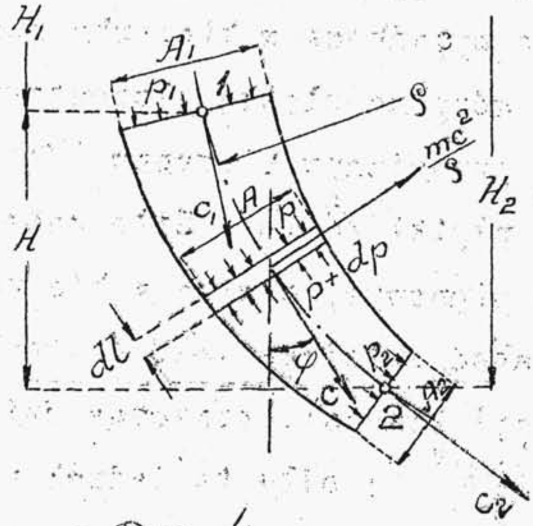
§ 4. Równania bilansu.

Przypuśćmy, że mamy przewód, przez który płynie woda /rys. 4/. Przypuśćmy również, że punkt 1, z którego woda płynie, jest zanurzony na głębokości H_1 od powierzchni wody w zbiorniku, jak również że punkt 2, z którego woda odpływa, zanurzony jest na H_2 od powierzchni wody. W punktach tych mamy również odpowiednie ciśnienia p_1 i p_2 i prędkości c_1 i c_2.



Rys. 4.

Weźmy pod uwagę cząstkę cieczy między punktami 1 i 2, przypuszczając zgodnie z naszemi założeniami, że woda płynie po osi przewodu. Grubość płytki elementarnej jest dl, zaś φ - kąt jaki tworzy z pionem normalna do płytki. Chodzi nam o ustalenie stosunków, jakie zachodzą między wielkościami, z któremi mamy do czynienia, t.j. H, c, p, l i φ. Chcemy ustalić bilans energji, którą posiada woda, przepływająca przez przewód.

Na cząsteczkę wody w przekroju środkowym działa z góry ciśnienie p , z dołu $p+dp$. Zbadajmy, jakie siły działają na tą cząsteczkę, a głównie jaka na nią działa wypadkowa w kierunku ruchu.

W kierunku ruchu z góry na płytkę elementarną działa siła Ap , w przeciwnym kierunku $A(p+dp)$ pozatem ciężar własny płytki $Adl\gamma$. Siła ostatnia działa w kierunku pionowym, a więc w kierunku ruchu wody będzie działać składowa $Adl\gamma\cos\varphi$ Ale woda płynie po linji krzywej, przyczem działa też siła odśrodkowa $\frac{mc^2}{\varrho}$; siła ta jednak niema żadnego wpływu na ruch wody w przewodzie, bo działa prostopadle do toru wody. Są to wszystkie siły, działające na wodę w przewodzie idealnie gładkim. Opór tarcia o chropowatość ścianek wyrażamy słupem wody H_f , zaś na cząsteczkę dl przypada tylko dH_f , działająca w kierunku przeciwnym do ruchu wody. Ażeby móc napisać równanie równowagi dla tych sił, musimy wysokość dH_f zamienić na siłę, co się da zrobić mnożąc dH_f przez $A\gamma$. Siły te, działające na cząsteczkę masy $A\gamma dl$ wody udzielą jej pewnego przyśpieszenia $\frac{dc}{dt}$, a więc równanie równowagi będzie:

$$A\frac{dl}{g}\gamma\frac{dc}{dt} = m\frac{dc}{dt} = Ap - A(p+dp) +$$

$$+ A\,dl\gamma\cos\varphi - A\gamma\,dH_f.$$

Otwierając nawias i redukując wyrazy otrzymamy:

$$-A\,dp + A\,dl\gamma\cos\varphi - A\gamma\,dH_f = A\frac{dl}{g}\gamma\frac{dc}{dt}.$$

