

mieszczonych elementów, przy czym najmniejsza odległość między elementami wynosi 2λ [46]. Rozmieszczenie elementów jest symetryczne względem środka układu, a odległość między elementami wzrasta w miarę zbliżania się do jego brzegów. Szerokość głównej wiązki promieniowania omawianego układu wynosi $0,65^\circ$, podczas gdy szerokość głównej wiązki promieniowania układu jednorodnego o długości 100λ zawierającego 200 elementów odległych od siebie o $\lambda/2$ jest równa $0,51^\circ$. Jeśliby 25 elementów rozmieścić równomiernie wzdłuż apertury 100λ (odległość między elementami wyniosłaby wówczas 4λ), to szerokość głównej wiązki promieniowania tego układu byłaby prawie taka sama jak dla układu zawierającego 200 elementów, ale pojawiłyby się listki układu przy wartościach Θ równych: $\pm 14,5^\circ$; $\pm 30^\circ$; $\pm 48,5^\circ$ i $\pm 90^\circ$.

2.5. OGÓLNE ZASADY SYNTEZY CHARAKTERYSTYKI PROMIENIOWANIA

Często spotykamy się z zadaniem znalezienia rozkładu pola w aperturze, który wytwarzałby zadaną charakterystykę promieniowania. Zadanie to nosi nazwę *syntezy charakterystyki promieniowania* [33]. Ograniczymy nasze zainteresowania dla jednowymiarowej apertury liniowej o długości l . W p. 2.3.4 i 2.3.5 ustaliliśmy związek między charakterystyką promieniowania $f(u)$ a funkcją rozkładu pola w aperturze $g(p)$:

$$f(u) = \int_{-1}^1 g(p) e^{jup} dp \quad (2-164)$$

$$g(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-jup} du \quad (2-165)$$

przy czym:

$$p = \frac{2x}{l};$$

$$u = \frac{\pi l}{\lambda} \sin \Theta;$$

x — współrzędna punktu w aperturze.

Równanie (2-164) jest równaniem całkowym Fredholma pierwszego rodzaju ze względu na $g(p)$. W ogólnym przypadku, tj. przy dowolnie zadanej funkcji $f(u)$, równanie to nie jest rozwiązywalne. Rzeczywiście, jeżeli we wzorze (2-164) rozciągniemy granice całkowania od $-\infty$ do $+\infty$, to dla $|p| > 1$ musimy przyjąć $g(p) = 0$; ze wzoru (2-165) wynika natomiast, że przy dowolnie zadanej funkcji $f(u)$ funkcja $g(p)$ może przybierać wartości różne od zera również dla $|p| > 1$.

W związku z tym w praktyce zadowalamy się poszukiwaniem rozwiązań przybliżonych. W tym sensie zadanie syntezy charakterystyki promieniowania polega

na znalezieniu takiego rozkładu pola w aperturze o skończonych rozmiarach, który wytwarza charakterystykę promieniowania będącą najlepszym przybliżeniem zadanej charakterystyki przy ustalonym kryterium optymalizacji.

2.5.1. METODA PRZEKSZTAŁCENIA FOURIERA

Przy zadanej charakterystyce promieniowania $f(u)$ możemy, korzystając ze wzoru (2-165) obliczyć funkcję rozkładu $g(p)$. Jeśli teraz wykorzystamy tylko tę część funkcji rozkładu, która leży w przedziale $|p| \leq 1$, to odpowiadająca jej charakterystyka promieniowania będzie oczywiście tylko w przybliżeniu odpowiadała założonej charakterystyce. Równanie przybliżonej charakterystyki promieniowania znajdziemy podstawiając zależność (2-165) do wzoru (2-164), przy czym dla uniknięcia dwuznaczności zmienimy oznaczenie zmiennej całkowania w zależności (2-165) na u' ; otrzymujemy wówczas

$$f_a(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(u') e^{ip(u-u')} du' dp = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u') \frac{\sin(u-u')}{(u-u')} du' \quad (2-166)$$

Można wykazać [33], że funkcja $f_a(u)$ aproksymuje żadaną charakterystykę promieniowania w sensie najmniejszego średniego kwadratowego odchylenia. W tym sensie charakterystyka $f_a(u)$ jest charakterystyką optymalną, przy czym im większe są rozmiary apertury, tym uzyskane przybliżenie jest lepsze.

