

to największy nacisk szyny i naprężenie w niej otrzymują się:

$$P = \frac{G}{2} \sqrt[4]{\frac{Da^3}{4EI}}; \quad \frac{M}{W} = 0,28G \sqrt[4]{\frac{4aE}{DI^2}}$$

Jak widać z tych wzorów, największy wpływ na zmniejszenie ciśnienia na podpórę i jej podłoże wywiera rozstaw podkładów, na naprężenie zaś w szynie moment bezwładności jej przekroju.

3. Określenie naprężeń i odkształceń szyny, rozpatrywanej jako belka na sprężystych podporach, obciążona układem ciężarów. Równanie pięciu momentów. Sposób wykreślny oznaczenia wpływu zmian w położeniu obciążenia. Belka na czterech podporach sprężystych. Osiadanie szyn pomiędzy podporami i nad nimi. Współczynnik sprężystości kolei szynowej.

Dla belki na kilku podporach niejednakowej wysokości, momenty M_1, M_2, M_3 nad każdymi trzema podporami po sobie idącymi (rys. 174) związane są równaniem:

$$\begin{aligned} M_1 a_{12} + 2M_2 (a_{12} + a_{23}) + M_3 a_{23} = \\ - 6EI \left\{ \frac{y_1 - y_2}{a_{12}} - \frac{y_2 - y_3}{a_{23}} \right\} - \frac{\Sigma G_{12} z_{12} (a_{12}^2 - z_{12}^2)}{a_{12}} - \\ - \frac{\Sigma G_{23} (a_{23} - z_{23}) \{ a_{23}^2 - (a_{23} - z_{23})^2 \}}{a_{23}} - \frac{1}{4} (q_{12} a_{12}^3 + q_{23} a_{23}^3) \dots \quad (154) \end{aligned}$$

w którym y_1, y_2, y_3 wyrażają pionowe odległości podpór od osi OX ; G_{12}, G_{23} ciężary skupione, zaś q_{12} i q_{23} jednostajnie rozłożone obciążenie na jednostkę długości belki, odpowiednio w przęsłach 1—2 i 2—3. Przed wyrazem, zawierającym EI , postawiony jest znak ujemny, ponieważ i w tym przypadku, również jak przedtem przy rozpatrywaniu ugięcia podkładu, za dodatnie przyjęto uważać siły skierowane ku górze.

Jeżeli oznaczymy przez A_2' i A_2'' części oddziaływania A_2 podpory 2 pod wpływem przęseł 1—2 i 2—3, to wielkości tych części można określić z równań momentów:

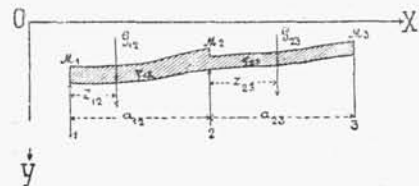
$$M_1 = M_2 + A_2' a_{12} - \Sigma G_{12} z_{12} - \frac{q_{12} a_{12}^2}{2} \dots \dots \dots (155)$$

$$M_3 = M_2 + A_2'' a_{23} - \Sigma G_{23} (a_{23} - z_{23}) - \frac{q_{23} a_{23}^2}{2} \dots \dots \dots (156)$$

skąd

$$\begin{aligned} A_2 = A_2' + A_2'' = \frac{M_1 - M_2}{a_{12}} - \frac{M_2 - M_3}{a_{23}} + \frac{\Sigma G_{12} z_{12}}{a_{12}} + \\ + \frac{\Sigma G_{23} (a_{23} - z_{23})}{a_{23}} + \frac{q_{12} a_{12}}{2} + \frac{q_{23} a_{23}}{2} \dots \dots \dots (157) \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że w równaniu (157) wyrazy, zależne od obciążenia, oznaczają tę część oddziaływania podpór, która występowałaby wyłącznie, gdyby belka składała się z oddzielnych przęseł, swobodnie spoczywających na podporach.



Rys. 174.

