

cali i wyrabiali w swej głowie, póki jej nie przywiodą do największej prostości i jasności; żeby te myśli tak się snuły porządnie, jak jedna wynika z drugiej: żeby tym myślom takie tylko dawać ozdoby i stroje, jakie im własne czucie w pisaniu natchnie: a resztę zostawmy sposobności i talentowi każdego.

---

V.

*Józef Twardowski Marszałek Powiatu Pińskiego podał do Pamiętnika Warszawskiego sprawę o wydanej przezemnie w roku zeszłym Trygonometrii Kulistej analitycznie wyłożonej z krytycznem jej rozebraniem. Co dało powód do następującego pisma: które dla tego tu się umieszcza, że służy do objaśnienia książki dla uczących się napisanej; a Pamiętnik Warszawski nie jest w ręku każdego.*

UWAGI NAD RECENZYĄ TRYGNOMETRYI KULISTEJ UMIESZCZONĄ W PAMIĘTNIKU WARSZAWSKIM NA MIESIĄC GRUDZIEŃ ROKU 1817.

NA KARCIE 477.

Nie tak mnie obeszła krytyka *Recenzenta*, jak mnie ucieszyło imię jej Autora: poznawszy zanego niegdyś ucznia w tutejszym Uniwersytecie;

który nie tylko nauk matematycznych nie zaniedbał; ale owszem zrobił je ciąglem i lubem sobie zatrudnieniem. Jestto zaiste piękny i godny uwielbienia przykład: kiedy obywatel osiadły przybiera sobie naukę, za towarzyszkę prac gospodarskich, i posług obywatelskich w swej prowincyi. Tak robili cnotliwi Rzymianie, nim krwawa chuć podbijania narodów sprowadziła do nich zbytek i rozpusztę na zepsucie obyczajów; za którem poszła zguba swobód, i upadek ich ojczyzny.

Matematyka jestto Królowa wszystkich nauk: jej oblubieńcem jest prawda, a prostota i oczywistość jej strojem. Ale przybytek tej Monarchini jest obsadzony cierniem; po którem przechodzić trzeba. Nie ma on powabu tylko dla umysłów zamilowanych w prawdzie, i lubiących walczyć z trudnościami. Co także pokazuje niepospolitą i wyższego rzędu skłonność człowieka do zawiłych zaiste, ale trwałych i wyniosłych rokoszy umysłowych uzacniających naturę ludzką.

Lubo każda część Matematyki jest ciągłym łańcuchem prawd; zachodzić jednak może rozmaitość w ich szyku i wystawieniu. *Recenzent* sądząc moję trygonometrią kulistą miał na widoku sposób i porządek zachowany od znakomitszych zagranicznych pisarzy: ja w niej pisaniu, miałem na uwadze drogi pojęcia te, które mi doświadczenie uczenia skazywało prostsze i łatwiejsze. Ztąd wynika różnica naszych zdań o porządku i trybie tłumaczenia. *Recenzent* powiedział swe zdanie:

trzeba żebym i ja okazał powody, dla czego inaczej myślę.

*Naprzód* zdaje się *Recenzentowi*, że to, com powiedział na początku i na końcu *traktatu* o trójkacie prostokreślnym jest rzecz obca, i do mego zamiaru nie należąca: co mnie zadziwia. Pierwsze twierdzenie, które po różnych książkach różnie a niepotrzebnie dowodzą, bo je dawno dowiódł *Euklides*: pierwsze mówię twierdzenie jest takie, bez którego w jakimkolwiek sposobie trygonometrii kulistej dowieść trudno, i które jak Eulerowi tak Delagránzowi otworzyło drogę do zrównań analitycznych. Jakże można nazwać obcem to, co jest skazówką i prawie fundamentalną pomocą całej nauki? Z niego tak prostym sposobem wyciągniona powierzchnia trójkąta przez same boki, nie może się nazwać obcą, kto sobie zamierzył w ciągu nauki porównywać powierzchnię trójkąta kulistego z powierzchnią prostokreślnego. Różne są sposoby wyrażenia tej ostatniej: byłoby wadą naganną w pisarzu książki szkolnej opuścić celniejsze, a szczególnie tę, którą *Recenzent* ma za obcą; już to dla tego, że się w żadnej u nas, a w niewielkiej liczbie pisarzy zagranicznych znajduje; już dla tego, że ona może być w praktycznych wymiarach potrzebną. Bo żeby się zapewnić, iż rachunek arytmetyczny nie jest błędny; potrzeba z różnych sposobów wyciągać wartość powierzchni, a zgodne tych różnych sposobów w liczbach wypadki dopiero nas przekonywają, żeśmy się w rachunku nie pomylili. Może tego zna-

