ZASADY

GEOMETRYI ANALITYCZNEJ

GEOMETRYA PŁASKA

PARIS. — IMPRIMERIE E. MARTINET, RUE MIGNON, 2.

ZASADY

GEOMETRYI ANALITYCZNEJ

GEOMETRYA PŁASKA

PRZEZ

ADOLFA SĄGAJŁĘ

PROFESSORA MATEMATYKI

TOM PIERWSZY

CZĘŚĆ PIERWSZA GEOMETRYI PŁASKIEJ

UŁOŻONA PODŁUG DZIEŁA PAINVIN'A, D[ra] NAUK MATEMATYCZNYCH

I POPRZEDZONA

RYSEM HISTORYCZNYM POCZĄTKU I ROZWOJU GEOMETRYI ANALITYCZNEJ

CENA 25 FRANKÓW

PARYŻ

NAKŁADEM BIBLIOTEKI KÓRNICKIEJ

1877

PRZEDMOWA

Lat temu trzydzieści powziąłem zamiar ułożenia w polskim języku dzieła Geometryi Analitycznej. Oddając się wykładowi matematyki we Francyi, miałem sposobność gruntownie poznać bogaty dział naukowej literatury francuzkiej, traktujący o Analizie Kartezyańskiej, wówczas już stojącej na wysokim stopniu rozwoju i udoskonalenia. Chęć stania się użytecznym dodawała mi bódźca do pracy, zamiłowanie przedmiotu budziło we mnie otuchę że zadaniu temu podołam, a obietnica uczyniona mi przez Alexandra Przezdzieckiego ogłoszenia drukiem mych rękopismów dodawała zachęty do dziesięcioletnich studjów w tym kierunku.

Niemożność materyalna urzeczywistnienie mego zamiaru aż do dziś odroczyła. Dzięki zachęcie i pomocy udzielonej mi przez gorliwego nauk protektora, Hr. Jana Działyńskiego, oddawna powzięty zamiar obecnie choć częściowo doprowadzam do skutku, tom pierwszy *Geometryi Analitycznej* pod sąd uczonej publiczności naszej i na użytek uczącej się młodzieży polskiej oddając.

Pewien że i nadal środki nieodzowne do wydania następnych tomów odmówione mi nie będą, cieszę się nadzieją że siły fizyczne nie opuszczą mię przed ukończeniem tej pracy i że niezadługo tom drugi a wreszcie i po pewnej przerwie czasu tom trzeci ogłosić drukiem będę w stanie.

Dzieło niniejsze będzie w trzech tomach.

Pierwszy tom obejmuje część pierwszą Geometryi płaskiej.

Drugi tom zawierać będzie część drugą Geometryi płaskiej i Geometryą w przestrzeni, czyli Geometryą o trzech wymiarach.

Tom trzeci obejmie krzywe płaskie i powierzchnie wyższego rzędu.

Podany poniżej spis rozdziałów dwóch części obejmujących Geometryą płaską pojaśni czytelnika z treścią niniejszego i połowy następnego tomu *Zasad Geometryi Analitycznej*.

Pomieszczony na wstępie do niniejszego tomu « Rys historyczny początku i rozwoju Geometryi Analitycznej, » który zawdzięczamy pracy jednego z młodych naszych inżynierów z Paryzkiej Szkoły Dróg i Mostów, uwalnia nas od trudnego zadania, mającego na celu zapoznanie czytelnika niniejszego dzieła z przeszłością nauki, którą ono traktuje; wykazanie stanowiska Geometryi Analitycznej wobec innych metod geometrycznych i podanie obrazu dzisiejszego rozwoju tej gałęzi wiedzy. Za utwór ten, osnuty z talentem na podstawie najpoważniejszych naukowych źródeł, składając tu publiczną podziękę bezimiennemu autorowi takowego, przedstawimy tylko kilka słów tyczących się naszego dzieła i metody w niem przyjętej.

Zbytecznem byłoby tu powtarzać to co powiedziałem na wstępie do *Wykładu zupełnego Algebry*, ogłoszonego drukiem przed czterma laty, w przedmiocie myśli przewodniczącej mi w układzie dzieła. Jak wtedy tak i teraz nie miałem i nie mogłem mieć za zadanie być oryginalnym, bo w dzisiejszym stanie nauki jestto chcieć rzeczy niepodobnej, a może nawet szkodliwej. Jeśli więc uczona publiczność nasza dopatrzy się w pracy mej jakiejkolwiek zalety, to niech ją przypisze szkole francuzkiej, której wszystko zawdzięczam w tej mierze i najnowszym znakomitym autorom dzieł francuzkich i angielskich o Analizie kartezyańskiej traktujących, których płody skrzętnemu osobistemu ocenieniu poddane stosownie wybrać i przyswoić naszej literaturze było mojem zadaniem. Jeśli wybór mój będzie przez krytykę naukową uznany za stosowny i dzisiejszemu stanowisku nauki odpowiedni pod względem treści i metody, to myśl sama żem młodzieży naszej pracą mą się przysłużył będzie wysoką dla mnie nagrodą.

W wyborze metody z pomiędzy licznych metod w wykładach Geometryi Analitycznej przyjętych powodowałem się myślą przeciwną rozpowszechniającemu się przekonaniu, że nauki ścisłe a szczególniej kartezyańska Analiza winny być wykładane przeważnie a nawet wyłącznie dla ich użyteczności praktycznej. Dążność ta prowadzi do zastąpienia głębokich studjów teoretycznych, urywkami naukowych teoryi, których zbiór ma na celu wyłącznie zastosowania praktyczne. Uważając tę dążność za szkodliwą dla rozwoju nauk ścisłych w kraju naszym, starałem się wybrać metodę odpowiadającą o ile można nietylko celowi praktycznego nauki zastosowania, ale zarazem pozwalającą młodemu czytelnikowi jeśli nie poznać, to przynajmniej spostrzedz cały ogrom horyzontu nauki, przedmiotem niniejszego dzieła będącej.

Dzieło niniejsze zawiera obok przedmiotów objętych programami examinowymi do francuzkich szkół specyalnych, części dodatkowe traktujące o *spółrzędnych jednorodnych*, *trzylinijnych* i *styczneczkowych*. Wobec bowiem wysokiego rozwoju Geometryi nowoczesnej, wywołanego pracami *Chasles'a*, *Steiner'a*, *Poncelet'a* i innych znakomitych Geometrów, Geometrya Analityczna nie posiłkująca się tymi układami spółrzędnych jest niezupełną a nawet bezwładną, jeśli chodzi o tłumaczenie nowych doniosłych zasad przez pana *Chasles'a* do Geometryi czystej wprowadzonych.

Za podstawę dzieła przyjąwszy układ spółrzędnych *Descartes'a*, rozwinęliśmy szczegółowo wszystkie teorye wymagane na examinach do szkół publicznych.— Roztrząsania stanowiące najważniejszą część Analizy rozwinęliśmy jak można najobszerniej stosunkowo do ram niniejszego dzieła.

Części traktujące o spółrzędnych trzylinijnych i styczneczkowych podane są ogólnikowo, niekiedy bez dyskussyi; wszystkie wszakże ważniejsze wzory są w nich wskazane i dowiedzione. Uważaliśmy tę część dzieła niniejszego jako uzupełniającą i dodatkową, a przeznaczoną głownie dla tych czytelników, którzy brak szczegółów z łatwością własną zastąpią nauką.

Dla początkujących ogólnie podane wiadomości o nowych układach spółrzędnych mogą stać się podnietą do obszerniejszych studjów, przedmiotem korzystnie zaciekawiającym, a jednak dostatecznie rozwiniętym w tem dziele, aby wzbogacić ich zasoby naukowe do rozwiązywania zadań i rozwidnić ich poglądy na Geometryą.

Dla zachowania jednolitości wykładu i jaśniejszego wykazania znaczenia i użyteczności względnej każdego z układów spółrzędnych, nie odłączyliśmy nowych spółrzędnych i niezawarli teoryi za dodatkowe uważanych w osobnym dziale lub części dzieła. Przyjąwszy spółrzędne kartezyańskie za układ podstawowy, po każdem szczegółowem przedstawieniu kwestyi w tym układzie, podaliśmy odpowiednie przedmiotowi określenia innych spółrzędnych i wzory uwidaczniające prawa przekształcenia różnych układów. Tym sposobem łatwo jest porównać znaczenie każdego z układów w stosunku do innych spółrzędnych i do przedmiotu rozbieranego.

Znana dziś, urobiona i rozpowszechniająca się obecnie teorya wyznaczników, posłużyła do użycia algorytmicznego znakowania, wygodnego w wielu razach, a nie przedstawiającego żadnych trudności dla posiadających choćby tylko najogólniejsze elementarne wiadomości w tym względzie.

W przedmiocie krzywych i powierzchni wyższego rzędu w dziele niniejszem wskazano zaledwie kilka własności ogólnych, wynikających wprost z wzorów wyprowadzonych. Mamy nadzieję brak ten w tomie ostatnim usunąć.

Byłoby wiele do dodania, mnóstwo braków do zapełnienia i teoryi do rozwinięcia, gdyby to dzieło miało być zupełnym wykładem Analitycznej Geometryi. Jako podręcznik podający podstawowe wzory tej nauki i dostateczne pojęcie o jej bogatych zasobach sądzimy że ono może być użytecznem.

Kończąc niniejszą przedmowę, niech mi wolno będzie dołączyć wyrazy mej wdzięczności dla Hr. Jana Działyńskiego, którego zachęcie i pomocy winienem możność napisania i wydania tego dzieła.

Liczba dzieł matematycznych polskich, wydanych w ciągu lat kilku kosztem tego dostojnego nauk protektora jest dla mnie rękojmią, że głos mej wdzięczności znajdzie echo w sercach tych wszystkich, dla których dobro publiczne nie jest obojętnem.

Pisałem w Paryżu dnia 7 czerwca 1877 roku.

Adolf SĄGAJŁO.

SPIS ROZDZIAŁÓW

TOM PIERWSZY

TOM DRUGI

obejmie DRUGĄ CZĘŚĆ (to jest dalszy ciąg i koniec Geometryi płaskiej).

Spis rozdziałów Geometryi o trzech wymiarach podany będzie w tomie drugim, wraz z ogólnym spisem przedmiotów mających wejść do tomu trzeciego.

DZIEŁA I PUBLIKACYE POMOCNICZE

Chasles, Membre de l'Institut. — *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, suivi d'un Mémoire de Géométrie sur les deux principes généraux de la science, la Dualité et l'Homographie.* 2e édition, conforme à la première. Un volume in-4 de 850 pages, 1875.

Chasles. — *Traité de sections coniques*, faisant suite au *Traité de Géométrie supérieure*. Première partie, in-8, avec 5 planches, 1865.

Cremona (L.), Directeur de l'École d'application des Ingénieurs, à Rome. — *Éléments de Géométrie projective*, traduits par Ed. Dewulf, chef de bataillon du Génie. Un volume in-8, 1875.

Poncelet, Membre de l'Institut. — *Traité des propriétés projectives des figures.* 2e édition, 1865-1866, 2 volumes in-4.

Rouché (E.) et de Comberousse (Ch.). — *Traité de Géométrie élémentaire*, conforme aux Programmes officiels, renfermant un très-grand nombre d'exercices et plusieurs Appendices consacrés à l'exposition des *Principales Méthodes de la Géométrie moderne.* 3e édition, revue et notablement augmentée, in-8, avec 611 figures dans le texte et 1085 *Questions proposées*, 1873-1874.

Bourdon. — *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, comprenant la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions. 7e édition, revue et annotée par M. Darboux. In-8, avec planches, 1872. (Adopté par l'Université.)

Carnoy, Professeur à l'Université de Louvain. — *Cours de Géométrie analytique.* 2 volumes grand in-8, avec figures dans le texte.

Delisle et Gerono. — *Géométrie analytique.* In-8, avec planches, 1854.

Lefebure de Fourcy. — *Leçons de Géométrie analytique.* 9e édition, 1871.

E. J. Boquel. — *Leçons nouvelles de Géométrie analytique.* 2 volumes grand in-8 lithographiés, avec nombreuses figures dans le texte.

Ire *Partie.* — Géométrie plane; 1872.
IIe *Partie.* — Géométrie de l'espace; 1874.

Painvin (L.). — *Principes de Géométrie analytique.* 2 volumes grand in-4 lithographiés, de plus de 800 pages chacun, avec nombreuses figures dans le texte.

Ire *Partie.* — Géométrie plane; 1866.
IIe *Partie.* — Géométrie de l'espace; 1871.

Poncelet. — *Application d'Analyse et de Géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des Propriétés projectives des figures.* 2 forts volumes in-8, avec figures dans le texte; 1862-1864.

Salmon. — *A treatise on Conic Sections.* London, 1863.

Salmon. — *A treatise on the Analytique Geometry of three dimensions.* Dublin, 1865.

Salmon. — *Treatise on the higher plane curves.*

Briot (Ch.) et Bouquet. — *Théorie des fonctions elliptiques.* 2e édition, in-4, 1875.

Frenet. — *Recueil d'exercices sur le calcul infinitesimal.* 3e édition, in-8, avec figures dans le texte; 1873.

Longchampt (A.). — *Recueil des principaux Problèmes posés dans les examens pour l'École polytechnique et pour l'École centrale des Arts et Manufactures, ainsi que dans les conférences des Écoles préparatoires les plus importantes. Énoncés et solutions.* 100 figures lithogr., grand in-8, 1865.

Nouvelles Annales de Mathématique, journal des Candidats aux Écoles polytechnique et normale, rédigé par M. Gerono, professeur de Mathématiques, et M. Ch. Brisse, Répétiteur à l'École polytechnique, agrégé de l'Université. (Publication fondée en 1842.)

RYS HISTORYCZNY POCZĄTKU I ROZWOJU

GEOMETRYI ANALITYCZNEJ

Środek siedemnastego stulecia słusznie może być uważanym za jednę z najświetniejszych epok pod względem prac i odkryć w dziedzinie Geometryi.

Rozwidniony horyzont odrodzenia nauk blaskiem gieniuszów : *Viète'a*, nowoczesnego twórcy Algebry i *Kepler'a*, ojca nowożytnej Astronomii, zajaśniał naraz wielu imionami mężów, którzy wytknęli nowe drogi postępowi wiedzy.

Do licznego zastępu Geometrów, okalających w tej epoce kolebkę nauki, której pobieżny rys rozwoju podać zamierzamy, należą :

Fermat (1590-1663), twórca dzieła « *De maximis et minimis,* » w którym poraz pierwszy wprowadza nieskończoność w rachunek, jak *Kepler* wprowadził ją do Geometryi. Uważanym on być może za pierwszego wynalazcę rachunku różniczkowego. *D'Alembert* powiada, że « *Fermat'owi należy* » *się pierwsze zastosowanie rachunku do ilości różniczkowych,* » a *Buffon* przyznaje jego metodzie, że « *byłaby ona rachunkiem różniczkowym, gdyby Fermat był ją uogólnił.* »

Desargues (1593-1662), fundator nowożytnej Geometryi, którego sławny *Poncelet* mianuje być « *Monge'em siedemnastego wieku.* »

Cavalieri (1598-1647), twórca *Geometryi Niepodzielnych* (1), która przez pół wieku zdołała brak całkowego rachunku zastąpić.

Roberval (1602-1673), autor *Traktatu o niepodzielnych*, sławny Geometra, który współcześnie z *Fermat'em* i *Descartes'em* rozwiązał wielkie zadanie *Stycznych do linii krzywych.*

Pascal (1623-1662), nieśmiertelny jako filozof, a jako geometra, w badaniach swych na tle metody *Cavalieri'ego*, będący spójnią między *Archimedes'em* i *Newtonem.*

Zastęp ten powiększyć należy sławnemi imionami jak : *Mydorge, Torricelli, Viviani, Gregory, Mercator, Schooten, Ceva, Huygens, Sluze* i wielu innych.

W tej to epoce, odznaczającej się taką obfitością mężów nauki, zajaśniał Descartes (1596-1650),

(1) *Géometrie des Indivisibles*, 1635.

który odkryciem *Geometryi Analitycznej* złamał zapory tamujące postęp wiedzy i rozszerzył jej granice, umożebniając i przyspieszając pojawienie się nowych *Rachunków Leibnitz'a* (1) i *Newton'a*.

Geometrya Analityczna jest więc nauką nowoczesną, datującą swe istnienie od roku 1637, w którym wyszło na widok publiczny pierwsze dzieło *Descartes'a*, objawiające nowo-postawioną przezeń doktrynę (2).

Jakkolwiek gienjalna doktryna *Descartes'a* jest zapewnie jedną z tych o których wyrzec można słowa *Montesquieu'go* : *Prolem sine matre creatam* (3), byłoby jednakże niedostatecznem rozpoczynać rys historyczny tak ważnej nauki od daty pojawienia się dzieła *Descartes'a*, nie rzuciwszy okiem na grunt naukowy, pracą wieków urobiony, na którym wielka ta doktryna mogła tak samodzielnie i bujnie zakiełkować, rozwinąć się i tak obfite wydać owoce.

Słusznem zapewne będzie pójść w tym względzie za zdaniem, jakie Pan *Libri* wyrzekł we wstępie do swego dzieła (4), nacechowanego zadziwiającą erudycyą i głębokością poglądów.

« Umysł ludzki, mówi pan Libri, zdaje się iść po drodze tak niezbaczalnej, każdy postęp tak zda » się być z góry wyznaczonym, że daremnemi byłyby próby pisania historyi jakiegoś narodu, lub » jakiejś nauki, gdyby tę pracę chciano rozpoczynać od jakiejkolwiek epoki, nie rzuciwszy okiem na » czasy i zdarzenia uprzednie. »

Zaznaczając więc tylko na wstępie niniejszej pracy datę właściwego pojawienia się Geometryi Analitycznej i imiona Geometrów współczesnych pierwszym objawom jej rozwoju, cofniemy się w odległą przeszłość celem odszukania śladów istnienia podobnej nauki u Greków i zbadania o ile poniżej przytoczone zdanie *Poncelet'a* może się do Geometryi analitycznej zastosować.

Dostojny ten matematyk w sławnem swem dziele *Traité des propriétés projectives des figures* powiada : « ..... bezwątpienia wiele rezultatów geometrycznych, którymi szczycą się nowożytni, » Grecy przeczuli lub też znali doskonale. »

Sam wreszcie wiekopomny *Descartes* zda się powoływać i zachęcać do badania źródeł naukowych w starożytności, mówiąc :

« Przekonywam się, że pewne zarody prawd, które natura złożyła w ludzkiej intelligencyi, a które » przytłumiamy w sobie przez czytanie i słuchanie tylu rozlicznych błędów, posiadały tyle żywotności » i siły w tej prostej i naiwnej starożytności, że ludzie pojaśnieni tem światłem rozumu, które im » kazało przekładać cnotę nad przyjemności, a to co uczciwe nad to co użyteczne (nawet gdy nie » znali przyczyny tego wyboru), stworzyli sobie prawdziwe ideje i o filozofiii i o matematyce ; chociaż » nie byli jeszcze w stanie nauk tych do doskonałości posunąć.

» Otóż zda mi się spostrzegać, mówi Descartes, kilka śladów tej prawdziwej matematyki u Pappus'a » i Diophante'a..... (5) ».

(1) Pan Folkierski we wstępie do swego *Rachunku różniczkowego* pochodzenie Leibnitza wywodzi z Polski i nazywa go Lubienieckim.

(2) Zastosowanie Algebry do teoryi krzywych jest przedmiotem *Geometryi Descartes'a*, która wyszła w *Leyde* w Holandyi, w roku 1637, wraz z jego *Traktatem o Meteorach* i z *Dioptryką*.

(3) Słowa, które Montesquieu wyrzekł o swem dziele : « *Esprit des Lois*. »

(4) *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*. — Libri.

(5) Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, 4e *règle*.

Zwracając badania w jak najodleglejszą przeszłość, nigdzie i w żadnej epoce nie spotyka się śladów istnienia Geometryi analitycznej, takiej jak dziś ją powszechnie pojmujemy. Grecya która nam zostawiła w spuściznie nieocenione zdobycze, poczynione przezeń na polu Geometryi czystej, nie może poszczycić się bujnością i odwagą matematycznego gieniuszu nowożytnych Geometrów, bo jej nie dostawało potężnego narzędzia analitycznego, którem *Viète* nas udarował. Mimo jednak tego braku znajomości nauki (1), której Diophante miał być twórcą, *Metoda analityczna* uprawiana przez starożytnych Geometrów i Filozofów jest zaszczytnym wielkości Grecyi pomnikiem; a jakkolwiek ślady istnienia i rozwoju tej *Metody* cząstkowo tylko nas doszły, dzięki jednak wiekowym usiłowaniom licznego zastępu Geometrów, zdołano ją w części odtworzyć; a badawczemu talentowi i głębokiej erudycyi współczesnego nam Geometry pana *Chasles'a* zawdzięczamy dziś naukowo uzasadnione przypuszczenie, że *Euklides* był twórcą Geometryi Analitycznej starożytnych i że w niektórych z pism jego, niestety w oryginale nas nie doszłych (choć według przewidywań *Castillona* (2) istniejących na wschodzie do XIIIgo wieku), spoczywa zaród wielkiej doktryny *Descartes'a*.

Być może że uprzednio przytoczone pochlebne zdanie nowoczesnego twórcy Geometryi Analitycznej o *Pappusie* i *Diophantes'ie* jest objawem nietylko uznania ich zasług, ale też i wyrazem wdzięczności *Descartes'a* dla tych dwóch pisarzów, którzy pierwsi o *Poryzmach Euklidesa*, czyli o Geometryi Analitycznej starożytnych powiadomili potomność.

Przypuszczenie to zdawałoby się być zgodnem z duchem słów Salomona : « *Nil novi sub sole* »; ale gdyby jednak nawet tak być miało, gdyby pierwsza myśl postawienia doktryny współrzędnych brała swe natchnienie i początek w *geometrycznej analizie* Greków, jest ona sama w sobie tak samodzielną i doniosłą, rozwinięcie jej tak metodycznem, tak zużyteczniającem naukę Viète'a, a ideja na której Descartes całą nową swą doktrynę ugruntował jest tak prostą a jednak tak wielką w swej prostocie, że w każdym razie za dowód i wzór choćby względnej tylko twórczości ludzkiego umysłu uważać ją należy i z uwielbieniem powtórzyć raz już zastosowane do niej słowa : *Prolem sine matre creatam.*

Jakkolwiek do dziś jeszcze ocenienie dzieł Euklidesa a szczególniej odgadnienie treści, przeznaczenia i użytku jego *poryzmów* osłania pewna powłoka niepewności, postaramy się dotknąć badań przez uczonych Geometrów w tym kierunku poczynionych i posiłkując się ich światłem wykazać związek istniejący między *Analizą geometryczną* starożytnych i *Analizą Descartes'a* znaną pod nazwą *Geometryi mięszanej* albo *Geometryi Analitycznej.*

Euklides na 285 lat przed Chrystusem żyjący, uważanym jest za spójnią między szkołą *Platona* i szkołą *Aleksandryjską;* a *Proclus* sławny filozof z Vgo wieku i wielbiciel matematyki, w komentarzu

(1) *Algebra.*

(2) Castillon, sławny geometra zeszłego stulecia, wielce obeznany z geometryą starożytnych przypuszczał, że *Traktat o poryzmach* istniał na wschodzie jeszcze w XIII wieku. *Nassir-Eddin* wielki astronom i geometra perski zdaje się wspominać w swym komentarzu o tem dziele Euklides'a.

swym nad pierwszą księgą Euklidesa przyznaje mu wybitną wyższość nietylko nad współczesnymi mu pisarzami ale nawet nad tak sławnymi poprzednikami jak *Eudoxe* i *Thoetete*.

Oprócz trzynastu ksiąg *Elementów Geometryi* które same przez się były dostatecznemi aby zapewnić Euklidesowi wielką u potomnych sławę, pisał on jeszcze inne wysokiej wartości dzieła, z których jedno najmniej ważne, a doszłe nas, nosi tytuł *Dane*. Z dzieł uległych zagładzie, uczeni badacze szczególniej żałują : czterech ksiąg o *Przecięciach konicznych* i trzech ksiąg o *Poryzmach*.

Ostatnie to dzieło niesłychanie sławione przez starożytnych pojaśniaczów pism *Euklidesa*, zwraca na się przed innemi uwagę szczególniej z tego względu, że w niem to właśnie, jak to już wspomnieliśmy, można dostrzedz śladów Geometryi Analitycznej starożytnych.

W pojęciu ogólnem wyraz Πορισμα znaczył u Greków *wniosek* (corollaire); ale w traktacie *Euklidesa* o poryzmach ma on mieć inne i wyłączne znaczenie, którego jednak żaden ze starożytnych pisarzów, traktujących o tym przedmiocie, dostatecznie określić nie zdołał.

Diophant, żyjący w 600 lat po Euklidesie, uważany przez wielu badaczów starożytności, a szczególniej przez *Regiomontanus'a* i *Scheubel'a* za pierwszego wynalazcę Algebry, był o ile wiadomo pierwszym pisarzem starożytności używającym wyrazu *poryzm*, w swych *kwestyach matematycznych*, dla oznaczenia zadań tyczących się teoryi liczb, na których opierał swe dowodzenia stanowiące zapewne dzieło, które ze szkodą dla historyi wiedzy czasów naszych nie doszło.

Nierównie od *Diophanta* szczegółowszym i pojaśniającym w kwestyi poryzmów jest Pappus, Geometra żyjący w końcu IV^{go} wieku ery chrześciańskiej. Zgromadził on bowiem w swych *Zbiorach matematycznych* (1) rozliczne a rozpierzchnione odkrycia najsławniejszych matematyków starożytnych, jak również mnóstwo ciekawych zadań i wniosków, mających na celu uczynić przystępnemi dla czytelnika dzieła greckich Geometrów.

Jakkolwiek na *Ptolomeuszu* (125 rok naszej ery) zakończył się sławny perjod rozwoju nauk ścisłych w Grecyi; jakkolwiek od tej daty spotykać przychodzi tylko autorów wyjaśniających dzieła szkoły Alexandryjskiej, jednakże Pappus, choć należący do tej epoki naśladownictwa, jest pisarzem nietylko odzwierciedlającym w swych utworach dzieła poprzedników, ale jednocześnie autorem, odznaczającym się oryginalnością i siłą twórczą, nie ustępującą nieraz donosłości talentów z wieków poprzednich.

Descartes, jak to już mieliśmy sposobność wspomnieć, uważał *Pappus'a* za jednego z najcelniejszych matematyków Grecyi.

Ogólnikowy nawet przegląd dzieła tego Geometry przechodziłby bezwątpienia i nasze szczupłe zasoby naukowe i zakres niniejszej pracy; dla tego też zauważymy tylko mimochodem, że w *Zbiorach matematycznych Pappus'a* znajduje się pierwszy przykład kwadratury powierzchni krzywej, i ślad posługiwania się powierzchniami krzywemi i liniami o podwójnej krzywiźnie, celem wykreślenia krzywej płaskiej; ta ostatnia kwestya wchodzi obecnie w dziedzinę Geometryi wykreślnej.

Pappus jest pierwszym twórcą sławnego twierdzenia, które *Guldin* odkrył dopiero w początku siedemnastego stulecia (1577-1643).

(1) Pappi Alexandrini, *Mathematicæ collectiones, a Frederico Commandino in latinum conversæ, et commentariis illustratæ*. Pisanii, 1588, in-fol., *item* Bononiæ, 1660, in-fol.

Godnemi uwagi są twierdzenia zawarte w *Zbiorach matematycznych*, a należące do dzisiejszej *teoryi poprzecznych;* również *Lemmy* mające ścisły związek z *teoryą inwolucyi* sześciu punktów, stworzoną przez *Desargues'a*.

Oprócz wielu drogocennych zadań, twierdzeń, wniosków i pojaśnień, w stosunku do niniejszej pracy najwięcej godną jest uwagi przedmowa do siódmej księgi *Zbiorów matematycznych*, w której *Pappus* powiadamia, że *Euklides* ułożył był traktat w trzech księgach o *Poryzmach*.

Dzieło to zdaniem *Pappus'a* było gienjalnem i niesłychanie użytecznem do rozwiązywania zadań trudnych i zawikłanych. Przyznaje on, że za jego czasów nieznano rzeczywistego znaczenia *poryzmów*, z powodu że niewykształceni pojaśniacze takowych nadwyrężyli je i zaciemnili. Nie pojąwszy bowiem doniosłości *poryzmów* pozwolili sobie dowodzenia *Euklidesa* zastąpić niejednokrotnie własnemi ich dowodzeniami.

Pappus w dziele swem przekazał nam wysłowienia trzydziestu zadań należących do *poryzmów*, a w przedmowie wzwyż wspomnianej usiłuje on wytłumaczyć jakie znaczenie przypisywać należy wyrazowi *poryzm*. Pojaśnienia te jednak są tak niedostateczne, zawierają w sobie tyle usterek, że nawet *Halley* sławny znawca Geometryi starożytnych nie wachał się oświadczyć, że nic z nich nie zrozumiał. Utrata figur tyczących dzieła *Pappusa* utrudnia o wiele zrozumienie takowego.

Znaczenie więc *poryzmów*, w których spoczywa ślad Analitycznej Geometryi starożytnych, mimo całego talentu Pappusa, dostatecznie przezeń nie było wyjaśnionem.

Proclus, pisarz z Vgo wieku, już raz wspomniany, i późniejsi nowocześni pojaśniacze tego dzieła *Euklides'a* aż do XVIIIgo wieku nie zdołali Pappus'a w tym względzie przewyższyć.

Diophant, *Pappus* i *Proclus* byli jedynymi zapewnie matematykami Grecyi, przez których wyraz *poryzm* był używanym w pojęciu wyższem jak zwykłe znaczenie wyrazu *wniosek*.

Z pomiędzy autorów z końca szesnastego i początku siedemnastego wieku, którzy w różnych znaczeniach używali wyrazu *poryzm*, przytoczyć można : *Bessona*, *Dasypodiusza*, *Viète'a*, *Nepera*, *Aleksandra Anderson'a*, *Bachet'a*, *Saville'a*, *Kircher'a*, *Commandin'a*, *Schooten'a* i innych.

Szczegółowsze i wyłączne traktaty o *poryzmach Euklides'a* pisane były przez następujących matematyków :

Ghetaldi (1), *Bulliaud* (2), *Renaldini* (3), i *Fermat* (4). Wiek prawie później *Robert Simson* (1687-1768), jeden z Geometrów, który się najwięcej przyczynił do zgłębienia i rozpowszechnienia Geometryi starożytnych, w swym *Traité des porismes* daje poznać naturę tych propozycyi, będących do jego czasu zagadkami dla wielu Geometrów. Odtworzył on i podał z dowodzeniami uproszczonemi i uzupełnionemi trzydzieści osiem *Lemmów* ze zbiorów matematycznych *Pappusa*, i dał następującą definicyą Poryzmów :

« Poryzm jestto zadanie, w którem zapowiada się możność wyznaczenia, albo też wyznacza się istotnie pewne rzeczy, mające związek wskazany z rzeczami stałemi i znanemi i z innemi rzeczami

(1) *De resolutione et compositione mathematica, lib. V* (opus posthumum). Romæ, 1640.

(2) *Exercitationes geometricæ tres : I° circa demonstrationes per inscriptas et circumscriptas figuras ; II° circa conicarum sectionum quasdam propositiones ; III° de Porismatibus.* Parisiis, 1657.

(3) *De resolutione et compositione mathematica*, libri duo. Patavii, 1668.

(4) *Varia opera mathematica.* Tolosæ, 1679.

zmiennemi do nieskończoności, które są skojarzone ze sobą za pomocą jednego lub wielu związków znanych, podających prawo zmiany, jakiemu one podlegają. »

Jak widzimy, definicya ta zostawia wiele do życzenia pod względem jasności, a autor jej mimo całej swej erudycyi w traktowaniu zawiłej kwestyi poryzmów nie posunął się do dostatecznego naukowego odgadnienia i wyświetlenia doktryny w nich zawartej. W ślad za Simsone'm, choć z mniejszem jak on powodzeniem pospieszyli: *Playier*, *Lawson*, *Wallace*, lord *Brougham* i *Lhuillai*.

Pomijając wielu innych autorów, którzy w końcu XVIIIgo i początku XIXgo wieku traktowali o *poryzmach*, zaznaczymy tu tylko nazwisko współziomka naszego *Hoëne Wrońskiego* (1), który dał jedno z najnowszych pojaśnień o oznaczeniu poryzmów i posługiwał się wyrazem *poryzm* w swym Wstępie do filozofii nauk matematycznych.

Żaden jednak z uczonych badaczów dzieł *Euklidesa* nie posunął tak daleko swych studyów i spostrzeżeń nad poryzmami jak sławny Geometra tegoczesny pan *Chasles*. Praca jego w tym kierunku odznacza się wysoką intuicyą naukową i gruntowną znajomością Geometryi Greków, jak również wszystkich prac związek z nią mających.

Z dzieł *Simsona* i innych uczonych traktujących ten przedmiot nie można dostrzedz myśli przewodniczącej Euklidesowi w układzie dzieła o poryzmach; trudno dopatrzyć z jakiego względu utwór ten zasługiwał na uwielbienie ze strony Pappusa, który go ocenił temi słowy: « *Collectio artificiosissima* » *multarum rerum, quæ spectant ad analysin difficiliorum et generalium problematum.* »

Wreszcie z prac w tym przedmiocie przez tylu autorów podjętych nie podobna wywnioskować przez jakie metody *poryzmy* zastąpione zostały u nowożytnych.

Pan Chasles w nocie IIIej swego dzieła (2) podjął wyświetlenie doktryny *poryzmów*, filozoficznej myśli która je stworzyła, ich przeznaczenie, zastosowanie i przekształcenie w doktrynach nowożytnych.

Poryzmy, według pana *Chasles'a*, stanowiły wraz z *danemi* (3) dopełnienie *Elementów Geometryi*, celem ułatwienia używania tych *elementów* do rozwiązywania zadań.

« Z tego punktu widzenia zapatrując się (mówi pan *Chasles*), wyłącznem przeznaczeniem poryzmów było podawać możność poznawania *miejsc*, przez dostarczanie sposobów wyprowadzania z warunków wyznaczających miejsce nieznane, innego prostszego wyrażenia tegoż *miejsca*; wyrażenia zdolnego dać poznać naturę i położenie tegoż miejsca. »

(1) Czujemy się poniekąd zniewoleni skorzystać z tej sposobności, aby zauważyć że w poszukiwaniach źródeł, tyczących się niniejszej pracy imie filozofa i matematyka naszego często spotykać nam przychodziło. Nie ma prawie żadnego między dostojnymi matematykami początku dzisiejszego wieku, któryby o pracach Wrońskiego nie wspomniał, chociaż często z rodzajem sarkazmu i zawiści jak *Servois*, lub z jednostronnością jak *Poncelet*, a zawsze niemal z niedostatecznem uznaniem tego płodnego talentu, którego kilku prac i pewnej części zasług wyświetlenie z zaszczytną bezstronnością mężów nauki podjęli ostatnimi czasy PP. *Caylay* i *Tronçon*. Artykuły obydwóch tych matematyków podane zostały w przekładzie przez PP. Folkierskiego i Sągajłę w *Pamiętnikach Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu.*

(2) *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des Méthodes en Géometrie, particuliérement de celles qui se rapportent à la Géometrie moderne, suivi d'un mémoire de Géometrie sur deux principes généraux de la science, la Dualité et l'Homographie.* Par M. Chasles, 1837.

(3) *Dane*, jedno z dzieł Euklides'a, które doszło naszych czasów, a o którem już wspominaliśmy. Euklides nazywa *daną*, to co wynika wprost z warunków jakiejkolwiek kwestyi na zasadzie propozycyi zawartych w jego *Elementach*. Na przykład: « Jeśli z punktu danego prowadzi się prostą, dotykającą koła, którego położenie jest wyznaczonem, prosta poprowadzona jest *daną* co do położenia i co do wielkości. » (*Propozycya* 91. *Dane Euklidesa.*)

Użycie *poryzmów* wyjaśnia pan *Chasles* na przykładzie z którego wykazuje, że zbiór *poryzmów* był jakoby tablicą zawierającą w sobie różne własności lub wyrażenia rozmaitych krzywych (w traktacie Euklidesa tylko prostych i kołowych); i że ta tablica przedstawiała przekształcenia tych własności.

« Tak że poryzmy, mówi pan Chasles, były poniekąd, w pojęciu Euklidesa, równaniami krzywych.»

« Dawały one łatwość i sztukę przemiany współrzędnych (rozumiejąc pod tym wyrazem wszelkie możliwe rodzaje wyrażenia krzywej przez dwie lub kilka zmiennych.)»

Na zasadzie powyższych uwag dodaje autor:

« Doktryna poryzmów była więc Geometryą Analityczną starożytnych; a być może, że gdyby ona była nas doszła, znalezionoby w niej zaród doktryny Descartes'a. »

Uczony autor tej noty (1), której treść w skróceniu przytaczamy, sądzi że co najmniej, to równanie linii prostej (pominąwszy kształt algebraiczny pod jakim my go używamy) wchodziło w skład *Poryzmów* Euklidesa.

..... « Dodamy (mówi pan *Chasles*) że Euklidesowi brakowało tylko użycia Algebry ażeby stworzyć układy współrzędnych datujące od Descartes'a. »

W dalszym ciągu traktatu, wykazuje pan *Chasles* przeznaczenie *poryzmów* w pojęciu *Euklides'a*, a użycie takowych wyjaśnia porównywając doktrynę poryzmów z nowoczesnemi metodami.

« Starożytni (mówi pan Chasles) nie posiadali, jak my od czasów *Descartes'a*, wyrazów porównawczych pomiędzy *miejscami* do których w ich poszukiwaniach geometrycznych bywali przywodzeni. Dla nas dostatecznem jest wyrazić *miejsce* w zwykłych współrzędnych, aby natychmiast znać jego naturę; rozbiór równania *miejsca* poznajamia nas następnie z własnościami i okolicznościami szczególnemi towarzyszącemi temu *miejscu*, jak również z rzędem który ono zajmuje w familii do jakiej należy. Tak więc równanie miejsca, w doktrynie *Descartes'a*, jest niejako jedynym probierzem dostatecznym do wykazania natury, położenia i stosunków *miejsca* z innemi miejscami znanemi. »

« Starożytni przeciwnie nie posiadali tak ogólnego i jednostajnego sposobu badania; nie mając jedynego wyrazu porównawczego, zmuszeni byli wynaleźć różne sposoby pomocnicze aby dojść do rozpoznawania stosunków jakiegoś miejsca, przedstawiającego się po raz pierwszy, z innemi miejscami już znanemi. Te sposoby nie mogły być czem innem jak przemianami określenia, czyli współrzędnych miejsca, celem dojścia do pewnych stosunków dosyć prostych, a nawet identycznych z rodzajami określenia miejsc znanych. »

« Takim był początek ich poryzmów. Miały one za przedmiot podstawiać zamiast wyrażenia geometrycznego lub analitycznego jakiegoś miejsca, inne wyrażenie geometryczne lub analityczne tegoż samego miejsca. »

« Uwagi te wykazują stosunki istniejące między doktryną poryzmów i naszemi nowoczesnemi metodami; pozwalają one dostrzedz o ile te poryzmy musiały być użytecznymi, gdyż w ten sposób pojmowane, stanowiły one istotnie Geometryą analityczną, nie różniącą się od naszej jak tylko symbolami i sposobami algebraicznymi, których wprowadzenie do niej stanowi sławę *Descartes'a*. Poryzmy przeto były tem u starożytnych czem jest dla nas nowoczesna analiza, która je zastąpiła mimo naszej wiedzy. Jest jednak wielce godnem uwagi, że rzecz sama nie zmieniła jak tylko swą nazwę; bo *Analiza*

1) Nota III dzieła już przytoczonego.

Descartes'a w zastosowaniach swych nie przedstawia nic innego, jak ciągły poryzm, ale zawsze tej samej natury i przyjętego kształtu, który jest nader właściwym w stosunku do potrzeb w których go używamy. »

W dalszym ciągu, powyższe spostrzeżenia uzasadnia autor na przykładzie, celem dobitniejszego wykazania, że metoda Descartes'a zastąpiła różne rodzaje poryzmów jedynym wzorem ogólnym, nadającym się do wszelkich kwestyi z *cudowną łatwością*. »

Aby uwydatnić pokrewieństwo poryzmów Euklides'a z układami współrzędnych nowoczesnych, pan Chasles podaje dwie nader ogólne propozycye, obejmujące w licznych swych wnioskach, piętnaście wysłowień Pappus'a, należących do pierwszej księgi Poryzmów Euklides'a.

Z tych dwóch propozycyi, przedstawionych przez pana *Chasles'a* w kształcie poryzmów, wynika wiele układów współrzędnych, a szczególniej współrzędne *Descartes'a*; dla tego też, celem uzupełnienia poglądu na Geometryą analityczną Greków, w przekładzie te dwa poryzmy podajemy.

