2°. Obieram punkt C, (fig. 118) z którego końce linii AB są widzialne, mierzę długość linii AC i CB niedostępnych z jednego tylko końca (169), i odległość między punktami a i b leżącemi w ½, ⅓, ¼ téj i t. p. odległości od punktu C t. j. między punktami dzielącemi te linie na części proporcyonalne, linia ab jest równoległą do AB przeto AB: ab=AC: aC, a ztąd AB=ab. AC: aC—sposób ten jest dogodny przy mierzeniu linii będącéj w znacznéj odległości, lub gdy do niej nie możemy się zbliżyć.

3°. Jeżeli z punktu D leżącego w kierunku linii AB są widzialne oba jej końce, wtedy od długości linii DB z jednego końca niedostępnej, odejmujemy długość linii DA także z jednego końca niedostępnéj.

ROZDZIAŁ III.

Połączenia okręgu koła z liniami prostemi.

§ 1. Ogólne własności.

172. Okrąg koła może się przecinać lub nie przecinać z linią prostą, w pierwszym przypadku linia zowie się sieczną, w drugim oddzielną. Sieczna AB (fig. 119) przecina okrąg koła C w dwóch tylko punktach, gdyż promienie poprowadzone do punktów D, E.. wspólnych dla siecznéj i okręgu są sobie równe, a dwa

tylko mogą być takie promienie, gdyż z punktu C wziętego nad linią AB dwie tylko pochyłe równe poprowadzić można (51. Wn. 2). Jeżeli sieczną AB obracamy około jednego z punktów przecięcia się D, to punkt przecięcia się E zbliża do punktu D, przystanie do niego, a następnie oddala się tak, że linia AB znowu staje się sieczną; szczególnym więc przypadkiem przecinania się jest styczność t. j. gdy dwa punkta przecięcia się siecznéj zlewają się w jeden punkt. *Linia styczna z okręgiem koła, jest linią mającą z nim jeden tylko punkt wspólny*; ona jest prostopadłą do promienia CD, gdyż inaczéj prostopadła wyprowadzona ze środka koła C do stycznéj A'' B'' byłaby mniejszą od promienia, a jéj spodek byłby w okręgu koła (34), przeto linia A'' B'' w punkcie D wchodziłaby do okręgu koła, z którego wychodząc musiałaby go przeciąć i w drugim punkcie, a więc nie byłaby styczną; i nawzajem: linia A'' B'' prostopadła do promienia jest styczną z okręgiem koła, gdyż ma tylko jeden punkt D wspólny z okręgiem koła, jako będący w odległości promienia od środka koła; promień prostopadły CD jest najkrótszą odległością środka C od liniii A'' B'', przeto wszystkie punkta linii A'' B'' są w odległości od środka kąta większéj od promienia, a tém samém leżą zewnątrz okręgu.

Jeżeli więc odległość linii od środka koła jest mniéjsza, równa lub większa od promienia, to linia ta jest sieczną, styczną lub oddzielną względem tego okręgu koła, spodek prostopadłéj wyprowadzonéj ze środka okręgu do téj linii w piérwszym przypadku leży wewnątrz koła, przeto linia wchodząc i wychodząc z okręgu koła przecina go w dwóch punktach—w drugim na okręgu koła, linia więc jest prostopadłą do promienia—w trzecim zewnątrz okręgu, a tém samém i inne punkta jako bardziéj oddalone od okręgu leżą zewnątrz okręgu. I nawzajem: Jeżeli linia jest sieczną, styczną lub oddzielną, to oddalenie jéj od środka jest mniéjsze, równe lub większe od promienia; gdyż prostopadła poprowadzona ze środka koła, dla siecznéj, jest mniéjsza od promienia, bo dwa promienie poprowadzone do punktów przecięcia się są liniami pochyłemi,—dla stycznéj jest promieniem, bo jest prostopadłą do promienia, a z jednego punktu t.j. środka, jedną tylko prostopadłą do linii poprowadzić można,—dla oddzielnéj jest większa od promienia, gdyż w przeciwnym razie byłaby albo styczną albo sieczną. Koła i linie oddzielne nie mogą być względem siebie równoległe, gdyż linia równoległa do linii prostéj, sama jest linią prostą.

§ II. Sieczne.

