d, e, f, g, h, i t. d. są punktami żądanego konturu, odpowiedniemi punktom C, D, E, F, G, G, i. t. d. modelu.

§. III. Połączenia linii prostych ograniczonych.

A.) *Odcinki dwóch linii prostych przecinających się, uważane z odcinkiem poprzecznej, czyli: trójkąt.*

87. Dwie linie proste nieograniczone przecinające się (fig. 31.) AB i CD, przecięte poprzeczną FG, tworzą trzy odcinki ograniczone EH, EJ, i HJ, leżące na płaszczyznie linii przecinających się AB i C,D składają linię łamaną, zamkniętą, złożoną z trzech linii prostych, zwaną *trójkątem*. Trójkąt HEJ ogranicza część płaszczyzny linii przecinających się AB i CD która to płaszczyzna także zowie sią trójkątem.

Trójkątem więc zowią się albo trzy linie ograniczone z których dwie po sobie idące mają końce wspólne; albo: trójkąt jest to płaszczyzna ograniczona trzema liniami, po dwie przecinającemi się. — *W téj części uważając tylko własności połączenia linii, określamy trójkąt jako połączenie linii. Linie* HE, EJ i JH, *składające trójkąt, zowią się bokami trójkąta. Kąty* JHE. HEJ i EJH *zawarte między bokamt*, wyrażające wzajemne ich względem siebie położenie, *zowią się kątami wewnętrznemi trójkąta*, lub téż *kątami trójkąta*; wierzchołki zaś tych kątów H, E, I, wierzchołkami trójkąta. *Kąt* EIH *zawarty między bokiem* EI *trójkąta a przedłużeniem JG boku HJ z nim przecinającego* *się, zowie się kątem zewnętrznym trójkąta* HEJ. Jeśli boki trójkąta przedłużymy w jedną stronę, jak są przedłużenia JG, ED i HA, utworzą się trzy kąty zewnętrzne GJE, DEH i AHJ; przedłużywszy zaś w drugą stronę, jak JC, HF i EB, utworzą się także trzy kąty zewnętrzne CJH, FHE i BEJ, które są równe pierwszym, jako wierzchołkiem przeciwległe: GJE z CJH, DEH z BEJ i EHF z AHJ; mówiąc więc o kątach zewnętrznych rozumieć będziemy albo trzy pierwsze, albo trzy drugie kąty.

Kąt zewnętrzny jest dopełnieniem kąta wewnętrznego, mającego z nim wspólny wierzchołek; zatém wielkość kątów zewnętrznych zależy od wielkości kątów wewnętrznych i dla tego w trójkącie uważamy tylko kąty wewnętrzne.

Przy każdym wierzchołku kąt wewnętrzny z zewnętrznym czynią II, przeto w trójkącie summa kątów wewnętrznych z zewnętrznémi równa się 3II; a że summa kątów wewnętrznych równa II (80), więc summa zewnętrznych równa 2II, czyli czterem kątom prostym.

88. W trójkącie głównie zwracamy uwagę na jego boki i kąty i w tym względzie mamy do uważania sześć rzeczy: trzy boki i trzy kąty. Co do boków trójkąt może być *a) różnoboczny*, gdy żaden z boków niéma sobie równego: *b) równoramienny* (symetryczny), gdy ma dwa boki równe, a bok trzeci zowie się podstawą; *c) równoboczny* (foremny), gdy wszystkie boki są sobie równe. Co do kątów trójkąt

może być: *a*) *ostrokątny*, gdy wszystkie kąty są ostre; *b*) *prostokątny*, gdy jeden kąt jest prosty (80 wn. 2); bok leżący naprzeciw kąta prostego zowie się *przeciwprostokątną*, zaś przy kącie prostym, *przyprostokątną* (ramię kąta prostego); *c*) *rozwartokątny*, gdy jeden z kątów jest rozwarty; bok leżący naprzeciw kąta rozwartego zowie się *przeciwrozwartokątną*, zaś przy kącie rozwartym, *przyrozwartokątną* (ramię kąta rozwartego). Wielkość kątów w trójkącie zależy od boków przeciwległych i dla tego co do kątów nieuważamy przypadków, odpowiednich pierwszym trzem rodzajom trójkąta.

W dwóch trójkątach, boki leżące naprzeciw kątów równych, lub kąty leżące naprzeciw boków równych, zowią się *odpowiedniemi*.

89. Prostopadła poprowadzona z wierzchołka kąta na bok przeciwległy, lub jego przedłużenie, zowie się *wysokością* trójkąta, zaś bok na który pada prostopadła, jego podstawą.

Linia dzieląca trójkąt na dwa inne, mające kąty i boki jednakowe, lecz położone w przeciwnym porządku, zowie się *osią symetryi*; przecięcie się osi symetryi zowie się *środkiem symetryi*; to samo ściąga się i do innych figur.

