

IX.

O ROZUMOWANIU RACHUNKOWEM.

*Rzecz czytana na Sessyi Literackiej Imperatorskiego
Wileńskiego Uniwersytetu dnia 13. Kwietnia
roku 1818. v. s.*

Staralem się w mojej Algebrze pierwszy wytłumaczyć: co to jest rozumować przez rachunek: i kilka ciemnych ale ważnych prawideł logicznych potrafiłem tam dowieść i objaśnić. Nauka ta, prawie od nikogo w tym sposobie nie tknięta, jest niezmiernie ważna; żeby młódz w Matematyce nie sposobila się na mechanicznych rachmistrzów, żeby czyste miała pojęcie tego co robi, i żeby marzeń do których młode głowy są zazwyczaj skłonne, nie brać za rozumowanie. Nie będzie więc bez pożytku przyłączyć tu nowe przestrogi, które mi poddało doświadczenie, i rozważanie umiejętności rachunkowych.

Ten, komu dokucza gorąco lub zimno 24. stopni *Réaumur*a wyraźniej to pojmuje, jak wystawienie sobie w myśli tego cierpienia. Więc dobrze powiedział *Hume* *), że wrażenia zmysłów są żywsze i wyraźniejsze, niż wyobrażenia, które nam je przypominają i wystawiają. Ze jeżeli z tych

*) An inquiry concerning human understanding London 1777.

wyobrażeń rodzą się insze w naszym umyśle, te jeszcze są mniej wyraźne; a zatem każda myśl oderwana i ogólna nie ma w głowie naszej tej jasności i wyrazistości, jaką mają czucia, i nawet jaką mają pierwsze myśli, z których te ogólne powstały. Więc zaćmienie myśli rośnie w miarę ich ogólności. Ta prawda potwierdza moję naukę o Metafizyce; że im ta dalej idzie, tym nas w większe wprowadza ciemności i obłąkania. A zatem, że to jest nauka dla umysłu ludzkiego najniebezpieczniejsza.

Jeżeli atoli ogólnym myślom damy materyalną powłokę w języku im właściwym, w oko wpadającym, i różnym od pospolitego; któryby był wiernem tych myśli wyciśnieniem i piętnem: zrobimy sobie te ogólne myśli jasnymi i widzialnymi; a przez to, najgłębsze działania rozumu zamienimy na czucie. Jeżeli jeszcze wszystkie drogi, przez które rozum nasz przechodzić może w rozprawie tych myśli, obwarujemy prawidłami pewnymi, żadnemu błędowi ani niepewności niepodległymi; umysł nasz idąc tą drogą przechodzić koniecznie będzie z jednej prawdy do drugiej. Może on na tej drodze pewności spotkać zapory i trudności, ale od prawdy wyboczyć nie może. Oto jest czysty i rzetelny obraz matematycznego rachunku! wiernem wyciśnieniem myśli jest wzór albo zrównanie algebraiczne *): drogi postępowa-

*) Tu przez algebrę rozumiem wszystkie nauki rachunkowe przez litery.

nia i rozważania tych myśli są działania rachunkowe, niewątpliwymi i ściśle dowiedzionymi prawidłami opisane. Ten obraz cale jest różny od myśli *Rondillaka*, który słabo dowodzi, że cale myślenie jest czuciem. Ja tego twierdzenia nie przypuszczam; bo może być albo fałszywe, albo przynajmniej do gruntownego dowodzenia bardzo trudne. O tem zaś nikt wątpić nie może; że czucie rzeczy jest żywsze i wyraźniejsze, niż ich wyobrażenie; więc, żeby myśli z siebie nie wyrażne, zrobić jasnemi, trzeba je przywieść do czucia. To przywiedzenie nie jest dziełem natury, jak utrzymuje *Rondillak*: bo nas natura Algebry nie uczy; ale jest dziełem sztuki, i prawdziwie cudownym wynalazkiem człowieka.

Z tego wypada takie prawidło: że ponieważ metafizyczne rozumowanie jest z natury swojej ciemne i niebezpieczne: ponieważ to rozumowanie zależy tylko na pewnym obrocie umysłu podległego przywidzeniom i omyłkom; a w rzeczach matematycznych rachunek jedynie broni nas od przywidzeń i błędów, trzymając uwagę w klubach pewności przez nieomyłne prawidła działań; więc w naukach rachunkowych: *nie może się nazywać rozumowaniem matematycznym, tylko to, co się daje objaśnić, wyprowadzić, i dowieść rachunkiem*. Rysunki geometryczne, używane w początkowej jeometrii, i w pismach jeometrów dawnych, o których później mówić będę, nie są tu żadnym zarzutem; bo te wszystkie dają się dziś prosto i jasnie przez rachunek wyrazić. Kto więc

z metafizyczną pomocą roztrząsa umiejętności rachunkowe, schodzi z prawdziwej drogi gruntownego myślenia, i częściej bredzi, niż rozumie. Jestto sposób wykrzywienia, nie doskonalenia umysłu.

W rachunku trzy rzeczy do uważania zachodzą. *Naprzód* język i jego wyrazy: *powtórę* drogi, przez które przechodzi umysł w dochodzeniu odmiann ilości: *potrzebie* prawda fundamentalna, która go po tych drogach prowadzi. Rozważmy to wszystko.

I.

