dwa wyrażenia sensowne dające się przekształcić na tę samą postać kanoniczną są inferencyjnie równoważne. Na tym spostrzeżeniu opiera się metoda porównywania dwóch wyrażeń sensownych. Jeśli po sprowadzeniu obu wyrażeń do postaci kanonicznej otrzymamy to samo wyrażenie, to wyrażenia porównywane są inferencyjnie równoważne, jeśli otrzymamy różne postacie kanoniczne, to wyrażenia porównywane nie są inferencyjnie równoważne.

Sprawdźmy, dla przykładu, czy wyrażenia $A \equiv B \equiv C$ i $A \oplus B \oplus C$ są równoważne. Dla pierwszego

na podstawie	otrzymuje się
(1.30)	$(A \equiv B)\, C \vee \overline{A \equiv B}\, \bar{C}$,
(1.31)	$(A \equiv B)\, C \vee (A \oplus B)\, \bar{C}$,
(1.30)	$(AB \vee \bar{A}\bar{B})C \vee (A \oplus B)\, \bar{C}$,
(1.32)	$(AB \vee \bar{A}\bar{B})C \vee (A\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{C}$,
(1.10)	$ABC \vee \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C}$.

Dla drugiego

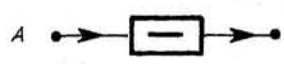
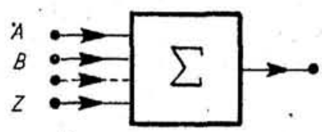
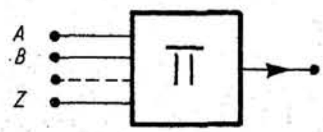
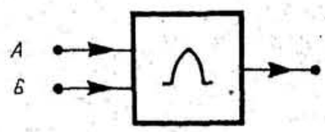
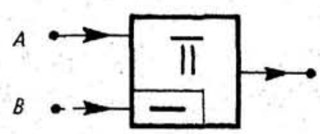
na podstawie	otrzymuje się
(1.32)	$(A \oplus B)\bar{C} \vee \overline{A \oplus B}\, C$,
(1.31)	$(A \oplus B)\bar{C} \vee (A \equiv B)C$,
(1.32)	$(A\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{C} \vee (A \equiv B)C$,
(1.30)	$(A\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{C} \vee (AB \vee \bar{A}\bar{B})C$,
(1.10)	$A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee ABC \vee \bar{A}\bar{B}C$.

Otrzymane wyrażenia zawierają te same wyrazy kanoniczne, są zatem inferencyjnie równoważne:

$$\vdash (A \equiv B \equiv C) \equiv (A \oplus B \oplus C).$$

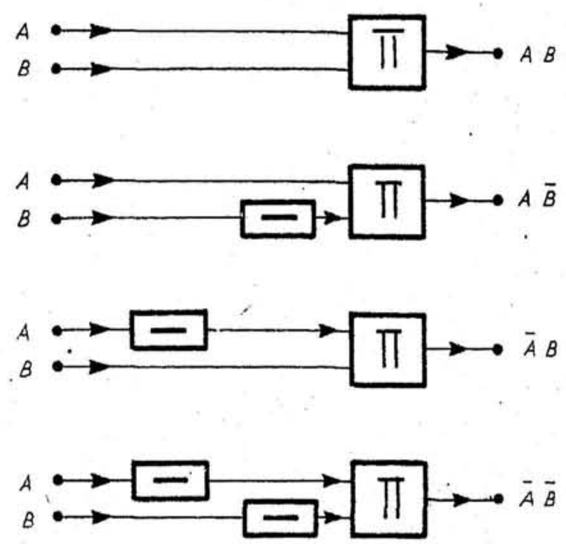
118. Zestawianie układów realizujących zadane funktory. Nazwijmy podstawowymi układy elektryczne realizujące funktory podstawowe. Zestawiając układy podstawowe odpowiednio do struktury różnych wyrażeń sensownych będziemy mogli realizować pośrednio funktory tych wyrażeń.

Przyjmijmy, jako podstawowe, funktory alternatywy, koniunkcji oraz negacji i oznaczmy odpowiednie układy podstawowe symbolami pokazanymi na rys. 1-10. Stosując te symbole będziemy mogli łatwo wyry-

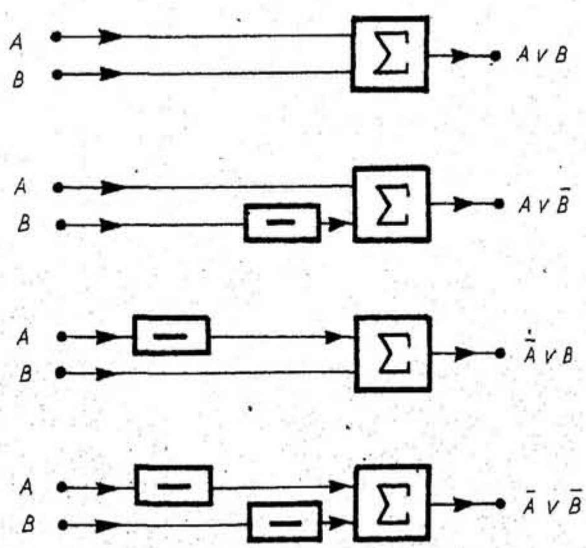
Funktor	Symbol
Negacja	
Alternatywa	
Koniunkcja	
Alternatywa wyłączająca	
Nr 2 z tablicy 11-2	

Rys. 1-10. Symbole graficzne niektórych układów realizujących funktory zdaniotwórcze

sować schematy blokowe funktorów wyrazów kanonicznych i wyrazów parakanonicznych. Zestawienie takich schematów dla przypadku dwóch zmiennych zdaniowych zawierają rysunki 1-11 i 1-12, zaś dla trzech zmiennych zdaniowych - rysunki 1-13 i 1-14.