Punkt leżący wewnątrz figury, mający tę własność: że odcinki prostych przezeń przechodzących, utworzone przez boki, dzielą się w nim na dwie równe części, zowie się *środkiem figury*.

Linia przechodząca przez środek boku, zowie się linią *połowiącą bok*, a linia dzieląca kąt na dwie równe części, zowie się linią *połowiącą kąt*. Jeden jest środek linii (4 kw.), podobnie jedna jest tylko linia prosta połowiąca kąt.

90. Tw. *W trójkącie* 1° *naprzeciw boków równych* AB i BC *leżą kąty równe* A i C; 2° *naprzeciw boku większego* AF od FC *leży kąt większy* C od A (fig. 21).

Ze środka D trzeciego boku AC wyprowadziwszy prostopadłą:

1° Prostopadła przejdzie przez punkt B, jako równo oddalony od końców linii A i C (44). Obracając trójkąt BDC około BD, ramię DC padnie na ramie DA, dla równości kątów przy D, jako prostych, wierzchołek C padnie na wierzchołek A, dla równości linii DC i DA i ramię BC przystanie do AB, gdyż ma z niém dwa punkta A i B wspólne, a zatém kąty A i C są sobie równe. (40)

2° Prostopadła przetnie bok większy AF w punkcie B, gdyż punkt F leży z téj strony prostopadłéj, z któréj mniejsze jest jego oddalenie od końca boku AC (45 Wn.). Połączywszy punkt B z C, bok BC= AB (45), przeto i kąty A i BCA są równe, lecz że kąt BCA < FCA, a zatém i kąt A < FCA.

91. Tw. od. *W trójkącie* 1° *naprzeciw kątów równych* A i BCA *leżą boki równe* AB i BC; 2° *naprzeciw kąta* FCA *większego* od A, *leży bok* AF *większy* od FC.

1o Bok AB nie może być większy od BC, gdyż kąt BCA byłby większy od kąta A, równego mu z założenia; bok AB nie może być mniejszy od BC, gdyż kąt BCA byłby mniejszy od kąta A, a zatém bok AB jest równy bokowi BC.

2o Bok AF nie może być równy bokowi FC, gdyż kąt A równałby się kątowi FCA, większemu od siebie z założenia; bok AF nie może być mniejszym od boku CF, gdyż kąt A byłby większy od kąta FCA;—a zatém bok AF $>$ FC.

Wn. 1. W trójkącie prostokątnym, kąt prosty jest największy ze wszystkich kątów (80 Wn. 2), przeto przeciwprostokątna jest największa ze wszystkich boków; podobnie w trójkącie rozwartokątnym, przeciwrozwartokątna jest największa ze wszystkich boków.

Wn. 2. Jeżeli trójkąt ma dwa boki równe, to ma także i dwa kąty równe, jeśli trzy boki równe, to ma zarazem i trzy kąty równe, czyli trójkąt równoboczny jest zarazem równokątnym i nawzajem.—Trójkąt równoboczny dla tego zowie się *foremnym*, że ma boki i kąty równe, a takie figury zowią się foremnemi.

Wn. 3. W trójkącie równoramiennym ABC, prostopadła wyprowadzona ze środka podstawy, jest *osią symetryi*, gdyż rozdziela go na dwa trójkąty DBC i DBA, mające boki i kąty równe, lecz przeciwnie położone, bok DC i DA, kąt C i A i kąty przy D, tak że kąty ich równe nie przystają do siebie przy posuwaniu jednego z trójkątów BDC po linii AC, zawierającéj w sobie dwa równe boki DA i DC, t. j. po położeniu spodniéj strony trójkąta BDC na wierzchnią trójkąta ABD, lecz po położeniu wierzchniéj na wierzchnią, lub spodniéj na spodnią, co uskuteczniamy obracając trójkąt KDC około osi symetryi,— przytém wierzchołki odpowiednie A i C leżą na jednéj linii AC, prostopadłéj do osi symetryi BD, w jednakowéj od niéj odległości, gdyż inaczéj wierzchołek C trójkąta BDC, w czasie obrotu około osi BD, nie padłby na wierzchołek A, bo linia pada na linię dla równości kątów (40), a kąty przyległe CDB i BDA nie będąc prostemi, nie mogą być sobie równe; zaś punkt C pada na punkt A, dla równości linii prostych (4. Wn. 4).—Oś symetryi BD, jak widzieliśmy 1) przechodząc przez bok AC połowi go i jest do niego prostopadłą; 2) przechodząc przez wierzchołek B, połowi kąt przy tym wierzchołku leżący. — Trójkąt równoramienny zowie się *symetrycznym*, dla tego że ma jedną oś symetryi.