Nazwiska ilości wyrażają się w tym języku przez litery jakiegokolwiek alfabetu: tych nazwisk rozmaite porównania i stosunki przez wzory (formula); ich związki między sobą przez zrównania (aequatio). Tu zaraz okazują się trzy główne tego języka przymioty: *Ogólność*, przez którą nie więcej nie uważając w rzeczach, tylko, że się te mogą powiększać lub zmniejszać; zajmuje rozległą przestrzeń poznawania, i ledwo nie całe panowanie natury; bo gdzie jest miejsce (spatium), gdzie są ciała i ich ruch; tam są liczby i ilości: a gdzie są ilości, tam ich powszechnie i nieodzielne własności wysledzać i upatrywać się dają. Tu łatwo pojąć, jak daleko użycie tego języka rozciągać się może. Drugim szanownym tego języka przymiotem jest jego skupienie czyli *zwięzłość*: że tam nie nie wchodzi, co ściśle do rzeczy i myśli nie należy. W językach pospolitych gada-

śliwość czyli mieszanie słów niepotrzebnych jest matką ciemności i przeszkodą myślenia. Język rachunkowy nie zbytecznego i niepotrzebnego nie cierpi: jestto język czystego i surowego co do ścisłości rozumu; w nim wszystkie myśli są skupione i zbliżone do siebie, a przez to ułatwione ich porównanie i wiązanie. Trzecim nieocenionym tego rachunku przymiotem jest *ochrona* czyli ulga pamięci. Kto przeszedł przez szereg delikatnego rozumowania, wyciągnięty zła wniosek daje mu się symbolicznie i ściśle wyrazić, i zamienić na postać materyjalną z zawarciem tych wszystkich myśli, które go do tego wniosku przywiodły: mając ten symboliczny wyraz, już mu baczność na te wszystkie myśli niepotrzebna w dalszem postępowaniu. Ulga pamięci jestto pomoc dla rozumu, gdzie tłum myśli jest do ich wiązania i dalszego wywijania przeszkodą. Tej usługi nie mamy w języku pospolitym, a mamy tę wielką w nim nieprzyzwoitość: że częstokroć subtelne w tych myślach cienie i różnice, nie dają się łatwo postrześć, a mogą całe znaczenie rzeczy wywrócić, i do fałszywego wniosku wprowadzić: co w rachunku dobrze zrozumianym i prowadzonym być nie może; bo symboliczny wyraz każdego rozumowania nie daje wprowadzić fałszywego znaczenia.

Ale tu zaraz zachodzi ważny i istotny warunek; żeby ten język dobrze rozumieć, i umieć go dobrze czytać: co jest największą trudnością, której początkujący zazwyczaj i nie pojmują i czuć nie mogą. Jestto owoc przenikłości, głębokiej roz-

wagi, i długiego ćwiczenia. Tu jest pole popisu dla prawdziwego analitycznego geniuszu. Jak w każdym języku, tak i w tym, pierwszym prawidłem być powinno: *starać się jasnie pojąć i ogarnąć znaczenie każdego wyrazu w całej swej rozległości*. Tej rozległości nauczyć się nie można, tylko przechodząc po rozmaitych tego rachunku widokach, rodzajach, i przystósowaniach; co się nie nabywa tylko przez długą naukę, rozwagę, i ćwiczenie. Najwięksi ludzie mogą błądzić w czytaniu tego języka. Jeżeli kto albo nadto przeciągnął, albo nie dociągnął znaczenia wynalezionej przez rachunek prawdy; znakiem to jest, że źle przeczytał wypadki swego rachunku. I ztąd to pochodzi, że kiedy jedni Jeometrowie mają zadanie jakie za skończone; drudzy im dowodzą, że takiem nie jest.

Ponieważ w tym rachunku znaki są ogólne, prowadzą do tego wszystkiego, co tylko w obrębie tej ogólności zawierać się może, i co z niego wychodzi: a zatem nie tylko to, co jest; ale nawet i to, co być może, albo nie może. Chcemy n. p. rozwiązać jakie zagadnienie, albo dowieśdź jakiej prawdy przez rachunek; warunki tego zagadnienia, albo znaczenie tej prawdy są im właściwe, a zatem szczególne: biorąc je pod rachunek znaków ogólnych, otrzymujemy w wypadkach nie tylko to, cośmy myślili; ale nawet i to o czemśmy nie myślili: to jest, nie tylko odpowiedź na nasze zapytanie, ale na wszystkie zapytania, od tego samego stosunku i odmian ilości zależące.

Otrzymujemy jeszcze i to, co w takich ilości stosunkach i odmianach jest podobne, i co jest niepodobne; bo to wszystko ogólność znaków ogarnia. Ztąd łatwo zrozumieć, dla czego jedna prawda do dowiedzenia, albo jedno zapytanie wprowadza nas w zrównania różnych stopni, których pierwiastki mogą być i rzetelne i urojone: pierwsze pokazują to, co jest podobne; drugie to, co jest niepodobne. W pierwiastkach jeszcze rzetelnych mogą być odpowiedzi należące do naszego pytania, drugie całe od niego nie należące, i trzeba wielkiej przenikłości umysłu, wielkiej wprawy w poznawaniu rachunków, żeby rozróżnić to, co do nas należy, od tego, co jest pytaniu naszemu obce. Powiedzmy nawet prawdę: że w całej swej rozległości to czytanie dotąd niedocieczone; bo najwięksi geometrowie nie zawsze mogą wyczytać i odpowiedzieć tych pytań, które do ich przypadku nie należą, a jednak się w rachunku znajdują; i znowu tych, które są niepodobne.