leżć *Recenzent* i potrzebę i przykłady we wszystkich wymiarach ziemi: a szczególnie w *Base du Système metrique*. To twierdzenie o bokach trójkąta prostokreślnego jest tak piękne, a w wielu matematycznych zadaniach tak przydatne; iż byłoby wielkim grzechem opuścić je tam, z kądem najprościej i najłatwiej wypada. Powiedziałem w przemowie, że terazniejszy traktat chcę mieć dopełnieniem mojej *Algebry*. Zrównania i wzory o trójkącie prostokreślnym na samym końcu trygonometrii położone nie znajdują się w moim rachunku linii trygonometrycznych Rozdz. IV: a powinny być uczącym się wiadome: bo mogą być potrzebne. Pisałem dla kraju, w którym mało książek: godziło się opuścić to, czego uczący się potrzebować mogą? osobiście posuwając dalej porównanie trójkąta kulistego z prostokreślnym, którego ja sobie zabronił, żebym książki nadto nie rozwał, i żeby coś uczącym się do zrobienia zostawić.

Nie podoba się *Recenzentowi*, żem zrównanie fundamentalne, i drugie główne zaraz przerobił na wygodniejsze do praktycznego rachunku; kiedy inni pisarze to przerobienie dopiero w samym przystósowaniu wykonywają. Ja tę ostatnią drogę dla pojęcia uczących się mam za nieporządną. Kiedy zrównanie nie potrzebuje do swoich przerobień żadnego nowego początku, powinno być całkiem skończone, i pod wszystkimi jakie wziąć może postaciami wystawione; żeby w przystósowaniu nie rozrywać uwagi, i nie używać, tylko rzeczy

już dobrze poznanej. Oprócz tego w przerabianiu zrównań odkrywają się i tłumaczą własności trójkąta, które poprzedzić powinny przystósowanie, i być umieszczone pod tem zrównaniem, z którego wypadają. Na tem się funduje plan mojej nauki. *Delegranż* własności trójkąta nie tłumaczy; bo nie pisał dla początkujących. Inni pisarze mieszają przypadki szczególne jako to trójkąty równoramienne, prostokątne, do swego wykładu; u mnie własności powszechne trójkąta wyciągają się ze zrównań ogólnych przez samo tych zrównań przerabianie, i są umieszczone pod tem, z którego wypadają. Idą dopiero przystósowania i przypadki szczególne w rozbieraniu trójkąta prostokątnego i ukośnokątnego. Com zrobił ze zrównaniem fundamentalnem, i drugim głównem, nie mogłem tego zaraz dokazać z trzeciem głównem; bom do tego przerobienia potrzebował własności trójkąta prostokątnego, i wyłożenia nauki o trójkącie posilkowym, która w żadnym jak mi się zdaje piśmie nie jest prościej i jaśniej wyłożona. Nie byłby mi zapewne *Recenzent* zrobił tego zarzutu, gdyby był na to pamiętał; że przerabianie zrównań, jest bitą i niezawodną w *Analizie* drogą do odkrycia własności, które się w nich zawierają. Czego dowodem jest cała Geometrya linij krzywych.