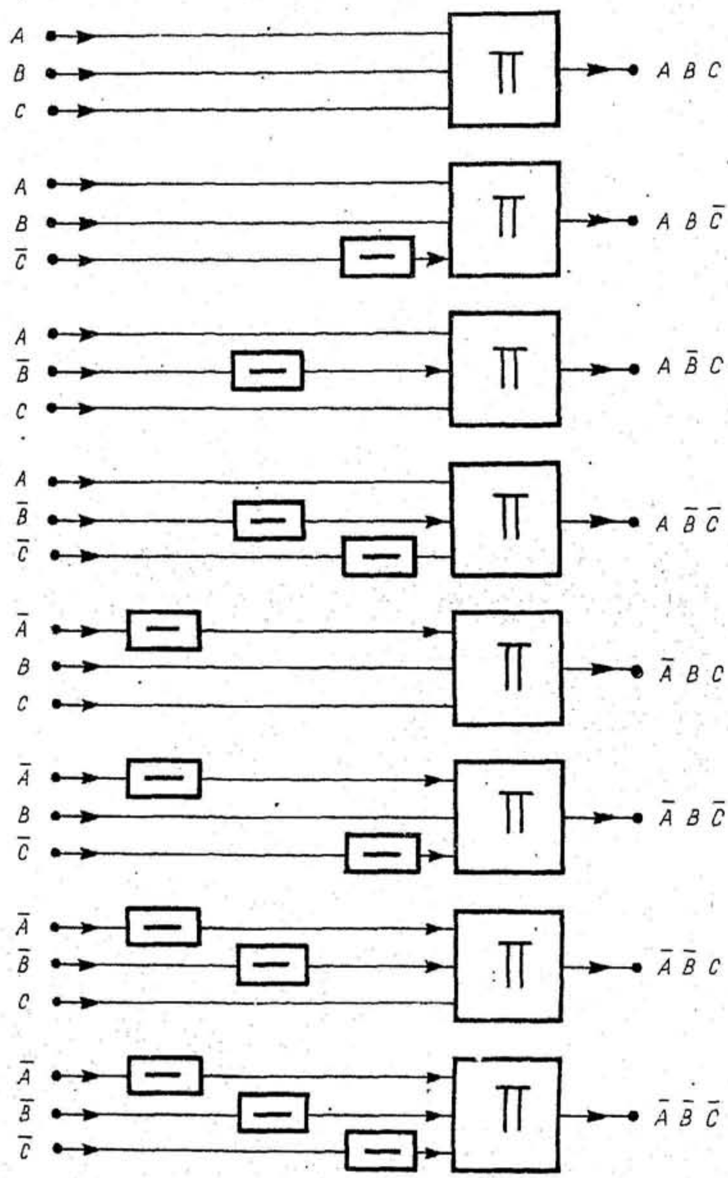


Rys. 1-11. Schemat blokowe układów realizujących funktory dwuargumentowych wyrażów kanonicznych



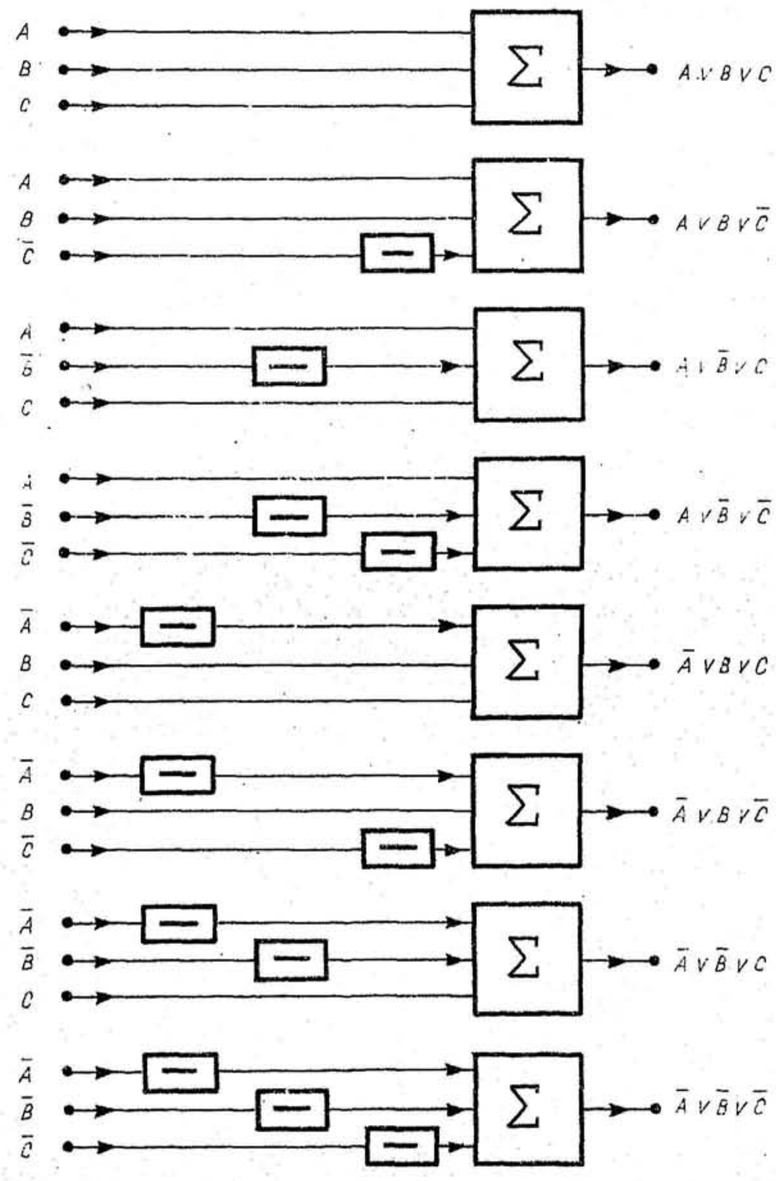
Rys. 1-12. Schemat blokowy układów realizujących funktory dwuargumentowych wyrazów parakanonicznych