Trudność jeszcze czytania wypada z wątpliwości znaków dodatniego i ujemnego, dla tego; że te znaki mają trojakie znaczenie, i częstokroć nie wiemy którego się trzymać w wypadkach: *na-przód* wyrażają działanie: i to znaczenie jest najogólniejsze: *powtóre* wyrażają różne stany i położenia jednych ilości względem drugich: *potrze-cie* przechód ilości przez granicę wzrostu lub ubywania, gdzie z dodatnich zamieniają się na odjemne, i z odjemnych na dodatne. *Carnot* napisał piękne i rozległe dzieło o drugiem znaczeniu tych

znaków *). Wieleby także można napisać o znaczeniu trzeciem. Ten jeden w języku rachunkowym *ekwiwok*, którego niepodobna było uniknąć, nie mało rodzi zamieszania i trudności w czytaniu.

W języku rachunkowym czasem małe na pozór postrzeżenia mogą prowadzić do nowej nauki, albo do wielkich w znanej już nauce wynalazków. *Descartes* przez wprowadzenie wykładników całkowitych, a *Wallis* przez wprowadzenie wykładników ułamkowych w Algebrze, co za nieocenione zrobili Matematyce przysługi! chociaż to zdawało się z początku, tylko skróceniem pisania. Cała teoria logarytmów, sposoby proste ich rachowania, zawile przedtem prawidła wyciągania pierwiastków, okazane w tym samym wzorze, który na potęgę podał *Newton*, ułatwienie najtrudniejszych zagadnień w głębszych Matematyki częściach przez uwagę tych znaków i t. d. są pożytki tak małego na pozór postrzeżenia. Znak pierwiastków urojonych, tak mało na pozór znaczący, zrobił w ręku *Eulera* epokę w naukach matematycznych. Od niego wyrażony przez ten znak związek między linią trygonometryczną i łukiem, jest najpiękniejszym wieku XVIII. wynalazkiem. Żeby to zrozumieć, dosyć jest czytać wielkie odkrycia *de Lagranża*, do których go wzory *Eulera* przywiodły. Jak w pospolitym języku szczęśliwie przez talent wprowadzony wyraz, może być źródłem nowej

*) *Géometrie de Position*, Paris, 1804. in 4.

mocy, i nowych piękności: tak w języku matematycznym stać się może albo wielkiem ułatwieniem nauki, albo nową sztuką dochodzenia prawdy, i źródłem ważnych wynalazków; ale jak w tym, tak w tamtym podobne postrzeżenia i wyrazy z natury języka wydobyte, są to natchnienia nadzwyczajnych głów i talentów. Poznanie się na wpływie i wartości tych znaków nie jest rzeczą tak łatwą; a przecież do dobrego zrozumienia języka rachunkowego nieodbitcie potrzebną. Czytanie więc rachunku jest nauką długą i trudną; bo wyciąga rozległej znajomości wszystkich jej odnóg, sztuk i sposobów, wielkiego doświadczenia, i niepospolitej przenikłości. Tu się uczyć powinniśmy skromności: bo im się więcej w tej nauce postępuje; tym się bardziej okazuje jej niezgruntowana głębokość trudnościami zawalona.

II.

Drogi przez które ten język przechodzi w znaczeniu odmian ilości, są różnego gatunku *operacye* czyli działania: co się nazywa *Algorytmem*. Można powiedzieć, że odnogi Matematyki czystej różnią się algorytmem. Działania arytmetyczne i rozwiązanie równań są algorytmem Algebry. Logarytmy i linije trygonometryczne przez wzgląd na łuki mają właściwy sobie algorytm. Różnicowanie i całkowanie są algorytmem rachunku głębszego czyli *przestępnego*. Rozwijanie funkcyi ma także swój algorytm, z którego *Delagranż* wyciąga algorytm różnicowania. Fałszywe to jest

mniemanie; jakoby zachodziło coś wątpliwego i niepewnego w prawdach fundamentalnych rachunku różnicowania. Ponieważ z różnych początków ten rachunek wyprowadzić się daje, cały spór zachodzi o to; które początki mają za sobą większą prostotę i oczywistość? czyby nie można upatrzeć innych równie ścisłych i niewątpliwych, któreby jeszcze były prostsze i oczywistsze? nakoniec czyby z dzisiejszej analizy ten rachunek wyciągnąć się nie dał, bez uciekania się za przykładem *Maclaurina* i *d'Alemberta* do początków geometryi starożytnej?

W każdym algorytmie prawidła działań są pewne i ściśle dowiedzione: można się ich dobrze nauczyć, a przez wielką wprawę i ćwiczenie łatwo je wykonywać. Prawdziwy Geometra używając rachunku do rozwiązania jakiego zagadnienia, albo do dowiedzenia jakiej prawdy, idzie za pasmem pewnych myśli i rozumowań, z których się rzadko tłumaczy. Kto w rachowaniu nie widzi i nie dochodzi tego pasma myśli, ten jest prostym mechanicznym rachmistrzem. Przyjdzie on do jakich potrzeba wypadków; ale ducha, że tak powiem nauki, i myśli Autora nie zrozumie. I ten jest powszechny przeciwko dzisiejszej analizie zarzut; że ta przy wielkiej rachunkowej pracy, nie dosyć ćwiczy i doskonali myślenie. Ten atoli zarzut ściąga się nie do nauki, ale do nieporządnego jej nabycia i używania. Powiedziało się wyżej, że czytanie tego rachunku jest trudne, i wielkiego zastanowienia potrzebujące: kto się