Nie mogę się także zgodzić z *Recenzentem*, że moje drugie zrównanie główne nie jest z właściwego sobie początku wyciągnięte. Wiadomość trójkąta biegunowego jest potrzebna, i w trygo-

nometrii opuszczona być nie powinna. Tak jak jest napomknięta w *Delagranżu* żaden jej początkujący zaraz nie zrozumie: tak jak ją podał *Dela Caille* i jakim ją wyłożył, zdaje mi się najłatwiejsza i najprostsza. Kto tylko umie czytać analityczne wyrazy, za pierwszym rzutem oka widzi, że zrównanie drugie główne nic innego nie jest, tylko zrównanie fundamentalne przeniesione do trójkąta biegunowego; gdzie kąty biorą miejsce boków, a boki kątów: więc nie trójkąt biegunowy jest wnioskiem zrównania głównego, ale zrównanie główne jest wypadkiem z własności trójkąta biegunowego przeniesionych do fundamentalnego zrównania. Jeżeli się *Recenzent* chce o, tem widocznie przekonać, niech geometryczną uwagą zastanowi się nad rachunkiem *Delagranża*, i tych, co za nim poszli; a zobaczy, że oni nic innego nie robią, tylko zamieniają w zrównaniu fundamentalnem boki na kąty, i kąty na boki; co nic innego nie znaczy, tylko od trójkąta podanego przechodzić do jego trójkąta biegunowego. Nie jestżeto jaśniej, prościej, i gruntowniej wyciągnąć zrównania na trójkąt biegunowy, i te wprowadziwszy w zrównanie fundamentalne, wydobyć z niego zrównanie główne? Długie rachunki są najczęściej skutkiem chybionej właściwej im zasady. Bardzo liczne mamy tego w Autorach przykłady; że rachunek analityczny może nas w wielkie zawilości wplątać, jeżeli nie jest oparty na prawdziwym swym początku, albo nie prowadzony geometrycznem rozumowaniem. Ze mój rachunek jest prostszy, kró-

tszy, i jaśniejszy nie z ogólności nie tracąc, to samo pokazuje; że jest z właściwego początku wyciągniony.

Posądza mnie *Recenzent*, na karcie 491. Pamiętnika, że dowodowi Delambra przyganiam: co by się nie zgadzało ani z mojem przekonaniem, ani ze czcią dla tego znakomitego Geometry i Astronoma. Zrównania Delambra w § 5. przezmnie dowiedzione, są nowem w Trygonometrii kulistej zjawieniem. Ciekawa rzecz była dowiedzieć się, jak do nich Delambre przyszedł? Ogłoszone niedawno jego dowodzenie pokazuje, że przerabiając *analogije Nepera*, wpadł na te zrównania. To dowodzenie jest gruntowne; ale moje zdaje mi się prostsze i właściwsze, to jest z ogólniejszego początku wyciągnione. Z niego bowiem wypada to nowe w Trygonometrii twierdzenie: że „Zrównania Delambra są najprościejszem wyrażeniem zrównania Cagnoli; że tych wyrażen jest tyle, ile jest kombinacyi między dwiema wartościami na dostawę kąta, i dwiema wartościami na dostawę boku temu kątowi przeciwległego“ a zatem każde zrównanie *Cagnoli* wydaje ich cztery. Z czego przekonać się powinien *Recenzent*, że mi się nie godziło chwycić tej skróconej w dowodzeniu drogi, którą mi z mego własnego skazania radzi: żebym dwa zrównania Delambra wyciągnąwszy, rozdzielił przez nie zrównanie wprzód wynalezione *alpha*, na k. 8. Tryg. Boby to było, niedokończywszy dowodu tak ważnej prawdy, rzucić się w inny początek. Możemy to robić w praktycznem rachob-