Funktory, którym odpowiadają w postaci kanonicznej wyrażenia o większej liczbie wyrazów, np. wyrażenie o k wyrazach, mogą być realizowane pośrednio



Rys. 1-13. Schematy blokowe układów realizujących funktory trójargumentowych wyrazów kanonicznych

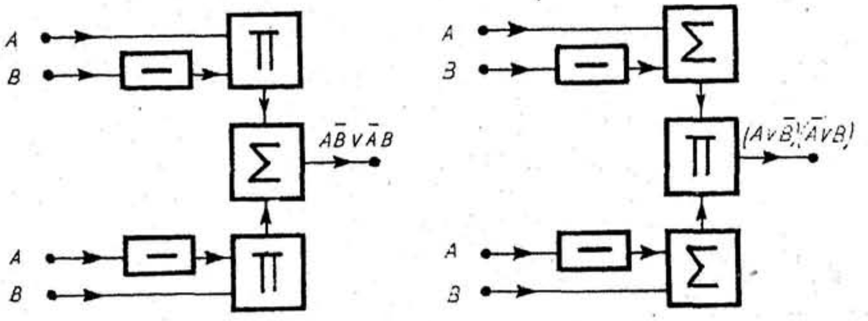
przez układy bardziej skomplikowane, mianowicie takie, które zawierają realizacje funktorów tych właśnie k wyrazów kanonicznych oraz jednego układu podstawowego alternatywy o k wejściach. Funktory zaś, którym odpowiadają wyrażenia o m wyrazach w postaci



Rys. 1-14. Schematy blokowe układów realizujących funktory trójargumentowych wyrazów parakanonicznych

parakanonicznej, mogą być realizowane pośrednio przez układy, zawierające realizacje tych właśnie m wyrazów parakanonicznych oraz jeden układ podstawowy koniunkcji o m wejściach.

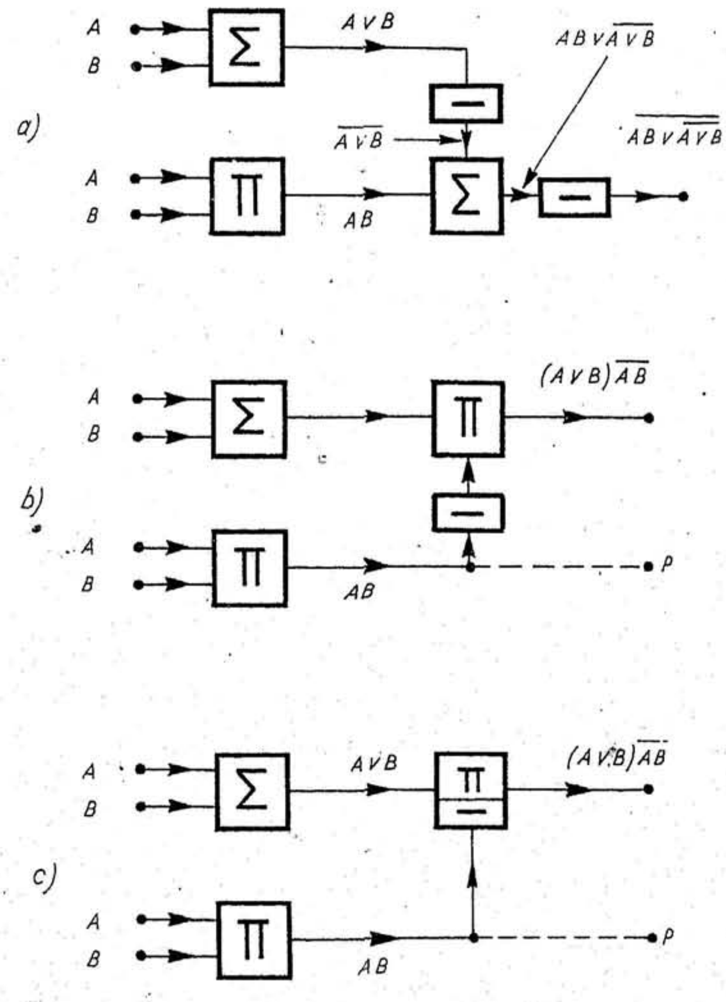
Rozpatrzmy dla przykładu niektóre możliwości realizacji funktora alternatywy wyłączającej. Na rysunku 1-15 pokazane są schematy blokowe realizacji



Rys. 1-15. Schematy blokowe układów realizujących postać kanoniczną i postać parakanoniczną alternatywy wyłączającej

