258. *Zt.* Chcąc figurę daną przenieść na kamień, blachę i t. p. tak aby po położeniu powierzchni kamienia na powierzchnią figury przystały do siebie, potrzeba odrysować na kamieniu figurę symetryczną z daną, bo takie tylko figury przystają po położeniu na sobie jednakowych stron płaszczyzny figur (254 i 256. Wn.). Jeśli figurę litografowaną na papierze przeniesiemy na kamień, to ona na kamieniu będzie symetryczną względem danéj, zaś kamień przy odbiciu da symetryczną względem figury będącéj na kamieniu, a témsamém równą zrysowanéj na papierze, gdyż w obu tych figurach linie odpowiedniesą w odwrotnym porządku z liniami figury będącéj na kamieniu, a zatém idą w jednakowém porządku.—W Budownictwie ozdoby robią się zazwyczaj symetrycznie.

ROZDZIAŁ II.

Podobieństwo.

§ 1. Podobieństwo proste.

259. Jak figury równe są te w których odległości odpowiednich punktów (249) są proporcyonalne, tak podobnemi są te w których odległości odpowiednich punktów są proporcyonalne.

Figury równe mogły być albo przystające, albo równe przez symetryą podług tego, czy punkta odpowiednie leżały w tym samym lub w przeciwnym porządku, również figury podobne mogą mieć punkta odpowiednie leżące w tym samym lub w przeciwnym porządku, a podług tego może zachodzić *podobieństwo proste* lub *odwrotne*.

260. *Tw. gł. Jeżeli nachylone odpowiednie, są w jednakowym stosunku, to i oddalenia odpowiednich punktów są w tymże samym stosunku* (fig. 224).

Trójkąty AEF i *aef* mające z założenia dwa boki AF i *af*, AE i *ae* w jednakowym stosunku i po kącie zawartym, równym,—mają i dwa pozostałe boki FE i *fe* w tym samym co pierwsze stosunku i kąty odpowiednio równe; trójkąty ADE i *ade*, dla téj saméj przyczyny mają boki ED i *ed* w tym samym co i linie nachylone stosunku i kąty równe i t. d.

Wn. 1. Kąty AFE i *afe*, FED i *fed*, zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta, są sobie równe, czyli że położenie odpowiednich linii jest jednakowe, pierwsze kąty są równe, jako leżące w trójkątach AFE i *afe* naprzeciw boków odpowiednich AE i *ae*, drugie jako summy kątów równych z pierwszych i drugich trójkątów.

Wn. 2. Figury są podobne, gdy nachylone odpowiednie są proporcyonalne.

261. *Tw. od. Gdy oddalenia odpowiednich punktów* A, B, C.., *a*, *b*, *c*.., *są w jednakowym stosunku, to linie łączące te punkta z którymkolwiek z nich lub z punktem proporcyonalnie oddalonym od dwóch odpowiednich, są nachylonemi odpowiedniemi* (fig. 224).

1° Linie AF i *af*, AE i *ae*, AD i *ad*.., są nachylone odpowiednie, gdyż trójkąty AFE i *afe* mające po kącie F i *f* równym (260. Wn. 1), zawartym między bokami proporcyonalnemi mają kąt EAF=*eaf*; trójkąty EAD i *ead* dla téj saméj przyczyny mają kąt DAE=*dae* i t. d. 2° W figurach BCDEF i *bcdef* z punktu dowolnego A prowadzę linie AB, AC.., do punktów jednéj figury, w drugiéj zaś dla znalezienia punktu odpowiedniego punktowi A, z punktu *f* prowadzę linię *fa* czyniącą kąt *bfa*=BFA i z punktu *b*, linię *ba* czyniącą kąt *fba*=FBA, to punkt *a* jest odpowiedni punktowi A, gdyż odległości ich od punktów odpowiednich B z *b* i F z *f* są proporcyonalne do odległości samychże punktów BF i *bf* (139. Wn. 8), a potrzeba dowieść że linie AB, AC, AD.., *ab*, *ac*, *ad*.., są pochylonemi odpowiedniemi. Trójkąty ABC i *abc* mające kąt B=*b* jako summy kątów ABF=*abf* z wykreślenia, FBC=*fbc* (160. Wn. 1), i boki zawierające te kąty, proporcyonalne, mają kąt BAC=*bac*; dla podobnéj przyczyny kąt CAD=*cad* i t. d.