Dzielimy obydwie strony równania przez $A\gamma$

$$dl\cos\varphi - \frac{dp}{\gamma} - dH_f = \frac{dl}{g}\cdot\frac{dc}{dt}.$$

$dl\cos\varphi$ jest to element wysokości równy dH oraz $\frac{dl}{dt}$ jest to szybkość c , a więc

$$dH - \frac{dp}{\gamma} - dH_f = \frac{c\,dc}{g}$$

To równanie określa nam związek między wchodzącemi weń wielkościami. Przez całkowanie przejdźmy od punktu 1 do punktu 2

$$\int_{H_1}^{H_2} dH - \int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\gamma} - \int_{0}^{H_f} dH_f = \int_{c_1}^{c_2}\frac{c\,dc}{g}$$

czyli

$$H_2 - H_1 - \left(\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma}\right) - H_f = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}.$$

Zamiast $H_2 - H_1$ wstawmy H i uporządkujmy wyrazy w nieco inny sposób:

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} + H - H_f \qquad /5/$$

w tej formie równanie to nazywa się równaniem bilansu i jak widzimy jest to nic innego jak równanie Bernoulli'ego. Energja, którą mamy na końcu przewodu $\left(\frac{c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}\right)$, zawarta w każdym kilogramie wody opuszczającej przewód jest równa energji, jaką mieliśmy na początku $\left(\frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma}\right)$ więcej energja jaką uzyskaliśmy dzięki spadkowi $(+H)$ mniej energja stracona na tarcie $(-H_f)$.

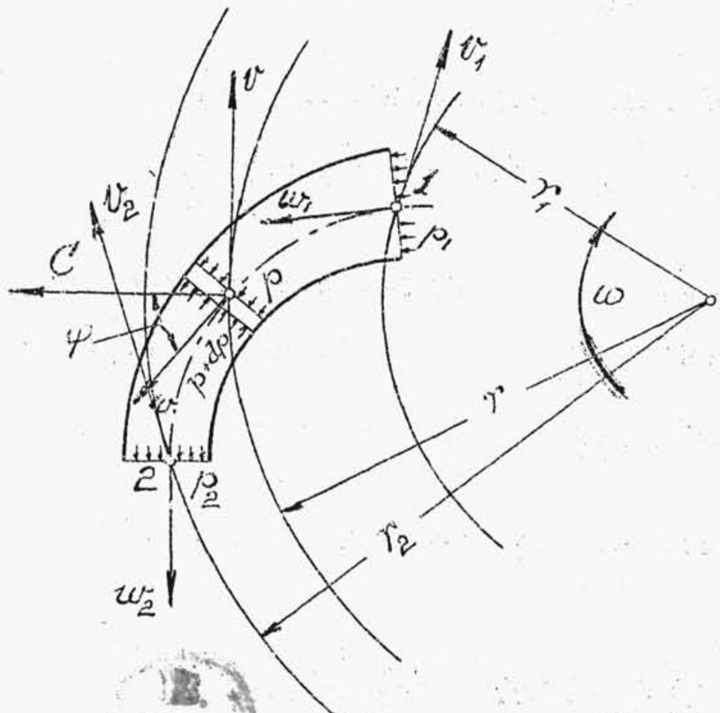
Rozpatrzmy teraz przewody, które są w ruchu. Przy ruchu prostolinjowym jednostajnym nie mamy żadnych nowych sił i całe równanie /5/ byłoby dlań ważne z zastrzeżeniem, że w nim prędkości są prędkościami względnemi. Dla prędkości względnych wprowadzimy nowe oznaczenie w. Wówczas równanie bilansu będzie

$$/6/ \qquad \frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} + H - H_f.$$

Takie jednak przewody nas mało winny obchodzić, gdyż turbin, których przewody są w ruchu prostolinjowym niema.

Przechodząc do turbin rzeczywistych musimy rozpatrzeć przepływ wody w przewodach wirujących.