w niem nie ćwiczy, kto nad niem nie pracuje i nie rozmyśla, ale całą usilność łoży na wykonywanie działań: cóż winien język, że go kto nie nauczy się dobrze czytać? a kto go dobrze nie przeczyta, ten zawartych w nim myśli nie postrzeże, ani nie doścignie. Trzeba mieć zawczasu wprawioną i dobrze wyćwiczoną głowę do ciągłej i ścisłej geometrycznej uwagi, żeby jej w rachowaniu nie gubić; ale zawsze iść za nią we wszystkich robotach. Niedostatek takiej uwagi, jest wielką do pożytecznego postępowania w rachunku przeszkodą. Początkiem tego złego jest najczęściej źle młodemu tłumaczona Geometria początkowa; w której niektórzy Autorowie ani na cel nauki, ani na potrzeby młodych umysłów niebaczni, odstępują od trybu *Euklidesa*, który jest jedyny do wprawienia głowy w ścisłą geometryczną uwagę, jak się to wyłożyło w przemowie do *Euklidesa*, wytłumaczonego przez Józefa Czecha.

Kto wprawioną geometryczną głową rozważa i wykonywa rachunki, kto się samego siebie pyta o przyczynę każdego działania, i każdego sposobu; kto pilnie uważa wszystkie rachunku postaci i przemiany, tego na krok rozumowanie nie odstępuje, i taki tylko dobrze potrafi przeczytać to, co mu wypadnie. Prawda, iż są rachunki rozwlekłe i pracowite, do których nas rozumowanie przyprowadziwszy, w ich wykonaniu zdaje się ustawać i spoczywać. Ale też bez tej uporczywej i prawdziwie heroicznej pracy, bylibyśmy pozba-

wieni tylu wielkich prawd, których ani odkryć, ani dowieść inaczej nie można. Jeżeli prawda zależy od związku myśli odległych i zawiłych, bez tej pracy odkryć się nie da. I dla tego wielka liczba najważniejszych w Matematyce wynalazków, jest owocem zaciętego w pracy geniuszu. W tych jednak rozległych i skazanych przez rozumowanie rachunkach, umysł nie jest bez zatrudnienia. Pilna uwaga nad porządkiem i rozwijaniem się ilości podstawia rozumowi rozliczne widoki, a często-kroć ważne do wiadomości prawdy: nastrocza sposoby skracania robót, ich składania lub rozbie-rania, co wszystko ćwiczy uwagę, doskonalą sztukę czytania, i nadaje umysłowi pewny takt w przewidywaniu wypadków rachunkowych.

III.

W każdej odnodze nauk matematycznych i jej przystósowaniu zachodzi jakaś prawda fundamen-talna, która nas w całym rachunku kieruje i pro-wadzi. W Algebrze uważamy ilości nie znane jak znane, wiążemy pierwsze z drugimi, żeby pyta-nie podane w języku pospolitym, wyrazić przez język rachunkowy. *Delagrang* w swoim dziele *Teoryi funkcyi*, wszystko obraca na tym począ-tku: że rozwinięcie każdej funkcyi, prowadzi do nowych funkcyi pochodzących od pierwszej. W Mechanice początek chyżości przygotowanych (vi-tesses virtuelles) jest u niego prawdą fundamen-talną nauki. D'Alembert w swojej Dynamice uwa-ża i dzieli siły na te, które znikły; i te które

ocalały. Śledzenie takich prawd fundamentalnych po wszystkich odnogach Matematyki czystej, zbliżenie ich do siebie, i związanie z jedną prawdą panującą nad całym królestwem tej umiejętności, stanowi mojem zdaniem to, co nazywają *Metafizyką matematyczną*, to jest: szerokiem i ogólnem całej nauki ogarnieniem. Ale tam nie wchodzić nie powinno, co się w rachunku nie zawiera, i coby nim gruntownie poprzeć się nie dało. Miejszczać do tych ścisłych widoków albo nasze własne przywidzenia, albo mniemanej filozoficznej metafizyki tulaćkie wyroki (*des principes vagues*), jestto fałszować naukę: i tę pyszną stolicę prawdy i oczywistości zamieniać na jamę ciemnoty i marzenia. Najważniejszą rzeczą w czytaniu każdego Pisarza, jest czyste i gruntowne objęcie jego prawdy fundamentalnej, jest stosowanie do warunków pytania, lub do zamiarów całej nauki, uważanie dróg i działań przez które go rozumowanie prowadzi, pokonywanie zawad i trudności, które spotyka. Wszystko to wyciąga po czytelniku zagłębionej uwagi i nieprzerwanego rozumowania. Kto za niem nie idzie, jest tylko mechanicznym rachmistrzem, i wykonywając działania, nauki nie rozumie. Są pisarze dzieł matematycznych tak niewyrozumiali i nieużyjci; iż wzięwszy za fundament swojej nauki albo wzór przez siebie odkryty, albo z mało znanego autora wyjęty, opuszczają jego dowód i wyluszczenie. Przez co, albo całe dzieło dla wielkiej liczby czytelników robią nieużyteczne, albo zmęczą więcej czy-

tającego wyszukiwaniem dowodu na ich fundament, niż wykładem całej nauki. Nie tak postępował wielki *Euler*; który w każdym swoim piśmie, czasem aż do rozwlekłości, prawdę fundamentalną najtroskliwiej dowodzi i wyluszcza.