Wn. 1. W figurach podobnych nachylone odpowiednie są proporcyonalne.

Uw. W wielokątach punkta odpowiednie biorą się tylko w wierzchołkach wielokątów, gdyż boki jako linie proste są podobne (4. Wn. 1), przeto i pochylone odpowiednie prowadzą się tylko do tych punktów.

262. *Tw. Wielokąty są podobne gdy mają kąty równe i boki odpowiednie proporcyonalne idące w tym samym porządku* (fig. 224).

Poprowadziwszy przekątnie z wierzchołków odpowiednich A i *a*, będą one nachylonemi odpowiedniemi, bo kąt BAC=*bac*, CAD=*cad*.., jako kąty trójkątów mających po kącie równym zawartym między bokami proporcyonalnemi.

Wn. 1. Wielokąty podobne składają się z jednakowéj liczby trójkątów podobnych i podobnie położonych,—i nawzajem.

Wn. 2. Gdy wielokąty podobne położymy tak aby miały punkt odpowiedni lub punkt nachylenia i dwie linie lub nachylone, odpowiednie wspólne, to wszystkie linie odpowiednie tych wielokątów są względem siebie równoległe(fig.225, i III lub II), gdyż punkt odpowiedni A można wziąć za punkt nachylenia, to nachylone odpowiednie, jako czyniące z liniami przystającemi AB i *ab* kąty równe, przystają do siebie, zaś linie odpowiednie łączące ich końce, jako dzielące nachylone AB, AC, AD. , na części proporcyonalne są względem siebie równoległe—*i nawzajem*: dwa wielokąty mające jeden punkt i linie łączące ten punkt z wierzchołkami, wspólne, zaś boki równoległe, są podobne gdyż te linie, odpowiednie pochyłe, są proporcyonalne, jako odcinki przecinających się, przeciętych równoległemi.

Wn. 3. *Trójkąty są podobne gdy mają po dwa boki proporcyonalne zawierające kąty równe*, gdyż te dwa boki są pochyłemi odpowiedniemi; a zatém trójkąty są podobne gdy mają: *a*) *po trzy kąty równe*, co może wynikać z równoległości lub prostopadłości boków, albo z jednakowego ich nachylenia (98. Uw. 1), bo mają po trzy boki proporcyonalne, *b*) *trzy boki proporcyonalne* (fig. 126), gdyż odciąwszy BG i BH równe DE i EF, trójkąt BGH z trójkątem DEF mają po trzy boki równe, bo i GH=DF, jako cztwarte wyrazy dwóch proporcyi,—AB: DE=AC: DF z założenia, i AB:BG=AC: GH dla równoległości linii GH (139. Wn. 2 i 5),—mających trzy wyrazy jednakowe, przeto i kąt A=G=D i C=H=F;—*c*) *dwa boki proporcyonalne* AB: DE=AC: DF *po kącie niezawartym równym, byle druga para kątów niezawartych była jednogatunkowa*; gdyż odciąwszy ED na BA przez punkt G prowadzę GH, równoległe do AC, to trójkąt ABC podobny trójkątowi GBH,—trójkąt zaś GBH równy trójkątowi EDF (95), bo mają bok GH=DF jako czwarte wyrazy proporcyi mających trzy wyrazy równe, kąt E =B z założenia; a że kąty F i C są jednogatunkowe, przeto i kąty F i H są jednogatunkowe, zatem te oba trójkąty są albo ostrokątne, albo rozwartokątne. W czterech więc przypadkach trójkąty są podobne i w tych przypadkach od trzech części danych nietylko zależą trzy pozostałe części, ale i wszystkie linie łączące punkta odpowiednie, których stosunek równa się stosunkowi boków i kąty zawarte między temi liniami są sobie równe.