Z uwagi, że ciężar szyny jest bardzo nieznaczny w porównaniu z naciskiem koła, przy obliczaniu szyny można ją rozpatrywać jako belkę, znajdującą się pod działaniem wyłącznie tylko ciężarów skupionych. Z wyjątkiem podkładów, znajdujących się w bliskości końców szyn, wszystkie pozostałe rozmieszcza się zwykle w równych odległościach, które są wogóle mniejsze od rozstawu osi taboru, a więc szyna podlegać może działaniu nie więcej jak jednego ciężaru w każdym przęśle. Z wymienionych względów przy obliczaniu szyny równanie trzech momentów da się przedstawić w następującej postaci:

$$M_1 a + 4M_2 a + M_3 a = -6EI \left\{ \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{a} \right\} - \frac{G_{12} z_{12} (a^2 - z_{12}^2)}{a} - \frac{G_{23} (a - z_{23}) [a^2 - (a - z_{23})^2]}{a} \quad (158)$$

oddziaływanie zaś jakiejkolwiek podpory, naprz. podpory 2:

$$A_2 = \frac{M_1 - 2M_2 + M_3}{a} + \frac{G_{12} z_{12}}{a} + \frac{G_{23} (a - z_{23})}{a} \quad (159)$$

Jeżeli za oś odciętych przyjmiemy oś obojętną belki w stanie nieobciążonym, to w przypadku podpór sprężystych rzędne y_1 , y_2 , y_3 będą wyrażać osiadanie podpór, które winno być proporcjonalnem do wywieranego na nie nacisku.

Zgodnie z równaniem (143):

$$y_1 = \frac{A_1}{D}; \quad y_2 = \frac{A_2}{D}; \quad y_3 = \frac{A_3}{D},$$

a więc, posiłkując się wzorem (159), można wyrazić osiadanie każdej z podpór w zależności od trzech momentów, a mianowicie nad daną podporą i nad dwiema sąsiednimi, oraz w zależności od obciążenia dwóch przęseł, sąsiadujących z daną podporą. Podstawiając wartości y_1 , y_2 i y_3 w równanie (158), otrzymamy zależność pomiędzy momentami nad pięcioma podporami po sobie idącymi i obciążeniem przęseł, między nimi się znajdujących. Dla belki na n podporach ilość takich równań będzie $n - 2$, które razem z dwoma równaniami: $M_1 = 0$ i $M_n = 0$, oznaczającymi, że na podporach skrajnych belka leży swobodnie, dają możliwość określenia momentów nad podporami, a zatem nacisków na te podpory i ich osiadania.

Moment w dowolnym przekroju belki między podporami, naprz. między podporą 2 i punktem przyłączenia ciężaru G_{23} , znajdującym się w odległości x od podpory, można określić, posiłkując się równaniem $M = M_2 + A_2'' x$:

$$\begin{aligned} M &= M_2 + (M_3 - M_2) \frac{x}{a} + G_{23} (a - z_{23}) \frac{x}{a} = \\ &= M_2 \frac{a - x}{a} + M_3 \frac{x}{a} + G_{23} (a - z_{23}) \frac{x}{a} \quad (160) \end{aligned}$$

Ostatni wyraz, zależny od obciążenia, jest momentem dla tegoż przekroju w przypuszczeniu, że belka spoczywa na podporach swobodnie.

Po uskutecznieniu wskazanych powyżej podstawień, równania, wyrażające zależność momentów nad pięcioma po sobie idącymi podporami belki ciągłej, począwszy od podpory $m + 1$ -ej, otrzymają następującą postać ogólną:

$$\gamma M_{m+1} + \beta M_{m+2} + \alpha M_{m+3} + \beta M_{m+4} + \gamma M_{m+5} = Z_{m+3} \quad \dots \quad (161)$$

Jeżeli na podporach skrajnych belka leży swobodnie, t. j. jeżeli $M_1 = 0$ i $M_n = 0$, to w równaniach tych ilość momentów będzie wzrastać od trzech na początku belki do pięciu i o tyleż zmniejszać się w jej końcu. Tak naprz., dla belki na siedmiu podporach równania momentów nad podporami będą następujące:

$$\left. \begin{aligned} \alpha M_2 + \beta M_3 + \gamma M_4 &= Z_2 \\ \beta M_2 + \alpha M_3 + \beta M_4 + \gamma M_5 &= Z_3 \\ \gamma M_2 + \beta M_3 + \alpha M_4 + \beta M_5 + \gamma M_6 &= Z_4 \\ \gamma M_3 + \beta M_4 + \alpha M_5 + \beta M_6 &= Z_5 \\ \gamma M_4 + \beta M_5 + \alpha M_6 &= Z_6 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (162)$$

