Korzyść wynikająca z budowy takich złożonych układów polega na tym, że te same elementy są wykorzystywane do realizacji jednocześnie m funktorów.

Wiemy, że układ elektryczny może być realizacją funktora lub pewnej kombinacji funktorów, lecz nie może być realizacją wyrażenia sensownego. Jednakże ze względów stylistycznych będziemy czasem używali skróconego zwrotu: "układ elektryczny realizujący dane wyrażenie" zamiast zwrotu: "układ elektryczny realizujący funktor danego wyrażenia", pamiętając przy tym, że taki skrócony zwrot nie może być interpretowany dosłownie.

117. _Przekształcanie wyrażeń sensownych._ Przekształcanie danego wyrażenia sensownego na inferencyjnie mu równoważne odbywa się na ogół w wielu kolejnych etapach, podobnie jak w algebrze liczb. Możliwość stopniowego przekształcania wyrażeń sensownych opiera się na następującym twierdzeniu.

Jeśli pewne wyrażenie sensowne A jest częścią wyrażenia sensownego C i pewne wyrażenie sensowne B jest inferencyjnie równoważne wyrażeniu A, zaś po podstawieniu B na miejsce A do wyrażenia C otrzymujemy pewne wyrażenie D, to D jest inferencyjnie równoważne C.

Mając pewien zbiór, stosunkowo prostych par wyrażeń sensownych, inferencyjnie równoważnych, możemy na podstawie tego twierdzenia przekształcać stopniowo wyrażenia sensowne dowolnie skomplikowane, tworząc w ten sposób łańcuchy wyrażeń inferencyjnie równoważnych. Budowę każdego takiego łańcucha, rozpoczynającego się od wyrażenia danego, kontynuujemy tak długo, aż, bądź dojdziemy do wyrażenia, którego budowa spełnia określone wymagania, bądź też utworzymy taki zespół wyrażeń, których realizacje elektryczne będą stanowiły dostateczną podstawę do wyboru najkorzystniejszego rozwiązania konstrukcyjnego.

Możliwości wyrażania pewnych funktorów przez inne, uznawane dowolnie za podstawowe, są nader liczne, tym niemniej jednak ograniczone. Gdybyśmy chcieli wszystkie funktory wyrazić za pomocą jednego tylko funktora, to przekonalibyśmy się przede wszystkim, że niepodobna jest dokonać tego za pomocą żadnego funktora jednoargumentowego. Spośród funktorów dwuargumentowych można użyć bądź dyzjunkcji, bądź funktora nr 7. Jednakże możliwości te nie są dla nas interesujące, ponieważ żaden z wymienionych funktorów nie ma dostatecznie prostej realizacji elektrycznej. Za pomocą żadnego innego funktora dwuargumentowego nie można wyrazić wszystkich innych funktorów.

Przy próbie zastosowania dwóch funktorów możliwości wyboru są wieksze. Można np. wszystkie funktory wyrazić za pomocą bądź negacji i koniunkcji, bądź negacji i alternatywy, bądź alternatywy wyłączającej i koniunkcji, bądź alternatywy i alternatywy wyłączającej itd. Z punktu widzenia zastosowań w maszynach liczących interesujące są takie pary, w których jednym z funktorów podstawowych jest alternatywa wyłączająca.

Najbardziej rozpowszechnione jest stosowanie trzech funktorów podstawowych, mianowicie alternatywy, koniunkcji i negacji. System ten jest często stosowany w pracach teoretycznych i na ogół dobrze nadaje się do zastosowań w elektrotechnice. W zakresie realizacji przekaźnikowej system ten jest szczególnie ważny, ponieważ, jak widzieliśmy, realizacje alternatywy, koniunkcji i negacji są w tym przypadku bardzo proste. W zakresie układów prostownikowych realizacja negacji jest stosunkowo skomplikowana, tym niemniej jednak i w tym zakresie zastosowań system wyrażania wszelkich funktorów za pomocą alternatywy, koniunkcji i negacji jest szeroko stosowany ze względu na swe zalety teoretyczne.

Poniżej przytoczone są niektóre prawa logiczne pozwalające na stopniowe przekształcanie wyrażeń sensownych na inferencyjnie równoważne oraz na eliminację wszystkich funktorów poza wymienionymi trzema, przyjętymi za podstawowe.