W przypadku syntezy charakterystyki promieniowania układów antenowych złożonych z dyskretnych elementów promieniujących możemy stosować podobne rozumowanie z tym, że zamiast z całki należy korzystać z szeregu Fouriera.

2.5.2. METODA WOODWARDA

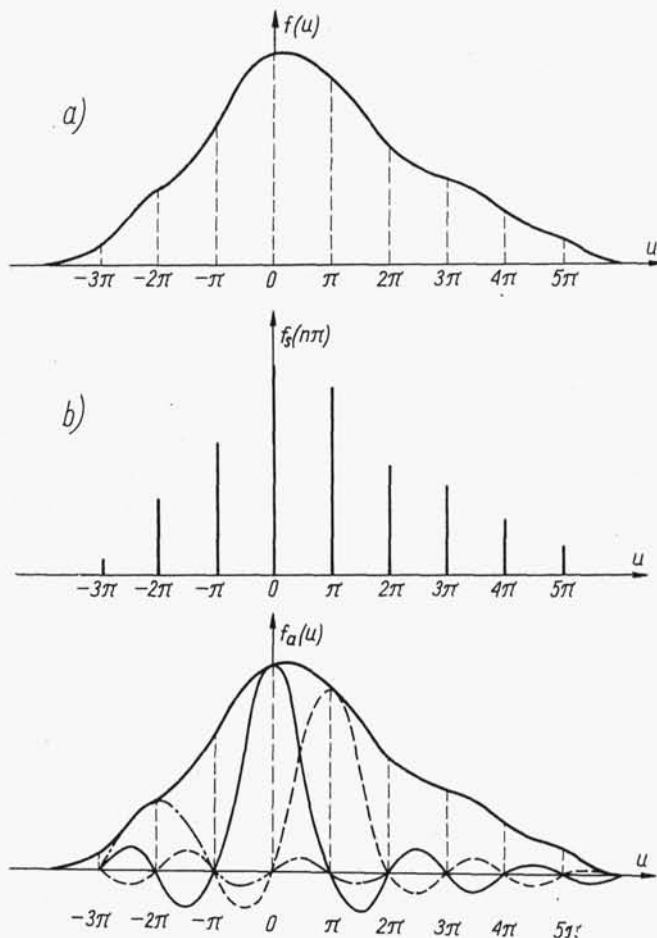
Najmniejsze średnie kwadratowe odchylenie nie jest jedynym kryterium umożliwiającym dokonanie syntezy charakterystyki promieniowania. Inna metoda aproksymacji żądanej charakterystyki promieniowania polega na składaniu jej ze skończonej liczby próbek. Ta metoda, zaproponowana przez Woodwarda, opiera się na znanym w teorii informacji twierdzeniu Kotielnikowa, które głosi: „jeżeli przebieg czasowy $f(t)$ nie zawiera składowych o częstotliwościach większych od W , to jest on w zupełności określony przez podanie jego rzędnych (próbek) w odstępach $\tau = 1/2W$ ”. Twierdzenie to w zastosowaniu do anten mówi, że charakterystyka promieniowania $f(u)$ anteny o skończonej aperturze jest w pełni określona przez podanie jej wartości w punktach odległych od siebie o π radianów. Na rys. 2-33a przedstawiono charakterystykę promieniowania $f(u)$ oraz punkty próbkowania $n\pi$; wartości próbek $f(n\pi)$, które określają charakterystykę promieniowania pokazano na rys. 2-33b.