W równaniach tych γ ma znaczenie przyjęte powyżej (str. 297):

$$\gamma = \frac{B}{D}; \quad B = \frac{6El}{a^3}; \quad D = \frac{CbL}{[\eta_p]}$$

Współczynniki α i β są również zależne od γ , a mianowicie:

$$\alpha = 4 + 6\gamma; \quad \beta = 1 - 4\gamma.$$

Strony prawe równań (162) zależne są dla danej belki wyłącznie od ciężarów G i ich odległości z od lewych podpór, t. j.

$$Z = f(G, z)$$

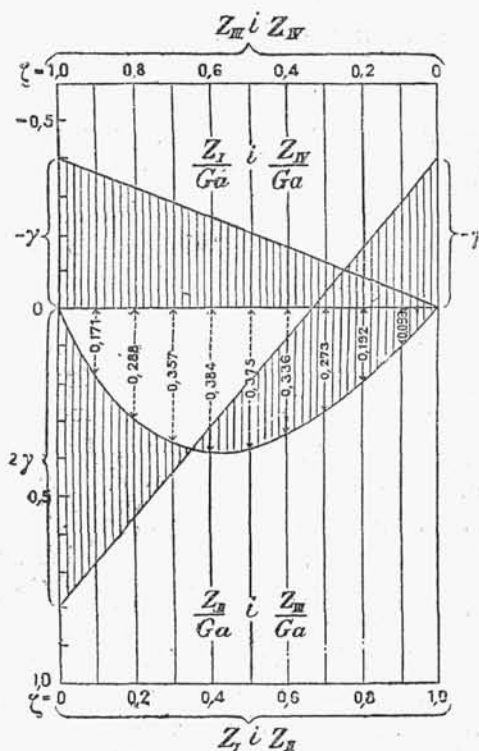
Dla uproszczenia tych funkcji rozpatrzmy z osobna wpływ na ugięcie belki każdego z poszczególnych ciężarów.

Jeżeli na belkę działa jeden tylko ciężar skupiony, to po stronie prawej równań (162) wszystkie Z , z wyjątkiem czterech, winny się równać zeru. W istocie, strona prawa każdego z tych równań jest funkcją tych tylko ciężarów, które znajdują się w czterech przęsłach, a mianowicie pomiędzy temi podporami, nad którymi działają momenty, umieszczone po lewej stronie równań. Oznaczmy te cztery wartości funkcji Z przez Z_I, Z_{II}, Z_{III} , i Z_{IV} . Z prawej strony równań (162) oznaczono wielkości Z znakami, odpowiadającymi znakom momentów nad środkowymi z pięciu podpór, to jest momentów ze współczynnikiem α . Jeżeli belka obciążona jest jednym ciężarem, to Z (o ile nie równa się zeru) ma znaczenie Z_I , jeżeli ciężar ten znajduje się w przęśle pierwszym z czterech, wchodzących w równanie pięciu momentów, licząc od prawej strony, Z_{II} jeżeli w drugim od prawej strony i t. d. Tym sposobem w zależności od przęsła, w którym znajduje się ciężar skupiony, strony prawe równań (162) będą miały następujące wartości, które, jakkolwiek podane są poniżej tylko dla belki na 7 podporach, z łatwością mogą być określone przez podobieństwo dla wszelkiej innej ilości podpór.