Poryzm pierwszy. Wziąwszy na jakiejkolwiek płaszczyznie dwa punkta P i P', i dwie poprzeczne spotykające prostą PP' w punktach E, E'; biorąc przytem względnie tych dwóch poprzecznych, dwa punkta stałe O, O';

Jeśli z każdego punktu jakiejkolwiek prostej danej, poprowadzi się dwie proste do punktów P, P', które odpowiednio przetną dwie poprzeczne EO, E'O' w dwóch punktach a, a';

Można będzie znaleźć dwie ilości λ, μ takie aby się miało zawsze związek :

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{Oa}{Ea} + \lambda \frac{O'a'}{E'a'} = \mu.$$

Poryzm drugi. Poprowadziwszy na płaszczyznie dwie proste stałe, spotykające się w jakimkolwiek punkcie S; i wziąwszy na tych dwóch prostych, względnie, dwa punkta stałe O, O';

Jeśli około jednego z punktów danych, obracać się będzie jakąkolwiek poprzeczną, która spotka dwie proste stałe w dwóch punktach a, a';

Będzie można znaleźć dwie ilości λ, μ takie, że się zawsze mieć będzie związek :

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{Oa}{Sa} + \lambda \frac{O'a'}{S'a'} = \mu.$$

Odwrotności tych dwóch propozycyi są prawdziwemi, to jest że :

1° Kiedy równanie (1) ma miejsce pomiędzy odcinkami jakie punkta zmienne a, a' czynią na dwóch prostych stałych EO, E'O', proste Pa, P'a' przecinają się w jakimkolwiek punkcie, którego miejscem jest pewna prosta, wyznaczona przez wartości stałych λ i μ.

2° Kiedy równanie (2) ma miejsce pomiędzy odcinkami, jakie dwa punkta zmienne a, a' czynią na dwóch prostych stałych SO, SO', prosta aa' przechodzi zawsze przez jeden i tenże sam punkt, wyznaczony wartościami stałych λ i μ.

Z pierwszego poryzmu i jego odwrotności wyprowadza pan Chasles poryzm bardzo ogólny, tyczący się wszystkich krzywych geometrycznych.

Poryzm ogólny. Przypuściwszy toż samo co w pierwszym poryzmie, jeśli z każdego punktu jakiejkolwiek krzywej geometrycznej danej, poprowadzi się proste do dwóch punktów P, P′, — które spotykają odpowiednio dwie poprzeczne stałe w punktach a, a′;

Będą istnieć wartości współczynników $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., które zadowolnią równanie ogólne, stopnia *m*, między dwoma stosunkami $\frac{Oa}{Ea}$, $\frac{O'a'}{E'a'}$:

$$\left(\frac{Oa}{Ea}\right)^m + \left(\alpha\frac{O'a'}{E'a'} + \beta\right)\left(\frac{Oa}{Ea}\right)^{m-1} + \text{etc.} = 0.$$

Ztąd wypływa nieskończoność układów współrzędnych, właściwych do przedstawiania wszystkich punktów jakiejkolwiek krzywej; układ spółrzędnych *Descartes'a* znajdzie się, przypuszczając punkt P w nieskończoności na poprzecznej O′E′, punkt zaś P′ w nieskończoności na poprzecznej OE, i że dwa punkta O, O′ są obydwa na przecięciu dwóch poprzecznych.

Pomijając dalszy ciąg tego ciekawego i gienialnego studyum o poryzmach, zakończymy na tem pierwszą część niniejszej pracy, tyczącą się Geometryi Analitycznej u Greków. Dodamy tylko, że szereg pracowników badających dzieła Euklidesa nie zakończył się na panu Chasles. Pan *Breton* przedstawił Akademii francuzkiej w 1849 i 1853 roku dwa poglądy (1) tyczące Poryzmów Euklides'a. Nieco później tenże sam autor (w *Journal de Mathématiques*, tomie XX) ogłosił obszerną rozprawę pod tytułem: «*Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide.*» Pan Breton w traktacie tym podaje częściowe tłumaczenia ustępów z dzieł Pappus'a i Proclus'a, rozliczne poglądy i przypuszczenia Geometrów w kwestyi Poryzmów i nareszcie swoje własne spostrzeżenia nad tą doktryną starożytności.

W roku 1860 i 1861 badacz ten i matematyk przedstawił kilkakrotnie Akademii prace swe w tym kierunku podjęte. Różnorodne ocenienia tych rozpraw i sprawozdanie PP. Bertrand'a i Serret'a (2) o nich wymagałyby szczegółowszego studyum, na które zakres niniejszej pracy nie pozwala. Traktat wreszcie pana Chasles'a (podany jako *Nota* w dziele jego już przytoczonem) tak wysoko ceniony przez uczonych, jest do dzisiaj wyrocznią poniekąd w przedmiocie poryzmów; dla tego też na podanem streszczeniu takowego poprzestając, przejdziemy do pobieżnego przeglądu prac, które w późniejszej epoce, zdołały przygotować grunt naukowy, nieodzowny do pojawienia się i rozwoju nauki Descartes'a.

Z powyższego przeglądu Poryzmów wynika, że z przyczyny nieznajomości Algebry, Euklides nie zdołał położyć podstaw Geometryi Analitycznej, która jak każda doktryna matematyczna, nie mogła być płodem jednego umysłu, dziełem jednej chwili, ani nawet jednej epoki. Stworzenie, ukształtowanie, rozwinięcie i zespolenie składowych elementów tej nauki wymagało wiekowych prac, na których gieniusz Descartes'a mógł dopiero położyć węgielny kamień wielkiej doktryny współrzędnych.

W całej wreszcie naukowej tak bogatej literaturze Grecyi nie ma śladu posiłkowania się Algebrą w kwestyach geometrycznych, bo nauka ta zdaje się była obcą Grekom do czasów Diophanta. Gdyby jednak nawet Algebra była wcześniej znaną i uprawianą przez Geometrów greckich, to rozbrat

(1) *Mémoire sur les Porismes d'Euclide* (Comptes rendus, t. XXIX, 1849.). — *Note sur un point important de la question des Porismes* (Comptes rendus, t. XXXVI, 1853).

(2) *Comptes rendus*, t. LIII.

Arytmetyki z Geometryą, będący charakterystyczną cechą metody naukowych badań ówczesnych, położyłby zaporę ku skojarzeniu Arytmetyki uogólnionej (to jest Algebry) z Geometryą.

Związek jednak tych dwóch nauk (1), których początki giną w pomroce ubiegłych wieków, był przedświtem i zapowiedzią wielkich zdobyczy naukowych XVIIgo wieku.

O doniosłości tego związku nieśmiertelny *Lagrange* tak się wyraża (2):

« Póki Algebra i Geometrya były rozłączone, ich postępy były powolnymi a użytek ich ograniczonym; ale gdy te dwie nauki połączyły się, udzieliły one sobie sił wzajemnych i szybkim krokiem zdążały razem ku doskonałości. »

Odszukanie śladów wprowadzenia Algebry do Geometryi i historyczny pogląd na utrwalenie się i rozwijanie tego związku dwóch nauk jest przedmiotem ściśle związanym z historyą Geometryj Analitycznej; dla tego też po przejrzeniu pobieżnem utworów greckich, z duchem doktryny Descartes'a spokrewnionych, choć w formie i wynikach tak od niej różnych, należy wspomnieć o niektórych matematycznych pracach Indjan i Arabów i rzucić okiem na dzieła pierwszych Geometrów z epoki odrodzenia nauk w Europie.

Nowoczesne poszukiwania historyczne wykazują, że Indjanie położyli wysokie, choć niedostatecznie do początków bieżącego stulecia znane i cenione zasługi w uprawie nauk matematycznych.

Sławni orientaliści angielscy z początku XIXgo wieku : *Taylor*, *Strachey* i *Colbrooke* rzucili wielkie światło na matematyczną literaturę Indjan.

(1) *Geometrya.* Chaldejczycy i Egipcyanie są pierwszymi (o ile wiadomo narodami uprawiającymi Geometryą. Pewniejsze nieco ślady istnienienia tej nauki datują od *Thales'a* (639-548 przed Chrystusem), urodzonego w Fenicyj a wykształconego w Egipcie. Filozof ten założył w Milecie, dawnem mieście Azyi-Mniejszej Szkołę jońską, którą można uważać za kolebkę mędrców Grecyi i pierwszych postępów Geometryi.

Algebra. Przed odkryciem i wyświetleniem niektórych dzieł matematycznej literatury Indjan, podjętem przez Angielskich orientalistów w początku bieżącego stulecia, najdawniejsze dzielo Algebry znane i tłumaczone z arabskiego w XIII wieku było utworem *Mohammed'a ben Musa*, arabskiego pisarza z IX wieku naszej ery, którego dwaj bracia *Hamet* i *Hasen* synowie *Musa ben Schaker* również wielkie w literaturze matematycznej Arabów położyli zasługi.

Mohammed ben Musa przez długi czas i przez wielu dostojnych pisarzy uważanym był za wynalazcę Algebry.

Cardan, wielce ceniony pisarz z XVI wieku naznacza Mohammedowi dziewiąte miejsce pomiędzy dwunastoma gieniuszami ziemi i mieni go wynalazcą Algebry.

Tartalea, współczesny autor Cardan'a, przypisuje również Mohammedowi odkrycie Algebry, którą nazywa : « *la perfetta arte del calculare.* »

Dzieła trzech następujących autorów : *Colbrooke*, *Casiri* i *Rosen* wykazały jednak dostatecznie, że Mohammed ben Musa znaczną część swych matematycznych wiadomości i znajomość Algebry zasięgnął od Indjan.

Stifel sławny matematyk niemiecki w dziele swem : *Arithmetica integra* (Norimbergæ, 1544) przypisuje odkrycie Algebry *Geber'owi*, Geometrze Arabskiemu, i często naukę tę nazywa *Regula Gebri.* W XVII nawet wieku, wielki *Kepler* zda się podzielać tę opinją co do pochodzenia Algebry; jakkolwiek opinja ta jest mylną i jedynie na podobieństwie wyrazów ugruntowaną,

Pan *Chasles* podający w przedmiocie pochodzenia Algebry bogate i nader ciekawe dokumenta i spostrzeżenia, wykazuje etymologją wyrazu *Algebra*, który ma pochodzić od podwójnego miana *Algebr l' Almocabelach*, którem dotychczas Arabi się posługują, a które znaczy : *opozycya* i *porównanie.*

W dzisiejszych czasach nikt już niemal z badaczów historyi matematyki nie przypisuje wynalezienia Algebry Arabom. Zaszczyt ten przypada w udziale Grekom albo Indjanom, a prawdopodobnie tym ostatnim; bo jakkolwiek *Brahmagupta* indyjski matematyk z VI wieku jest o lat dwieście późniejszym od *Diophant'a*, część dzieła jego (z którem *Colbrooke* uczoną Europę zapoznał), traktująca o Algebrze świadczy o wysokim nader rozwoju tej nauki, a tem samem o wielce odległem jej istnieniu u Indjan.

(2) Początek piątej lekcyi kursu Lagrange'a w Szkole Normalnej. (*VII Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique.*)

Colbrooke w dziele swem (1) podaje rozbiór prac dwóch indyjskich matematyków *Brahmagupta* z VIgo i *Bhascara-Acharya* z XIIgo wieku naszej ery.

Utwory tych pisarzy na tle Algebry wzbudziły powszechny podziw w matematykach nowoczesnych, bo są one niezbitym dowodem wielkiego rozwoju tej nauki u Indjan i zaprzeczeniem mylnego przekonania, rozpowszechnionego przed pojawieniem się dzieła *Colbrooke'a*, że system liczenia i Arytmetyka wyższa, którą nam przekazał *Fibonacci* pod nazwą *Algebra* i *Almucabala*, były płodem matematycznego gieniuszu Arabów.

Zdaniem badaczów naukowej literatury Indjan, *Aryabhatta* o wiele dawniejszy pisarz od *Brahmagupta* traktował już z powodzeniem o rozwiązywaniu równań stopnia pierwszego o dwóch niewiadomych. Urywki zaś algebraicznych prac *Brahmagupta* odnoszą się do Analizy nieoznaczonej 1go i 2go stopnia. Rozwiązania w tym przedmiocie podane przez *Brahmagupta* o wiele przewyższają doniosłość prac algebraicznych *Diophant'a*, pisarza greckiego z IVgo wieku naszej ery.

Pan *Libri* w dziele swem (2) w ten sposób streszcza objawy rozwoju analizy u Indjan :

« Oprócz ogólnego rozwiązywania równań drugiego stopnia o jednej niewiadomej i kilku równań pochodnych stopni wyższych, znajduje się tam (w dziełach Brahmagupta i Bhascara) sposób wyprowadzania z jednego rozwiązania wszystkich innych całkowitych rozwiązań równania niewyznaczonego drugiego stopnia o dwóch niewiadomych; i ta Analiza którą winniśmy *Euler'owi* znaną była w Indjach od dziesięciu z górą wieków. Rachunek mający pewne podobieństwo z logarytmami, szczególne znakowania nader zręczne, a nadewszystko wielkie uogólnienie w wysłowieniu zagadnień świadczą o postępach Analizy Indyjskiej. NAUKA TA, KTÓRĄ INDJANIE ZASTOSOWYWALI DO GEOMETRYI I DO ASTRONOMII była dla nich potężnym sposobem do poszukiwań i z pochwałą zaznaczyć należy wiele zadań geometrycznych, których piękne rozwiązania są ich dziełem. »

Godnem jest podziwu, że wzory Brahmagupta, tyczące się rozwiązywania równania niewyznaczonego drugiego stopnia, są zupełnie też same, jak te do których doszedł dopiero w zeszłym wieku Euler, posiłkując się pracami Viete'a, Fermat'a i innych matematyków.

Czyżby gieniusz matematyczny Brahmagupta był tak twórczym, że odrazu potrafił wznieść się do tak wysokiej doskonałości, czy też częściowo znane nam jego utwory są spuścizną tylko wiedzy jego przodków i odzwierciedleniem częściowem wysokiego rozwoju nauk z epoki przedhistorycznej? To ostatnie przypuszczenie zda się być prawdopodobniejszem; a na poparcie takowego możnaby przytoczyć zdanie *Stevin'a*, sławnego holenderskiego matematyka, który w dziele swem (3), datującem z początków siedemnastego wieku, przypuszczał już istnienie «*wieku mądrości*», w którym ludzie cieszyli się godną uwielbienia znajomością nauk. Wiek ów miał uprzedzić kwitnącą epokę Grecyi, której przekazał zaledwie słabą cząstkę swej wiedzy.

Słynny matematyk i badacz francuzki *Bailly* (4), przypuszczenie powyższe popiera wysoką powagą swego słowa : « . . . . . wszystko wykazuje (mówi on) naród poprzedzający Indjan i Chałdejczyków;

(1) *Algebra with arithmetic and mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* London, 1817.
(2) *L'histoire des sciences mathématiques en Italie.*
(3) *Oeuvres mathématique de* SIMON, STÉVIN. Leyde, 1634.
(4) *Histoire de l'astronomie ancienne.*

naród, który posiadał wydoskonalone nauki, filozofję wzniosłą i roztropną, a który znikając z powierzchni ziemi, pozostawił narodom po sobie następującym kilka prawd oderwanych, uchronionych od zagłady i wypadkiem dla nas przechowanych. »

Nie do nas należy rozbierać i oceniać historyczne kwestye podobnej doniosłości; zaznaczając więc tylko wysoki rozwój Analizy indyjskiej i przypuszczenie, tyczące się odległego jej pochodzenia, rzucimy okiem na geometryczną część dzieła Brahmagupta.

Jakkolwiek Colebrooke utrzymuje że Geometrya z nierównie mniejszem powodzeniem od Algebry uprawianą była przez Indjan, pan Chasles po szczegółowym rozbiorze pochlebnie ocenia geometryczne utwory Brahmagupta i wykazuje, że niższość geometrycznej części jego dzieła jest tylko pozorną i że łakonizm i uogólnienie w wysławianiu zadań Brahmagupta były przyczyną że Colebrooke nie ocenił dostatecznie tej części dzieła.

Angielski orientalista zdawał się zwracać głównie swą uwagę na kilka elementarnych twierdzeń Brahmagupta, jak na przykład: kwadrat z przeciwprostokątni w trójkącie prostokątnym, proporcyonalność boków odpowiednich w trójkątach podobnych i powierzchnia trójkąta w funkcyi trzech jego boków. Uczony ten zaniedbał rozbioru najważniejszych i podstawowych dzieła indyjskiego pisarza przedmiotów; jak na przykład: *teoryi czworoboku wpisalnego w koło*, którą Brahmagupta przedstawił z godną podziwu dokładnością i z zupełnem powodzeniem rozwiązał. Podjęcie i rozwiązanie tej kwestyi nie traktowanej przez Geometrów greckich jest jednym z dowodów oryginalności indyjskich matematyków.

Najwięcej interesujące przedmiot niniejszej pracy spostrzeżenie nad dziełem Brahmagupta tyczy się związku Algebry z Geometryą, a odszukanie takowego jest przyczyną, że dwóch wybitnych składowych części dzieła indyjskiego matematyka nie podobna było pominąć milczeniem. Pierwsza z nich odznacza się *teorya równań niewyznaczonych drugiego stopnia*, podstawą zaś drugiej jest *teorya czworoboku wpisalnego w koło*.

Ciekawe prace naukowe (1) pomieszczone w *Journal des mathématiques*, tom II, 1837, wykazały że wzory algebraiczne Brahmagupta mogły być wyprowadzone z wykreśleń powyższej kwestyi geometrycznej; a Arabowie słusznie z wielu względów za naśladowców Indjan uważani, doszli do rozwiązywania równań niewyznaczonych drugiego stopnia, posiłkując się przeważnie Geometryą.

Dwie przeto teorye, nadające cechę oryginalnej twórczości pracom Brahmagupta, nie bez przyczyny i nie przypadkowo znajdują się złączone w jego dziele; i aczkolwiek pozornie ścisłego między sobą nie przedstawiają związku, są dostatecznym objawem ducha matematycznych badań, upodstawowanych u Indjan na zespoleniu Algebry z Geometryą.

W dziele Brahmagupta widzimy więc pierwszy ślad związku tych dwóch nauk, któremu *Lagrange* słusznie tak wielką przyznaje wartość, uważając go za podstawę Analitycznej Geometryi, a tem samem za podwalinę wielkiej nowoczesnej budowy matematycznej, której szczytem są rachunki Leibnitza i Newtona.

Wspomniawszy o jedynem znanem dotychczas naukowem źródle pochodzenia tego związku w dziele

(1) *Note sur les équations indeterminées du second degré. — Demonstration géometrique des formules des algébristes indiens.*

Brahmagupta, należy śledzić za jego rozwojem aż do pojawienia się doktryny Descartes'a, będącej najdoskonalszem takowego uosobieniem.

Krótki i częściowy przegląd dzieła *Bhascara* pisarza indyjskiego z XIIgo wieku, jak również niektórych dzieł Arabów, będących wogóle spadkobiercami nauki Indjan, wykaże jaśniej że Indjanie posługiwali się jednocześnie w badaniach matematycznych : Algebrą dla skrócenia i ułatwienia dowodzeń geometrycznych zadań i Geometryą celem dowiedzenia prawideł Algebry i uwidocznienia wyników Analizy za pomocą figur.

Przytaczany już orientalista Colebrooke i inni uczeni badacze indyjskiej literatury przypuszczali powszechnie że *Bhascara Acharya* autor indyjski, piszący w pięć czy sześć wieków po matematyku *Brahmagupta*, przewyższył go swą nauką i wykazał wiele usterek jego dzieła.

Sprostowanie tego mylnego przypuszczenia podjął pan Chasles, uważając że wyższość naukowa Bhascara nad jego poprzednikiem byłaby ciekawym wyjątkiem w całej historyi cywilizacyi indyjskiej, która jakby ulegając jakiemuś fatalnemu prawu malała od nader odległej epoki i zeszła obecnie do stopnia takiej nicości, że dzisiejsi uczeni indyjscy nie są zdolni zrozumieć nawet dzieł w spuściźnie po przodkach odziedziczonych.

Szczegółowym krytycznym rozbiorem dzieła Bhascara dowiódł pan Chasles niższości stosunkowej tego pisarza względem Brahmagupta, wykazując wzory które Bhascara skopjował z dzieł swego poprzednika, nie rozumiejąc nawet ich znaczenia.

Ponieważ jednak mimo swej niższości naukowej, utwory Bhascara Acharya uwidaczniają nierównie więcej od dzieła Brahmagupta wprowadzenie u Indjan Algebry do Geometryi, przeto dla uzupełnienia niniejszej pracy, stosownem będzie podać niektóre szczegóły tyczące się dzieł Bhascara, zawierających w sobie : Arytmetykę, Geometryą i Algebrę.

Arytmetyka z Geometryą objęte są w dziele nazwanem przez autora *Lilavati*. Dzieło zaś nazwane *Bija-Ganita* traktuje głównie o Algebrze i kwestyach geometrycznych, będących zastosowaniem Algebry, a przeto rozwiązanych za pomocą rachunku. W *Bija-Ganita* również godnemi uwagi są niektóre zadania algebraiczne dowiedzione za pomocą Geometryi.

Z pierwszem z tych dzieł Bhascara zapoznał Europę *J. Taylor* (1) drugie uczonym przedstawił *E. Strachey* (2). Rozbiór obydwóch tych dzieł i utworów Brahmagupta podjął w przytoczonem już dziele H. T. Colebrooke.

Pomijając ciekawy krytyczny rozbiór prac Bhascara w dziedzinie Geometryi czystej, podany przez pana Chasles w jednej z not dzieła *Aperçue Historique*, przytoczymy z niej tylko niektóre cytacye i spostrzeżenia tego uczonego w przedmiocie : kwestyi geometrycznych rozwiązanych w *Bija-Ganita* za pomocą rachunku i reguł Algebry dowiedzionych przez Geometryą. Wszystkie te kwestye, mówi pan Chasles, traktowane są nader misternie i z godną uwagi dokładnością.

W niektórych tego rodzaju kwestyach, mogących się rozwiązać kilkoma sposobami, autor indyjski wybrał rozwiązanie najprostsze.

(1) LILAVATI *or a treatise on Arithmetic and Geometry by Bhascara Acharya, translated from the original sanscrit by J. Taylor*. Bombay, 1816.

(2) BIJA-GANITA *or the Algebra of the Hindous, by Ed. Strachey*. London, 1813.

Bhascara daje dwa dowodzenia co do kwadratu z przeciwprostokątni. Pierwsze znich polega na szukaniu za pomocą proporcyi wyrażenia odcinków wyznaczonych na przeciwprostokątni przez prostopadłą i na dodaniu do siebie tych dwóch odcinków. Drugie dowodzenie jest czysto indyjskiego pochodzenia i nader godne uwagi.

Na bokach jakiegokolwiek kwadratu Bhascara wykreśla na wewnątrz figury cztery trójkąty prostokątne równe pomiędzy sobą i mające za przeciwprostokątnie boki tego kwadratu; potem powiada: *Patrzcie.* Rzeczywiście rzut oka na figurę wystarcza do okazania że powierzchnia kwadratu wyrównywa powierzchniom czterech trójkątów (albo cztery razy wziętej powierzchni jednego z nich), więcej powierzchni małego kwadratu, którego bokiem jest różnica dwóch boków kąta prostego jednego z czterech trójkątów. To jest, że ma się, nazywając przez c przeciwprostokątnią jednego z trójkątów, a przez a i b dwa inne jego boki

$$c^2 = 4\,\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + (a-b)^2$$

albo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

co było danem do dowiedzenia. (Bija-Ganita, § 146.)

W paragrafach 147, 149 i 150 Bija-Ganita następujące wzory algebraiczne

$$2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2,$$

$$(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab,$$

$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2,$$

są dowiedzione za pomocą figur, tak przemawiających do oczu i do umysłu, że wszelkie pojaśnienie byłoby zbytecznem.

Celem rozwiązania, w liczbach współmiernych (*rationnels*) równania niewyznaczonego drugiego stopnia,

$$ax + by + c = xy,$$

Bhascara pokazuje za pomocą figury, dającej temu równaniu znaczenie geometryczne, że ono może się przekształcić na następujące równanie

$$(x-b)(y-a) = ab + c.$$

Zkąd wywodzi że za wartości współmierne na x i y można wziąć

$$x = b + n, \qquad y = a + \frac{ab+c}{n};$$

n będąc liczbą dowolną.

Bhascara nazywa dowodzenie powyższe geometrycznem.

W paragrafach 212-214 podaje on następnie dowodzenie czysto algebraiczne.

Wiele kwestyi z Geometryi jest rozwiązanych w Bija-Ganita, jako zastosowanie prawideł Algebry.

Niektóre z nich zależą od równań niewyznaczonych drugiego stopnia. Takiemi są dwie następujące «Znaleźć (w liczbach współmiernych) boki trójkąta prostokątnego, którego powierzchnia jest wyrażoną przez tęż samą liczbę co i przeciwprostokątnia, albo też jest równą iloczynowi z trzech boków.»

W pierwszym razie boki trójkąta są $\frac{20}{6}$, $\frac{15}{6}$ i $\frac{25}{6}$; w drugim zaś $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$ i $\frac{5}{10}$. Bhascara dodaje że można znaleźć inne rozwiązania.

Te dwa zadania zależą odpowiednio od równań :

$$x^2y^2 = 4(x^2 + y^2),$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Te szczegóły wykazują że Indjanie, przynajmniej z czasów Bhascara, zastosowywali Algebrę do Geometryi i Geometryą do Algebry. Nie znajdujemy podobnych śladów tak ścisłego skojarzenia między temi dwiema naukami w dziele Brahmagupta. Prawdopodobnie pochodzi to ztąd że ono jest pisanem o wiele pobieżniej jak dzieło Bhascara; że zawiera w sobie znacznie mniej przykładów prawideł algebraicznych i że w niem autor nie podaje żadnego dowodzenia. Winniśmy jednak przypuszczać, że zastosowanie Algebry do Geometryi, nadające dziełom Bhascara tak wybitną cechę, datuje z czasów o wiele poprzedzających tego pisarza; tem więcej że ono charakteryzuje także dzieła arabskie na kilka wieków przed Bhascara dziełem pisane; z czasów n. p. Mohammeda ben Musa (wiek IX). Arabowie nie mogli czerpać zkąd inąd tego rodzaju przykładów w Matematyce jak tylko od Indjan, gdyż Grecy zupełnie tych sposobów nie używali.

W naukowej literaturze rzymskiej, której z kolei przyjrzeć się wypada, celem uzupełnienia rysu historycznego początku Geometryi Analitycznej, nie ma żadnego śladu zastosowania Algebry do Geometryi. Zaniedbanie nauk ścisłych u Rzymian jest w pewnej mierze potwierdzeniem prawdziwości słów *Franklina*: «Łoskot bębnów wypłasza ideje.» Pole walki i forum były głównemi widowniami, nęcącemi ku sobie wszystkie niemal talenta Rzymian.

Astronomja zdołała wprawdzie zwrócić na się uwagę niektórych sławnych mężów jak : *Varron*, *J. Cezar*, *Ciceron*, *Lukrecyusz*, *Virgiljusz*, *Horacyusz* i *Seneka;* ale wiadomości ich o zjawiskach niebieskich były zaledwie pobieżnemi i żaden z nich do postępu tej nauki przyczynić się nie potrafił. Jeden tylko *Sulpicyusz Gallus* odznaczył się głębszą nieco znajomością tej nauki, przepowiadając zaćmienia.

Geometrya nader mało była uprawianą. *Juliusz Cezar* (jak tego dowodzi treść listu tego rycerza, podana w dziele Boecjusza) chciał aby nauka ta była prawidłem w całem państwie rzymskiem i kolonjach, we wszystkiem co się tyczyło : mierzenia i odgraniczania gruntów, budynków publicznych i prywatnych, fortyfikacyi miast i budowy dróg publicznych. To też miernicy, zwani *agrimensores* albo *gromatici* uważani byli za sterników w dziedzinie nauk ścisłych, chociaż dzisiaj świat uczony nawet miana geometrów im odmawia.

Trzy wybitniejsze postacie z tej bezpłodnej we względzie naukowym epoki są: *Varron*, matematyk, *Vitruve*, architekta i *Juliusz Sextus Frontinus*, inżynier.

Imiona godne uwagi w historyi nauk ścisłych tak są rzadkiemi u Rzymian, że badacze odtwarzający przesłość Geometryi zmuszeni są notować nawet tych pisarzów rzymskich, którzy ślady choćby słabej nawet znajomości podstaw tej nauki po sobie zostawili. Nic też dziwnego że w przedmiocie związku Geometryi z Algebrą literatura rzymska zupełnem milczeniem może być pominiętą.

Kiedy w Europie uprawa nauk ścisłych od ósmego do trzynastego wieku zupełnie była zaniechaną, Arabowie przyjęli na się szczytne posłannictwo przyswojenia sobie wiedzy Greków i Indjan i przekazania takowej europejskiej literaturze naukowej z piętnastego wieku.

Bagdad stał się czasowo stolicą talentów całego świata w ósmym wieku, a jak powiada *Herbelot* w swej *Bibliothèque orientale*, naród arabski odznaczający się gorącem zamiłowaniem sztuk i nauk, tłumaczył na własny język najlepsze dzieła greckie, hebrajskie, chaldejskie i indyjskie.

Przyswajając sobie pierwiastki dwóch wysoko rozwiniętych literatur greckiej i indyjskiej, Arabowie z łatwością zdołali dojść do wysokiej wiedzy w dziedzinie nauk ścisłych. Bezwątpienia ogrom bogactwa spuścizny przekazanej im przez dwa narody potrafili oni zużytecznić, ale wielkością tego spadku olśnieni nie dosyć może położyli zasług w powiększeniu odziedziczonego mienia.

W Geometryi czystej potrafili oni pojąć i doścignąć zaledwie Greków pod względem znajomości tej nauki.

Wyższość ich nad Grekami polega na wysokiem udoskanaleniu Trygonometryi i na zespoleniu naukowych spuścizn: Greckiej i Indyjskiej, to jest na utrwaleniu i udoskonaleniu związku Geometryi z Algebrą.

Istnienie tego związku zauważane w dziełach indyjskich Brahmagupta i Bhascara, nierównie silniej uwydatnia się w arabskiej literaturze.

W dziewiątym wieku *Mohammed ben Musa*, jeden z trzech braci, których sławę mieliśmy już sposobność zaznaczyć, w pismach swych używa Geometryi do uwidocznienia algebraicznych działań i zapomocą tej metody dowodzi prawideł do rozwiązywania równań drugiego stopnia, których rozbiera trzy przypadki. Równania autorów arabskich są numeryczne; ten brak uogólnienia przechował się aż do czasów Viete'a, któremu ludzkość zawdzięcza wprowadzenie do Algebry na miejsce cyfr liter, nazwanych pochlebnie przez wielkiego *Carnot'a* « istotami rozumu. »

Trzy przypadki równań drugiego stopnia rozbierane przez Mohammeda dadzą się przedstawić pod kształtem

$$ax^2 + bx - c = 0$$
$$ax^2 - bx - c = 0$$
$$ax^2 - bx + c = 0.$$

Czwarty przypadek, mogący przedstawiać ogólne równanie drugiego stopnia jest

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie wszystkie wyrazy są dodatnie. Mohammed o takowym nie wspomina, bo pierwiastki w tym razie są zawsze odjemne.

W innych równaniach bierze on pod uwagę tylko pierwiastki dodatnie, uważając odjemne za nic nie znaczące.

W trzecim przypadku, $ax^2 - bx + c = 0$, gdzie dwa pierwiastki

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

są dodatnie (przypuszczając że są rzeczywistymi), Mohammed powiada że się je obydwa rachuje, ale że trzeba w każdym razie upewnić się że one odpowiadają kwestyi.

Sposób traktowania tego przedmiotu przez Geometrę Arabskiego wielce jest zbliżonym do treści niektórych paragrafów dzieła indyjskiego *Bija-Ganita.*

Dzieło Mohammeda nie wyrównywa doniosłości dzieł indyjskich, bo w niem pominiętym jest przedmiot rozwiązywania równań niewyznaczonych. Przedmowa jednak do tego dzieła wykazuje dostatecznie, że praca ta Mohammeda nie jest streszczeniem wszystkich wiadomości matematycznych Arabów, że posiadali oni dzieła inne nierównie obszerniej nauki ścisłe traktujące. Mohammed w przedmowie swej oświadcza bowiem, że dzieło to ułożył na żądanie Kalifa *Al Mamoun* dla ułatwienia wielu działań przytrafiających się w stosunkach wzajemnych między ludźmi i w potrzebach życia.

Z pomiędzy wielu innych autorów arabskich, których imiona znaleźć można w « *Bibliothèque orientale* » przez *Herbelot*, zauważyć należy pisarza *Thebit ben Corah* z którego licznych dzieł jedno szczególniej zasługuje na wzmiankę ze względu że sam tytuł (1) takowego wspomina o związku Algebry z Geometryą.

Montucla w znakomitem swem dziele (2), na które niejednokrotnie powołać się nam przyjdzie, powiada że « Thebit pisał o pewności dowodzeń rachunku algebraicznego, coby mogło wprowadzać na myśl, że Arabowie mieli także szczęśliwą ideję zastosowywania Algebry do Geometryi. »

Odszukany przez pana *Sedillot* urywek Algebry w rękopiśmie arabskim zamienia powyższe przypuszczenie w pewność, bo w rękopiśmie tym podane są równania trzeciego stopnia rozwiązane geometrycznie.

Według pana Sedillot autor arabski wyznacza pierwiastki równań następującego kształtu :

$$x^3 - ax - b = 0,$$

za pomocą koła i paraboli.

Jestto dostatecznym dowodem że Arabowie nietylko posiadali znajomość Algebry ale i sztukę graficznego przedstawiania wzorów algebraicznych. Jak to zobaczymy w dalszym ciągu, uwi-

(1) *De problematibus algebricis geometrica ratione comprobandis.* Tytuł podany w *Bibliotheca Arabico-Hispana* przez Casiri'ego.

(2) *Histoire des mathématiques.*

dacznianie znaczenia wzorów algebraicznych za pomocą geometrycznych wykreśleń jest jedną z wybitnych cech talentu Viète'a.

Odkrycie tego dokumentu przez pana Sedillot jest nader ważnem we względzie wyświetlenia historyi nauk ścisłych u Arabów. Przed odszukaniem jeszcze tego dokumentu *Montucla* w dziele swem (1) przypuszczał że Arabowie posiadali traktat o równaniach trzeciego stopnia. Przypuszczenie to opierał Montucla na istnieniu rękopismu znajdującego się w bibliotece w Leyde, noszącego tytuł: « *Algebra cubica, seu de problematum solidorum resolutione.* » Tytuł sam tego rękopismu zda się dowodzić jeśli nieznajomości algebraicznego rozwiązywania równań trzeciego stopnia, to przynajmniej posiadania sztuki geometrycznego wykreślenia pierwiastków tych równań.

Z powyższych spostrzeżeń o literaturze naukowej Arabów można mieć dostateczne pojęcie o kierunku prac tego narodu w dziedzinie nauk ścisłych. Zespolenie Geometryi Greków z Algebrą Indjan jest uderzającą cechą arabskiej literatury matematycznej. Związek tych dwóch nauk, przekazany przez Arabów europejskim pisarzom z piętnastego stulecia, można uważać za przyczynę szybkich postępów naukowych, którymi wiek XVI zaznaczył swą wyższość i przewagę nad matematykami starożytności.

Gdybyśmy mogli mieć pretensyą do kreślenia ogólnego rysu historycznego nauk ścisłych tego dostojnego narodu, należałoby zaznaczyć wiele zasług jego na niwie matematycznych prac położonych i mnóstwo wielkich imion jak: *Alkindus*, autor dzieła *De regula sex quantitatum*, *Albategnius* (2), twórca podstawowego wzoru Trygonometryi sferycznej $\text{dos.}a = \text{dos.}b\,\text{dos}c + \text{wst.}b\,\text{wst.}c\,\text{dos.A}$, i wynalazca wyrażenia $\dfrac{\text{wstawa}}{\text{dostawa}} = \text{styczna}$, *Abul Wefa* i *Ibn-Younis*, którzy wprowadzili styczne do rachunków trygonometrycznych, *Hassan ben Haithem*, autor dzieła *O znanych geometrycznych* i sławny optyk i geometra *Alhasen*, którego dzieło doszłe nas (3) miało służyć naszemu Vitellionowi twórcy optyki, za pierwowzór do ułożenia sławnego i pierwszego w Europie traktatu o tej nauce (4)

Kiedy Arabowie przyswoiwszy sobie charakterystyczne pierwiastki nauk ścisłych Indjan i Greków

(1) *Histoires des Mathématiques.*

(2) Właściwie sławny ten geometra nazywał się *Mohammed ben Geber.*

(3) Wydrukowane w Bazylei w 1572 r. wraz z trzeciem wydaniem Optyki Vitelliona, pod tytułem: *Opticæ thesaurus. Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi. Ejusdem liber de crepusculis et nubium ascensionibus. Item Vitellionis Thuringo-Poloni libri decem.*

(4) *Michał Wiszniewski*, autor Historyi literatury polskiej wspominając o teoryi Vitelliona, powiada że on ją wytłumaczył z Al-Hassena; i na tej zasadzie przyznaje mu raczej miano pierwszego krzewiciela, aniżeli wynalazcy teoryi łamania się promieni światła.

Adam Mickiewicz w pierwszej lekcyi swego kursu Literatury słowiańskiej opiera się na słowach Vitelliona w przedmowie do jego dzieła umieszczonych a dowodzących, że ten wielki matematyk XIII^{go} wieku, w chwilach wypoczynku wiejskiego patrząc na blask igrający po falach rzeczki, co przed jego domem płynęła, powziął pierwsze swoje myśli. Na zasadzie tego oświadczenia Vitelliona, wielki nasz wieszcz przyznaje mu zupełnie samodzielną twórczość mówiąc: « Jakim sposobem to, co zwykle gdzieindziej jest wypadkiem długiej pracy, leży na końcu umiejętnych dociekań, tu u nas zdaje się być odgadnieniem i świtać z jutrzenką umiejętności? »

P. Chasles tak się o Vitellionie odzywa: « Vitellion, geometra polski, jeden z najuczeńszych XIII^{go} wieku, czerpał użytecznie z dzieła Alhasena, dla ułożenia swego traktatu o Optyce, pierwszego wydanego przez europejskiego geometrę. »

z powodzeniem uprawiali matematykę, Europa w głębokim śnie nieświadomości pogrążona do XIIIgo wieku niezdolną była poszczycić się choćby pobieżną znajomością podstaw matematyki.

Wprawdzie w ósmym wieku spostrzega się dwa imiona matematyków : *Bede* i *Alcuin*, godnych tego miana tylko przez wzgląd na ówczesną epokę ogólnego zaniedbania nauk; usiłowania ich jednak nie znalazły naśladowców, a świeżo pozakładane naówczas uniwersytety w Paryżu i Pawii przez dwa wieki nie zdołały zatlić pochodni wiedzy, tak płomieniejącej w dłoni Greków, Indjan i Arabów. W dziesiątym jeszcze wieku ciemnota w przedmiocie nauk ścisłych tak była powszechną, że słabe i pobieżne matematyczne wiadomości Papieża *Gerbert'a* potrafiły wzbudzić podziw i zjednać mu miano czarodzieja.

Ani naśladowcy Gerbert'a jak *Adalbolde, Heriger* i *Bernelin* ani *Hermann Contractus*, w jedynastym wieku o kwadraturze koła traktujący, ani nawet z dwunastego stulecia *Gérard* tłumaczący niektóre utwory Ptolomeusza i Alhazena i *Adhélard* pierwszy tłumacz Elementów Euklidesa; ani nareszcie współcześni dwóch ostatnich : *Plato Tiburtinus* i *Johannis Hispalensis*, usiłujący zapoznać Europę z dziełami matematycznemi Arabów, nie zdołali rozniecić we współczesnych zamiłowania do uprawy nauk ścisłych. Ciekawe z wielu względów, choć wogóle naśladownicze, utwory wymienionych autorów nie mają bezpośredniego związku z przedmiotem niniejszej pracy i dla tego wzmianką tych kilku imion zadawalniając się, przejdziemy do wieku trzynastego, uważanego za chlubę wieków średnich i erę w historyi wiedzy. Rzeczywiście wiek ten szczyci się obfitością autorów godnych tego miana; z pomiędzy których na szczególniejszą uwagę zasługują : *Campanus*, tłumacz Elementów Euklidesa; *Roger Bacon*, sławny fizyk i astronom; *Sacro Bosco*, autor dziełka osnutego na tle utworów Ptolomeusza, które przez cztery wieki służyło za podstawę wykładów astronomii; *Vitellion*, twórca optyki i geometra mocno obeznany z dziełami Euklidesa, Apollonjusza i Pappusa i nareszcie *Leonard Fibonacci*. Ten ostatni znany powszechnie pod nazwą *Leonarda z Pizy* napisał dzieło noszące tytuł *Liber Abacci*, którem wpłynął niesłychanie na kierunek nauk matematycznych w Europie, bo dziełem tem wprowadził pierwiastki charakterystyczne matematyki Indjan wówczas kiedy jedynie badania greckich matematycznych utworów zdawały się być wyłącznie na porządku dziennym. W Algebrze swej, będącej poniekąd naśladownictwem utworów Mohammeda ben Musa, *Fibonacci* posuwa się aż do rozwiązywania równań drugiego stopnia; a co najwięcej dla nas uwagi jest godnem, że związek geometryi z Algebrą jest wybitną cechą jego dzieła i pierwszym tego rodzaju objawem w Europie. Matematyk ten zda się wysoko cenić i gruntownie pojmować doniosłość tego związku, mówiąc w przedmowie do swego dzieła : « *Et quia Arithmetica et Geometriæ scientia sunt connexæ, et suffragatoriæ sibi ad invicem, non potest de numero plena tradi doctrina, nisi inserantur geometrica quædam, vel ad geometriam spectantia;* » a później dodaje, że często prawidła i działania algebraiczne widoczność i dowodzenia swe zawdzięczają figurom i spostrzeżeniom geometrycznym. Godnem jest uwagi że w samym przedświcie rozwoju nauk ścisłych w Europie *Fibonacci* udarował je odrębnym od greckiego kierunkiem naukowym, służącym za pierwowzór pracom matematyków szesnastego stulecia.