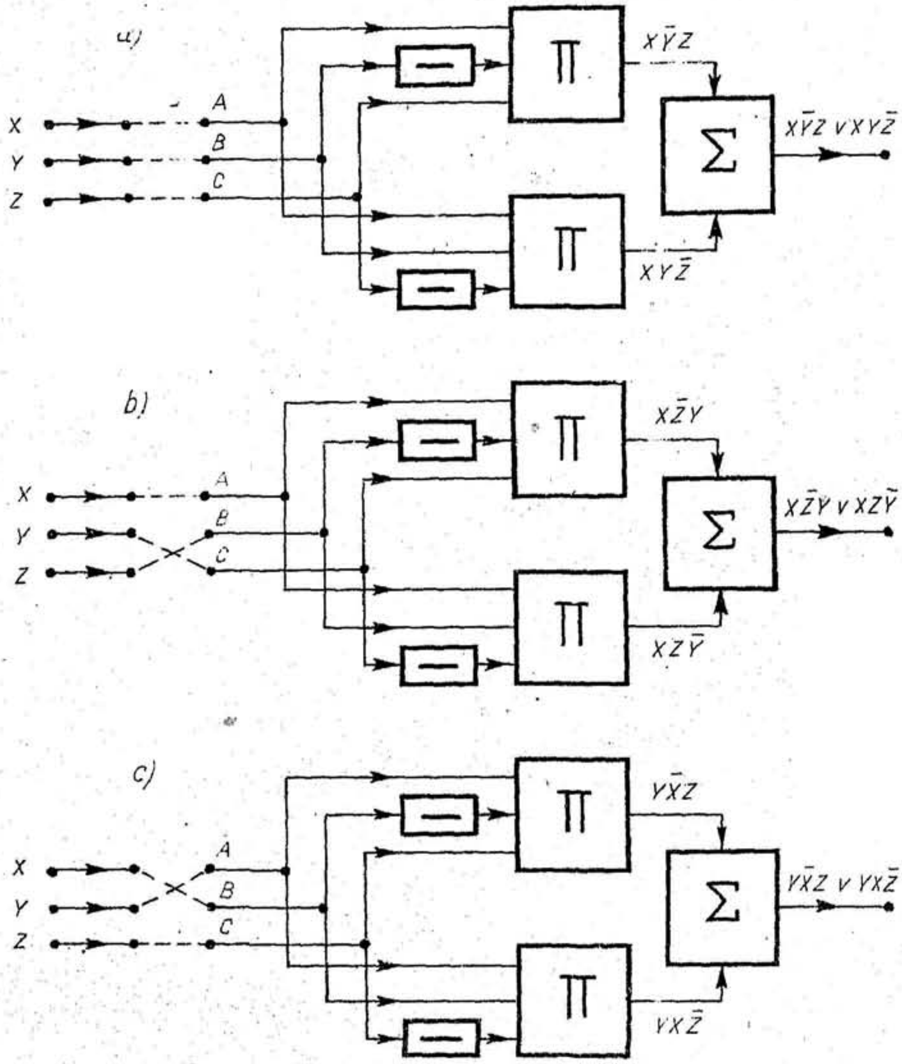
postaci kanonicznej oraz postaci parakanonicznej. W obu przypadkach potrzebna liczba układów podstawowych wynosi pięć. Temu samemu funktorowi odpowiadają różne kombinacje funktorów podstawowych tworzących wyrażenia w postaci nienormalnej, np. ABvAvB lub (AvB) $\overline{AB}$. Schematy blokowe układów odpowiadających tym wyrażeniom pokazane są na rys. 1-16. Jak widać, pierwszy z nich zawiera również 5 układów podstawowych, drugi natomiast - tylko 4. Przy realizacji lampowej używa się czasem, jako podstawowego, układu realizującego funktor nr 4 z tablicy 1-2. Wówczas alternatywę wyłączającą można zrealizować w sposób podany w wariancie c na rysunku 1-16, co, jak widać, wymaga użycia tylko trzech układów podstawowych.

Z rozpatrzenia tego przykładu można wyciągnąć dwa wnioski o charakterze ogolnym. Po pierwsze, wyrażenia w postaci kanonicznej lub parakanonicznej bynajmniej nie zapewniają realizacji funktorów za pomocą najmniejszej liczby układów podstawowych. Po drugie, zespół układów podstawowych, inny niż alternatywa, koniunkcja i negacja, może zapewnić rozwiązanie ekonomiczniejsze. Ten drugi wniosek jest oczywiście słuszny przy założeniu, że realizacje wszystkich układów podstawowych są jednakowo skomplikowane, a zatem koszt ich budowy jest taki sam. Założenie to jest w wielu przypadkach w przybliżeniu spełnione.



Rys. 1-16. Trzy schematy blokowe układów realizujących alternatywę wyłączającą

Do określania liczb układów podstawowych, potrzebnych do realizacji różnych wyrażeń, rysowanie schematów blokowych nie jest konieczne, można bowiem określać te liczby wprost z kształtów wyrażeń. Na przykład w skład wyrażenia $A\bar{B} \vee \bar{A}B$ wchodzi 5 funktorów, mianowicie dwie negacje, dwie koniunkcje i jedna alternatywa, zaś w skład wyrażenia $(A \vee B)\overline{AB}$ wchodzą 4 funktory, mianowicie jedna negacja, jedna alternatywa oraz dwie koniunkcje. Przy takim obliczaniu należy pamiętać, że funktor negacji potrzebny jest co najwyżej raz jeden dla każdej zmiennej zdaniowej.