Wn. 4. Trójkąt foremny (fig 42) ABC, ma trzy osie symetryj: BD, CE i AF, gdyż każde dwa jego boki są sobie równe, przeto każdy bok można wziąść za podstawę. Prostopadłe BD i EC przecinają się w G (78. Wn. 8); lecz że punkta prostopadłéj DB, wyprowadzonéj ze środka linii AC, są równo oddalone od końców A i C (45), zaś punkta prostopadłéj EC są równo oddalone od końców A i B, przeto wspólny ich punkt G, tak jest oddalony od punktu A jak od C i od punktu A jak od B, czyli linia GA=GC i GA=GB, więc GC=GB; zatém linia łącząca środek F boku BC z punktem G jest prostopadłą do tego boku i przechodzi przez wierzchołek A, równo oddalony od końców B i C (44), czyli trzecia oś symetryi przechodzi przez punkt przecięcia się dwóch pierwszych i wszystkie trzy przecinają się w jednym punkcie G, środku symetryi. *Środek symetryi* G jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta, gdyż CG =AG=BG. Zarazem widziemy, że w trójkącie foremnym; 1) linie połowiące kąty trójkąta; 2) prostopadłe wyprowadzone ze środka boków; 3) prostopadłe wyprowadzone z wierzchołków na boki przeciwległe, i 4) linie łączące wierzchołki ze środkami boków przeciwległych będąc wszystkie osiami symetryi, przecinają się w jednym punkcie. Ta ostatnia własność jak zobaczymy, wspólna jest wszystkim trójkątom.

W jakich przypadkach trójkąty mają wszystkie boki i kąty odpowiednie, równe.

92. *Tw.* 1szy Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po dwa boki równe* AB=DE, BC=EF *i po kącie między niemi zawartym równym* B=E, *mają pozostały bok i dwa kąty odpowiednie równe* (fig. 43), AC=DF i kąt A=EDF, C=EFD.

Przenoszę trójkąt ABC na DEF, tak, aby punkt A padł na punkt D, bok AB poszedł po boku DE, to:

punkt B padnie na punkt E, dla równości tych dwóch boków (4. Wn. 4); bok BC pójdzie po boku EF, dla równości kąta B z kątem E (40) i punkt C padnie na punkt F, dla równości boków BC i EF; a że punkt A padł na D i C na F, przeto bok AC przystaje do boku DF i jest mu równy; kąt zaś A=D i C=F, gdyż ramiona ich przystają do siebie.

Wn. Trójkąty prostokątne mające dwie przyprostokątne równe, mają pozostałe boki i kąty równe.

93. *Tw.* 2gi Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF, *mające po trzy boki równe* AB=DE, BC=EF i AC=DF, *mają i kąty odpowiednie równe* (fig. 43.).

Przenoszę trójkąt ABC na płaszczyznę trójkąta DEF, tak, aby bok AC przystał do równego sobie boku DF, zatém punkt B padnie w jakimkolwiek punkcie *b*. Łączę punkt E z punktem *b*; trójkąt ED*b* jest równoramienny, gdyż boki ED i D*b* pierwszy z założenia, zaś drugi z przeniesienia równe bokowi AB, są sobie równe, przeto kąt DE*b*=D*b*E (90); dla podobnéj przyczyny kąt FE*b*=F*b*E, przeto i kąt DEF=D*b*F; że zaś kąt D*b*F=ABC z przeniesienia, zatém, i kąt ABC=DEF, i trójkąty ABC i DEF, mające po kącie i po dwa boki zawierające go, równe, mają i pozostałe części równe, t. j. kąt A=EDF i C=EFD.

94. *Tw.* 3ci Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po dwa boki równe* AB=DE i BC=EF *i po kącie przeciwległym bokowi większemu równym*, kąt C=F a bok AB > BC a tém samém i DE > EF, *mają i pozostałe części równe.* (fig. 43).

Przenoszę trójkąt DEF na ABC, tak, aby wierzchołek kąta F padł na wierzchołek równego mu kąta C, bok FE poszedł po boku BC, to punkt E padnie na punkt B, dla równości tych boków; bok FD pójdzie po boku CA, dla równości kąta F z kątem C, a mam dowieść że punkt D nie padnie ani przed punktem A, w punkcie G, ani za punktem A w punkcie H, a zatém padnie na punkt A. W pierwszym razie, boki BA i BG byłyby sobie równe, gdyż pierwszy z założenia, zaś drugi z przeniesienia równałby się bokowi DE, więc i kąt A=BGA (90), a że kąt BGA > C (80. Wn. 1), to i kąt A > C, przeto i bok BC byłby większy od AB (90), co sprzeciwia się założeniu. W drugim razie, dla równości boków BA i BH, równych bokowi DE, kąt BHA równałby się kątowi BAH, większemu od kąta C, przeto byłby większy od tego kąta, a tém samém i bok BC byłby większy od boku BH, równego bokowi AB, coby się sprzeciwiało założeniu.

Punkt więc D pada na punkt A, a zatém bok FD= AC, kąt A=D i B=E, gdyż po przeniesieniu przystają do siebie.

Wn. 1. Trójkąty prostokątne mające po przeciwprostokątnéj i po boku równym, mają i pozostałe części równe. (91. *Wn.* 1).

