po sześć schodzą się w jednym punkcie F, G, J... i jest zarazem złożona z sześciokątów, które można uwidocznić przy układaniu tafli.

c). *Z ośmiokątów i kwadratów* (fig. 82). Na podstawie i wysokości prostokąta AC, mającego zapełnić się taflami, odcinam oś symetryi tafli, łączącą środki boków równoległych, i przez punkta ztąd otrzymane jednego boku, prowadzę linie równoległe do boku drugiego, tym sposobem otrzymałem kwadraty, w które po wpisywać należy ośmiokąty foremne (135). Dla skrócenia roboty, po wpisaniu w pierwszy kwadrat AK. ośmiokąta aefMo... przenoszę linię Aa w obie strony, od każdego wierzchołka kwadratu F,H...q,f i punkta czg, dzh i t. d. łączę prostemi przerywanemi tak, aby ciągnione były zawarte między leżącemi przy sobie bokami kwadracików.

d). *Z dwunastokąta* i trójkątów foremnych (fig. 83). Na boku danym dwunastokąta AC, kreślę trójkąt foremny ABC, prowadzę oś jego symetryi DB, i na jéj przedłużeniu odcinam BE=AC i EF=BD. Z punktu E wyprowadzam HG prostopadłą do EF, i odcinam FG i FH równe połowie AC a trójkąt EHG, jest także foremny, jako przystający po położeniu podstaw do trójkąta ABC i t. d. Wielokąt tym sposobem utworzony eBEg...jest foremny, gdyż z wykreślenia ma boki równe, kąty zaś jego B, D... równają się II bez połowy kąta trójkąta foremnego t. j. $180^o-30^o=150^o$, jak w dwunastokącie.

D) *Odcinki zbiegających się połączonych z równoległémi czyli proporcyonalność linii.*

138. *Tw. linie równoległe* EF,GH,IK *dzielące jedną ze zbiegających się* AB, *na odcinki* EG i GI *równe, dzielą także i drugą* CD *na odcinki równe* FH i HK (fig. 84).

Przez punkta E i G prowadzę EL i GM, równoległe do CD (81), to EL=FH i GM=HK (115 b). Trójkąty GEL i JGM mające EG=GI, kąt EGL=GIM jako jednostronne względem poprzecznéj AB, równo-