Ciężar skupiony znajduje się w przęśle:	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7
$Z_2 =$	Z_{III}	Z_{II}	Z_I	0	0	0
$Z_3 =$	Z_{IV}	Z_{III}	Z_{II}	Z_I	0	0
$Z_4 =$	0	Z_{IV}	Z_{III}	Z_{II}	Z_I	0
$Z_5 =$	0	0	Z_{IV}	Z_{III}	Z_{II}	Z_I
$Z_6 =$	0	0	0	Z_{IV}	Z_{III}	Z_{II}

Wielkości Z_I , Z_{II} , Z_{III} i Z_{IV} , mają następujące znaczenia:

$$\left. \begin{aligned} Z_I &= Ga \{-\gamma + \gamma\zeta\} \\ Z_{II} &= Ga \{2 - 3\zeta\} \gamma - 2\zeta + 3\zeta^2 - \zeta^3\} \\ Z_{III} &= Ga \{3\zeta - 1\} \gamma - \zeta + \zeta^3\} \\ Z_{IV} &= Ga \{-\gamma\zeta\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (163)$$



Rys. 175.

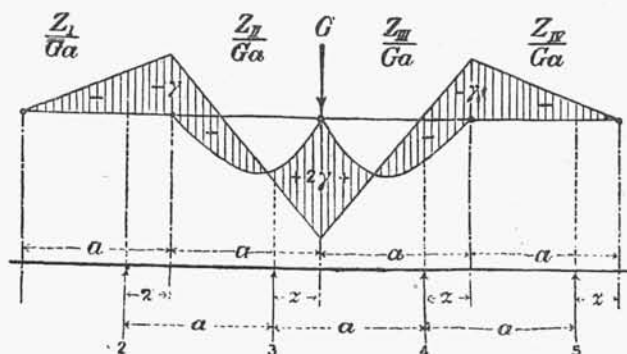
przyjęto $\gamma = 0,4$. Na rys. 176 też same wielkości wykreślone są obok siebie jedna za drugą.

w których $\zeta = \frac{z}{a}$.

Dla danej budowy wierzchniej γ jest wielkością stałą i w tym przypadku wielkości (163) mogą być przedstawione wykreślnie, rozpatrując oddzielnie wyrazy zależne i niezależne od γ . Pierwsze z nich, zawierające ζ w stopniu pierwszym, przedstawiają linie proste, których pochylenie znajduje się w zależności od γ , pozostałe zaś wyrazy, zawierające ζ , przedstawiają krzywą trzeciego stopnia, przecinającą oś odciętych przy $\zeta = 0$ i $\zeta = 1$. Łatwo się przekonać, że jeżeli ζ zmienia się stopniowo od 0 do 1, to wielkości Z_I i Z_{II} otrzymują odpowiednio także same znaczenia, jak Z_{IV} i Z_{III} przy zmienianiu się ζ od 1 do 0.

Na rys. 175 uwidocznione są wielkości $\frac{Z_I}{Ga}$, $\frac{Z_{II}}{Ga}$, $\frac{Z_{III}}{Ga}$ i $\frac{Z_{IV}}{Ga}$ w zależności od ζ , przyczem dla przykładu

Jeżeli za jednostkę do wymierzania odciętych przyjmujemy odległość pomiędzy podporami i, oznaczwszy te podpory pod wykresem w tejże od siebie odległości, przypuścimy, że środek wykresu G odpowiada punktowi przyłączenia

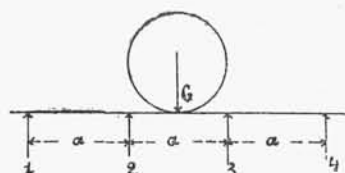


Rys. 176.

nia ciężaru, to linie pionowe, przechodzące przez podpory, będą odcinać na wykresie wielkości Z prawych stron równań (162) z temiż numerami, co i podpory. Przesuwając wykres wzdłuż belki, można otrzymać dla dowolnego położenia ciężaru skupionego G odpowiadające mu wartości Z .

Rozpatrując dla przykładu najprostszego przypadek belki na czterech podporach sprężystych (rys. 177), otrzymamy dla momentów nad podporami następujące równania:

$$\begin{aligned} \alpha M_2 + \beta M_3 &= Z_2 \\ \beta M_2 + \alpha M_3 &= Z_3 \end{aligned}$$



Rys. 177.

Jeżeli ciężar położony jest w przęśle środkowym 2—3, to $Z_2 = Z_{II}$ i $Z_3 = Z_{III}$.