1. Prawa przemienności:

dla alternatywy

$$\vdash (A \vee B) \equiv (B \vee A), \tag{1.1}$$

dla koniunkcji

$$\vdash AB \equiv BA, \tag{1.2}$$

dla równoważności

$$\vdash (A \equiv B) \equiv (B \equiv A), \tag{1.3}$$

dla alternatywy wyłączającej

$$\vdash (A \oplus B) \equiv (B \oplus A), \tag{1.4}$$

dla dyzjunkcji

$$\vdash (A/B) \equiv (B/A). \tag{1.5}$$

Opisaną przez powyższe pięć praw właściwość możemy wyrazić słownie w ten sposób, iż wartość logiczna wyrażenia sensownego, utworzonego za pomocą funktora spełniającego prawo przemienności, nie zależy od porządku zmiennych zdaniowych.

2. Prawa łączności:

dla alternatywy

$$\vdash [(A \vee B) \vee C] \equiv [A \vee (B \vee C)], \tag{1.6}$$

dla koniunkcji

$$\vdash (AB)\, C \equiv A\, (BC), \tag{1.7}$$

dla alternatywy wyłączającej

$$\vdash [(A \oplus B) \oplus C] \equiv [A \oplus (B \oplus C)], \tag{1.8}$$

dla równoważności

$$\vdash [(A \equiv B) \equiv C] \equiv [A \equiv (B \equiv C)]. \tag{1.9}$$

Skoro sposób umieszczenia nawiasów okrągłych jest obojętny, to można w ogóle je pomijać. Wobec tego wyrażenia

$$A \vee B \vee C, \ ABC, \ A \oplus B \oplus C, \ A \equiv B \equiv C,$$

podobnie jak wyrażenia

$$A \vee B \vee C \vee D, \ ABCD, \ A \oplus B \oplus C \oplus D, \ A \equiv B \equiv C \equiv D$$

i analogicznie zbudowane wyrażenia o większej liczbie zmiennych są wyrażeniami sensownymi. Nie wolno natomiast pomijać nawiasów, gdy funktor dwuargumentowy, jak np. implikacja, nie spełnia prawa przemienności. Wyrażenie

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow C$$

znaczy co innego, niż

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),$$

zaś wyrażenie

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

w ogóle nic nie znaczy.

Korzystając z prawa przemienności i z prawa łączności, właściwości ostatnio wymienionych czterech funktorów można opisać w sposób następujący. Alternatywa dowolnej liczby zmiennych zdaniowych jest prawdziwa wówczas, gdy chociażby jedna ze zmiennych jest prawdziwa, koniunkcja jest prawdziwa wówczas i tylko wówczas, gdy wszystkie zmienne są prawdziwe, alternatywa wyłączająca jest prawdziwa, gdy liczba zmiennych prawdziwych jest nieparzysta, równoważność nieparzystej liczby zmiennych zdaniowych jest inferencyjnie równoważna alternatywie wyłączającej tychże zmiennych, równoważność parzystej liczby zmiennych zdaniowych jest inferencyjnie równoważna negacji alternatywy wyłączającej tychże zmiennych.