Wiek czternasty aczkolwiek mniej płodny od poprzedniego pod względem prac matematycznych pozostawił jednak utwory matematyków nietylko naśladujących Greków i Arabów, ale usiłujących zdobycze naukowe zastosować i wzbogacić. W ogólnej historyi nauk matematycznych godnemi uwagi są imiona autorów tej epoki jak : *Bradwardin, Pedisiamus, Killingworth, Argyrus, Paolo di Digomari* i wielu innych. Mimo jednak tej stosunkowej mnogości pracowników na niwie matematyki koniec nawet czternastego wieku za epokę niemowlęctwa nauk ścisłych uważać można i dopiero wiek piętnasty bogaty w zdarzenia, dające bodźca powszechnemu ruchowi umysłów rozpoczyna perjod rozkwitu matematyki w Europie. Geometrya grecka z oryginalnych dzieł badana i Algebra Indjan pojęta i rozpowszechniająca się, jakby naśladując ducha prac Fibonaccie'go, podały sobie od tąd nierozłączalne dłonie.

Wynalazek druku, odkrycie Ameryki i Indyi Wschodnich i wzięcie Konstantynopola wpłynęły skutecznie na powszechną działalność i krzewienie się nauk w tej epoce, której pierwszym w dziedzinie matematyki przedstawicielem jest *Regiomontanus*, jedna z najwybitniejszych postaci w historyi nauk ścisłych. Płodny i niezmordowany umysł tego pisarza potrafił nietylko objąć główniejsze dzieła geometrów greckich i zapoznać z nimi współczesnych, ale jeszcze własnemi odkryciami wzbogacił naukę. Jest on autorem dzieła o Trygonometryi płaskiej i sferycznej (1), w którem rozwiązuje wiele zagadnień za pomocą Algebry, którą nazywa *ars rei et census.* Napisał on także Arytmetykę, którą nazwał *Algorismus demonstratus,* w której po raz pierwszy ilości numeryczne zastępuje zgłoskami. Nowa ta forma przyjęta w nowoczesnej uprawie nauk matematycznych była po raz pierwszy użytą przez tego pisarza, chociaż odkrycie jej jest jednym z promieni blasku, otaczającego nieśmiertelne imie *Viète'a.* Pomijając inne nader liczne, ale niestety po większej części nie publikowane dzieła Regiomontanusa, wspomnimy imiona matematyków z pietnastego wieku : *Mikołaj Cusa, Albert Durer* i *Leonard de Vinci*, którzy w historyi nauk matematycznych wysokie zajmują miejsca. Na schyłku pietnastego wieku godnem jest wzmianki dzieło *Łukasza Pacioli* (2), znanego pod nazwą *Lucas di Borgo,* które miało wielki wpływ na nowy kierunek nauk matematycznych, oparty na związku Algebry z Geometryą.

Dzieło tego pisarza jest pierwszą Algebrą drukowaną w Europie. *Lucas di Borgo* powiada że Algebra jest częścią nauki rachunku niezbędną dla Arytmetyki i Geometryi. Za pomocą Algebry, którą nazywa *Arte maggiore* dowodzi wielu propozycyi z dziesiątej księgi Euklidesa i traktuje o rozwiązywaniu równań drugiego stopnia. W wielu razach dla uwidocznienia i wykazania prawideł rachunku posługuje on się Geometryą, a w jednej z części swego dzieła zamieszcza sto zadań geometrycznych powiększej części za pomocą Algebry rozwiązanych.

Oto dwa z tych zadań : *Mając dane dwa boki trójkąta i jego powierzchnią znaleźć bok trzeci*; i *mając dane powierzchnią i różnicę dwóch boków prostokąta znaleźć jego boki.*

Oznaczając przez a^2 powierzchnią a przez d różnicę dwóch boków, Lucas di Borgo bierze za bok większy $x + \frac{d}{2}$ a za drugi bok $x - \frac{d}{2}$. Zkąd otrzymuje się natychmiast na wyznaczenie niewiadomej równanie

$$x^2 - \frac{d^2}{4} = a^2;$$

z którego wyprowadza się wartości dwóch boków.

(1) *De triangulis omnimodis libri quinque* (Norimbergæ, 1533).
(2) *Summa de Arithmethica, Geometria, proportione proportionalita* (dwa wydania w 1494 i 1523 r.).

Pan Chasles zwraca uwagę, że to rozwiązanie jest nierównie prostszem od rozwiązania do którego byłoby się przywiedzionym, biorąc wprost dwa boki za niewiadome, gdyż w tym razie miałoby się

$$yz = a^2, \qquad y - z = d$$

i ostatecznie równanie drugiego stopnia

$$y^2 - dy = a^2.$$

Pomijając inne utwory tego matematyka, dosyć będzie zwrócić uwagę na to, że charakter prac jego polega na ciągłym związku Algebry z Geometryą, co stanowi cechę wszystkich niemal prac matematycznych szesnastego stulecia i podstawę wielkich postępów matematyki nowoczesnej.

W Niemczech *Adam Risen*, *Krzysztof Rudolf* i *Stifel* rozpowszechnili podstawy Algebry i zastosowanie tej nauki do Geometryi nie ustępując w niczem, a nawet przewyższając niekiedy głęboką znajomością Algebry utwory Łukasza di Borgo.

Arithmetica Integra Stifel'a w 1544 roku wydana zawiera w sobie wszystkie propozycye trzynastej księgi Euklidesa za pomocą Algebry traktowane.

Zanim doprowadzimy rys postępów Geometryi w związku z Algebrą do prac Viète'a, które ostatecznie przysposobiły grunt naukowy dla pomysłów Descartes'a, należy jeszcze wspomnieć zasłużone imiona matematyków jak *Cardan*, *Tartalea* i *Benedictis*, w których dziełach związek Geometryi z Algebrą uwidacznia się i utrwala.

Benedictis w dziele swem (1) używa bezprzestannie Geometryi do dowodzenia prawideł i sprawdzania wyników Algebry. Oto ciekawy przykład tej metody. Autor stawia sobie zadanie o trzech niewiadomych, wyrażające się przez równania : $x + y = a$, $y + z = b$, $z + x + c$. Rozwiązuje tę kwestyą algebraicznie; ale dla sprawdzenia wyrażeń znalezionych dla niewiadomych, używa następującej geometrycznej uwagi : *Niech się zbuduje trójkąt któryby miał za boki trzy liczby* a, b, c *i niech się weń wpisze koło styczne do jego trzech boków : odcinki, jakie punkta styczności wyznaczą na tych bokach będą wartościami trzech niewiadomych* x, y, z; zkąd wypada że wartości tych niewiadomych będą : $x = \frac{a + b - c}{2}$, etc.; sprawdzenie wartości otrzymanych za pomocą rachunku.

W dziele powyższem znajduje się pierwszy zapewne przykład geometrycznego wykreślenia dodatnego pierwiastku równania drugiego stopnia. Pomijając jednak rozwinięcie spostrzeżeń nad tym objawem godnym uwagi, pomijając wreszcie dzieła *Cardan'a* i *Tartalea*, w których wiele kwestyj umiejętnie traktowanych w przedmiocie związku Geometryi z Algebrą zaznaczyć by można, zauważymy że wszystkie te objawy coraz silniej utrwalającego się związku dwóch nauk polegały wyłącznie na działaniach liczebnych. Geometrya Greków uległa wielkiej zmianie; tracąc charakter ogólności i czystości którym się szczyciła uprzednio, przyswoiła sobie nowe narzędzie pomocnicze do swych badań, którem jest rachunek z razu czysto liczebny, jak to widzieliśmy w epokach dotychczas pobieżnie dotkniętych, a będących tylko przygotowaczemi i przejściowemi pod względem urobienia nowoczesnego kształtu nauk matematycznych siedemnastego stulecia.

W tym to stanie nauki gieniusz *Viet'a*, jakby oceniając całą ujmę przyniesioną Geometryi przez

(1) *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*; Turyn, 1583.

związek z Algebrą, na liczebnych tylko działaniach opartą, stworzył *Algebrę nowoczesną*. Zastępując liczby zgłoskami, które Carnot nazwał « istotami rozumu, » *Viète* można powiedzieć stworzył Algebrę, bo nadał jej charakter abstrakcyi i ogólności; a związkowi Algebry z Geometryą, na którym Descartes miał postawić swą doktrynę, przyniósł on w darze warunki trwałego bytu i owocności, podnosząc Algebrę do stopnia uogólnienia, nadającego jej prawa do nierozerwalnej spójni z Geometryą Greków i siłę do szybkich postępów na drodze udoskonalenia.

Tak wysoko ceniony przez Lagrange'a związek tych dwóch dzielnic matematyki, śledzony choć pobieżnie w tej pierwszej części niniejszej pracy, od wystąpienia Viète'a staje się wydatną rzeczywistością; a Geometrya Analityczna, ten pierwszy wymowny objaw wyższości nowożytnych nad starożytnymi w dziedzinie nauk ścisłych, liczyć może odtąd swe istnienie, bo składowe jej pierwiastki silnie zespolone, czekały tylko od tej chwili życiodawczego tchnienia Descartes'a aby wspólnemi siłami nowoczesną matematykę pchnąć na nowe tory rozwoju.

Obok imienia Vièta (1540-1603) na wstępie do epoki odrodzenia nauk należy pomieścić *Kepler'a* (1571-1631).

W geometrycznych utworach tego matematyka, twórcy nowoczesnej astronomii, spostrzega się trzy ideje nowe: wprowadzenie użycia *nieskończoności* do Geometryi; pierwszy zarodek analitycznego prawidła, tyczącego teoryi *największości* i *najmniejszości*, która w dwadzieścia lat później otoczyła sławą imie Eermat'a i pierwszy ślad użycia metody rzutów na dwieście lat przed odkryciem Geometryi wykreślnej.

Zastosowanie Algebry do Geometryi nie mogło być obcem matematykowi takiemu jak Kepler szczególniej w przeddzień pojawienia się doktryny współrzędnych; to też w poszukiwaniach swych opierających się na teoryi wieloboków posiłkuje się on Algebrą, a na wyznaczenie boku siedmiokąta foremnego wpisanego w koło, w funkcyi promienia, otrzymuje Kepler następujące równanie:

$$7 - 14ij + 7iiij - 1vj \text{ aeque valent figurae nihili;}$$

dające się przedstawić, za pomocą symbolów dziś używanych, pod kształtem:

$$7 - 14x^2 + 7x^4 - x^6 = 0;$$

gdzie x oznacza stosunek boku siedmiokąta do promienia koła.

Nierównie jednak wyżej w zasłudze przygotowania naukowego gruntu dla doktryny Descartes'a stoi *Viète*. Kiedy bowiem Kepler użala się w dziele swem (1) na niemożność graficznego przedstawienia własności równania drugiego stopnia, dającego stosunek pięciokąta foremnego do promienia koła opisanego; to Viète za pomocą graficznych wykreśleń równań nietylko drugiego ale i trzeciego stopnia daje przykład wysokiej znajomości sztuki geometrycznego przedstawiania wyników Algebry.

To też prace jego tak użyźniły naukową glebę, na której zasiew gieniuszu Descartes'a tak bujnie się rozwinął, że przed wzejściem jeszcze tego plonnego zasiewu, samodzielnie zdołało na niej zakiełkować ziarno twórczości *Fermat'a*, który, jak obszernej o tem w dalszym ciągu wspomnimy, doszedł w poszukiwaniach swych, tyczących się Geometryi czystej, do odkrycia metody analitycznej, nie będącej niczem innem jak naówczas nieznaną jeszcze metodą współrzędnych Descartes'a.

(1) *Harmonices mundi.*

Prace Viète'a przed pojawieniem się doktryny współrzędnych znalazły gorliwych naśladowców i zasłużonych krzewicieli w *Wilhelmie Ougthred* (1573-1660), i *Harriot'cie* (1560-1621). Pierwszy rozwinął zastosowanie Algebry do zadań geometrycznych, budowę równań i formowanie potęg. Drugi zaś w dziedzinie czystej Algebry wielkie poczynił odkrycia co do natury i formowania równań. *Wallis* współziomek Harriot'a w swej Historyi Algebry tak wysoko go ceni, że wiele odkyrć przez Descartes'a w Algebrze poczynionych nie wacha się Harriot'owi przypisać i posuwa się aż do nazwania Descartes'a przywłaszczycielem.

Nie do nas należy odparcie i wykazanie stronności poglądów Wallis'a, tem więcej że takowe tyczą się wyłącznie historyi Algebry i że znalazły swe ocenienie w pismach autorów znanych z wysokiej powagi naukowej. Wzmianka jednak o zasługach Harriot'a powinna była tu znaleźć miejsce, bo prace jego przyczyniły się niesłychanie do udoskonalenia Algebry, a tem samem do odkrycia doktryny Geometryi mięszanej; ale jeśli Descartes tak w pracach swych czysto algebraicznych jak i w udoskonaleniu swego *Zastosowania Algebry do Geometryi linii krzywych* korzystał z utworów Harriot'a, to nie jako naśladowca lub przywłaszczyciel, ale jako mistrz, który do zapalenia pochodni swej wiedzy użył płomienia zatlonego od iskry gieniuszu Viète'a.

Jak to już na wstępie niniejszej pracy powiedzieliśmy, Geometrya Analityczna właściwe istnienie swe poczyna od roku 1637 to jest od pojawienia się dzieła Descartes'a objawiającego doktrynę współrzędnych.

Umysł badawczy i samodzielny tego Geometrzy objął rozliczne gałęzie wiedzy i we wszystkich chlubnie istnienie swe zaznaczył. W filozofii, w fizyce i w matematyce zostawił on nie zatarte ślady swej twórczości; ale kiedy filozofja jego uległa wielkiemu przewrotowi, Geometrya pozostała niewzruszonym piedestałem należnej mu sławy. Zastosowanie *Algebry do Geometryi linji krzywych* jest bezzaprzeczenia jednym z najdonioślejszych pomysłów Descartes'a, jedną z tych idei co niweczą zapory tamujące postęp wiedzy ludzkiej i dają bodźca do coraz wyższych usiłowań umysłu w dociekaniu prawdy.

Jakkolwiek zastosowanie Algebry do Geometryi jest, jak w ciągu niniejszej pracy staraliśmy się wykazać, pomysłem którego odległy początek okala zasłona niepewności, a którego częściowe urzeczywistnienie spotyka się w różnych epokach historyi matematyki, wszystkie jednak w tym względzie, czynione usiłowania są elementarnemi w porównaniu z Geometryą Descartes'a.

Viète, będący niejako uosobieniem i ostatnim wyrazem doskonałości usiłowań, od wieków w tej mierze podejmowanych, zdołał wprawdzie przedstawić równaniami i rozwiązać za pomocą algebraicznego rachunku niektóre kwestye tyczące się Geometryi, ale metoda jego grzeszy brakiem uogólnienia i za przedzorzowy tylko odblask wschodzącego słońca nowej doktryny może być uważaną. Ma ona raczej za zaletę wykazanie doniosłości i owocności związku Algebry z Geometryą, aniżeli znalezienie ogólnych sposobów do przedstawiania figur geometrycznych za pomocą równań. W rzeczy samej metoda Viète'a, aczkolwiek w historyi matematyki słusznie tak wysokie zajmująca stanowisko, wymaga użycia sposobów szczególnych do rozwiązywania każdego zadania i dla tego to braku swej ogólności ustąpiła ona zupełnie pierszeństwa doktrynie Descartes'a od pierwszej chwili pojawienia się takowej. W dzisiejszym stanie nauki metodę Viete'a i rozwiązywanie zadań zwanych *wyznaczonemi* pozostawiono Algebrze i zwykłej Geometryi, gdy tym czasem badanie *miejsc geometrycznych* za pomocą różnych układów współrzędnych jest wyłącznym przedmiotem nauki datującej od Descartes'a. Jemu to bowiem należy się sława znalezienia metody ogólnej przedstawiania figur geometrycznych równaniami. Odkryciem i postawieniem uchwał nowych do wyznaczania położenia punktu tak na płaszczyznie jak i w przestrzeni Descartes stworzył układ współrzędnych prostolinijych i położył niewzruszoną podstawę nowej swej Geometrzyi.

Chociaż Geometrya oddawna posiadała możność wyrażania natury jakiejkolwiek linii krzywej przez stosunek linij między sobą równoległych, wyprowadzonych z różnych punktów krzywej uważanej do innej krzywej stałej i niezmiennej; chociaż przedstawienie tych stosunków za pomocą Algebry, od chwili pojawienia się tej nauki było rzeczą nietylko możliwą ale i łatwą, trzeba było jednakże wielkiego umysłu Descartes'a aby przewidzieć użyteczność tego zastosowania, pojąć że algebraiczne wyrażenie linii krzywej jest wydatnym obrazem jej własności i stworzyć metodę ogólną do rozwiązywania kwestyi spotykanych w badaniach własności figur.

Do stworzenia i uogólnienia metody wyznaczania punktów na płaszczyznie trzeba było zbadać naturę i użycie pierwiastków odjemnych. Udarowany metafizycznym umysłem Descartes spostrzegł że nie mogą istnieść ilości mniejsze od zera i że ilości odjemne winny być uważane za wzięte w kierunku odwrotnym ilości dodatnych.

Pierwszy ślad zastosowania tego pojęcia do Geometryi znajduje się wprawdzie w pismach *Alberta Girard* (1) ale gdyby nawet pierwszeństwo przyznawane w tym względzie Descartes'owi było wątpliwem, to zużytecznienie znajomości natury i użycia pierwiastków odjemnych jest niezaprzeczenie jego zasługą.

Wielka w swej prostocie idea linijnych rzutów punktów na proste stałe w płaszczyznie lub przestrzeni wyszła z pod pióra Descartes'a w postaci rzeczywistej doktryny, której nieliczne zasady ściśle ze sobą związane, pojawieniem się swem wpłynęły skutecznie na nowy zwrot i rozwój nauk matematycznych.

Zbytecznem byłoby bezwątpienia wyjaśniać tutaj ducha i zasady, powszechnie dziś znanej doktryny współrzędnych kartezyańskich, szczególniej na wstępie do dzieła przeważnie na niej opartego. Ogólny nawet krytyczny przegląd pierwszych prac na tle nowej Geometryi wyszłych z pod pióra jej twórcy byłby zadaniem nietylko zbytecznem ale i trudnem, bo jak wszyscy gienjalni pisarze tak i Descartes w utworach swych postępuje drogą dla zwykłych umysłów niedostępną. Zadawalnia on się odkryciem i objawieniem zasad i prawd nieznanych, pozostawiając późniejszym na niwie wiedzy pracownikom uporządkowanie, zastosowanie i zużytecznienie swych odkryć. Badać dziś doktrynę Descartes'a i jej pierwsze zastosowania w pismach samego jej twórcy, a nie w dziełach jego następców, jest to chcieć czytać objawienia prawdy przy blasku błyskawic a nie przy łagodnem świetle majowego słońca.

Zadanie to nie może wejść w szczupłe ramy niniejszej pracy i dla tego wspomnimy tutaj tylko o niektórych z ważnych odkryć Descartes'a na polu czystej Algebry jak: znalezione przezeń prawidła do wyznaczania liczby pierwiasków równania; metoda współczynników niewyznaczonych; i tłumaczenie

(1) Autor ten na ośm lat przed Descartes'em okazał użycie pierwiastków odjemnych w geometryi temi słowy: Rozwiązanie przez MNIEJ tłumaczy się w Geometryi cofaniem; a — wraca się gdzie + naprzód postępuje. Przykład tego daje on na zadaniu prowadzącem do równania czwartego stopnia, w którem dwa pierwiastki są dodatne a dwa odjemne.

znaczenia i użycie pierwiastków odjemnych. Z Geometryi mięszanej należy zanotować ważny ustęp w którym Descartes zastosowywa swą analizę do poszukiwania i badania krzywych, nazwanych przezeń *owalnemi* (*ovales*); jak również rozwiązanie sławnego zadania Pappus'a « *ad tres aut plures lineas* » które Descartes wziął za pierwszy przedmiot zastosowania nowej swej Geometryi.

Z pomiędzy licznych odkryć żadne wyżej przez Descartes'a nie było cenionem jak prawidło ogólne do wyznaczania stycznych do linij krzywych. « Ze wszystkich zadań, które znam w Geometryi, powiada on, nie ma żadnego któreby było użyteczniejszem, ogólniejszem i którego rozwiązanie byłoby więcej przezemnie upragnionem. »

Doniosłość tego zadania, którego żaden z Geometrów starożytnych nie odważył się ogólnie traktować, jest rzeczywiście wielką, bo rozwiązanie takowego było nieodzownym wstępem do wynalezienia rachunku różniczkowego. To też trzej współczesni a tak chlubnie w Historyi matematyki znani Geometrowie *Descartes, Fermat* i *Roberval* z równą samodzielnością i niezależnie podjęli się rozwiązania tego zadania.

Starożytni Geometrowie zwykli byli określać styczną, w sposób następujący : Jest to prosta mająca jeden tylko punkt wspólny z krzywą, przez który nie można poprowadzić żadnej innej prostej między nią i krzywą. Na podstawie tej zasady wyznaczali oni wprawdzie styczne, ale tylko do niektórych krzywych im znanych.

Descartes i Fermat, aczkolwiek rozwiązania ich były różne i od siebie niezależne, uważali styczne za sieczne których dwa punkta przecięcia się z krzywą są ze sobą złączone. Roberval zaś oparł swe określenie stycznej na doktrynie Galileusza o ruchu złożonym. Uważał on bowiem styczną za kierunek ruchu złożonego przez jaki krzywa może być wykreśloną. Dokładności swej metody pojmowania stycznych dowiódł on na zastosowaniu jej do rozlicznych krzywych a między innemi do paraboli Descartes'a (1).

Metody Descartes'a i Fermat'a miały po nad metodą Roberval'a wyższość względną, którą w pewnej mierze winny były zawdzięczać analizie na której się opierały. Pojęcie Fermat'a o stycznych polegało na tych samych podstawach co i sławna jego metoda o *największościach* i *najmniejszościach* i dla tego też, jak to już wspomnieliśmy, niektórzy z dostojnych matematyków uważali go za pierwszego wynalazcę rachunku różniczkowego. *Barrow* upraszczając ideję metody Fermat'a uważał później styczną za przedłużenie jednego z nieskończenie małych boków krzywej uważanej za wielobok o nieskończonej liczbie boków, a metoda jego najwięcej obecnie jest używaną.

Zadanie tyczące się stycznych było jednem z tych których rozwiązanie wpłynęło na przyspieszenie odkrycia różniczkowego rachunku. *Descartes* pojął całą doniosłość metody stycznych, i dla tego należało się tutaj wzmiankę o takowej pomieścić.

Oprócz wielu innych odkryć Descartes'a w dziedzinie nauk matematycznych i naturalnych, o których nie miejsce tutaj wspominać, jeden z ustępów na końcu drugiej księgi jego Geometryi pomieszczony winien zwrócić na się szczególniejszą uwagę, bo w nim twórca Geometryi Analitycznej wzmiankuje o krzywych o podwójnej krzywiznie. Jest to zapowiedź pojawienia się Geometryi Analitycznej trójwymiarowej, o której ukazaniu się i rozwoju z kolei mówić nam wypadnie. Kilka wyrazów wyrzeczonych

(1) Krzywa trzeciego stopnia.

przez Descartes'a w przedmiocie krzywych o podwójnej krzywiźnie, stanowią mistrzowskim lakonizmem nacechowaną podstawę całej nowej w tym względzie doktryny.

Mówiąc o Geometryi mieszanej Descartes'a zauważyć wypada że w zastosowaniach swych Algebry do teoryi krzywych objął on tylko krzywe, których równania w jego układzie współrzędnych były stopnia skończonego. Nazwał on je *krzywemi geometrycznemi,* nadając miano *mechanicznych* wszystkim krzywym do rodzaju geometrycznych nienależącym. Wiadomem jest że Leibnitz zastąpił nazwy krzywych *geometrycznych* i *mechanicznych* przez krzywe *algebraiczne* i krzywe *przestępne.*

Descartes w rozlicznych rozwiązywaniach traktowanych przezeń zadań okazał sam dostatecznie i użyteczność i doniosłość nowej swej Geometryi, którą udarował matematyków jako narzędziem niesłychanie właściwem do badania krzywych geometrycznych. Zanim jednak rozpoczniemy przegląd pobieżny zastępu naśladowców Descartes'a posługujących się tem cudownem narzędziem w celu rozprzestrzenienia granic wiedzy, stosownem może będzie w obec maluczkości naszego głosu zakończyć ten pobieżny i niezupełny rys zasług Descartes'a ocenieniem jego doktryny wygłoszonem przez książąt Geometryi nowoczesnej.

Chcemy tu mówić o Poncelet'cie i P. Chasles, pierwszy w dziele swem (1) które niezmierny wpływ na rozwój Geometryi wyższej wywarło, aczkolwiek sam gorliwy zwolennik Geometryi czystej, tak się o Geometryi analitycznej odzywa :

« Geometrya analityczna jest nader właściwą do nadania pomysłom geometrycznym tego rozwinięcia i tej ogólności które spoczywają wyłącznie w jej naturze.

« Kiedy Geometrya analityczna przez właściwy jej pochód podaje sposoby ogólne i jednostajne do przedsiębrania rozwiązywania nadarzających się kwestyi i do poszukiwania własności figur ; kiedy ona dochodzi do wyników, których ogólność jest bez granic, druga (to jest Geometrya czysta, szczególniej Geometrya starożytnych) działa przypadkowo ; pochód jej zależy zupełnie od przezorności tego, który się nią posługuje, a jej wyniki są prawie zawsze ograniczone, jako zależne od szczególnego stanu figury, którą się uważa. »

P. Chasles śledzący z wysokiem naukowem namaszczeniem i niesłychaną erudycyą za objawami ducha i rozwoju geometrycznych metod powiada :

« Geometrya Descartes'a, prócz wysokiego charakteru powszechności, odróżnia się jeszcze od Geometryi starożytnej pod tym względem godnym uwagi, że podaje jednym jakimkolwiek wzorem własności ogólne całych familji krzywych ; tak że nie potrafiłoby się odkryć tą drogą jakiejkolwiek własności pewnej krzywej, bez zapoznania się natychmiast za pomocą tej nauki z podobnemi lub tegoż samego rodzaju własnościami niezmiernej liczby innych linij.

Liczny a dostojny poczet współczesnych Descartes'owi matematyków wydał z siebie wielu gorliwych krzewicieli nowej Geometryi.

Ze względu na porządek chronologiczny jak i dla zasług położonych w rozwinięciu i uprawie nauk matematycznych, na pierwszem miejscu postawić należy *Fermat'a* i *Roberval'a.*

Fermat godny współzawodnik wielkiego Descartes'a oprócz sławnej swej metody *De maximis et minimis* pozostawił jeszcze liczne ślady swego gieniuszu w odkryciach w Algebrze i Geometryi przezeń

(1) *Traité des propriétés projectives des figures.* 1822.

poczynionych. Dzieła jego wydane w dwóch tomach po jego śmierci obejmują, w pierwszym tomie nowe wydanie Diophant'a wzbogacone notami i odkryciami Fermat'a, w drugim zaś noszącym tytuł : *Petri Fermatii opera* jego własne utwory w Geometryi czystej i w Analizie nowoczesnej jak również jego korrespondencyą, będącą ciekawym dokumentem do historyi nauk ścisłych.

Z pism Fermata traktujących o miejscach płaskich i bryłowatych i o budowie równań trzeciego i czwartego stopnia wnosić można, że twórczy jego umysł wyprzedził Descartes'a co do pomysłu wyrażania krzywych przez równania algebraiczne. Pierwszeństwa Fermat'a w tym względzie dowodzą jego listy przed pojawieniem się Geometryi Descartes'a pisane, a wzmiankujące o pracach : *Isagoge topica ad Loca plana et solida* i *Appendix ad isagogen topicam*. W pierwszej wyznaczał autor rozmaite kształty równań, wynikające z różnych położeń osi przecięcia konicznego, na której brał odcięte i położeń punktu od którego liczył takowe; w swym zaś *Appendix...* podjął Fermat budowę równań trzeciego i czwartego stopnia.

Analityczna metoda Fermat'a, posiadająca wysoką cechę ogólności w gruncie rzeczy nie była niczem innem jak metodą współrzędnych Descartes'a. Fermat użył tej metody do rozwiązywania w ogóle zadań geometrycznych za pomocą krzywych jak najprostszych.

Pierwsze zastosowania rachunku do ilości różniczkowych w celu znalezienia stycznych są bezwątpienia jednym z najświetniejszych objawów geniuszu Fermat'a. *Poisson* (1) oceniając doniosłość zasług w tym względzie przez Fermat'a położonych, wykazuje jasno zasadę metody i znaczenie jej w porównaniu z wielkiem odkryciem Leibnitz'a. Fermat'owi przyznaje on objawienie filozoficznej idei, a Leibnitz'owi znalezienie niezbędnego narzędzia do wprowadzenia jej w użycie.

Ogólna metoda stycznych, którą Fermat oparł na swej metodzie *maximis* et *minimis* wywołała nader żywą krytykę ze strony Descartes'a. Montucla zdając sprawę z tej sławnej waśni w historyi matematyki, winę przypisywał wyłącznie Descartes'owi, uważając że jego zarzuty czynione metodzie Fermat'a były głosem uprzedzenia i zawiści. Montucla a po nim Lagrange, Laplace i Fourier uważali metodę Fermat'a za najwięcej zbliżającą się do tej która obecnie stanowi najprostsze zastosowanie rachunku różniczkowego. Opinja ta była zdaje się powszechną aż do prac P. *Duhamela*, który w rozprawie swej pod tytułem : *Mémoire sur la Méthode des maxima et des minima de Fermat*, et *sur les Méthodes des tangentes de Fermat* et *de Descartes*, wydał sąd zupełnie przyznający słuszność Descartes'owi w przedmiocie naukowej jego utarczki z Fermat'em. W metodzie twórcy Geometryi Analitycznej raczej niż w metodzieFermat'a upatruje P. Duhamel początek rachunku różniczkowego.

Oto są własne słowa P. Duhamel :

« Lagrange pomylił się w swem ocenieniu metody Fermat'a, to co o niej powiedział powinno było » być zastosowanem do metody Descartes'a, który pierwszy uważał styczną jako granicę siecznej, » której dwa punkta przecięcia z krzywą zbliżają się nieograniczenie. Jego to metoda a nie Fermat'a, » jest jednoznaczną (zachowując wyrażenie Lagrange'a) z metodą rachunku różniczkowego. »

Jedno z najpiękniejszych zastosowań sławnej metody Fermat'a « *De maximis et minimis*, » tyczące się zjawisk łamania się światła, wywołało także między nim a Descartes'em sławne w historyi nauk nieporozumienie, którego ślady w trzecim tomie listów Descarte'sa (2) znaleźć można. W przedmiocie

(1) *Mémoire sur le calcul des variations.*
(2) Wydanie in 4°.

tym, wprowadzającym Geometryą do badań zjawisk przyrody, Fermat znalazł rozwiązanie stwie dzające prawdziwość prawidła dowiedzionego przez Descartes'a.

Gdybyśmy mieli na celu wykazanie zasług Fermat'a w matematyce, należałoby nie pomijać i odkrytego przezeń rachunku prawdopodobieństwa, sprostowania paraboli sześciennej i kilku innych krzywych, zupełnego rozwiązania zadania tyczącego się styczności kul, jego usiłowań w celu odtworzenia poryzmów Euklides'a i zapowiedzianych przezeń odkryć w zastosowaniach doktryny greckiego Geometry do przecięć konicznych i do rozmaitych innych krzywych.

Najlepiej bezwątpienia oddamy znaczenie prac Fermat'a w dziedzinie Geometryi Analitycznej, od której ogrom jego zasług na inne pole zboczyć nas zmusił, przytaczając następujące słowa jednego z najznakomitszych historyków matematyki (1):

« *Gdyby Descartes'a niedostawało ludzkiemu rozumowi, Fermat byłby go zastąpił w Geometryi.* »

Roberval, pierwszy autor metody ogólnej stycznych, którą zastosował do trzynastu krzywych, a której Monge użył do krzywych w przestrzeni, był najzagorzalszym i upartym przeciwnikiem Descartes'a i nowo stworzonej przezeń Geometryi. Antagonizm jego tak się przyczynił jednak do rozpowszechnienia nowej doktryny współrzędnych, którą bezustannie krytykował, że w historyi początkowego rozwoju Geometryj Analitycznej zdobył dlań niepoślednie stanowisko. Dzieło Roberval'a pod tytułem: *De resolutione aequationum* dowodzi że mimo uprzedzenia i stronności względem nowej doktryny, autor znał ją gruntownie i z pożytkiem dla jej rozpowszechnienia nią się posługiwał.

Wracając do wzmiankowanej już poprzednio metody stycznych stworzonej przez Roberval'a zauważyć należy że on pierwszy tą metodą wprowadza do Geometryi potęgę tworzącą wielkości to jest ruch. Metoda jego co do metafizycznej swej podstawy przedstawia wielkie pokrewieństwo z pracami Newtona, i tylko brak ówczesny analitycznego narzędzia dostatecznie urobionego nie pozwolił Roberval'owi wyciągnąć z niej wyników, których odkrycie i przedstawienie stanowi jedną z tak licznycl zasług Newton'a.

Zasada wygłoszona przez Roberval'a w przedmiocie metody stycznych jest ogólną i słuszną, wyniki jej zastosowań przezeń podjętych są prawdziwe, ale rozumowanie, którym w składaniu ruchów się posiłkował jest w wielu razach błędnem. P. *Duhamel* pierwszy zauważył to i wytłumaczył w swej Nocie przedstawionej Akademji francuzkiej w 1829 roku.

Jak każda nowa doktryna, tak i Geometrya Analityczna musiała wyczekiwać lat kilka na zyskanie sobie wyznawców i gorliwych krzewicieli. Przesąd matematyków oswojonych z Geometryą czystą w spuściznie po Grekach odziedziczoną, nienawiść i stronność współzawodników takich jak Roberval, a szczególniej nieprzystępny dla ogółu czytających, sposób przedstawienia nowej doktryny przez jej życiodawcę były głównemi przyczynami chwilowej stagnacyi w rozpowszechnieniu się Geometryi Analitycznej.

Jako odpowiadająca duchowi potrzeb matematyki nowoczesnej nie mogła ona jednak długo pozostać w zastoju; tem więcej że w licznym orszaku młodych holenderskich Geometrów, na których ziemi pierwszy znak życia wydała, znalazła gorliwych apostołów, pracujących z zapałem nad jej utrwaleniem i rozwojem.

(1) Montucla. *Histoire des sciences mathématiques.*

Francya dała się poniekąd w tym wzklędzie wyprzedzić i tylko gorliwości i talentowi Geometry *De Beaune* (1601-1631) winna zawdzięczać, że płód gieniuszu jej syna dość wcześnie na jej gruncie naukowym zdołał się zakorzenić i rozkwitnąć.

Pisarz ten ocenił odrazu doskonałość i przejął się duchem nowej doktryny. Pojmując że utwory, z pod pióra Descartes'a wychodzące mogą być przystępnymi tylko dla garstki wybrańców nawet w szrankach ludzi naukę miłujących, wzbogacił on nową Geometryę notami, ułatwiającemi jej pojęcie, a wielce cenionemi przez samego twórcę Analitycznej Geometryi. Zasługi De Beaune'a nie ograniczają się na wyjaśnieniu nowej nauki, badawczy jego umysł, choć olśniony blaskiem tej naukowej nowości, nie uląkł się jednak samodzielnego polotu i podniósł myśl nową wyznaczenia natury jakiejkolwiek krzywej za pomocą danych własności jej stycznej. Zadanie które w tym przedmiocie Descartes'owi do rozwiązania przedstawił miało na celu: zbudować, krzywą taką, ażeby iloczyn z jej podstycznej (wziętej na osi odciętych) przez rzędną był w stosunku stałym z częścią rzędnej zawartą między krzywą i osią stałą pod kątem 45 stopni do osi odciętych nachyloną a przez początek krzywej przechodzącą.

Trudne to zadanie było rozwiązanem przez Descartes'a, jak o tem świadczy list jego do De Beaune'a (1) w którym uważa on tę kwestyą za *odwrotność* swej reguły o stycznych.

Celem rozwiązania tego zadania, które później było przedmiotem badań Leibnitz'a, uważał Descartes każdy punkt krzywej za przecięcie się dwóch stycznych nieskończenie do siebie zbliżonych i odkrył tym sposobem, że krzywa ma assymptotę równoległą do osi stałej i że podstyczna wzięta na tej assymptocie jest stałą. Równania tej krzywej Descartes nie podał, poznawszy że ona należy do rodzaju krzywych mechanicznemi przezeń nazwanych.

Oprócz zaszczytnego udziału w rozpowszechnieniu i wzbogaceniu Geometryi Analitycznej, wywołaną przezeń *metodą odwrotną stycznych*, De Beaune odznaczył się w historyi Analizy odkryciem nowej teoryi *granic równań*.

Liczny zastęp młodych Geometrów holenderskich, obejmujący takich matematyków jak : *Schooten*, *Huygens*, *de Witt*, *Hudde*, *Van Heuraet*, *Sluze*, *Vassenaar* i inni podjął z zapałem pracę około utrwalenia, rozpowszechnienia i wzbogacenia nowej Geometryi.

Schooten (16..-1659) dbały o rozprzestrzenienie nauki Descartes'a przełożył jego dzieło na język łaciński i wzbogacił je wielce cenionym obszernym komentarzem własnym. Pierwsze wydanie tego dzieła mającego wielki wpływ na zapoznanie uczonego świata z nową doktryną wyszło na widok publiczny w roku 1649. W dziesięć lat później pojawiła się nowa edycja powiększona notami De Beaune'a i listami Hudde'a i Van Heuraet'a. Dzieło to posiadało wszystkie niezbędne warunki do rozkrzewienia nowej Geometryi i dla tego w historycznym rysie jej rozwoju powinno być zanotowanem.

Liczne zastosowania nowej Geometryi poczynione przez Schooten'a znajdują się przeważnie w jego *Exercitationes Geometricae* i w piątej księdze noszącej tytuł : *De lineis curvis superiorum generum, ex solidi sectione ortis.* W tej to pracy znajduje się godny uwagi ustęp tyczący zastosowania metody współrzędnych do krzywych uważanych w przestrzeni. Jakkolwiek chodzi tam tylko o krzywe płaskie do badania których Schooten używa tylko dwóch współrzędnych, jednakże poruszenie tej kwestyi jest naukową nowością w ówczesnej epoce i może być uważanem za pierwszy krok ku stwo-

(1) *Lettres de Descartes, tome VI.*

rzeniu Geometryi Analitycznej trójwymiarowej, która dopiero w pół wieku później rozwinąć się zdołała.

W dziele swem, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*, Schooten stara się wykazać w licznych kwestyach traktowanych za pomocą Geometryi czystej i Geometryi Analitycznej, że metoda syntetyczna może się zawsze wywieść z metody analitycznej. Uwielbienie swe dla Geometryi Descartes'a Schooten tak dalego posuwa, że jasność i piękność dowodzeń Geometryi starożytnych przypisuje ich posiłkowaniu się Algebrą, którą oni jego zdaniem ukrywali celem wzbudzenia większego uwielbienia w potomnych dla naukowych odkryć, pozornie tylko bez jej pomocy poczynionych.

Zbytecznem byłoby wykazywać niesłuszność tego oskarżenia, które zda się być tylko dowodem, że Schooten niedostatecznie rozróżniał rzeczywiste znaczenie nadawane przez starożytnych wyrazowi *Analiza* od Analizy opartej na Algebrze, którą z wielkiem pożytkiem dla nauki tak mocno się przejął.

Budowa równań trzeciego i czwartego stopnia była częścią Analizy Descartes'a wyczekującą od jego następców swego uogólnienia i udoskonalenia. Ta zaszczytna praca przypadła w udziale zasłużonemu Geometrze *Sluze* (1623-1685). Descartes posługiwał się do budowy równań trzeciego i czwartego stopnia kołem i parabolą. Sluze wielce przyczynił się do uogólnienia tej ważnej kwestyi, podając metodę za pomocą której jakiekolwiek dane równanie trzeciego lub czwartego stopnia może być wykreślonem rozlicznymi sposobami, używając w tym celu koła i któregokolwiek z przecięć konicznych.