Ponieważ w Matematyce wszystko się wiąże i trzyma razem; prawda fundamentalna rachunku może być bliższem lub odleglejszem ogniwem tej, którą chcemy odkryć lub dowieść. W pierwszym przypadku rachunek będzie prostszy i krótszy: w drugim będzie dłuższy i zawilszy; bo trzeba przechodzić przez większy szereg prawd prowadzących do tej, której szukamy. I ta jest pierwsza przyczyna, dla czego tę samą rzecz jedni dowodzą rachunkiem długim, drudzy rachunkiem krótkim i prostym. Najczęściej świeżo wynaleziona prawda jest wypadkiem pracowitego rachunku, która potem dowodzi się i wyciąga z rachunku prostego i łatwego; co jest skutkiem albo wydoskonalenia nauki, albo spostrzeżenia początku, który jest i bliższy i właściwszy tej prawdzie. Jest jeszcze druga przyczyna, że to, co może być łatwo lub krótko wynalezione lub dowiedzione, wprowadza nas w rachunki długie i pracowite: a tą jest użycie niewłaściwego *Algorytmu*. Sposób n. p. prowadzenia stycznych do linii krzywych, i porównania ich z kołem, może nam się w niektórych liniach udać przez długi rachunek algebry; kiedy tenże sposób przez rachunek różnicowania wypada prosty i łatwy, i na wszystkie bez wyjątku linije służący. Jest więc w rozumo-

waniu rachunkowem rzeczą niezmiernie ważną poznać i wybrać algorytm pytaniu zadanemu właściwy.

Trafiamy czasem w rachunku na wypadki zadziwiające i nadzwyczajne, których z prawdami fundamentalnemi, ani ze sposobami przez nas użytemi pogodzić nie można. W Algebrze n. p. zrównanie trzeciego stopnia zawierające same pierwiastki rzetelne, w rozwiązaniu pokazuje te pierwiastki w postaci urojonej. W wyższych rachunkach, różnicując czasem zrównanie, wpadamy na jego całkość: to jest, na wypadek wręcz działaniu przeciwny. To samo zrównanie raz nas prowadzi do linii prostej, a drugi raz do linii krzywej. Wszystkie podobne rachunkowe zjawienia zebrał *Euler*, i wydał w aktach Akademji Petersburskiej pod nazwiskiem *Paradoxów*.

Ale skoro *Delagranż* dowiódł, że trudność spotkana w Algebrze pochodziła ze złego czytania; bo znakowi pierwiastkowemu trzeciej potęgi przypisywano jedną tylko wartość, kiedy ten ma ich trzy; i że wyrazy urojone pod tym znakiem nie są urojonemi. Skoro znowu tenże *Delagranż* ustanowił i wywiódł teorią ogólną *rozwiązań szczególnych* (*Solutions particuliaires*); wszystkie te *paradoxa* znikły, wszystko się pokazało pewne, zgodne, i powiązane. Więc dziwactwa, że tak powiem rachunkowe, wydają nam się dla tego tylko takimi; że albo źle czytamy rachunek; albo nie wiemy jeszcze wielkiej, jakiej prawdy, z której koniecznie wypadają. Im sztuka rachun-

kowa bardziej wzrastać i doskonalić się będzie, im większy w jej rozważaniu i wykonywaniu zrobimy postępek, tym będzie czytanie łatwiejsze i dokładniejsze. Zgola można bez ogródki powiedzieć, że wzrost i doskonałość rachunku, prowadzi do dokładniejszego go czytania. Tu razem za doskonałością języka, idzie rozszerzenie naszych myśli, i głębsze rzeczy pojęcie.

Z tego cośmy dotąd wyłożyli, pokazuje się:

Naprzód. Ze rozumowanie rachunkowe zależy na umiejętnem czytaniu i użyciu języka: na sztuce wiernego i zwięzłego wyrażenia prawd i myśli dobrze rozważonych: na widzeniu ich porządku, związku, i genealogji, skazanych przez rachunek.

Powtórę. Że ten rachunek ogarniając wielką liczbę myśli, i zawierając je w ścisłym symbolicznym wyrażeniu, jest podporą sił umysłowych, i ochroną pamięci, a tem samem wielką pomocą do dalszego tych myśli równania i wiązania. Pożytek szacowny! którego żadne inne nauki nie mają.

Po trzecie. Że drogi, przez które ten rachunek przechodzi, są gościńcem pewności; gdzie nie spotkać nie można ani wątpliwego, ani mylnego: co by mogło umysł z drogi prawdy sprowadzić. Drugi pożytek walny! jednej tylko Matematyce służący.

Po czwarte. Że rachować bez ciągłej uwagi i rozumowania, nie jestto uczyć się nauki, ale jej mechanizmu.

Po piąte. Że mechanizm rachunkowy z uwagą i rozumowaniem prowadzony, nadaje umysłowi bystrzejszy widok rzeczy, i częstokroć w wykonywaniu go, nastrocza nowe a łatwiejsze drogi i sposoby.

Po szóste. Że przydawać do tłumaczenia rachunku to, czego w nim nie masz, albo roztrząsać go z pomocą metafizyczną, jestto fałszować naukę, i umysł z drogi prawdy i pewności sprowadzać.

Po siódme. Że wszystkie w rachunku *paradoxa* i dziwactwa ztąd pochodzą, że albo go źle czytamy; albo nie wiemy jeszcze jakiej prawdy, z której wynikają.

Z czego wszystkiego łatwo zrozumieć ważność usługi, którą przynosi rachunek naukom tak nazywanych *faktów*, *obserwacyi* i *doświadczeń* nie dających się związać w jedno umiejętnie pasmo ciągłego i nieporuszonego w pewności rozumowania: bo gdziekolwiek te nauki nie są rachunkiem wsparte, nie przestają być albo zbiorem *prostej erudycyi*; albo że tak powiem, trzęsawiskiem ustawicznie się odmieniających teoryi i mniemań.