Jeżeli wreszcie ciężar ten położony jest po środku przęsła środkowego, to $M_2 = M_3$ i moment nad jedną z podpór środkowych otrzymuje się z równania:

$$(\alpha + \beta) M_2 = Z_{II} = Ga \{ 2\gamma - (3\gamma + 2)\zeta + 3\zeta^2 - \zeta^3 \}$$

przyczem:

$$\zeta = \frac{z}{a} = \frac{1}{2}$$

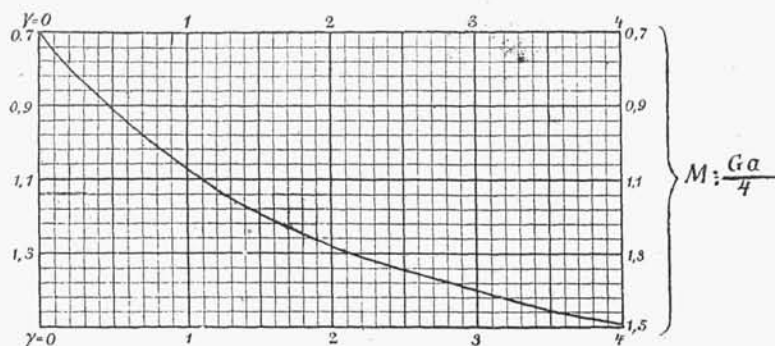
$$M_2 = \frac{Ga}{\alpha + \beta} \left\{ \frac{\gamma}{2} - \frac{3}{8} \right\} = \frac{4\gamma - 3}{4\gamma + 10} \cdot \frac{Ga}{4} \quad \dots \quad (164)$$

Moment M pośrodku belki, t. j. w punkcie przyłączenia ciężaru:

$$M_0 = \frac{1}{2} (M_2 + M_3) + \frac{Ga}{4} = \frac{8\gamma + 7}{4\gamma + 10} \cdot \frac{Ga}{4} \quad \dots \quad (165)$$

Wzór (165) daje wartości zbliżone do tych, jakie się otrzymuje w razie obciążenia belki wieloprzęsłowej kilkoma ciężarami, położonemi we wzajemnej odległości, równej potrójnej odległości między podporami lub większej. Wraz

ze zmniejszeniem się odległości pomiędzy ciężarami, t. j. pomiędzy osiami taboru, największy moment także się zmniejsza. Ciężar własny szyny również zmniejsza momenty o 5% do 10%. Wobec tego wzór (165), zwany wzorem Zimmermann'a, może być stosowany do przybliżonego wyznaczenia wartości największego momentu, działającego na szynę.



Rys. 178.

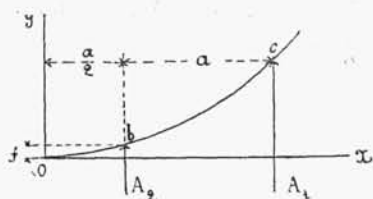
Moment gnący dla szyny na czterech podkładach, obciążonej po środku.

Na wykresie (rys. 178) uwidocznił się stosunek momentu, określonego według wzoru (165), do momentu, jaki otrzymuje się dla belki, spoczywającej swobodnie na dwóch podporach, w zależności od γ . Wykres ten uwidocznił wpływ sztywności podpór na zmniejszenie momentu działającego na szynę.

Określmy jeszcze dla tegoż przypadku obciążenia osiadanie szyny pomiędzy podporami i nad nimi. Osiadanie podpór może być określone w zależności od ich oddziaływania według wzoru (159):

$$y_1 = \frac{A_1}{D} = \frac{M_2}{aD} = \frac{4\gamma - 3}{(4\gamma + 10)} \cdot \frac{G}{D} \quad (166)$$

$$y_2 = \frac{A_2}{D} = \left\{ \frac{G}{2} - \frac{M_2}{a} \right\} \frac{1}{D} = \frac{4\gamma + 23}{4(4\gamma + 10)} \cdot \frac{G}{D} \quad (167)$$