173. *Tw. gł. Środek* B *łuku* ABC *i środek* F *cięciwy* AC *znajdują się na średnicy* BE *prostopadłéj do téj cięciwy i nawzajem* (fig. 120).

1° Punkta F i B linii BE są równo oddalone od końców cięciwy AC, pierwszy jako jéj środek, drugi zaś dla równości cięciw BA i BC odpowiednich łukom równym AB i BC (28); przeto linia BE jest prostopadłą do cięciwy (44); lecz na linii BE leżą wszystkie punkta równo oddalone od punktów A i C, przeto na niéj leży i środek koła, czyli linia BE jest średnicą.

2° Średnica EB jest prostopadłą do cięciwy AC, aże przechodzi przez punkt D, równo oddalony od końców cięciwy AC, więc prostopadła ta przechodzi przez środek F cięciwy AC. Punkt B jako leżący na prostopadłéj EB przechodzącéj przez środek linii AC jest równo oddalony od końców téj linii, przeto cięciwy, a tém samém i łuki AB i BC są sobie równe, czyli punkt B jest środkiem łuku ABC.

Wn. 1. Do oznaczenia położenia linii prostéj potrzeba dwóch tylko warunków, przeto: *a*) prostopadła wyprowadzona ze środka cięciwy przechodzi przez środek koła; *b*) linia łącząca środek łuku ze środkiem koła jest prostopadłą do środka cięciwy; *c*) linia łącząca środek cięciwy ze środkiem koła jest do niéj prostopadłą i przechodzi przez środek łuku.

Wn 2. Łuki AG i CH zawarte między cięciwami równoległemi AC i GH są sobie równe, gdyż średnica do nich prostopadła połowi łuki im odpowiednie t. j. łuk BG=BH i BA=BC przeto i różnice ich czyli łuki AG i CH są sobie równe.

174. *Tw. Cięciwy równe są równo oddalone od środka okręgu, z nierównych zaś mniéjsza jest bardziéj oddalona od tego punktu* (fig. 121).

1° Prostopadle OF i OH poprowadzone ze środka okręgu do cięciw równych DE i AB, mierzą ich oddalenie od środka; prostopadle te są sobie równe, gdyż trójkąty prostokątne AOF i HOD mają równe przeciwprostokątnie OA i OD jako będące promieniami i przyprostokątnie AF i DH, jako połowy cięciw z założenia równych.

2° Przenoszę mniejszą cięciwę DE na łuk większéj cięciwy AC od A do B, aby obiedwie miały koniec A wspólny; ze środka okręgu C prowadzę do nich prostopadłe OG i OF a prostopadła OF jest od strony końca A, gdyż kąt OAB > OAC, przeto jego dopełnienie AOF < AOG. Prostopadła OG < OK zaś OK < OF przeto OG < OF.

Wn. 1. *I nawzajem*: jeśli prostopadłe OH i OF są równe, to takiemiż są i cięciwy AB i DE, gdyż inaczéj prostopadłe nie mogłyby być równe; podobnie jeśli OH > OG to DE < AC, gdyż nie może być ani równe, ani większe.

Wn. 2. *Jeżeli z punktu* E *wziętego wewnątrz okręgu poprowadzimy średnicę i cięciwy to*: 1° *cięciwy czyniące z średnicą kąty równe, są sobie równe*, 2° *z czyniących kąty nieröwne, ta jest mniéjsza, która czyni kąt większy tak, że czyniąca kąt prosty jest najmniejszą, zaś czyniąca kąt zero czyli sama średnica, jest największą ze wszystkich cięciw* (fig. 122). 1° Kąty KED i DEM są sobie równe, przeto prostopadłe OF i OG są także równe, jako mierzące oddalenie punktu O leżącego na połowiącej (102); 2° kąt DEP > DEM, przeto poprowadziwszy prostopadłe OH i OG, kąt EOH < EOG, gdyż im kąt jest większy tem spełnienie mniéjsze (46. Uw. 2), aże OG < OK zaś OK < OH przeto i OG < OH, a tém samém LM > NP. Cięciwa AB dla tego jest najmniéjszą, że prostopadła OE jako pochyła do wszystkich innych cięciw jest dłuższa od prostopadłych wyprowadzonych na te cięciwy; średnica jest największą z cięciw jak okazano w nº 22.

175. *Tw. Przez trzy punkta A, B i C nieleżące w kierunku linii prostéj jeden tylko okrąg koła poprowadzić można* (fig. 123).