3. Prawa rozdzielności:
koniunkcji względem alternatywy

$$\vdash A\,(B \vee C) \equiv (AB \vee AC), \qquad (1.10)$$

alternatywy względem koniunkcji

$$\vdash (A \vee BC) \equiv (A \vee B)(A \vee C). \qquad (1.11)$$

4. Prawo podwójnego przeczenia:

$$\vdash A \equiv \bar{\bar{A}}. \qquad (1.12)$$

5. Prawa absorpcji:
dla alternatywy

$$\vdash (A \vee A) \equiv A, \qquad (1.13)$$

$$\vdash (A \vee F) \equiv A, \qquad (1.14)$$

$$\vdash (A \vee V) \equiv V, \qquad (1.15)$$

dla koniunkcji

$$\vdash AA \equiv A, \tag{1.16}$$

$$\vdash AV \equiv A, \tag{1.17}$$

$$\vdash AF \equiv F. \tag{1.18}$$

6. Prawa stałej wartości logicznej:
dla alternatywy prawo wyłączonego środka

$$\vdash (A \vee \bar{A}) \equiv V \tag{1.19}$$

lub krócej

$$\vdash A \vee \bar{A}; \tag{1.20}$$

dla koniunkcji prawo sprzeczności

$$\vdash A\bar{A} \equiv F \tag{1.21}$$

lub krócej

$$\vdash \overline{A\bar{A}}. \tag{1.22}$$

7. Prawa de Morgana:
dla dwóch zmiennych

$$\vdash \overline{A \vee B} \equiv \bar{A}\bar{B} \tag{1.23}$$

oraz

$$\vdash \overline{AB} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}, \tag{1.24}$$

dla trzech zmiennych

$$\vdash \overline{A \vee B \vee C} \equiv \bar{A}\bar{B}\bar{C} \tag{1.25}$$

oraz

$$\vdash \overline{ABC} \equiv \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \tag{1.26}$$

8. Prawa zastępowania funktorów:
dla implikacji

$$\vdash (A \longrightarrow B) \equiv (\bar{A} \vee B) \tag{1.27}$$

oraz

$$\vdash(A \longrightarrow B) \equiv AB \vee \bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B}, \qquad (1.28)$$

dla równoważności

$$\vdash(A \equiv B) \equiv (A \longrightarrow B)(B \longrightarrow A) \qquad (1.29)$$

oraz

$$\vdash(A \equiv B) \equiv (AB \vee \bar{A}\bar{B}),$$

dla alternatywy wyłączającej

$$\vdash(A \oplus B) \equiv \overline{A \equiv B} \qquad (1.31)$$

oraz

$$\vdash(A \oplus B) \equiv (A\bar{B} \vee \bar{A}B), \qquad (1.32)$$

dla dyzjunkcji

$$\vdash(A/B) \equiv \overline{A \vee B} \qquad (1.33)$$

oraz

$$\vdash(A/B) \equiv \bar{A}\bar{B}. \qquad (1.34)$$

Prawdziwość każdego z wymienionych praw można stwierdzić metodą tabliczkową. Poza tym można im nadać interpretację elektryczną wykreślając dla każdego schematy dwóch układów, z których jeden realizuje funktor wyrażenia stojącego po lewej stronie znaku równości, drugi zaś - wyrażenie po prawej stronie. Porównanie tych schematów wskazuje na identyczność działania układów. Interpretacje elektryczne przytoczonych praw są niezmiernie pouczające i przeważnie bardzo proste. Przykłady niektórych interpretacji bardziej skomplikowanych są pokazane na rys. 1-6.

Stosowanie wymienionych praw do przekształcania wyrażeń sensownych na inferencyjnie równoważne staje się ułatwione, jeśli wprowadzimy pojęcia pomocnicze eliminacji zmiennych i rozwijania wyrażeń względem określonych zmiennych. Niechaj mamy np. wyrażenie $AB \vee A\bar{B}$. Stosując prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy (1.10), otrzymamy