Hudde (1640-1704) przyczynił się niemniej jak *Sluze* do udoskonalenia metody Descartes'a w kwestyi prowadzenia stycznych. *Leibnitz* utrzymywał, że Hudde potrafił przeprowadzić krzywą przez tyle punktów ile się podoba, to jest wyznaczyć jej równanie; na co Hudde wyrzekł żartobliwie, że mógłby wyznaczyć równanie krzywej przedstawiającej rysy twarzy znanej mu osoby.

Jean de Witt (1625-1672), twórca nowej teoryi o przecięciach konicznych, dziełem swem *Elementa curvarum* przyczynił się do postępu i rozpowszechnienia Geometryi Analitycznej. W drugiej księdze tego dzieła, mającej za przedmiot budowę miejsc geometrycznych, Jan de Witt rozwija analityczną teoryą takowych i upraszcza ją z talentem.

Wallis (1616-1703) głęboką znajomością analizy Descartes'a i umiejętnem jej zastosowywaniem przyczynił się skutecznie do postępu nauk matematycznych. Pierwszy on zastosował nową Geometryą do przecięć konicznych, czego chlubny ślad zostawił w dziele swem : *Traité analytique des sections coniques*. Równie wymowny ślad swego talentu i erudycyi pozostawił Wallis w dziele *Arithmétique des infinis*, w którem zastosowaniem analizy Kartezyańskiej do metody *niepodzielnych* Cavalieri'ego, przyczynia się potężnie do rozwoju Geometryi we wszystkich kwestyach należących dziś do rachunku całkowego.

Huygens (1629-1695) udarowany przez *Newtona* przydomkiem *Summus*, jakkolwiek z zamiłowaniem i niemal wyłącznie oddający się uprawie Geometryi starożytnych i zastosowaniu Geometryi do nauk przyrodzonych, należy także do zastępu krzewicieli analizy Kartezyańskiej, którą znał gruntownie, władał samodzielnie i w wielu zastosowaniach takową udoskonalił.

Do tak licznego zastępu pracowników na niwie Geometryi Analitycznej dodać należy ówczesnych wielbicieli tej nauki, jak *Van Heuraet* i *Neil*, którzy wielkie w rozpowszechnieniu jej położyli zasługi.

Wspólnym udziałem tych dwóch matematyków jest przynależna im sława za rozwiązanie zadania przedstawiającego niesłychane trudności w ówczensym stanie nauki, a mającego za przedmiot sprostowanie linii krzywej.

W 1684 roku *Thomas Baker* w dziele swem : *The geometrical key or a gate of aequations unlockea* podał godną uwagi metodę ogólną do budowy wszelkich równań sześciennych i dwukwadratowych za pomocą koła i paraboli ; a Hiszpanja w tym samym niemal czasie wydała Geometrę wysoko cenionego przez Newton'a, którym był *Hugo de Omerique,* uprawiający w swych badaniach matematycznych zespolenie algebraicznej analizy nowoczesnej z analizą starożytnych. W dziele przedmiot ten raktującem (1), znajduje się wiele rozwiązań rozlicznych zadań, a wszystkie te rozwiązania odznaczają się prostotą i gruntowną nauki znajomością.

Pomiędzy geometrami z epoki rozwoju Geometryi Analitycznej powtórzymy jeszcze przytaczane już imie *Barrow'a* (1630—1677). Będąc profesorem uniwersytetu w Cambridge, geometra ten wydał w 1669 roku dzieło swe *Lectiones Geometricae,* pełne głębokich badań nad własnościami i wymiarami linii krzywych. W niem poraz pierwszy wyszła na widok publiczny jego *Metoda stycznych* która przez wprowadzenie w rachunek dwóch ilości nieskończenie małych, zamiast jednej, stanowi postęp na drodze do odkrycia rachunku różniczkowego naówczas wiodącej. W dziele jego później wydanem, *Lectiones mathematicae,* traktował o filozofii nauk matematycznych, a w *Lectiones opticae* zastosował Geometryą do zjawisk odbijania i łamania się światła.

Do geometrów usiłujących rozszerzyć granice doktryny Descartes'a należy zaliczyć *Tschirnhausen'a* (1651—1708). Nabytą sławę odkryciem krzywych zwanych *caustiques,* powiększył on traktatem w 1686 roku wydanym pod tytułem *Medicina Mentis,* w którym podjął się wykazania prawideł mających być sternikami w poszukiwaniu prawdy. Z prac tego matematyka w dziedzinie Geometryi Analitycznej godną uwagi jest nowa metoda ogólna przedstawiona Akademii Nauk w 1701 roku, mająca na celu zastąpić rachunek różniczkowy w wielu kwestyach Geometryi, jak na przykład w przedmiocie stycznych i promieni krzywizny. Rozwiązanie tego zadania, oparte na analizie Descartes'a nie odpowiedziało jednak doniosłości zapowiedzianego przez autora programu bo było tylko zręcznem naśladownictwem dwóch metod podanych przez samego twórcę Geometryi Analitycznej w przedmiocie stycznych.

W 1682 roku Tschirnhausen przedstawił w Aktach Lipskich swą metodę co do stycznych do krzywych geometrycznych pod tytułem : « *Nova Methodus tangentes curvarum expedite determinandi,* » zapowiadając że tę metodę zastosuje później do krzywych mechanicznych. Jakoż w 1702 roku przedstawił on Akademii jednę ze swych naukowych prac pod tytułem : « *Essai d'une méthode pour trouver les touchantes des courbes mécaniques, sans supposer aucune grandeur indéfiniment petite* (2). »

Jak to już było nadmienionem, Descartes w metodzie swej tyczącej się stycznych wziął tylko pod uwagę krzywe geometryczne, opuszczając dla utrzymania charakteru powszechności i dostateczności swej Geometryi wszelkie krzywe mechaniczne, czyli krzywe nie mogące się wyznaczać za pomocą miary dokładnej i znanej. Zapowiedziania prez Tschirnhausen'a metoda prowadzenia stycznych do

(1) *Analysis Geometrica seu vera methodus resolvendi tam probl. geom. quam arithm. questiones,* 1698.
(2) *Mémoires de l'Académie des sciences, ann.* 1702.

krzywych mechanicznych była więc godnym podziwu objawem, który zwrócił na się uwagę ówczesnych geometrów. Powyżej przytoczony tytuł pracy Tschirnhausen'a, obiecujący metodę dającą się stosować do krzywych mechanicznych w ogóle, nie usprawiedilwionym był treścią pracy pod nim przedstawionej. W niej bowiem podał autor metodę stosującą się zaledwie do rodzaju krzywych, mających za odcięte łuki krzywej geometrycznej, do której umiano prowadzić styczne; a za rzędne, linje równoległe do prostej stałej. Rachunek użyty w tej metodzie przez Tschirnhausen'a był tenże sam co i w przypadku zwykłym, kiedy odcięte liczone są na linii prostej, zamiast na łuku krzywej. Jakkolwiek ta metoda nie odpowiedziała oczekiwaniom ówczesnych uczonych, zasługuje ona jednak na wzmiankę w historyi rozwoju Geometryi Analitycznej, jako postęp w kierunku uogólnienia metod Descartes'a, w których krzywe mechaniczne zupełnie były pominięte.

La Hire (1640-1718) należący do epoki w której Geometrya Analitycyna przeważnie zwracała ku sobie talenta Geometrów, oparł się ogólnemu prądowi i pracami na tle Geometryi starożytnych osnutemi zdobył sobie pierwszorzędne stanowisko w szeregu fundatorów Geometryi nowoczesnej. Liczne utwory jego geometryczne tyczące się przeważnie teoryi przecięć konicznych odznaczają się twórczą oryginalnością, ale jako należące do dziedziny Geometryi czystej, w przeglądzie niniejszym pominiętemi być muszą. Zanotujemy tu więc tylko dzieło *La Hire'a* wydane w roku 1679 (1), będące dowodem że Geometra ten znał gruntownie Analizę Kartezyańską i posługując się nią, do postępu nauki się przyczynił. Dwie ostatnie części tego dzieła mają za przedmiot *miejsca geometryczne* i ich użycie do budowy równań. Biegłość autora w posługiwaniu się metodą Descartes'a mocno jest uwydatnioną w rozwiązaniu zadania mającego na celu prowadzenie normalnej do przecięcia konicznego przez punkt na zewnątrz krzywej wzięty. Do wykreślenia używa La Hire tylko linii prostej i koła i rozwiązuje po raz pierwszy to zadanie w przypadku elipsy i hiperboli. Zadanie to, przypuszczające w tym przypadku cztery rozwiązania, przedstawiało naówczas trudności, które talent La Harire'a i jego biegłość w analizie Descartes'a pokonać zdołały.

Pojawienie się Geometryi Analitycznej trójwymiarowej.

Śledząc w porządku chronologicznym za rozwojem Geometryi Descartes'a, zaznaczyć tu należy pojawienie się doktryny współrzędnych uważanych w przestrzeni. Pobieżny przegląd prac Geometrów, którzy się przyczynili do udoskonalenia i rozkrzewienia Geometryi Descartes'a, wykazuje dostatecznie że wszystkie te prace nie przekraczały dotąd po za granice Geometryi płaskiej.

Jakkolwiek pochodnia gieniusza Descartes'a rzuciła swe blaski i na drogę wiodącą ku odkryciu Geometryi Analitycznej trójwymiarowej, jednakże przez więcej jak półwieku od pojawienia się doktryny współrzędnych nie zdołano, a nawet wogóle nie usiłowano, zastosować tej doktryny do powierzchni krzywych i do linii o podwójnej krzywiźnie. Twórca Geometryi Analitycznej pojmując całą doniosłość i potęgę postawionej przez się doktryny współrzędnych, nie ograniczył jej bynajmniej do samych krzywych płaskich; ale natomiast wskazał jej użycie w *Teoryi krzywych o podwójnej krzywiźnie* (2).

(1) *Nouveaux elements des sections coniques. Les lieux geometriques. La construction ou effection des equations.*

(2) Nazwa ta : *Krzywe o podwójnej krzywiźnie*, przyjęta przez *Clairault'a*, którego za twórcę Geometryi Anali-

W tym celu z punktów jakiejkolwiek krzywej w przestrzeni spuszczał Descartes prostopadłe na dwie płaszczyzny przecinające się z sobą pod kątem prostym; spodki tych prostopadłych tworzyły dwie krzywe płaskie, z których każdą odnosił do dwóch osi współrzędnych, leżących na jej płaszczyznie. Jedna z osi każdego z tych dwóch układów współrzędnych była na przecięciu się dwóch płaszczyzn.

Chociaż w powyższej teoryi łatwo dostrzedz wskazówkę prowadzącą do układu współrzędnych w przestrzeni i do wyrażania powierzchni równaniem między temi trzema współrzędnemi, jednakże pojawienie się Geometryi Analitycznej trójwymiarowej dlugo kazało na się wyczekiwać.

Parent (1666—1716) przedstawił po raz pierwszy w 1700 roku powierzchnią krzywą równaniem między trzema zmiennemi. Memoryał jego czytany w Akademii nauk zasługuje na uwagę w historyi Geometryi Analitycznej, bo w nim spostrzega się pierwsza myśl i zastosowanie dzisiejszego układu współrzędnych w przestrzeni. W tej to pracy znajduje się: równanie sfery i równanie płaszczyzny doń stycznej; wyznaczenie współrzędnych *maxima* i *minima* w niektórych przecięciach sfery; równania różnych powierzchni trzeciego stopnia i krzywych o podwójnej krzywiźnie, przechodzących przez punkta którym odpowiadają współrzędne *maxima* i *minima*; nareszcie wyznaczenie punktów przegięcia pewnych krzywych nakreślonych na powierzchniach (1).

tycznej trójwymiarowej uważać można, po raz pierwszy użytą była przez matematyka *Pitot* w Memoryale czytanym we francuzkiej Akademii nauk w 1724 roku.

. Krzywe tego rodzaju nie były jednak zupełnie obcemi starożytnym Geometrom. Najdawniejszy ślad znajomości i posiłkowania się pewną krzywą o podwójnej krzywiźnie zostawił *Architas*, profesor Platona. Geometra ten posługiwał się pewną krzywą o podwójnej krzywiźnie celem rozwiązania sławnego naówczas zadania dwóch średnich proporcyonalnych.

Później *Geminus*, Geometra żyjący na 100 lat przed Chrystusem, miał ułożyć dzieło o różnych krzywych, między któremi znajduje się helisa opisana na powierzchni walca prostego o podstawie kołowej. Dzieło to ma się znajdować w rękopiśmie w bibliotece watykańskiej.

W zbiorach matematycznych *Pappus'a* w księdze czwartej jest mowa o spiralnej utworzonej ruchem jednostajnym punktu na wielkiem kole sfery, obracającem się około swej średnicy.

W pracach późniejszych Geometrów znajdują się również ślady badania niektórych krzywych o podwójnej krzywiźnie.

W 1530 roku *Nonius*, a po nim *Wright*, *Stevin* i *Snellius* badali krzywą o podwójnej krzywiźnie, wyznaczoną na sferojdzie ziemskiej, nazwaną przez Nonius'a *loxodromie*.

W 1630 *Roberval* i nieco później *La Loubère* zajmowali się krzywą znaną pod mianem *cyklo-cylindrycznej*.

W 1637 *Descartes*, na końcu drugiej księgi swej Geometryi mówi o krzywych o podwójnej krzywiźnie, nie wyszczególniając żadnej.

W piątym tomie dzieł *Pascal'a* znajduje się wzmianka o spiralnej konicznej, będącej linją o podwójnej krzywiźnie, wykreśloną na powierzchni stożka prostego.

Courcier w 1663 w swem: *Opusculum de sectione superficiei sphæricæ per superficiem sphæricam, cylindricam atque conicam*, etc., badał szczegółowo krzywe o podwójnej krzywiźnie, wynikające z przecięcia kuli przez stożek i walec prosty o podstawach kołowych, jak również z przecięcia tych dwóch ostatnich powierzchni, uważanych we wszystkich ich położeniach.

Zadanie podane przez *Viviani'ego* w 1692 roku, tyczące się okien w sklepieniu półkulistem, rozwiązanem było za pomocą krzywych o podwójnej krzywiźnie.

Herman w 1718 roku przywiedzonym był w swych badaniach naukowych do uważania *epicyklojdy sferycznej*.

Guido-Grandi w 1728 uważał na sferze dwie krzywe o podwójnej krzywiźnie, które nazwał *clelies*.

Dzieło *Clairault'a* dało dopiero podstawę teoryi krzywych o podwójnej krzywiźnie i odtąd właściwie datuje prawdziwy rozwój teoryi i badań w tym kierunku podejmowanych.

(1) *Essais et Recherches de mathématiques et de physique* de Parent, 1713.

e

Myśl Parent'a, będąca zapowiedzią wymowną pojawienia się doktryny współrzędnych w przestrzeni, znalazła naśladownika w *Janie Bernouilli*. Zajmując się zadaniem wyznaczenia najkrótszej linii, jaką można wykreślić na powierzchni między dwoma punktami danymi, Bernouilli wyraził także powierzchnie przez równanie między trzema współrzędnemi.

Metodyczne przedstawienie doktryny współrzędnych w przestrzeni, zastosowanej do powierzchni krzywych i do linii o podwójnej krzywiźnie, pojawiło się dopiero w roku 1731. Podał je *Clairault* (1713—1765) w swym sławnym traktacie o krzywych o podwójnej krzywiźnie (1).

Traktat ten dający gruntowną podstawę istnieniu i rozwojowi Geometryi Analitycznej trójwymiarowej był dziełem szesnastoletniego młodzieńca, który wczesność swego twórczego talentu objawił już uprzednio napisaniem, w dwunastym roku swego życia, memoryału o czterech krzywych geometrycznych. Pracę tę uznano za godną druku i pomieszczono w zbiorze Akademii Berlińskiej (2).

W traktacie swym o krzywych o podwójnej krzywiźnie Clairault z łatwością godną podziwu rozwiązał zadania tyczące się stycznych do tych krzywych, i kwadratury przestrzeni jakie one swemi rzędnemi wyznaczają. Metody użyte w tym traktacie przez młodego Geometrę ustępują dziś używanym metodom chyba tylko pod względem symetryi wzorów, wprowadzonych przez *Monge'a* w jego dziele noszącem tytuł : *Traité de l'application de l'Algèbre à la Géométrie.*

Pobieżny ten przegląd prac Geometrów krzewiących i uogólniających doktrynę Descartes'a, a za jej pomocą udoskonalających naukę o krzywych, — przerwać tu nam wypada na chwilę celem zaznaczenia, że w 50 lat po pojawieniu się Geometryi Analitycznej *Leibnitz* i *Newton* (w 1684 i 1687 roku) udarowali nauki ścisłe nowym niesłychanej doniosłości pomysłem. Doktryny postawione przez tych dwóch nieśmiertelnych Geometrów, znane dziś pod ogólnem mianem *Analizy*, zastąpiły korzystnie metody Cavalieri'ego, Roberval'a i Fermat'a, i przyspieszyły rozwój nauk matematycznych i ich zastosowanie do badania zjawisk natury. Nowy rachunek zapanował wszechwładnie w dziedzinie matematyki, a jako klucz poszukiwań w Fizyce matematycznej stał się wyłącznym niemal przedmiotem badań ówczesnych uczonych. Geometrya czysta zdobna trofeami naukowych zdobyczy starożytnych mędrców, i pracami Pascal'a, Desargues'a, La Hir'a i innych została na czas długi prawie zaniedbaną; a Geometrya Analityczna jako podstawowy grunt doktryn Leibnitz'a i Newton'a zdołała oprzeć się zapomnieniu i ogólnemu prądowi nowością Analizy wywołanemu. Przez wiek też cały dwie te potężne metody analityczne nęciły ku sobie dążności licznego zastępu Geometrów, przyczyniając się tem samem do ogólnego postępu nauk matematycznych i ich zastosowań.

Teorya krzywych geometrycznych tak skrzętnie i owocnie uprawiana od czasu pojawienia się Geometryi Analitycznej, nie przestała być przedmiotem badań matematyków. *Newton* i *Maclaurin*, idąc śladem Descartes'a, pierwsi skutecznie zastosowali jego Geometryą do odkrycia ogólnych i charakterystycznych własności krzywych geometrycznych; a po nich cały poczet biegłych Geometrów w ciągu ośmnastego wieku naukę o krzywych rozwijał i doskonalił.

Newton (1642—1727) w dziele swem, uważanem powszechnie za wzór i pomnik Geometryi (3) podaje

(1) *Traité des Courbes à double courbure*, 1731.
(2) *Miscellanea Berolinensia* (tom IV, 1734).
(3) *Enumeratio linearum tertii ordinis.* Anno 1706.

trzy następujące własności, wspólne wszystkim krzywym geometrycznym, przedstawiając je jako rozwinięcie i uogólnienie głównych własności przecięć konicznych (1).

Pierwsza z tych własności tyczy się *średnic*, a zależy na tem że : *poprowadziwszy w płaszczyznie krzywej geometrycznej poprzeczne do siebie równoległe i wziąwszy na każdej z nich środek odległości średnich wszystkich punktów, w których poprzeczna spotyka krzywą, wszystkie te środki znajdą się zawsze na linii prostej.* Tę to prostą nazwano *średnicą odpowiadającą krzywej*, albo *sprzężoną kierunku poprzecznych.*

Druga własność odnosi się do niemaltycznych (assymptot), a zależy na tem że : *kiedy krzywa posiada tyle niemaltycznych ile znajduje się jedności w stopniu jej równania, prowadząc poprzeczną w jakimkolwiek kierunku, środek średnich odległości punktów w których ona spotyka niemaltyczne jest tenże sam, co i środek średnich odległości punktów w których ona przecina krzywą.*

Czyli wyrażając tę własność ogólną innemi słowy :

Summa odcinków zawartych między każdą gałęzią krzywej i jej niemaltyczną jest taż sama z obu stron średnicy sprzężonej z poprzeczną.

Trzecia nareszcie własność ogólna krzywych geometrycznych tyczy się stosunku stałego iloczynów odcinków na dwóch poprzecznych, względnie równoległych do dwóch osi stałych. Własność ta da się ogólnie tak wysłowić : *jeśli przez jakikolwiek punkt, wzięty na płaszczyznie krzywej geometrycznej poprowadzi się dwie poprzeczne równoległe do dwóch osi stałych, iloczyny odcinków zawartych między krzywą i punktem, przez który te linje były przeprowadzone, są między sobą w stosunku stałym.*

Trzy te ogólne własności krzywych geometrycznych, wygłoszone były przez Newton'a w dziele, którego celem, jak tego tytuł sam dowodzi, było wyliczenie krzywych objętych równaniem trzeciego stopnia o dwóch niewiadomych. Jak wiadomo autor rozpoznał siedemdziesiąt dwa różne gatunki równaniem tego rodzaju przedstawione, a następnie podał sławne owo twierdzenie noszące jego imię, a porządkujące te krzywe w pięciu głównych wielkich klasach.

Wszystkie ważne swe odkrycia tyczące się krzywych, Newton tylko w dziele swem wygłosił, niepodając dowodzeń, ani nawet wskazówek co do metod używanych do osiągnięcia tak wielkich rezultatów. To też dzieło to Newtona było tematem licznych prac Geometrów późniejszych jak : *Stirling*, *Clairault*, *Nicole* i *Murdoch.*

Z pomiędzy innych dzieł Newton'a wspomnieć tu jeszcze należy o *Arytmetyce powszechnej* (2) jako o najdoskonalszym wzorze zastosowania metody Descartes'a do rozwiązywania zadań Geometryi i do wykreślania pierwiastków równań.

Uprawa nauki o krzywych geometrycznych zawdzięcza także [swe postępy godnemu w tej mierze następcy Newton'a, który jego odkryciami przejęty, wydał dwie nader doniosłe prace (3) w tym kierunku. Chcemy tu mówić o sławnym matematyku *Mac-Laurin'ie* (1698—1746).

W pierwszej ze swych prac, poświęconej organicznemu opisowi krzywych geometrycznych, autor posiłkował się wyłącznie w dowodzeniach metodą współrzędnych; druga zaś praca oparta na dwóch twierdzeniach tyczących się ogólnych własności krzywych geometrycznych, zawiera w sobie ustępy,

(1) *Proprietatis sectionum conicarum competunt curvis superiorum generum.*

(2) *Arithmetique Universelle.*

(3) *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*; i *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus.*

w których użycie Analizy i metody współrzędnych zastąpionem zostało geometrycznem wykreśleniem. Dwa nadmienione twierdzenia, z których pierwsze jest utworem sławnego *Cotes'a* (1682-1716), a drugie samego *Maclaurin'a*, są uogólnieniem dwóch pierwszych twierdzeń Newton'a, tyczących się średnic, i niemaltycznych. W dziele tem, o którem pobieżną wzmianką tylko zadowolnić nam się tu należy znajduje się wiele ciekawych własności krzywych trzeciego stopnia; niektóre z nich tyczą się punktów przegięcia i punktów podwójnych.

Teorya ogólna krzywych geometrycznych zawdzięcza także swe udoskonalenie pracom matematyka *Braikenridge*, i następnych Geometrów, którzy do tej nauki zastosowali geometryą Descartes'a z prawdziwem powodzeniem.

Nicole (1683—1759) podjął na się wyświetlenie zasad, powodujących Newton'em w układzie sławnego dzieła jego : *Enumeratio* a ksiądz *Bragelongne* (1688—1744) dowiódł pięknych twierdzień Newton'a tyczących opisu organicznego konicznych i krzywych trzeciego i czwartego stopnia, posiadających punkta podwójne; a następnie przedsięwziął wyliczenie krzywych czwartego stopnia i badanie ich kształtów i właściwości. Część pierwsza tylko tej wysoko cenionej pracy ogłoszoną była drukiem w Memoryałach Akademii Nauk w roku 1730 i 1731.

W tym czasie Geometrya Analityczna znalazła gorliwego i gienialnego krzewiciela w osobie księdza *De Gua* (1712—1786), który przedsięwziął wykazać, że Analiza Descartes'a w poszukiwaniach tyczących się krzywych geometrycznych może być używaną prawie zawsze z równem powodzeniem jak rachunek różniczkowy. Użyteczność rachunków wyższych uznawał De Gua w rozwiązywaniu kwestyi tyczących się krzywych mechanicznych.

W znakomitem swem dziele (1) o użyciu Analizy Kartezyańskiej traktującem, De Gua podał sposób wyznaczenia stycznych, niemaltycznych (assymptot) i punktów szczególnych (jak punkta : wielokrotne, sprzężone, przegięcia i zwrotu) krzywych wszelkich stopni. Pierwszy on wykazał nadto za pomocą zasad perspektywy, że niektóre z tych punktów mogą znajdować się w nieskończoności.

Dzieło powyżej wspomniane wywarło silny wpływ na rozwój Geometryi Analitycznej, wykazując wysoką tej nauki doniosłość w porównaniu nawet z Analizą tak powszechnie i słusznie cenioną i przeważnie naówczas uprawianą.

W lat kilka po ukazaniu się dzieła księdza De Gua, Analiza Kartezyańska wzbogaconą została pracą sławnego *Euler'a* (1707—1783). Ze zwykłą mu jasnością w przedstawianiu i głębokością w poglądach matematyk ten podał w roku 1748 ogólne zasady analitycznej teoryi krzywych geometrycznych w dziele swem : *Introductio in analysin infinitorum.* Poszukiwań swych naukowych w tym kierunku nie ograniczył Euler do Geometryi płaskiej, a natomiast pierwszy z licznych pracowników na gruncie Kartezyańskiej Analizy podjął on roztrząsanie równania o trzech zmiennych, obejmującego w sobie powierzchnie drugiego stopnia. Był to ważny krok na drodze postępu Geometryi Analitycznej trójwymiarowej, a jednocześnie wstęp do teoryi powierzchni drugiego stopnia, która w obecnem stuleciu stała się przedmiotem badań dostojnych matematyków, jako nieodzowna podstawa przyszłych postępów Geometryi, a zarazem jako użyteczna i owocna doktryna do przyspieszenia rozwoju Geometryi stosowanej do zjawisk fizycznych. Do czasu Euler'a teorya powierzchni drugiego stopnia ograniczała

(1) *Usage de l'Analyse de Descartes,* 1740.

się do prac starożytnych Geometrów, którzy oprócz stożka i walca znali tylko niektóre powierzchnie obrotowe drugiego stopnia. Euler pierwszy zastosował do powierzchni krzywych metodę analityczną, której używał do badania krzywych płaskich i za jej pomocą odkrył w równaniu drugiego stopnia między trzema zwykłemi współrzędnemi pięć różnych gatunków powierzchni drugiego stopnia, w pośród których znane starożytnym powierzchnie obrotowe znalazły się jako szczególne tylko przypadki.

Teorya ta ważna, której Euler położył podstawy, zwróciła na się uwagę i stała się przedmiotem skutecznych badań najsławniejszych matematyków jak: Monge i jego szkoła, jak Poncelet i P. Chasles; a dziś jeszcze przedstawia ona ponętną i szeroką drogę dociekań dla Geometrów, pragnących postępu nauk matematycznych i ich owocnego zastosowania do pojęcia i wyjaśnienia wielu zjawisk przyrody.

Współczesny Euler'a matematyk *Cramer* (1704—1752) z wysokim talentem zastosował Geometryą Descartes'a do badania własności krzywych algebraicznych. Dzieło jego w roku 1750 wydane pod tytułem: *Introduction à l'Analyse des lignes courbes Algébriques*, jest wymownym objawem ówczesnego udoskonalenia doktryny współrzędnych i skuteczności jej zastosowania do tak ważnej gałęzi Geometryi jaką jest teorya krzywych. Do dziś też dzieło powyższe nie przestało być wysoko cenionem jako najzupełniejszy specyalny traktat o krzywych algebraicznych.

W lat sześć po pojawieniu się powyższego dzieła Analiza Kartezyańska uwidacznia się z całą siłą swej jasności, dokładności i udoskonalenia w dziele: *Traité des courbes Algébriques*, napisanem przez dwóch Geometrów: *Dionis du Séjour* (1734—1794) i *Goudin* (1734—1805). Wszystkie twierdzenia i zadania tyczące się: właściwości krzywych, ich stycznych, niemaltycznych, normalnych, promieni krzywizny, etc., znajdują się w dziele tem rozwiązane łatwo, jasno i dokładnie, wyłącznie za pomocą Geometryi Descartes'a.

Oprócz tego dzieła *Goudin* sam napisał: *Traité des propriétés communes à toutes les courbes*; a utwór ten sam byłby dostatecznym do zyskania autorowi wysokiego stanowiska w historyi Geometryi Analitycznej. Przedmiotem tej pracy było przekształcenie jakiegokolwiek równania krzywej na inne mające współrzędne różne od poprzednio uważanych. Jestto bogaty zbiór przekształceń i wzorów o trzech i czterech zmiennych, z których każdy wyraża odrębną własność krzywych w ogólności. Dla samej elipsy biegły ten anylityk wyprowadził czterdzieści pięć różnych równań, biorąc za początek współrzędnych środek tej krzywej, albo jej ognisko. Praca ta dowodząca jak silnem a jednocześnie giętkiem narzędziem jest doktryna współrzędnych w ręku umiejętnego badacza, miała aż trzy wydania, z których ostatnie sięga początku naszego stulecia.

W ślad za Goudin'em poszedł *Waring* (1734—1798), który także w uprawie teoryi krzywych wysokie położył zasługi, uzupełniając odkrycia swych poprzedników i wzbogacając naukę o krzywych własnemi odkryciami. Dowody swej twórczości i owocnego zastosowania Kartezyańskiej Analizy do badania własności linij krzywych pozostawił Waring w wielu pismach naukowych i w dwóch traktatach pod tytułem: *Miscellanea analytica de aequationibus algebraïcis et curvarum proprietatibus* (1762); i *Proprietates geometricarum curvarum* (1772).

Kończąc na tem pobieżny przegląd prac ośmnastego wieku w dziedzinie Geometryi Analitycznej, zauważyć tu przychodzi że mimo wysokiego naówczas tej nauki rozwoju, wszystkie dzieła elementarne o niej traktujące grzeszą brakiem prostoty w układzie i dowodzą że autorowie takowych nie byli dostatecznie ożywieni i przejęci duchem analizy nowoczesnej. Z chlubą zaznaczyć tu możemyże dzieło polskie Jana Śniadeckiego (*Rachunku algebraicznego Teorya przystosowana do liniy krzywych*, w Krakowie, 1783), wolnem jest od wszelkiego w tej mierze zarzutu i przewyższa swą dydaktycznością i metodą układu późniejsze nawet dzieła biegłych francuzkich autorów jak *Biot*.

Niedostateczne rozpowszechnienie tego dzieła, i zastąpienie go poniekąd tłumaczeniami zagranicznych późniejszych podręczników pochodziło ztąd zapewne że Śniadecki w ciągu czterdziestu z górą lat od ogłoszenia go drukiem nie podjął nowego przejrzanego wydania.

Mimo to utwór ten pozostanie zawsze świetnym pomnikiem naszej literatury naukowej z tej epoki.

Perjod szybkiego rozwoju nauk matematycznych w dzisiejszem stuleciu datuje bez zaprzeczenia od założenia szkoły politechnicznej w Paryżu w 1795 roku. Założyciele, profesorowie i liczny zastęp tej instytucyi wychowańców postawili Francyą na pierwszym szczeblu doskonałości pod względem uprawy nauk matematycznych i do dziś jeszcze mimo wysokiego rozwoju nauk w Anglii i Niemczech utrzymują ją na chlubnem stanowisku współzawodnictwa na drodze naukowego postępu.

Jeden z założycieli i profesorów tej szkoły, *G. Monge* (1746-1818), wzbogacił nauki matematyczne nową doktryną, będącą uzupełnieniem Analizy Kartezyańskiej i stanowiącą nową erę w historyi Geometryi. Chcemy tu mówić o *Geometryi Wykreślnej*.

Pomijając wszelkie ocenienie naukowego znaczenia tej nowej doktryny i skuteczności jej wpływu na udoskonalenie Geometryi praktycznej i sztuk od niej zależnych, należy tu zwrócić uwagę na wpływ wywarty jej pojawieniem się na udoskonalenie Geometryi Analitycznej.

« Geometrya Wykreślna, mówi pan Chasles, będąca graficznem tłumaczeniem Geometryi ogólnej i rozumowej, posłużyła za pochodnię w poszukiwaniach i w ocenianiu wyników Geometryi Analitycznej; a z natury samej swych działań, mających na celu postawienie zupełnego i pewnego związku pomiędzy figurami wykreślanemi na płaszczyznie i ciałami przypuszczalnemi w przestrzeni, oswoiła ona z kształtami tych ciał, pozwoliła pojmować je idealnie z dokładnością i pośpiechem i podwoiła tym sposobem środki naszych badań w nauce o przestrzeni. »

Wielki naukowy pomysł gienialnego Monge'a, będący wynikiem ocenienia doniosłości doktryny rzutów w przedmiocie badań i dowodzeń ogólnych własności figur, nie mógł być bezwpływowym na udoskonalenie Geometryi Descartes'a mającej za przedmiot badanie własności figur nietylko wyłącznie za pomocą analizy, ale też i sposobów geometrycznych, kiedy takowe korzystnie użytymi być mogą. Powinowactwo naukowe tych dwóch nowoczesnych doktryn, badanie przestrzeni za cel mających, choć w sposobach tak od siebie różnych, jest wskazówką poniekąd ich wzajemnego na się wpływu. Wszystkie wreszcie nauki ścisłe tak silną spójnią między sobą są skojarzone, że każda nowa doktryna matematyczna jest dźwignią i bodźcem do rozwoju pokrewnych jej gałęzi wiedzy.

Niektórzy znakomici Geometrzy nowocześni, zastanawiając się nad przyczynami wyższości analizy algebraicznej nad Geometryą, wyrzekli że potęga analizy polega w tem, że nauka ta sprowadza rozumowanie do prostego mechanizmu, przynoszącego ulgę dla uwagi i pamięci. Obok względnej słuszności tego ocenienia, niepodobna nie zauważyć jego niedostateczności; bo chociaż umysł ludzki w pochodzie swym na drodze badań matematycznych posługuje się chętnie znakami i obrazami, to jednak odkrycia naukowe zawdzięczane algebraicznej analizie nie mogą być uważane za wyniki mechanicznych tylko kombinacyi znaków i symbolów. Umysł twórczy w bystrym swym polocie wyprzedza materyalny pochód rachunkowych działań, a każde analityczne działanie jest odbiciem tylko i tłumaczeniem uskutecznionego w przestrzeni działania. Geometrya też wykreślna, aczkolwiek nie posiadająca wyłącznie sobie właściwych metod, oswajając umysł z pojęciami figur w przestrzeni, spotęgowała siłę jego polotu, a stworzeniem i utrwaleniem ścisłego i systematycznego związku między figurami trójwymiarowemi i płaskiemi wzbogaciłu zasoby Geometryi, przyczyniając się jednocześnie do uproszczenia działań analitycznych i do jasnego i szybkiego tłumaczenia symbolicznego języka Analizy Kartezyańskiej.

Zasługi jednak wielkiego Monge'a wobec Geometryi Analitycznej nie ograniczają się bynajmniej do korzystnego wpływu jaki na tę naukę Geometrya Wykreślna wywrzeć mogła. Dziełem swem traktującem o zastosowaniu Analizy do Geometryi przyczynił on się bezpośrednio do udoskonalenia i rozwoju Analitycznej Geometryi.

Dzieło to oparte na użyciu współrzędnych Kartezyańskich jest poniekąd streszczeniem rozlicznych memoryałów i traktatów, które biegły ten matematyk w ciągu lat trzydziestu pomieszczał w różnych naukowych zbiorach i pismach peryodycznych (1). Stanowi ono epokę w historyi Geometryi Analitycznej, bo wzbogaca ją nowemi teoryami tyczącemi własności linii krzywych i powierzchni i wykazuje umiejętne zużytecznienie nowych rachunków wyższych w przedmocie badania własności figur.

Jak w swej Geometryi Wykreślnej tak i w Geometryi Analitycznej Monge odnosi do trzech płaszczyzn współrzędnych wszystkie części przestrzeni, których chce otrzymać stosunki kształtu i położenia. Używa on trzech równań do zupełnego wyznaczania położenia punktu w przestrzeni, a powierzchnią przedstawia jednem równaniem o trzech zmiennych.

Kwestya tycząca się przejścia z jednego do drugiego układu płaszczyzn współrzędnych, rozwiązana uprzednio przez Lagrange'a i Euler'a, podjętą została i przez Monge'a, który ze zwykłą mu jasnością i za pomocą własnej metody wyznacza jakim przekształceniom uledz powinny wartości współrzędnych w tym razie.

Idąc drogą obraną w układzie swej Geometryi Wykreślnej, w dziele swem na Kartezyańskiej Analyzie osnutem uważa Monge najprzód linją i płaszczyznę celem otrzymania równań na takowe. Dochodzi następnie jakie związki analityczne wyrażają że linje lub płaszczyzny są do siebie równoległe lub prostopadłe i jakie wyrażenia dają miarę utworzonego przez nie kąta. Potem szuka równań płaszczyzny stycznej i linii normalnej do powierzchni wyznaczonych właściwemi równaniami. Jako zastosowanie wstępnych studyów podaje on następnie ogólne badanie powierzchni drugiego stopnia. Jestto jasna i prostotą uderzająca dyskussya analityczna zupełniejsza i głębsza od tej, którą Euler podał w swem: « *Introduction à l'analyse des infiniments petits.* » Szczególniej zwraca ona na siebie uwagę nowo odkrytemi własnościami tyczącemi się elipsoid i paraboloid.

Ważna ze wszech miar teorya powierzchni drugiego stopnia znalazła w Monge'u i jego szkole gorących miłośników i twórców. Geometra ten wykazuje że dwie powierzchnie drugiego stopnia

(1) *Recueil des Savants Étrangers. — Memoires de l'Academie. — Journal de l'École polytechnique.*

jakiegokolwiek kształtu ale współśrodkowe mają koniecznie jeden i ten sam układ średnic sprzężonych co do kierunków. Przecięcie i styczności tych powierzchni mają z położeniem średnic sprzężonych wspólnych związki godne uwagi, które Monge odkrywa.

Liczny poczet uczniów tego wielkiego Geometry z powodzeniem zajmował się badaniem własności linii krzywych i powierzchni drugiego stopnia. Zanim jednak przyjdziemy do prac następców Monge'a należy wspomnieć o jego pracach w teoryi krzywych jakiegokolwiek stopnia. Jestto jedna z najznakomitszych części utworów tego matematyka.

Jakie są cechy odróżniające powierzchnie rozwijalne, skośne lub obrotowe, jakie wzory algebraiczne mogą uwydatnić że powierzchnia pod uwagę wzięta należy do pewnej znanej familii powierzchni. — Są to zadania, które sobie Monge postawił i zdaniem Lagrange'a (1) rozwiązał jak najpomyślniej.

Z pomiędzy prac Monge'a które na udoskonalenie Geometryi i Analizy korzystnie wpłynęły należy wspomnieć o pięknej jego teoryi o obwijających, o wielu rozwiązanych przezeń zadaniach w przedmiocie powierzchni rozwijalnych i o teoryi krzywizny powierzchni. Głębokie jego spostrzeżenia o tworzeniu się powierzchni określonych własnościami krzywizny ich tyczącemi mają zarówno związek z Geometryą i z najtrudniejszemi teoryami rachunku całkowego.

Utwory Monge'a wywarły wpływ na rozwój i udoskonalenie Geometryi Analitycznej postawieniem metod kojarzących ściśle działania czystej Geometryi z językiem symbolicznym Algebry, a zastęp jego uczniów i naukowych wyznawców rozwinął swe prace w duchu metody mistrza i posunął naprzód badania własności linii i powierzchni.

Meusnier wyprzedził Monge'a w teoryi krzywizny powierzchni. *Lancret* rozwinął i udoskonalił postawione przez Monge'a teorye co do krzywych o podwójnej krzywiznie. *Hachette* w drugiej części swego dzieła (2) przedstawił teoryę powierzchni drugiego stopnia i główne znane naówczas własności tych powierzchni. Pierwszy on dowiódł, że równanie powierzchni drugiego rzędu może być przyprowadzonem do najprostszego kształtu obejmującego cztery wyrazy.

Bourdon professor liceum Karola Wielkiego dowiódł że dziewięć niewiadomych ilości które wchodzą w tyleż równań służących do wyznaczenia głównych osi powierzchni są rzeczywistemi a *Biot* wyjaśnił i uzupełnił ten przedmiot. Jestto nader ważne twierdzenie w teoryi powierzchni drugiego rzędu, bo na niem polega wyznaczenie klas, liczby i kształtów powierzchni tego rodzaju.