Jak dziś w Matematyce rozumujemy za pomocą liter, tak dawni Geometrowie rozumowali za pomocą rysunku i figur. U nas nazwiska rzeczy, ich porównania i stosunki, mają osobny, sobie tylko właściwy język: u dawnych wszystko to wyrażano językiem pospolitym. U nas każda pra-

wda staje się widoczną w symbolicznem wyrażeniu, i pamięci nie morduje; u nich wyrażona ułatującami słowy, potrzebowała i pamięci i uwagi, które tym więcej były obciążone, im przez dłuższy szereg prawd wypadało przechodzić. U nich trzeba było pamiętać wszystkie myśli, żeby je wydać językiem; nateżyć uwagę, żeby je zestósować: u nas trzeba tylko rozumieć język, żeby te myśli stawily się na widoku: a stósowanie samo znaków symbolicznych, daje stósowanie i porównanie myśli, bez nowej pracy umysłowej. Rysunki i figury skazywały starożytnym wiele cząstkowo i następnie dowiedzionych prawd; ale im związku tych prawd razem ogarnąć ani wystawić nie mogły; bo to jest dziełem języka, którego nie mieli. U nich rozum zawsze był zatopiony w rzeczy; u nas rzecz raz językiem symbolicznym wyraziwszy, cała praca obraca się na język.

Z tego łatwo zrozumieć, że nauka dawnych Geometrów choć niezmiernie ważna i szacowna w wykładaniu prawd tak prostych jak są w Geometrii *Euklidesa*; w badaniach atoli głębszych musiała być długa, trudna, i zawiła; a przeto bardzo małej liczbie głów przystępna. Była ona jeszcze bardzo ograniczona; bo nie mając wsparcia od języka, w rozmaitych odmianach i postaciach te same prawdy wydającego i wiążącego, wszystko trzeba było z nateżonej uwagi wydobywać i wyciągać. Ich więc tryb więcej prawda zatrudniał rozum, i mordował uwagę; ale tak daleko postąpić nie mógł w swoich badaniach, ile tryb dzi-

siejszy: gdzie wiele prawd jest wypadkiem samego języka.

Cała więc różnica między nauką starożytnych, a nauką dzisiejszą zależy na języku: który nazywano *analitycznym*, a którego dawni nie znali. Wszystkie inne różnice, nad którymi się pisarze matematyczni rozwodzą, mam za bałamutne, i nie nie stanowiące. W używaniu tego języka zachodzą trzy prawidła. *Pierwsze*: rzeczy nieznane tak uważać jak znane, i je z drugimi równać, stósować i wiązać. To prawidło było starożytnym znane: jako to widzieć można w ich sposobach rozwiązywania zagadnień; i można powiedzieć, żeśmy go się od dawnych nauczyli. *Drugie* prawidło: rozumowanie i jego wypadki wystawić w znakach ogólnych, i zrobić je widzialne w wyrazach zwięzłych i krótkich. Tego starożytni nie znali. Grecy i Rzymianie znaczyli prawdę w Arytmetyce liczbą przez litery alfabety: ale te litery nie miały znaczenia ogólnego: wartość każdej była tak oznaczona, jak dzisiaj w cyfrach arabskich. Oprócz tego trzeba tu znaków ogólnych na rzeczy, i znaków na działania: czego dawni nie znali. *Trzecie* prawidło: rzeczy nieznaną oddzielić od znanych, i pierwsze wyrazić przez ostatnie. Do tego trzeba znać *algorytm* na znaki ogólne, czego także starożytni nie wiedzieli. W prostych stosunkach myśli, szli za rozumowaniem, pokazując jak w rzeczach znanych zawiera się to, czego szukamy. Przykłady tego czytać można w książce *Data Euclidis*. W pytaniach zawilszych używali *konstru-*

kcyi, szukając w przecięciach linji wyrazu całej propozycji ogarniającej rzeczy znane i nieznanne: co stanowiło część Matematyki bardzo dowcipną, ale niezmiernie zawilą, i do małej liczby przypadków rozciągać się mogącą.

Cechą charakterystyczną dzisiejszej analizy są znaki ogólne i ich *algorytm*, całkiem starożytnym nieznanne: a zatem ich mniemana analiza, nie była analizą dzisiejszą. Ale głębokie trybu starożytnego rozważanie, mogło do trybu dzisiejszego stopniami prowadzić. Sześć ksiąg arytmetycznych *Diofanta* rozbiegającego trudne własności liczb, objaśnione przez *Fermata*, najlepiej tego dowodzą. Z tego widzieć można, jak ważną było rzeczą w trybie starożytnym ustanowienie jasnych i gruntownych *definicji* czyli opisów słów i rzeczy: przeciwko którym tak się niesłusznie dąsa *Kondillak*. Używając języka pospolitego do swych subtelnych rozumowań, trzeba było ściśle opisać tego języka znaczenie, i nigdy tego znaczenia z oczu nie spuszczać. Czego my dziś w języku analitycznym przynajmniej tak często, nie potrzebujemy.