95. *Tw.* 4ty Przyp. *Dwa trójkąty ostrokątne* ABC i EFG, *lub rozwartokątne* ABD i EFH, *mające po dwa boki równe* AB=EF, BC=FG lub BD=FH, *i po kącie leżącym na przeciw boku mniejszego, ró-*

wnym, kąt A=E i bok AB ≻ BC i BD, a tém samém FE ≻ FG i FH, *mają i pozostałe części równe. Jeżeli zaś jeden tylko trójkąt* ABC *jest ostrokątny, to drugi* EFH *jest rozwartokątny, i kąt jego rozwarty* H *jest dopełnieniem kąta ostrego* C, *leżącego na przeciw boku większego* AB (fig. 44).

Przenoszę trójkąt EFG na ABC, tak, aby wierzchołek kąta E padł na wierzchołek równego mu kąta A, ramię EF poszło po ramieniu AB, to punkt F padnie na punkt B, dla równości tych boków, bok EG padnie na AC dla równości kąta E z kątem A, zaś bok FG mając jeden koniec w B, ma drugi na linii AC, a zatém może mieć tylko dwa położenia: albo padnie na bok BC=FG, lub na BD=BC, gdyż z punktu B jedną tylko pochyłą BD równą pochyłéj BC, a zatém i pochyłéj FG, poprowadzić można (51. Wn. 2); lecz że trójkąty z założenia są ostrokątne, przeto FG nie padnie na BD, gdyż wtedy kąt BDA, jako dopełnienie kąta BDC, równego kątowi BCD ostremu, byłby rozwarty a tém samém nierówny kątowi ostremu G;—a zatem i pozostałe części trójkątów są sobie równe. Jeżeliby trójkąty ABD i EFH były rozwarto kątne, wtedy FH mogłoby paść albo na bok BD, lub téż na linię BC równą temu bokowi. Na linię zaś BC paść nie może, gdyż kąt C, jako równy kątowi BDC, będącemu dopełnieniem kąta rozwartego BDA, byłby ostry i niemógłby się równać kątowi rozwartemu FHE; a zatem bok FH pada na bok BD, i pozostałe części trójkątów są sobie równe. Jeżeli trójkąt ABC jest ostrokątny, zaś trójkąt EFH nie jest ostrokątny, to bok FH nie padnie na bok BC, bo wtedy kąt H, jako równy kątowi C byłby ostry, ale pada na linię BD, równą temu bokowi, i kąt FHE jako równy kątowi BDA, będąc dopełnieniem kąta BDC, równego kątowi C, jest dopełnieniem kąta C ostrego, przeciwległego bokowi większemu AB, i pozostałe części trójkątów nie są równe t. j. AC $>$ EH i kąt ABC $>$ EFH.

96. *Tw.* 5ty Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po jednym boku równym* AC=DF *i po dwa kąty przy nim leżące równe* A=D i C=F, *mają i pozostałe części równe: bok* AB=DE, BC=EF *i kąt* B=E, (fig. 43).

Przenoszę trójkąt DEF na ABC tak, aby wierzchołek F padł na C i bok FD poszedł po boku CA, to: wierzchołek D padnie na A, dla równości boków DF i CA, bok FE padnie na CB, dla równości kąta C z kątem F i bok DE padnie na AB dla równości kątów A i D, a zatem i wierzchołek E padnie na B, gdyż linie FE i DE, leżące na liniach CB i AB, przecinają się w tym samym punkcie B jak i linie BC i AB; pozostałe więc części trójkątów, jako przystające są sobie równe.

97. *Tw.* 6ty Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po jednym boku równym* AC=DF, *i po dwa kąty, z których jeden przeciwległy temu bokowi, równe:* C=F i B=E, *mają i pozostałe części równe* (fig. 43).

Kąty B+C dopełniają się kątem A do II; a że kąty B+C z założenia równają się kątom E+F, przeto i dopełnienia ich, czyli kąty A i D są sobie równe (46. Uw 2). Trójkąty więc ABC i DEF mające po jednym boku AC=DE i po dwa kąty przy nim leżące, równe, C=F, z założenia zaś A=D z poprzedzającego dowodzenia, mają i pozostałe części równe (96).

98. *Tw. Dwa trójkąty mające boki odpowiednie prostopadłe lub równoległe, mają i kąty odpowiednie, równe.* (fig. 46 i 47).

Kąty mające ramiona równoległe lub prostopadłe, albo są równe, albo się dopełniają (78. Wn. 9 i 10); przeto dowieść tylko potrzeba, że kąty odpowiednie nie mogą być kątami dopełnienia. Rzeczywiście kąty A, B i C nie mogą być dopełnieniem odpowiednich sobie kątów, gdyż summa kątów w tych dwóch trójkątach równałaby się 3H, co być nie może (80); dwa kąty jednego trójkąta A i B, nie mogą być dopełnieniem odpowiednich im kątów drugiego trójkąta, gdyż wtedy summa czterech tylko kątów w tych trójkątach równałaby się 2H, co być nie może. Przeto dwa kąty jednego trójkąta, są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta, a tém samém i kąt trzeci równy kątowi trzeciemu. (80. Wn. 3).

