KURS
JEOMETRYI ELEMENTARNÉJ

Z RYSUNKIEM JEOMETRYCZNYM

I ZASTOSOWANIAMI

PRZEZ

M. Świerzbieńskiego,
Kand. Fil. Nauczyciela Matematyki
w Gimnazyum Realnem Warszawskiem.

WARSZAWA,
Nakładem Autora,
w Drukarni Józefa Tomaszewskiego
przy ulicy Bielańskiéj Nr. 600.

—

1848.

WOLNO DRUKOWAĆ,

z warunkiem złożenia w Warszawskiém Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby egzemplarzy.

w Warszawie dnia 23 Kwietnia (5 Maja) 1848 r.

Cenzor,

L. T. Tripplin.

SPIS PRZEDMIOTÓW.

PRZEDMOWA.

Na współdziałaniu zdolności teoretycznéj i praktycznéj, na połączeniu tych dwóch kierunków, opiera się postęp każdéj umiejętności, zatém i Jeometryi. Umysł badający oczyszcza i prześwietla mętny chaos faktów i własną mocą wykrywa nowe prawdy,—a powszechne koniecznością kierowane prace, skrzętne kombinacye praktycznego człowieka, wskazują nowe widoki tam, gdzie ograniczone warunki myślącéj indywidualności sięgać nie pozwalają. Na pracach taką podwójną spłodzonych drogą, powstaje system wszechstronny, stapiający w pewnym momencie całość prawdy, w którym nauka staje się pełną i praktyczną, a empirya rozumną i konieczną.

Do utworzenia takiego systematu w Jeometryi dążyłem. O ile wymaganiu założonemu uczyniłem zadość, światły czytelnik oceni; uważam wszakże stosownem wskazać na te punkta, które mi się zdawały stanowić własność i zasługę mego poglądu.

Przedewszystkiem, w rozwijaniu pojęć jeometrycznych, starałem się zachować nieprzerwany a jednostajny ciąg i apodyktyczne następstwo myśli, mianowicie w szczególnych traktatach nauki, nie cofałem się do ulubionego punktu wyjścia: własności trójkątów, ale rozpoczynając całość od prawd oczywistych, z nich i z poznanych już własności figur, wyprowadziłem nowe prawdy. Słusznie bowiem powiedział Kant, że jeśli dla dojścia do celu potrzeba będzie często wracać do punktu, od któregośmy zaczęli, żeby nową przedsięwziąć drogę, to z tego można wnosić, że nauka daleką jest od drogi pewnéj, któréj szuka tylko po omacku, ale jéj nie znajduje; jedném słowem że nie ma nauki; a przedewszystkiém o naukę idzie, o prawdę nie o użytek. W pracy méj nie chciałem się pochłonąć jednostronnie pojętym pedagogicznym celem: poczynienia ułatwień dla uczących się,—zwykle bowiem takie ułatwienia dzieją się nie inaczéj jak kosztem nauki saméj; kosztem myślącéj i tworzącéj zdolności uczącego się; nauka zamienia się w aggregat faktów, dogodnie zastosowanych dla *pamięci*, w kupę wolną całości i związku; przyczém nawet ważny pedagogiczny cel: wszechstronnego rozwinięcia władz poznawania, należycie osiągniętym być nie może. To jest wreszcie najłatwiejsze, co najlogiczniejsze, najprostsze.

Tak tedy, podług najlepszéj wiedzy mojéj, urządziłem czcigodny budynek przeszłości; ważniejsze zmiany względem zwykłego rzeczy traktowania, zawierają się w traktatach: o dwóch liniach prostych leżących na płaszczyznie, o równości, podobieństwie i symetryczności figur, tudzież o zależności wielkości figur równoobwodowych do ich kształtu.

Dołączone, odpowiednio rozwinięciu teoryi, zagadnienia i zastosowania, objaśniając prawdy podane i wskazując sposób w jaki one stosowanemi być winny, dopełniają całości nauki i mojéj książki.

Przez łączne objęcie tak zasad jak i zastosowań, mianowicie: traktując Jeometryę elementarną już jako izagogikę Jeometryi wyższéj, już jako naukę pomocniczą w Matematyce stosowanéj, tudzież przewodniczącą w rzemiosłach; a przeto odpowiednio wymaganiom tak realnego jak i ogólnego ukształcenia, zatém równie właściwą dla szkół realnych, jako i filologicznych (opuszczając tylko w ostatnich zastosowania), sądziłem że zadosyć czynię wymaganiom teoretycznym i praktycznym potrzebom.

