2. UZUPEŁNIAJĄCE WIADOMOŚCI Z ARYTMETYKI

21. Systemy zapisywania pozycyjnego

Powszechnie stosowanym obecnie systemem zapisywania liczb jest dziesiętny system pozycyjny. Zasadę systemu pozycyjnego można ogólnie określić w sposób następujący. Do zapisania dowolnej liczby używa się ciągu znaków zwanych cyframi. Jeśli j-tym elementem ciągu cyfr, licząc od prawej strony, jest cyfra a_j, ogólna zaś liczby cyfr, którą można stosować na tym miejscu znakowym jest b_j, przy czym oznaczane przez nie liczby stanowią kolejne liczby naturalne, to ciąg cyfr

$$a_k \; a_{k-1} \; \dots \; a_2 \; a_1$$

oznacza liczbę x określoną wzorem

$$x = a_k \, b_{k-1} \, b_{k-2} \cdot \dots \cdot b_2 b_1 + a_{k-1} \, b_{k-2} \, b_{k-3} \cdot \dots \cdot b_2 b_1 + \dots + a_3 \, b_2 \, b_1 + a_2 \, b_1 + a_1 . \qquad (2.1)$$

Liczby b_j nazywamy podstawami poszczególnych miejsc znakowych. Jeśli wszystkie b_j są sobie równe, mówimy, że system zapisywania jest systemem o stałej podstawie, w przeciwnym przypadku - że system jest o zmiennej podstawie. Jedynym systemem o zmiennej podstawie, znajdującym pewne zastosowanie, jest system dwupiątkowy, w którym podstawy miejsc o wskaźnikach nieparzystych są równe pięciu, podstawy zaś miejsc o wskaźnikach parzystych są równe dwóm.

Przy stałej podstawie b ciąg cyfr

$$a_k \; a_{k-1} \; \dots \; a_2 \; a_1$$

oznacza liczbę x określoną wzorem

$$x = \sum_{j=1}^{k} a_j \, b^{j-1} . \qquad (2.2)$$

Ogólna liczba liczb, które możemy zapisać używając k znaków przy podstawie b jest b^k. System stosujący podstawę 10 nazywamy dziesiętnym, stosujący podstawę 2 - dwójkowym lub binarnym. Jeśli może zachodzić wątpliwość przy jakiej podstawie zapisana jest dana liczby, to bierzemy ją w nawiasy i po prawej stronie u dołu oznaczamy podstawę. W ten sposób piszemy np.

$$(234)_{10}\ ,\ (1212)_3\ ,\ (111011)_2 \quad \text{itp.}$$

22. Zmiana podstawy

W wielu maszynach liczących zachodzi potrzeba zmiany podstawy użytej w oznaczeniu liczby, najczęściej zmiany z systemu dziesiętnego na dwójkowy lub odwrotnie. Zmiana ta odbywa się w oparciu o następujące twierdzenie.

Jeśli a_1 oznacza resztę z podziału liczby x przez liczbę b, a_2 - resztę z podziału pierwszego ilorazu przez b, a_3 - resztę z podziału drugiego ilorazu przez b itd., zaś a_k oznacza resztę w tym dzieleniu, w którym iloraz jest równy zeru, to ciąg cyfr

$$a_k\ a_{k-1}\ \ldots\ a_2\ a_1$$

oznacza liczbę x w systemie o podstawie b.

P r z y k ł a d 1. Przedstawić liczbę 32_{10} w systemie trójkowym. Przeliczanie układamy w następującą tabliczkę.

Dzielna lub iloraz	Dzielnik	Reszta
32	-	-
10	3	2
3	3	1
1	3	0
0	3	1

Jeśli odczytamy teraz ciąg liczb ostatniej kolumny w kierunku od dołu do góry i napiszemy go od lewej ku prawej, otrzymamy poszukiwane przedstawienie:

$$(1012)_3 .$$

Sprawdzamy w systemie dziesiętnym

$$2 + 1.3^1 + 0.3^2 + 1.3^3 = 32$$

Zatem istotnie $(32)_{10} = (1012)_3$.