Wn. 4. Czworokąty są podobne gdy mają pięć części danych, w których boki proporcyonalne zaś kąty równe, między któremi znajdują się przynajmniej dwa boki, gdyż wtedy składają się z trójkątów podobnych i odpowiednio położonych;— zachodzą tu podobne przypadki jak w równości (253, Wn. 3) i podobnie się dowodzą.

Równoległoboki są podobne gdy mają po trzy części dane, gdyż równoległość boków zastępuje dwa pozostałe warunki, a mianowicie: po dwa boki proporcyonalne zawierające kąty równe, dwa boki przy sobie leżące i przekątnią łączącą ich końce proporcyonalne. *Prostokąty* są podobne gdy mają po dwa boki przy sobie leżące proporcyonalne, gdyż kąty między temi bokami zawarte, jako proste są sobie równe; *kwadraty ukośne* czyli *romby* są podobne, gdy mają po jednym kącie równym, gdyż stosunki ich boków są sobie równe, bo w jednym i w drugim, boki nie różnią się od siebie. Wszystkie kwadraty są podobne, bo kąty ich proste są sobie równe, a stosunki boków jednakowe, dla téj saméj jak i w rombach przyczyny.

Wn. 5. Wielokąty są podobne gdy mają wszystkie części dane, prócz trzech niebędących samemi bokami, w danych zaś częściach stosunek boków jest jednakowy a kąty równe — przypadki są odpowiednie jak w równości i podobnie się dowodzą (253. Wn. 5).

Uw. 1. *Wszystkie koła są podobne*, bo ich pochylone odpowiednie, wychodzące ze środków, jako w jednym i drugim równe między sobą, są w jednakowym stosunku (260. Wn. 2). Dla podobnéj przyczyny *wycinki i odcinki kół*, których łuki są jednakową częścią swoich okręgów, są podobne.

Wn. 2. Figury są odwrotnie podobne, gdy punkta odpowiednie idą w przeciwnym porządku t. j. jeśli jedna figura jest podobną z figurą symetryczną drugiéj. Figury podobne mające wspólny punkt nachylenia O i nachylone odpowiednie na liniach prostych, tak położone w jednym kierunku (fig. 226), jako téż i w przeciwnym (fig. 227) są podobnemi wprost, gdyż w drugim razie obracając jedną figurę około punktu nachylenia, gdy nachyłona odpowiednia O*a* przystanie na OA, to i inne przystaną do siebie. Punkt nachylenia O bezzasadnie zowią punktem *podobieństwa prostego* gdy on leży zewnątrz figur (fig. 226), zaś *podobieństwa odwrotnego* gdy leży między figurami (fig. 227), albowiem w obu razach figury jednakowo są podobne, tylko niejednakowe mają położenie, a mowa jest nie o położeniu, lecz o samych figurach. Dla téj to przyczyny w połączeniu okręgów, punkta przecięcia się stycznych wspólnych do dwóch okręgów, nienazywamy punktem podobieństwa prostego lub odwrotnego, lecz punktem sprzężonym z linią środków zewnętrznym lub wewnętrznym, podług tego czy leży na przedłużeniu lub na saméj linii środków. Figury odwrotnie podobne (fig. 228), jeżeli mają nachylone na liniach prostych, to odpowiednie nie są na tych samych liniach, lecz w przeciwnym porządku, linia OX połowiąca kąt między odpowiedniemi pochyłemi OD i *od* jest osią symetryi i podobnie jak w równości, figura jedna *ad* obracana z swoją płaszczyzną około téj osi i położona na płaszczyznie drugiéj figury staje się jéj podobną, zaś obracana około punktu nachylenia O na płaszczyznie obu tych figur, w żadném położeniu nie jest do niéj podobną. — Przeto w figurach odwrotnie podobnych, wierzchnia strona jednéj figury jest podobna do spodniéj części drugiéj, podobnie jak w równych, wierzchnia strona jednéj przystaje do spodniéj strony drugiéj.