Oddaję pracę moją pod bezstronny sąd publiczny w przekonaniu, że w dzisiejszym stanie literatury matematycznéj krajowéj, nie będzie ona bez pożytku, gotów zawsze stanąć w zapasy za przekonanie, dobrą wiarą i pracą bez uprzedzeń zdobyte, a poddać się wszechstronniejszemu, jakie w rozwoju nauki jest konieczne.

WSTĘP.

I. Wszystko co działa na nasze zmysły zowie się ciałem.

Ciała mogą być uważane pod trzema względami:

a) pod względem kształtu, mogą być kuliste, wielościenne i t. p.

b) pod względem wielkości,—mogą być równe, albo jedno większe od drugiego;

c) pod względem jakości, czyli składu wewnętrznego;—mogą być złożone z jednakowéj, lub téż niejednakowéj materyi.

Dwa jakiekolwiek ciała jednakowego kształtu, mogą się różnić wielkością;—jednakowego kształtu i wielkości, mogą się różnić co do jakości;—mające zaś wszystkie trzy własności jednakowe, zupełnie nie różnią się od siebie tak, że jedno za drugie może być wziętem;—przeto te trzy własności wyczerpują zupełnie istotę ciała; i dla tego ciała mogą być uważane tylko pod temi trzema względami.

II. Jeżeli weźmiemy za przedmiot poznania naszego kształt i wielkość ciał, to do ich poznania nie możemy dojść, za pomocą rozważania samychże ciał, po-1sze, z przyczyny nieograniczonéj ich liczby; po-2gie, że codzienne potrzeby życia wymagają nadawania ciałom ciągle odmiennego kształtu, stosownie do celu na jaki są przeznaczone; a w tym względzie istniejące ciała nie nastręczają przykładu.

III. Zastanowiwszy się nad jakiémkolwiek ciałem, widzimy że ono ma granice oddzielające je od innych ciał, i te granice zowią się *powierzchniami*. Krawędzie czyli przecięcia się tych powierzchni, zowią się *liniami*. Krawędzie czyli linie, ograniczają się przez spotkanie się z drugiemi liniami lub téż powierzchniami; granice zaś te zowią się *punktami*. Ztąd wynika: że powierzchnia, jest granicą ciała; linia, powierzchni; punkt zaś, granicą linii.

Powierzchnia przecinając ciało, przecina zarazem niektóre z ograniczających je powierzchni z ich krawędziami; tym sposobem na powierzchniach tworzą się linie; a na liniach, punkta. Lecz podzielność jest główną własnością ciał, przeto na powierzchni można poprowadzić dowolną liczbę linii; na linii zaś, wziąć można dowolną liczbę punktow.

W każdém miejscu powierzchni, można poprowadzić przecinające się linie, ich przecięcie się zowie się punktem; i dla tego każde miejsce powierzchni zowie się punktem.

IV. Nie ma nawet dwóch ciał mających kształt zupełnie jednakowy, jednak wiele jest ciał co do kształtu do siebie podobnych: jak kuliste, graniaste i t. p. Dla oznaczenia tego podobieństwa, a tém samém i samego kształtu ciał, potrzeba przyjąć za stały taki kształt, do którego najbardziéj zbliża się kształt ciał podobnych do siebie; taki to kształt jest ciałem wyobrażalném czyli jeometryczném. I tak: w ciałach kulistych spostrzegamy, że różnica między odległościami punktów ich powierzchni od punktu wewnątrz wziętego w jednych jest większa, aniżeli w drugich, i dla tego za stały przyjmujemy taki kształt, w którym te odległości są jednakowe, i który to zowie się *kulą*. Żadne ciało nie ma takiego kształtu, lecz tylko kształt ich zbliża się do kuli. Podobnym sposobem dochodzimy do pojęcia innych jeometrycznych ciał czyli *brył*.

V. Różnica między bryłą a ciałem jest ta, że pierwsza jako wyobrażalna *a*) niéma jakości czyli składu wewnętrznego, a przeto może być tylko uważana pod względem kształtu i wielkości; *b*) że ona bez przerwy może się powiększać i zmniejszać, ciała zaś choćby się i zmniejszały z powodu dzielenia, to w tém zmniejszaniu się zawsze są przerwy.

VI. Powiększanie się i zmniejszanie brył nie ma granic. Stopniowe powiększanie się brył doprowadza nas do pojęcia *przestrzeni*, stopniowe zaś zmniejszanie się do pojęcia *punktu*. Przestrzeń i punkt mają kształt nieoznaczony, czyli są bezkształtne, gdyż do ich pojęcia przychodzimy z rozważania jakiéjkolwiek bryły; pod względem zaś wielkości: przestrzeń jest nieskończenie wielką, punkt zaś nieskończenie małym, dla tego, że pierwsza jest większą, a drugi mniejszym, od wszelkiéj ograniczonéj wielkości.