1º Dane punkta po dwa łączę liniami prostemi, które utworzą trójkąt ABC; prowadzę prostopadłe ze środka linii AB, BC i CA te przecinają się w jednym punkcie D równo oddalonym od wierzchołków A, B i C, przeto okrąg nakreślony z tego punktu promieniem DB przejdzie przez dwa inne punkta; a zatém przez trzy punkta zawsze można poprowadzić okręg koła. 2º Przez te trzy punkta nie można poprowadzić drugiego okręgu koła różniącego się od okręgu koła D; gdyż przez trzy punkta jedna tylko płaszczyzna przechodzi (18); zaś nie może być punktu oprócz D równo oddalonego od punktów danych, gdyż prostopadła ED zawiera wszystkie punkta równo oddalone od A i B, przeto punkt równo oddalony od punktów danych, jest także równo oddalony od punktów A i B a zatém leży na téj prostopadłéj a z boku jéj leżeć nie może; dla podobnéj przyczyny punkt ten nie może leżeć z boku prostopadłéj FD, a zatém leży tylko na wspólném ich przecięciu się w punkcie D, a linie proste przecinają się w jednym punkcie.

176. *Tw. Kąt zawarty między siecznemi, ma za miarę połowę summy łuków zawartych między jego*

ramionami gdy wierzchołek leży wewnątrz okręgu koła; zaś połowę różnicy, gdy leży za okręgiem koła.

Jeżeli wierzchołek kąta O znajduje się: a) *w środku koła* (fig. 124), to łuk AB zawarty między jego ramionami, jest łukiem jemu odpowiednim; a przeto zamiast mierzyć kąt AOB jego jednością, mierzymy łuk AB jednością łuku (54. Wn. 1), czyli połowę łuków AB i *ab* sobie równych, zawartych między siecznemi A*a* i B*b*; — b) *między środkiem i okręgiem koła* (fig. 125); przez środek C prowadzę sieczne E*e* i D*d* równoległe do siecznych A*a* i B*b*, to kąt ECD=AOB (78. Wn. 9); a że zamiast mierzyć kąt ECD mierzymy połowę łuku ED+*de* t. j. połowę EA+AD+*db* +*be*, przeto zamiast mierzyć kąt AOB mierzymy także połowę summy tych łuków, czyli połowę łuku *ea* +AD+DB+*be* gdyż EA=*ea* (173. Wn. 2) i *db*=DB; biorąc za AD+DB łuk AB, zaś zamiast *ea*+*be* łuk *ba*, widzimy że miarą kąta AOB jest połowa łuków AB+*ab*; c) *na okręgu koła* t. j. *jeżeli kąt jest wpisany w koło* (fig. 126); przez środek E prowadzę średnice B'O' i CD równoległe do ramion kąta wpisanego AOB, zaś przez koniec O' jednéj średnicy cięciwę O'A' równoległą do drugiéj, to kąt AOB=DEB' =A'O'B'; miarą kąta DEB' jest połowa łuków DB' +O'C=DB+BB'+OC'; a że BB'=OO'=AA' zaś O'C=A'D to miarą kąta AOB jest połowa łuku DB+ AA'+A'D czyli połowa łuku AB; d) *za okręgiem koła* t. j. *jeśli kąt jest zakołowy* (fig. 127); przez punkt *b* przecięcia się siecznéj OB prowadzę równoległą *b*C do drugiéj siecznéj, to kąt AOB=C*b*B; lecz miarą kąta

C*b*B jest połowa łuku CB będącego różnicą łuków AB —AC czyli AB—*ab*; przeto miarą kąta AOB jest połowa różnicy łuków AB i *ab* zawartych między siecznemi.

Wn. Wszystkie kąty wpisane w półkole, czyli opierające się swemi ramionami na średnicy, są proste, gdyż mają za miarę połowę półokręgu koła t.j. ćwierć okręgu koła.

177. *Tw. Odległości punktu zbiegu dwóch siecznych od punktów przecięcia się ich z okręgiem koła, są odwrotnie proporcyonalne* t. j. dwie części jednéj są skrajnemi, zaś dwie części drugiéj średniemi wyrazami proporcyi fig. 128 lub 129).