Przybliżoną charakterystykę promieniowania $f_a(u)$ możemy zbudować z funkcji typu $\sin u/u$ przeskalowanych stosownie do wartości próbek (rys. 2-33c).

$$f_a(u) = \sum_{n=-N}^N f(n\pi) \frac{\sin(u-n\pi)}{u-n\pi} \quad (2-167)$$

przy czym maksymalną wartość N należy tak dobrać, aby zmienna u nie przekraczała zakresu charakterystyki mierzalnej, tzn. aby $-\frac{\pi l}{\lambda} \leq u \leq \frac{\pi l}{\lambda}$, stąd $|N| < l/\lambda$.

Funkcja $\sin u/u$ jest bardzo dogodna do konstruowania przybliżonej charakterystyki promieniowania. Przyjmuje ona wartość równą 1 w określonym punkcie próbkowania oraz wartości równe zero we wszystkich pozostałych punktach próbkowania.



Rys. 2-33. Synteza charakterystyki promieniowania metodą Woodwarda: a) zadana charakterystyka $f(u)$ z zaznaczonymi punktami próbkowania; b) wartości próbek; c) przybliżona charakterystyka $f_a(u)$ zbudowana z funkcji typu $\sin u/u$

Ponadto charakterystykę typu $\sin u/u$ można, jak wiemy, łatwo uzyskać przy równomiernym oświetleniu apertury. Rozkład pola w aperturze znajdziemy wstawiając zależność (2-167) do wzoru (2-165) i wykonując całkowanie

$$g(p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N f(n\pi) e^{-jn\pi p} \quad (2-168)$$

Rozkład pola w aperturze jest więc sumą tylu rozkładów częściowych, ile próbek pobrano z zadanej charakterystyki. Każdy rozkład częściowy jest rozkładem o stałej amplitudzie proporcjonalnej do wartości próbki i liniowo zmieniającej się fazie. Rozkład fazy wzdłuż apertury jest przy tym taki, że kierunek maksymalnego promieniowania n -tego rozkładu częściowo przypada dla $u = n\pi$.

Zasadnicza różnica między metodą przekształcenia Fouriera a metodą Woodwarda polega na tym, że pierwsza daje charakterystykę, której średnie kwadratowe odchylenie od zadanej charakterystyki jest najmniejsze, podczas gdy druga zapewnia charakterystykę pokrywającą się z zadaną charakterystyką w skończonej liczbie punktów. Zachowanie się syntetyzowanej charakterystyki między punktami próbkowania w metodzie Woodwarda nie jest kontrolowane. Średnie kwadratowe odchylenie przy metodzie Woodwarda może więc być większe niż przy metodzie przekształcenia Fouriera. Jednak kryterium najmniejszego średniego odchylenia kwadratowego nie we wszystkich przypadkach jest najlepszym kryterium zgodności charakterystyki syntetyzowanej z założoną.

Metoda przekształcenia Fouriera jest dogodniejsza w tych przypadkach, gdy zadana charakterystyka może być przedstawiona w postaci analitycznej i gdy wykonanie całkowania nie przedstawia trudności, natomiast metoda Woodwarda jest dogodniejsza wówczas, gdy zadana charakterystyka ma kształt skomplikowany, trudny do przedstawienia w postaci analitycznej.

Dla zilustrowania omówionych metod syntezy charakterystyki rozważymy konkretny przykład. Powiedzmy, że za pomocą apertury o długości $l = 100\lambda$ chcemy uzyskać charakterystykę promieniowania równomierną w przedziale $|\theta| \leq 1,75^\circ$ i równą zero poza tym przedziałem (rys. 2-34a). Równanie zadanej charakterystyki możemy więc zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} f(u) &= 1 \text{ w przedziale } -u_m \leq u \leq u_m \\ f(u) &= 0 \text{ (poza tym przedziałem)} \end{aligned}$$

przy czym $u_m = (\pi/l)\sin\theta_m = 9,6$.