VII. Ograniczenia ciała zowią się powierzchnią, linią, punktem (III), z tego powodu i granica bryły zowie się także *powierzchnią*, granica téj powierzchni *linią*, granica linii *punktem*. One są tylko wyobrażalne, i razem z bryłą mogą się powiększać lub zmniejszać, ograniczenia zaś ciała podpadają pod zmysły, i tak jak samo ciało, ani powiększać się, ani zmniejszać nie mogą.

VIII. W bryle, podobnie jak w ciele, można poprowadzić dowolną liczbę powierzchni, które zrodzą na powierzchniach bryły dowolną liczbę linii, zaś na liniach taką samą liczbę punktów (III); i dla tego bryłę można uważać, za powierzchnie; powierzchnię, za linie; linię za *punkta*,—bez przerwy po sobie następujące. Z tego to powodu tworzenie się tych wielkości przedstawiamy w następujący sposób:

Droga przez punkt przebieżona, jako szereg punktów bez przerwy idących, zowie się linią. Dla téj saméj przyczyny droga przebieżona przez linię zowie się powierzchnią; przebieżona zaś przez powierzchnię, bryłą.

* * *

IX. Linia jako nieprzerwany szereg punktów jest tylko wyobrażalną. Pojęcie o niéj powinno być oznaczone, inaczéj bowiem nie moglibyśmy wykryć szczególnych jéj własności. Linia w myśli wtenczas tylko jest oznaczoną, gdy przedstawimy sobie tworzące ją punkta jako mające jedną główną własność. Z tego to powodu *linie, pod względem kształtu, są to punkta bez przerwy po sobie idące, mające jednakową własność główną*: np. linia prosta, jest to szereg nieprzerwany punktów jednakowo położonych ze wszystkich stron, względem dwóch jakichkolwiek jéj punktów. Dla téj saméj przyczyny pod względem kształtu *powierzchnie są to linie bez przerwy po sobie idące, mające jedną własność wspólną*: np. płaszczyzny, są to linie proste bez przerwy po sobie idące, przecinające się z dwoma zbiegającemi się prostemi. *Bryły, są to powierzchnie ograniczone, bez przerwy po sobie idące, mające główną własność wspólną*. Powierzchnie tworzące bryłę dla tego są ograniczone, gdyż inaczéj otrzymalibyśmy pojęcie bryły nieograniczonéj, czyli przestrzeni.

* * *

X. Ze sposobu tworzenia się wielkości przestrzennych, otrzymaliśmy ich własności ściągające się do kształtu; własności zaś co do ich wielkości są:

1) Pod względem wielkości punkt jest nieskończenie mały (VI), a tém samém nie może być zmierzonym; i dla tego linia, jako droga przez punkt przebieżona ma tylko jeden wymiar, zależący od wielkości drogi przebieżonéj, zwanéj *długością*. Dla zmierzenia linii trzeba tylko zmierzyć jéj długość; i dla tego długość zowie się wymiarem linii—*linia zaś, wielkością przestrzenną jednowymiarową; czyli rozciągłością uważaną pod jednym wymiarem długości*.

2) Wielkość i stosunek powierzchni, jako drogi przebieżonéj przez linię, zależy tylko od *długości* téj linii, zowiącéj się w tym razie *długością powierzchni*, —i od odległości, na którą ona oddaliła się od pierwiastkowego swego położenia. Odległość ta mierzy się

linią zwaną *szerokością powierzchni.* Ztąd wynika że: 1) powierzchnie, mające równe długości i szerokości, są sobie równe; 2) przy równych długościach, jedna powierzchnia tyle razy jest większa od drugiéj, ile razy szerokość pierwszéj, jest większa od szerokości drugiéj powierzchni, czyli powierzchnie te są w stosunku szérokości—i nawzajem powierzchnie mające równe szerokości, mają się do siebie w stosunku długości; 3) w ogólności zaś powierzchnie mają się do siebie jak iloczyny z długości przez szerokość; czyli jedna powierzchnia tyle razy zawiera się w drugiéj powierzchni; ile razy iloczyn z długości, przez szerokość pierwszéj, zawiera się w podobnym iloczynie drugiéj powierzchni. Za jedność do mierzenia powierzchni zazwyczaj przyjmujemy taką powierzchnię, któréj długość i szerokość, równają się jedności przyjętéj za jedność do mierzenia linii; iloczyn więc z liczebnéj wartości z długości przez szerokość, dla powierzchni przyjętéj za jedność, równa się także jedności liczebnéj: przeto jedność powierzchni tyle razy zawiera się w mierzonéj powierzchni, ile zawiera jedności iloczyn z liczebnéj wartości długości, przez szerokość mierzonéj powierzchni. Ztąd wynika, że dla mierzenia powierzchni, mierzymy tylko jéj długość i szerokość, które z tego powodu zowią się wymiarami powierzchni,—*powierzchnię zaś nazywamy wielkością przestrzenną dwuwymiarową; czyli rozciągłością uważaną pod dwoma wymiarami, długości i szerokości.*