Uw. 1. Kąty mające ramiona jednakowo względem siebie nachylone, mają tę samę własność jak i kąty mające ramiona prostopadłe (78. Wn. 10), przeto trójkąty, mające boki jednakowo nachylone, mają kąty równe; *i nawzajem* (fig. 46), gdyż jeśli kąt A=a, B=b i C=c, to jeśliby nachylenie boku BC do bc nie było takie, jak nachylenie boku AC do ac i AB do ab, wtedy przez punkta b i c, poprowadziwszy linie czyniące z bokami AB i AC takie kąty, jak bok cb z bokiem CB, kąty a'cb i a'bc, podobnie jak kąty trójkąta c i b, jako równe kątom C i B drugiego trójkąta, byłyby sobie równe, co być nie może.

Uw. 2. Równość kątów nie pociąga za sobą równości boków, lecz tylko oznacza jednakowość ich położenia tak, że gdy trójkąty mają kąty równe, to gdy jeden z boków jest prostopadły lub równoległy do odpowiedniego sobie, takiemiż są i pozostałe boki.

Uw. 3. W sześciu tylko przypadkach, z których czwarty jest szczególnym (gdyż ściąga się tylko do trójkątów ostrokątnych albo rozwartokątnych), trójkąty mające po trzy części równe, mają i pozostałe trzy części równe, zaś równość kątów nie pociąga równości boków. Do złożenia więc trójkąta nie można mieć 6ciu tych rzeczy dowolnie danych, choćby nawet summa kątów równała się II, a summa każdych dwóch boków była większa od trzeciego, gdyż wielkość trzech pierwszych, wyznacza zupełnie wielkość trzech pozostałych tak, że mając dwa boki i kąt zawarty, tém samém wyznaczamy bok trzeci, i kąty przy nim leżące i t. p.

99. *Tw. Dwa trójkąty* ABC i DEF lub DE'F lub DE"F *mające po dwa boki równe* AC=DF i AB=DE lub DE' lub DE" *i kąt* A *zawarty między temi bokami pierwszego trójkąta, większy od kąta* D *zawartego między odpowiedniemi bokami drugiego trójkąta, mają bok trzeci* BC *w pierwszym trójkącie, większy*

8

od boku trzeciego EF lub E'F lub E''F *w drugim trójkącie.* (fig. 45)

Przenoszę trójkąt ABC na drugi trójkąt tak, aby wierzchołek C padł na F, i bok CA poszedł po boku DF, to punkt A padnie na punkt D, dla równości tych boków, bok AB padnie zewnątrz odpowiedniego boku w drugim trójkącie, gdyż kąt A zawarty między bokiem AC i AB w pierwszym trójkącie, jest większy od odpowiedniego kąta w drugim trójkącie: bok zaś trzeci CB padnie albo zewnątrz boku trzeciego FE, jak dla trójkąta DEF, albo na boku, jak dla trójkąta DE'F, albo przed bokiem trzecim jak dla trójkąta DE''F.

W 1szym przypadku bok $DE+EF < DB+BF$ (20), odjąwszy z pierwszéj strony DE a z drugiéj $DB=DE$ z założenia, zostaje $EF < BF$.

W 2gim przypadku $E'F < BF$ jako część od swojéj całości.

W 3cim przyp. $DB+FE'' < DE''+FB$ (21), odjąwszy z pierwszéj strony DB a z drugiéj $DE''=BD$ z założenia, zostaje $FE'' < FB$.

100. *Tw. od. Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po dwa boki równe* $AC=DF$, $AB=DE$ *i bok trzeci* BC *pierwszego trójkąta, większy od boku trzeciego* FE *w drugim trójkącie, mają kąt* A *zawarty między bokami rownemi w pierwszym trójkącie, większy od odpowiedniego kąta* D *w drugim trójkącie* (fig. 45).

Kąt A nie może być równy kątowi D, gdyż wtedy bok BC byłby równy bokowi EF (92), mniejszemu od siebie z założenia, kąt A nie może być mniejszy od kąta D, gdyż wtedy bok BC byłby mniejszy od boku EF (98), co również sprzeciwiałoby się założeniu; a zatém kąt A jest większy od kąta D.

101. *Tw. Jeżeli z punktu* D *wziętego wewnątrz trójkąta poprowadzimy linie do końców jednego z boków* AC, *to kąt* D *między niemi zawarty jest większy od kąta* B *przeciwległego temu bokowi* AC (fig. 48).

Przedłużam linię AD do spotkania się z bokiem BC w punkcie E, to: kąt D $>$ DEC jako zewnętrzny, jest większy od kąta wewnętrznego przecinających się CE i CD względem poprzecznéj AE (76); dla podobnéj przyczyny kąt DEC $>$ B, a zatém kąt D tém bardziéj jest większy od kąta B.