Rys. 179

Całkowite osiadanie szyny w punkcie przyczepienia ciężaru określimy, gdy do osiadania podpory środkowej, obliczonego podług wzoru (167), dodamy strzałkę ugięcia szyny pomiędzy podporami 2 i 3. Tę strzałkę możemy znaleźć przyjąwszy pod uwagę (rys. 179), że dla belki obc moment M na długości ob wyraża się:

$$M = A_1 \left(\frac{3}{2}a - x \right) + A_2 \left(\frac{a}{2} - x \right) = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ A_1 \left(\frac{3}{2}ax - \frac{x^2}{2} \right) + A_2 \left(\frac{a}{2}x - \frac{x^2}{2} \right) \right\}$$

$$y = \frac{1}{EI} \left\{ A_1 \left(\frac{3}{4}ax^2 - \frac{x^3}{6} \right) + A_2 \left(\frac{a}{4}x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \right\}$$

Przy $x = \frac{a}{2}$

$$f = \frac{a^3}{6EI} \left\{ A_1 + \frac{1}{4} A_2 \right\} = \frac{G}{B} \left\{ \frac{4\gamma - 3}{4(4\gamma + 10)} + \frac{4\gamma + 23}{16(4\gamma + 10)} \right\} =$$

$$= \frac{G}{B} \cdot \frac{20\gamma + 11}{16(4\gamma + 10)} = \frac{G}{D} \cdot \frac{20\gamma + 11}{16\gamma(4\gamma + 10)} \quad \dots \quad (168)$$

$$y = y_2 + f = \frac{G}{D} \left\{ \frac{4\gamma + 23}{4(4\gamma + 10)} + \frac{20\gamma + 11}{16\gamma(4\gamma + 10)} \right\} =$$

$$= \frac{16\gamma^2 + 112\gamma + 11}{16\gamma(4\gamma + 10)} \cdot \frac{G}{D} \quad \dots \quad (169)$$

Osiadanie szyny i podkładu w przypadku, jeżeli ciężar umieszczony jest nad podporą, wyraża się: $y_r = \frac{P}{D}$, przyczem P może być określone według jednego z wzorów (146) lub (148), dającego większą wartość.

Porównanie wielkości y i y_r przy różnych wartościach γ wykazuje, że wielkości te mało się różnią, bo największa różnica między nimi wynosi zaledwie 0,1 mm do 0,2 mm. Można więc przyjąć, że podczas ruchu pociągu koła toczą się po linii prawie równoległej do linii toru w stanie nieobciążonym.

Ogólna sprężystość toru ma bardzo ważne znaczenie przy ocenianiu danej budowy wierzchniej, ponieważ wpływa ona nietylko na naprężenie w szynie i jej podporach, jak to już widzieliśmy, lecz do pewnego stopnia także i na wielkość obciążenia dynamicznego. Wpływ sprężystości toru na obciążenie dynamiczne stanie się zrozumiałym, gdy weźmiemy pod uwagę, że niewątpliwie powoduje ona przeciążenie osi i kół podobnie, jak sprężystość resorów.

Miarą sprężystości toru może służyć jego osiadanie ε w cm na tonnę nacisku koła:

$$\varepsilon = \frac{P}{DG} \quad \dots \quad (170)$$

Wielkość tę przyjęto nazywać *współczynnikiem sprężystości toru*.

ROZDZIAŁ VI.

Działanie dynamiczne taboru na kolej szynową.

1. Siły pionowe. Bezwładność koła i uginanie się szyny. Rozmieszczenie niesymetryczne masy koła względem osi obrotu. Odciażki. Nieprawidłowy kształt powierzchni tocznych koła i szyny. Badania Petrowa.

Wszystkie poprzednie obliczenia robione były w przypuszczeniu, że szyna znajduje się pod działaniem obciążenia statycznego. Największe obciążenie osi napędnej, które w pierwszych latach istnienia dróg żelaznych nie przewyższało 6 t, dochodzi obecnie na drogach polskich do 18 t, na innych drogach żelaznych w Europie do 20 t i w Stanach Zjednoczonych A. P. do 34 t.

Nacisk pionowy koła, pozostającego w spoczynku, zmienia się podczas ruchu wskutek rozmaitych przyczyn, nawet gdy tor i tabor kolejowy znajdują się