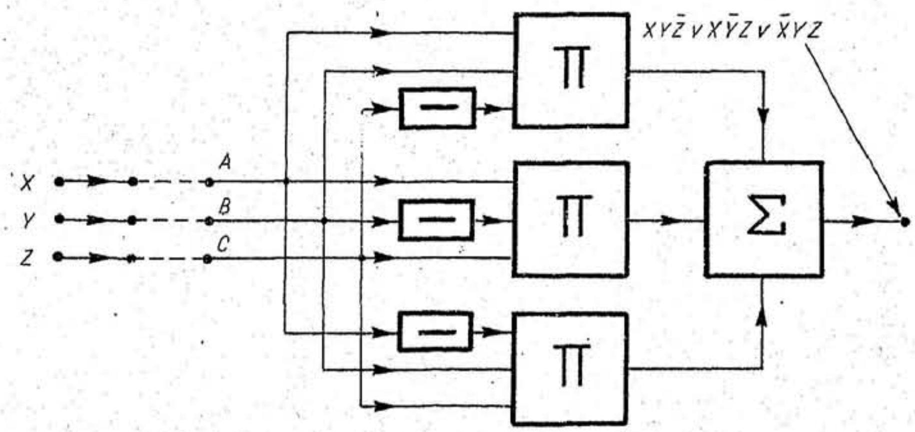


Rys. 1-17. Permutacje wejść do układu realizującego funktor niesymetryczny

W maszynach cyfrowych występują m.in. układy stanowiące realizacje specjalnego typu funktorów, które będziemy nazywali symetrycznymi. Funktor symetryczny jest to taki funktor, który nie ulega zmianie przy dowolnej permutacji miejsc zmiennych.

Rozważmy sens tej definicji na przykładzie schematu blokowego. Niechaj mamy układ realizujący funktor wyrażenia $A\bar{B}C \vee AB\bar{C}$ (rys. 1-17). Dołączmy na wejściu układ przełączający pozwalający na permutacje doprowadzeń X, Y, Z w stosunku do wejść A, B, C. W przypadku a. połączone są zaciski X z A, Y z B oraz Z z C, zatem w stosunku do zmiennych X, Y, Z realizowane jest wyrażenie $X\bar{Y}Z \vee XY\bar{Z}$. Nazwijmy je głównym.

Skrzyżujmy obecnie przewody idące od zacisków Y i Z, czyli połączmy X z A, Y z C oraz Z z B (rys. 1-17b). W stosunku do zmiennych X, Y, Z otrzymamy realizację funktora wyrażenia $X\bar{Z}Y \vee XZ\bar{Y}$, które, na podstawie praw przemienności koniunkcji i przemienności alternatywy, jest inferencyjnie równoważne wyrażeniu głównemu.



Rys. 1-18. Przykład realizacji funktora symetrycznego

Skrzyżujmy z kolei przewody idące od zacisków X i Y, czyli połączmy X z B, Y z A oraz Z z C (rys. 1-17c). W stosunku do zmiennych X, Y, Z otrzymamy wówczas realizację wyrażenia $Y\bar{X}Z \vee YX\bar{Z}$, które nie jest inferencyjnie równoważne głównemu.

Rozpatrzmy obecnie układ realizujący funktor wyrażenia $AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}BC$ poprzedzony układem przełączającym. Przy połączeniu takim, jak na rys. 1-18, układ stanowi realizację funktora wyrażenia $XY\bar{Z} \vee X\bar{Y}Z \vee \bar{X}YZ$, które, jak poprzednio, nazwiemy głównym. Pozostawiamy czytelnikowi stwierdzenie, że wszelkie możliwe permutacje zacisków X, Y, Z prowadzą do realizacji funktorów wyrażeń inferencyjnie równoważnych głównemu. Zatem funktor wyrażenia $AB\bar{C}vA\bar{B}Cv\bar{A}BC$ jest symetryczny.

Będziemy nazywali symetrycznym każde wyrażenie sensowne, którego funktor jest symetryczny. Łatwo jest dostrzec, że symetryczne jest każde wyrażenie, które w postaci kanonicznej jest alternatywą wszystkich wyrazów kanonicznych o tej samej liczbie zmiennych nienegowanych, a zatem o tej samej liczbie zmiennych negowanych. Wyrażenia takie będziemy nazywali symetrycznymi prostymi. Poza tym wyrażeniem symetrycznym jest każda alternatywa dowolnej liczby wyrażeń symetrycznych o tej samej liczbie zmiennych zdaniowych. Wyrażenia tego typu będziemy nazywali symetrycznymi złożonymi.

Jeśli liczba zmiennych zdaniowych jest n, liczbę zaś zmiennych nienegowanych lub też liczbę zmiennych negowanych oznaczymy przez k, to liczba wyrazów kanonicznych w wyrażeniu symetrycznym prostym jest $\binom{n}{k}$, zaś wyrażeń takich jest n+1. Wyrażenia symetryczne proste o dwóch zmiennych zdaniowych są