Dowodząc więc jakiej prawdy, albo rozwiązując jakie pytania przez rysunek figur, postępujemy w Matematyce sposobem *syntetycznym*. Choćbyśmy nawet znaków algebraicznych użyli, ale gdy te znaki nie więcej nie robią, tylko skracają mowę pospolitą; sposób nie przestaje być syntetyczny. Jeżeli zaś do dowiedzenia jakiej prawdy, lub do rozwiązania jakiego pytania używamy liter i znaków ogólnych, i z rozumowania nad temi li-

terami, z ich algorytmu, wyciągamy wnioski; postępujemy w Matematyce sposobem *analitycznym*. I choćbyśmy nawet do tego użyli rysunku i figur, ale gdy te figury na nie więcej nie służą, tylko żeby albo objaśnić rachunek, albo żeby łatwiej przyjść do wyrażenia naszego zadania przez litery, a potem całe rozumowanie obrócić na język; sposób postępowania nie przestaje być analitycznym. Zgoła są to dwie drogi objawiającego się swem działaniem rozumu. Ten gdy stosunki i związki myśli rozważa w rysunku lub w definicyi, postępuje *syntetycznie*: gdy je czyta w języku ogólnym, w jego symbolicznych wyrażeniach, własnościach, i przemianach, postępuje *analitycznie*. Otoż mamy czyste i wierne tych dwóch wyrazów znaczenie w Matematyce, które po wielu książkach tak bałamutne, tak rozmaicie, i niekiedy fałszywie są wykładane. Powiedzieć że *analiza* jest rozbiór, może to być prawdą w Chemji i innych naukach, ale jest fałszem w Matematyce; bo *analiza* i składa, i rozbiera. Najczęściej zaczyna od składu, a kończy na rozbieraniu. Kiedy rzeczy nieznane miesza ze znanemi, żeby je związać, i na język analityczny wytłumaczyć; wtenczas składa. Kiedy nieznane chce oddzielić od znanych, wtenczas to, co jest złożone, rozbiera. Gdy z wyrazu symbolicznego wyciąga wnioski; w ten czas zbiór wielu prawd rozkłada na prawdy i przypadki pojedyncze.

Powiedzieć znowu, że *synthesis* zaczyna od prawd ogólnych, a *analysis* od szczególnych, jest

także wielkim w Matematyce fałszem. Każda z nich idzie od rzeczy znanych do nieznanych, — od prostych do zawilszych: zaczyna od tego, cośmy już dobrze poznali, a zatem jedna lub druga droga służyć może obudwom przez wzgląd na zadanie, i na stopień naszych wiadomości. *Euklides* w swojej syntetycznej Geometrii idzie od linii i kątów, do trójkątów jako figur najprostszych, od tych do czworoboków, potem do wieloboków i płaszczyzn, zgoła od rzeczy prostych do złożonych i coraz zawilszych.

W obudwóch trybach dowód jakiej prawdy tym jest gruntowniejszy, im jest wyciągniony z ogólniejszej prawdy. W rozwiązaniu zadań drogą analityczną najczęściej trzymamy się takiego sposobu: że podane pytanie uważamy, jako przypadek szczególny ogólniejszego początku, i z niego je wydobywamy. W biegu n. p. ciał niebieskich wszystkie *fenomena* wyciągamy z praw ogólnych *attrakcyi*: a te prawa *attrakcyi* uważamy znowu, jako szczególny przypadek sił jakiegokolwiek, w jakimkolwiek kierunku, i podług jakiegokolwiek praw na ciało działających. Więc tu analiza idzie od rzeczy ogólnych do szczególnych. Ale kiedy fenomen jaki w naturze podciągamy pod rachunek; zaczynamy czasem od tego szczególnego fenomenu wiążąc go i stosując, albo z fenomenami innymi, żeby dojść ich od siebie zawisłości; albo z prawdą jaką ogólną, żeby dojść źródła i początku z którego ten fenomen wypływa: a na ten czas od rzeczy szczególnych postępujemy do ogólnych.

nych. Więc obiedwie te drogi służyć mogą obudwom trybom; bo wybór drogi nie zawisł od trybu, ale od stopnia i od środków naszych wiadomości, tudzież od tego; co nas łatwiej i prędzej prowadzi do wynalezienia rzeczy szukanej.

Powiadają, że nauki matematyczne winny swoje pewność i oczywistość trybowi (methodus): ten tryb zasadzają na szeregu nazwisk używanych w Matematyce, jako to *twierdzenie* (theoremata), *wniosek* (corollarium), *objaśnienia* (scholion), *prawda przybrana* (Lemma), *zadanie* (problema) i t. d. Rozumiano nawet, że wprowadzenie tych nazwisk do innych nauk nada im ścisłość matematyczną. W ten błąd wpadł szanowny zkładnik Matematyki Pisarz *Christian Wolff*, który te nazwiska powprowadzał do swoich dzieł filozoficznych *Metafizyki*, *Etyki* i t. d. i wyklada je sposobem niby *Euklidesa*. Myśl prawdziwie i niedorzeczna i śmieszna! bo gdy nauka sama z siebie nie jest zdolna do przyjęcia ścisłej pewności, tej jej zapewne nazwiska matematyczne nie nadadzą. Jakoż cały ten paradny *ekwipaż* nazwisk matematycznych nie mógł nauki *Wolfa* od upadku uratować.