P r z y k ł a d 2. Przedstawić liczbę $(125)_{10}$ w systemie dwójkowym.

Dzielna lub iloraz	Dzielnik	Reszta
125	-	-
62	2	1
31	2	0
15	2	1
7	2	1
3	2	1
1	2	1
0	2	1

Sprawdzamy w systemie dziesiętnym

$$1.2^0 + 0.2^1 + 1.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 + 1.2^5 + 1.2^6 = 125$$

Zatem istotnie $(125)_{10} = (1111101)_2$.

W toku powyższych przykładów mieliśmy do czynienia z przypadkami, gdy pierwotna podstawa była większa od nowej. W przypadkach, gdy pierwotna podstawa jest mniejsza od nowej w tabliczce przeliczeń należy dodawać jeszcze jedną rubrykę, gdyż całe przeliczenie odbywa się przy pierwotnej podstawie, a zatem i reszty też są zapisane w systemie z pierwotną podstawą. Wygodna jest w takich przypadkach tabliczka zmiany zapisu w zakresie większej podstawy (tabl. 2-1).

Tablica 2-1

Przeliczenie z podstawy dziesiętnej na trójkową i dwójkową w zakresie pierwszym dziesięciu liczb naturalnych

10	3	2
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	10	11
4	11	100
5	12	101
6	20	110
7	21	111
8	22	1000
9	100	1001

Przykład 3. Przedstawić liczbę 100110 w układzie trójkowym.

Dzielna lub iloraz	Dzielnik	Reszta	Reszta w systemie trójkowym
100110	-	-	-
1100	11	10	2
100	11	0	0
1	11	1	1
0	11	1	1

Zatem $(100110)_2 = (1102)_3$.

Przykład 4. Przedstawić liczbę $(1110011)_2$ w systemie dziesiętnym. Ponieważ $(10)_{10} = (1010)_2$ więc stałym dzielnikiem w układzie dwójkowym jest liczba 1010.

Dzielna lub iloraz	Dzielnik	Reszta	Reszta w systemie dziesiętnym
11110011	-	-	-
11000	1010	011	3
10	1010	0100	4
0	1010	10	2

Zatem $(11110011)_2 = (243)_{10}$.

Jeśli jedna z podstaw jest potęgą drugiej, to zmiana podstawy odbywa grupami cyfr liczby o mniejszej podstawie, przy czym każdej grupie odpowiada jedna cyfra liczby o większej podstawie.

P r z y k ł a d 5. Ponieważ

$$(001)_2 = (1)_8$$
$$(011)_2 = (3)_8$$
$$\text{i } (101)_2 = (5)_8$$

to

$$(001\ 011\ 101)_2 = (125)_8$$

Jeśli mamy do czynienia z dwoma systemami oznaczania, z których jeden jest systemem o podstawie stałej, drugi zaś takim systemem o podstawie zmiennej, w którym pewien ciąg podstaw, licząc od prawej strony ku lewej, powtarza się okresowo, przy czym iloczyn podstaw jednego okresu równy jest całkowitej dodatniej potędze podstawy stałej, to zmiana podstaw odbywa się również grupami cyfr.

W wymienionym poprzednio, praktycznie ważnym, systemie oznaczania dwupiątkowego używa się na miejscach nieparzystych cyfr kolejnych 0, 1, 2, 3, 4 - podobnie, jak w innych systemach, - natomiast na miejscach parzystych wygodnie jest używać cyfr 0 i 5. Wówczas każdej cyfrze zapisu w systemie dziesiętnym przyporządkowana jest taka para cyfr w systemie dwupiątkowym, że suma ich wartości liczbowych jest równa wartości liczbowej rozważanej cyfry zapisu w systemie dziesiętnym (tabl.2-2).