$$AB,\ A\bar{B}v\bar{A}B,\ \bar{A}\bar{B},$$

o trzech zmiennych są

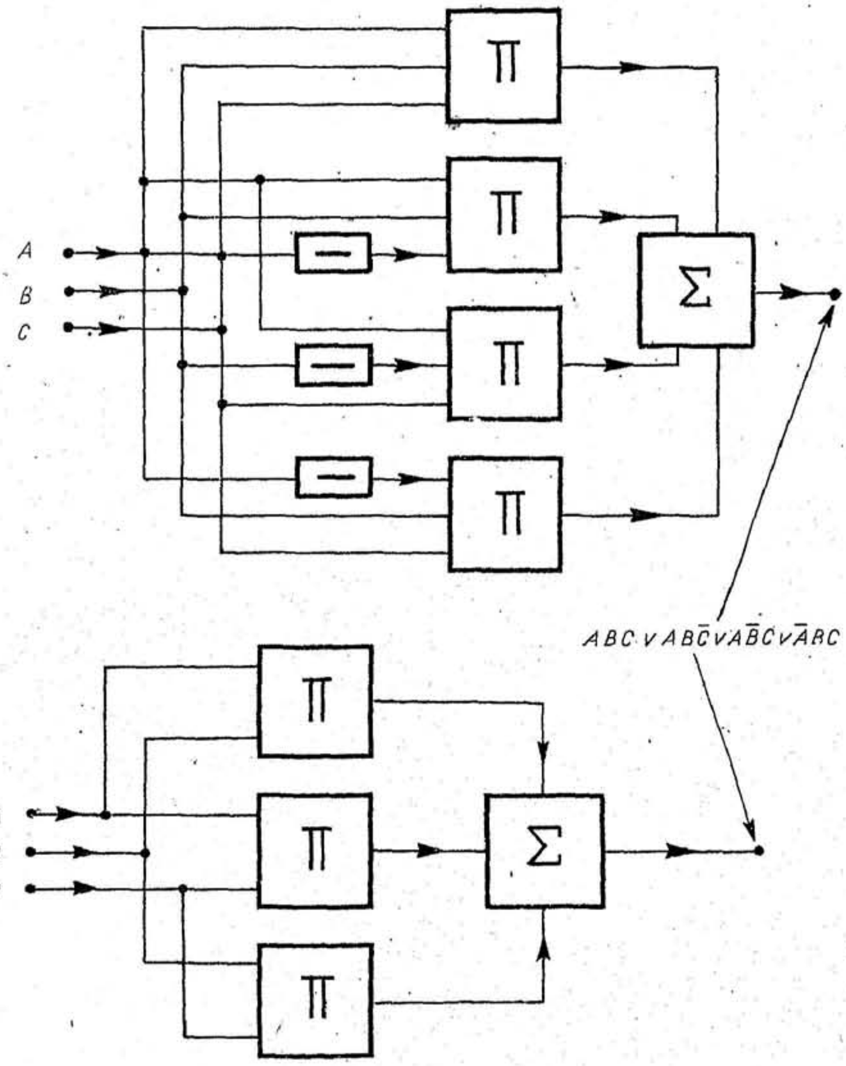
$$ABC,\ AB\bar{C}vA\bar{B}Cv\bar{A}BC,\ A\bar{B}\bar{C}v\bar{A}B\bar{C}v\bar{A}\bar{B}C,\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

i podobnie dla większej liczby zmiennych,

Zestawianie układów, realizujących funktory symetryczne spełniające nawet skomplikowane wymagania, jest czynnością stosunkowo prostą. Rozpatrzmy przykłady następujące.

Przypuśćmy, że należy zaprojektować układ, w którym na wyjściu powstaje sygnał wówczas i tylko wówczas, gdy liczba sygnałów na wejściu przekracza jeden. Jeśli założymy liczbę zmiennych na wejściu równą trzem, to warunek ten znaczy, że na wyjściu powinien powstać sygnał wówczas, gdy są sygnały na dwóch lub na trzech wejściach.

Układ taki może być opisany przez każde wyrażenie sensowne, o trzech zmiennych zdaniowych, które jest prawdziwe wówczas i tylko wówczas, gdy liczba zmiennych o wartości logicznej "prawda" jest 2 lub 3. Jasne jest, że jednym z takich wyrażeń jest alternatywa dwóch wyrażeń symetrycznych prostych, z których jedno jest prawdziwe w przypadku, gdy dwie zmienne zdaniowe są prawdziwe, drugie zaś – gdy trzy zmienne są prawdziwe.



Rys. 1-19. Schematy blokowe dwóch układów realizujących funktor wyrażenia: $ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}BC$

Pierwszym z nich jest znane już nam wyrażenie

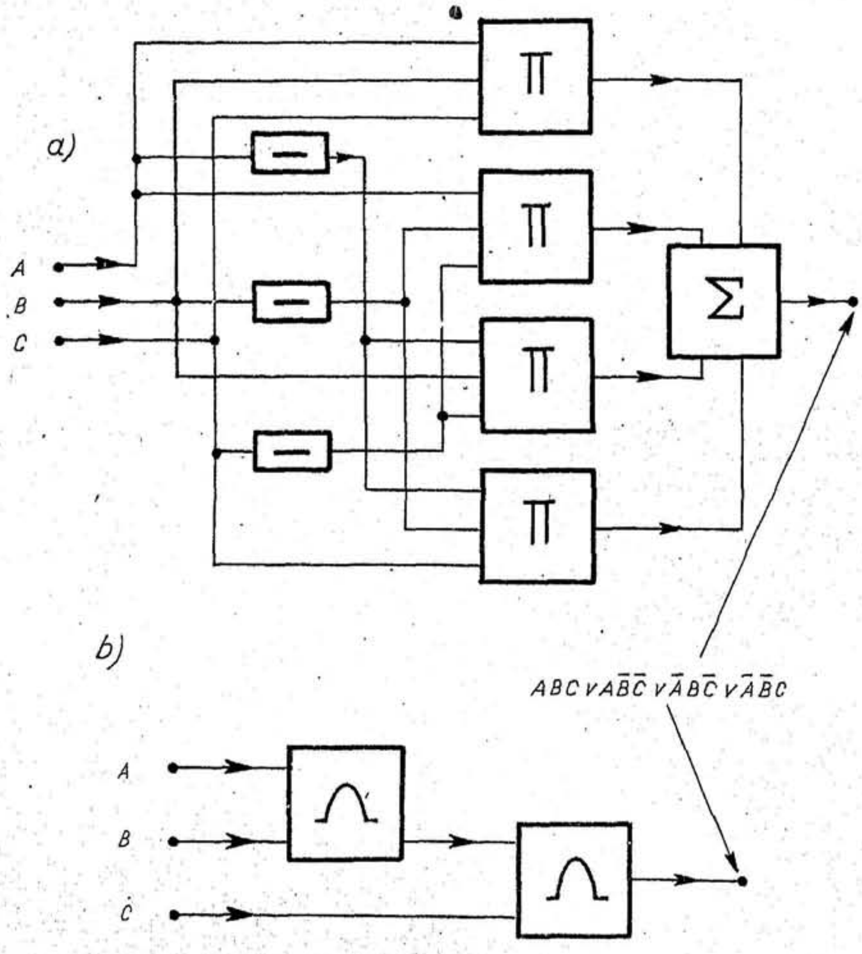
$$AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}BC,$$