Podstawiając do wzoru (2-166) zamiast $f(u)$ podaną wyżej funkcję otrzymujemy

$$f_a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-u_m}^{u_m} \frac{\sin(u-u')}{u-u'} du' = \frac{1}{\pi} [\text{Si}(u+u_m) - \text{Si}(u-u_m)]$$

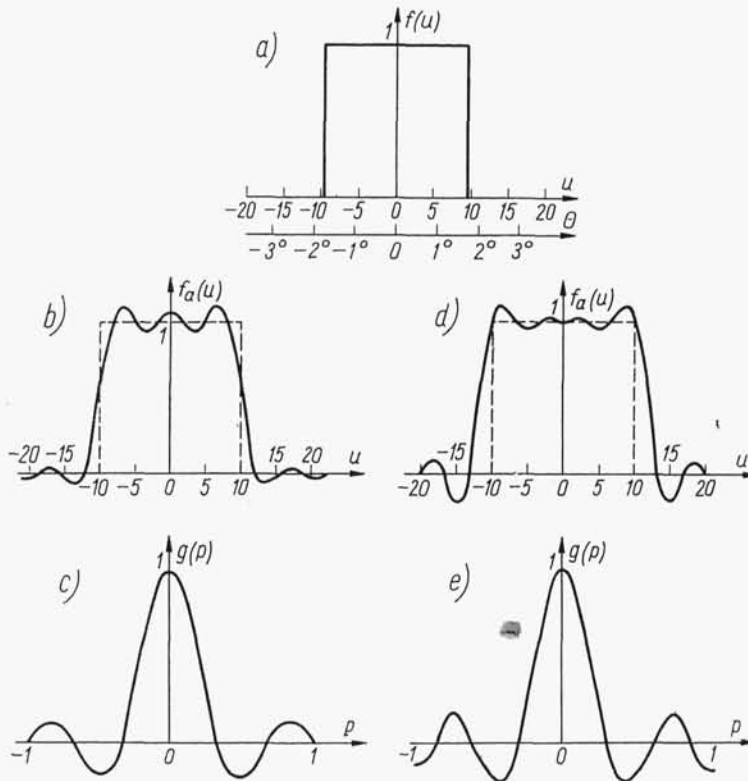
przy czym $\text{Si}(u)$ oznacza sinus całkowity. Wykres przybliżonej charakterystyki promieniowania uzyskanej metodą przekształcenia Fouriera przedstawiono na rys. 2-34b. Aby uzyskać taką charakterystykę promieniowania, rozkład pola w aperturze musi mieć kształt określony następującą zależnością:

$$g(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-u_m}^{u_m} e^{jup} du = \frac{\sin(pu_m)}{\pi p}$$

Wykres rozkładu pola w aperturze pokazano na rys. 2-34c.

Postaramy się teraz uzyskać tę samą charakterystykę promieniowania metodą Woodwarda. W obszarze żądanej charakterystyki mieści się 7 niezerowych próbek ($N = 3$); ze wzoru (2-167) otrzymujemy więc

$$f_a(u) = \sum_{n=-3}^3 \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi}$$



Rys. 2-34. Przykład syntezy charakterystyki promieniowania: a) zadana charakterystyka promieniowania; b) przybliżona charakterystyka promieniowania uzyskana metodą przekształcenia Fouriera; c) rozkład pola apertury odpowiadający charakterystyce przedstawionej na rys. b); d) przybliżona charakterystyka promieniowania uzyskana metodą Woodwarda; e) rozkład pola w aperturze odpowiadający charakterystyce przedstawionej na rys. d)

Wykres tej charakterystyki przedstawiono na rys. 2-34d. Rozkład pola zapewniający charakterystykę Woodwarda otrzymujemy ze wzoru (2-168)

$$g(p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-3}^3 e^{jn\pi p} = \frac{1}{2\pi} [1 + 2\cos(\pi p) + 2\cos(2\pi p) + 2\cos(3\pi p)]$$

Rozkład ten zilustrowano wykresem na rys. 2-34e.

2.5.3. UKŁADY ANTENOWE DOLPHA-CZEBYSZEWA

Jednym z ważnych zadań w zakresie syntezy charakterystyki promieniowania jest znalezienie rozkładu pola zapewniającego najmniejszą szerokość głównej wiązki promieniowania przy założonym poziomie listków bocznych. Dla współfazowych układów antenowych z równomiernie rozmieszczonymi elementami promieniującymi zadanie to zostało rozwiązane przez Dolpha na podstawie wielomianów Czebyszewa [8, 26, 33].