Tablica 2-2

Zmiana podstawy z systemu dziesiętnego na dwupiątkowy

Oznaczenie w systemie	
dziesiętnym	dwupiątkowym
0	00
1	01
2	02
3	03
4	04
5	50
6	51
7	52
8	53
9	54

P r z y k ł a d 6. Przedstawić $(7654)_{10}$ w systemie dwupiątkowym. Korzystając z tablicy 2-2 możemy napisać wprost

$$(7654)_{10} = (52\ 51\ 50\ 04)_{2,5}$$

23. Specjalne metody wykonywania działań

Metody wykonywania działań arytmetycznych w maszynach cyfrowych są w wielu przypadkach odmienne od metod używanych w rachunkach prowadzonych li tylko przy użyciu papieru i ołówka. Przyczyną tego są z jednej strony pewne specyficzne trudności konstrukcyjne, z drugiej zaś - istnienie uproszczonych metod wykonywania działań w systemie dwójkowym.

Specyficzne trudności konstrukcyjne napotykamy przede wszystkim przy próbie realizacji odejmowania. W wielu maszynach cyfrowych mechanicznych każdej liczbie odpowiada pewne położenie zazębiających się nawzajem o siebie kółek zębatych o dziesięciu zębach każde. Dodawanie realizuje się przez obrót kółek w jednym kierunku, odejmowanie zaś - przez obrót w odwrotnym kierunku. Realizacja układów elektrycznych analogicznych do kółek zębatych jest tego rodzaju, że kierunek działania, w systemach różnych od dwójkowego, jest określony przez schemat i odwrócenie tego kierunku nie jest możliwe w żaden prosty sposób. W układzie dwójkowym konwecjonalne wykonywanie odejmowania napotyka na inne trudności, wobec czego, niezależnie od podstawy, w maszynach cyfrowych przeważnie wykonuje się odejmowanie w odmienny sposób, mianowicie przez dodawanie dopełnienia.

Metoda ta opiera się na okoliczności, że długość liczby w maszynie jest skończona. Niechaj N oznacza największą liczbę, jaką można zarejestrować w arytmometrze. Próba wprowadzenia do arytmometru jakiejkolwiek liczby x większej od N doprowadziłaby do zarejestrowania li tylko reszty z podziału x przez N. Interpretując ten fakt w języku teorii liczb powiedzielibyśmy, że arytmetyka maszyny cyfrowej nie jest arytmetyką zwykłą lecz arytmetyką modulo N.

Wykonywanie odejmowania przez dodawanie dopełnienia najlepiej okazać jest na przykładzie. Przypuśćmy, że maszyna jest trójcyfrowa o podstawie dziesiętnej, zatem N=999. Niechaj zadaniem naszym będzie wykonanie odejmowania 314 - 271. Rozwiązujemy to zadanie w trzech etapach. W pierwszym tworzymy dopełnienie odjemnika do N:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{r} 999 \\ -271 \\ \hline 728 \end{array}$$

Odejmowanie to nie sprawia trudności, ponieważ wykonuje się ono po prostu przez przyporządkowanie każdej cyfrze odjemnika jej dopełnienia do dziewięciu.

W drugim etapie dodajemy dopełnienie odjemnika do odjemnej:

$$\text{II.}\quad \begin{array}{r} 314 \\ +\ 728 \\ \hline 1042 \end{array}$$

W trzecim wreszcie etapie jedynkę stojącą na najwyższym miejscu znakowym przenosimy na najniższe miejsce i dodajemy do pozostałej liczby:

$$\text{III.}\quad \begin{array}{r} 042 \\ +\quad 1 \\ \hline 043 \end{array}$$

Otrzymaliśmy zatem, że 314 - 271 = 43.

Jeśli odjemnik jest większy od odjemnej, to w drugim etapie otrzymujemy sumę mniejszą od N. Wówczas w trzecim etapie tworzymy dopełnienie sumy do N i zaopatrujemy go znakiem minus.