W roku 1805 wydał *Biot : Traité analytique des courbes et des surfaces du second ordre.* Dzieło : *Essai de Géométrie Analytique* tegoż autora, odznaczało się w swym czasie pomiędzy wielu innemi tego rodzaju utworami i w polskim przekładzie przez *Wyrwicza* w Wilnie ogłoszone (1819), przez długi czas było rozpowszechnione w kraju naszym, aczkolwiek co do wartości swej ustępuje ono pierwszeństwa dziełu Śniadeckiego, o którem wspomnieliśmy.

Współcześni pisarze jak *Poullet Delisle, Boucharlat, Develey, Reynaud, Francœur* i wielu innych w uprawie Geometryi Analitycznej wielkie położyli zasługi, a pismo peryodyczne : *Correspondance de l'École polytechnique* zamieszczaniem nowych z dziedziny tej nauki rozpraw przyczyniało się skutecznie do jej doskonalenia.

(1) *Fonctions Analytiques.*
(2) *Elements de Géométrie à trois dimensions,* 1817.

Z tej epoki zaznaczyć należy imię *Dupon'a* który udarował naukę nowemi teoryami uzupełniając dzieło Monge'a : *L'application de l'Analyse à la Géométrie* dziełem swem (1) składającem się z pięciu memoryałów, z których drugi i trzeci wyłącznie Geometryi Analitycznej poświęcone traktują o teoryi stycznych sprzężonych; piąty zaś obejmuje teoryą mającą na celu wyznaczanie linii krzywizny. Prace te jako nader ważne i za temat skutecznych badań późniejszym Geometrom służące, musiały tu być wzmiankowane. Imie samo ich twórcy jest dostateczną zapowiedzią doniosłości ich znaczenia i wpływu.

Pomiędzy uczniami Monge'a odznaczają się także pod względem prac w Geometryi Analitycznej *Livet* (2), który w traktacie noszącym tytuł: « *Wzory do przejścia z układu współrzędnych prostokątnych do układu współrzędnych pochyłych,* » dowiódł pierwszy następne dwie własności średnic sprzężonych powierzchni drugiego stopnia : 1° summa kwadratów z trzech średnic sprzężonych jest stałą; 2° objętość równoległościanu wystawionego na trzech średnicach sprzężonych jest także stałą. Jestto uogólnienie twierdzeń znanych jeszcze przez Apollonius'a. Liczne prace Livet'a traktujące o własnościach powierzchni drugiego stopnia odniesionych do ich średnic sprzężonych, o walcach, stożkach i równoległościanach opisanych na powierzchniach drugiego stopnia zasługują na uwagę w historycznym przeglądzie postępów na drodze Analizy Kartezyańskiej poczynionych.

Binet był godnym współzawodnikiem Livet'a w przedmiocie badań o średnicach i osiach sprzężonych i o własnościach powierzchni drugiego stopnia. Pierwszy on podał równanie trzeciego stopnia wyznaczające wielkość osi jakiejkolwiek powierzchni drugiego stopnia odniesionej do układu współrzędnych pochyłych. Wiele późniejszych prac tego matematyka przeważnie opartych na analizie czystej i stosowanej zapewniły mu dostojne miejsce w gronie nowoczesnych Geometrów.

Brianchon słynny z prac w Geometryi czystej i ze znanego powszechnie twierdzenia noszącego jego imię, w traktacie swym o powierzchniach krzywych drugiego ztopnia dowiódł, że powierzchnia biegunowa jakiejkolwiek powierzchni drugiego rzędu jest powierzchnią drugiego rzędu. W pracach jego zauważyć należy pierwszą wzmiankę o biegunowych wzajemnych, których teorya nabrała wysokiego znaczenia w utworach *Stainville'a, Poncelet'a, Servois'a, Gergonne'a, Bobillier'a, Mannheim'a* i stała się przedmiotem owocnych badań, obfitem żródłem wielu twierdzeń i wniosków i punktem wyjścia niektórych doktryn filozoficznych, niezaprzeczalnej dziś doniosłości w Matematyce. Praca *Poncelet'a* nosząca tytuł : « *Théorie générale des polaires réciproques* » jest podstawą naukowej teoryi, której rozpowszechnienie się i rozwinięcie przyczyniło się do wzbogacenia Geometryi linij krzywych i powierzchni drugiego stopnia.

Wspominając imie Poncelet'a, tak chlubnie zapisane w historyi nauk matematycznych, należy tu nadmienić że od jego wystąpienia z wysoko cenionem dziełem « *Traité des propriétés projectives des figures,* » Geometrya czysta, przez długi czas mało uprawiana, zaczęła nowy perjod rozwoju, którego doniosłe skutki roznieciły skuteczny pochop współzawodnictwa w zastępie Geometrów Analizę Kartezyańską uprawiających.

(1) *Developpements de Géométrie*, 1813.

(2) Jan Livet — inżynier dróg i mostów — repetytor Szkoły Politechnicznej w Paryżu a następnie do roku 1812 professor Szkoły Inżynieryi i Artyleryi w Warszawie. W tomie drugim *Korrespondencyi Paryzkiej Szkoły Politechnicznej* oddawał wielkie pochwały wielu swym uczniom Warszawskiej szkoły.

f

Od pojawienia się Geometryi Analitycznej datuje właściwie podział metod w Geometryi, którą dziś jak wiadomo, na trzy dzielą gałęzie :

Pierwsza obejmuje Geometryą starożytnych, druga Analizę Kartezyańską, a trzecia znana pod mianem Geometryi nowoczesnej, nie posiłkująca się ani symbolami ani działaniami algebraicznemi, jest poniekąd dalszym ciągiem Analizy Geometrycznej starożytnych, której ślady znajdują się w poryzmach Euklides'a, pierwsze zarodki zwracają już na się uwagę w utworach *Pascal'a* i *Desargues'a*, gruntowniejsze jej podstawy zawdzięczają się *Monge'owi* i *Carnot'owi*, a rozwój dzisiejszy i udoskonalenie tej gałęzi wiedzy są owocem prac licznego zastępu sławnych Geometrów, z pomiędzy których dosyć będzie przytoczyć takie imiona jak : *Gergonne*, *Quetelet*, *Dandelin*, *Steiner*, *Möbius*, *Poncelet*, *Jonquières*, *Cremona*, i wielu innych na czele których zdobył sobie wybitne stanowisko pan *Chasles* tak obfitością swych w tej nauce odkryć jak wytrwałem a owocnem w imie jej rozwoju apostolstwem (1).

Mimo całego bogactwa zasobów Geometryi Analitycznej, i wysokiego jej udoskonalenia Geometrya nowoczesna zdołała wyprzedzić ją w szybkim pochodzie na drodze postępu. Ale jakby na poparcie już wypowiedzianego zdania, że wszystkie gałęzie nauk matematycznych są ściśle ze sobą skojarzone i wzajemnie na się oddziaływające, szybkie a świetne postępy Geometryi czystej nie zostały bez korzystnego wpływu na rozwój Geometryi Analitycznej, bo dały bodźca miłośnikom tej nauki do powołania ku jej pomocy potężnych zasobów nowoczesnej analizy i do stworzenia nowych układów współrzędnych, o których z kolei mówić nam przyjdzie. Z tego to względu wypadało zauważyć tutaj dzieło Poncelet'a o własnościach rzutowych figur, w którem autor nietylko dowiódł bez użycia rachunku wszystkie własności znane linii i powierzchni drugiego stopnia ale własnemi licznemi i ważnemi odkryciami naukę o przestrzeni wzbogacił. Prace jego są wymownym dowodem użyteczności i owocności badań Geometryi czystej przez długi czas zaniedbanej — nie bez ujmy dla ogólnego rozwoju nietylko nauk matematycznych, ale i nauk mających za przedmiot badanie i wyświetlanie praw natury; nauk jak na przykład *Geometrya stosowana do fizycznych zjawisk*, uprawiana chlubnie przez *Kepler'a*, *Huygens'a Newton'a*, *Mac-Laurin'a*, *Stewart'a* i *Lambert'a*, a udoskonaleniem Geometryi nowoczesnej wzbogacona w środki nowe i potężne do rozpowszechnienia swych badań we wszystkich gałęziach filozofii przyrodniczej.

Prace Poncelet'a oprócz bezwzględnej naukowej ich doniosłości i wpływu, przyczyniły się do rozwoju Geometryi Analitycznej, wywołując pojawienie się nowych metod analitycznych, pozwalających ideje geometryczne tłumaczyć i przedstawiać symbolicznym językiem Algebry. Utwory Poncelet'a wywołały niektóre prace Plücker'a i choćby z tego względu w przeglądzie Geometryi Analitycznej byłoby niestosownem przemilczeć takowe.

(1) Literatura naukowa polska posiada od niedawna dzieło dające streszczenie umiejętne i zalet w przedmiocie Geometryi nowoczesnej. Jest niem drugie wydanie Geometryi niezmordowanego autora, pana *G. H. Niewęgłowskiego*. W dziele tem Geometra nasz wyłożył w całości Geometryą starożytnych, a z Geometryi nowoczesnej podał, jak wiadomo, teoryę figur jednokładnych; stosunki nieharmoniczne i podziały harmoniczne; o biegunowych, osiach pierwiastnych; o figurach biegunowych wzajemnych; teorye tyczace się jednokreślności, pęków jednokreślnych, inwolucyi i pęków w inwolucyi i o płaszczyznach biegunowych i pierwiastnych, i tam dalej.

Nie wspomnieć tutaj zasłużonego imienia tego autora, znaczyłoby przemilczeć że w polskim języku, metodycznie i zgodnie z duchem dzisiejszego rozwoju matematyki Geometrya nowoczesna była traktowaną.

Przedmiotem głównym dzieła Poncelet'a (1) jest wytworzenie pewnych związków pomiędzy dwiema figurami będącemi jedna drugiej perspektywą, a to celem sprowadzenia badań własności jednej figury do badania własności figury prostszej; jak na przykład badania własności układu dwóch konicznych do badania własności dwóch kół.

Dzieło to oparł autor na szczęśliwem użyciu trzech doktryn : zasada ciągłości, teorya biegunowych wzajemnych i teorya figur odpowiedniczych (*homologiques*) o dwóch i trzech wymiarach.

Teorya figur odpowiedniczych rozwinięta w powyższem dziele przyczyniła się do wykazania wielu własności przecięć konicznych i do odkrycia nowych poglądów w przedmiocie *ognisk*. Uwagi tyczące się tej kwestyi pozwoliły znakomitemu analiście niemieckiemu panu *Plücker* uogólnić teoryą *ogniska* i zastosować ją do krzywych jakiegokolwiek rzędu (2). Ważny ten postęp na drodze uogólnienia pojęć o własnościach krzywych zaznacza i odtwarza pan *Salmon*, jeden z najznakomitszych Geometrów tegoczesnych w znakomitem dziele swem o krzywych wyższego rzędu.

Teorya biegunowych wzajemnych, której ślady znajdują się w Memoryale *Brianchon'a* z 1806 roku, a później w pracach panów *Encontre* i *de Stainville* w 1811, w dziele powyższem Poncelet'a została rozwiniętą z wielkiem powodzeniem i pożytkiem dla nauki o krzywych i powierzchniach, a nieco później ogłoszoną w osobnym Memoryale (3).

Teorya biegunowych służyła do przekształcenia krzywej jakiegokolwiek rzędu na inną krzywą której rząd był równym liczbie stycznych pierwszej krzywej, przechodzących przez jakikolwiek punkt uważany. Jak wiadomo, ta liczba stycznych krzywej nazwaną została przez *Gergonne'a* klassą. Tak, że w dwóch krzywych biegunowych wzajemnych, klassa jednej równa się rzędowi drugiej.

Pozostawała kwestya wyznaczenia klassy jakiejkolwiek krzywej rzędu m. Wiedziano że punkta zetknięcia stycznych prowadzonych do krzywej przez punkt zewnętrzny znajdowały się na krzywej rzędu $(m-1)$; że ta liczba była więc co najwyżej równą $m(m-1)$. Poncelet zauważył że gdyby krzywa uważana miała punkt podwójny, to krzywa rzędu $(m-1)$ przechodziłaby przez ten punkt, któryby się liczył za dwa w liczbie $m(m-1)$; że przeto punkt podwójny zmniejsza o dwie jedności liczbę stycznych, to jest klassę krzywej uważanej, a ztąd i rząd krzywej biegunowej. Zauważył on także że punktowi podwójnemu jakiejkolwiek krzywej odpowiadała w jej biegunowych *styczna podwójna*, a punktowi *zwrotu styczna przegięcia*.

Badania te Poncelet'a znalazły swe uzupełnienie w pracach *Plücker'a*, bo pozostawiały jeszcze do wykazania wpływ punktu zwrotu i punktu wielokrotnego jakiegokolwiek rzędu na *klassę* krzywej, a przeto na rząd krzywej biegunowej.

Sławny ten Geometra nietylko że ze skutkiem badania (4) swe w tym przedmiocie przeprowadził, ale jeszcze wyznaczył liczbę stycznych przegięcia i stycznych podwójnych krzywej posiadającej punkta

(1) *Traité des propriétés projectives des figures.*

(2) *Ueber solche Puncte, die bei Curven einer höhern Ordnung als der zweiten den Brennpuncten der Kegelschnitte entsprechen* (Dziennik Crelle'a, t. X, 1833).

(3) Poncelet, *Théorie générale des polaires réciproques*, 1829. (Dziennik Crelle'a, t. IV, 1829.)

(4) *Theorie der algebraischen Curven.* Bonn, 1830, in-4°.
Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Tom XII.
Journal des Mathematiques de M. Liouville. Tom II.

zwrotu i punkta wielokrotne. Wzory noszące imię tego autora są dziś powszechnie używane w teoryi krzywych a nawet i powierzchni.

Poncelet i Plücker należą do sławnego zastępu matematyków, którzy w początku pierwszej połowy bieżącego stulecia położyli fundamenta dzisiejszego nauk matematycznych rozwoju. Pomijając wiele imion zaszczytnie znanych w historyi nowoczesnej nauk, wspomnimy tutaj o tych wyłącznie matematykach co wzbogacili swemi pracami Analizę Kartezyańską i co uprawą Geometryi czystej do udoskonalenia Geometryi Analitycznej się przyczynili. W tej epoce widoczniej jak kiedykolwiek objawiają się odrębne kierunki w uprawie nauki o przestrzeni. Dwie klassy Geometrów występują na widownię, a wyłączność zamiłowania oddzielnych metod geometrycznych nadaje im pozór zawistnego poniekąd między sobą współzawodnictwa.

Na czele Geometrów pierwszej klassy, wyłącznie Geometryi czystej oddanej, występuje pan *Chasles* we Francyi i pan *Steiner* w Niemczech, obydwaj sławni nietylko ze względu na mnogość odkrytych i dowiedzionych przez nich twierdzeń i rozwiniętych teoryi, ale także z przyczyny przyjęcia metody czysto geometrycznej którą rozwinęli w swych dydaktycznych dziełach. Pierwszy w kilkakroć już przytaczanem przez nas dziele : *Aperçu historique* . . .; drugi najpierw w dziele (1) przypisanem Aleksandrowi Humboldt, traktującem o systematycznem rozwinięciu zależności kształtów geometrycznych, a nieco później w drugiem dziele (2) również wpływowem na utrwalenie i rozwój Geometryi nowoczesnej.

Do tych dwóch imion dołączyć należy imię professora Dublińskiego Uniwersytetu pana *Mac-Cullagh*, który w memoryale swym o powierzchniach drugiego rzędu (3) wykazał za pomocą czystej Geometryi piękne własności powierzchni współogniskowych, a w kilku innych ważnych nader pracach w dziedzinie nauk fizyko-matematycznych bardzo szczęśliwie zastosował zasoby Geometryi nowoczesnej do badania zjawisk natury.

Drugiej klassie Geometrów z początku bieżącego stulecia przewodniczą : *Gergonne* i *Bobillier* we Francyi, a *Möbius* i *Plücker* w Niemczech. Z wyłącznem zamiłowaniem oddali się oni zastosowaniom analizy algebraicznej do badania i dowodzenia ogólnych własności geometrycznych figur i z tego względu ich zasługi i wpływ ich prac na rozwój Geometryi Analitycznej szczegółowszej nieco wymagają tu wzmianki.

Założone w 1810 roku przez *Gergonne'a* naukowe pismo peryodyczne *Annales des Mathématiques*, jedyne naówczas w tym rodzaju, było do roku 1831 widownią wszystkich talentów, występujących z nowemi oryginalnemi pracami wywołującemi postęp nauk matematycznych.

Umiejętne sternictwo, którem uczony ten podniósł swe czasopismo do pierwszorzędnej wartości, przynęciło i zagranicznych sławnych Geometrów do gorliwego współpracownictwa. Z pomiędzy niemieckich Geometrów dosyć przytoczyć imiona *Steiner'a* i *Plücker'a*, którzy w tem piśmie odzwierciedlającem ówczesny stan wiedzy dali pierwsze dowody matematycznego ich gieniuszu.

Obszernej trzebaby pracy aby przejrzeć utwory oryginalne zastępu Geometrów biorących udział

(1) *Systematische Entwickelung der Abhangigkeit geometrischer Gestalten von einander*, etc. Berlin, 1832.

(2) *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises.* Berlin, 1833.

(3) *On the surfaces of the second order from the Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1843.

w redakcyi tego czasopisma, a umiejętnego nader pióra aby szczegółowiej ocenić wpływ tych utworów na rozwój i postęp Geomytryi Analitycznej i Matematyki w ogólności. Ponieważ wzmianką tylko imion wybitnych i prac za wpływowe uznanych zadowolnić tu nam się wypada, zauważymy że w pierwszym tomie tego czasopisma znajdują się pierwsze uwagi tyczące *biegunowych wzajemnych*, któremi posługują się *Encontre* i *Stainville*. W tymże tomie *Servois* i *Gergonne* używają po raz pierwszy wyrażeń : *biegun* i *biegunowa.*

Bret w tomie drugim i czwartym podaje równanie trzeciego stopnia, które wyznacza wielkość osi elipsoidy, której trzy średnice sprzężone są znanemi. *Bérard* w tomie trzecim dowodzi tegoż samego równania i trzech własności układów średnic sprzężonych powierzchni drugiego rzędu.

Gergonne, biegły badacz we wszystkich gałęziach matematyki, pomieszczał w swem czasopiśmie prace własne znane dziś powszechnie z ich naukowej wartości. W tomie siódmym znajdują się sławne zagadnienia Gergonne'a : koło styczne do trzech kół i sfera styczna do czterech sfer. Podane przezeń analityczne rozwiązania tych zagadnień do dziś jeszcze uważanemi są za najprostsze i najdoskonalsze. W tomie jedenastym *Durrande* rozwiązał też same zagadnienia za pomocą czystej Geometryi. Wielu znanych z talentu matematyków późniejszych zajmowało się, jak wiadomo, uproszczeniem rozwiązań i wykreśleń tych zagadnień, a pan *G. H. Niewęgłowski,* posługując się metodami Geometryi nowoczesnej rozwiązanie tyczące koła stycznego uprościł znakomicie (1).

W tomach czwartym, dziewiątym i dwudziestym pierwszym Gergonne zapoznaje czytelnika z teoryą stycznych sprzężonych w memoryałach : « *Dowodzenie głównych twierdzeń pana Dupin o krzywiźnie powierzchni ;* i *Elementarna teorya o krzywiźnie linii i powierzchni krzywych.* »

W znakomitym traktacie *o niektórych prawach ogólnych tyczących się krzywych i powierzchni algebraicznych* (2) podał Gergonne nowe naówczas twierdzenia, które uważać należy za podstawę ważnych badań analitycznych *Plücker'a* i *Jacobi'ego*, rozwiniętych później przez panów *Cayley* i *Salmon.*

Pomijając twierdzenia tyczące się powierzchni, przytoczymy tutaj dwa następujące podstawowe twierdzenia dotyczące się krzywych algebraicznych :

1° *Jeśli dwie krzywe rzędu* m *mają* mp *punktów przecięcia na krzywej rzędu* p, *ich* m(m — p) *innych punktów przecięcia znajdują sie na krzywej rzędu* (m — p).

2° *Jeśli trzy krzywe rzędu* m *mają* mp *punktów wspólnych, położonych na pewnej krzywej rzędu* p, *trzy krzywe rzędu* (m — p), *na których znajdują się* m(m — p) *punktów wspólnych krzywym, wzięte po dwie, przechodzą przez* $(m-p)^3$ *punktów wspólnych.*

Pomijając inne prace Gergonne'a, znajdujące się w *Annales,* jako tyczące się nauk przyrodniczych i mechaniki, wspomnimy tu tylko o jego skutecznych usiłowaniach do podniecania rozwoju Geometryi Analitycznej i Matematyki w ogólności. Aby wzbudzić w młodych Geometrach współzawodnictwo podawał Gergonne w swem naukowem czasopiśmie twierdzenia i zagadnienia do rozwiązania. Był to skuteczny bodziec i zachęta do badań naukowych dla młodych matematyków ; a wiele kwestyij przedstawionych przez Gergonne'a za temat do poszukiwań wywołały prace godne uwagi, których wyniki dziś w wykładach matematyki są przytaczane.

(1) GEOMETRYA przez *G. H. Niewęgłowskiego.* Wydanie drugie, 1869.
(2) *Annales de Mathématiques*, t. XVII. 1826-1827.

Dla wykazania wpływu i znaczenia usiłowań Gergonne'a w tym względzie, dosyć będzie podać tutaj niektóre z przedstawionych przezeń kwestyi do rozwiązania :

Dowieść że wszystkie powierzchnie drugiego rzędu styczne do siedmiu płaszczyzn, mają swe środki na jednej płaszczyźnie (1).

Znaleźć miejsce wierzchołków stożków drugiego rzędu przechodzących przez sześć punktów (2).

Jaką jest liczba konicznych stycznych do pięciu konicznych danych (3)?

Do zasług Gergonne'a należy dołożyć podanie przezeń pierwszej idei o *zasadzie dwoistości* w Geometryi, na której podstawie tyle ważnych prac dotychczas osnuto.

Mówiąc o pracach Geometrów współczesnych Gergonne'owi zobaczymy, że jego czasopismo naukowe jest cennym zbiorem sławnych imion oryginalnych utworów i nowych pomysłów w dziedzinie Geometryi Analitycznej.

W historycznym przeglądzie postępów Geometryi Analitycznej obok zasłużonego imienia *Gergonne'a* postawić należy imie *Bobillier'a.* Talent ten płodny i oryginalny, mimo że zbyt przedwczesną śmiercią naukom matematycznym wydarty, zdołał pozostawić ślady swej twórczości; a ideje jego rozwinięte i utarte pracami późniejszych Geometrów oddziałały niesłychanie na postęp Geometryi Analitycznej.

W memoryale noszącym tytuł : « *Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue* » Bobillier proponuje przedstawiać symbolicznie koniczne opisane na trójkącie przez równania, złożone z summ iloczynów funkcyi linijnych mnożonych odpowiednio przez stałe dowolne. Dochodzi on do wyników nader prostych; koniczną bowiem opisaną na trójkącie przedstawia równaniem :

$$\mathrm{aBC} + \mathrm{bCA} + \mathrm{cAB} = 0\ ;$$

w którem A, B, C oznaczają funkcye linijne współrzędnych x, y, równania $A=0$, $B=0$, $C=0$ będąc równaniami trzech boków trójkąta, a a, b, c stałemi niewyznaczonemi.

Między licznemi twierdzeniami, podanemi przez Bobillier'a w przytoczonym Memoryale, znajduje się ważne twierdzenie następujące, dowiedzone także jednocześnie i przez sławnego niemieckiego Geometrę *Möbius'a :*

« *Jeśli trójścian jest wpisanym w pewną powierzchnię drugiego rzędu, płaszczyzny styczne w jego wierzchołkach przecinają płaszczyzny ścian przeciwległych według czterech linij prostych, które należą do hyperboloidy jednopołej.* »

W następnym Memoryale (4) podał Bobillier nowe zastosowania tej samej metody, która jak wiadomo z wielkim dla nauki pożytkiem używaną jest do dzisiaj w Geometryi Analitycznej.

Teorya biegunowych zawdzięcza także wiele pracom *Bobillier'a. Monge* dowiódł był w dziele swem *Application de l'Analyse à la Géométrie*, że krzywa zetknięć powierzchni rzędu m i stożka znajduje się na powierzchni rzędu $(m-1)$; i że przeto styczne poprowadzone z pewnego punktu do krzywej

(1) Kwestya rozwiązana przez Geometrę *Bobillier* w tomie XVII *Annales Gergonne'a.*

(2) Tom XVIII. *Annales de Mathematiques. — Aperçu historique*... de M. Chasles. — I *Comptes rendus de l'Académie*, t. LVII.

(3) Kwestya ta podaną była w tomie VIII, w trzy lata później powtórzoną w tomie XI, a rozwiązaną dopiero ostatnimi czasy.

(4) *Annales de mathématique*, t. XVIII, 1827-1828.

płaskiej rzędu m mają swe punkta styczności na krzywej rzędu $(m - 1)$. Tę to właśnie krzywą nazwano, jak wiadomo, biegunową punktu; która to nazwa wprowadzoną została przez *Bobillier'a.*

W pracach swych pomieszczonych w osiemnastym i dziewietnastym tomie czasopisma Gergonne'a dowiódł Bobillier że :

1° *Biegunowe seryi punktów w linii prostej leżących przechodzą przez* $(m - 1)^2$ *punktów wspólnych;*

2° *Biegunowe punktu* P, *względne do pęka krzywych rzędu* m, *tworzą pęk rzędu* $(m - 1)$; to jest że *te biegunowe przechodzą przez* $(m - 1)^2$ *punktów wspólnych;*

3° *Jeśli punkt* P *kreśli linją prostą, te* $(m - 1)^2$ *punktów opisują krzywą rzędu* $2(m - 1)$.

Uważając biegunowe po sobie następujące jednego punktu, które mają równania stopni : $(m - 1)$, $(m - 2)$,...... 2 i 1, autor przywiedzionym został do tego ważnego twierdzenia :

Jeśli się weźmie biegunową rzędu n, *pewnego punktu* P, *względną do krzywej* C_m *rzędu* m; *potem biegunową rzędu* $(m - n)$ *jakiegokolwiek punktu* Q *tej biegunowej rzędu* n, *względną do tejże samej krzywej* C_m, *ta biegunowa rzędu* $(m - n)$ *przechodzi przez punkt* P.

Albo innemi słowy : *Biegunowa rzędu* n *jakiegokolwiek punktu* P *jest miejscem punktów, których biegunowe rzędu* $(m - n)$ *przechodzą przez punkt* P.

Jak wiadomo, od czasu pojawienia się tego twierdzenia nazwano *osią harmoniczną* ostatnią biegunową punktu, która jest linją prostą. Twierdzenie to daje w szczególności następujący podwójny związek między osią harmoniczną i pierwszą biegunową jakiegokolwiek punktu :

Pierwsza biegunowa jakiegokolwiek punktu P *jest miejscem punktów, których osie harmoniczne przechodzą przez ten punkt;*

Odwrotnie zaś, oś harmoniczna jakiegokolwiek punktu P *jest miejscem punktów, których pierwsze biegunowe przechodzą przez punkt* P.

Też same twierdzenia dowiedzione zostały przez Bobillier'a dla powierzchni rzędu m.

Przytoczone powyżej niektóre ważniejsze wyniki prac tego matematyka są początkiem ważnej teoryi biegunowych krzywych i powierzchni, która odtąd stała się przedmiotem badań i wprowadzoną została do dzieł o Geometryi Analitycznej traktujących.

Pomijając pracę Bobillier'a traktującą o prawach geometrycznych ruchu, jako nie tyczącą się bezpośrednio Geometryi Analitycznej, wspomnimy o dziele niemieckiego Analisty *Möbius'a,* którego matematycznemu talentowi Analityczna Geometrya zawdzięcza odkrycie nowych sposobów ułatwiających badanie własności krzywych i powierzchni.

W 1827 roku wydał on pod tytułem : *Barycentrycznego rachunku* (1) nowy system Geometryi Analitycznej nader właściwy do traktowania pewnych geometrycznych kwestyi i rozwiązywania wielu zadań, szczególniej w przedmiocie krzywych o podwójnej krzywiznie i powierzchni. W dziele tem spostrzega się zasady przekształcenia figur, które są w pewnej mierze dalszym ciągiem zasad przedstawionych w dziele Poncelet'a (2).

System analityczny Mobius'a różnym jest od metody Bobillier'a i od czasu swego pojawienia się

(1) *Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytichen Behandlung der Geometrie dargestelt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte;* Leipzig, in-8°, 1827.

(2) *Traité des propriétés projectives.*

z pożytkiem dla nauki został rozwinięty. Sławny autor angielski pan *Salmon* słusznie przyznaje Möbius'owi pierwszeństwo we wprowadzeniu układu *współrzędnych styczneczkowych,* które są uzupełnieniem metod analitycznych, ponieważ pozwalają badać za pomocą rachunku wszelkie własności stycznych w ten sam sposób jak się studjuje własnosci tyczące punktów.

Donioslość znaczenia tego układu współrzędnych najlepiej uwydatnią następujące poglądy naukowe pana Chasles'a w tym przedmiocie : « Metoda analityczna Descartes'a, mówi on, której zawdzięczać należy najpiękniejsze odkrycia, szczególniej w Geometryi krzywych, nie da się użyć, albo przynajmniej przedstawiałaby nader wielkie trudności, jeśliby chciano zastosować ją do tego rodzaju twierdzeń które się otrzymuje wprost na podstawie zasady dwoistości, jako *współwzględne* (*corrélatifs*) twierdzeń otrzymanych przez tę metodę Descartes'a. »

« Sposób użyty przez Descartes'a polegał na uważaniu krzywej jako zespojenie punktów następujących po sobie według pewnego danego prawa i na wyrażaniu położenia wszystkich tych punktów przez związek stały między odległościami każdego z nich od dwóch osi stałych. »

« Pojmuje się z łatwością, mówi ten autor, że podobny sposób w *nowej Geometryi Analitycznej* będzie polegał na uważaniu każdej krzywej jako obwinięcie (*enveloppe*) wszystkich jej stycznych i na wyrażaniu położenia wszystkich tych prostych przez równanie jedyne o dwóch zmiennych, których każdy układ wartości odpowie jednej z tych prostych. »

Powyższy nowy system Geometryi Analitycznej przedstawia pan Chasles w krótkości w dziele swem *Aperçu historique...*, jako proste zastosowanie zasady dwoistości; w tomie zaś szóstym korrespondencyi matematycznej pana Quetelet traktuje autor ten przedmiot nie posiłkując się wcale zasadą dwoistości; wykazuje na czem polega nowy układ spółrzędnych i podaje zastosowania takowego.

« . . . . . ten *nowy system Geometryi Analitycznej* zdaje nam się, mówi tenże autor, zasługiwać na rozwinięcie, jako uzupełniający z doktryną Descartes'a, dzieło które sobie założył ten wielki filozof w swym znakomitym pomyśle zastosowania Algebry do Geometryi. »

Od czasu wprowadzenia w użycie współrzędnych styczneczkowych, rozwinięte w tym kierunku prace przywiodły do znalezienia różnych układów tego rodzaju współrzędnych, różniących się między sobą pod względem formy przedstawienia ale polegających na jednej i tejże samej podstawowej zasadzie.

Pan *Salmon* w traktacie swym o przecięciach konicznych (3) uważa za współrzędne styczneczkowe linii prostej

$$l\alpha + m\beta + n\gamma,$$

stałe l, m, n równania tej prostej i nazywa *równaniem styczneczkowem* krzywej, związek który powinien istnieć między temi stałemi, aby ta prosta była styczną do krzywej. W nocie do powyższego dzieła przydanej podaje autor pojaśnienia tyczące tego systemu i przedstawia w krótkości inne układy współrzędnych styczneczkowych, i wykazuje że metoda współrzędnych styczneczkowych może być przedstawioną pod kształtem, który nie wymaga żadnej uprzedniej znajomości współrzędnych kartezyańskich ani trzylinijnych.

(1) *A treatise on Conic Sections.* London, 1863.

Mimo rozpowszechnienia się zastosowań tego rodzaju współrzędnych, systematyczne przedstawienie i użycie takowych jest rzadkością dotychczas w dziełach Germetryi Analitycznej. Geometrya Analityczna panów *Briot* i *Bouquet* zawiera zaledwie określenie współrzędnych styczneczkowych; traktat pana Salmon'a już przytaczany jak również i dzieło *Treatise on the higher plane curves* podaje już poglądy więcej rozwinięte w tej materyi, ale zdaniem pedagogów nie zupełnie dostateczne do oswojenia uczących się z używaniem tych współrzędnych. Trójwymiarowa Geometrya Analityczna przez pana *Hesse* jest dziełem odznaczającem się pod względem systematycznego użycia współrzędnych styczneczkowych, a Geometrya Analityczna Painvin'a obejmuje współrzędne styczneczkowe z systematycznem wykazaniem wzorów podających związki tych współrzędnych z układem kartezyańskim, wziętym za podstawę dzieła i z innymi układami współrzędnych.

Do metod Bobillier'a i Mœbiusa dołączyć tu należy ważne wyniki prac *Plücker'a*, a szczególniej jego system algebraicznego przedstawienia nazwany trzylinijnym; w którym położenie punktu jest wyznaczonem przez odległości od trzech prostych stałych, zwanych linjami odniesienia; a położenie linii przez równanie jednorodne między odległościami jej punktów od linii odniesienia. To równanie może przedstawić się w kształcie następującym:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

W zwykłych współrzędnych kartezyańskich największe nproszczenie do jakiego dojść można polega na wyborze dwóch najważniejszych linii figury uważanej za osie współrzędnych; w układzie trzylinijnym zaś, można dojść do większego jeszcze uproszczenia, biorąc trzy linje wchodzące do kwestyi rozbieranej za trzy linje odniesienia α, β, γ. W tem polega obok innych ważnych własności tego układu jego wyższość w stosunku do układu współrzędnych kartezyańskich.

Układ współrzędnych trzylinijnych zasługuje jeszcze na uwagę jako uogólnienie w metodach analitycznych, bo współrzędne kartezyańskie są tylko przypadkiem szczególnym trzylinijnych, a równania w układzie pierwszym są kształtem szczególnym przyjętym przez równania w drugim układzie, kiedy dwie z linii odniesienia stają się osiami współrzędnych, a trzecia linja odniesienia oddala się do nieskończoności.

Zbytecznem byłoby wystawiać o ile wprowadzeniem nowego układu współrzędnych przyczynił się *Plücker* do uogólnienia i postępu Geometryi Analitycznej. Szczęśliwy pomysł jego współrzędnych trzylinijnych i przedstawiania równań Geometryi Analitycznej przez funkcye jednorodne w studjach geometrycznych podaje wielkie ułatwienie, a często użycie współrzędnych trzylinijnych jest nieodzownem jeśli się chce traktować za pomocą rachunku badania kwestyi z dziedziny Geometryi nowoczesnej.

Za pomocą wyłącznie niemal tego układu współrzędnych i równań uczynionych jednorodnemi i symetrycznemi przez wprowadzenie nowej zmiennej i metody mnożników dowolnych, Plücker doszedł do tłumaczenia w języku algebraicznym i do analitycznego przedstawienia doktryn geometrycznych, przez Poncelet'a do Geometryi wprowadzonych; a odtąd, jak wiadomo, tak układ Bobillier'a jak i Plücker'a obszerne i użyteczne znalazły zastosowania w nowoczesnych pracach matematycznych. Niektórzy z autorów angielskich, jak Ferrers w traktacie swym o współrzędnych trzylinijnych posuwają uwielbienie swe dla układu współrzędnych trzylinijnych aż do mniemania że ten system lub inne układy współrzędnych są zdolne zastąpić w zupełności w nauce o przestrzeni godną uwielbienia podstawę Geometryi Descartes'a, ugruntowaną na zasadzie tak prostej i wielkiej swą prostotą, a tak skutecznej w swych wynikach. Bezwątpienia współrzędne trzylinijne w badaniu rzutowych i opisowych własności figur przewyższają układ współrzędnych kartezyańskich, ale wyższość ich ustaje skoro chodzi o badanie własności metrycznych. Współrzędne trzylinijne są bezzaprzeczenia drogocennem narzędziem w poszukiwaniach analitycznych, jeśli się ich nie nadużywa i potrafi zastosowywać do przedmiotów odpowiednich ich naturze.

Oprócz zasługi odkrycia i wprowadzenia układu współrzędnych trzylinijnych Geometrya Analityczna zawdzięcza Plücker'owi wiele prac oryginalnych, które się przyczyniły do jej rozwoju.

W dziewietnastym tomie roczników Gergonne'a przedstawił Plücker piękne swe twierdzenia o krzywych i powierzchniach, mających przechodzić przez punkta dane. Dosyć będzie przytoczyć tutaj wysłowienie jednego a najprostszego z tych twierdzień, a mianowicie:

Krzywe rzędu m, *mające przechodzić przez* $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ *punktów mają wszystkie* m^2 *punktów wspólnych.*

Wiadomo także że podstawowe związki w teoryi krzywych algebraicznych są owocem prac Plücker'a. Jemu to zawdzięcza nauka sławne wzory tyczące stycznych podwójnych i punktów szczególnych krzywych płaskich, którymi posługują się dziś matematycy w zastosowaniach tak w teoryi krzywych jak i powierzchni.

Godną uwagi ze względu na nowość i znaczenie zawartych w niej badań analitycznych jest praca Plücker'a *O nowej Geometryi przestrzeni*, czytana w królewskiem stowarzyszeniu w Londynie w 1865 roku.

Oprocz prac Plücker'a w kierunku czysto matematycznym, a przeważnie Geometryi Analitycznej, sławnemi są zastosowania matematycznych jego pomysłów do teoryi swiatła i magnetyzmu. Aczkolwiek w tym przedmiocie poczynił on odkrycia wielce przez fizyków cenione, nie miejsce tutaj szczegółowiej o takowych wspominać.

Pobieżny przegląd postępów Geometryi Analitycznej z początku bieżącego stulecia wykazuje dostatecznie że pod wpływem szybkich postępów Geometryi czystej Geometrya Descartes'a wzbogaciła się w nowe zasoby, pozwalające jej iść w ślad za swietnemi zdobyczami nowaczesnej Geometryi.

Współrzędne jednorodne odznaczające się prostotą i symetryą wzorów analitycznych ułatwiły badania punktów w nieskończoności na krzywych i powierzchniach.

Współrzędne trzylinijne pozwoliły łatwo i jasno dowodzić wielu opisowych własności figur i wraz ze *współrzędnemi styczneczkowemi* stały się, że tak powiemy, analitycznym językiem zasad nowoczesnej Geometryi.

Bez tych zasobów, Geometrya Analityczna byłaby niezupełną wobec dzisiejszego rozwoju nauki o przestrzeni i bezwładną pod względem współzawodnictwa na drodze Geometryi nowoczesnej, która ją tak wyprzedziła.

Oprócz powyżej wzmiankowanych układów współrzędnych zauważyć należy i inne układy, przyswojone nauce w ciągu bieżącego stulecia.

Usiłowania w celu uogólnienia niektórych gałęzi fizyki matematycznej przywiodły znakomitego matematyka francuzkiego pana *Lamé* do odkrycia nowego układu współrzędnych, nazwanych przezeń *eliptycznemi* (1), któremi z pożytkiem dla nauki zastąpił współrzędne sferyczne w wielu matematycznych poszukiwaniach.

W późniejszych pracach swych tak w dziedzinie nauk matematycznych czysto jak i fizyko-matematycznych pan Lamé pomysł swój tyczący współrzędnych eliptycznych zastosowywał z wielkiem powodzeniem. W pracy swej : « *Mémoire sur les lois de l'équilibre de fluide éthéré* » zastosowanie współrzędnych eliptycznych rozwinął i uogólnił, a w Memoryale późniejszym (2) podał wszystkie wzory tej ważnej teoryi z ich tłumaczeniem geometrycznem i z wykazaniem licznych związków pomiędzy parametrami powierzchni i promieniami krzywizny ich przecięć. W nowem studium o współrzędnych krzywolinijnych, pod tytułem « *Mémoire sur les variations des coordonnées curvilignes* » znajdują się także ważne zastosowania współrzędnych eliptycznych i krzywolinijnych wogóle, którym pan Lamé poświęcił w 1859 roku wyłączne dzieło (3).

Teorya współrzędnych eliptycznych i krzywolinijnych weszły w użycie i znalazły korzystne zastosowanie w najznakomitszych pracach Geometrów tegoczesnych. Pan *Valson* między innymi zastosował współrzędne eliptyczne do Geometryi Elipsoidy (4), a później nieco używa ich w Memoryale traktującym o współrzędnych parabolicznych i ich zastosowaniu do Geometryi paraboloid (5).

Pomiędzy usiłowaniami owocnemi podejmowanemi w celu wzbogacenia Geometryi Analitycznej nowymi sposobami, mającymi ułatwiać badania własności figur, zauważyć także należy odkrycia pana *O. Bonnet*. W 1853 roku sławny ten matematyk przedstawił Akademii francuzkiej jednę ze swych prac w tym kierunku podejmowanych, a w tomie piątym dziennika *Journal des Mathématiques* w roku 1860 ogłosił Memoryał pod tytułem : *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*. Praca ta jest rozwinięciem kilku traktatów Akademii Paryzkiej uprzednio przedstawionych.