$$A(B \vee \bar{B}),$$

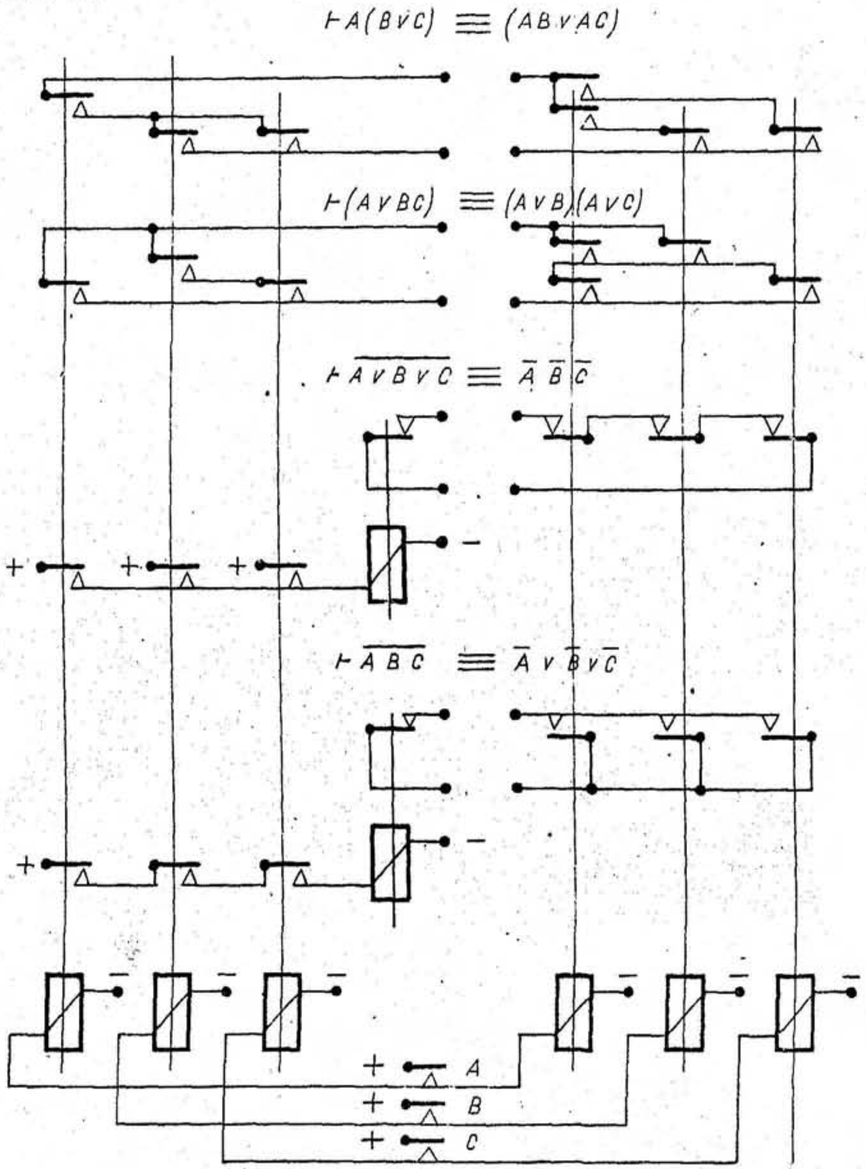
a stąd na podstawie prawa wyłączonego środka (1.19):

AV

i na podstawie prawa absorpcji (1.17)

A.

Zatem wyrażenie $AB \vee A\bar{B}$ jest inferencyjnie równoważne zdaniu A.



Rys. 1-6. Interpretacja elektryczna praw rozdzielności i praw de Morgana

W każdym z zastosowanych przekształceń pozostawimy czytelnikowi stwierdzenie czy prawa, na które powołujemy się, są wykorzystywane od lewej strony ku prawej, czy od prawej ku lewej. Rozpatrzmy jeszcze wyrażenie $\bar{A}(BC \longrightarrow C)$. Po przekształceniu

na podstawie	otrzymuje się
(1.28)	$\bar{A}(BCC \vee \overline{BC}C \vee \overline{BC}\bar{C})$,
(1.16)	$\bar{A}(BC \vee \overline{BC}C \vee \overline{BC}\bar{C})$,
(1.10)	$\bar{A}[BC \vee \overline{BC}(C \vee \bar{C})]$,
(1.19)	$\bar{A}(BC \vee \overline{BC}V)$,
(1.17)	$\bar{A}(BC \vee \overline{BC})$,
(1.19)	$\bar{A}V$,
(1.17)	$\bar{A}$.

Widzimy, że wartości logiczne przytoczonych tytułem przykładu wyrażeń, z których jedno zawiera dwie zmienne zdaniowe, drugie - trzy, zależą efektywnie od wartości logicznej jednej tylko zmiennej. Pozostałe zmienne będziemy wobec tego nazywali nieefektywnymi. Eliminacja zmiennych nieefektywnych prowadzi do znacznych na ogół uproszczeń realizacji elektrycznych.

Odwrotna czynność, tzn. rozwijanie wyrażenia względem pewnych zmiennych powoduje wprowadzanie zmiennych nieefektywnych. Bywa to potrzebne w toku przekształceń. Rozwijanie opiera się na stosowaniu praw absorpcji i praw stałej wartości logicznej. Na przykład rozwinięcie wyrażenia $A \oplus B$ względem zmiennej nieefektywnej C możemy przeprowadzić w sposób następujący:

na podstawie	otrzymuje się
(1.32)	$A\bar{B} \vee \bar{A}B$,
(1.17)	$A\bar{B} \vee \bar{A}B)V$,
(1.19)	$(A\bar{B} \vee \bar{A}B)(C \vee \bar{C})$.