waniu, ale się tak nie robi w wykładaniu nauki: gdzie trafiwszy na jaką fundamentalną prawdę, trzeba z niej to wszystko wydobyć, co tylko w sobie zawiera. Nie wiem dla czego *Recenzent* tu się nie zastanowił nad ważnym pożytkiem dowiedzonego przezemnie twierdzenia, to jest: żem z niego wyciągnął tak prosty i krótki dowód *Analogji Nepera*, jakiego dotąd w Trygonometrii nie widziano. I jeżeli moja praca ma jaką zasługę, w tem najbardziej uważana być powinna. *Analogije Nepera* mają rozległe i najczęstsze użycie w Astronomji i innych naukach. Wynalazca ich *Neper* nie dowiódł ich: *Wallis* wyciągnął je z rysunku geometrycznego używając stereograficznego rzutu (*projectio*). Dowodzenie analityczne tych *Analogji* jak jest długie i pracowite, przekona się *Recenzent* rzuciwszy okiem na kartę 289. 290. 291. Delagranża (*Journal de l'ecole Polytechnique Cahier 6.*). A jednak ze znanych mi dowodów ten jest najprostszy. Delambre w skróconej swej Astronomji wyciąga analogije Nepera z dowcipnego geometrycznego rysunku k. 107 — 110. Pod § 61. przytacza swoje zrównania, ale ich nie dowodzi. W wielkiem zaś dziele Astronomji *Analogije Nepera* dowodzi i syntetycznie, i analitycznie; a z tych dopiero przez dosyć pracowity rachunek swoje zrównania wyprowadza. Co znowu pokazuje, że rachunek długi jest często znakiem niewłaściwego początku, na którym się opiera.

Żąda *Recenzent*, żebym był prawidło podane od Delambra k. 55. Tryg. na przypadki wątpliwe



w trójkacie, przynajmniej objaśnił przykładem: jam to uznał za niepotrzebne; bo podobne prawidło znajduje się u mnie jaśnie i prosto dowiedzione na karcie 22. Tryg. kul.

W rachunku analitycznym nie pilnując się co do czystego rozumowania, można i pobłądzić łatwo, i o błąd kogo posądzić. Taki jest przypadek *Recenzenta*, na k. 493. Pamiętnika, należący do k. 40. Tryg. Kul. gdzie wniósł zrównanie prawda błędne  $2A=180^\circ$ : ale które się u mnie nie znajduje, i z dobrze zrozumianej rzeczy wnosić się nie może. Dobrze powiada *Recenzent*, i nawet inaczej myśleć nie można; że zrównanie  $k+k'=180^\circ$  jest zrównaniem na łuki: i jam to wyraźnie skazał powiedziawszy, że dwa koła wielkie przecinają się w odległości  $180^\circ$ : więc w tem zrównaniu  $k, k'$ , wyrażają łuki, nie powierzchnie. Z tem zrównaniem rozważając figurę, oczywiście się pokazuje, że łuki w części spodniej jednej taśmy, są równe łukom w części wierzchniej drugiej taśmy: a zatem na tej samej kuli te dwie części taśm są co do kątów i boków równe, z kądem  $k'=h$ .  $k, k', h, h'$  inne mają znaczenie w zrównaniu pierwszym i ostatnim k. 40. Tryg., bo wyrażają powierzchnie; a inne w zrównaniach  $k+k'=180^\circ$ ,  $h+h'=180^\circ$ ; bo wyrażają łuki. Lepiejbym był zrobił, gdybym był te ostatnie zrównania wyraził przez łuki figury. Nie zrobiłem tego dla zwięzłości, mniemając: że w tak początkowych rzeczach będę zrozumiany z tego, com już powiedział. Mógł był powiedzieć *Recenzent*, że dla zbytej

zwięzłości, i dla nazwania tą samą literą dwóch rzeczy różnych, można dać powód do błędnego w tem miejscu rozumienia: i na tobym się z nim zupełnie zgodził. Tu nie zawadzi *Recenzentowi* namienić, że twierdzenie *Lezandra* Geom. ks. 7. Prop. XI. k. 213. wydania 5go, tak jest wyrażone; jakby tylko same trójkąty równoramienne kuliste do siebie przystawały: co nie jest mową dokładną; bo trójkąty kuliste równoboczne i równokątne choćby nie były równoramienne, przystaną do siebie na kuli, byleby miały wklęsłość lub wypukłość boków jednako obróconą, jak w naszym przypadku części taśm od koła wielkiego poprzecznie przecięte.