Monge przedstawiał zawsze powierzchnią równaniem we współrzędnych kartezyańskich. Pan *O. Bonnet* w powyżej przytoczonym Memoryale przedstawia korzyści z zastąpienia zwykłych współrzędnych przez trzy inne *zmienne* mające ściślejszy związek z kształtem uważanej powierzchni i proponuje wprowadzenie zmiennych wyznaczających położenie płaszczyzny stycznej. Wzory otrzymane przez pana O. Bonnet odznaczają się rzadką prostotą; a zastosowanie ich do wielu zadań rozwiązanych przez Monge'a, jak również do wielu nowych i trudniejszych zagadnień, wykazuje ich użyteczność.

Układ zmiennych proponowany przez pana O. Bonnet z wielkiem powodzeniem zastosowanym został przez pana *Dini* w Memoryale traktującym o powierzchni, której summa dwóch głównych promieni krzywizny w każdym punkcie jest stałą (6).

(1) Po raz pierwszy użyte w pracy przedstawionej Akademii w 1833 roku pod tytułem : *Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.*

(2) *Mémoire sur les coordonnées curvilignes* (*Comptes rendus*, t. VI, i *Journal de Mathématiques*, t. V, 1840).

(3) *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications.*

(4) *Application de la théorie des coordonnées elliptiques à la Géométrie de l'ellipsoïde* (*Thèse pour le doctorat*, 1854).

(5) *Comptes rendus*, t. L. — *Nouvelles annales de Mathématiques*, t. XIX.

(6) *Annali di Matematica pura et applicata*, t. VII. Rzym, 1865.

Inne wielce cenione i nader ważne prace pana O. Bonnet wpłynęły na udoskonalenie teoryi tyczących się powierzchni.

W przedmiocie uogólnienia *współrzędnych biegunowych*, godną uwagi jest praca współziomka naszego, Inżyniera, byłego ucznia paryzkiej szkoły Dróg i Mostów, pana *E. Habich* (1).

Autor ten znany uczonemu światu z kilku oryginalnych prac matematycznych niezaprzeczalnej wartości, w studium swem, o którem wspomnieć tu należy, uważa za zmienne położenie bieguna O z którego wychodzą promienie wodzące. Biegun posuwa się po krzewej (E); jeden tylko promień wychodzi z każdego punktu O tej krzywej i skierowanym jest według stycznej OM. Kąt θ, który ta styczna czyni z osią stałą X i promień $OM = r$ są dwiema współrzędnemi pewnego punktu M; a krzywa (A), miejsce punktów M ma za równanie $r = \varphi(\theta)$. Każdy punkt O krzywej (E) wyznacza się łukiem $SO = s$, liczonym od punktu stałego S krzywej. Ten łuk i kąt θ stycznej OM z osią X są wzięte za współrzędne względne krzywej (E), której równanie jest $s = \varphi(\theta)$. Pan Habich podaje w funkcyi współrzędnych r, s i θ, wyrażenia podnormalnej biegunowej krzywej (A), stycznej trygonometrycznej kąta μ, uczynionego przez styczną do krzywej z promieniem OM; i nareszcie wyrażenie na promień krzywizny linii krzywej. Wzory otrzymane przez tego matematyka sprowadzają się odpowiednio do wzorów zwykłych w układzie współrzędnych biegunowych, kiedy krzywa (E) zamieni się na punkt; w którym to razie $\frac{ds}{d\theta} = 0$.

Współrzędne krzywolinijne pochyłe, chociaż unikane w zastosowaniach z przyczyny zawiłych wzorów do jakich użycie ich prowadzi, stały się pięknym tematem geometrycznych badań księdza *Aoust*, którego talentowi zawdzięcza się postawienie w tym względzie nowej teoryi brakującej uprzednio nauce o przestrzeni.

Z licznych prac tego matematyka zaznaczyć tu należy dwie następujące: *O współrzędnych krzywolinijnych płaskich* (2) i o *współrzędnych krzywolinijnych w przestrzeni* (3). W tych Memoryałach autor wyprowadza wzory dla współrzędnych pochyłych, będące uogólnieniem znanych wzorów dla współrzędnych prostokątnych, a odznaczające się uderzającą prostotą.

W przedmiocie uprawy i udoskonalenia teoryi tyczącej się współrzędnych krzywolinijnych pochyłych wielce cenioną jest praca (4) pana *Combescure*, której przedmiotem jest uogólnienie wspomnianej już teoryi pana *Lamé* i zastosowanie takowej do przypadku ogólnego współrzędnych krzywolinijnych pochyłych.

Nowoczesne badania analityczne tyczące się *Geometryi sfery* wymagają tu krótkiej wzmianki o przeszłości i postępach tej ważnej gałęzi Geometryi.

Nauka ta znaną była i uprawianą w starożytności, czego dowodem trygonometrya sferyczna starożytnych. Późniejsi geometrowie w uprawie Geometryi sfery ograniczali się do wytkniętego kierunku przez starożytnych, to jest da rozwiązywania trójkątów sferycznych dla astronomów i żeglarzy.

(1) *Sur un système particulier de coordonnées. Application aux caustiques planes* (Zobacz: *Annali di Matematica* wydawane przez panów Brioschi i Cremon'a, t. II, 1868.)

(2) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLVIII, 1859, i t. LIV, 1862.

(3) *Annali di Matematica*, t. VI, 1864.

(4) *Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes.*

W początku dopiero bieżącego stulecia zaczęto traktować ten dział nauki o przestrzeni i rozszerzać szczupłe granice, w których uprzednie badania Geometryą sfery utrzymywały. *Lexell* pierwszy podjął badanie własności kół na sferze i odkrył ważne twierdzenie o krzywej będącej miejscem wierzchołków trójkątów sferycznych o jednakowej powierzchni i tej samej podstawie.

Fuss rozwiązał niektóre zadania Geometryi sfery i podjął badania pewnej elipsy sferycznej, będącej przecięciem sfery przez stożek drugiego stopnia, mający swój wierzchołek w środku sfery.

Imiona *Schubert'a* i *Legendra* należą do późniejszej nieco historyi uprawy tej nauki. W Annalach Gergonne'a *Sorlin* i *Magnus* posuwają naprzód badania własności figur na sferze, a *Lhuillier*, *Gergonne*, *Guéneau d'Aumont* i *Quetelet* rozwijają tę naukę; ale wszystkie te prace acz doniosłej wartości nie stanowią jeszcze metodycznego studium tej ważnej gałęzi nauki o przestrzeni.

Pierwszy *Steiner* podjął się metodycznego przedstawienia teoryi Geometryi sfery i odtąd nauka ta, której Geometrya płaska jest tylko przypadkiem szczególnym, weszła na drogę regularnego postępu.

Gudermann w 1830 roku ogłasza swą pracę pod tytułem : *Ueber die analytische Sphärik*, a nieco później *Borgnet* wydaje : *Essai de Géométrie analytique de la sphère*, w którem to dziele bierze za osie współrzędnych na sferze dwa łuki dwóch wielkich kół.

Graves w 1841 podaje teoryą analityczną Geometryi sferycznej. *Booth* ogłasza : *A Short Treatise on Spherical Conic Sections*, a *Cassani* w kilku artykułach pomieszczonych w *Giornale* Neapolitańskim daje traktat analityczny Geometryi sfery.

Vannson podał pod tytułem *podstawowych wzorów analizy sferycznej*, wiele ważnych kwestyi Geometryi Analitycznej w przedmiocie sfery, a szczególniej w przedmiocie teoryi konicznych sferycznych.

Samo tylko wyliczenie tych prac jest dowodem usiłowań podjętych w celu uogólnienia nauki o przestrzeni i skutecznego współudziału jaki Geometrya Analityczna w tym kierunku przyniosła.

Prace najnowsze licznego zastępu sławnych dzisiejszych Geometrów poświęcających się uprawie Analizy kartezyańskiej nie mogą wejść w zakres niniejszej pracy, bo dzieła ich są tematem dopiero do krytyki mającej wydać wyrok o ich zasłudze, a głos nasz w tej mierze może być tylko zaledwie echem utrwalonego sądu naukowych powag, a nie ocenieniem osobistem lub krytyką.

Casey, *O'Brien*, *Walton*, *Gregori*, *Painvin*, *Darboux*, *Larosse*, *Joachimstal*, *Feuerbach*, *Souillart*, *Maurice Levy*, *Briot*, *Salmon* i wiele innych imion znanych należy do tego pocztu, o którego zasługach wyrabia się obecnie zdanie naukowe, a któremu zda się przewodniczyć angielski matematyk pan G. Salmon.

Dzieła jego powszechnie dziś znane i na wszystkie niemal języki europejskie przełożone odznaczają sie magistralną metodą wykładu, użyciem odpowiedniem najnowszych zdobyczy Analizy w zespoleniu z teoryami Geometryi nowoczesnej. Klasyczne utwory tego matematyka w przedmiocie Geometryi Analitycznej obejmują w sobie zastosowania *teoryi wyznaczników* (1), przedstawienie analityczne i geometryczne *zasady dwoistości*, metodę *biegunowych wzajemnych*, własności *harmoniczne* przecięć konicznych, *metodę rzutów* i teoryą *niezmienników* i *współzmienników*.

(1) Pan Wł. Trzaska w pierwszym tomie dzieła *Rachunku Różniczkowego* pana Folkierskiego pomieścił w polskim języku cenny traktat w przedmiocie teoryi wyznaczników.

Mimo udoskonalenia Analizy kartezyańskiej wzbogaconej, jak to staraliśmy się okazać, nowymi układami współrzędnych, mimo wreszcie bogactwa właściwej Analizy, którą od czasu Monge'a Geometrya Analityczna z pożytkiem się posiłkuje, — Geometrya nowoczesna, nie właściwie zwana syntezą, zdołała ją wyprzedzić na drodze odkryć i udoskonalenia dzięki usiłowaniom gienialnych nowoczesnych Geometrów.

Oparta na pracach Carnot'a, Poncelet'a, Steiner'a, Cremon'a i Chasles'a, Geometrya nowoczesna, intuitywną niekiedy zwana, rozwinęła ważne swe teorye, dla traktowania których, Geometrya Analityczna w wielu razach zda się już nie wystarczać. Jakkolwiek słusznie nazwana « *powszechnem narzędziem matematycznych nauk,* » Analiza kartezyańska zmuszoną dziś jest wobec wielu nowych teoryi nauki o przestrzeni wyznać swą niedostateczność, a często używać wszystkich zasobów, którymi nowoczesne prace ją wzbogaciły, aby módz tłumaczyć w symbolicznym języku Algebry zdobycze naukowe Geometryi czystej.

Świetne postępy nowoczesnej Geometryi zdają się podniecać usiłowania matematyków Analizę kartezyańską uprawiających, których prace dzisisiejsze wróżą pomyślnie o pożądanej przyszłości jej rozwoju. Dwie te gałęzie nauki o przestrzeni stanowią całość narzędzia, którem umysł ludzki na drodze badań matematycznych się posługuje; żadna też z nich nie powinna być zaniechaną w swej uprawie, a jednoczesny ich postęp i udoskonalenie pozwolą coraz pewniejsze stawiać kroki na drodze dociekania prawdy, której nauki matematyczne zdają się być najwyraźniejszym symbolem.

Paryż 5go Maja 1877 r.

ZASADY

GEOMETRYI ANALITYCZNEJ

Przedmiotem GEOMETRYI ANALITYCZNÉJ jest badanie miary i własności dotyczących rozciągłości przedstawionéj za pomocą sposobów Algebry.

Zastosowanie to Algebry do Geometryi nie jest niczém inném jak tylko METODĄ ANALITYCZNĄ przyjętą przez starożytnych Geometrów i Filozofów, którzy ją już od dawna uważali tak, jak ją rzeczywiście w dzisiejszym stanie nauki uważać wypada. W saméj rzeczy : przedstawienie jakiegokolwiek zagadnienia za pomocą równania i zmiana tego ostatniego na inne, które rozwiązać umiemy, jest tylko kolejném przejściem od zagadnienia danego do innego mniéj zawiłego, od tego ostatniego tak uproszczonego do jeszcze innego odeń łatwiejszego; i tak daléj, aż do dojścia do układu równań, lub do zagadnienia, które z łatwością rozwiązać się daje. W Geometryi czystéj, bardzo często używamy sposobów przyjętych w Analizie; lecz zmiany dotyczące saméj wyłącznie Algebry są, że tak powiemy, rzeczywistém narzędziem analityczném, usprawiedliwiającém nazwisko dane nauce, któréj zasady w niniejszém dziele wyłożyć zamierzamy.

GEOMETRYA PŁASKA

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

ROZDZIAŁ PIÉRWSZY

O SPÓŁRZĘDNYCH.

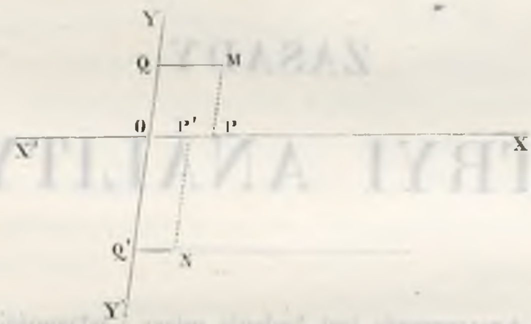
§ I. — UKŁAD SPÓŁRZĘDNYCH.

1. Aby zastosować rachunek do badania własności jakiejkolwiek figury, potrzeba umieć wyznaczyć położenie jakiegokolwiek punktu na płaszczyznie téj figury; linie służące do wyznaczenia tego położenia stanowią co się zowie jakikolwiek UKŁAD SPÓŁRZĘDNYCH.

Jest nieskończona ilość układów spółrzędnych; określimy tylko najprostsze i najczęściej używane.

I° Spółrzędne prostolinijne kartezyańskie jakiegokolwiek punktu.

2. Weźmy na płaszczyznie dwie proste stałe Ox i Oy; jeżeli się daje jakikolwiek punkt M, i gdy przez ten punkt poprowadzi się równoległą MQ do Ox, potém równoległą MP do Oy, odległości MP



i MQ są spółrzędnemi punktu M; linia MQ lub OP zowie się *odcięta* punktu M; a linia MP lub OQ jest jego *rzędną*; te dwie linie nazywają się także x i y punktu M. Proste Ox i Oy są *osiami spółrzędnych*; a ich punkt przecięcia się O jest *początkiem spółrzędnych*. Widzimy, że mając jakikolwiek punkt dany, jego spółrzędne są całkowicie wyznaczone.

Lecz jeżeli się daje spółrzędne jakiegokolwiek bądź punktu, punkt nie będzie zupełnie wyznaczonym jak tylko wtedy, gdy się zna kąt osi spółrzędnych, w którym ten punkt się znajduje. Wprowadzi się tę nową daną w rachunek przyjmując umowy następujące:

« Będziemy uważali odcięte jako dodatne, gdy te będą liczone w pewnym kierunku, Ox na przykład;
» a jako odjemne, gdy te będą odniesione w kierunku przeciwnym. Podobnież, będziemy uważali
» rzędne jako dodatne, gdy te będą odniesione w pewnym kierunku, Oy na przykład; a jako odjemne,
» gdy te będą odniesione w kierunku przeciwnym. »

Według tego, punkt jakikolwiek będzie zupełnie wyznaczonym jeżeli da się jego spółrzędne w wielkościach poprzedzonych jakimkolwiek domyślnym lub wyraźnym, tychże wielkości znakiem. I tak, przypuśćmy że spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu są $x = 2$, $y = -6$; weźmiemy na Ox, $OP' = 2$; a na przedłużeniu Oy, $OQ' = 6$; potém, przez punkta P' i Q' poprowadzimy proste względnie równoległe do osi Oy i Ox; punkt przecięcia się tych równoległych wyznaczy bez dwuznaczności punkt N, którego spółrzędnemi są, 2 i -6.

Spółrzędne jakiegokolwiek punktu są nazwane *Spółrzędnemi pochyłemi* gdy kąt osi jest jakimkolwiek; a *Spółrzędnemi prostokątnemi* gdy kąt osi jest prosty.

II°. Spółrzędne jednorodne jakiegokolwiek punktu.

3. Zamiast wprowadzenia w rachunki długości MP i MQ, określających położenie punktu M, jest często lepszém w prowadzenie stosunków przdstawiających MP i MQ. I tak, w układzie poprzedzającym przedstawiliśmy MP przez x, a MQ przez y; w układzie obecnym załóżmy:

$$MP = \frac{x}{z}, \qquad MQ = \frac{y}{z};$$

ilości x, y, z, nazywają się *Spółrzędnemi jednorodnemi* punktu M.

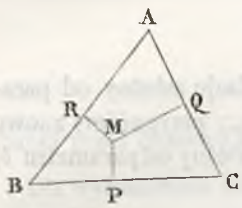
Gdy się daje liczby x, y, z, punkt odpowiedni jest całkowicie wyznaczonym; lecz gdy się daje jakikolwiek punkt, ilości x, y, z, pozostają dowolnemi, stosunki $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ są same zupełnie wyznaczone. Wrócimy poniżéj do tego przedmiotu.

Znajduje się układ Kartezyański (2) przypuszczając $z = 1$.

III°. Spółrzędne trzylinijne jakiegokolwiek punktu.

4. Jeżeli się zauważy trójkąt stały ABC, jakikolwiek punkt M na płaszczyznie będzie określony przez odległości jego od boków trójkąta względnie pomnożone przez liczby stałe dowolnie wzięte.

Niech będą na przykład: MP, MQ, MR, odległości odpowiednie punktu M od boków BC, CA, AB, trójkąta; załóżmy:



$$x = \alpha.\text{MP},$$

$$y = \beta.\text{MQ},$$

$$z = \gamma.\text{MR};$$

ilości x, y, z, są *Spółrzędnemi trzylinijnemi* punktu M.

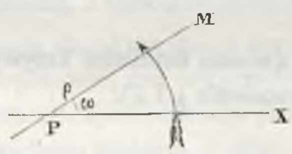
Trójkąt ABC do którego punkt się odnosi zowie się *trójkątem Odniesienia;* ilości α, β, γ, przez które się mnoży odległości punktu od boków trójkąta, nazywają się *parametrami Odniesienia;* bierze się je często równemi jedności.

Wrócimy poniżéj do tego ważnego układu spółrzędnych.

IV°. Spółrzędne biegunowe jakiegokolwiek punktu.

5. W tym układzie bierze się punkt stały P, nazwany *biegunem* i prostą stałą PX, nazwaną *osią biegunową;* jakikolwiek punkt M jest wtedy wyznaczony przez swą odległość MP albo ρ od bieguna, (odległość noszącą nazwisko promienia wodzącego), i przez kąt MPX lub ω, jaki tworzy promień wodzący z osią biegunową; ilości ρ i ω są *Spółrzędnemi biegunowemi* punktu M.

Można będzie zupełnie wyznaczyć tym sposobem wszystkie punkta na płaszczyznie, przypuszczając, że promień wodzący zwiększa się w sposób ciągły od 0 do $+\infty$, i że kąt ω zwiększa się również



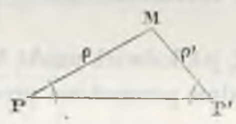
w sposób ciągły od 0 do 2π. Zobaczymy późniéj, że jest korzystnie przyjąć umowy następujące:

« Kąt ω będzie uważanym jako dodatny, gdy będzie się obracał w pewnym kierunku, i będzie mógł » się zwiększać w sposób ciągły od 0 do $+\infty$; ten kąt będzie odjemny, gdy się będzie obracał w kie- » runku przeciwnym, i będzie mógł się zmniejszać również w sposób ciągły od 0 do $-\infty$. Co się » tyczy promienia wodzącego, odniesiemy go na bok zamykający kąt ω gdy będzie dodatny; a na » przedłużenie tego boku, gdy będzie odjemny. »

V° Spółrzędne dwubiegunowe.

6. W tym układzie, jakikolwiek punkt M jest wyznaczony przez swe odległości MP i MP′ od dwóch punktów stałych P i P′, noszących nazwisko biegunów.

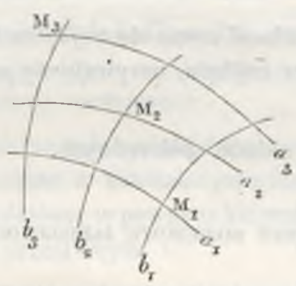
Lub też jeszcze, jakikolwiek punkt M będzie wyznaczony przez kąty $\widehat{MPP'}$ i $\widehat{MP'P}$ jakie tworzą



promienie wodzące MP i MP′ z linią biegunów PP′.

VI° Spółrzędne krzywolinijne jakiegokolwiek punktu.

7. Przypuśćmy naprzód że się daje piérwszy układ krzywych pewnego rodzaju zależny od parametru a, tak że dając na a pewne wartości otrzymuje się krzywe a_1, a_2, a_3, etc.; przypuśćmy znowu że się daje drugi układ krzywych, innego lub tego samego rodzaju co piérwszy, zależny od parametru b,



tak że dając na b pewne wartości, otrzymuje się krzywe b_1, b_2, b_3, etc..... Punkt M_1, przecięcia się krzywych a_1 i b_1, będzie miał za *spółrzędne* wartości szczególne a_1 i b_1 wyznaczające dwie krzywe pod uwagę wzięte : podobnież, punkt M_2 będzie miał za spółrzędne a_2 i b_2; ogólnie, *spółrzędne krzywolinijne* jakiegokolwiek punktu M będą wartościami parametrów a i b wyznaczającemi krzywe różnego rodzaju, przechodzące przez punkt pod uwagę wzięty.

I tak, w spółrzędnych biegunowych familiami krzywych są koła (parametrem jest promień ρ) i proste (parametrem jest kąt ω).

W spółrzędnych dwubiegunowych dwiema familiami krzywych są koła, których środkami stałymi są bieguny P i P′ (parametrami są promienie ρ i ρ').

§ II. — TEORYA RZUTÓW.

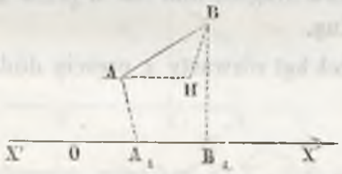
8. Mając dane jakąkolwiek prostą stałą OX i jakąkolwiek prostą AB, leżącą lub nie na téjże samej płaszczyznie z OX, wystawmy sobie że się prowadzi przez punkt A jakąkolwiek płaszczyznę prostopadłą do OX; niech będzie A_1 jéj przecięcie się z tą prostą; niech będzie również B_1 punkt przecięcia się linii OX z płaszczyzną poprowadzoną przez punkt B prostopadle do téj prostéj : odcinek A_1B_1 jest rzutem odcinka AB na prostéj OX nazwanéj *osią rzutu*.

I° Wyrażenie algebraiczne rzutu jakiejkolwiek prostéj.

9. Dla otrzymania wartości bezwzględnéj tego rzutu, poprowadźmy przez punkt A jakąkolwiek równoległą do OX aż do jéj spotkania się w H z płaszczyzną przechodzącą przez B; złączmy BH, z trójkąta prostokątnego ABH bezpośrednio wypływa:

$$A_1B_1 = AH = AB\,\mathrm{dos}(\widehat{AB, OX}).$$

Tak więc, wartość bezwzględna rzutu jakiéjkolwiek prostéj jest równą długości linii prostéj pomnożonéj przez dostawę kąta téj prostéj z osią rzutu.



Dla wyznaczenia znaku rzutu, uważmy że na jakiéjkolwiek prostéj rozróżnia się, początek i koniec: *Początkiem* jest punkt zkąd się wychodzi, *końcem* zaś, jest punkt dokąd się przybywa. Ztąd, dwa kierunki na jakiéjkolwiek prostéj, według tego jak się ją przypuszcza przebieżoną od ręki lewéj ku prawéj albo od ręki prawéj ku lewéj. Pierwszy z dwóch kierunków nazywa się *kierunkiem dodatnym* albo *dyrekcyą dodatną;* drugi zaś kierunek wprost pierwszemu przeciwny, jest nazwany *kierunkiem odjemnym* albo *dyrekcyą odjemną.*

Będziemy uważali na osi rzutu dwa kierunki, kierunek dodatny podług OX, na przykład; i kierunek odjemny podług OX'. To przypuściwszy, gdy AB jest prostą rzuconą i gdy A jest początkiem a B końcem, przyjęto uważać rzut jako dodatny lub odjemny według tego jak dla przyjścia od rzutu początku do rzutu końca postępuje się w kierunku dodatnym lub w kierunku odjemnym osi rzutu, t. j., gdy się idzie od ręki lewéj ku prawéj, albo od ręki prawéj ku lewéj.

10. Wyrażenie algebraiczne rzutu jakiéjkolwiek prostéj jest zawartém w tém podwójném podaniu.

1°. Gdy prosta rzucona jest równoległą do jakiéjkolwiek dyrekcyi na któréj kierunki dodatny i odjemny nie były wyznaczone przez umowy poprzednie, rzut jest równy co do wielkości i co do znaku wartości bezwzględnéj długości linii prostéj pomnożonéj przez dostawę kąta, jaki tworzy prosta, wzięta w kierunku w którym ona jest przebieżoną, z częścią dodatną osi rzutu.

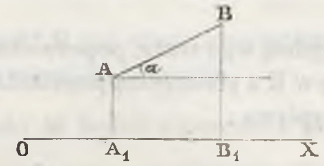
2°. Gdy prosta rzucona jest rownoległą do jakiéjkolwiek dyrekcyi na któréj kierunki dodatny i odjemny są wyznaczone przez umowy poprzednie, rzut jest przedstawiony co do wielkości i do znaku za pomocą iloczynu dostawy dyrekcyi dodatnych pomnożonego przez długość linii prostéj rzuconéj; liczba przedstawiająca tę długość jest poprzedzoną znakiem + albo — według tego jak linia rzucona jest przebieżoną w kierunku dodatnym albo w kierunku odjemnym.

Dla udowodnienia tego podania, będziemy uważali kolejno dwa przypadki przytoczone.

1szy Przypadek.

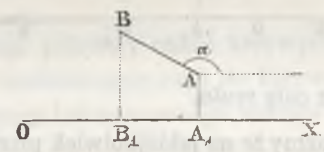
Niech będzie jakakolwiek prosta AB, któréj A jest początkiem a B końcem; mamy rozebrać dwa przypuszczenia następujące:

1°. Prosta AB tworzy jakikolwiek kąt ostry z częścią dodatną, OX, osi rzutu. Gdy przez punkta



A i B, poprowadzi się płaszczyzny prostopadłe do OX, widzimy że dla przyjścia od A_1 ku B_1 potrzeba oddalać się ku ręce prawéj: więc wartość A_1 B_1 jest policzoną w kierunku dodatnym osi, t. j. że rzut jest dodatny. Otóż kąt linii AB z częścią dodatną osi jest ostrym; a tém samém dostawa tego kąta jest dodatną. Więc, oznaczając przez a długość linii AB a przez α kąt AB z OX, wyrażenie $a \operatorname{dos} \alpha$ jest także jakąkolwiek ilością dodatną.

2°. Prosta AB tworzy jakikolwiek kąt rozwarty z częścią dodatną osi rzutu. Dla przyjścia od A_1



ku B_1, potrzeba oddalać się ku ręce lewéj; więc rzut A_1B_1 jest odjemny. Z drugiéj strony, iloczyn $a \operatorname{dos} \alpha$, w którym a jest liczbą dodatną a α jakimkolwiek kątem rozwartym, jest także odjemny.

Więc, w dwóch przypuszczeniach, rzut jest przedstawionym co do wielkości i co do znaku przez iloczyn

$$\overline{AB} \operatorname{dos}(\widehat{AB, OX});$$

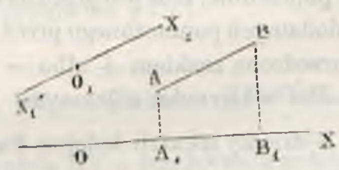
AB jest liczbą dodatną, A i B są odpowiednio początkiem i końcem linii rzuconéj, $\widehat{AB, OX}$ jest kątem utworzonym przez tę prostą, wziętą w kierunku w którym ona jest przebieżoną, z częścią dodatną osi rzutu.

2^{gi} Przypadek.

Dla uzasadnienia drugiéj części twierdzenia, mamy jeszcze zająć się rozbiorem dwóch przypuszczeń następujących:

1°. Kąt dyrekcyi dodatnych jest ostry. Niech będzie OX część dodatna osi rzutu, a O_1X_1 kierunek dodatny dyrekcyi do któréj linie proste rzucone są równoległemi.

Gdy prosta rzucona, AB, jest przebieżoną w kierunku dodatnym O_1X_1, wtenczas kąt linii

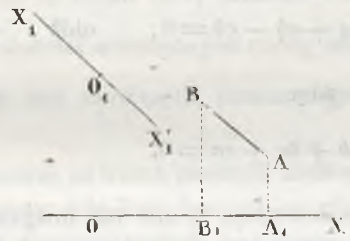


AB z OX jest ostry, rzut A_1B_1 będzie dodatny; otóż iloczyn $a \operatorname{dos}(\widehat{O_1X_1, OX})$ jest także dodatny, ponieważ kąt $(\widehat{O_1X_1, OX})$ jest ostry, a według naszéj umowy, a musi przdstawiać *więcej* długość prostéj AB.

Gdyby B było początkiem a A końcem, t. j., gdyby prosta rzucona była przebieżoną w kierunku odjemnym $O_1X'_1$, rzut BA byłby odjémnym ; otóż iloczyn $a\,\mathrm{dos}\widehat{(O_1X_1, OX)}$ byłby także odjemnym, gdyż kąt $\widehat{(O_1X_1, OX)}$ jest zawsze ostry, a według naszéj umowy, a musiałoby przedstawiać *mniéj* długość prostéj BA.

2° Kąt dyrekcyi dodatnych jest rozwarty.

Gdy prosta rzucona AB jest przebieżoną w kierunku dodatnym O_1X_1, rzut A_1B_1 jest odjemny;



iloczyn $a\,\mathrm{dos}\widehat{(O_1X_1, OX)}$ jest także odjemny, gdyż kąt $\widehat{(O_1X_1, OX)}$ jest rozwarty i a powinno przedstawiać *więcéj* długość prostéj AB.

Gdyby B było początkiem a A końcem, t. j. gdyby prosta była przebieżoną w kierunku odjemnym $O_1X'_1$, rzut B_1A_1 byłby dodatny: z drugiéj strony, iloczyn $a\,\mathrm{dos}\widehat{(O_1X_1, OX)}$ byłby także dodatny, ponieważ kąt $\widehat{(O_1X_1, OX)}$ jest rozwarty i że a musi wtenczas przedstawiać *mniéj* długość prostéj BA.

Więc, streszczając się, rzut prostéj AB jest wyrażonym co do wielkości i co do znaku przez iloczyn

$$a\,\mathrm{dos}\widehat{(O_1X_1, OX)};$$

kąt (O_1X_1, OX) jest kątem dyrekcyi dodatnych, a a przedstawia *więcéj* lub *mniéj* długość prostéj rzuconéj AB według tego jak się przypuszcza linią prostą AB przebieżoną w kierunku dodatnym O_1X_1 lub w kierunku przeciwnym.

II

II^{do} Związek między odcinkami wyznaczonemi przez n punktów w linii prostéj.

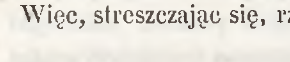
11. Uważmy naprzód trzy punkta a, b, c, leżące na jakiéjkolwiek linii prostéj; ma się związek

(1) $$ab + bc + ca = 0,$$

znakowanie ab, na przykład, oznacza jakikolwiek odcinek dodany lub odjęty, t. j. długość odcinka poprzedzonego znakiem + lub —, według tego jak ten odcinek jest przebieżony w pewnym kierunku lub w kierunku przeciwnym.

W saméj rzeczy, przypuśćmy odcinki dodane gdy się je przebiega od ręki lewéj ku prawéj, a odjęte w przypadku przeciwnym.

Gdy punkt c jest po prawéj stronie punktów a i b, ma się

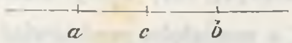


$$ab + bc - ac = 0; \quad \text{otóż} \quad + ac = -ca;$$

więc

$$ab + bc + ca = 0.$$

Gdy punkt c jest między punktami a i b, ma się

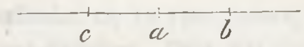


$$ac + cb - ab = 0; \quad \text{otóż} \quad ac = -ca, \quad cb = -bc;$$

więc

$$ab + bc + ca = 0.$$

Nakoniec, gdy punkt c jest po lewéj stronie punktu a, ma się



$$ca + ab - cb = 0; \quad \text{otóż} \quad cb = -bc;$$

więc

$$ab + bc + ca = 0.$$

12. Uogólnimy teraz to twierdzenie dowodząc że ono ma miejsce dla n punktów, jeżeli je przypuści się prawdziwém dla $(n-1)$ punktów.

Niech będą $a, b, c, \ldots, h, k$, $(n-1)$ punktów w linii prostéj; przypuśćmy twierdzenie prawdziwém dla $(n-1)$ punktów, otrzymamy równość

$$(2) \qquad ab + bc + cd + \ldots + hk + ka = 0.$$

Niech będzie l nowym t. j. n^{tym} punktem położonym na linii prostéj; jeżeli zauważymy trzy punkta a, k, l, otrzymamy, na mocy związku (1)

$$(3) \qquad ak + kl + la = 0.$$

Dodając równości (2) i (3) stronami przyjdzie

$$(4) \qquad ab + bc + cd + hk + kl + la = 0,$$

gdyż wyrazy ak i ka, równe i ze znakami przeciwnemi, oczywiście zniosą się.

Podanie jest więc prawdziwém dla n punktów, jeżeli je przypuści się prawdziwém dla $(n-1)$ punktów; jeżeli to podanie jest prawdziwém dla trzech punktów; więc etc...

III° Twierdzenie zasadnicze rzutów.

13. Niech będzie jakakolwiek linia łamana, płaska albo skośna, któréj wierzchołkami po sobie idącymi są A, B, C, D,... F, G; A jest jéj początkiem a G końcem. Linia AG, łącząca początek z końcem, zowie się *wypadkową* linii łamanéj; proste zaś AB, BC, CD,..., FG są jéj *składowemi*.

Rzućmy linią łamaną ABC... FG na jakąkolwiek oś dowolnie wziętą, i niech będą $A_1, B_1, C_1 \ldots F_1, G_1$, rzuty wierzchołków; otrzyma się, według twierdzenia poprzedzającego,

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots + F_1G_1 + G_1A_1 = 0,$$

byle tylko odcinki były uważane jako dodane lub odjęte według tego jak one są przebieżone w jednym kierunku lub w innym, t. j. byle się tylko miało wzgląd na umowę przyjętą co do znaków rzutów (9.)

Lecz

$$G_1A_1 = -A_1G_1;$$

równość poprzedzająca stanie się więc :

$$(5) \qquad A_1G_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots + F_1G_1.$$

Otóż A_1G_1 przedstawia co do wielkości i co do znaku rzut wypadkowéj; podobnież : A_1B_1, B_1C_1, etc. przedstawiają co do wielkości i co do znaku rzuty składowych. Ztąd mamy to twierdzenie ogólne :

Rzut wypadkowéj obwodu jakiegokolwiek wielokąta jest równy summie algebraicznéj rzutów składowych.

Uwaga. Gdy obwód wielokąta jest zamknięty, summa algebraiczna rzutów składowych na osi jakiéjkolwiek jest zerem.

I odwrotnie, jeżeli rzut wypadkowéj, na trzech prostych nierównoległych do téjże samej płaszczyzny, jest zerem, obwód będzie zamknięty. Gdy linia łamana jest płaską, będzie ona zamkniętą jeżeli rzut wypadkowéj, na dwóch prostych nierównoległych, jest równy zeru.

IV° Zastosowanie do wzorów trygonometryi prostolinijnéj.

14. Weźmy okręg koła, którego promień jest równy jedności; niech będą A początek osi, AB kierunek łuków dodatnych; a Ox, Oy, osie podług których są policzone linie trygonometryczne dodatne :

Niech będzie M koniec łuku którego A jest początkiem, przedstawimy przez a wartość algebraiczną tego łuku; uważmy teraz punkt M jako początek drugiego łuku którego N byłby końcem; kierunek łuków dodatnych pozostaje ten sam jak poprzednio; przedstawimy przez b wartość algebraiczną łuku mającego M za początek, a N za koniec. Jeżeli się złączy OM i ON, i gdy z punktu N spuści się prostopadłe NP i NH na średnice przechodzące przez początki odpowiedne A i M dwóch łuków a i b; otrzyma się bez względu na znak,

$$NP = \text{wst}(a+b), \qquad OP = \text{dos}(a+b).$$

Idzie o wyrachowanie wartości algebraicznych $\text{wst}(a+b)$ i $\text{dos}(a+b)$ w funkcyi linij trygonometrycznych łuków a i b.

Na dowód tego, uważmy że dwa obwody wielokątów, OHN i OPN, mają jednaki początek O

i tenże sam koniec N, t. j. mają tę samą wypadkową; rzuty więc tych dwóch obwodów na prostą jakąkolwiek są równe; zatém niezależnie od wyboru osi rzutów mamy:

(1) $$\text{rz.}\,\mathrm{OP} + \text{rz.}\,\mathrm{PN} = \text{rz.}\,\mathrm{OH} + \text{rz.}\,\mathrm{HN}.$$

Proste OP, PN, OH, HN, dla wyrażenia algebraicznego swych rzutów wzięte są równoległemi do dyrekcyi, na których kierunki są wyznaczone według umów przyjętych w trygonometryi; zastosujemy tu drugą część podania n[ru] (10).

Rzućmy naprzód na oś Ox.

Rzut OP jest równy dostawie kąta dyrekcyi dodatnych, t. j. 1; ponieważ kąt dyrekcyi dodatnych jest zerem, pomnożonéj przez liczbę wyrażającą długość OP; ta liczba powinna być poprzedzoną znakiem $+$ lub $-$ według tego jak linia OP jest przebieżoną w kierunku Ox albo w kierunku przeciwnym: otóż $\operatorname{dos}(a+b)$ przedstawia dokładnie tę wartość algebraiczną, ponieważ ta dostawa jest dodatną lub odjemną według tego jak koniec P jest po prawéj lub po lewéj stronie punktu O; więc:

$$\text{rz.}\,\mathrm{OP} = 1.\operatorname{dos}(a+b).$$

Rzut PN jest zerem, ponieważ ta prosta jest prostopadłą do osi rzutu.

Rzut OH jest równy dostawie kąta dyrekcyi dodatnych, t. j. dostawie kąta promienia OM z Ox albo $\operatorname{dos.}\text{łuk}\,\mathrm{AM} = \operatorname{dos} a$, pomnożonéj przez liczbę wyrażającą długość OH, ta liczba powinna być poprzedzoną znakiem $+$ lub $-$ według tego jak linia OH jest przebieżoną w kierunku OM lub w kierunku przeciwnym: otóż $\operatorname{dos.}\text{łuk}\,\mathrm{MN}$ albo $\operatorname{dos} b$ przedstawia dokładnie tę wartość algebraiczną, ponieważ ta dostawa jest dodatną lub odjemną według tego jak koniec H jest między O i M lub na przedłużeniu promienia MO, t. j. po prawéj stronie punktu O; więc:

$$\text{rz.}\,\mathrm{OH} = \operatorname{dos} a.\operatorname{dos} b.$$

Rzut HN jest równy dostawie kąta dyrekcyi dodatnych, t.j., dostawie kąta promienia OK z OX, albo $\operatorname{dos}\left(\text{łuk}\,\mathrm{AM} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{dos}\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$, pomnożonéj przez liczbę wyrażającą długość HN, ta liczba powinna być poprzedzoną znakiem $+$ lub $-$ według tego jak linia HN jest przebieżoną w kierunku OK lub w kierunku przeciwnym; otóż wstawa łuku MN albo wst b przedstawia dokładnie tę wartość algebraiczną, poniważ ta wstawa jest dodatną lub odjemną według tego jak linia HN jest z téj saméj strony jak promień OK albo z innéj strony; więc

$$\text{rz.}\,\mathrm{HN} = \operatorname{dos}\left(\frac{\pi}{2} + a\right).\operatorname{wst} b.$$

Zastępując, w równości (1), te rzuty przez ich wartości, ma się wzór następujący:

(2°) $$\operatorname{dos}(a+b) = \operatorname{dos} a \operatorname{dos} b - \operatorname{wst} a \operatorname{wst} b;$$

który znajduje się tym tposobem uzasadniony w całéj swéj ogólności.

Jeżeli rzucimy teraz na oś Oy, znajdzie się, rozumując jak powyżéj:

$$\text{rz.}\,\mathrm{OP} = 0, \qquad \text{rz.}\,\mathrm{PN} = 1.\operatorname{wst}(a+b),$$

$$\text{rz.}\,\mathrm{OH} = \operatorname{dos}\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{dos} b;\ \text{rz.}\,\mathrm{HN} = \operatorname{dos} a.\operatorname{wst} b.$$

Podstawiając te wartości w równości (1) otrzymuje się drugi związek ogólny:

(3°) $$\operatorname{wst}(a+b) = \operatorname{wst} a \operatorname{dos} b + \operatorname{wst} b \operatorname{dos} a.$$

ROZDZIAŁ II

O FUNKCYACH JEDNORODNYCH.