Przypuśćmy, że przewód wirujący w płaszczyźnie poziomej jest symetryczny, to znaczy nie mamy żadnego spadku między punktem 1 i 2 /rys.5/.



Rys. 5.

Weźmy jak poprzednio pod uwagę elementarną płytkę cieczy między punktami 1 i 2 przewodu, zostawiając również te same oznaczenia. Przybędą nam tylko szybkości unoszenia v_1 i v_2 w odpowiednich punktach 1 i 2.

Elementarna cząstka wody będzie się znajdowała pod działaniem sił już opisanych poprzednio tylko że obecnie siła ciężkości działająca prostopadle do toru tej cząsteczki nie wywrze żadnego wpływu na jej ruch, zaś na miejsce tej siły przybywa siła odśrodkowa C , działająca na cząsteczkę wzdłuż promienia. Możemy więc napisać, że siły te nadają cząsteczce przyśpieszenie względne czyli

$$m\frac{dw}{dt} = \frac{A\,dl}{g}\gamma\frac{dw}{dt} = Ap - A(p+dp) - A\gamma\, dH_f + C\cos\varphi,$$

lecz siła C wyraża się przez

$$C = m r\omega^2 = \frac{A\,dl}{g}\gamma\, r\omega^2.$$

Podstawiając do równania poprzedniego mamy:

$$\frac{A\,dl}{g}\gamma\frac{dw}{dt}=Ap-A(p+dp)-A\gamma dH_f+\frac{A\,dl}{g}\gamma r\omega^2\cos\varphi;$$

rozwiązujemy to równanie i podstawiamy na miejsce $dl\cos\varphi=dr$ oraz $\frac{dl}{dt}=w$, wówczas otrzymamy:

$$\frac{A}{g}\gamma\, r\,dr\,\omega^2-A\,dp-A\gamma\, dH_f=\frac{A\gamma}{g}w\,dw.$$

Podzielmy obydwie strony równania przez $A\gamma$ a otrzymamy:

$$\frac{r\,dr\,\omega^2}{g}-\frac{dp}{\gamma}-dH_f=\frac{w\,dw}{g};$$

jest to równanie różniczkowe, określające ruch cieczy pod wpływem sił działających na nie. Całkując od p. 1 do p. 2 czyli od r_1 do r_2 otrzymamy:

$$\frac{\omega^2}{2g}(r_2^2-r_1^2)-\left(\frac{p_2}{\gamma}-\frac{p_1}{\gamma}\right)-H_f=\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}$$

ωr jest prędkością obwodową; wprowadzamy dla niej oznaczenia $\omega r_1=v_1$, $\omega r_2=v_2$, wówczas

$$\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}-\left(\frac{p_2}{\gamma}-\frac{p_1}{\gamma}\right)-H_f=\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}.$$

Przedstawmy równanie to w postaci równania bilansu. W punkcie 1 mieliśmy energję ruchu $\frac{w_1^2}{2g}$ oraz ciśnienia p_1/γ, w punkcie 2 energję ruchu $\frac{w_2^2}{2g}$

oraz ciśnienia p_2/γ. Przybyła nam po drodze energja $\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$ dzięki ruchowi obrotowemu, straciliśmy z powodu tarcia H_f ,a więc równanie tych energji będzie

$$\frac{w_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}=\frac{w_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}-H_f+\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}.$$

Widzimy z tego, że jest to równanie zupełnie analogiczne do tego, jakie otrzymaliśmy dla ruchu prostolinjowego przewodu tylko tu jest uwzględniona dodatkowa energja $\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$.