Dalsze przekształcenia przeprowadza się na podstawie prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy.

Wyrażeń inferencyjnie równoważnych danemu a napisanych za pomocą tego samego zespołu funktorów podstawowych jest wiele. Wśród nich specjalnie interesujące teoretycznie są wyrażenia o tzw. postaciach normalnych, a wśród tych z kolei najważniejszą z punktu widzenia zastosowań jest postać, którą będziemy nazywali kanoniczną. Pewne znaczenie ma również postać, którą będziemy nazywali parakanoniczną.

Wyrażenie o n zmiennych zdaniowych w postaci kanonicznej jest alternatywą co najwyżej 2^n wyrażeń sensownych, które będziemy nazywali wyrazami kanonicznymi. Każdy wyraz kanoniczny jest koniunkcją wszystkich n zmiennych zdaniowych, z których k jest negowanych, przy czym k może przybierać wszelkie wartości od 0 do n. Dla określonej kombinacji wartości logicznych zmiennych zdaniowych tylko jeden wyraz kanoniczny jest prawdziwy. Z tego wynika, że dwa wyrażenia w postaci kanonicznej, które różnią się od siebie chociażby o jeden wyraz, nie mogą być inferencyjnie równoważne.

Ze względu na przemienność i łączność alternatywy dowolne dwa wyrażenia o postaci kanonicznej, składające się z tych samych wyrazów, są inferencyjnie równoważne. Wobec tego można w ogóle nie brać pod uwagę kolejności w jakiej występują wyrazy kanoniczne. Ze względu zaś na przemienność i łączność koniunkcji kolejność zmiennych zdaniowych w każdym wyrazie kanonicznym jest też obojętna.

Tablica 1-3 zawiera zestawienie wszystkich wyrażeń o dwóch zmiennych zdaniowych w postaci kanonicznej. Łatwo zauważyć, że między wyrazami kanonicznymi a jedynkami w tablicy definicyjnej 1-2 zachodzi odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna. Na podstawie tej odpowiedniości, mając definicję funktora, można natychmiast napisać postać kanoniczną tworzonego przezeń wyrażenia i odwrotnie, dla każdego wyrażenia w postaci kanonicznej można bez trudu napisać definicję tablicową.

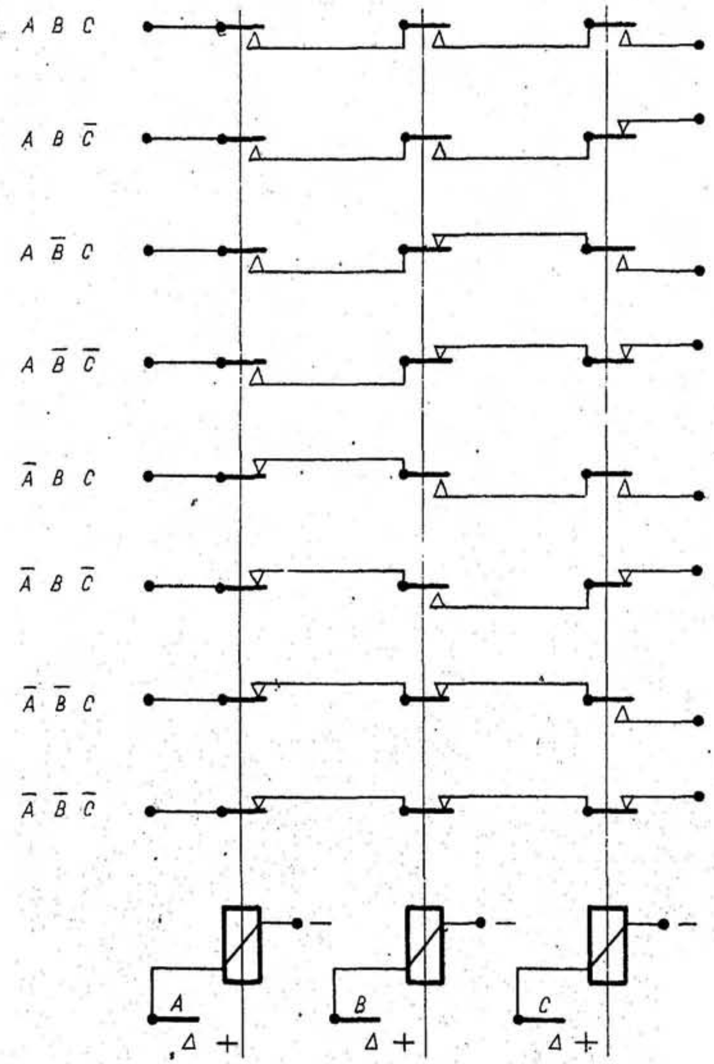
Wyrażenie stale prawdziwe o n zmiennych zdaniowych jest alternatywą wszystkich 2^n wyrazów kanonicznych, zaś w innych wyrażeniach sensownych o tej samej liczbie zmiennych brak jest niektórych wyrazów. Negacja dowolnego wyrażenia jest alternatywą wyrazów brakujących. Wyrażenie stale fałszywe nie ma postaci kanonicznej.