§ I. — WŁASNOŚCI FUNKCYI JEDNORODNYCH.

Określenie. Funkcya wielu zmiennych $x, y, z, \ldots$ nazywa się *jednorodną* jeżeli zastąpiwszy te zmienne przez ilości proporcyonalne $\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots$ nowa funkcya otrzymana jest tosamościowo równą dawnéj pomnożonéj przez pewną potęgę λ, t, j., że

$$(1) \qquad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots) = \lambda^m f(x, y, z, \ldots);$$

m jest *stopniem jednorodności.*

Wszelka funkcya samych stosunków zmiennych jest funkcyą jednorodną stopnia zero; gdyż ma się widocznie:

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \ldots\right) = f\left(\frac{\lambda x}{\lambda z}, \frac{\lambda y}{\lambda z}, \ldots\right) = \lambda^0 f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \ldots\right).$$

Odwrotnie, wszelka funkcya jednorodna może być sprowadzoną do funkcyi nie zawierającéj w sobie jak tylko stosunki zmienne; robiąc, w rzecy saméj, $\lambda = \frac{1}{x}$ w tosamości (1), znajduje się

$$f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right) = \frac{1}{x^m} f\left(x, y, z, \ldots\right);$$

albo

$$f\left(x, y, z, \ldots\right) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

I° Pochodne funkcyi jenorodnych.

16. Pochodne częściowe jakiéjkolwiek funkcyi jednorodnéj są jednorodne.

Weźmy, w rzeczy saméj, pochodne względem x dwóch strón tosamości (1); zakładając:

$$\lambda x = u, \ \lambda y = v, \ \lambda z = w, \ \text{etc}\ldots$$

Stosując twierdzenie funkcyi złożonych, przyjdzie:

$$\lambda f'_u(u, v, w, \ldots) = \lambda^m f'_x(x, y, z, \ldots);$$

albo

$$(2) \quad f'_u(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots) = \lambda^{m-1} f'_x(x, y, z, \ldots).$$

Otóż funkcya $f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z, ...)$ jest złożoną co do $\lambda x, \lambda y, \lambda z, ...$ jak funkcya $f'_x(x, y, z, ...)$ nią jest co do $x, y, z, ...$; tosamość (2) wyraża wtedy że zastępując w pochodnéj $f'_x, x, y, z, ...$ przez $\lambda x, \lambda y, \lambda z, ...$, nowa wartość funkcyi jest równą dawnéj pomnożonéj przez λ^{m-1}; więc pochodne częściowe są jednorodne i stopnia $(m-1)$.

II°. Twierdzenie funkcyi jednorodnych.

17. Jeżeli jakakolwiek funkcya jest jednorodną, summa iloczynów każdéj pochodnéj częściowéj przez zmienną odpowiedną jest równą funkcyi pomnożonéj przez stopień jednorodności.

Jeżeli zauważymy na przykład, funkcyę jednorodną $f(x, y, z)$, otrzyma się

$$(3)\quad xf'_x + yf'_y + zf'_z = mf(x, y, z).$$

To ważne podanie może się uzasadnić wielu sposobami.

1^sze Dowodzenie. Na mocy określenia funkcyi jednorodnych, ma się tożsamość;

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m f(x, y, z);$$

zastąpmy w téj tożsamości λ przez $(1+\omega)$, otrzymamy:

$$f(x+\omega x, y+\omega y, z+\omega z) = (1+\omega)^m f(x, y, z).$$

Jeżeli teraz rozwiniemy pierwszą stronę, podług wzoru *Taylora*, a drugą, podług wzoru dwumianu, tożsamość poprzedzająca będzie się mogła napisać:

$$f(x, y, z) + \omega\,[f'_x + yf'_y + zf'_z] + \frac{\omega^2}{1.2}[x^2f''_{xx} + y^2f''_{yy} + z^2f''_{zz} + 2yzf''_{yz} + 2xzf''_{xz} + 2xyf''_{xy}] + \text{etc...}$$

$$= f(x, y, z) + \frac{m\omega}{1} f(x, y, z) + \omega^2\frac{m(m-1)}{1.2} f(x, y, z) + \text{etc....}$$

A ponieważ ta ostatnia tożsamość ma miejsce dla jakiegokolwiek bądź ω, spółczynniki tychże samych potęg ω muszą być równe; zkąd, wypada naprzód:

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = mf(x, y, z).$$

C. B. D. D.

Możnaby było wywieść inne związki wypływające wreszcie z tego związku któryśmy już powyżéj uzasadnili.

Drugie dowodzenie. Weźmy zawsze jako punkt wyjścia tożsamość

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m f(x, y, z),$$

założmy: $\lambda x = u,\ \lambda y = v,\ \lambda z = w;$

tożsamość poprzedzająca napisze się:

$$f(u, v, w) = \lambda^m f(x, y, z).$$

Weźmy pochodną dwóch stron względem λ, stosując jeszsze twierdzenie funkcyi złożonych będzie:

$$xf'_u(u, v, w) + yf'_v(u, v, w) + zf'_w(u, v, w) = m\lambda^{m-1}f(x, y, z).$$

Lecz $f(u, v, w)$ jest złożoną co do u, v, w jak $f(x, y, z)$ jest nią co do x, y, z; a zatém, jeżeli się zrobi $\lambda = 1$, funkcye f'_u, f'_v, f'_w, staną stę odpowiednio $f'_x, f'_y f'_z$; i tosamość poprzedzająca zmieni się na tożsamość:

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = mf(x, y, z);$$

to daje tłómaczenie twierdzenia wysłowionego,

§ II. — WYKREŚLENIE WYRAŻEŃ JEDNORODNYCH.

18. Poczniemy od sprawdzenia rzeczywistości podania następującego:

Gdy ma się związek między liniami jakiéjkolwiek figury, z których żadna nie była wzięta za jedność, pierwsza strona tego związku jest koniecznie funkcya jednorodna.

To podanie jest następstwem bezpośredniém własności następującéj którą będziemy uważali za oczywistą:

« Jeżeli między liniami jakiejkolwiek figury istnieje związek, nie przestanie on istnieć jeśli jedność » długości zostanie zmienioną. »

Oczywistość téj własności wynika ztąd że rozumowania jakich się używa dla otrzymania związku są całkiem niezależnemi od jedności długości.

To przypuściwszy, jeżeli związek ma miejsce między liniami A,B,C,D,... jakiejkolwiek figury; ten związek będzie miał jeszcze miejsce ieżeli wybierzemy jedną z nich za jedność, A na przykład. Niech będą wtedy b_1, c_1, d_1, miarami linii A, B, C,..., otrzyma się związek kształtu:

$$(1)\quad f(b_1, c_1, d_1, ...) = 0.$$

Jeżeli teraz odniesiemy te linie do jedności jakiejkolwiek, i gdy $a, b, c, d, ...$ będą ich miarami odpowiedniemi, znajdzie się równości:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b_1},\quad \frac{a}{c} = \frac{1}{c_1}, \text{ etc...}$$

zkąd:

$$(2)\quad b_1 = \frac{b}{a}, c_1 = \frac{c}{a}, \text{ etc....}$$

gdyż stosunek dwóch wielkości jest równy stosunkowi ich miar, jakąkolwiek jest jedność wybrana.

Mając wzgląd na wartości (2), związek (1) stanie się:

$$(3)\quad f\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \cdots\right) = 0,$$

związek którego pierwsza strona jest oczywiście funkcyą jednorodną (15). Więc. .

Uwaga I. Widzimy przez to że jeżeli związek geometryczny nie jest jednorodnym, co się nie przedstawia jak tylko wtedy gdy się weźmie jedną z linii figury za jedność, przywróci się jednorodność zastępując litery b_1, c_1,... do związku wchodzące przez stosunki $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$,... a jest długością dowolnie wybraną.

Uwaga II. Kąt ma za miarę stosunek łuku odpowiedniego (o ile można dokładnie wyprostowanego) do promienia; funkcya trygonometryczna jest stosunkiem pewnéj linii do promienia. Kąty i funkcye trygonometryczne są więc liczbami, i, w zastosowaniu zasady jednorodności, będzie potrzeba niezważać na litery które je przedstawiają.

19. Idzie teraz o otrzymanie wykreślenia, wyrażenia algebraicznego danego, za pomocą liniału i cyrkla. Ograniczymy się oczywiście w téj nauce na samém wykréśleniu wyrażeń jednorodnych 1go stopnia, t. j., przedstawiających długości. Przez to, wyrażenie 2go stopnia będzie mogło się sprowadzić do iloczynu dwóch linii, i będziemy mogli wykreślić bok kwadratu równoważnego temu prostokątowi. Wyrażenie 3go stopnia będzie mogło się sprowadzić do iloczynu trzech linii: lecz wykreślenie zatrzyma się w tym punkcie; gdyż dowodzi się że nie można otrzymać boku sześcianu równoważnego objętości danéj za pomocą liniału i cyrkla.

Zrobimy przegląd różnych kształtów wyrażeń 1go stopnia które możemy wykreślić.

Przypuśćmy że się umie wykreślić 4te, 3cie i średnio proporcyonalne.

20. Zagadnienie I. Wykreślenie wyrażeń wymiernych.

Iszy Przypadek. *Jednomian* Igo stopnia.

Niech będzie $x = \frac{abcd}{mnp}$; to wyrażenie może się napisać:

$$x = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{cd}{p};$$

jeżeli teraz założymy kolejno:

$$\frac{cd}{p} = c_1, \quad \frac{bc_1}{n} = b_1, \quad \frac{ab_1}{m} = a_1,$$

będzie:

$$x = a_1;$$

otrzymamy przeto a_1 wykreślając kolejno za pomocą 4tych proporcyonalnych, linie c_1, b_1, a_1.

Uwaga I. Gdy jednomian przedstawi się pod kształtem prostym:

$$x = a\,\frac{m^2}{n^2},$$

wykreśli się go łatwiéj, opierając się na téj własności: «kwadraty z boków kąta prostego trójkąta » prostokątnego są w tym samym stosunku jak ich rzuty na przeciwprostokątnéj. »

Dla otrzymania tych rzutów dość jest naprzód wystawić trójkąt prostokątny w którym są wiadome: dwa boki kąta prostego i kąt prosty między niemi zawarty; po czém, prostopadła spuszczona z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną wyznaczy na téj linii dwa odcinki, które będą oczywiście rzutami szukanemi dwóch boków kąta prostego na przeciwprostokątnéj tym sposobem wykreślonéj.

Uwaga II. Jednomian jakikolwiek M stopnia m będzie mógł się sprowadzić do kształtu:

(1) $$M = K^{m-1}.\ I,$$

K jest linią dowolną a I linią określoną przez równość:

(2) $$I = \frac{M}{K^{m-1}};$$

która pozwoli wykreślić I.

I tak niech będzie $M = abcd$; jeżeli założymy:

$$M = K^3 I,$$

wykreślimy I za pomocą wyrażenia:

$$I = \frac{abcd}{K^3}.$$

Uwaga III. Wielomian jednorodny stopnia m będzie mógł się zawsze sprowadzić do kształtu:

$$K^{m-1} I,$$

K jest linią dowolnie wziętą.

Niech będzie, w rzeczy saméj,

$$P = A + B - C,$$

A, B, C, są wyrazami stopnia m; będziemy mogli, podług uwagi poprzedzającéj, założyć:

$$A = K^{m-1} a,\ \ B = K^{m-1} b,\ \ C = K^{m-1} c;$$

zkąd wypada

$$P = K^{m-1}(a + b - c) = K^{m-1} I.$$

2gi Przypadek. *Ułamki wymierne.*

Niech będzie $x = \frac{M}{N}$;

M i N są wielomianami jednorodnemi stopni odpowiednych m i $(m-1)$; będziemy mogli, na mocy uwagi (III), założyć:

$$M = k^{m-1} a,\ \ N = k^{m-2} b;$$

zkąd wypada:

$$x = \frac{k^{m-1} a}{k^{m-2} b} = \frac{ka}{b};$$

wyrażenie które wykreślić umiemy.

21. Zagadnienie II. Wykreślenie niewymiernych 1go stopnia.

Same niewymierne jakie możemy wykreślić są te których wskazówka pierwiastku jest potęgą liczby 2.

I szy Przypadek. *Pierwiastki kwadratowe.*

Niech będzie $$x^2 = \frac{M}{N} \text{ albo } x = \sqrt{\frac{M}{N}},$$

M i N są wielomianami stopni odpowiednich m i $(m-2)$.

Możemy założyć, podług uwagi III nru (20)

$$M = k^{m-1} a, \; N = k^{m-3} b;$$

zkąd wypada:

$$x^2 = \frac{k^{m-1} a}{k^{m-3} b} = \frac{k^2 a}{b};$$

Otóż, będzie można wykreślić łatwo x, gdyż zostaje się przywiedzionym do rozwiązania tego zagadnienia Geometryi elementarnéj:

« Znaleść kwadrat któryby się miał do kwadratu danego w stosunku dwóch linii prostych danych. »

2gi Przypadek. *Pierwiastki wskazówki* 2^n.

Niech będzie $$x^{2^n} = M,$$

M jest wielomianem lub ułamkiem wymiernym jednorodnym stopnia 2^n.

Możemy jeszcze założyć, a i k są jak powyżéj liniami,

$$M = k^{2^n - 1} a;$$

a têm samém:

$$x^{2^n} = k^{2^n - 2}\, ak = k^{2^n - 2} b^2 \text{ zakładajc } b^2 = ak.$$

Wyciągając pierwiastek kwadratowy otrzymamy:

$$x^{2^{n-1}} = k^{2^{n-1} - 1}\, b = k^{2^{n-1} - 2}\, bk = k^{2^{n-1} - 2}\, c^2, \text{ zakładając } c^2 = bk.$$

Wyciągając na nowo pierwiastek kwadratowy, ma się:

$$x^{2^{n-2}} = k^{2^{n-2} - 1}\, c = k^{2^{n-2} - 2}\, ck = k^{2^{n-2} - 2} d^2, \text{ zakładając, } d^2 = ck.$$

Kontynując tym sposobem raz po raz, przyjdzie się do równości ostatecznéj:

$$x^2 = k.\, l;$$

wyrażenie które wykreślić umiemy.

3ci Przypadek. *Pierwiastek, wskazówki* 2^n, *z liczby* N.

Niech będzie $$x^{2^n}=\mathrm{N},$$

N jest liczbą, weźmy za jedność linią jakąkolwiek K, będziemy mogli wtedy napisać

$$\frac{x}{k}=\sqrt[2^n]{\mathrm{N}},\ \text{albo}\ \ x=\sqrt[2^n]{k^{2^n}.\mathrm{N}}:$$

potém założywszy:

$$k\mathrm{N}=a,$$

przyjdzie:

$$x^{2^n}=k^{2^n-1}a;$$

tym więc sposobem jesteśmy przywiedzeni do przypadku poprzedzającego.

22. Zagadnienie III. Wykreślenie Funkcyi trygonometrycznych.

Niech będzie $$x=a\mathrm{F},$$

a jest linią, a F funkcyą wymierną lub pierwiastkiem, skazówki 2^n, linii trygonometrycznych.

Nakreślmy koło promienia R i koło spółśrodkowe promienia jeden; linie trygonometryczne łuku α, wstα, stα, na przykład, będą mogły być zastąpionemi przez stosunki:

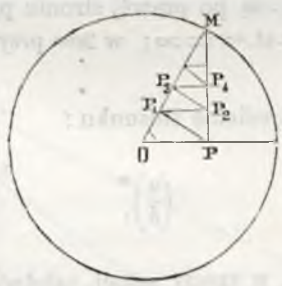
$$\mathrm{wst}\,\alpha=\frac{p}{\mathrm{R}},\ \mathrm{st}\,\alpha=\frac{q}{\mathrm{R}},$$

p, q, R są liniami; będzie się więc w ten sposób przywiedzionym do kształtów już starannie wykonanych.

23. To roztrząsanie pokazuje nam możliwość wykreślenia wyrażeń ogólnych starannie rozebranych w zagadnieniach poprzedzających. Lecz potrzeba nieraz umieć korzystać z kształtów szczególnych jakie mogą przedstawiać wyrażenia dane, ażeby tylko można było jakimkolwiek bądź sposobem uprościć wykreślenie. Damy, w tym rodzaju, kilka przykładów następujących:

Zagadnienie IV. *Wykreślić* wst$^m x$.

Zakreślmy koło którego promieniem jest jedność, weźmy łuk równy na x, i wykreślmy jego wstawę,



niech będzie MP = wst$x$. Z punktu P spuśćmy prostopadłą PP_1 na OM, otrzyma się:

$$\mathrm{MP}_1=\mathrm{MP}\,\mathrm{dos}\,\mathrm{OMP}=\mathrm{wst}\,x\ \mathrm{wst}\,x=\mathrm{wst}^2x.$$

3

Z punktu P_1 spuśćmy P_1P_2 prostopadłą na MP, przyjdzie:

$$MP_2 = MP_1 \operatorname{dos} OMP = \operatorname{wst}^2 x \operatorname{wst} x = \operatorname{wst}^3 x.$$

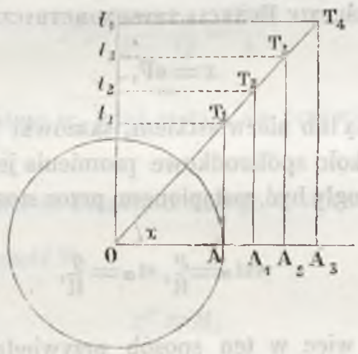
Kontynując tym sposobem, wykreśli się potęgę jakąkolwiek wst$x$.

Widoczna że linie MP, MP_1, MP_2, MP_3,..... maleją nieograniczenie kiedy m wzrasta, t. j., że gr.$\operatorname{wst}^m x = 0$.

24. ZAGADNIENIE V. *Wykreślić* $\operatorname{st}^m x$.

Łuk x przypuściwszy wykreślonym, otrzyma się $AT_1 = \operatorname{st} x$; weźmy na OA, $OA_1 = AT_1$; dla wygodnego wykreślenia poprowadźmy T_1t_1 równoległą do AO, i odbijmy punkt t_1 na OA.

Przez punkt A_1 poprowadźmy A_1T_2 prostopadłą do OA, i przedłużmy aż do jej spotkania się



OzT_1, otrzyma się

$$A_1T_2 = OA_1 \operatorname{st} x = \operatorname{st}^2 x.$$

Przez punkt T_2 poprowadźmy T_2t_2 równoległą do OA; i odbijmy t_2 na OA w A_2, potém prowadźmy A_2T_3 prostopadłą do OA, otrzyma się

$$A_2T_3 = OA_2 \operatorname{st} x = \operatorname{st}^3 x;$$

i tak daléj:

Jeżeli łuk $x > 45^0$, punkta $A_1, A_2,$... są po prawéj stronie punktu A; rzecz przeciwna ma mejsce jeżeli $x < 45^0$; w 1szym przypadku gr.$\operatorname{st}.^m x = \infty$; w 2gim przypadku, gr.$\operatorname{st}^m x = 0$, kiedy m wzrasta nieograniczenie.

UWAGA. Można wyciągnąć ztąd wykreślenie stosunku:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m,$$

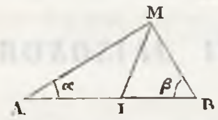
a i b są liniami danemi, dosyć na to, w rzeczy samęj, założyć

$$\operatorname{st} x = \frac{a}{b};$$

łuk x będzie mógł się wykreślić za pomocą dwóch linii danych, i będziemy sprowadzeni do zagadnienia poprzedzającego.

25. Zagadnienie VI. *Podzielić linią prostą* AB *w stosunku* równym $\frac{\text{wst}\alpha}{\text{wst}\beta}$.

W tym celu, poprowadźmy przez A i B proste AM i BM tworzące z AB kąty α i β; nakreślmy



dwójsieczną MI kąta AMB, otrzymamy:

$$\frac{AI}{BI} = \frac{MA}{MB} = \frac{\text{ws}\beta}{\text{wst}\alpha};$$

punkt I rozwiązuje pytanie.

26. Zagadnienie VII. *Wykreślić* $\sqrt[2^n]{a^{2^n} \pm b^{2^n}}$.

Weźmy przypadek szczególny: $\sqrt[8]{a^8 + b^8}$. Załóżmy kolejno:

$$a^2 = \lambda b,\ \lambda^2 = \mu b,\ \mu^2 + b^2 = \rho^2;$$

wyrażenie $(a^8 + b^8)$ stanie się:

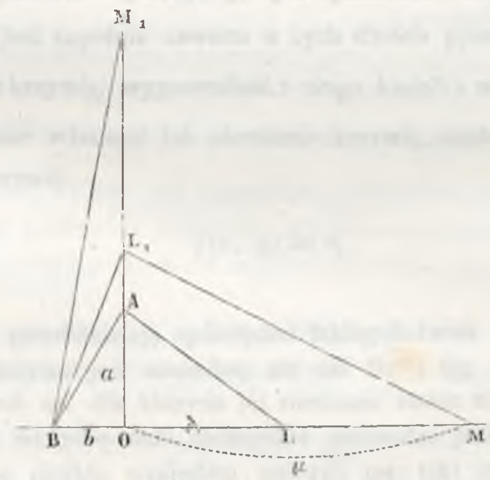
$$b^4(\lambda^4 + b^4); \qquad \text{potém } b^6(\mu^2 + b^2); \qquad \text{i nakoiec } b^6\rho^2.$$

otrzyma się więc:

$$\sqrt{a^8 + b^8} = b^3\rho = b^2c^2; \qquad \text{zakładając } b\rho = c^2;$$

potém: $\sqrt[4]{a^8 + b^8} = bc = d^2;$ założywszy $bc = d^2;$
zkąd

$$\sqrt[8]{a^8 + b^8} = d.$$



Dla wykreślenia linii kolejno wprowadzonych, weźmy na kącie prostym OA $= a$, OB $= b$; złączmy

AB, i niech będzie AL prostopadła do AB, otrzymamy $OL = \lambda$. Odbijmy OL na OA w L_1, złączmy L_1B, i niech będzie L_1M prostopadła do L_1B, otrzymamy $OM = \mu$. Odbijmy OM na OA w M_1, otrzymamy $BM = \rho$.

Wykreślenie linii c i d wykona się bez trudności.

ROZDZIAŁ III.

ZMIANA SPÓŁRZĘDNYCH.

---

§ I. — WZORY ZMIANY.

27. Zajmiemy się tu tylko spółrzędnemi Kartezyańskiemi.

Dajmy naprzód wyobrażenie o tém co się rozumie przez równanie krzywéj. Przypuśćmy, że biorąc x i y za spółrzędne punktu jakiegokolwiek płaszczyzny, znalazło się między temi ilościami związek.

(1) $$f(x, y) = 0.$$

Wartości odpowiednéj danéj na x odpowiada w ogólności wartość rzeczywista na y; w reszcie można zawsze przypuścić, że, dla ilości x zmieniającéj się między pewnemi granicami w sposób ciągły, otrzyma się szereg ciągły wartości dla y; jeżeli więc wykreśli się punkta odpowiedne tym rozwiązaniom, otrzyma się na płaszczyznie szereg ciągły punktów, których ogół nosi nazwisko krzywéj; równanie (1) nazywa się *równaniem krzywéj*.

Odwrotnie, mając dane określenie geometryczne krzywéj, można zawsze znaleźć związek między *spółrzędnemi punktu jakiegokolwiek* téj krzywéj; tym sposobem otrzyma się równanie krzywéj.

Geometrya Analityczna jest zupełnie zawarta w tych dwóch pytaniach zasadniczych.

1° Mając dane równanie krzywéj, wyprowadzić z niego kształt i własności téj krzywéj.

2° Odwrotnie, mając dane własność lub określenie krzywéj, znaleść jéj równanie.

Mając dane równanie krzywéj:

$$f(x, y) = 0,$$

równanie w którém x i y przedstawiają spółrzędne jakiegokolwiek punktu względem dwóch osi Ox i Oy, mówi się, że krzywa jest *odniesioną* do osi Ox i Oy. Otóż będzie często korzystnie odnieść tę krzywą do innych osi dla których jéj równanie stanie się prostszém; to pytanie będzie mogło się rozwiązać, byle się tylko znało spółrzędne pierwotne jakiegokolwiek punktu w funkcyi spółrzędnych tegoż samego punktu względem nowych osi: taki jest przedmiot wzorów zmiany spółrzędnych.

I° Zmiana początku.

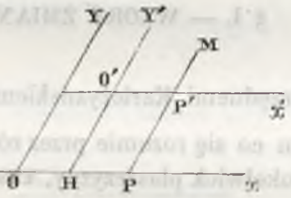
28. Przypuści się nowe osie $O'x'$, $O'y'$, równoległe do dawnych Ox, Oy; mówi się wtedy że osie zostały przeniesione równoległe do pierwotnego ich położenia.

Niech będzie M punkt płaszczyzny, x i y jego spółrzędne względem osi Ox i Oy; jeżeli x' i y' są spółrzędnemi tegoż samego punktu względem nowych osi; i gdy a i b są spółrzędnemi nowego początku, otrzyma się:

$$OP = OH + O'P'$$
$$MP = O'H + MP',$$

zkąd

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases}$$



Rozbierając wszystkie położenia punktu względem osi i różne położenia względne tychże samych osi, przyjdzie się do sprawdzenia że wzory (1) są ogólne, byle się tylko miało wzgląd na umowy przyjęte co do znaków spółrzędnych.

II° Zmiana ogólna.

29. Przypuśćmy że jakikolwiek punkt został wyznaczonym względem dwóch osi Ox i Oy których kątem jest θ; niech będzie M ten punkt, a x i y jego spółrzędne względem tych dwóch osi; zadanie polega na tém aby znaleźć spółrzędne tego punktu względem dwóch nowych osi Ox', $O'y'$, które określimy sposobem następującym:

Położenie nowego początku O' będzie wyznaczoném przez swe spółrzędne w dawnym układzie, które przedstawimy co do wielkości i co do znaku przez a i b, a jest odciętą, b rzędną; damy sobie nadto kąt nowéj *osi dodatnéj* $O'x'$ z dawną *osią dodatną* Ox, niech będzie $\alpha = (\widehat{O'x', Ox})$; i kąt nowéj *osi dodatnéj* rzędnych, $O'y'$, *z dawną osią dodatną* odciętych, Ox, niech będzie $\epsilon = (\widehat{O'y', Ox})$.

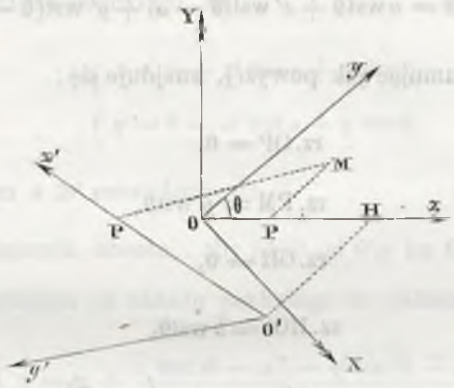
Poprowadźmy spółrzędne nowego początku O', OH i HO'; nakreślmy także spółrzędne punktu M w dawnym i nowym układzie osi; tak że nie zważając na znaki, otrzyma się:

$$\begin{cases} OH = a, \\ HO' = b; \end{cases} \quad \begin{cases} OP = x, \\ MP = y; \end{cases} \quad \begin{cases} O'P' = x', \\ MP' = y'. \end{cases}$$

Idzie o znalezienie dwóch związków między ilościami x, y, x', y' i danemi a, b, α, ϵ, θ. Otóż mamy dwa obwody wielokątów

$$OPM, \quad OHO'P'M$$

mających tęż samą wypadkową OM; jeden z tych obwodów składa się z dawnych spółrzędnych,



drugi z nowych; rzucając je na oś jakąkolwiek, otrzymamy:

$$(1) \qquad \text{rz.}\, OP + \text{rz.}\, PM = \text{rz.}\, OH + \text{rz.}\, HO' + \text{rz.}\, O'P' + \text{rz.}\, P'M.$$

Chcemy wyznaczyć x i y, składowe 1go obwodu; dla otrzymania ich, zrobimy pewnego rodzaju rugowanie geometryczne, wybierając z kolei za osie rzutu proste względnie prostopadłe do Ox i Oy,

Poprowadźmy OX prostopadłą do Oy i z téjże saméj strony jak Ox, potém OY prostopadłą do Ox i z téjże saméj strony jak Oy; ma się równość

$$\widehat{xOX} = \widehat{yOY} = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

przypuszczając kąt θ ostry.

Rzućmy naprzód na OX.

Rzut $O'P'$ jest równy dostawie kąta dyrekcyi dodatnych, t. j., dos$(\widehat{O'x', OX})$ albo dos$(\widehat{O'x', Ox} + \widehat{Ox, OX})$ lub nakoniec dos$\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta\right)$ pomnożonéj przez liczbę mierzącą $O'P'$, ta liczba jest poprzedzoną znakiem $+$ lub $-$, według tego jak długość $O'P'$ jest przebieżoną w kierunku $O'x'$ lub w kierunku przeciwnym; otóż x' przedstawia tę wartość algebraiczną, ponieważ odcięta x' będzie dodatną lub odjemną, według tego jak *koniec* P' będzie na $O'x'$ lub na przedłużeniu osi $O'x'$, t. j., według jego jak długość $O'P'$ będzie przebieżoną w kierunku dodatnym lub odjemnym; więc

$$\text{rz.}\, O'P' = x' \operatorname{dos}\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Toż samo rozumowanie nam daje:

$$\text{rz.}\, P'M = y' \operatorname{dos}\left(6 + \frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Znajduje się bez trudności: $\text{rz.}\, OP = x \operatorname{wst}\theta$; $\text{rz.}\, MP = 0$;

$$\text{rz.}\, OH = a \operatorname{wst}\theta; \quad \text{rz.}\, HO' = 0.$$

Podstawiając wartości któreśmy otrzymali w równości (1), będzie:

$$(2) \qquad x \operatorname{wst}\theta = a \operatorname{wst}\theta + x' \operatorname{wst}(\theta - \alpha) + y' \operatorname{wst}(\theta - \beta).$$

Rzućmy teraz na oś OY, rozumując jak powyżéj, znajduje się:

$$\text{rz.}\,OP = 0,$$

$$\text{rz.}\,PM = y \operatorname{wst}\theta,$$

$$\text{rz.}\,OH = 0,$$

$$\text{rz.}\,HO' = b \operatorname{wst}\theta,$$

$$\text{rz.}\,O'P' = x' \operatorname{dos}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{rz.}\,P'M = y' \operatorname{dos}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Podstawiając te wartości w równości (1), przyjdzie:

$$(3) \qquad y \operatorname{wst}\theta = b \operatorname{wst}\theta + x' \operatorname{wst}\alpha + y' \operatorname{wst}\beta.$$

Aby dowodzenie było zupełnie ogólném, potrzeba byłoby jeszcze rozebrać przypadek w którym kąt θ dawnych osi jest rozwarty. Roztrząsanie to wykonawszy, znajduje się że *wzorami ogólnemi zmiany spółrzędnych* są:

$$(\text{II}) \qquad \begin{cases} x = a + \dfrac{x' \operatorname{wst}(\theta - \alpha) + y' \operatorname{wst}(\theta - \beta)}{\operatorname{wst}\theta}, \\[2ex] y = b + \dfrac{x' \operatorname{wst}\alpha + y' \operatorname{wst}\beta}{\operatorname{wst}\theta}. \end{cases}$$

A więc gdy $f(x, y) = 0$ jest równaniem krzywéj *odniesionéj* do osi Ox i Oy, otrzyma się równanie téjże samej krzywéj *odniesionéj* do nowych osi $O'x'$ i $O'y'$ (określonych względem dawnych), zastępując w daném równaniu x i y przez ich wartości (II).

III° Przypadki szczególne.

30. 1° Nowe osie są *równoległe* do dawnych i skierowane w tymże samym kierunku.

Potrzeba wtedy zrobić we wzorach ogólnych (II)

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \theta;$$

otrzymamy tak więc wzory (I)

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y', \end{cases}$$

które, tym sposobem, znajdują się uzasadnione w całéj swéj ogólności.

2° 1szy układ jest *prostokątnym* a 2gi pochyłym. Wtedy $\theta = \frac{\pi}{2}$, a wzorami zmiany dla przejścia z układu prostokątnego do układu pochyłego, są

$$\begin{cases} x = a + x' \operatorname{dos}\alpha + y' \operatorname{dos}\beta, \\ y = b + x' \operatorname{wst}\alpha + y \operatorname{wst}\beta. \end{cases}$$

3° 1szy układ jest pochyłym a 2gi prostokątnym:

Wtedy $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, gdy kierunek obrotu, aby pójść od $O'x'$ ku $O'y'$ jest kierunkiem kątów dodatnych, wzorami zaś, dla przejścia od układu pochyłego do układu prostokątnego są:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} x = a + \dfrac{x' \operatorname{wst}(\theta - \alpha) - y' \operatorname{dos}(\theta - \alpha)}{\operatorname{wst}\theta}, \\ y = b + \dfrac{x' \operatorname{wst}\alpha + y' \operatorname{dos}\alpha}{\operatorname{wst}\theta}. \end{cases}$$

4°. Dwa układy są prostokątne:

Wtedy $\theta = \frac{\pi}{2}$, i $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$;

wzorami zaś, dla przejścia od układo prostokątnego do innego układu prostokątnego są:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} x = a + x' \operatorname{dos}\alpha - y' \operatorname{wst}\alpha, \\ y = b + x' \operatorname{wst}\alpha + y' \operatorname{dos}\alpha. \end{cases}$$

Kiedy dwa układy będą miały tenże sam początek, dosyć wprowadzić do wzorów poprzedzających założenia

$$a = 0, \qquad b = 0.$$

IV° Odległość dwóch punktów.

31. Mając dane spółrzędne (x, y) i (x', y') dwóch punktów M i M', znaleźć odległość tych dwóch punktów.

1sza Metoda. Przypuśćmy dwa punkta odniesione do dwóch osi jakichkolwiek Ox i Oy których kątem jest θ; poprowadźmy spółrzędne tych punktów i złączmy MM'; otrzymamy tym sposobem dwa obwody wielokątów

OP'M' i OPMM',

mających tęż samą wypadkową OM'; O, początek; M' koniec.

Jeżeli oznaczymy przez α i β kąty prostéj MM' z osiami Ox i Oy, i gdy rzucimy kolejno te dwa obwody na trzy osie Ox, Oy, MM′, biorąc za kierunek dodatny rzutów na MM′ kierunek w którym element MM′ przypuszcza się być przebieżonym, otrzymamy:

rzucając na Ox: $x' + y' \operatorname{dos}\theta = x + y \operatorname{dos}\theta + l \operatorname{dos}\alpha,$

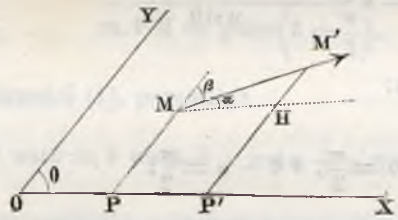
rzucając na Oy: $x' \operatorname{dos}\theta + y' = x \operatorname{dos}\theta + y + l \operatorname{dos}\beta,$

rzucając na MM′: $x' \operatorname{dos}\alpha + y' \operatorname{dos}\beta = x \operatorname{dos}\alpha + y \operatorname{dos}\beta + l;$

równości w których l przedstawia długość bezwzględną MM′.

Związki poprzedzające mogą się napisać:

$$(1)\qquad \begin{cases} (x'-x) + (y'+y)\operatorname{dos}\theta = l\operatorname{dos}\alpha, \\ (x'-x)\operatorname{dos}\theta + (y'-y) = l\operatorname{dos}\beta, \\ (x'-x)\operatorname{dos}\alpha + (y'-y)\operatorname{dos}\beta = l. \end{cases}$$



Między temi trzema równaniami wyrugujmy *dos* α i *dos* β, w tym celu pomnożmy ostatnie przez l, i zastąpmy w niém $l\operatorname{dos}\alpha$, $l\operatorname{dos}\beta$ przez wartości które dostarczyły dwa pierwsze, przyjdzie:

$$(2)\qquad l^2 = \overline{\mathrm{MM}'}^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\operatorname{dos}\theta,$$

albo

$$(3)\qquad l = \mathrm{MM}' = \pm\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\operatorname{dos}\theta}.$$

W przypadku w którym osie są prostopadłe, $\theta = \frac{\pi}{2}$; ma się wtedy:

$$(4)\qquad l^2 = (x^1 - x)^2 + (y'-y)^2$$

albo

$$(5)\qquad l = \overline{\mathrm{MM}'} = \pm\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}.$$

2^{ga} Metoda. Jeżeli zauważymy trójkąt MM′H, ma się:

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = l^2 = \overline{\mathrm{MH}}^2 + \overline{\mathrm{M'H}}^2 - 2\mathrm{MH}.\,\mathrm{M'H}.\operatorname{dos}(\widehat{\mathrm{MHM}'});$$

otóż

$$\mathrm{MH} = x' - x.$$

$$\mathrm{M'H} = y' - y,$$

$$\widehat{\mathrm{MHM}'} = \pi - \theta;$$

więc $\overline{\mathrm{MM}'} = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\operatorname{dos}\theta.$

Pierwsza metoda jest w tym względzie prawdziwie korzystną że prowadzi bezpośrednio do wzoru zupełnie ogólnego, ponieważ ona opiera się na teoryi ogólnéj rzutów; podczas gdy druga wymaga rozbioru różnych położeń względnych, jakie mogą przedstawiać punkta M i M′ względem osi.

32. Jeżeli jeden z punktów uważanych jest początkiem spółrzędnych, M′, na przykład, potrzeba przypuścić $x' = 0$, $y' = 0$; wzory (2) i (4) przyjmą kształt szczególny:

$$(6) \qquad l^2 = x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{dos}\theta; \text{ (osie pochyłe);}$$

$$(7) \qquad l^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{(osie prostokątne).}$$

Te wzory dają odległość punktu M czyli (x, y) od początku spółrzędnych.

33. Uwaga. Wzory (3) i (5) dają wartość na l z podwójnym znakiem, co nie przedstawia niedogodności, jeżeli się tylko żąda bezwzględnéj wartości odległości. Lecz, w mnóstwie okoliczności, odcinki leżące na jakiéjkolwiek prostéj powinny być uważane jako dodatne lub odjemne stosownie do tego jak je się liczy w pewnym kierunku lub w innym.

Otóż, związki (1) pozwolą napisać, bez dwuznaczności, odległość MM′ co do wielkości i co do znaku, wypada ztąd, w rzeczy samej,

$$(8) \qquad \mathrm{MM}' = l = \frac{(x'-x) + (y'-y)\operatorname{dos}\theta}{\operatorname{dos}\alpha} = \frac{(x'-x)\operatorname{dos}\theta + (y'-y)}{\operatorname{dos}\beta};$$

$\operatorname{dos}\alpha$ i $\operatorname{dos}\beta$ są dostawami kątów linii MM′ z osiami dodatnemi Ox i Oy, i w tym przypadku, wartość MM′, przypuszczona dodatną, jest daną przez jedną lub drugą z równości (8). Dostawy kątów linii M′M z osiami będą oczywiście $-\operatorname{dos}\alpha$, $-\operatorname{dos}\beta$; długość odcinka M′M, który podług naszéj umowy, jest odjemnym, ponieważ on jest przebieżonym w kierunku przeciwnym od poprzedzającego, będzie miała na wartość bezwzględną ($-$ M′M albo $-l$); z drugiéj strony, ta wartość bezwzględna będzie dostarczoną przez wzory (8) w których zastąpi się $\operatorname{dos}\alpha$ i $\operatorname{dos}\beta$ przez $-\operatorname{dos}\alpha$ i $-\operatorname{dos}\beta$; otrzyma się więc:

$$-l = \frac{(x'-x) + (y'-y)\operatorname{dos}\theta}{-\operatorname{dos}\alpha} = \frac{(x'-x)\operatorname{dos}\theta + (y'-y)}{-\operatorname{dos}\beta},$$

gdzie rozpoznaje się widocznie kształt (8).

Więc, przyjmując α i β za kąty dyrekcyi dodatnéj jakiéjkolwiek prostéj z osiami spółrzędnych, długość odcinka MM′ [*którego początkiem jest* M *czyli* (x, y) *a końcem* M′ *czyli* (x′, y′)] *będzie daną co do wielkości i co do znaku przez wzory :*

$$(9) \qquad \mathrm{MM}' = l = \frac{(x'-x) + (y'+y)\operatorname{dos}\theta}{\operatorname{dos}\alpha} = \frac{(x'-x)\operatorname{dos}\theta + (y'-y)}{\operatorname{dos}\beta};$$

to jest że wartość na l, dostarczona przez te wzory, będzie dodatną lub odjemną, według tego jak odcinek MM′ będzie skierowany w pewnym kierunku lub w innym na prostéj uważanéj.

W przypadku osi prostokątnych, to pytanie będzie rozwiązaném za pomocą wzorów

$$(10) \qquad \mathrm{MM}' = l = \frac{x'-x}{\operatorname{dos}\alpha} = \frac{y'-y}{\operatorname{dos}\beta}.$$

§ II. — KLASYFIKACYA KRZYWYCH.