263. *Zg. Na linii danéj wykreślić wielokąt podobny danemu za pomocą: a) trójkątów podobnych i podobnie położonych* (fig. 224); na linii danéj *af* kreślę trójkąt *afe* podobny trójkątowi AFE, albo za pomocą dwóch boków AF i FE i przekątniéj AE zmniejszonych w stosunku AF: *af* (153), t. j. z trzech boków zmniejszonych kreślę trójkąt *afe* (109); albo z dwóch boków zmniejszonych AF i FE w stosunku boku AF do linii danéj i kąta między niemi zawartego; — na linii *ae* kreślę trójkąt *aed* z boków zmniejszonych w tym samym stosunku trójkąta AED i t. d. *b) Za pomocą nachylonych* (fig. 226); do boku BC odpowiedniego linii danéj prowadzę równoległą *bc* równą téj linii, i dwie zbiegające się B*b* i C*c*, to punkt O jest punktem nachylenia dla wielokąta danegoABCDE i szukanego; — pozostaje tylko z punktu O poprowadzić nachylone OA, OB, OC.., i równoległe *ba*, *ae*, *ed*, *dc*, do boków odpowiednich wielokąta danego. Wielokąty AD i *ad* są podobne gdyż nachylone OA i O*a*; OB i O*b*.., jako przecięte równoległemi, są proporcyonalne (260. Wn. 2).

Przypadki odpowiednie przypadkom równości wielokątów kreślą się tak jak N° 257 *b*), *c*), *d*), *e*), tylko zamiast linii danych figury danéj, biorą się linie zmniejszone w danym stosunku; dla tego że podobieństwo od równości różni się tém tylko, że w równości stosunek linii odpowiednich równa się jedności, zaś w podobieństwie jest dowolny.

264. *Zt.* W zdejmowaniu planów potrzeba nakreślić figurę podobną figurze gruntu t. j. żeby linie proste poziome, łączące ważniejsze przedmioty lub miejsca wzięte na gruncie, były zmniejszone w danym stosunku. Jeżeli główniejsze punkta na gruncie (fig. 229) są A, C, D, E, B, F, G, H, wtedy wyobraziwszy linie proste poziome łączące te punkta, otrzymamy na gruncie wielokąt ACD.., a plan tego gruntu jest wielokątem podobnym pierwszemu, mającym linie łączące odpowiednie punkta w danym stosunku np. w planie 900 razy mniejsze od linii na gruncie. Uskuteczniając to za pomocą stolika, t. j. deski takiéj jak rajzbret mogącéj obracać się poziomo na trójnogu i mieć ruch pionowy, obieramy dwa z tych punktów A i B lub inne takie, aby z nich znaczniejsze punkta były widzialne i aby linie z tych dwóch punktów A i B poprowadzone do innych, przecinały się pod kątami zbliżonemi do prostych, gdyż linie przecinające się pod kątem prostym, najdokładniéj oznaczają punkt przecięcia się. W punkcie A ustawiamy stolik i w punkcie stolika, leżącym na pionowéj przechodzącéj przez punkt A, wbijamy cienką igłę; ustawiamy stolik poziomo, punkt stolika przystający do punktu A gruntu, bierzemy za punkt nachylenia figur podobnych gruntu i planu. Z punktu A za pomocą dioptry (66, *b*) prowadzimy na stoliku ołówkiem linie do przedmio-