102. *Tw.* 1° *Punkt* D *wzięty na linii* BD *połowiącéj kąt* ABC, *jest jednakowo oddalony od ramion tego kąta* BA i BC. 2° *Punkt* E *wzięty nie na połowiącéj ten kąt, nie jest jednakowo oddalony od jego ramion.* (fig. 49).

1° Prowadzę z punktu D prostopadłe do ramion kąta (57); trójkąty DBC i DBA mające bok BD wspólny, kąty przy B równe z założenia i kąt C=A jako proste, mają i pozostałe części równe (97) przeto DC =DA.

2° Z punktu E wyprowadzam prostopadłe EC i EF do ramion kąta; — z punktu D przecięcia się jednéj z prostopadłych EC z linią połowiącą BD, wyprowadzam prostopadłą DA do ramion BF; — punkt E z A łączę prostą EA; — wtedy EF $<$ EA, zaś EA $<$ ED+

DA, — biorąc za DA prostopadłą DC, linia EA $<$ EC a tém samém EF $<$ EC.

Wn. 1. I nawzajem: *punkt równo oddalony od ramion leży na połowiącéj*, gdyż w przeciwnym razie nie byłby równo oddalony od ramion; *punkt nierówno oddalony od ramion nie leży na połowiącéj*; w przeciwnym bowiem razie byłby równo oddalonym od ramion. *Połowiąca więc jest miejscem wszystkich punktów jednakowo oddalonych od ramion kąta.*

Wn. 2. Prostopadłe wyprowadzone z punktu połowiącéj D, odcinają na ramionach odcinki równe BA i BC, przeto jeżeli z punktów A i C wyprowadzimy prostopadłe AD i CD, to punkt ich przecięcia się D leży na połowiącéj kąt B; trójkąty bowiem BDA i BDC, mające przeciwprostokątną wspólną i przyprostokątne BA i BC równe z założenia, mają i kąty przy B równe (94. Wn. 1).

103. *Tw. Linie* AF, BD i CE *połowiące kąty* A, B i C *trójkąta* ABC, *przecinają się w jednym punkcie* G, *równo oddalonym od boków* AB, BC i CA tego trójkąta (fig. 42).

Linie AF i BD, połowiące kąty A i B, czynią ze wspólną poprzeczną AB kąty jednostronne wewnętrzne, mniejsze od II, gdyż summa kątów A i B dwa razy od nich większych, jest mniejsza od II (80), przeto linie te przecinają się w punkcie G (76. Wn.). Punkt G, jako leżący na połowiącéj AF, jest równo oddalony od ramion AC i AB (102); zatém prostopadła wyprowadzona z tego punktu na bok AC równa się prostopadłéj wyprowadzonéj na bok AB; punkt G leży także na połowiącéj BD, przeto prostopadła wyprowadzona z tego punktu na bok AB, równa się prostopadłéj wyprowadzonéj do boku BC; a zatém prostopadłe wyprowadzone z punktu G do boków AC i BC, jako równe prostopadłéj do boku AB, są sobie równe; a przeto punkt G leży na połowiącéj kąt trzeci C (102. Wn. 1), czyli trzy połowiące przecinają się w jednym punkcie G i ten punkt jest równo oddalony od boków trójkąta, czyli: prostopadłe wyprowadzone z tego punktu na boki, są sobie równe.

104. *Tw. Prostopadłe* DG, EG i FG *wyprowadzone ze środka boków trójkąta* ABC *przecinają się w jednym punkcie, równo oddalonym od wierzchołków* A, B i C *trójkąta* (fig. 50).

Prostopadłe DG i EG przecinają się z sobą w punkcie G (78. Wn. 8); punkt G jako leżący na prostopadłéj DG jest równo oddalony od końców linii (45) B i A, czyli GA=GB, dla podobnéj przyczyny GB=GC, przeto GA=GC jako równe linii GB; punkt więc G leży na prostopadłéj, przechodzącéj przez środek linii AC czyli, linia łącząca punkt G ze środkiem linii AC, jest prostopadłą do téj linii, a zatém prostopadłe wyprowadzone ze środka boków przecinają się w jednym punkcie G i ten punkt jest równo oddalony od wierzchołków.

105. *Tw. W trójkącie* ABC *prostopadłe* BE, CF i AD *poprowadzone z wierzchołków kątów na boki przeciwległe, przecinają się w jednym punkcie* H (fig. 51).