Jeśli przewód nie leży w płaszczyźnie poziomej i mamy jeszcze między punktami 1 i 2 spadek H , to musimy go uwzględnić w równaniu bilansu i wówczas otrzymujemy:

$$/7/\quad \frac{w_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}=\frac{w_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}-H_f+\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}+H$$

Wyraz $\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$ przypomina nam zjawisko następujące. Jeżeli mamy naczynie napełnione wodą wirujące dokoła swej osi, to powierzchnia wody, jak wiadomo w naczyniu przyjmuje kształt paraboloidy obrotowej. Wiadomo również, że biorąc punkty na paraboloidzie odległe od osi obrotu o r_1 i r_2 , to różnica ich

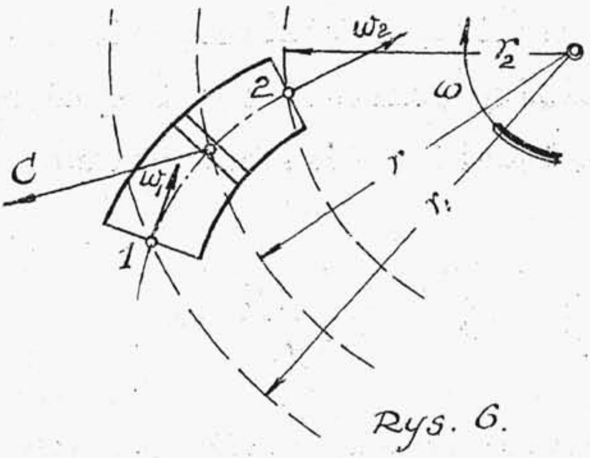
---

nP.234

poziomów wywołana przez wirowanie wyraża się w ten sposób

$$H = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\omega^2}{2g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

a więc jest to energja H (różnica poziomów), którą trzeba było dodatkowo uwzględnić w równaniu bilansu. Powstaje jeszcze ciekawa kwestja jak przedstawi się rachunek bilansu przy zamianie punktów 1 i 2, to znaczy jeżeli przewód będzie miał kształt poprzedni lecz woda dążyć będzie przewodem do osi obrotu /rys. 6/, a punkt wejścia wody 1 i wyjścia 2 odwrotne niż poprzednio. Siła odśrodkowa działałaby tu opóźniająco na ruch cieczy, a więc w równaniu poprzedniem trzebaby wstawić



Rys. 6.

$$-\int \frac{r\,dr\,\omega^2}{g}$$

granice całkowania byłyby od r_2 do r_1, pozatem wszystko pozostałoby bez zmiany. Ale wiadomo że

$$-\int_{r_2}^{r_1} = \int_{r_1}^{r_2}$$

a więc otrzymalibyśmy dokładnie to samo równanie. Ogólnie więc biorąc równanie /7/ jest ważne dla każdego przebiegu wody w przewodach wirujących, jeżeli woda płynie od p. 1 do p. 2.

Liczbowo dla każdego przebiegu da ono inne wyniki, bo dla ostatnio rozpatrywanego wypadku wyraz $v_2^2 - v_1^2$ da nam wielkość negatywną.

Mając tych kilka równań możemy rozwiązywać niektóre ciekawe zadania. Przypuśćmy, że mamy turbinę wodną, innemi słowy szereg wirujących przewodów; średnica wewnętrzna wynosi 500 m/m., zewnętrzna 750 m/m.; przekrój wejściowy od wewnątrz ma 0,4 m^2, ciśnienie wejściowe 3 atm. wirnik daje 150 obr./min. prędkość wejściowa $w_1 = 5$ m/sek. Woda uchodzi z wirnika w jednym wypadku do ciśnienia atmosferycznego, w drugim wypadku p_2 wynosi 50% próżni t.j. ciśnienie 5 mtr. abs. słupa wody. Jak wielki winien być przekrój ΣA_2 ? Nie bierzemy tu pod uwagę oporu tarcia H_r oraz zakładamy, że dla ciągłości ruchu przewody mają być zapełnione całkowicie wodą. Czytelnik może rozwiązać zadanie to samo dla zamienionych punktów wejścia i wyjścia.

§ 5 Teorja reakcji.

A. Siła reakcji przewodów stałych.

Na teorji reakcji opiera się obliczenie turbin wodnych. Przypuśćmy że mamy przewód, przez który płynie woda. Zakładamy że łopatka znajduje się w spoczynku, a więc mamy prędkości bezwzględne

B.W.