tów gruntu C, D, E... których przedłużenia wyobrażalne, linie te są poziome, jako leżące na płaszczyznie poziomej, i są nachylonemi wspólnemi dla obu figur, pozostaje tylko na nachylonych planu odciąć 900-tne części nachylonych gruntu. W tym celu mierzę linię AB sznurem i za pomocą skali biorę linię 900 razy od niéj mniejszą i odcinam ją od A do *b*, ustawiam stolik w punkcie B poziomo, zgadzam punkt *b* stolika z punktem B gruntu, zaś obracając stolik poziomo zgadzam linie B*a* stolika z linią BA gruntu, i z punktu B prowadzę na płaszczyznię stolika proste do punktów C, D, E.., które przecinając się z nachylonemi w *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, dają punkta odpowiednie punktom wziętym na gruncie, gdyż linie *ac*, *ad*, *ae* i t. d. są 900-mi częściami linii odpowiednich, bo trójkąty BCA i B*ca*, BDA i B*da*.., mają kąty przy B wspólne, zaś kąty przy A i *a* równe, a przeto boki ich są w jednakowym stosunku AB: B*a*.

Jeśli potrzeba oznaczyć tylko położenie punktów A, C, D... to plan byłby już skończonym,— jeśli zaś oprócz tych punktów są inne do oznaczenia, które albo są niewidzialne z punktów A i B, lub dla innych miejscowych przyczyn nie mogły być zdjętemi, wtedy pozostałe punkta oznaczają się za pomocą prostopadłych na linie łączące oznaczone punkta, jak to zazwyczaj robi się przy oznaczeniu kierunku rzek, brzegów jezior i t. p.

Jeżeli znaczniejsze punkta gruntu jedne z drugich są niewidzialne, jak to ma miejsce przy zdejmowaniu planu lasów, gór i t. p. to zdejmowana przestrzeń opisuje się wielokątem, który oznacza się na płanie za pomocą boków i kątów między niémi zawartych, zdejmowanych albo za pomocą stolika, lub narzędzi służących do zdejmowania kątów (66), zaś inne punkta za pomocą prostopadłych na boki wielokąta, a pozostałe ograniczenie rysuje się na miejscu od ręki.

Zamiast stolika użyć można narzędzi do zdejmowania kątów, co w rozleglejszym pomiarze jest niezbędnem i wtedy kąty zawarte między nachylonemi odpowiedniemi oznaczają się w stopniach, i w tém tylko to postępowanie różni się od poprzedzającego.

Dla poznania dokładności pomiaru, mierzymy odległość między jakiemikolwiek dwoma zdjętemi punktami, i oznaczamy o ile 900-tna część téj linii różni się od odpowiedniéj linii planu.

§ II. Stosunek obwodów.

265. *Tw. Obwody wielokątów podobnych mają się do siebie jak boki, lub też jak linie, łączące odpowiednie punkta.*

Stosunki boków odpowiednich wielokątów podobnych są sobie równe, lecz że w stosunkach równych summa poprzedników tyle razy jest większa lub mniejsza od summy następników, ile razy którykolwiek poprzednik jest większy lub mniejszy od swego następnika *), — przeto summa boków jednego wielokąta

*) Gdyż w stosunkach 10:5, 8:4, 6:3 poprzednik równa się następnikowi pomnożonemu przez wykładnik stosunku — 10=5. 2, 8=4. 2, 6=3. 2,

z summą boków drugiego wielokąta stanowi stosunek równy stosunkowi dwóch boków odpowiednich; lecz że stosunek dwóch boków odpowiednich równa się stosunkowi dwóch linii łączących odpowiednie punkta, a zatém i stosunek obwodów równa się stosunkowi linii łączących odpowiednie punkta.

Wn. 1. Obwody jakichkolwiek figur są w stosunku linii łączących odpowiednie punkta, gdyż na obwodach biorąc odległość dowolnie małą punktów odpowiednich, summy linii prostych łączących kolejno te punkta są w stosunku linii prostych łączących którekolwiek dwa punkta odpowiednie, a zatém i same obwody są w stosunku tych linii. Ztąd wynika, że okręgi kół są w stosunku promieni, średnic, cięciw podpierających łuki mierzące kąty równe, lub w stosunku tych łuków mierzących kąty równe jako zawartych między nachylonemi odpowiedniemi kół podobnych; gdyż stosunek summy wszystkich linii łączących odpowiednie punkta obwodów równa się stosunkowi summ jednakowéj liczby tych linii odpowiednich. Łuki wycinków i odcinków podobnych t.j. łuki zawarte między ramionami kątów równych, są w stosunku promieni lub cięciw tychże łuków.