Nauki matematyczne winny swoje pewność i oczywistość: naprzód swojej rzeczy; czyli przedmiotowi, prostemu, rozległemu, i doskonale w swoim znaczeniu opisanemu: winny ją widokowi, pod którym rozum ten przedmiot uważa, nie do niego nie mieszając, tylko sposobność powiększania się lub zmniejszania, a zatem uważając od-

miany z natury tego przedmiotu wynikające: winny ją opisom czyli *definicjom* jasnym, prostym, i od nikogo zaprzeczyć się nie mogącym: winny ją nakoniec trybowi, który nie zależy na słowach i nazwiskach; ale na pewnem i nieomylnem wnioskowaniu bądź *syntetycznem*, kiedy te wnioski opieramy na opisie fundamentalnym albo na rysunku; bądź *analitycznem*, kiedy je opieramy na języku ogólnym, i na jego uwieśdź nas nie mogących działaniach. Jak pierwszy tak drugi wnioskowania sposób jest pewny i gruntowny; ale analityczny jest bujniejszy i dalej sięgający. Nowe widoki, i nowe wynalazki w tym języku, rodzą nowe prawdy, i nowe nauki; i dla tego wzrost Matematyki jest wielki i nigdy się niekończący. Jest ona tylko sama prawdziwą umiejętnością; bo jest stolicą pewności, bo samowładnie panuje nad całą krainą poznawań ludzkich: jej bowiem wszystkie prawie nauki potrzebują, a ona żadnej: jak to dobrze powiedział *Jak Bernoulli* *).

Mamyż te korzyści w innych naukach, a zatem możemyż do nich ścisłość matematyczną wprowadzić? Niezaiste. Przedmiot innych nauk albo jest zbyt złożony i zawikłany, albo dostatecznie nie opisany i tułacki (*vague*), do wszystkiego i do niczego wyraźnie nie przystający; albo zale-

*) *Omnes scientiae mathesi indigent; mathesis nulla; sed sola sibi sufficit.*

żący, od umowy, upodobania, od mniemań i namietności ludzkich tysiącnym różnitościom i szperaniom podległych. *Fakta*, *obserwacje*, i *doświadczenia* mogą być stateczne i pewne; ale widok ich w umyśle ludzkim może być mylny; i ten widok inne *fakta* mogą odmienić albo wywrócić. Trzebaby żeby umysł ludzki trafnie ogarniał, i to co jest, i to co być może: co jest rzeczą niezmiernie trudną dla umysłu pewną podporą nie utwierdzonego w swych wnioskach; a rozmaicie kręcić się i obracać mogącego w swoich widokach. Wszystkie więc inne nauki i poznawania nasze siłami umysłu dochodzone są albo erudycją, albo zbiorem prawd i mniemań, albo po większej części zbliżeniem się i podobieństwem do prawdy, ale żadna nie jest ciąglem pasmem niezachwianej w niczem pewności.

Nie masz więc w żadnej nauce *analizy matematycznej*, gdzie język rachunkowy nie wchodzi.

Cóż tedy znaczyć w nich będzie ten wyraz *analiza*, z którym tak często dziś wyjeżdżają pisarze książek, nie tłumacząc się co przez to chcą rozumieć? W Chemji rozbierają się ciała na swoje pierwiastki, i z tych znowu połączenia składają się i tworzą na nowo. To rozbieranie i składanie może jest *analizą* i *syntezą* chemiczną, ale nie matematyczną. W innych naukach ten wyraz *analiza* znaczy pewny porządek i szyk tak rzeczy jak myśli w wykładaniu nauki. Każde podanie i każda prawda uważa się jako wniosek innej prawdy dobrze poznanej, lub *faktów* i postrzeżeń dobrze

już pojętych; i nie objawia się aż po jej dowiedzeniu. Jestto jak widzimy, porządne wiwijanie rzeczy nieznanych, albo raczej dla uczącego się nowych, z rzeczy już mu wiadomych. Można by go nazwać sposobem *wynalazkowym*: ale to nie jest analiza matematyczna; bo ten sposób służy równie i syntezie i analizie. Wykład takowy nie we wszystkich naukach udać się może: osobliwie gdzie zachodzą prawidła naśladowania, umowy, upodobania i smaku; i gdzie rozumowanie ścisłe miejsca nie ma.

Ma ten wykład w niektórych naukach swoje pożytki: ale też ma swoje nieprzyzwoitości. *Na-przód*: wciąga nas często w długą i rozwlekłą gadaninę: która jest wielką wadą i myślenia i pisania, a nawet przeszkodą do czystego pojęcia. *Powtóre*: przez zbyt wielką bacność na porządek wywijających się myśli, odrywamy uwagę na ścisłość ich związku, na ich cieniowe i delikatne różnice, które mogą całe wnioskowanie zrobić fałszywe. Jestto więc wprawiać młodego we wnioskowanie nagłe i śliskie, bez gruntownego zastanowienia się i zgłębienia wszystkich słów i myśli w rozumowanie wchodzących: albo co na jedno wyjdzie, jestto uczyć go rozumować o tem, czego dobrze nie poznał, i wykrzywić mu głowę, żeby ją uporządkować. Częstokroć przez tę nieuwagę, albo przez tę zbytnią troskliwość o łatwe pojęcie i porządek myśli, zaniedbujemy ich zgłębienie, a zatem gruntowność myślenia: i nieznacznie wpadamy w wadę dawnej dyalektyki, i nowej filozofji

niemieckiej, gdzie wszystko obraca się na *formie*; zamiast na zgłębieniu rzeczy, i na gruntownych dowodach, które wyrażone goło i bez żadnej *formy* mocniej na przekonanie działają. Dobrze więc jest używać w naukach sposobu wynalazkowego, gdzie ten bez szkody, i bez wymienionych wyżej nieprzyzwoitości użyty być może; ale go się nie godzi za правило powszechne w wykładzie nauk przepisywać.

KONIEC TOMIKU IV.

DZIEŁ J. SNIADOCKIEGO.