1° *Punkt zbiegu w okręgu koła* (fig. 128); prowadzę cięciwy BA i *ba*, trójkąty AOB, *a*O*b* równokątne,— kąty przy O przeciwległe, kąty A i *b* mierzą się połową łuku B*a*,—mają boki odpowiednie proporcyonalne: AO: O*b*=BO: O*a* (139. Wn. 8). 2° *Punkt zbiegu za okręgiem koła* (fig. 129); prowadzę cięciwy A*b* i B*a*; trójkąty OA*b* i O*a*B są równokątne,—kąt O wspólny, kąty A i B mierzą się połową łuku *ab*, mają boki przeciwległe kątom równym proporcyonalne: AO: OB= O*b*: O*a*.

Wn. 1. Prostopadła wyprowadzona z punktu D fig. 115) okręgu koła do średnicy AB jest średnio jeometrycznie proporcyonalną między odcinkami téj średnicy; gdyż przedłużywszy prostopadłą DC do spotkania się z okręgiem koła w E, mamy: BC: CD=CE: CA, lecz DC=CE (173); przeto BC: CD=CD: CA.

Wn 2. Iloczyny z liczebnéj wartości dwóch odcinków siecznych rachowanych od punktu zbiegu, są sobie równe.

178. *Zg. Przez trzy punkta* A, B, C *nakreślić okręg koła* (fig. 123).

Punkta A, B, C łączę liniami prostemi, ze środka dwóch którychkolwiek wyprowadzam prostopadłe, a one przecinając się dadzą środek D żądanego koła; jeżeli ze środka trzeciéj linii wyprowadzona prostopadła przechodzi przez punkt D przecięcia się dwóch, pierwszych, to rysunek był dobrze uskuteczniony. Aby narysować okręg koła danego promienia, przecinający linię daną AB w punktach A i B, z końców linii ograniczonéj AB, danym promieniem, zakreślam łuki przecinające się w punkcie D, i punkt ten jest środkiem żądanego okręgu koła.—Dla znalezienia środka okręgu ABC, prowadzę dwie cięciwy, a prostopadłe wyprowadzone z ich środków, jako średnice, przechodzą przez środek koła, a tém samém przecinając się oznaczą środek szukany D.

179. *Zg. Społowić dany łuk* AB (fig. 130).

Jeśli środek C okręgu tego łuku jest dany, szukam punktu D równo oddalonego od końców łuku, a linia DC spółowi ten łuk, gdyż jest średnicą prostopadłą do jego cięciwy. Jeżeli środek okręgu nie jest dany, przez dwa punkta równo oddalone od końców łuku AB poprowadzona prosta CD jest średnicą prostopadłą do cięciwy tego łuku, a zatém połowi ten łuk.

180. *Zg. Bez cérkla nakreślić łuk przez trzy punkta dane* A, B, C (fig. 131).

Wierzchołki kątów równych, opierających się na linii AC leżą na okręgu koła, gdyż kąty te jako równe, uważając je za wpisane w koło, mierzą się łukami równemi, zaś cięciwie AC odpowiadające łuki równe, są łukami jednego okręgu koła, gdyż łuki odpowiadające cięciwie AC nierównych promieni, nie zawierają jednakowéj liczby stopni. Aby mieć kąty równe opierające się na linii AC, prowadzę linie AD i CD, czyniące z liniami AB i CB kąty BAD i BCD równe, jedną pod pierwszém, zaś drugą nad drugiém ramieniem kąta ABC, kąt więc A+C=DAC+ACD, gdyż tyle odjęliśmy od pierwszego kąta, ile dodano do drugiego, a tém samém kąty B i D są sobie równe, (46. Uw. 2) i punkt D leży na żądanym okręgu koła. Podobnym sposobem wynaleźlibyśmy i więcéj punktów leżących na tym okręgu, a linia poprowadzona przez te punkta tém bardziéj zbliża się do łuku, im więcéj punktów oznaczamy. Granicę za którą łuk nie może wychodzić są proste AF i CG, pierwsza czyniąca kąt BAF=BCA, druga BCG=BAC, gdyż największy kąt, jaki można nakreślić pod linią CB jest BCA; zaś pod AB, kąt BAC. — Na téj saméj zasadzie bez cérkla ruchem ciągłym kreśli się łuk przez punkta A, B, C; spajam dwa liniały AB i BC pod kątem ABC i obracam je około punktów A i C tak, aby te punkta przylegały do krawędzi liniałów.— Za pomocą tego zagadnienia przez dwa punkta dane A i B kreśli się łuk danéj liczby stopni np. 148, gdyż jeśli łuk będący nad linią AC zawiera 148, to pod tą linią ma $360^o - 148 = 212^o$, zaś kąt wpisany mający wierzchołek nad linią AC i obejmujący ją ramionami mierzy się połową łuku 212^o, czyli zawiera 106^o; trójkąt więc symetryczny mający za podstawę AC, a kąt jéj przeciwległy 106^o, ma kąty przy podstawie 37^o, poprowadziwszy przez punkta A i C linie AD i CD pod 37^o; otrzymamy punkt D leżący na tym łuku, przeto albo zapomocą cérkla przez trzy punkta A, D, C nakreślimy łuk żądany, albo téż podług mniejszego zagadnienia.