drugim zaś, składające się z jednego tylko wyrazu kanonicznego wyrażenie

$$ABC.$$

Zatem poszukiwany układ jest realizacją funktora wyrażenia

$$ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}BC.$$



Rys. 1-20. Schematy blokowe dwóch układów realizujących funktor wyrażenia: $ABC \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}C$

Odpowiednio do tej postaci musiałby on składać się z ośmiu układów podstawowych, można jednakże realizację znacznie uprościć, stosując przekształcenia następujące:

na podstawie	otrzymuje się
(1.13)	$ABC \vee ABC \vee ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}BC$,
(1.1)	$ABC \vee AB\bar{C} \vee ABC \vee A\bar{B}C \vee ABC \vee \bar{A}BC$,
(1.2)	$ABC \vee AB\bar{C} \vee ACB \vee AC\bar{B} \vee BCA \vee BC\bar{A}$,
(1.10)	$AB(C \vee \bar{C}) \vee AC(B \vee \bar{B}) \vee BC(A \vee \bar{A})$,
(1.19)	$ABV \vee ACV \vee BCV$,
(1.17)	$AB \vee AC \vee BC$.

Realizacja ostatniego wyrażenia wymaga użycia tylko czterech układów podstawowych zamiast, jak poprzednio, ośmiu. Odpowiednie schematy blokowe znajdują się na rysunku 1-19.

Jako drugi przykład omówmy rozwiązanie następującego zagadnienia. Znaleźć układ dla trzech zmiennych zdaniowych, na wyjściu którego powstaje sygnał wówczas, gdy liczba wejść, na których występuje sygnał, jest nieparzysta. Na zasadzie poprzednio powiedzianego stwierdzimy łatwo, że poszukiwany układ powinien być realizacją funktora wyrażenia symetrycznego

$$ABC \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}C,$$

do czego należy użyć 8 układów podstawowych. Tyleż układów trzeba do realizacji postaci parakanonicznej. Jeśli dysponujemy natomiast układem podstawowym alternatywy wyłączającej, to należy funktor ten, w myśl, opisanych w rozdziale 117, właściwości alternatywy wyłączającej, zrealizować za pomocą dwóch tylko układów. Schematy blokowe obu rozwiązań pokazane są na rys. 1-20.

Wymienione przykłady mają charakter raczej szkolny. Z punktu widzenia praktyki konstrukcyjnej rachunek zdań jest narzędziem pracy niedoskonałym i nie zapewniającym użycia najmniejszej liczby e l e m e n t ó w.

12. Algebra Boole'a

120. Wstęp. Rozważania rozdziału 11 oparliśmy na analogii zachodzącej między prawami rachunku zdań a zależnościami między niektórymi parametrami obwodów elektrycznych. Podobna analogia zachodzi między

prawami rachunku zdań a prawami innych teorii, np. rachunku zbiorów i rachunku relacji. W każdej z tych dziedzin rozważamy pewne zjawiska, stany lub przedmioty, które ogólnie możemy nazywać elementami danej teorii, oraz pewne działania wykonywane nad tymi elementami. W rachunku zdań elementami są zdania, działaniami są funktory, w układach elektrycznych przekaźnikowych elementami są stany zwarcia lub przerwy odcinków obwodów, działaniami są sposoby połączeń tych odcinków, w układach prostownikowych elementami są różnice potencjałów, działaniami są sposoby uzależniania różnic potencjałów występujących na wyjściu od różnic potencjałów występujących na wejściach do układu, w rachunku zbiorów elementami są zbiory, działaniami - sposoby tworzenia nowych zbiorów itp.

Na skutek istniejących podobieństw możemy przejść od jednej z wymienionych teorii do drugiej po prostu przez zmianę nazw elementów i zmianę nazw działań. Możemy również abstrahować od konkretnych nazw elementów i nazw działań różnych teorii i stworzyć bardziej ogólną teorię abstrakcyjną, w której elementom już nie przypisuje się konkretnego znaczenia, działania zaś opisuje się li tylko przez podanie ich właściwości, czyli spełnianych przez nie praw.

Taka abstrakcyjna teoria nosi nazwę algebry Boole'a od nazwiska jej twórcy, angielskiego matematyka ubiegłego stulecia, George'a Boole'a.

121. Aksjomaty agelbry Boole'a. W algebrze Boole'a rozważamy bliżej nieokreślone elementy pewnego zbioru B oraz pewne działania, które wolno nad tymi elementami wykonywać. Wśród elementów zbioru B znajdują się dwa elementy wyróżnione, oznaczane zazwyczaj symbolami "0" i "1". Z tego wynika, że zbiór B zawiera co najmniej 2 elementy. Działań w algebrze Boole'a jest zazwyczaj trzy, mianowicie: dodawanie, oznaczane symbolem "+", mnożenie, oznaczane symbolem "." oraz uzupełnianie, oznaczane symbolem "-", tzn. kreską umieszczaną nad symbolem zmiennej. Kropkę oznaczającą mnożenie często w algebrze Boole'a opuszczamy, podobnie, jak to czynimy w algebrze liczb.