---

a że stosunki są sobie równe, przeto następniki są pomnożone przez jednakową liczbę, zaś summa poprzedników $10+8+6$ równa się summie następników pomnożonych przez tę samą liczbę $(5+4+3)\ 2$, gdyż mnożąc tę summę przez 2, mnożymy każdą liczbę oddzielnie, bo mnożenie jest skróconém dodawaniem, zaś dodając $5+4+3$ do $5+4+3$, możemy dodawać 3 do 3ch, 4 do 4ch, 5 do 5ciu i tego wziąć summę.

Wn. 2. Łuki AB i A'B' okręgów nierównych promieni OA i OA' są w stosunku iloczynów kątów odpowiednich przez promienie (fig. 130), gdyż AB: AB'' = AOB: A'OB' (54), tudzież AB'': A'B' = OA: OA' to i AB. AB'': AB.''A'B' = AOB.OA: A'OB.'OA' czyli AB: A'B' = AOB. AO: A'OB.'OA'. Dzieląc poprzedniki przez AO zaś następniki przez A'O otrzymamy, że stosunek kątów równa się stosunkowi łuków podzielonych przez ich promienie.

266. *Zg.* Stosunek średnicy do okręgu koła wyrazić liczbą.

Zagadnienie to rozwiązać możemy dwoma sposobami, albo *dla danego promienia znaleść wielkość okręgu*, lub też *dla danego okręgu znaleść wielkość promienia*.

a) *Jeżeli dany promień okręgu koła jest jednością a szukamy okręgu*, wpisujemy w to koło wielokąt foremny np. kwadrat, sześciokąt, dziesięciokąt, i opisujemy na okręgu podobny wielokąt, to obwód wielokąta wpisanego jest mniejszy od okręgu, zaś opisanego większy od okręgu (105). Mierząc te obwody promieniem, t. j. wyrażając liczbą całą i ułomkiem dziesiętnym, w ilu cyfrach dziesiętnych te obwody nie różnią się od siebie, to tém bardziéj w tylu dziesiętnych cyfrach nie różnią się od okręgu zmierzonego promieniem. Wpisując i opisując wielokąt o dwa razy większéj liczbie boków, obwody ich w większéj liczbie cyfr nie będą różnić się od siebie, a tém samém otrzymamy liczbę z więcéj cyframi dziesiętnemi wyrażającą wielkość okręgu mierzonego promieniem, a zatém podług wymaganéj ścisłości możemy zmierzyć okręg promieniem, mierząc obwody wielokątów wpisanych i opisanych. I tak: obwód 6cio-kąta for. zawiera promieni 6,000000, opisanego zaś 6,928272, przeto okręg kół zawiera 6·promieni; obw. 48-ta for. zawiera promieni 6,278696, opis. zaś 6,289248, przeto okręg koła zawiera 6,2 promieni; obwód 96-kąta for. zawiera promieni 6,282066, opis. zaś 6,285212, przeto okręg koła zawiera 6,28 promieni; obwód 384-kąta for. zawiera 6,283160, opis. 6,283314, przeto okręg koła zawiera 6,283 promieni i t. d. Stosunek więc promienia do okręgu jest 1:6,283, zaś dwóch promieni czyli średnicy 2:6,283 czyli 1:3,141.

a) *Jeżeli dany okręg koła ma cztery jedności a szukamy ile tych jedności ma jego promień*, bierzemy wielokąt foremny którego obwód ma cztery tych jedności i szukamy promienia okręgu koła wpisanego i opisanego na tym wielokącie; a że okręg koła wpisanego jest mniejszy, zaś opisanego większy od obwodu tego wielokąta a tém samém i od okręgu danego, przeto i promień szukany jest mniejszy od promienia okręgu opisanego, zaś większy od promienia okręgu wpis. Wyraziwszy więc ile te promienie mają tych jedności których okręg ma 4, liczbą całą i ułamkiem dziesiętnym, w ilu cyfrach dziesiętnych te promienie nie różnią się od siebie, to tem bardziéj w tylu cyfrach dziesiętnych nie różnią się od szukanego promienia. Lecz im wielokąt ma więcéj boków, tem różnica między temi promieniami jest mniejsza (206), a tém samém więcéj cyfr dziesiętnych jest jednakowych w wartościach dwóch promieni, przeto więcéj cyfr dziesiętnych ma liczba wyrażająca wielkość promienia szukanego. Tym sposobem możemy znaleść liczbę wyrażającą wielkość szukanego promienia z tylu cyframi dziesiętnemi ile się nam podoba. I tak: niech 4 będzie obwód kwadratu, to bok jego jest 1, promień koła wpisanego jako połowa boku jest $\frac{1}{2}$ 0,5000000 opisanego jako połowa przekątniéj $\frac{1}{2}\sqrt{2}$=0,7071068, przeto promień szukany jest większy od połowy jedności: bok 8mio-kąta for. którego obwód 4 jest $\frac{1}{2}$, promień koła wpisanego równa się połowie summy promieni okręgów wpisanego i opisanego na kwadracie (206, *a*) t. j. *jest średnio-arytmetycznie proporcyonalny między temi promieniami* równa się więc $\frac{1}{2}$ (0,5000000+0,7071068)=0,6035534; *promień zaś koła opisanego jest średnio-jeometrycznie proporcyonalny między promieniami koła opisanego na kwadracie i wpis. w 8-kąt* (206, *b*) przeto równa się $\sqrt{0,7071068 . 0,6035534}$ = 0,6532815, a zatém promień szukany jest 0,6; w 16to-kącie for. prom. wpis. =$\frac{1}{2}$(0,6035534+0,6532815)=0,6284174, opisanego zaś $\sqrt{0,6532815 . 0,6284174}$ = 0,6407289, przeto nie dają części setnych; w 32-kącie prom. wpisan.=$\frac{1}{2}$ (0,6284174+0,6407289)=0,6345731, opisanego= $\sqrt{0,6035534 . 0,6345731}$ = 0,6376435 a zatém promień szukany jest 0,63: w 64-kącie wpis =0,6361083 opis.=0,6368754, przeto promień szukany jest 0,636 i t. d. stosunek więc okręgu do promienia wyrazi się

4:0,636, zaś do okręgu średnicy 4. Stosunek ten dla krótkości oznaczam, 3,14159265358979323846, log. Π=0,49 415385435. Stosunek ten wyrażony ułamk głym daje następne przybliżone wartości 3:1; 2: 333:106, 355:113..; pierwszy nieużywa się wcale, gdyż jest zbliżony o $\frac{1}{7}$, drugi *Archimedesa* jest używany i jest zbliżony mniéj jak o jedną tysięczną, trzeci *Riwarda* nie jest używany, czwarty zaś *Metiusa* często używany, jest zbliżony mniéj jak o połowę milionowéj,— ten ostatni łatwy do spamiętania otrzymuje się, gdy liczbę złożoną z porządkowych liczb nieparzystych branych po dwie 113355, przetniemy w połowie cyfr 113/355.

267. *Znaleźć linię prostą równą okręgowi koła* (fig. 231).

Prowadzę dwie średnice prostopadłe AB i CD; przez A prowadzę linię AE równoległą do CD i na półokręgu CAD przenoszę promień jako cięciwę trzy razy; przez punkt G prowadzę promień FG do spotkania się z linią AE w punkcie H i od tego punktu do J na linię HE przenoszę promień trzy razy; punkt B z J łączę linią prostą a ona równa się połowie okręgu, a tém samém linia dwa razy od niéj dłuższa równa się całemu okręgowi ADBC.