181. *Zg. Z punktu* C *danego nad linią* AB *poprowadzić do niéj prostopadłą* (fig. 132).

Z punktu dowolnego A linii danéj, promieniem AC zakreślam łuk i odcinam ED=EC, a linia CD jest żądaną, gdyż środek koła i środek łuku znajdują się na średnicy prostopadłéj do środka cięciwy tego łuku (173. Wn. 1).

§ III. Styczne.

182. *Tw. Z punktu* B *wziętego za okręgiem dwie styczne równe, zwane parzystemi, poprowadzić można* (fig. 133).

Styczna poprowadzona z punktu B do okręgu D, jest prostopadłą do końca promienia tegoż koła (172); kąt zawarty między promieniem okręgu D a styczną przechodzącą przez punkt B, jako prosty, jest kątem mającym wierzchołek na okręgu koła, którego średnicą jest BD, opierającym się na téj średnicy; lecz wierzchołek tego kąta mieści się także i na okręgu D, jako leżący w końcu promienia tego koła, przeto znajduje się we wspólném przecięciu się okręgu danego B z okręgiem mającym za średnicę linię łączącą punkt dany ze środkiem danego koła, a że okręgi te przecinają się tylko w dwóch punktach C i A, przeto zawsze dwie styczne BC i AB poprowadzić można.

Wn. 1. a) *Linia łącząca punkt dany* B *ze środkiem okręgu danego* D *połowi kąt zawarty między stycznemi* BA i BC *parzystemi*, gdyż prostopadłe ze środka D wyprowadzone do stycznych są sobie równe jako promienie; b) *styczne te są sobie równe* (102. Wn. 2), przeto c) *linia* BD *połowiąca kąt* B *jest prostopadłą do cięciwy* (44) AC *łączącéj punkta zetknięcia się stycznych.*

183. *Tw. Kąt* ABC *zawarty między styczną* AB *a cięciwą* CB *ma za miarę połowę łuku* CB *zawartego między jego ramionami* (fig. 134).

Przez punkt C prowadzę cięciwę CD równoległą do stycznéj AB, to kąt ABC=BCD, jako naprzemianległe, kąt BCD mierzy się połową łuku BD (176. *c*), łuk zaś BD=CB, gdyż prostopadła do środka cięciwy CD jest średnicą prostopadłą i do stycznéj AB (78. Wn. 5), przeto przechodzi przez punkt jéj zetknięcia się B i połowi łuk CBD, zatém miarą kąta BCD, a tém samém i jemu równego kąta ABC, jest połowa łuku BC.

Wn. 1. Kąt ABE jest spełnieniem kąta ABC, przeto miarą jego jest połowa łuku BDC, gdyż połowa całego okręgu jest miarą Π.

Wn. 2. *I nawzajem*: Jeżeli kąt ACB zawarty między cięciwą a linią AB ma za miarę półowę łuku BC to linia ta jest styczną, gdyż jeśliby ona nie była styczną, to przez punkt B poprowadziwszy styczną BA', dwa kąty nierówne ABC i A'BC miałyby za miarę ten sam łuk BC, co być nie może.

184. *Tw. Kąt* B *zawarty między stycznemi* AB i BC *ma za miarę połowę różnicy łuków* ADC i AC *zawartych między jego ramionami* (fig. 135).