Rozważmy liniowy układ antenowy złożony z parzystej liczby $2N$ współfazowych elementów promieniujących. Zgodnie ze wzorem (2-148) charakterystyka promieniowania takiego układu wyraża się zależnością

$$f(\theta) = 2 \sum_{n=1}^N A_n \cos[(2n-1)u] \quad (2-169)$$

przy czym

$$u = \frac{\pi d}{\lambda} \cos \theta \quad \frac{\lambda}{2} \leq d < \lambda$$

Prawa strona zależności (2-169) jest wielomianem $2N-1$ stopnia ze względu na $\cos u$. Nasuwa się więc myśl, aby charakterystykę promieniowania rozważanego układu wyrazić za pomocą wielomianu Czebyszewa $2N-1$ stopnia. Wielomiany Czebyszewa można zdefiniować w następujący sposób:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos x) & \text{dla } |x| \leq 1 \\ \cosh(N \operatorname{arccosh} x) & \text{dla } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2-170)$$

Charakteryzują się one właściwościami:

- niezależnie od stopnia dla $x = 1$ przyjmują wartość równą 1 a dla $x = -1$ przyjmują wartość równą $(-1)^N$;
- dla wartości x leżących w przedziale $(-1, +1)$ wartości wszystkich wielomianów leżą między rzędnymi $+1$ i -1 ;
- wszystkie pierwiastki wielomianów leżą w przedziale $(-1, +1)$, a wszystkie ekstrema mają wartość ± 1 .

Jeśli więc charakterystykę promieniowania naszego układu wyrazimy za pomocą wielomianu Czebyszewa

$$f(\theta) = T_{2N-1}(z_0 \cos u) \quad (2-171)$$

to będzie ona miała następujące właściwości:

- wszystkie listki boczne będą miały jednakowy poziom równy $W_b = 1/T_{2N-1}(z_0)$;
- szerokość głównej wiązki promieniowania będzie najmniejsza przy założonym poziomie listków bocznych.

Amplitudy prądów w poszczególnych elementach znajdziemy przyrównując odpowiednie współczynniki wielomianu Czebyszewa (2-171) oraz sumy (2-169)

$$2 \sum_{n=1}^N A_n \cos[(2n-1)u] = T_{2N-1}(z_0 \cos u) \quad (2-172)$$

przy czym współczynnik z_0 wyraża się przez założony poziom listków bocznych

$$z_0 = \cosh\left(\frac{1}{2N-1} \operatorname{arccosh} \frac{1}{W_b}\right) \quad (2-173)$$

Dla przykładu znajdziemy amplitudę prądów w źródłach układu antenowego złożonego z 8 elementów przy założeniu, że poziom listków bocznych powinien wynosić -26 dB.

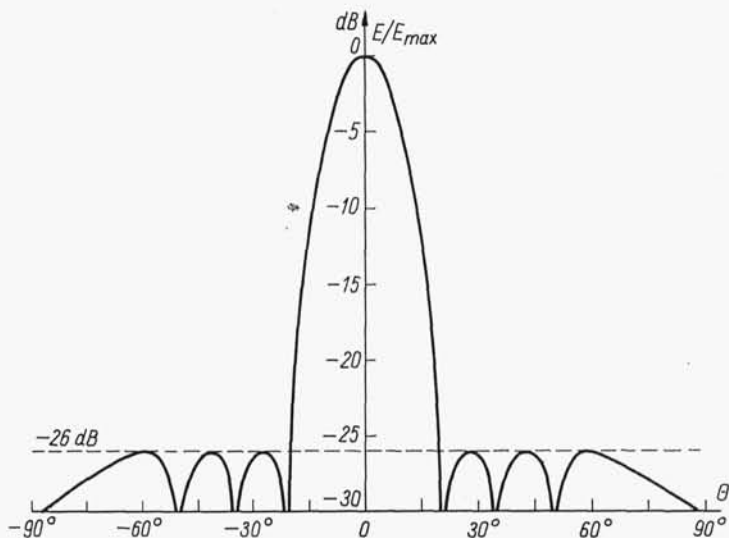
Obliczmy sumę po lewej stronie zależności (2-172) grupując wyrazy zawierające $\cos u$ w jednakowej potęgze

$$\begin{aligned} f(u) = & 64A_4 \cos^7 u + (16A_3 - 112A_4) \cos^5 u \\ & (4A_2 - 20A_3 + 56A_4) \cos^3 u + (A_1 - 3A_2 + 5A_3 - 7A_4) \cos u \end{aligned}$$