Przy formułowaniu aksjomatów algebry Boole'a będziemy posługiwać się m.in. wyrażeniem typu

$$x \in B,$$

które będziemy czytali, "x jest elementem zbioru B".

Wybór zespołu aksjomatów algebry Boole'a jest w pewnym stopniu dowolny. Można użyć mniejszej liczby aksjomatów skomplikowanych lub też większej liczby prostszych, a tym samym łatwiejszych do zrozumienia. Przytoczony układ jest, jak się zdaje, szczególnie przejrzysty. Użyte w nim symbole "x, y, z" oznaczają zmienne przebiegające elementy zbioru B.

1. $0 \in B$	11. $x+y = y+x$
2. $1 \in B$	12. $x.y = y.x$
3. $x+y \in B$	13. $(x+y)+z = x+(y+z)$
4. $x.y \in B$	14. $(x.y).z = x.(y.z)$
5. $\bar{x} \in B$	15. $x+(y.z) = (x+y)(x+z)$
6. $x = x$	16. $x.(y+z)=(x.y)+(x.z)$
7. $(x=y) \rightarrow (y=x)$	17. $x+0 = x$
8. $(x=y)(y=z) \rightarrow (x=z)$	18. $x.1 = x$
9. $(x=y) \rightarrow (x+z=y+z)$	19. $x+\bar{x} = 1$
10. $(x=y) \rightarrow (x.z=y.z)$	20. $x\bar{x} = 0$

Rachunek zdań możemy potraktować jako interpretację algebry Boole'a, jeśli zbiór B będziemy interpretowali jako zbiór wyrażeń sensownych, element 0, jako zdanie F, element 1 - jako zdanie V, dodawanie - jako tworzenie alternatywy, mnożenie - jako tworzenie koniunkcji i uzupełnianie - jako tworzenie negacji. Analizując znaczenie aksjomatów algebry Boole'a i wyszukując ich interpretacje w rachunku zdań, znajdziemy, co następuje.

Aksjomaty 1 i 2 stwierdzają, że zbiór B zawiera elementy wyróżnione 0 i 1. Ich odpowiednikiem w rachunku zdań jest istnienie zdania stale prawdziwego i zdania stale fałszywego.

Aksjomaty 3, 4 i 5 stwierdzają, że wynik jakiegokolwiek działania nad elementami zbioru B jest elementem zbioru B. W rachunku zdań odpowiada temu twierdzenie, że wyrażenie sensowne jest zdaniem.

Aksjomaty 6, 7 i 8 opisują właściwości znaku równości. W rachunku zdań odpowiadają im prawa zwrotności, przemienności i przechodniości dla kombinacji znaku assercji z funktorem równoważności.

Aksjomatom 9 i 10 odpowiadają w rachunku zdań tzw. prawa ekstensjonalności, których nie omawialiśmy.

Aksjomatom 11 i 12 odpowiadają prawa przemienności alternatywy i koniunkcji (1.1 i 1.2), aksjomatom 13 i 14 - prawa łączności (1.6 i 1.7), aksjomatom 15 i 16 - prawa rozdzielności (1.10 i 1.11), aksjomatom 17 i 18 - prawa absorpcji (1.14 i 1.17), aksjomatom 19 i 20 - prawa stałej wartości logicznej (1.19 i 1.20).

Przedstawione aksjomaty algebry Boole'a dotyczą działań dodawania, mnożenia i uzupełniania. Obranie tych działań jest w pewnym stopniu dowolne tak samo, jak w rachunku zdań jest w pewnym stopniu dowolne obranie tych lub innych funktorów podstawowych. Przy innych działaniach zespół aksjomatów jest inny. Spośród wielu możliwości specjalnie interesujący, z punktu widzenia zastosowań do maszyn cyfrowych, jest ten wariant algebry Boole'a, który operuje działaniami mnożenia i tworzenia różnicy symetrycznej. Temu ostatniemu odpowiada w rachunku zdań funktor alternatywy wyłączającej.

122. Zastosowania. Każdemu wyrażeniu sensownemu rachunku zdań odpowiada jakieś wyrażenie algebry Boole'a. Dwa wyrażenia algebry Boole'a odpowiadające inferencyjnie równoważnym wyrażeniom rachunku zdań wolno połączyć znakiem równości. Na skutek tego algebra Boole'a jest bardziej niż rachunek zdań zbliżona do algebry liczb.

Używając znaku równości możemy budować równania charakteryzujące różne układy elektryczne. Oznaczmy przez w zmienną algebry Boole'a charakteryzującą stan elektryczny na wyjściu z pewnego układu, literami zaś a, b, c - zmienne charakteryzujące stany na wejściu. Wówczas równaniem układu z rysunku 1-15 będzie

$$w = a\bar{b}+\bar{a}b$$

zaś równaniem układu z rysunku 1-19:

$$w = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}bc$$

i podobnie w innych przypadkach.

Jak widać, tłumaczenie wyrażeń z języka rachunku zdań na język algebry Boole'a jest niezmiernie łatwe. W piśmiennictwie o maszynach cyfrowych i o innych urządzeniach elektrycznych dwustanowych czasem jest stosowany rachunek zdań, czasem algebra Boole'a, czasem wreszcie - mieszanina tych obu teorii.