3) Wielkość i stosunek brył zależy od tworzącéj ograniczonéj powierzchni, przeto od jéj długości i

szerokości, zowiących się w tym przypadku *długością i szerokością bryły*, i od odległości, na którą oddaliła się ta powierzchnia, od pierwotnego swego położenia, mierzonéj linią zwaną *wysokością*, *grubością*, albo *głębokością* bryły. Powierzchnia przeto tworząca, względem bryły takie zajmuje miejsce, jakie, tworząca linia, względem powierzchni: a zatém bryły 1) mające powierzchnie i wysokości równe, mają wielkość jednakową; 2) mające powierzchnie równe, mają się do siebie jak wysokości; i nawzajem mające wysokości równe, mają się do siebie jak tworzące powierzchnie; 3) w ogólności zaś są w stosunku iloczynów z podstaw, przez wysokości, czyli: jedna bryła tyle razy zawiera się w drugiéj, ile razy iloczyn z liczebnéj wartości długości, szerokości i wysokości pierwszéj, zawiera się w podobnym iloczynie drugiéj bryły. Dla mierzenia brył zazwyczaj przyjmujemy za jedność taką bryłę, któréj długość, wysokość i szerokość równają się jedności przyjętéj do mierzenia linii; iloczyn więc z liczebnéj wartości długości, szerokości i wysokości dla téj jedności brył, równa się liczebnéj jedności; a zatém jedność brył, tyle razy zawiera się w mierzonéj bryle, ile jedności zawiera w sobie iloczyn z liczebnéj wartości długości, szerokości i wysokości téj bryły. Z tego to powodu dla zmierzenia bryły, mierzymy jéj długość, szerokość i wysokość, które dla tego zowią się wymiarami bryły; *bryła zaś wielkością przestrzenną trzechwymiarową; czyli, rozciągłością uważaną pod trzema wymiarami długości, szerokości i wysokości.*

*
* *

XI. Własności kształtu i wielkości linii, powierzchni i brył, jako zlewające się w tych ilościach, zależą jedne od drugich—i tak: linia pod względem kształtu, jest nieprzerwanym szeregiem punktów mających jednakową własność (IX); pod względem wielkości, może być wyobrażaną jako nieskończona (VII): lecz linię wtedy tylko można wyobrazić jako nieskończenie wielką, gdy oprócz jéj punktów mających jednakową własność, niéma innych punktów mających tę samą własność; w przeciwnym razie choćbyśmy pod względem wielkości, wyobrazili linią większą od wszelkiéj oznaczonéj długości, to z przyczyny niezupełności kształtu, punkta nieleżące na téj linii, lecz mające z punktami téj linii jednakową własność, utworzyłyby także linię, będącą przedłużeniem pierwszéj, uważanéj za nieskończenie wielką; a która w tym razie niebyłaby taką, jako mniejsza od téj, którą możemy wyobrazić. Linia więc niezawierająca wszystkich punktów mających jednakową własność, nie może powiększyć się do nieskończoności—a przeto nie byłaby jeometryczną. Ztąd wynika, że *linia jest to nieprzerwany szereg wszystkich punktów, mających jednakową własność wspólną*; linia zaś niezawierająca wszystkich punktów, jest tylko *częścią* czyli *odcinkiem linii* np. łuk. Z tego to powodu linia może być złożoną z dwóch oddzielnych części: czyli może mieć odnogi, których punkta mają jednakową własność.—To się odnosi równie do powierzchni i do bryły.