Wielomian Czebyszewa 7 stopnia ma postać

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

Porównując zgodnie ze wzorem (2-172) współczynniki wielomianu Czebyszewa i obliczonej wyżej sumy otrzymujemy układ równań z którego możemy wyznaczyć



Rys. 2-35. Charakterystyka promieniowania układu Czebyszewa ułożonego z 8 izotropowych elementów antenowych; poziom listków bocznych -26 dB

amplitudę prądów w źródłach. W szczególności z porównania współczynników przy najwyższej potęgze $\cos u$ otrzymujemy

$$64A_4 = 64z_0^7$$

skąd

$$A_4 = z_0^7$$

Dla przyjętego poziomu listków bocznych $W_b = 0,05$. Wstawiając tę wartość do wyrażenia (2-173) znajdujemy z_0

$$z_0 = \cosh\left(\frac{1}{7} \operatorname{arccosh} \frac{1}{0,05}\right) = 1,14$$

i wobec tego

$$A_4 = 1,14^7 = 2,47$$

W podobny sposób znajdujemy pozostałe współczynniki:

$$A_3 = 4,34 \quad A_2 = 6,62 \quad A_1 = 8,17$$

Względny rozkład amplitud prądów w poszczególnych źródłach jest następujący: 0,30; 0,53; 0,81; 1,00; 1,00; 0,81; 0,53; 0,30.

Charakterystykę promieniowania rozważanego układu przedstawiono na rys. 2-35.

2.6. WPŁYW BŁĘDÓW LOSOWYCH NA PARAMETRY ANTEN

Porównując zmierzoną charakterystykę promieniowania anteny z charakterystyką teoretyczną zawsze obserwujemy pewne rozbieżności, szczególnie w obszarze listków bocznych. Na ogół rozbieżności te nie są spowodowane błędami teorii, lecz faktem, że w praktyce nie jesteśmy w stanie uzyskać dokładnie założonego teoretycznie rozkładu pola w aperturze. Błędy w rozkładzie pola w aperturze możemy podzielić na błędy systematyczne i błędy losowe. Zajmiemy się teraz wpływem błędów losowych na charakterystykę promieniowania anteny. Zaczniemy od układów antenowych złożonych z dyskretnych elementów promieniujących.

Rozważmy liniowy układ antenowy złożony z N równomiernie rozmieszczonych izotropowych elementów promieniujących, który już analizowaliśmy w p. 2.4.1. Zespolona charakterystyka promieniowania tego układu wyraża się wzorem

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^N A_n e^{j[k(n-1)d \cos \theta + \vartheta_n]} \quad (2-174)$$

W ogólnym przypadku zarówno amplitudy jak i fazy prądów w poszczególnych elementach, a także ich położenia są obciążone błędami losowymi. Ograniczymy się tu jednak tylko do rozważenia wpływu błędów fazowych. Założymy więc, że fazę prądu w n -tym elemencie możemy przedstawić w postaci

$$\vartheta_n = \vartheta_{on} + \delta_n \quad (2-175)$$

przy czym ϑ_{on} oznacza fazę właściwą, a δ_n — błąd fazowy. Załóżmy dalej, że błędy fazowe mają rozkład normalny z wartością średnią równą zeru oraz że błędy fazowe w poszczególnych elementach są nieskorelowane. Warto jeszcze zauważyć, że wpływ błędów w położeniu elementów promieniujących można uwzględnić przez wprowadzenie ekwiwalentnego błędu fazowego.