Prowadzę przez wierzchołki trójkątów linię GK, KJ i JG, równoległe do boków przeciwległych, które zarazem są prostopadle do linii BE, CF i AD (78. Wn. 5). Dla dowiedzenia że prostopadłe wyprowadzone z wierzchołków trójkąta ABC na boki przeciwległe przecinają się w jednym punkcie, potrzeba okazać, że one dla trójkąta GKJ są prostopadłemi, wyprowadzonemi ze środków boków (104). Uważam, że trójkąty BCK i BCA mające bok BC wspólny i kąty przy nim leżące, jako naprzemianległe, równe (78. Wn. 1), mają bok BK=AC; dla podobnéj przyczyny i bok GB=AC, przeto BK=BG czyli punkt B jest środkiem boku GK. Podobnym sposobem dowiedliśmy, że punkt A jest środkiem boku GJ, zaś C środkiem JH, a zatém i prostopadle BE, AD i CF przecinają się w jednym punkcie.

106. *Tw.* *W trójkącie prostokątnym* ABC *środek* D *przeciwprostokątnéj* BC *jest jednakowo oddalony od trzech wierzchołków* A, B i C (fig. 52).

Przy punkcie A linii AB kreślę kąt BAD=B (59), to i kąt DAC=C, gdyż kąt A=B+C (80); trójkąt BDA jest równoramienny (91), przeto BD=DA; dla podobnéj przyczyny DA=DC a zatém BD=DC, czyli punkt D jest środkiem przeciwprostokątnéj i jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta.

Wn. 1. W trójkącie prostokątnym linia łącząca wierzchołek kąta prostego ze środkiem przeciwprostokątnéj, dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne, mające za podstawy ramiona kąta prostego.

Wn. 2. *Linie łączące środek przeciwprostokątnéj ze środkami przyprostokątnych są do nich prostopadłe*, gdyż przechodzą przez dwa punkta równo oddalone od ich końców (44).

107. *Tw. od. Jeśli w trójkącie* ABC, *środek* D *jednego boku* BC *jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny, a środek boku, równo oddalony od wierzchołków, jest środkiem przeciwprostokątnéj.* (fig. 52).

Łączę punkt D z wierzchołkiem A kąta przeciwległego, i tym sposobem utworzyły się dwa trójkąty równoramienne BDA i ADC, gdyż z założenia $DB = DA = DC$; przeto kąt $B = BAD$ i $C = CAD$ (90), zatém kąt $B + C = BAD + DAC$ czyli kątowi A. Lecz kąt $A + B + C = II$ (80), a że $A = B + C$, przeto tak kąt A, jak i $B + C$ równają się kątowi prostemu czyli trójkąt ABC jest prostokątny przy A.

Wn. 1. Jeżeliby kąt $B = 60°$, to kąt BAD, jako jemu równy z wykreślenia, równa się także 60°, a zatém i kąt $D = 60°$ (80. Wn. 3), trójkąt więc BAD jest równoboczny (91. Wn. 2), i ramię BA kąta B równa się połowie przeciwprostokątnéj.

Wn. 2. *Jeżeli w trójkącie jeden z kątów* B *ma* 60°, *i jedno jego ramię* BA *jest połową drugiego ramienia* BC, *to trójkąt ten jest prostokątny, zaś ramię większe* BC, *jest przeciwprostokątną*; gdyż $AB = BD$ przeto i kąt $BDA = BAD$, a że summa ich równa się $180° - 60°$, zatém każdy z nich ma po 60°; trójkąt więc BAD jest równobocznym i $BD = DA$; lecz $BD =$

DC, zatém punkt D jest równo oddalony od trzech wierzchołków trójkąta.

108. *Zg. Mając dwa kąty* d i f *trójkąta, wynaleźć kąt trzeci.* (fig. 53).

Przy dowolnéj linii BC, przy punkcie A, kreślę kąt BAE=d, i kąt DAC=f, to kąt EAD jest żądanym, jako dopełniający kąty dane do II.

109. *Zg. Nakreślić trójkąt* (fig. 54) *mając:*

1° *dwa boki* a, b i *kąt* e *między niemi zawarty.*

Na linii nieograniczonéj CA, kreślę kąt ACB=e (59), i odcinam CA=a i CB=b, punkt A z B łączę prostą AB, a trójkąt ABC jest żądanym.

2° *trzy boki* a, b, c.

Na linii nieograniczonéj odcinam AC=a, z punktu C, promieniem równym bokowi b, zakreślam łuk, z punktu A, promieniem równym bokowi c, przecinam ten łuk w punkcie B; punkt B z punktami A i C łączę liniami prostemi, a trójkąt ABC jest żądanym.

3° *Dwa boki* b, c i *kąt* f *przeciwległy bokowi większemu* b.

Przy linii nieograniczonéj AC kreślę kąt CAB=f, odcinam AB równe bokowi mniejszemu c i z punktu B promieniem równym bokowi większemu b, przecinam linię AC w punkcie C, a trójkąt ABC jest żądanym.