T a b l i c a 1-3

Postacie kanoniczne i postacie parakanoniczne funktorów dwuargumentowych

Nr funktora	Postać kanoniczna	Postać parakanoniczna
0		$(A \vee B)(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee B)(\bar{A} \vee \bar{B})$
1	$\bar{A}\bar{B}$	$(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee B)(\bar{A} \vee \bar{B})$
2	$\bar{A}B$	$(A \vee B)(\bar{A} \vee B)(\bar{A} \vee \bar{B})$
3	$\bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B}$	$(\bar{A} \vee B)(\bar{A} \vee \bar{B})$
4	$A\bar{B}$	$(A \vee B)(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee \bar{B})$
5	$A\bar{B} \vee \bar{A}\bar{B}$	$(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee \bar{B})$
6	$A\bar{B} \vee \bar{A}B$	$(A \vee B)(\bar{A} \vee \bar{B})$
7	$A\bar{B} \vee \bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B}$	$(\bar{A} \vee \bar{B})$
8	AB	$(A \vee B)(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee B)$
9	$AB \vee \bar{A}\bar{B}$	$(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee B)$
10	$AB \vee \bar{A}B$	$(A \vee B)(\bar{A} \vee B)$
11	$AB \vee \bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B}$	$(\bar{A} \vee B)$
12	$AB \vee A\bar{B}$	$(A \vee B)(A \vee \bar{B})$
13	$AB \vee A\bar{B} \vee \bar{A}\bar{B}$	$(A \vee \bar{B})$
14	$AB \vee A\bar{B} \vee \bar{A}B$	$(A \vee B)$
15	$AB \vee A\bar{B} \vee \bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B}$	-