*Lezandr* podał nowy wzór na powierzchnią trójkąta prostokreślnego, nie powiedziawszy, jak do niego przyszedł: jam go wyciągnął z twierdzenia znanego trygonometrii płaskiej, i użyłem go do dowodu sławnego twierdzenia o przywiedzeniu powierzchni trójkąta kulistego do prostokreślnego. Ze się *Recenzentowi* dowód Delagranża bardziej podoba jako przyjęty od *Lezandra*, nie mam nic przeciwko temu. Dowód, który obrałem jest krótszy, mniej rachunku wyciągający, a równie gruntowny; bo się na tych samych początkach zasadza, to jest na wprowadzeniu pierwszych terminów tego szeregu, gdzie wstawa wyraża się przez łuk. Jak tamten tak ten jest rachunkiem przybliżenia, prowadzącym do tych samych wypadków. Kiedy rachunek krótszy nie jest tak ści-

sły i gruntowny, jak rozleglejszy; w ten czas tylko trzymam się ostatniego.

Mógłby mi być *Recenzent* jeszcze jeden zrobić zarzut, z którem się zapomniał w przemowie wytłumaczyć: to jest, że chcąc w mojej książce zawrzeć wszystko, co do trygonometrii kulistej należy, nie powinienem był opuszczać zrównań różnicowanych (*Differentialia*), któremi zapchane są ledwo nie wszystkie trygonometrye. *Delambre* namnożywszy ich znacznie w swoim wielkiem dziele *Astronomji*, powiada że ich nigdy nie użył, nie wymieniając tego przyczyny. Ja mam całą tę naukę za na nie nie przydatną, i dla tego ją opuścił. Chcąc różnicować zrównanie, trzeba wiedzieć co się w niem odменя, a co jest stateczne; tego zaś trygonometrya mnie nie uczy, ale warunki pytania. Różnicowanie linii trygonometrycznych jest bardzo łatwe; kto to umie, poznawszy warunki pytania, prędzej sobie zróżnicuje zrównanie, nimby je w tłumie wzorów wyszukał i znalazł. Oprócz tego też warunki pytania mogą go do prościejszych i takich wypadków przyprowadzić, jakich w całym zbiorze trygonometrycznym nie znajdzie. I dla tego w praktycznych rachunkach równie jak *Delambre* nigdy się po takie zrównania do książek trygonometrycznych nie uciekał. Podobne wzory są tylko potrzebne przy szczególnych traktatach i zapytaniach n. p. *Astronomicznych*; to jest, nie w trygonometrii, ale w jej szczególnem przystósowaniu; gdzie najczęściej

biorą postać całkiem do trygonometrycznej niepodobną.

Nie porzuciłem ja dla tego mego nazwiska *wzór*, jak mniema *Recenzent*, żem użył wyrazu *formuła* w mojej przemowie, żebym był od większej liczby czytelników zrozumiany. Język się przez to nie psuje, że kto czasem wtrąci *makaronizm* dla łatwiejszego pojęcia: i ten zarzut często od krytyków Autorom wytykany mam za niesłuszny, osobiwie w dziełach i pismach naukowych. Język się psuje przez niepotrzebne i źle wymyślone wyrazy, ani z rzeczą, ani z charakterem języka niezgodne; albo przez jakąś niepojętą chorobę odmieniania tych, które i dobrze są wynalezione, i dawno przyjęte. Jak gdyby niedorzeczne zlepianie kilku liter lub sylab dowodziło jakiej sposobności; i nie było raczej zawstydzaniem Autora w oczach nauki i rozsądku, nizeli przysługą dla języka.

Nie lubię pism spornych, i całe życie od nich uciekam, szanując albo cierpliwie znosząc cudze zdanie, a mego nikomu nie narzucając, ale je zostawiając Sądowi Powszechności. Teraźniejsze atoli osądziłem za potrzebne, i przez szacunek dla *Recenzentu*; i dla tego, że może posłużyć do lepszego wyjaśnienia mej książki. W Wilnie dnia 12/24 Grudnia roku 1817.

Jan Śniadecki.

---