4° *dwa boki* b, c i *kąt* e *przeciwległy bokowi mniejszemu* c, *nakreślić trójkąt* 1) *ostrokątny*, 2) *rozwartokątny.*

Kreślę kąt ACB równy e, odcinam CB równe bokowi większemu b; z punktu B, promieniem równym bokowi mniejszemu c, zakreślam łuk, który przetnie ramię CA w dwóch punktach, gdyż z punktu B dwie równe pochyłe BA i BA' poprowadzić można, które są równo oddalone od spodka prostopadłéj BD, przeto jako mniejsze od pochyłéj BC, obie leżą przed tą pochyłą. — Żądanym trójkątem 1) *ostrokątnym* jest ABC, gdyż kąt A < BDC zewnętrznego; 2) *rozwartokątny* jest trójkąt A'BC gdyż kąt zewnętrzny BA'C > BDA prostego.

5o *jeden bok* a *i dwa kąty przy nim leżące* e *i* f.

Na linii nieograniczonej odcinam AC=a i kreślę kąt ACB=e zaś CAB=f; ramiona tych kątów przetną się w punkcie B, gdyż summa kątów wewnętrznych A i C, jako równych kątom e i f, mniejsza od II (80); a trójkąt ABC jest żądany.

6o *jeden bok* a *i dwa kąty:* f *leżący przy tym boku, zaś* d *przeciwległy temu bokowi.*

Na linii nieograniczonéj odcinam AC=a, kreślę kąt CAB=f i kąt ACB równy dopełnieniu kątów danych f i d do II (108), a trójkąt ABC jest żądany.

110. *Zg. Dany kąt podzielić na dwie równe części.*

a) Gdy wierzchołek A *znajduje się na rysunku.*

Odcinam AB=AC (fig. 55), i z punktów B i C wyprowadzam prostopadłe do ramion, a punkt ich przecięcia się D leży na połowiącéj kąt A (102. Wn. 2), przeto AD jest linią żądaną.

Albo: odcinam AB=AC, trójkąt więc BAC jest symetryczny, a prostopadła do BC połowi kąt A (91. Wn. 3), przeto z punktu A prowadzę prostopadłą do BC (57).

b) *Gdy wierzchołek kąta nie znajduje się na płaszczyznie rysunku.* (fig. 56).

1) Między dwiema linijami AB i CD prowadzę dowolną linię EF, 2) prowadzę linię FH połowiącą kąt CFE i EH połowiącą kąt AEF, to punkt H ich przecięcia się jest tak oddalony od linii FC jak i od FE, zaś od FE tak jak od EA (102); przeto punkt H jest równo oddalony od ramion FC i EA danego kąta i leży na połowiącéj ten kąt (102. Wn. 1). Podobnym sposobem wynajduję drugi punkt G leżący na połowiącéj, a linia HG jest żądaną.

111. *Zg. Z końca linii* CA *wyprowadzić prostopadłą.* (fig. 52).

Z punktu dowolnego D odległością tego punktu od punktu A zakreślam okrąg koła, przecinający się z daną linią w punkcie C, przez punkt C prowadzę średnicę CD, a koniec jéj B połączony z danym punktem A, daje prostopadłę żądaną BA; gdyż trójkąt BAC jest prostokątny. (107)

112. *Zt. Dany kąt* BAC *podzielić na trzy równe części.* (fig. 57).

Z wierzchołka kąta A, na jedném z ramion BA dowolnym promieniem zakreślam półokręgu koła; na liniale odcinam DE równe promieniowi, i przykładam liniał tak, aby on przechodząc przez punkt C, punktem D padł na okręgu koła, zaś punktem E na przedłużeniu średnicy; wtedy kąt DEA który on czyni z średnicą jest trzecią częścią kąta danego A; gdyż kąt A $=a+b$, jako zewnętrzny, $a=b+DAE=2b$ (90) jako równy kątowi CDA; przeto $A=2b+b=3b$.

B) *Odcinki czterech linii prostych przecinających się czyli: czworobok.*

113. *Czworobokiem zupełnym* zowiemy odcinki czterech prostych (fig. 58) FA, FD, EA, EB leżących na płaszczyznie, przecinających się po dwie, tudzież samą płaszczyznę ograniczoną temi odcinkami. On się czyta ABFCDE. Części jego ograniczające płaszczyznę zowią się także czworobokami, i tak: 1) ABCD zowie się *wypukłym* albo *czworokątem* od liczby kątów; 2) FAEC *wklęsłym* i 3) FBCED *podwójnie wklęsłym.* Głównie zajmować się będziemy czworobokiem wypukłym. *Czworokątem* takim *zowiemy cztery linie proste ograniczone, z których dwie po sobie idące mają końce wspólne*, lub też *płaszczyznę ograniczoną temi prostemi.* Linie tę podobnie jak w trójkącie zowią się *bokami—boki przeciwległe* są te które nie mają końców wspólnych, a *kąty przeciwległe* te które niemają ramienia wspólnego. Odcinek wspólnéj poprzecznéj dla dwóch par boków, czyli linia łącząca wierzchołki kątów przeciwległych zowie się *przekątnią* czworokąta lub też czworoboku, i tak: