

2.1. POLE ELEKTROMAGNETYCZNE SYSTEMU PRĄDÓW

2.1.1. OGÓLNE WYRAŻENIA DLA POLA WYTWARZANEGO PRZEZ ZADANY ROZKŁAD PRĄDÓW

Podstawowym zadaniem teorii anten jest określenie pola elektromagnetycznego wytwarzanego przez prądy płynące w antenie. Znalezienie tego pola sprowadza się do znalezienia rozwiązania równań Maxwella spełniającego założone warunki brzegowe i warunki wypromieniowania. Przy założeniu harmonicznej zmienności w czasie, równania Maxwella przyjmują postać [47, 52]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{*J} \quad (2-1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon'\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (2-1b)$$

W równaniach (2-1) \mathbf{E} i \mathbf{H} są wektorami pola elektrycznego i magnetycznego; \mathbf{J} i $\mathbf{*J}$ — wektorami gęstości prądu elektrycznego i magnetycznego; ω — pulsacją, ε' i μ — przenikalnością elektryczną i magnetyczną ośrodka, przy czym

$$\varepsilon' = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \quad (2-2)$$

oraz

ε — przenikalność elektryczna;

σ — konduktywność.

Równania (2-1) są słuszne dla ośrodków izotropowych, dla których wektory indukcji elektrycznej \mathbf{D} i magnetycznej \mathbf{B} są związane z wektorami pola elektrycznego \mathbf{E} i magnetycznego \mathbf{H} następującymi zależnościami:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (2-3a)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (2-3b)$$

Wektory pola elektromagnetycznego muszą spełniać następujące warunki brzegowe na powierzchni rozdzielającej dwa ośrodki:

$$\mathbf{I}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{*K} \quad (2-4a)$$

$$\mathbf{I}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\mathbf{K} \quad (2-4b)$$

przy czym:

\mathbf{K} — wektor gęstości powierzchniowej prądu elektrycznego;

$*\mathbf{K}$ — wektor gęstości powierzchniowej prądu magnetycznego;

\mathbf{I}_n — jednostkowy wektor normalny dla powierzchni granicznej ze zwrotem w kierunku ośrodka 1;

indeksy 1 i 2 oznaczają wartości pól tuż przy granicy rozdziału odpowiednio w ośrodkach 1 i 2.

Na powierzchni przewodnika o nieskończenie dużej konduktywności warunki brzegowe przyjmują postać:

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{E}_1 = 0 \quad (\sigma_2 = \infty) \quad (2-5a)$$

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{K} \quad (\sigma_2 = \infty) \quad (2-5b)$$

Jeśli powierzchnia graniczna charakteryzuje się nieskończenie dużą permeancją, to warunki brzegowe wyrażają się zależnościami:

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{E} = -*\mathbf{K} \quad (\sigma_{\mu 2} = \infty) \quad (2-6a)$$

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{H} = 0 \quad (\sigma_{\mu 2} = \infty) \quad (2-6b)$$

Warunki wypromieniowania dla pola elektromagnetycznego mają postać:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[\mathbf{I}_r \times \nabla \times \mathbf{E} - jk_0 \mathbf{E}] = 0 \quad (2-7a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[\mathbf{I}_r \times \nabla \times \mathbf{H} - jk_0 \mathbf{H}] = 0 \quad (2-7b)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r|\mathbf{E}| = O(1) \quad (2-8a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r|\mathbf{H}| = O(1) \quad (2-8b)$$

przy czym:

r — odległość od początku układu współrzędnych do punktu obserwacji;

\mathbf{I}_r — jednostkowy wektor wzdłuż promienia r ;

k_0 — stała propagacji w swobodnej przestrzeni (liczba falowa).

Warunki wypromieniowania oznaczają fizycznie, że energia jest wypromieniana wyłącznie z ograniczonego obszaru, czyli że nie ma źródeł pola w nieskończoności.

Równania Maxwella są inwariantne względem transformacji:

$$\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H} \quad \varepsilon' \rightleftharpoons -\mu \quad \mathbf{J} \rightleftharpoons -*\mathbf{J} \quad (2-9)$$

Ze względu na liniowość równań (2-1) ich rozwiązanie można przedstawić w postaci sumy dwóch składników:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (2-10a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \quad (2-10b)$$

przy czym:

$\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ — wektory pola elektromagnetycznego wywołanego tylko prądami elektrycznymi;

$\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ — wektory pola elektromagnetycznego wywołanego tylko prądami magnetycznymi.

Wielkości E_1 , H_1 i E_2 , H_2 spełniają przy tym równania:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times H_1 - j\omega\epsilon' E_1 &= J \\ \nabla \times E_1 + j\omega\mu H_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times H_2 - j\omega\epsilon E_2 &= 0 \\ \nabla \times E_2 + j\omega\mu H_2 &= -^*J \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

Transformacja (2-9) przekształca układ równań (2-11) w (2-12) i odwrotnie. Jeśli więc znamy rozwiązanie układu równań (2-11), to rozwiązanie układu (2-12) możemy uzyskać stosując do znanego rozwiązania transformację (2-9); trzeba przy tym jednak aby transformacja (2-9) przekształcała warunki brzegowe dla układu (2-11) na warunki brzegowe dla układu (2-12).

Znaczne uproszczenie problemu rozwiązania równań Maxwella możemy uzyskać przez wprowadzenie funkcji pomocniczych. Przykładem takich funkcji są *potencjały Hertza*: *elektryczny* i *magnetyczny*. Ułatwienie uzyskane przez wprowadzenie potencjałów Hertza polega na tym, że wyrażają się one całkowicie przez prądy [9, 41]. Elektryczny potencjał Hertza Π jest określony w zupełności przez prądy elektryczne

$$\Pi = \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \int_V J \frac{e^{-jkR}}{R} dv \quad (2-13)$$

przy czym:

V — obszar anteny, tj. obszar przewodników, w których płyną prądy elektryczne;
 R — odległość od punktu obserwacji do punktu całkowania.

Wyrażenie (2-13) spełnia warunki wypromieniowania i jest słuszne dla ośrodków izotropowych. Wektory pola elektromagnetycznego są związane z elektrycznym potencjałem Hertza następującymi zależnościami:

$$E_1 = \nabla(\nabla \cdot \Pi) + k^2 \Pi \quad (2-14a)$$

$$H_1 = j\omega\epsilon \nabla \times \Pi \quad (2-14b)$$

w których:

$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = 2\pi/\lambda$;
 λ — długość fali.

W obecności prądów magnetycznych wprowadzamy magnetyczny potencjał Hertza $^*\Pi$ ¹⁾

$$^*\Pi = \frac{1}{4\pi j\omega\mu} \int_V ^*J \frac{e^{-jkR}}{R} dv \quad (2-15)$$

który jest związany z wektorami pola elektromagnetycznego następującymi wyrażeniami:

$$E_2 = -j\omega\mu \nabla \times ^*\Pi \quad (2-16a)$$

$$H_2 = \nabla(\nabla \cdot ^*\Pi) + k^2 ^*\Pi \quad (2-16b)$$

¹⁾ Magnetyczny potencjał Hertza bywa również nazywany wektorem Fitzgeralda.

Korzystając z zależności (2-13) do (2-16) możemy uzyskać wyrażenia dla wektorów pola elektromagnetycznego w nieograniczonym jednorodnym ośrodku, w którym płyną prądy elektryczne i magnetyczne.

Wyrażenia te przyjmują postać [45, 28]:

$$E = \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \int_V [(J \cdot \nabla') \nabla' \Psi + k^2 J \Psi - j\omega\epsilon^* J \times \nabla' \Psi] dv \quad (2-17a)$$

$$H = \frac{1}{4\pi j\omega\mu} \int_V [(^*J \cdot \nabla') \nabla' \Psi + k^2 ^*J \Psi + j\omega\mu J \times \nabla' \Psi] dv \quad (2-17b)$$

przy czym

$$\Psi = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (2-18)$$

a znak prim oznacza, że operacje różniczkowania odnoszą się do punktu obserwacji, a nie do zmiennego punktu całkowania.

Wyrażenia (2-17) umożliwiają określenie pola wytwarzanego w dowolnym punkcie przez zadany rozkład prądów¹⁾.

2.1.2. POLE ANTENY W STREFIE DALEKIEJ (PROMIENIOWANIA)

Wyrażenia dla pola wytwarzanego przez antenę znacznie upraszczają się, jeśli odległość punktu obserwacji od obszaru anteny jest bardzo duża w porównaniu z jego rozmiarami. Obierzmy w obszarze anteny dowolnie punkt 0 jako początek kulistego układu współrzędnych r, Θ, Φ , (rys. 2-1). Jeśli punkt obserwacji P leży dostatecznie daleko od obszaru anteny, to możemy założyć, że wektory r i R łączące punkt P z początkiem układu współrzędnych i punktem całkowania M w obszarze anteny są równoległe. Mamy więc

$$R \approx r - r' \cdot I_r \quad (2-19)$$

przy czym r' — wektor — promień punktu całkowania.

Przyjmuje się, że wzór (2-19) można stosować wówczas, gdy różnica między rzeczywistą długością wektora R a wartością wynikającą ze wzoru (2-19) nie przekracza $\lambda/16$. W celu spełnienia tego warunku, musi być

$$R \geq 2 \frac{d_a^2}{\lambda} \quad (2-20)$$

przy czym d_a — największy wymiar anteny.

¹⁾ Niektórzy autorzy zamiast elektrycznego i magnetycznego potencjału Hertza wolą stosować pojęcie potencjału wektorowego A i skalarnego V . Między tymi pojęciami zachodzą następujące związki:

$$V = -\nabla \cdot \Pi$$

$$A = j \frac{k^2}{\omega} \Pi + \nabla \times ^*\Pi$$

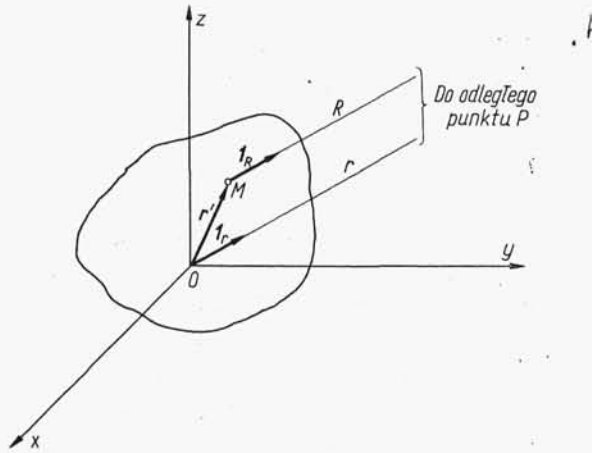
Obszar rozciągający się na zewnątrz kuli o promieniu równym $2d_a^2/\lambda$ nazywamy *strefą daleką (promieniowania) anteny*.

Korzystając ze wzoru (2-19) i biorąc pod uwagę, że w strefie dalekiej operator ∇' wystarczy zastąpić iloczynem $jk\mathbf{I}_r$, możemy wyrażenia (2-17) przedstawić w postaci [45]:

$$\mathbf{E} = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_V \left[\mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}_r) \mathbf{I}_r + \frac{1}{\zeta} (*\mathbf{J} \times \mathbf{I}_r) \right] e^{jkr' \cdot \mathbf{I}_r} d\mathbf{v} \quad (2-21a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\omega\varepsilon}{4\pi j} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_V [* \mathbf{J} - (*\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}_r) \mathbf{I} - \zeta(\mathbf{J} \times \mathbf{I}_r)] e^{jkr' \cdot \mathbf{I}_r} d\mathbf{v} \quad (2-21b)$$

przy czym ζ — impedancja falowa ośrodka.



Rys. 2-1. Określenie pola anteny w strefie dalekiej (promieniowania)

Ze wzorów (2-21) wynikają ważne wnioski dotyczące struktury pola w strefie dalekiej:

- pole anteny w strefie dalekiej nie ma składowych radialnych,
- pola \mathbf{E} i \mathbf{H} są związane zależnością

$$\mathbf{E} = \zeta(\mathbf{H} \times \mathbf{I}_r) \quad (2-22)$$

Zależność ta jest charakterystyczna dla fali płaskiej. Możemy więc stwierdzić, że pole anteny w strefie dalekiej ma lokalnie strukturę fali płaskiej.

Korzystając z wyrażen (2-21) łatwo wypisujemy wyrażenia na składowe wektora \mathbf{E} w kulistym układzie współrzędnych:

$$E_\theta = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_V \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}_\theta + \frac{1}{\zeta} * \mathbf{J} \cdot \mathbf{I}_\phi \right) e^{jkr' \cdot \mathbf{I}_r} d\mathbf{v} = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr}}{r} f_1(\theta, \phi) \quad (2-23a)$$

$$E_\phi = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_V \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}_\phi - \frac{1}{\zeta} * \mathbf{J} \cdot \mathbf{I}_\theta \right) e^{jkr' \cdot \mathbf{I}_r} d\mathbf{v} = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr}}{r} f_2(\theta, \phi) \quad (2-23b)$$

przy czym \mathbf{I}_θ , \mathbf{I}_ϕ — jednostkowe wektory w kulistym układzie współrzędnych.

Całki w wyrażeniach (2-23) są funkcjami tylko zmiennych kątowych Θ i Φ . Zaznaczono to przez wprowadzenie funkcji $f_1(\Theta, \Phi)$ i $f_2(\Theta, \Phi)$. Funkcje te przedstawiają charakterystyki promieniowania anteny w postaci nieunormowanej. Wzory (2-23) mają postać charakterystyczną dla źródła punktowego umieszczonego w początku układu współrzędnych. Dotyczy to jednak tylko amplitudy pola dalekiego, gdyż w ogólnym przypadku funkcje $f_1(\Theta, \Phi)$ i $f_2(\Theta, \Phi)$ są funkcjami zespolonymi, tak że powierzchnie równych faz nie są powierzchniami kulistymi ze środkami w początku układu współrzędnych. Jest to zupełnie zrozumiałe, gdyż położenie początku układu współrzędnych wybraliśmy dowolnie.

Zachowanie się pola dalekiego jako pola pochodzącego od źródła punktowego stanie się jeszcze bardziej oczywiste, gdy rozważymy przepływ mocy w obszarze promieniowania. Uśredniony wektor Poyntinga w strefie dalekiej wyraża się zależnością

$$\begin{aligned} S_s &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2\zeta} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times (\mathbf{I}_r \times \mathbf{E}^*)] = \\ &= \frac{1}{2\zeta} (|E_\Theta|^2 + |E_\Phi|^2) \mathbf{I}_r = \frac{\zeta}{8\lambda^2 r^2} [|f_1(\Theta, \Phi)|^2 + |f_2(\Theta, \Phi)|^2] \mathbf{I}_r, \end{aligned} \quad (2-24)$$

Energia rozplywa się więc promieniowo od początku układu współrzędnych, przy czym gęstość energii maleje proporcjonalnie do kwadratu odległości i jest zależna od współrzędnych kątowych Θ, Φ . Ze względu na rozplyw energii każdy ograniczony rozkład prądów możemy zatem zastąpić kierunkowym źródłem punktowym umieszczonym w dowolnie przyjętym początku układu współrzędnych.

Przy omawianiu przepływu mocy jest dogodniej zamiast wektora Poyntinga posługiwać się pojęciem *gęstości promieniowania* $U(\Theta, \Phi)$, która nie zależy od odległości. Jest to moc promieniowana w jednostce kąta bryłowego w kierunku Θ, Φ

$$U(\Theta, \Phi) = r^2 |S_s| = \frac{\zeta}{8\lambda^2} [|f_1(\Theta, \Phi)|^2 + |f_2(\Theta, \Phi)|^2] \quad (2-25)$$

Trójwymiarowy wykres gęstości promieniowania jest oczywiście charakterystyką promieniowania mocy w skali nieunormowanej.

Całkowitą moc promieniowaną przez antenę możemy obliczyć całkując gęstość promieniowania w pełnym kącie bryłowym

$$P_{pr} = \int_{4\pi} U(\Theta, \Phi) d\Omega = \frac{\zeta}{8\lambda^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [|f_1(\Theta, \Phi)|^2 + |f_2(\Theta, \Phi)|^2] \sin \Theta d\Theta d\Phi \quad (2-26)$$

przy czym $d\Omega$ — element kąta bryłowego.

Zgodnie z definicją kierunkowość anteny jest to stosunek maksymalnej gęstości promieniowania do średniej gęstości promieniowania; mamy więc

$$D = 4\pi \frac{[|f_1(\Theta, \Phi)|^2 + |f_2(\Theta, \Phi)|^2]_{\max}}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} [|f_1(\Theta, \Phi)|^2 + |f_2(\Theta, \Phi)|^2] \sin \Theta d\Theta d\Phi} \quad (2-27)$$

W przypadku gdy wektor pola elektrycznego ma tylko jedną składową i gdy maksymalna gęstość promieniowania jest równa jedności, wzór (2-27) sprowadza się do wzoru (1-9).

2.1.3. POLARYZACJA

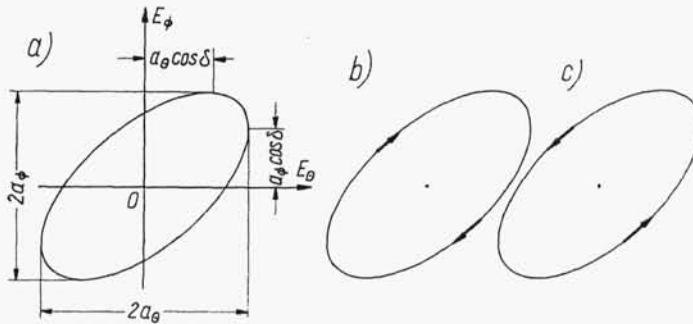
W poprzednim punkcie omówiliśmy oddzielnie dwie składowe pola elektrycznego w strefie dalekiej E_θ i E_ϕ . Zajmiemy się teraz właściwościami wektora wypadkowego.

Funkcje $f_1(\theta, \Phi)$ i $f_2(\theta, \Phi)$ w ogólnym przypadku są funkcjami zespolonymi; zapiszemy je w postaci:

$$f_1(\theta, \Phi) = A_1(\theta, \Phi)e^{-j\gamma_1(\theta, \Phi)} \quad (2-28a)$$

$$f_2(\theta, \Phi) = A_2(\theta, \Phi)e^{-j\gamma_2(\theta, \Phi)} \quad (2-28b)$$

przy czym funkcje A i γ są funkcjami rzeczywistymi. Wypadkowy wektor E jest zatem sumą dwóch wektorów zmiennych okresowo w czasie i wzajemnie prostopadłych. Wiruje więc on w przestrzeni i jednocześnie zmienia swą amplitudę, tak że jego koniec opisuje elipsę; mówimy, że pole jest *eliptycznie spolaryzowane* (rys. 2.2).



Rys. 2-2. Polaryzacja eliptyczna: a) parametry elipsy polaryzacji; b) polaryzacja prawoskrętna; c) polaryzacja lewoskrętna (kierunek rozchodzenia się fali — do czytelnika)

Względne amplitudy i fazy składowych wektora E zmieniają się wraz ze zmianą kątów θ i Φ , polaryzacja pola jest więc funkcją kierunku. Równanie *elipsy polaryzacji* możemy łatwo wyprowadzić biorąc pod uwagę, że sens fizyczny mają tylko części rzeczywiste wyrażeń zespolonych dla składowych pola elektrycznego. Uwzględniając czynnik czasowy $e^{j\omega t}$ możemy przedstawić te wyrażenia w postaci:

$$E_\theta = \frac{\omega\mu A_1(\theta, \Phi)}{4\pi r} \sin(\omega t - kr - \gamma_1) = a_\theta \sin(\omega t - kr - \gamma_1) \quad (2-29a)$$

$$E_\phi = \frac{\omega\mu A_2(\theta, \Phi)}{4\pi r} \sin(\omega t - kr - \gamma_2) = a_\phi \sin(\omega t - kr - \gamma_1 - \delta) \quad (2-29b)$$

przy czym $\delta = \gamma_2 - \gamma_1$.

Rugując we wzorze (2-29) człony zawierające $(\omega t - kr - \gamma_1)$ otrzymujemy równanie elipsy polaryzacji

$$\frac{E_\theta^2}{a_\theta^2} + \frac{E_\phi^2}{a_\phi^2} - 2 \frac{E_\theta}{a_\theta} \frac{E_\phi}{a_\phi} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2-30)$$

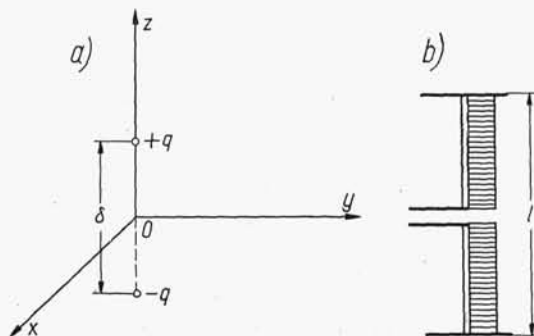
Zależnie od kierunku obrotu wektora wypadkowego mówimy o *polaryzacji lewo- lub prawoskrętnej*, przy czym odnosi się to do obserwatora widzącego falę przychodzącą.

Jeśli różnica faz δ jest nieparzystą wielokrotnością $\pi/2$ i amplitudy obu składowych są jednakowe, to elipsa polaryzacji staje się kołem. Mówimy wówczas o *polaryzacji kołowej* prawo- lub lewoskrętnej określonej w taki sam sposób jak dla polaryzacji eliptycznej. Jeśli różnica faz δ jest parzystą wielokrotnością π , to elipsa polaryzacji redukuje się do odcinka prostej i mamy do czynienia z *polaryzacją liniową*.

W ogólnym przypadku przy zmianach Θ i Φ zmienia się zarówno różnica faz δ jak i stosunek E_θ/E_ϕ ; w związku z tym polaryzacja pola może zmieniać się od liniowej przez eliptyczną do kołowej i odwrotnie, gdy zmieniamy kierunek obserwacji.

2.1.4. ELEMENTARNY DIPOL ELEKTRYCZNY

Rozważymy teraz najprostszą antenę, jaką jest tzw. *dipol elementarny*. Dipol elementarny jest utworzony przez dwa punktowe, zmieniające się harmonicznym w czasie, ładunki elektryczne $+q$ i $-q$ znajdujące się w bardzo małej odległości δ od siebie (rys. 2-3). Dipol taki jest równoważny elementowi prądu elektrycznego

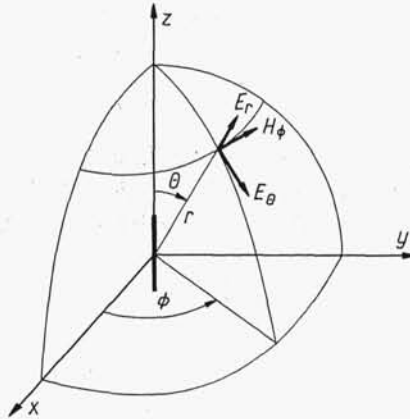


Rys. 2-3. Elementarny dipol elektryczny: a) model matematyczny; b) dipol Hertza ($l \ll \lambda$)

$I = j\omega q$. Model fizyczny elementarnego dipola można sobie wyobrazić w postaci anteny prętowej zasilanej w środku i dużo krótszej od długości fali, której końce obciążono dużymi pojemnościami (dipol Hertza). Prąd płynący w takiej antenie ma we wszystkich punktach jednakową wartość.

Założmy, że dipol elementarny umieszczono wzdłuż osi z w początku układu współrzędnych (rys. 2-4). Moment dipola elektrycznego wyraża się zależnością

$$\mathbf{p} = q\delta = \frac{Idz}{j\omega} \mathbf{I}_z \quad (2-31)$$



Rys. 2-4. Pole elementarnego dipola elektrycznego umieszczonego wzdłuż osi z

Korzystając z zależności (2-17) możemy wyprowadzić następujące wyrażenia dla składowych pola dipola elementarnego [49, 50]:

$$E_r = \frac{\omega\mu Idz}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right] \cos \Theta \quad (2-32a)$$

$$E_\Theta = \frac{j\omega\mu Idz}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 - \frac{j}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin \Theta \quad (2-32b)$$

$$H_\Phi = \frac{jk Idz}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 - \frac{j}{kr} \right] \sin \Theta \quad (2-32c)$$

$$E_\Phi = H_r = H_\Theta = 0 \quad (2-32d)$$

Ze względu na symetrię pole dipola jest niezależne od współrzędnej Φ . Znaczenie członów figurujących w wyrażeniach na składowe pola dipola elementarnego zależy od wartości kr — lub też wprowadzając długość fali λ — od $2\pi r/\lambda$. Możemy wyróżnić trzy strefy:

1) *strefa bliska* (statyczna), w której $2\pi r \ll \lambda$; ostatnie człony w nawiasach kwadratowych wyrażen (2-32) przeważają, tak że pozostałe można pominąć; wzory (2-32a i b) redukują się w tej strefie do wzorów dla pola elektrostatycznego dipola elektrycznego, a wzór (2-32c) reprezentuje pole elementu prądu w stanie quasi-stacjonarnym;

2) *strefa pośrednia*, w której $2\pi r$ jest porównywalne z długością fali λ ; pole ma strukturę bardzo złożoną;

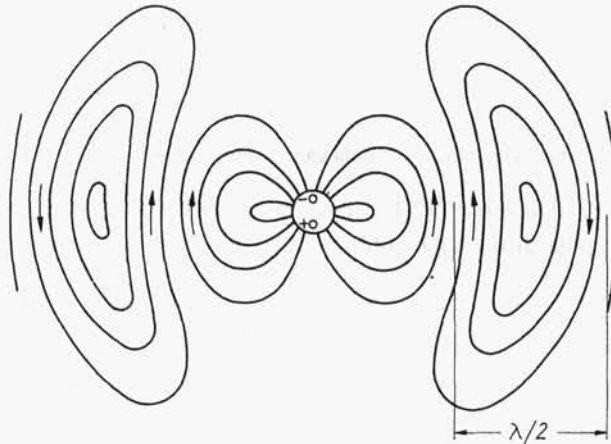
3) *strefa daleka* (promieniowania), w której $2\pi r \gg \lambda$; ważne są jedynie człony zawierające czynnik $1/r$. Otrzymujemy więc następujące zależności:

$$E_{\theta} = \frac{j\omega\mu I dz \sin \theta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2-33a)$$

$$H_{\phi} = \frac{jk I dz \sin \theta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2-33b)$$

$$E_r = E_{\phi} = H_r = H_{\theta} = 0 \quad (2-33c)$$

Pole ma bardzo prostą strukturę. Wektory pola elektrycznego i magnetycznego są poprzeczne względem kierunku rozchodzenia się fali i wzajemnie prostopadłe. Wzory (2-33) moglibyśmy uzyskać wprost z zależności (2-23).



Rys. 2-5. Przekrój poprzeczny pola elektrycznego w otoczeniu elementarnego dipola elektrycznego

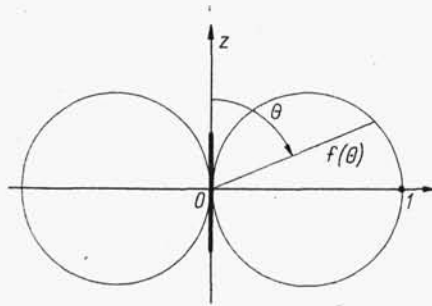
Charakterystyka promieniowania dipola elementarnego wyraża się zależnością

$$F(\theta) = \sin \theta \quad (2-34)$$

Na rysunku 2-5 przedstawiono linie pola elektrycznego w otoczeniu dipola elementarnego, a na rys. 2-6 — jego charakterystykę promieniowania w płaszczyźnie wektora E .

Podstawiając wyrażenie (2-34) do wzoru (1-9) i wykonując całkowanie obliczamy kierunkowość elementarnego dipola elektrycznego

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{3}{2} \\ \text{lub w decybelach} \\ D &= 1,76 \end{aligned} \right\} \quad (2-35)$$

Rys. 2-6. Charakterystyka promieniowania w płaszczyźnie E elementarnego dipola elektrycznego

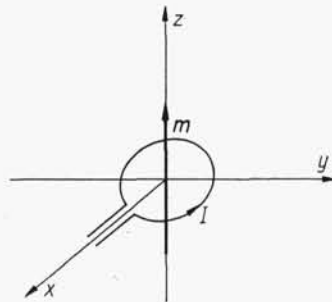
2.1.5. ELEMENTARNY DIPOL MAGNETYCZNY

Rozważmy teraz promieniowanie elementu prądu magnetycznego, zwanego także *elementarnym dipolem magnetycznym*. Między prądami elektrycznym i magnetycznym zachodzą następujące związki [28]:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{*J} \quad (2-36a)$$

$$\mathbf{*J} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \mathbf{J} \quad (2-36b)$$

Jak wynika z zależności (2-36b) element prądu magnetycznego jest równoważony nieskończenie małemu wirowi prądu elektrycznego. W sensie fizycznym elementarny



Rys. 2-7. Pętla z prądem i ekwiwalentny dipol magnetyczny

dipol magnetyczny możemy więc zrealizować w postaci pętli z prądem, małej w porównaniu z długością fali (rys. 2-7).

Pole elementarnego dipola magnetycznego jest dualne w stosunku do pola elementarnego dipola elektrycznego. Stosując transformację (2-9) do wzorów (2-32) otrzymujemy:

$$E_\phi = -\frac{jk^* Idz}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 - \frac{j}{kr} \right] \sin \Theta \quad (2-37a)$$

$$H_r = \frac{\omega \varepsilon^* I dz}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right] \cos \Theta \quad (2-37b)$$

$$H_\Theta = \frac{j\omega \varepsilon^* I dz}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 - \frac{j}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin \Theta \quad (2-37c)$$

$$E_r = E_\Theta = H_\Phi = 0 \quad (2-37d)$$

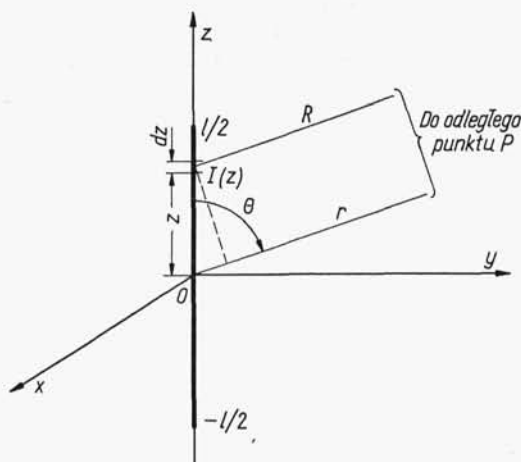
Podobnie jak w przypadku dipola elektrycznego, pole elementarnego dipola magnetycznego jest niezależne od współrzędnej Φ . Charakterystyka promieniowania obu dipoli jest jednakowa, jednakowe więc też są ich kierunkowości. *Moment dipola magnetycznego* wyraża się wzorem

$$m = \mu S I_n \quad (2-38)$$

w którym S — powierzchnia pętli.

2.1.6. POLE DALEKIE LINIOWEGO ROZKŁADU PRĄDU

Określimy pole w obszarze promieniowania wytwarzane przez prąd zmieniający się harmonicznym w czasie i płynący wzdłuż cienkiego prostoliniowego przewodnika rozciągającego się wzdłuż osi z od $z = -l/2$ do $z = l/2$ (rys. 2-8). Długość przewod-



Rys. 2-8. Pole dalekie liniowego rozkładu prądu

nika l może być dowolna, tak że w ogólności prąd jest zespoloną funkcją położenia wzdłuż przewodnika

$$I = I(z) I_z \quad (2-39)$$

Ponieważ w strefie dalekiej pole ma strukturę fali płaskiej, wystarczy, jeśli określimy tylko pole elektryczne. Skorzystamy z wyprowadzonych poprzednio wyrażeń (2-23) dla pola dalekiego dowolnego rozkładu prądów. Przede wszystkim opuścimy prądy magnetyczne, a następnie biorąc pod uwagę, że $\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}_\Phi = 0$ stwierdzamy, że

$E_\Phi = 0$, uwzględniając wreszcie, że $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{I}_r = z \cos \Theta$, $\mathbf{I}_z \cdot \mathbf{I}_\Theta = -\sin \Theta$ i że całka objętościowa sprowadza się do całki liniowej znajdujemy następujące wyrażenie dla jedynej niezerowej składowej pola elektrycznego:

$$E_\Theta = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{-l/2}^{l/2} I(z) \sin \Theta e^{jkz \cos \Theta} dz = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} f(\Theta) \quad (2-40)$$

Ze względu na osiową symetrię źródła, pole nie zależy od współrzędnej Φ . Funkcja $f(\Theta)$ jest w ogólności funkcją zespoloną, co oznacza, że powierzchnie ekwifazowe nie są powierzchniami kul o promieniu r . Moduł tej funkcji reprezentuje oczywiście charakterystykę promieniowania źródła w skali nieunormowanej.

Całka w wyrażeniu (2-40) ma ciekawą interpretację. Porównując wyrażenie podcałkowe z wyrażeniem dla pola dalekiego elementarnego dipola elektrycznego (2-33a) łatwo zauważyć, że całkę w zależności (2-40) można traktować jako sumę pól pochodzących od nieskończenie wielkiej liczby elementarnych dipoli ułożonych wzdłuż osi przewodnika. Funkcja eksponencjalna w wyrażeniu podcałkowym uwzględnia przy tym różnice faz w polach poszczególnych dipoli wynikłe wskutek różnicy dróg, jakie przebywa fala elektromagnetyczna.

2.1.7. SUMOWANIE PÓL

Często będziemy mieli do czynienia ze źródłami składającymi się z pewnej liczby oddzielnych przewodników z prądem. Jeśli tylko takie źródło zajmuje ograniczoną część przestrzeni, to możemy stosować doń ogólne wyrażenia wyprowadzone w p. 2.1.1 i 2.1.2. W pewnych przypadkach jest jednak dogodniej skorzystać z zasady superpozycji i traktować pole wypadkowe jako sumę pól od poszczególnych przewodników. Ograniczymy się tylko do zbadania pola w strefie dalekiej.

Niech więc będzie dane źródło złożone z N ograniczonych obszarów, w których płyną prądy. Umieścimy początek pierwotnego układu współrzędnych prostokątnych x, y, z i związanego z nim układu współrzędnych kulistych r, Θ, Φ dowolnie w pobliżu obszarów z prądami (rys. 2-9). Z każdym np. i -tym obszarem wiążemy wtórny układ współrzędnych ze środkiem w punkcie O_i leżącym dowolnie wewnątrz tego obszaru. Chcemy określić pole w odległym punkcie P , możemy więc uważać, że wszystkie promienie wychodzące z początków pierwotnego i wtórnych układów współrzędnych i zbieżające do punktu P są do siebie równoległe. Przy takim założeniu pole w punkcie P pochodzące od i -tego obszaru możemy traktować jako pole pochodzące od źródła punktowego umieszczonego w punkcie O_i . Składowe tego pola wyrażają się następującymi zależnościami:

$$E_{\Theta i} = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_i}}{r_i} \int_{V_i} \left(\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{I}_\Theta + \frac{1}{\xi} * \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{I}_\Phi \right) e^{jkr'_i \cdot \mathbf{I}_{r0}} dv = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_i}}{r_i} f_{1i}(\Theta, \Phi) \quad (2-41a)$$

$$E_{\Phi i} = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_i}}{r_i} \int_{V_i} \left(\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{I}_\Phi - \frac{1}{\xi} * \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{I}_\Theta \right) e^{jkr'_i \cdot \mathbf{I}_{r0}} dv = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_i}}{r_i} f_{2i}(\Theta, \Phi) \quad (2-41b)$$

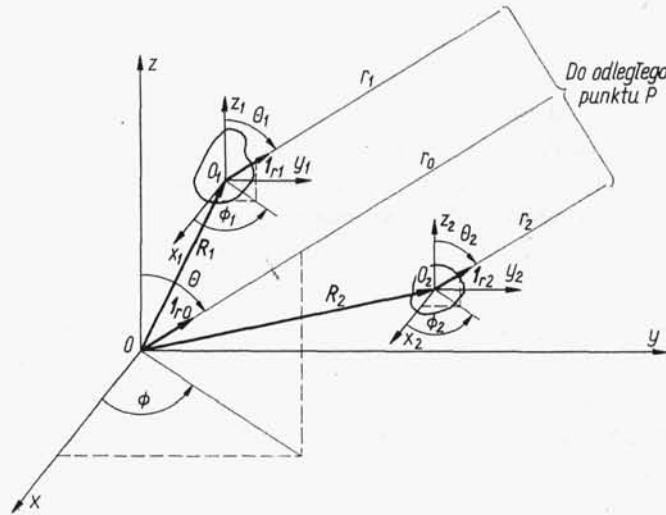
Pole wypadkowe otrzymamy sumując pola pochodzące od wszystkich obszarów, uwzględniając przy tym różnice faz wynikłe z różnicy dróg prowadzących od poszczególnych obszarów do punktu P . Przy założeniu równoległości wszystkich promieni

$$r_i = r_0 - \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{I}_{r_0} \quad (2-42)$$

przy czym:

\mathbf{R}_i — wektor — promień określający położenie początku i -tego wtórnego układu współrzędnych;

r_0 — odległość od początku pierwotnego układu współrzędnych do punktu P .



Rys. 2-9. Sumowanie pól

Pole wypadkowe jest więc określone następującymi zależnościami:

$$E_\theta = \sum_{i=1}^N E_{\theta i} = \frac{\omega \mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} F_{u1}(\theta, \Phi) \quad (2-43a)$$

$$E_\phi = \sum_{i=1}^N E_{\phi i} = \frac{\omega \mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} F_{u2}(\theta, \Phi) \quad (2-43b)$$

w których:

$$F_{u1}(\theta, \Phi) = \sum_{i=1}^N f_{1i}(\theta, \Phi) e^{jk\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{I}_{r_0}} \quad (2-44a)$$

$$F_{u2}(\theta, \Phi) = \sum_{i=1}^N f_{2i}(\theta, \Phi) e^{jk\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{I}_{r_0}} \quad (2-44b)$$

W ogólnym przypadku funkcje kierunkowe F_{u1} i F_{u2} są funkcjami zespolonymi. Ich moduły przedstawiają nieunormowane charakterystyki promieniowania układu.

Jeśli wszystkie obszary wchodzące w skład źródła są jednakowe i jednakowo zorientowane, to funkcje $f_{1i}(\Theta, \Phi)$ i $f_{2i}(\Theta, \Phi)$ możemy przedstawić w postaci:

$$f_{1i}(\Theta, \Phi) = A_i f_1(\Theta, \Phi); \quad f_{2i}(\Theta, \Phi) = A_i f_2(\Theta, \Phi)$$

w której A_i są zespolonymi współczynnikami pobudzenia, natomiast funkcje $f_1(\Theta, \Phi)$ i $f_2(\Theta, \Phi)$ są zespolonymi charakterystykami promieniowania dowolnego obszaru, odpowiednio dla składowej E_θ i E_ϕ . W miejsce zależności (2-44) otrzymujemy teraz:

$$F_{u1}(\Theta, \Phi) = f_1(\Theta, \Phi) \sum_{i=1}^N A_i e^{jkR_i \cdot I_{r_0}} \quad (2-45a)$$

$$F_{u2}(\Theta, \Phi) = f_2(\Theta, \Phi) \sum_{i=1}^N A_i e^{jkR_i \cdot I_{r_0}} \quad (2-45b)$$

Wzory (2-45) wyrażają *zasadę przemnażania charakterystyk*, wykorzystywaną przy określaniu charakterystyk promieniowania układów antenowych złożonych z pewnej liczby jednakowych i jednakowo zorientowanych elementów promieniujących. Funkcje f_1 i f_2 są w tym przypadku charakterystykami promieniowania pojedynczego elementu, a suma występująca we wzorach (2-45) jest *mnożnikiem układu*¹⁾.

2.1.8. ZASADA WZAJEMNOŚCI

Zasada wzajemności Rayleigha-Helmholtza uogólniona przez Carsona na przypadek anten określa związek między parametrami anteny pracującej w warunkach nadawania i odbioru. W ogólnym przypadku zasadę wzajemności²⁾ możemy sformułować w następujący sposób. Niech będą dane dwa rozkłady prądów J_1 i J_2 zajmujące odpowiednie obszary V_1 i V_2 . Jeśli prądy J_1 wytwarzają pole E_1 , a J_2 — pole E_2 , to między tymi wielkościami zachodzi następujący związek [27]:

$$\int_{V_1} E_2 \cdot J_1 dv = \int_{V_2} E_1 \cdot J_2 dv \quad (2-46)$$

Przechodząc do źródeł punktowych o momentach $I_{s1}I_1 ds_1$ i $I_{s2}I_2 ds_2$ otrzymujemy

$$U_2 I_1 = U_1 I_2 \quad (2-47)$$

przy czym

$$U_1 = I_{s2} \cdot E_1 ds_2$$

$$U_2 = I_{s1} \cdot E_2 ds_1$$

¹⁾ Mnożnik układu bywa też nazywany charakterystyką grupową.

²⁾ Zasada wzajemności dotyczy tylko układów liniowych bilateralnych. Nie dotyczy ona układów unilateralnych np. z izolatorami ferrytowymi oraz anten z elementami czynnymi.

W szczególności przy równych natężeniach prądu $I_1 = I_2$ mamy $U_1 = U_2$. Identyfikując źródła punktowe z zaciskami anten zasadę wzajemności możemy wypowiedzieć w następujący sposób. Jeśli prąd I płynący przez zaciski anteny 1 wytwarza na zaciskach anteny 2 napięcie U , to ten sam prąd I płynący przez zaciski anteny 2 wytworzy na zaciskach anteny 1 to samo napięcie U . Jest to powszechnie spotykane sformułowanie zasady wzajemności dla anten. Zasada wzajemności jest słuszna bez względu na odległość między antenami, a więc także w polu bliskim. Ważnym wnioskiem wynikającym z zasady wzajemności jest możliwość zmierzenia parametrów anteny nadawczej przy wykorzystaniu jej jako anteny odbiorczej.

2.2. POWIERZCHNIE FALOWE I PROMIENIE

W poprzednim punkcie badaliśmy związki między polem elektromagnetycznym a jego źródłami. Zajmiemy się teraz zagadnieniem propagacji fal elektromagnetycznych bez bezpośredniego odwoływania się do źródeł promieniowania.

2.2.1. ZASADA HUYGENSA-FRESNELA

Rozważmy następujący problem: znamy rozkład pola elektrycznego i magnetycznego na pewnej powierzchni S i chcemy na tej podstawie określić pole w dowolnie zadanym punkcie P na zewnątrz tej powierzchni. Całkując równanie Helmholtza dochodzimy do następujących zależności [28, 41, 45]:

$$E(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\Psi \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS \quad (2-48a)$$

$$H(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\Psi \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS \quad (2-48b)$$

przy czym $\partial/\partial n$ — normalna pochodna.

Równania (2-48), nazywane wektorowymi wzorami Kirchhoffa, możemy uważać za analityczne sformułowanie zasady Huygensa-Fresnela, która głosi, że każdy punkt czoła fali można traktować jako wtórne źródło elementarnej fali kulistej. Z zasady Huygensa-Fresnela wynika, że nie ma bezpośredniej zależności między polem w punkcie P a polem w odpowiadającym mu punkcie czoła fali; pole w punkcie P jest sumą wszystkich fal elementarnych z całej powierzchni S .

2.2.2. PRAWA OPTYKI GEOMETRYCZNEJ

Omawiana poprzednio zasada Huygensa-Fresnela daje rygorystyczne rozwiązanie równania falowego. Często jednak jesteśmy skłonni zrezygnować z rygorystycznego rozwiązania i zadowolić się rozwiązaniem przybliżonym, jakie daje optyka geometryczna.