Niechaj zadaniem naszym będzie wykonanie odejmowania 271 - 314. Przeprowadzamy to w trzech etapach:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{r} 999 \\ -\ 314 \\ \hline 685 \end{array}$$

$$\text{II.}\quad \begin{array}{r} 271 \\ +\ 685 \\ \hline 956 \end{array}$$

$$\text{III.}\quad \begin{array}{r} 999 \\ -\ 956 \\ \hline 043 \end{array}$$

Ostatecznie otrzymujemy, że 271 - 314 = - 43.

Zatem dwa pierwsze etapy realizacji odejmowania są zawsze takie same, trzeci natomiast zależy od sumy obliczonej w etapie drugim. Jeśli suma ta przekracza pojemność arytmometru, to wynik należy powiększyć o jedność, jeśli natomiast suma ta nie przekracza pojemności maszyny, to należy znaleźć dopełnienie sumy i zaopatrzyć je w znak minus.

Liczenie w systemie dwójkowym jest na ogół prostsze od liczenia przy innych podstawach. Łatwo przekonać się o tym na przykładzie mnożenia. Każdy iloczyn cząstkowy jest tu bowiem równy zeru, jeśli odpowiednia cyfra mnożnika jest zerem, powstaje zaś z mnożnej przez dopisanie pewnej liczby zer na końcu lub też przez przesunięcie w lewo o pewną liczbę miejsc znakowych, jeśli odpowiednia cyfra mnożnika jest jednością.

Przypuśćmy, że należy pomnożyć 1111 przez 1010101. Stosując konwecjonalny sposób mnożenia otrzymamy bez trudności

$$
\begin{array}{r}
\underline{1111 \times 1010101} \\
1111 \\
1111 \\
1111 \\
\underline{1111} \\
10011111011.
\end{array}
$$

Istnieje również sposób dzielenia prostszy od konwencjonalnego, odejmowanie natomiast realizujemy w sposób opisany poprzednio. Jest ono też prostsze niż w systemach o innej podstawie, ze względu na łatwość obliczania dopełnień. Dopełnieniem zera jest tu jedynka, dopełnieniem jedynki jest zero, zatem tworzenie dopełnienia sprowadza się do zastosowania funktora negacji na każdym miejscu znakowym.

24. Podstawa optymalna

Wielkość podstawy nie jest rzeczą obojętną z punktu widzenia najbardziej ekonomicznego rozwiązania konstrukcyjnego maszyny cyfrowej. Liczba elementów potrzebnych do przedstawienia elektrycznego jednej cyfry jest w wielu przypadkach proporcjonalna do wielkości podstawy. Załóżmy dla uproszczenia, że współczynnik proporcjonalności jest równy jedności. Wówczas liczba elementów potrzebnych do zapisu k-cyfrowej liczby jest bk. Największa liczba N, którą można zapisać za pomocą tych elementów jest b^k-1. Oznaczając całkowitą liczbę użytych elementów przez c mamy

$$c = bk \tag{2.3}$$

$$N = b^k-1. \tag{2.4}$$

Chodzi teraz o stwierdzenie, czy istnieje taka podstawa, dla której, przy stałej liczbie c użytych elementów, liczba N osiąga maksimum lub też odwrotnie, czy istnieje taka podstawa, dla której przedstawienie elektryczne liczby N jest możliwe za pomocą najmniejszej liczby elementów.

Szukając odpowiedzi na pierwsze pytanie założymy, że zmienna b, która z natury rzeczy może przybierać tylko wartości naturalne przebiega zbiór wszystkich wartości rzeczywistych dodatnich. Wówczas mamy z (2.3)

$$b = c/k,$$

po podstawieniu zaś do (2.4), z pominięciem jedności, jako małej wobec N otrzymamy

$$\ln N = \frac{c}{b} \ln b. \qquad (2.4)$$

Różniczkując względem b i przyrównując pochodną do zera otrzymamy:

$$\frac{d}{db} \ln N = c \frac{1 - \ln b}{b^2} = 0,$$

a stąd

$$\ln b = 1,$$

czyli

$$b = e.$$

Najbliższa wartość całkowita jest 3 i ona jest wartością optymalną podstawy.