Dla okazania że linia BJ=3,1415 promieniom: oznaczam go przez R i uważam że $\overline{BJ}^2=\overline{AB}^2+\overline{AJ}^2$; lecz AB=2R, AJ=HJ—AH i HJ=3R przeto: $\overline{BJ}^2=4R^2+(3R-AH)^2$. Dla otrzymania AH prowaeściokąta foremnego, który jest równo- gdyż łuki CG i LD są sobie równe, — to . Lecz $AH:GM = FA:FM$ i $\overline{FG}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{MG}^2$ $\overline{FM}^2 = \overline{FG}^2 - \overline{GM}^2 = R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \frac{3}{4}R^2$ zaś samo $FM = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$; przeto z proporcyi $AH = \frac{1}{2}R . R : \frac{1}{2}R . \sqrt{3} = R:\sqrt{3}$, po zniesieniu wspólnego czynnika $\frac{1}{2}R$; wstawiając za AH wartość, będzie: $\overline{BJ}^2 = 4R^2 + (3R - R:\sqrt{3})^2$; lecz $\sqrt{3} = 1732051$ zaś $R:1{,}732051 = 0{,}5773502\ R$, przeto $\overline{BJ}^2 = 4R^2 + (3R - 0{,}5773502\ R)^2 = 4R^2 + (2{,}4226498R)^2 = 4R^2 + 5{,}86923205344R^2 = 9{,}86923205344\ R^2$, a samo $BJ = \sqrt{9{,}86923205344\ R^2} = 3{,}141533\ R$, przeto tylko różni się od rzeczywistéj wartości okręgu mniéj jak o pół stotysięcznéj, co w praktyczném użyciu jest dostateczném.

268. *Zd. Znaleźć okręg koła którego promień ma 8 łokci.*

Okręgi kół mają się do siebie jak średnice przeto śred. 113: śred. 16 = okręg 355: okręg x. Ztąd okręg szukany $= \frac{355}{113} \cdot 16$ Łok. $= 11\ 16 = 2 11$ R.

269. *Znaleźć średnicę okręgu zawierającego łokci 25.*

Okręg 355: okręgu 25 = średnica 113: śred. szukanéj, a ztąd śred. szukana $= \frac{133}{355} \cdot 25 = \frac{1}{11}$ okręg.

270. *Zd. Mając promień* 8 *znaleść łuk* 75°.

Okręg koła $= 2\Pi R = \frac{355}{113} \cdot 16 = 360^0 : 75^0 = 2\Pi R :$ $x = \frac{2\Pi R . 75^0}{3600^0}$.

271. *Zd. Mając łuk* 35° *zawierający* 10 *łok., znaleźć średnicę.*

Łuk 35°: łuku 360° = 10 łok: x łok. $= \frac{360^0}{35^0} \cdot 10$ łok., średnica zaś $= \frac{1}{\Pi} \cdot \frac{360^0}{35^0} \cdot 10$ łok. (269).

272. *Zg. Łuk* BS *okręgu* C *wyrazić przez przybliżenie w linii prostéj* (Archimedes) (fig. 232).

Przez końce łuku BS prowadzę z jednej strony środka C cięciwy równoległe AB i PS i styczne SU i BT do przecięcia się z temi cięciwami, a łuk BS $= \frac{1}{2}$ (BT + SU). Cięciwa bowiem BS > SU, bo w trójkącie BSU kąt U jest rozwarty jako dopełnienienie kąta jednostronnego ostrego PSU, przeto SU < łuku BS; linia BT > łuku BS, jako większa od BW + WS gdyż WS < WT leżącego naprzeciw kąta WST rozwartego, a przeto połowa tych linii zbliża się do łuku.

273. *Zt.* Za pomocą N° 269 wynajduje się promień rotundy, kloca drzewa i t. p., których obwód mierzy się sznurem.