XII. Poznawszy własności linii, powierzchni i bryły, odnoszące się tak co do kształtu, jako téż i wielkości widzimy że 1) *linia jest to szereg nieprzerwany wszystkich punktów jednakowéj własności, mający jeden tylko wymiar;* 2) *powierzchnia jest nieprzerwany szereg wszystkich linii jednakowéj własności, mający dwa wymiary;* 3) *Bryła jest nieprzerwany szereg ograniczonych powierzchni jednakowéj własności, mający trzy wymiary.*

*
* *

XIII. *Jeometrya jest nauka mająca za przedmiot poznanie ilości przestrzennych: linii, powierzchni i bryły, pod względem ich kształtu i wielkości.*

XIV. Zależność wielkości przestrzennych wskazuje nam drogę, którą powinniśmy postępować dla poznania ich własności. I tak: widzieliśmy 1) że od kształtu czyli sposobu tworzenia się zależy wielkość ilości przestrzennych; 2) kształt i wielkość powierzchni zależy od linii; kształt i wielkość brył zależy od ograniczonych powierzchni; przeto powinniśmy rozwijać dla każdéj z ilości przestrzennych 1) naprzód własności kształtu, a potém wielkości;—2) naprzód poznać te własności linii, potém powierzchni, a na końcu brył, z czego się tworzą trzy części Jeometryi: *a*) Nauka o liniach, Liniometrya; *b*) nauka o powierzchniach, Planimetrya, i *c*) nauka o bryłach czyli Solidometrya.

XV. Zasady Jeometryi czyli Elementarna Jeometria ma za przedmiot:

1) W Liniometryi linię prostą i okrąg koła t. j. nieprzerwany szereg wszystkich punktów leżących

na płaszczyznie w jednakowéj odległości od punktu téj płaszczyzny zwanego środkiem koła.—Lecz że te linie leżą na płaszczyznie, zaś same lub ich połączenia ograniczają płaszczyznę, któréj wielkość i kształt zależy od tych linnii;—przeto w Elementarnéj Jeometryi prosta, okrąg koła i ich połączenia uważają się na płaszczyznie, razem z własnościami ograniczonéj płaszczyzny, co stanowi jéj część zwaną Planimetryą;—2) w nauce o powierzchniach uważa się więc tylko takie powierzchnie, które się tworzą linią prostą i okręgiem koła i nie przedstawiają linij nie wchodzących w zakres téj nauki, a zatém tylko powierzchnię *a*) *płaską*, *b*) *walca* t. j. *szereg prostych równoległych, przecinających się z dwoma równemi i równoległemi okręgami*; *c*) *ostrokręgu* t.j. *szereg prostych wychodzących z jednego punktu, przecinających się z okręgiem*; *d*) *kuli* t. j. *miejsce równych okręgów, mających wspólny środek*. I ich połączenia takie, z których wynikają linie proste lub okręgi.—Lecz kształt i wielkość bryły czyli przestrzeni ograniczonéj powierzchniami, zależy od kształtu i wielkości tych powierzchni, a tém samém od własnosci ich połączeń; przeto w Elementarnéj Jeometryi, własności powierzchni i ich połączeń, wykładają się razem z własnościami brył, i to stanowi jéj część drugą zwaną Solidometrią.

* * *

XVI. Stosownie do sposobu uważania ilości przestrzennych, tak Planimetrya, jako téż i Solidometrya dzieli się na dwie części,—w pierwszéj uważają się własności co do kształtu, w drugiéj zaś co do wielkości.

Część Isza.

Księgi Iszéj Planimetryi i Księgi IIéj Solidometryi.

Jeometryczne wielkości naprzód uważać należy same w sobie czyli oddzielnie, i dla tego: Rozdział I.

a) w Planimetryi, linie: 1) prosta, 2) łamana jako złożona z części linii prostéj, i 3) okrąg koła.

b) w Solidometryi: powierzchnie 1) płaska, 2) walcowa, 3) ostrokręgowa i 4) kulista.

Poznawszy własności każdéj z jeometrycznych wielkości, następnie możemy poznać własności ich połączeń, i dla tego: Rozdział IIgi.

a) w Planimetryi: połączenia linii prostych.

Linie leżące na płaszczyznie, a nawet jakiekolwiek linie mogą mieć: 1) jeden lub kilka punktów wspólnych, i wtedy zowią się: *a*) *przecinającemi się*, *b*) *stycznemi*, gdy punkta przecięcia się zlewają się w jeden, tak że w ogólności jedna linia leży zewnątrz drugiéj. Linie styczne są tylko szczególnym przypadkiem przecinających, przejście zaś od przecinania się do styczności przedstawia się nam w ten sposób: jeśli przecinająca obraca się około jednego z punktów wspólnych, to inne stopniowo zbliżają się do tego punktu i gdy jeden zleje się z nim, wtedy przecinająca staje się styczną. Gdyby linia nie przestałaby się obracać, to punkt przecięcia się oddalałby się