Przez punkt C zetknięcia się jednéj stycznéj, prowadzę cięciwę równoległą do drugiéj stycznéj AB to kąt ABC=DCE, a że kąt DCE ma za miarę połowę łuku CD będącego różnicą łuków AC i ADC, gdyż łuki AC i AD są sobie równe, — przeto i kąt ABC ma za miarę połowę różnicy łuków ADC i AC zawartych między punktami zetknięcia A i C.

185. *Tw. Jeżeli z punktu* C *wziętego za kołem poprowadzimy styczną* CD *i sieczną* CA, *to styczna jest średnio-jeometrycznie-proporcyonalna między odcinkami siecznéj* AC *rachowanemi od punktu zbiegu* C (fig. 136.

Trójkąty ACD i BCD mające kąt wspólny, kąt CAD =BDC, jako mające za miarę połowę łuku BD, mają i kąty pozostałe ADC=DBC równe, a tém samém boki naprzeciw nich leżące, proporcyonalne (139. Wn. 8), t. j. AC: CD=CD: CB.

Wn. Iloczyn z liczebnéj wartości odcinków siecznéj, rachowanych od punktu zbiegu, równa się kwadratowi ze stycznéj.

186. *Zg. Poprowadzić styczną do okręgu koła przez punkt* B *dany*: a) *na okręgu koła* (fig. 134).

Przez punkt dany kreślę promień FB i z końca jego B wyprowadzam prostopadłą (172); albo téż z punktu C rysuję dwie cięciwy, jedną CB przechodzącą przez punkt dany B, drugą zaś CD dowolną; prowadzę linię AB równoległą do CD, a ona jest żądaną, gdyż czyni kąt ABC=BCD, a przeto mający za miarę połowę łuku BC (183. Wn. 2); b) *za okręgiem koła* (fig. 133). Na linii łączącéj punkt dany ze środkiem koła, jako na średnicy kreślę okręg koła, a linie BA i BC łączące punkt dany z dwoma punktami przecięcia się okręgów są żądane, jako prostopadłe do promieni DA i DC koła danego (176. Wn.); c) *równoległą do prostéj danéj* AB (fig. 137). Prowadzę średnicę ED prostopadłą do linii danéj AB, a z końców jéj E i D wyprowadzone prostopadłe EG i DF są żądane, gdyż są stycznemi jako prostopadłe wyprowadzone z końca promienia, i są równoległe do linii danéj, jako prostopadłe do téj saméj prostéj ED co i linia dana; d) *prostopadłą do prostéj danéj* AB (fig. 137). Prowadzę średnicę HJ równoległą do linii danéj AB, a prostopadłe JA i HB poprowadzone przez jéj końce, są stycznemi żądanemi, gdyż będąc prostopadłemi do średnicy są zarazem prost padłe i do linii AB do niéj równoległéj.

187. *Zg. Daną linię prostą* AB *podzielić w średnim i skrajnym stosunku*, t. j. aby część większa była średnio-jeometrycznie-proporcyonalną między całą linią, a częścią jéj mniejszą (fig. 138).

Z końca linii AB wyprowadzam prostopadłą BC, równą polowie linii danéj AB, i z punktu C promieniem CB zakreślam łuk, z punktu A prowadzę sieczną AH przez środek tego koła i odcinam AE=AD mniejszemu odcinkowi téj siecznéj; to punkt E dzieli linią AB na odcinki żądane; gdyż linia AB jest styczna zaś AH sieczna, przeto AH: AB=AB: AD, ztąd AH—AB: AB =AB—AD: AD; lecz AB jako dwa razy większe od promienia CB równa się średnicy DH, przeto AH—AB=AH—DH=AD=AE,—linia AB—AD=AB—AE =BE,—zaś linia AD=AE;—azatém AE: AB=EB:AE czyli AB: AE=EB.—Przytém linia AH jest także podzielona w stosunku skrajnym i średnim gdyż AH:AB =AB: AD zaś AB=DH przeto AH: DH=DH: AD.— Odcinek będący wyrazem skrajnym jest mniejszy od odcinka będącego wyrazem średnim, gdyż w pierwszym stosunku poprzednik jest większy od następnika, przeto i w drugim to samo ma miejsce.

188. *Zg. Nakreślić łuk taki, aby kąt dany* CDE, *mając wierzchołek na tym łuku, opierał się na jego cięciwie* fig. (139).