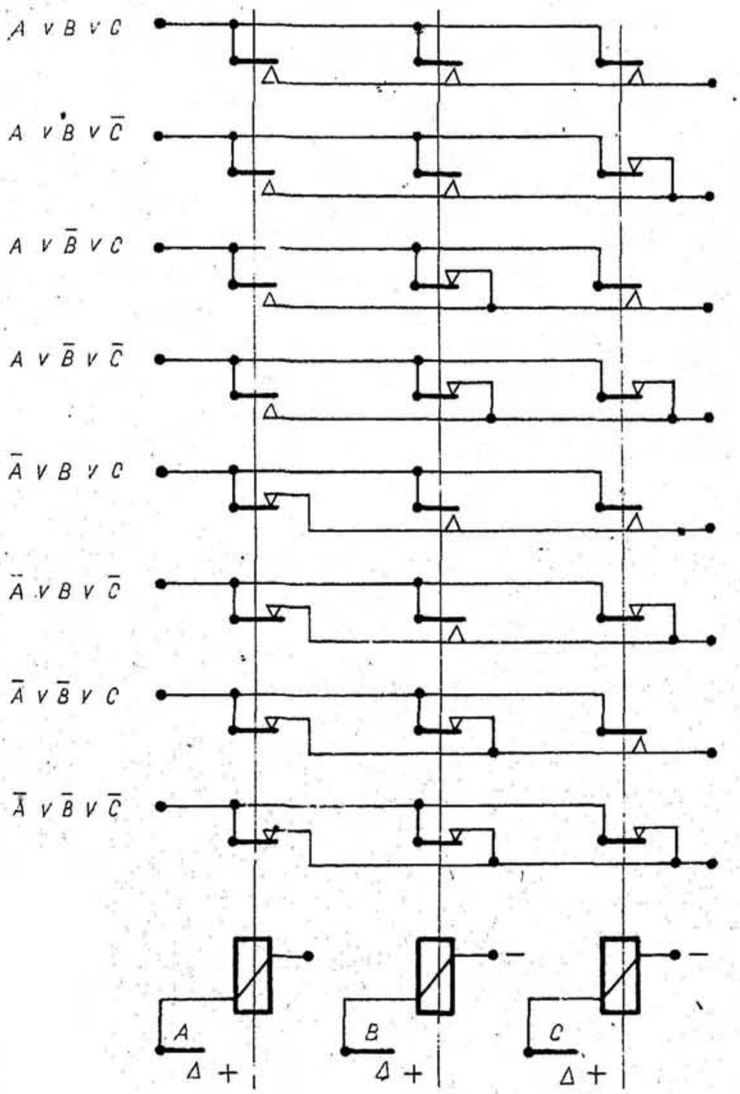
Postać parakanoniczna wyrażenia sensownego powstaje z postaci kanonicznej przez dwukrotne zastosowanie praw de Morgana. Wyrażenie o n zmiennych zdaniowych w postaci parakanonicznej jest koniunkcją co najwyżej 2^n wyrażeń sensownych, które będziemy nazywali wyrazami parakanonicznymi. Każdy wyraz parakanoniczny jest alternatywą wszystkich n zmiennych zdaniowych, z których m jest negowanych, przy czym m może przybierać wszelkie wartości od 0 do n.



Rys. 1-7. Schemat układu przekaźnikowego realizującego funktory trójargumentowych wyrazów kanonicznych

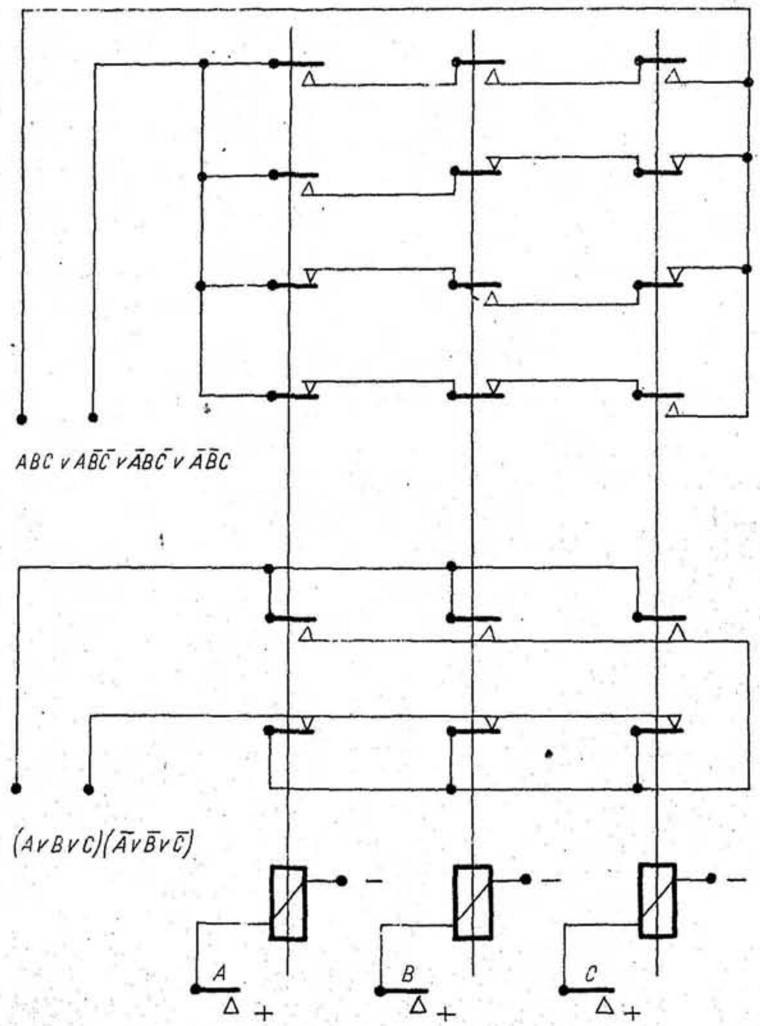
Suma liczby wyrazów kanonicznych i liczby wyrazów parakanonicznych jest 2^n, zatem dla danej liczby zmiennych jest to wartość stała. Okoliczność ta czasem ułatwia znalezienie najekonomiczniejszego rozwiązania konstrukcyjnego, gdyż im mniej jest wyrazów, tym mniej elementów trzeba do realizacji elektrycznej.