Rozważmy to samo zagadnienie na przykładzie liczbowym w sposób nieco odrębny. Załóżmy, że mamy do dyspozycji 120 elementów, że do przedstawienia jednej cyfry przy podstawie b trzeba b elementów i obliczmy dla kilku wartości b największą liczbę, jaką można zapisać za pomocą tych 120 elementów.

Wyniki obliczeń podane są w tablicy 2-3.

Tablica ta potwierdza otrzymany poprzednio wynik, że optymalną podstawą jest 3. Optimum jest jednakże płytkie i ważkie względy konstrukcyjne skłaniają do przyjęcia, jako optymalnej, raczej podstawy 2.

T a b l i c a 2-3

Największa liczba, jaką można zapisać przy użyciu 120 elementów stosując różne podstawy

Wartość podstawy	Liczba znaków	N
b	$120/b$	$b^{120/b}$
2	60	10^{18}
3	40	10^{19}
4	30	10^{18}
5	24	6.10^{16}
6	20	$3,6.10^{15}$
8	15	$3,5.10^{13}$
10	12	10^{12}

25. Liczenie ze stałym i z przesuwanym przecinkiem

Ograniczone środki techniczne zawarte w jakiejkolwiek maszynie pozwalają na przedstawienie li tylko skończonej liczby liczb. Łącznie liczby te pokrywają pewien zakres, zwany zakresem liczenia maszyny. W niektórych maszynach zakres liczenia obejmuje tylko liczby całkowite i rozciąga się od pewnej liczby $-N$ do $+N$. Jeśli podstawa systemu jest b, liczba miejsc znakowych jest n, to

$$N = b^n - 1$$

Poza tym, jeden symbol binarny przed liczbą potrzebny jest dla określenia jej znaku.

W innych rozwiązaniach konstrukcyjnych zakres liczenia jest od -1 do +1 i obejmuje ułamki właściwe o co najwyżej jakichś n cyfrach różnych od zera. Oba wymienione rozwiązania stanowią warianty tzw. systemu liczenia ze stałym przecinkiem. Poza tym stosowany jest również system liczenia z przesuwanym przecinkiem, w którym liczby są przedstawiane w postaci

$$N.b^p,$$

gdzie N i p są to liczby całkowite dodatnie lub ujemne, b jest podstawą np.

$$3,43 = 343.10^{-2}.$$

Liczenie ze stałym przecinkiem wymaga przesunięcia wszystkich danych do obliczeń do stosunkowo wąskiego zakresu liczenia oraz takiego ukształtowania toku obliczeń, aby ani żaden wynik pośredni, ani wyniki ostateczne nie wyszły poza ten zakres. Zabiegi te są uciążliwe dla personelu eksploatacyjnego. W maszynie z przesuwanym przecinkiem zakres liczenia jest znacznie większy, co ułatwia eksploatację.

Liczba miejsc znakowych dziesiętnych zawiera się przeważnie w granicach od dziesięciu do dwunastu; przy dziesięciu miejscach zakres liczenia rozciąga się od - 9 999 999 999 do +9 999 999 999, obejmuje zatem prawie 2.10^{10} liczb. W pewnej natomiast maszynie, stosującej system liczenia z przesuwanym przecinkiem, znaczących cyfr jest 7, wykładnik zaś p może przyjmować wartości od -19 do +19, zatem zakres liczenia obejmuje prawie 2.10^{26} liczb. System liczenia z przesuwanym przecinkiem powoduje znaczne komplikacje konstrukcyjne.