Prowadzę linię AF, czyniącą z daną cięciwą AB kąt dany BAF=CDE, uważając więc AF za styczną tego koła którego cięciwą jest AB, kąt BAF będzie miał za miarę połowę łuku AB, i kąt wpisany w koło mający wierzchołek nad cięciwą AB, opierający się na niéj, będzie miał za miarę połowę tego samego łuku, a tém samém równa się kątowi danemu CDE; środek zaś tego koła znajduje się tak na prostopadłéj HG wyprowadzonéj ze środka cięciwy, jako też na prostopadłéj AG do stycznéj wyprowadzonéj z punktu jéj dotknięcia się A, a zatém w punkcie G ich przecięcia się. Za pomocą tego zagadnienia kreśli się trójkąt symetryczny, mając jego podstawę i kąt przeciwległy; podstawa bierze się za cięciwę, i kreśli się trójkąt symetryczny, którego wierzchołek oznaczy prostopadła wyprowadzona ze środka podstawy, przecinając się z łukiem odpowiednim téj cięciwie.

189. *Zg. Danym promieniem* DE *zakreślić okręg, przechodzący przez punkt dany* C *i styczny do prostéj danéj* AB (fig. 140).

Gdy punkt dany C *leży a*) *na prostéj danéj*, z punktu tego wyprowadzam prostopadłą CF i odcinam CF=DE, a punkt F jest środkiem żądanego okręgu którego promieniem jest FC; *b*) *nad linią* AB (fig. 141), to środek tego koła znajduje się w odległości promienia DE od punktu C, przeto leży na okręgu koła opisanego z C tym promieniem (24); a że jest styczny do linii AB, przeto środek jego znajduje się w odległości promienia od linii AB (72), a zatém leży na linii FG równoległéj do AB, będącéj w odległości promienia (79. Wn. 2), którą otrzymamy wyprowadząc prostopadłą AF=DE i prowadząc FG prostopadłą do FA;—środek więc żądany znajdując się na okręgu HKJ i na linii FG, leży na wspólném ich przecięciu się w punkcie H lub w punkcie J, przeto okręg zakreślony danym promieniem z każdego z tych dwóch punktów przechodzi przez punkt C i jest styczny do prostéj AB.

190. *Zg. Przez dwa punkta dane* A i B *poprowadzić okręg koła styczny do linii danéj* CD (fig. 142).

Jeżeli a) jeden z punktów A *leży na linii danéj* CD, to środek tego okręgu znajduje się na linii AE prostopadłéj do stycznéj wyprowadzonéj z punktu jéj dotknięcia i na prostopadłéj FG wyprowadzonéj ze środka cięciwy AB, które się przecinają (78. Wn. 8), zatém leży w punkcie ich przecięcia się H; okręg zakreślony z tego punktu promieniem AH, jest styczny do linii CD (172) i przechodzi przez punkta A i B, gdyż leży na prostopadłéj wyprowadzonéj ze środka linii AB; *b) oba punkta leżą na linii równoległéj do linii danéj* (fig. 143), to środek okręgu leży na prostopadłéj FE do środka cięciwy AB, i jest styczny do linii CD w punkcie E, gdyż FE jest średnicą prostopadłą do stycznéj CD, przeto przechodzi przez trzy punkta A, B i E (78); *c) oba punkta leżą na linii zbiegającéj się z daną linią* CD (fig. 144), wtedy linia EB jest sieczną tego koła przecinającą go w punktach A i B a linia ED jest styczną, dla znalezienia punktu dotknięcia się stycznéj, szukamy linii średnio-jeometrycznie-proporcyonalnéj między odcinkami siecznéj, rachowanemi od punktu zbiegu E (183), zakreślając na AB jako na średnicy okręg i prowadząc styczną EG(187), odciąwszy więc EF=EG, w jedną lub drugą stronę od punktu E, pozostaje przez trzy punkta A, B i F nakreślić okręg koła.

191. Zg. *Danym promieniem* EF *nakreślić okręg styczny do dwóch prostych danych* AB i CD.

Gdy proste dane a) zbiegają się (fig. 145), dla znalezienia środka, prowadzimy do tych linii równoległe HJ i GJ będące od nich w odległości promienia EF t. j. prostopadła DH=BG=EF, to punkt ich przecięcia się J leży w odległości promienia od obu linii, przeto jest środkiem żądanym; z punktu więc J, promieniem danym zakreślam okręg koła; *b) równoległe* (fig. 146), promień równa się połowie wspólnéj ich prostopadléj GH, przeto dowolnym być nie może.