Rysunek 1-7 zawiera schematy realizacji przekaźnikowych dla funktorów trójargumentowych wyrazów kanonicznych, a rys. 1-8 analogiczne schematy dla wyrazów parakanonicznych. Czytelnik łatwo ułoży podobne schematy dla innej liczby zmiennych zdaniowych.



Rys. 1-8. Schemat układu przekaźnikowego realizującego funktory trójargumentowych wyrazów parakanonicznych

Na rysunku 1-9 pokazane są dwa przykłady realizacji przekaźnikowych dla funktorów dwóch wyrażeń, jednego w postaci kanonicznej, drugiego w postaci parakanonicznej. Jak widać, realizacja postaci kanonicznej polega na szeregowym łączeniu układów odpowiadających poszczególnym wyrazom kanonicznym, realizacja zaś postaci parakanonicznej - na równoległym łączeniu układów odpowiadających poszczególnym wyrazom parakanonicznym.



Rys. 1-9. Przykłady realizacji dwóch funktorów trójargumentowych

Zaznaczaliśmy już, że każde wyrażenie sensowne można przekształcić na inferencyjnie równoważne wyrażenie o postaci kanonicznej. Z tego wynika, że dwa wyrażenia sensowne dające się przekształcić na tę samą postać kanoniczną są inferencyjnie równoważne. Na tym spostrzeżeniu opiera się metoda porównywania dwóch wyrażeń sensownych. Jeśli po sprowadzeniu obu wyrażeń do postaci kanonicznej otrzymamy to samo wyrażenie, to wyrażenia porównywane są inferencyjnie równoważne, jeśli otrzymamy różne postacie kanoniczne, to wyrażenia porównywane nie są inferencyjnie równoważne.

Sprawdźmy, dla przykładu, czy wyrażenia $A \equiv B \equiv C$ i $A \oplus B \oplus C$ są równoważne. Dla pierwszego

na podstawie	otrzymuje się
(1.30)	$(A \equiv B)\,C \vee \overline{A \equiv B}\,\bar{C}$,
(1.31)	$(A \equiv B)\,C \vee (A \oplus B)\,\bar{C}$,
(1.30)	$(AB \vee \bar{A}\bar{B})C \vee (A \oplus B)\,\bar{C}$,
(1.32)	$(AB \vee \bar{A}\bar{B})C \vee (A\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{C}$,
(1.10)	$ABC \vee \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C}$.

Dla drugiego

na podstawie	otrzymuje się
(1.32)	$(A \oplus B)\bar{C} \vee \overline{A \oplus B}\,C$,
(1.31)	$(A \oplus B)\bar{C} \vee (A \equiv B)C$,
(1.32)	$(A\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{C} \vee (A \equiv B)C$,
(1.30)	$(A\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{C} \vee (AB \vee \bar{A}\bar{B})C$,
(1.10)	$A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee ABC \vee \bar{A}\bar{B}C$.

Otrzymane wyrażenia zawierają te same wyrazy kanoniczne, są zatem inferencyjnie równoważne:

$$\vdash (A \equiv B \equiv C) \equiv (A \oplus B \oplus C).$$

<u>118. Zestawianie układów realizujących zadane funktory.</u> Nazwijmy podstawowymi układy elektryczne realizujące funktory podstawowe. Zestawiając układy podstawowe odpowiednio do struktury różnych wyrażeń sensownych będziemy mogli realizować pośrednio funktory tych wyrażeń.