192. Zg. *Do trzech danych prostych* AB, CD i EF *poprowadzić okręg styczny* (fig. 147).

Trzy linie przecinając się tworzą trójkąt GHJ, połowiące zaś kąty trójkąta przecinają się w punkcie O równo oddalonym od boków (103), przeto ten punkt jest środkiem żądanego okręgu, promieniem zaś jego jest prostopadła, wyprowadzona z punktu O na bok którykolwiek HG. Okręg koła styczny do linii EH, HG i GC, ma środek na połowiących kąty EHG i HGC, gdyż prostopadłe wyprowadzone z tego punktu do HE i HG tudzież GH i HC, są sobie równe; punkt ten K leży na przedłużeniu połowiącéj kąt EJC, gdyż jest równo oddalony od jego ramion JE i JC (102.

Wn. 1) Ztąd widzimy że do trzech linii danych AB, CD i EF można poprowadzić cztery okręgi styczne. Jeśliby dwie z tych linii AB i CD były równolegle (fig. 148), to można poprowadzić dwa tylko okręgi styczne, których środkami są punkta G i H, leżące w przecięciu się połowiących kąty jednostronne wewnętrzne.

193. *Zl.* W rysunku arkad zupełnych t. j. półkolowych, linie proste wyrażające mury oporowe są styczne w końcach średnicy do półokręgu, a tem samém do niéj prostopadłe; w rysowaniu bloków ruchomych lub nieruchomych (fig. 149), linie proste CD i AB wyrażające sznur podnoszący ciężar, są także stycznemi. Jeżeli drąg (fig. 150) AB jest styczny do okręgu C, i ściśle do niego przylega *np.* za pomocą zębów, to w czasie obrotu okręgu C, drąg AB nie przestając być stycznym, posuwać się będzie w górę lub na dół, podług tego w którę stronę obraca się koło,—i nawzajem posuwając drąg AB obracać będziemy koło i to jest jeden z głównych sposobów zamiany ruchu kołowego na prosty i wzajemnie.

194. *Zl.* Narzędzie służące do dzielenia kąta na trzy równe części (fig. 151), składa się z półkola ADB, z liniału BE prostopadłego w końcu B jego średnicy i węgielnicy rysunkowéj mającéj za podstawę BC promień tego koła. Aby podzielić kąt JHG na trzy równe części, przy krawędzi liniału BE przykla-

damy węgielnicę i ustawiamy narzędzie tak, aby punkt C leżał na ramieniu kąta HG zaś krawędź liniału BE przechodziła przez wierzchołek tego kąta i w tém położeniu posuwamy narzędzie tak, żeby drugie ramię kąta było styczne do półokręgu ADB; — linie HB i HF dzielą kąt JHG na trzy równe części, gdyż w trójkącie symetrycznym FHC oś symetryi połowi kąt H t. j. CHB=BHF, kąt zaś BHF=FHJ, bo linia łącząca punkt zbiegu stycznych parzystych HB i HJ ze środkiem koła połowi kąt BHJ (182. Wn.); azatém te trzy kąty są sobie równe. — Jeśli kąt dany JHG jest bardzo mały, to prowadzimy linię HK prostopadłą do ramienia HJ, a różnica pomiędzy trzeciemi częściami kątów JHK i GHK, jest trzecią częścią kąta JHG. — Narzędzie to służy i do dzielenia łuku na trzy równe części, gdyż kątom równym odpowiadają łuki równe.

195. *Zt. Oznaczyć na planie punkt opuszczony w czasie pomiaru* (fiig. 152).

Z punktu opuszczonego D jako ze stanowiska zdejmuję kąty położeń ADB i BDC między trzema przedmiotami oznaczonemi na planie A, B i C; na linii *ab* łączącéj na planie punkta odpowiednie punktom A i B, kreślę okręg koła tak, aby kąt wpisany w łuk *agb* równał się kątowi ADB (188), na linii *bc* kreślę łuk *cfb* tak, aby kąt wpisany w ten łuk równał się kątowi BDC, — punkt *d* przecięcia się tych okręgów jest żądanym, gdyż poprowadziwszy linie *db*, *dc* i *da*, kąty *adb*=ADB, *bdc*=BDC.