34. Rozróżnia się krzywe na *krzywe algebraiczne* i na *krzywe przestępne*, według tego jak równanie które je przedstawia jest samo przez się algebraicznêm albo przestępnêm. Zajmiemy się głównie krzywemi algebraicznemi; zwłaszcza, że na tėj drodze Geometrya zrobiła postępy najznakomitsze.

Kiedy się bada krzywą algebraiczną, musi się zawsze przypuścić, że równanie które ją przedstawia było zrobione wymiernêm; a zatêm, kiedy równanie takie jak:

$$f(x, y) = 0$$

przedstawia krzywą algebraiczną, można zawsze przypuścić że piérwsza strona tego równania jest funkcyą całkowitą dwóch zmiennych x i y.

35. Krzywa nazywa się *m*^tego^ *rzędu* gdy ona jest spotkaną w m punktach (rzeczywistych albo urojonych, w odległości skończonėj albo nieskończonėj) przez prostą jakąkolwiek.

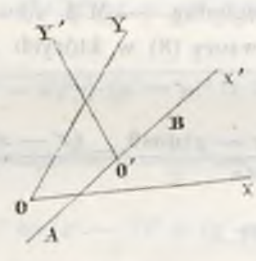
Krzywa nazywa się *m*^téj^ *klassy*, gdy z jakiegokolwiek punktu płaszczyzny, można do niéj poprowadzić m stycznych (rzeczywistych lub urojonych).

Równanie m^tego^ *stopnia względem* x *i* y *przedstawia krzywą* m^tego^ *rzędu.*

Niech będzie $f(x, y) = 0$ równanie stopnia m; krzywa jest odniesioną do dwóch stałych Ox i Oy, starajmy się znaleźć liczbę punktów przecięcia się tėj krzywéj z jakąkolwiek prostą AB.

Odnieśmy krzywą do nowego układu osi, w którym osią nowych odciętych byłaby prosta AB, na przykład.

Niech będą x i y spółrzędne któregokolwiek punktu w 1^szym^ układzie, x' i y' spółrzędne tegoż



samego punktu w 2^gim^ układzie; jeżeli, za pomocą wzorów (II) n^ru^ (29), zastąpimy x i y w równaniu danêm

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

to równaie stanie się

$$(2) \qquad \varphi(x', y') = 0,$$

które przedstawi tęż samą krzywą odniesioną do nowych osi. Otóż równanie (2) jest tegoż samego stopnia jak równanie dane (1). W rzeczy samêj x i y są funkcyami linijnemi x' i y'; a têm samêm, kiedy się zastąpi x i y przez ich wartości, stopień równania nie będzie się mógł podnieść. Stopień nie będzie mógł się także zniżyć; gdyż jeżeliby to miało miejsce, potrzebaby było żeby stopień podnosił się, gdyby się chciało powrócić z równania (2) do równania (I); otóż to jest niepodobném, albowiem oczywiście wartości na x' i y' wyprowadzone ze wzorów (II) nru (29) są także funkcyami linijnemi x i y. Tak więc równanie (2) jest dokładnie tegoż samego stopnia, względem x' i y', jak równanie dane.

To przypuściwszy, aby znaleźć punkta krzywéj położonéj na AB lub $O'x'$, uważmy że ma się, dla tych punktów, $y'=0$; jeżeli się wprowadzi to założenie w równanie (2), przyjdzie:

(3) $$\varphi(x', 0) = 0;$$

równanie które jest stopnia m względem x', i które przyjmie przeto m pierwiastków, tak rzeczywistych jak urojonych, skończonych jak nieskończonych.

Więc prosta AB spotyka krzywą w m punktach, t. j. że krzywa jest m^{tego} rzędu.

Zobaczymy poniżéj twierdzenie podobne odnoszące się do *klassy*.

Uwaga. Może się zdarzyć że równanie (3) ma więcéj jak m pierwiastków; w takim razie równanie sprowadza się do tożsamości; w tym przypadku, prosta AB spotyka krzywą w niezliczoném mnóstwie punktów. Wypada z naszego założenia, że 1sza strona równania (2) sprowadzi się do zera, kiedy w niém się uczyni $y'=0$; innemi słowy, ta 1sza strona jest kształtu

$$y'\varphi_1(x', y') = 0$$

a tém samém, równanie dane jest kształtu

$$(ax + by + c)f_1(x, y) = 0$$

$f_1(x, y)$ jest funkcyą całkowitą stopnia $(m-1)$.

W ogólności, kiedy piérwsza strona równania m

$$f(x, y) = 0$$

nie da się rozłożyć na czynniki wymierne, to równanie przedstawia krzywą właściwie nazwaną m^{tego} rzędu; kiedy piérwsza strona jest rozkładalną, ma się wiele krzywych rzędu niższego jak m; ogół wszystkich tych krzywych tworzy *krzywą złożoną rzędu m*, która będzie jeszcze przedstawioną za pomocą równania danego.

36. Krzywe algebraiczne tworzą grupy podług ich *rzędu*, potém krzywe rzędu wyznaczonego rozróżniają się za pomocą ich *klassy*.

Zajmiemy się głównie krzywemi 1go i 2go rzędu; uzasadnimy przecież zasady ogólne, które pozwolą badać krzywe rzędu wyższego.

Nim przystąpimy do téj nauki, starajmy się znaleźć liczbę wyrazów stopnia m między dwiema zmiennemi.

Funkcya całkowita $f(x, y)$ dwóch zmiennych x i y zawiera wyrazy następujące:

$$f(x, y) =$$

$$\left\{\begin{array}{lll}
(A_0x^m + A_1x^{m-1}y + \ldots + A_{m-1}xy^{m-1} + A_my^m) & \text{wyrazy } m^{tego} \text{ stopnia których ogół oznaczymy przez} & \varphi_m(x, y) \\
+ (B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2}y + \ldots + B_{m-2}xy^{m-2} + B_{m-1}y^{m-1}) \ldots & (m-1)^{tego} \text{ stopnia} \ldots\ldots\ldots & \varphi_{m-1}(x, y) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
+ (M_0x^3 + M_1x^2y + M_2xy^2 + M_3y^3) \ldots\ldots\ldots & 3^{ciego} \text{ stopnia} \ldots\ldots\ldots & \varphi_3(x, y) \\
+ (N_0x^2 + N_1xy + N_2y^2) \ldots\ldots\ldots & 2^{giego} \text{ stopnia} \ldots\ldots\ldots & \varphi_2(x, y) \\
+ (P_0x + P_1y) \ldots\ldots\ldots & 1^{go} \text{ stopnia} \ldots\ldots\ldots & \varphi_1(x, y) \\
+ \quad H \ldots\ldots\ldots & \text{wyraz stały} \ldots\ldots\ldots & \varphi_0.
\end{array}\right.$$

Podług tego znakowania, którego będziemy często używali, otrzymamy :

$$f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_{m-2}(x, y) + \ldots \varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) + \varphi_0;$$

funkcya $\varphi_i(x, y)$ jest funkcyą jednorodną zmiennych x i y i stopnia i.

Otóż funkcya $\varphi_m(x, y)$ zawiera $(m+1)$ wyrazów; funkcya $\varphi_{m-1}(x, y)$ zawiera ich m; ogólnie, funkcya $\varphi_i(x, y)$ zawiera $(i+1)$ wyrazów; a więc liczbą całkowitą N wyrazów funkcyi $f(x, y)$ jest

$$N = 1 + 2 + 3 + \ldots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}.$$

Tak więc *liczba* N *wyrazów funkcyi całkowitéj i stopnia* m *względem dwóch zmiennych* x *i* y *jest daną za pomocą wzoru*

$$(1) \qquad N = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}.$$

Podług tego, równanie krzywéj 1go rzędu (albo *linia prosta*) zawiera *trzy* wyrazy; równanie krzywéj 2giego rzędu zawiera *sześć* wyrazów.

KSIĘGA PIERWSZA

LINIA PROSTA I PUNKT.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

LINIA PROSTA.

§ I. — RÓWNANIE PROSTÉJ PODLEGŁÉJ RÓŻNYM WARUNKOM.

I° Równanie 1go stopnia.

37. Wszelkie równanie piérwszego stopnia względem zmiennych x i y może być przedstawionêm przez :

(1) $$Ax + By + C = 0.$$

Jeżeli x i y oznaczają spółrzędne jakiegokolwiek punktu płaszczyzny i gdy A, B, C, są stałemi, to równanie przedstawia linią prostą. W rzeczy saméj, równanie (1) jest piérwszego stopnia; miejsce geometryczne, które ono przedstawia, posiada własność że nie może być spotkanêm jak tylko w jednym punkcie przez jakąkolwiek prostą [35]; otóż jestto własność charakterystyczna linii prostéj.

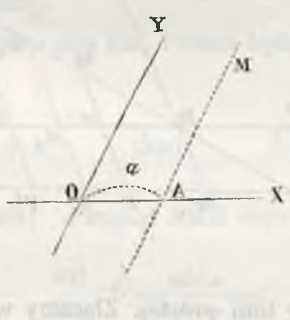
38. Można jeszcze uzasadnić to podanie za pomocą uwag następujących :

1° Przypuśćmy naprzód że jeden ze spółczynników A lub B jest zerem, równanie (1) weźmie jeden lub drugi z kształtów

$$x - a = 0, \qquad y - b = 0;$$

1sze z tych równań przedstawi *równoległą do osi rzędnych*, a 2gie *równoległą do osi odciętych.*

Uważmy, na przyład, równanie, $x - a = 0$; niech będzie $OA = a$, i poprowadźmy przez punkt A



równoległą do osi Oy. Jeżeli M jest jakimkolwiek punktem leżącym na téj równoległéj, jego spółrzędne ($x_1 = a$, $y_1 = \overline{\mathrm{AM}}$) sprawdzają oczywiście równanie $x - a = 0$; gdyż to równanie jest niezależném od y. Którykolwiek punkt, nie leżący na téj równoległéj będzie miał odciętą różną od a; a wtedy, jakiémkolwiek byłoby y, spółrzędne tego punktu nie sprawdzą równania $(x - a) = 0$. To równanie przedstawia więc równoległą do osi rzędnych. Dowiodłoby się tymże samym sposobem że równanie $y - b = 0$ przedstawia równoległą do osi odciętych. Równanie prostych $\mathrm{O}y$ i $\mathrm{O}x$ są względnie $x = 0$ i $y = 0$.

2° Przypuśćmy teraz że A i B nie są zerami; równanie (1) będzie można przedstawić w kształcie:

$$y = ax + b; \tag{2}$$

zakładając

$$a = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \qquad b = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}. \tag{3}$$

Jeżeli się uczyni $x = 0$ w równaniu (2), znajduje się $y = b$; punkt B, którego spółrzędnemi są $x_1 = 0$, $y_1 = \mathrm{OB} = b$, należy więc do miejsca geometrycznego przedstawionego przez równanie (2). Poprowadźmy przez punkt B równoległą $\mathrm{B}x'$ do $\mathrm{O}x$.

Przypuśćmy naprzód $a > 0$, i niech będzie M punkt miejsca odpowiedniego odciętéj OP; rzędna MP tego punktu będzie daną przez równanie (2) w którém się zrobi $x = \mathrm{OP}$, tym sposobem otrzyma się:

$$\mathrm{PM} = a.\mathrm{OP} + b;$$

otóż $$b = \mathrm{OB} = \mathrm{PH}; \qquad \text{więc}$$

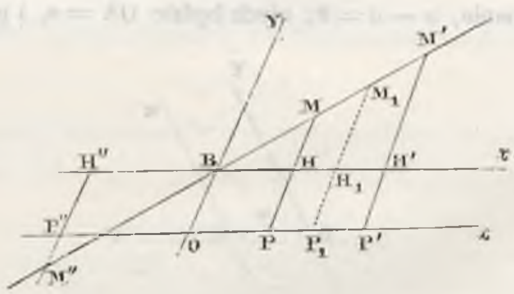
$$(\mathrm{PM} - \mathrm{PH}) \quad \text{lub} \quad \mathrm{HM} = a.\mathrm{OP};$$

HM jest ilością dodatną, punkt M jest więc po nad prostą $\mathrm{B}x'$.

Niech będzie drugi punkt M′ odpowiedni odciętéj dodatnéj OP′, znajdzie się podobnież

$$\mathrm{H'M'} = a.\mathrm{OP'},$$

i punkt M′ będzie po nad $\mathrm{B}x'$.



Otóż, trzy punkta B, M, M′, są w linii prostéj. Złączmy w rzeczy saméj, BM i BM′; dwa trójkąty BHM i BH′M′ są podobne, jako mające kąt równy zawarty między dwoma bokami proporcyonalnymi, gdyż kąty BHM i BH'M' są równe jako kąty odpowiedające, i ma się, nadto, równośc

$$\frac{MH}{BH} = a, \qquad \frac{M'H'}{BH'} = a,$$

ponieważ BH = OP i BH' = OP'. Wypada ztąd równość kątów $\widehat{MBH}$ i $\widehat{M'BH'}$.

Jeżeli się weźmie pod uwagę odciętą odjemną OP'' otrzyma się za punkt odpowiedni M'', kładąc na widoku znak rzędnéj, jeżeli M'' jest pod spodem osi odciętych,

$$H''M'' = a.OP'';$$

H''M'' jest więc ilością odjemną a punkt M'' jest pod spodem prostéj Bx'; rozumując jak poprzednio, dowiedzie się że punkt M'' jest na prostéj BM. A więc wszystkie punkta, których spółrzędne sprawdzają równanie (2), znajdują się położone na prostéj BM.

Roztrząśnie się tymże samym sposobem przypadek w którym a jest odjemném.

Odwrotnie : Spółrzędne jakiegokolwiek punktu położonego na BM sprawdzają równanie (2). Niech będzie M_1 jeden z tych punktów, którego odciętą i rzędną są względnie OP_1 i P_1M_1. Z powodu podobieństwa trójkątów BMH i BM_1H_1, ma się :

$$\frac{M_1H_1}{BH_1} = \frac{MH}{BH} = a;$$

lecz

$$BH_1 = OP_1, \qquad M_1H_1 = M_1P_1 - H_1P_1 = M_1P_1 - b;$$

a więc

$$M_1P_1 = a.OP_1 + b;$$

to jest że spółrzędne ($x_1 = OP_1$, $y_1 = M_1P_1$) punktu M_1 sprawdzają równanie (2).

Tak więc *równanie* 1$^{\text{go}}$ *stopnia między dwiema zmiennemi* x i y *przedstawia linią prostą.*

39. Stała b, wchodząca w równanie (2),

$$y = ax + b$$

nazywa się *rzędną od początku* prostéj ; jestto odległość od początku punktu w którym prosta spotyka oś rzędnych.

Stała a nosi nazwisko *spółczynnika kątowego* prostéj ; widzimy *a priori* że ta stała przedstawia stosunek, ponieważ równanie (2) jest jednorodném i że x, y i b oznaczają linie. Tenj stosunek nie może zależyć tylko od nachylenia prostéj.

Oznaczywszy przez α kąt prostéj BM z osią Ox, i niech będą x i y spółrzędne punktu M prostéj, ma się :

$$y = ax + b, \qquad \text{zkąd} \qquad \frac{y-b}{x} = a.$$

Otóż $y - b = MH$, $x = OP = BH$; a trójkąt BMH daje

$$\frac{MH}{BH} = \frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(\theta - \alpha)};$$

θ jest kątem osi.

Ma się więc związek często używany :

(4) $$a = \frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(\theta - \alpha)};$$

« θ jest kątem osi; α jest kątem (liczonym od x ku y) części dodatnej osi odciętych, z częścią prostéj » znajdującéj się z téjże saméj strony co i część dodatna osi rzędnych. » Pod tymi warunkami, związek (4) jest ogólnym.

Kiedy osie spółrzędnych są prostokątne, ma się $\theta = 90^\circ$; a tém samém

(5) $$a = \text{st}.\alpha.$$

II° Równanie prostéj.

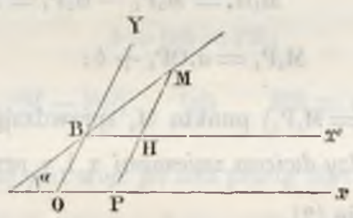
40. Dowiedziemy twierdzenie odwrotne podania poprzedzającego, to jest :

Równanie linijne prostéj jest pierwszego stopnia, szukając różnych kształtów równania prostéj, odpowiedającéj różnym danym.

1° *Daje się rzędna od początku i kąt prostéj z osią odciętych ;*

Niech będą b rzędna od początku i α kąt prostéj z osią odciętych ;

Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt $M(x, y)$ téj prostéj ; nakreślmy spółrzędne punktu M ; i przez



koniec B rzędnéj od początku, poprowadźmy Bx' równoległą do Ox ; trójkąt MBH daje :

$$\frac{\text{MH}}{\text{BH}} = \frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(\theta - \alpha)};$$

otóż

$$\text{MH} = y - b, \qquad \text{BH} = \text{OP} = x;$$

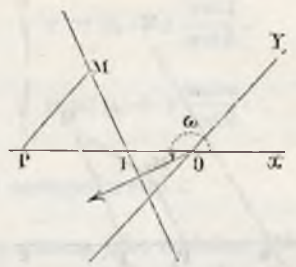
ma się tém samém :

(1) $$y = \frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(\theta - \alpha)}\,x + b.$$

To równanie uzasadniając związek między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu (x, y) prostéj, jest *równaniem prostéj.*

2° *Daje się odległość prostéj od początku, i kąt jaki tworzy z osią odciętych dodatnych prostopadła spuszczona z początku na prostą i skierowana ku téj prostéj.*

Niech będzie p wartość bezwzględna téj odległości, i ω kąt określony w wysłowieniu ; niech będzie nadto, M jakikolwiek punkt prostéj; nakreślmy spółrzędne x i y tego punktu, i rzućmy obwód OPMI



na OI. Uważając że MI jest prostopadłą do OI, ponieważ miejscem punktu M jest prosta, znajduje się:

(2) $$x \operatorname{dos}\omega + y \operatorname{dos}(\theta - \omega) = p.1;$$

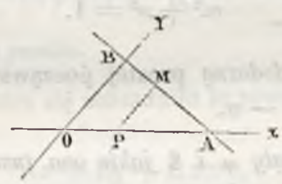
jesto związek między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu prostéj, a więc jest *równaniem prostéj.*

Jeżeli osie spółrzędnych są prostokątne, ma się $\theta = 90°$, i równanie prostéj przyjmuje kształt:

(3) $$x \operatorname{dos}\omega + y \operatorname{wst}\omega - p = 0.$$

3° *Daje się spółrzędne od początku prostéj,* to jest odległości od początku punktów w których ta prosta spotyka osie spółrzędnych.

Niech będzie M(x, y) punkt jakikolwiek prostéj, MP i OP jego spółrzędne; $OA = a$, $OB = b$



spółrzędne od początku prostéj. Dwa trójkąty podobne MPA i OBA dają:

$$\frac{MP}{OB} = \frac{PA}{OA}, \qquad \text{lub} \qquad \frac{y}{b} = \frac{a - x}{a};$$

równanie mogące się napisać pod kształtem symetrycznym:

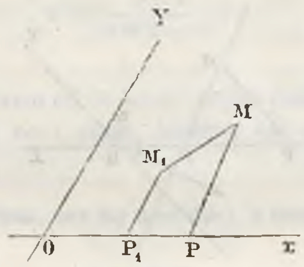
(4) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

jestto *równanie prostéj* (ściśle przez nas powyżéj określonéj).

4° *Daje się punkt* (x, y) *i kąty* (α, β) *prostéj z osiami spółrzędnych.*

α, β, kąty prostéj z osiami dodatnych spółrzędnych, wyznaczają począwszy od punktu M_1 to co nazwiemy *dyrekcyą dodatną* prostéj; *dyrekcya odjemna* lub przeciwna będzie wyznaczoną przez kąty $\alpha + \pi$, $\beta + \pi$.

Niech będzie $M(x, y)$ jakikolwiek punkt prostéj; rzućmy obwody OPM i OP_1M_1M na Ox i Oy



(ob. er [31]), otrzymamy związki

$$\begin{cases} (x - x_1) + (y - y_1)\operatorname{dos}\theta = l \operatorname{dos}\alpha, \\ \quad - x_1)\operatorname{dos}\theta + (y - y_1) = l \operatorname{dos}\beta: \end{cases}$$

zkad wynika:

(5) $$\frac{- x \; + \; y - y_1)\operatorname{dos}\theta}{s\alpha} = \frac{(x - x_1)\operatorname{dos}\theta + (y - y_1)}{\operatorname{dos}\beta};$$

estto *równanie prostéj*.

Jezeli się przypuści osie prostokątne, to równanie będzie mogło się napisać:

(6) $$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n},$$

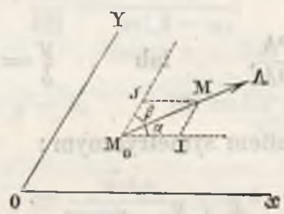
z warunkiem

(6 *bis*) $$m^2 + n^2 = 1.$$

Ilości m i n wyznaczają *dyrekcyą dodatną* prostéj począwszy od punktu M_1, *dyrekcya odjemna* będzie wyznaczoną przez ilości $-m$ i $-n$.

5° *Daje się punkt* (x_0, y_0) *prostéj i kąty* α *i* β *jakie ona tworzy z osiami* Ox *i* Oy, *znaleźć spółrzędne jakiegokolwiek z jéj punktów.*

Niech będzie M_0A położenie prostéj wyznaczonéj, począwszy od M_0, przez kąty α i β; jeżeli M



jest jakimkolwiek punktem linii M_0A, a x, y spółrzędnemi tego punktu, ma się

$$x = x_0 + M_0I, \qquad y = y_0 + M_0J;$$

otóż, oznaczywszy przez ρ odległość M_0M, ma się (θ jest kątem osi)

$$\frac{M_0I}{\rho} = \frac{\operatorname{wst}\beta}{\operatorname{wst}\theta}, \qquad \frac{M_0J}{\rho} = \frac{\operatorname{wst}\alpha}{\operatorname{wst}\theta};$$

zkąd wynika :

$$(7)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \rho\,\dfrac{\mathrm{wst}\,\beta}{\mathrm{wst}\,\theta}, \\ y = y_0 + \rho\,\dfrac{\mathrm{wst}\,\alpha}{\mathrm{wst}\,\theta}. \end{cases}$$

Te wzory są ogólne pod warunkami następującemi :

1° « Odległość ρ lub M_0M będzie uważaną jako dodatna lub odjemna według tego jak punkt M » znajdzie się na części prostéj M_0A wyznaczonéj przez kąty α i β, lub na przedłużeniu téj prostéj.

2° » Kąt α będzie liczonym poczynając od Ox ku M_0A, i będziemy go uważali jako dodatny lub » odjemny według tego jak się pójdzie od Ox ku Oy, lub w kierunku przeciwnym. Kąt β będzie » liczonym poczynając od Oy ku M_0A, i będziemy go uważali jako dodatny lub odjemny według » tego jak się pójdzie od Oy ku Ox lub w kierunku przeciwnym. »

Ogólność tych wzorów łatwo się wykaże kładąc kolejno prostą M_0A w cztérech kątach utworzonych przez równoległe do osi spółrzędnych prowadzone przez M_0; w każdym z tych przypadków, będzie się uważało punkt M na M_0A; potém na jego przedłużeniu.

W przypadku osi prostokątnych wzorami rozwięzującymi założone pytanie są :

$$(8)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \rho\,\mathrm{dos}\,\alpha, \\ y = y_0 + \rho\,\mathrm{wst}\,\alpha. \end{cases}$$

Te wzory są bardzo użytecznemi dla wziętych pod rozbiór wielu wypadków.

41. *Prosta jest wyznaczona przez dwa punkta.*

Wypada, w rzeczy saméj, z podań które się uzasadniło że równanie prostéj jest kształtu :

$$Ax + By + C = 0.$$

Otóż wyrazi się, że ta prosta przechodzi przez dwa punkta dane, pisząc że równanie poprzedzające jest sprawdzoném przez spółrzędne tych dwóch punktów; tym sposobem będzie się sprowadzonym do dwóch związków wyznaczających stosunki spółczynników A, B, C, do jednego z pomiędzy nich. Po podstawieniu tych wartości, równanie przedstawi prostą jedyną i zupełnie wyznaczoną.

Jeżeli, w szczególności, jeden z punktów danych jest początkiem spółrzędnych, znajduje się $C = 0$; *równanie prostéj przechodzącéj przez początek* jest więc :

$$Ax + By = 0, \qquad \text{lub} \qquad y = ax.$$

III° Prosta w nieskończoności.

42. Zastępując x i y przez $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ w równaniu :

$$Ax + By + C = 0,$$

otrzymamy:

$$(1) \qquad Ax + By + Cz = 0;$$

jestto *równanie w spółrzędnych jednorodnych* jakiéjkolwiek prostéj; $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ są stosunkami przedstawiającemi spółrzędne Kartezyańskie jakiegokolwiek punktu prostéj; x, y, z, są *spółrzędnemi jednorodnemi* tego punktu.

Spółrzędne od początku prostéj (1) będą miały za wartości:

$$OM = \frac{x_1}{z_1} = -\frac{C}{A}, \qquad ON = \frac{y_1}{z_1} = -\frac{C}{B};$$

otóż przypuśćmy że stałe dowolne A i B zmniejszają się coraz bardziéj i dążą do zera, podczas gdy C nie staje się zerem, odległości OM i ON staną się coraz bardziéj wielkiemi, i prosta MN oddali się

nieograniczenie; kiedy A i B staną się zerami, powiemy że *prosta przeniosła się do nieskończoności* na płaszczyznie.

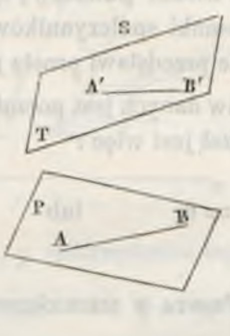
Z drugiéj strony; równanie (1) sprowadza się, gdy A i B są zerami, do

$$(2) \qquad z = 0$$

możemy więc uważać to równanie jako wyrażające że prosta (1) oddaliła się do nieskończoności.

43. Chodzi teraz o danie niektórych objaśnień o pojęciu *prostéj w nieskończoności*.

Wyobraźmy sobie punkt stały S i dwie płaszczyzny T i P; jeżeli przez punkt S i jakąkolwiek



prostą AB, położoną na płaszczyznie P, poprowadzi się płaszczyzna SAB, przecięcie się A'B' téj płaszczyzny z płaszczyzną T będzie rzutem środkowym albo perspektywą (na obrazie T) prostéj AB. Jest rzeczą widoczną, że dla prostéj AB na płaszczyznie P, odpowiada rzutowo (*projectivement*) prosta A'B' na płaszczyznie T; i, dla prostéj A'B' na płaszczyznie T, odpowiada prosta AB na płaszczyznie P. Otóż, jeżeli się przypuści że prosta AB oddala się nieograniczenie na płaszczyznie, jéj perspektywa na płaszczyznie T będzie zawsze linią prostą; ta prosta, na granicy, będzie przecięciem się płaszczyzny T z płaszczyzną, przechodzącą przez S i równoległą do płaszczyzny P. Lecz miejscem punktów płaszczyzny P, mających za perspektywę linią prostą, jest prosta; powinniśmy rozciągnąć tę własność do przypadku granicy, i możemy powiedzieć że *wszystkie punkta do nieskończoności na płaszczyznie są na linii prostéj;* daje się ogółowi tych punktów nazwisko *prostéj w nieskończoności albo prostéj do nieskończoności.*

Należy zauważyć jednak że położenie względne punktów do nieskończoności jest nieoznaczoném, innemi słowy, dyrekcya prostéj w nieskończoności jest nieoznaczoną. Ta nieoznaczoność położenia względnego punktów do nieskończoności wyraźnie pokazuje się z uwag geometrycznych któreśmy dopiero przedstawili; gdyż, jakimkolwiek jest bieg ciągły odbyty przez płaszczyznę SAB aby się stała równoległą do płaszczyzny P, perspektywa prostéj AB będzie, w położeniu granicy, prostą jedyną; a przecież dyrekcya prostéj AB zmienia się z prawem ruchu płaszczyzny SAB; ona wyraźnie się uwydatnia także z rozumowania analitycznego poprzedzającego (42); gdyż stałe A i B mogą dążyć jednocześnie do zera a ich stosunek pozostać nieoznaczonym; prosta MN oddala się wtedy do nieskończoności, a jéj dyrekcya pozostaje również nieoznaczoną.

Ztąd wyciągniemy wnioski następujące:

1° Jeżeli równanie $z = 0$ jest napisaném *a priori,* lub jeżeli ono pochodzi z równania (1), przypuszczając w niém że stałe A i B dążą jednocześnie do zera i że ich stosunek pozostaje nieoznaczonym, równanie:

$$z = 0$$

przedstawi szereg nieoznaczony punktów do nieskończoności lub *prostą w nieskończoności.*

2° Jeżeli równanie $z = 0$ wynika z równości (1) przypuszczając w niém że stałe A i B dążą jednocześnie do zera lecz że ich stosunek pozostaje stałym, równanie:

$$z = 0$$

przedstawi szereg punktów do nieskończoności na równoległéj do dyrekcyi uważanéj, t. j., *prostą w nieskończoności równoległą do dyrekcyi oznaczonéj.*

44. Mając dane równanie krzywéj:

(1) $$f(x, y) = 0,$$

jeżeli się w niém zastąpi x i y przez $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ i gdy się zniesie mianownik z, otrzymamy równanie:

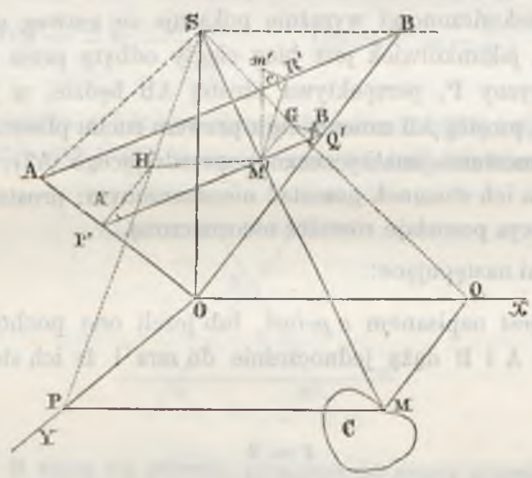
(2) $$f(x, y, z) = 0;$$

równanie (2) jest jednorodném względem x, y, z; ono przedstawia krzywą zupełnie wyznaczoną i tęż samą krzywą jak równanie (1), ponieważ to równanie zamyka w sobie tylko stosunki $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ które oznaczają także spółrzędne Kartezyańskie x i y jakiegokolwiek punktu.

Po wprowadzeniu téj zmiany w równanie (1), powiemy że się je robi jednorodném. Możemy tłomaczyć równanie (2) zapatrując się z innego t. j., z geonometrycznego punktu widzenia; oznaczymy natychmiast to tłómaczenie.

Niech będą dwie osie prostokątne, Ox i Oy, na płaszczyznie gdzie się znajduje krzywa (C) albo $f(x, y) = 0$; zróbmy perspektywę krzywéj na płaszczyznie xoy, biorąc za wierzchołek perspektywy punkt S położony na prostopadłéj OS do płaszczyzny xOy i przypuszczając że płaszczyzna na któréj robi się perspektywa przechodzi przez punkt O.

Niech będą OB, OA, AB, przecięcia się płaszczyzny perspektywy z płaszczyznami SOx, i SOy, i z płaszczyzną przechodzącą przez S i równoległą do xOy; niech będą jeszcze A, B, C, kąty względne



płaszczyzny OAB z płaszczyznami SOy, SOx, xOy. Jeżeli M jest jakimkolwiek punktem płaszczyzny xOy i gdy MP i MQ są jego odległościami od osi Oy i Ox; jeżeli M′ jest perspektywą tego punktu na płaszczyznie AOB i gdy M′P′, M′Q′, M′R′ są jego odległości względne od prostych OA, OB, AB; oznaczywszy względne te odległości przez X, Y, Z,

$$X = M'P',\ Y = M'Q', Z = M'R',$$

ma się związki:

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} MP &= h\frac{\operatorname{wst} A}{\operatorname{wst} C}\cdot\frac{X}{Z}, \\ MQ &= h\frac{\operatorname{wst} B}{\operatorname{wst} C}\cdot\frac{Y}{Z}; \end{aligned} \right.$$

przedstawiając przez h odległość OS.

Dla udowodnienia tych związków, prowadźmy M′G równoległą do MQ; ta równoległa spotka płaszczyznę SOx w punkcie G położonym na SQ, nadto ona będzie prostopadłą do płaszczyzny SOx; jeżeli z punktu G spuści się GQ′ prostopadłą na OB i gdy się złączy M′Q′, M′Q′ będzie ona, na mocy twierdzenia trzech prostopadłych, prostopadłą do OB; kąt $\widehat{GQ'M'}$ będzie kątem prostolinijnym kąta płaszczyzny AOB z płaszczyzną SOx, będzie to kąt B.

Trójkąt M′GQ′ prostokątny w G daje:

$$M'G = M'Q'.\operatorname{wst} B;$$

lecz, z powodu trójkątów podobnych SMQ, SM'G, ma się:

$$\frac{M'G}{MQ} = \frac{SM'}{SM} \text{ lub } M'G = \rho . MQ,$$

przedstawiając przez ρ stosunek $\frac{SM'}{SM}$. Będzie więc:

$$(1^\circ) \qquad MQ = \frac{\text{wst} B}{\rho} M'Q'.$$

Wykonywając też same wykreślenia dla płaszczyzny SOy, t. j., prowadząc M'H równoległą do MP, potém HP' prostopadłą do OA; łącząc M'P' i uważając że $\widehat{HP'M'} = A$ znajdzie się jeszcze:

$$(2^\circ) \qquad MP' = \frac{\text{wst} A}{\rho} . M'P'.$$

Nakoniec prowadźmy przez M' równoległą M'm' do OS i zakończoną w m' na płaszczyznie ASB; niech będzie potém m'R' prostopadła do AB; prosta M'R' będzie wtedy prostopadłą do AB, i M'R'm' będzie miarą kąta dwójściennego C. Otrzyma się w trójkącie prostokątnym M'm'R,

$$M'm' = M'R' . \text{wst} C.$$

Lecz trójkąty podobne SM'm': i SOM dają:

$$\frac{M'm'}{h} = \frac{SM'}{SM} = \rho;$$

a tém samém:

$$(3^\circ) \qquad h = \frac{\text{wst} C}{\rho} . M'R'.$$

Dzieląc stronami równości (1°), (2°), (3°), przyjdzie:

$$\begin{cases} MP = h \dfrac{\text{wst} A}{\text{wst} C} . \dfrac{MP'}{M'R'} = h \dfrac{\text{wst} A}{\text{wst} C} . \dfrac{X}{Z}, \\[2ex] MQ = h \dfrac{\text{wst} B}{\text{wst} C} . \dfrac{M'Q}{M'R'} = h \dfrac{\text{wst} B}{\text{wst} C} . \dfrac{Y}{Z}. \end{cases}$$

Ma się więc:

$$(4^\circ) \qquad \begin{cases} MP = \dfrac{x}{z} = h \dfrac{\text{wst} A}{\text{wst} C} . \dfrac{X}{Z} = \lambda \dfrac{X}{Z}, \\[2ex] MQ = \dfrac{y}{z} = h \dfrac{\text{wst} B}{\text{wst} C} . \dfrac{Y}{Z} = \mu \dfrac{Y}{Z}. \end{cases}$$

45. To przypuściwszy, niech będzie równanie krzywéj położonéj na płaszczyznie xOy,

$$(5^\circ) \qquad f(x, y, z) = 0, \text{ lub } f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0;$$

to równanie stanie się przez podstawienie (4)

$$(6^o) \qquad f(\lambda X, \mu Y, Z) = 0.$$

Lecz można rozporządzić stałemi wchodzącemi do λ i μ, i to niezliczoném mnóstwem sposobów, tak aby λ i μ były równemi jedności; równanie krzywéj (6) stanie się wtedy:

$$(7^o) \qquad f(X, Y, Z) = 0.$$

Widzimy więc, porównywając równania (5) i (7), że równanie (5) może być tłomaczone dwoma osobami różnymi:

Można uważać x, y, z, jako spółrzędne jednorodne jakiegokolwiek punktu płaszczyzny xOy, i równanie (5) przedstawi jakąkolwiek krzywą (C) położoną na téj płaszczyznie.

Można także uważać x, y, z, jako odległości jakiegokolwiek punktu płaszczyzny OAB (zadosyć czyniące warunkóm wskazanym) od trzech prostych OB, OA i AB; i równanie (5) przedstawi perspektywę (C′), na płaszczyznie OAB krzywéj (C).

Krzywa (C) jest także perspektywą, na płaszczyznie xOy, krzywéj (C′).

Uwaga. W równaniu pierwotném $f(x, y, 1) = 0$, x i y przedstawiają linie; w tém równaniu zrobioném jednorodném $f(x, y, z) = 0$, ilości $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, przedstawiają zawsze linie. Jeżeli się zastąpi $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ przez $\lambda \frac{X}{Z}$ i $\mu \frac{Y}{Z}$, ma się równanie $f(\lambda X, \mu Y, Z) = 0$ gdzie λ, μ, X, Y, Z, oznaczają linie, jak to widzimy we wzorach (4). Jeżeli się przypuści $\lambda = \mu = 1$, bierze się za jedność jedną z linii figury, ponieważ $h \frac{\text{wst A}}{\text{wst B}} = 1$; równanie krzywéj przyjmuje wtedy jednorodność zrozumianą stosownie do myśli wyłożonéj w n$^{\text{rze}}$ (18).

46. Prosta AB jest perspktywą wszystkich punktów do nieskończoności płaszczyzny xOy; i odwrotnie, wszyskie punkta prostéj AB znajdują się rzucone do nieskończoności na płaszczyznie xOy; tak że, wszystkie punkta do nieskończoności na płaszczyznie xOy mogą być uważane jako położone na prostéj ktoréj perspektywą jest AB. Otóż związki (4) nam pokazują że punktowi położonemu na prostéj AB, dla którego ma się wtedy $z = 0$, odpowiada punkt dla którego $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ są nieskończonemi; a ponieważ x i y są dowolne, ma się dla wszystkich tych punktów

$$z = 0$$

to równanie przedstawia więc *prostą w nieskończoności* na płaszczyznie xOy; albo, w perspektywie, prostą AB.

Tak więc, przypadki szczególne krzywéj (C); znajdujące się na prostéj w nieskończoności, na nowo się pokażą, w perspektywie, na linii AB t. j., na rzucie prostéj w nieskończoności; i odwrótnie przypadki szczególne które krzywa (C′) przedstawia na prostéj AB znajdują się rzucone na linii do nieskończoności, kiedy się robi perspektywę krzywéj (C′) na płaszczyznie xOy.

Uwaga. Niech będzie równanie krzywéj rzędu m

$$(C) \quad \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 = 0;$$

przypuśćmy że wszystkie stałe zniosą się wyjąwszy stałéj φ_0 i należy wnosić wtedy że krzyw sprowadza się do układu m prostych zbiegających się i przeniesionych do nieskończoności. To wynika z równania jednorodnego to jest:

$$(C') \quad \varphi_m(x,y) + z\varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + z^{m-1}\varphi_1(x,y) + \varphi_0 z^m = 0$$

które sprowadza się do $z^m = 0$. Można jeszcze uważać krzywą (C') jako perspektywę krzywéj (C); widzimy wtedy, że krzywa sprowadzi się do m prostych zbiegających się z perspektywą prostéj w nieskończoności.

Tak więc nie można powiedzieć że punkta do nieskończoności płaszczyzny *co do odległości skończonej* są na krzywéj rzędu m; tylko że krzywa rzędu m może się sprowadzić do m prostych zbiegających się z prostą w nieskończoności.

IV°. Równanie prostéj przechodzącéj przez punkt stały.

Prosta równoległa do prostéj stałéj.

47. 1° Przypuśćmy punkt stały wyznaczony przez jego spółrzędne x_1, y_1, i niech będzie:

$$(1^\circ) \qquad Ax + By + C = 0$$

równaniem ogólném prostéj. Punkt x_1, y_1 jest na prostéj, jego spółrzędne powinny sprawdzać równanie téj prostéj i ma się:

$$(2^\circ) \qquad Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Ta równość wyznaczy spółczynniki A, B, lub C; równanie szukane otrzyma się odejmując (1°) i (2°) stronami, co daje:

$$(1) \qquad A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

jest to równanie ogólne prostych przechodzących przez punkt (x_1, y_1); ono zamyka w sobie tylko jeden parametr zmienny, gdyż stałe A i B nie wchodzą do nich tylko przez ich stosunek. Można je napisać pod kształtem

$$(2) \qquad y - y_1 = a(x - x_1),$$

zakładając $a = -\frac{A}{B}$; a jest spółczynnikiem kątowym nieoznaczonym.

(2°) Przypuśćmy punkt stały określony przecięciem się dwóch prostych takich jak:

$$(3) \qquad \begin{cases} M = mx + m_1 y + m_2 = 0, \\ N = nx + n_1 y + n_2 = 0; \end{cases}$$

równaniem ogólném prostych przechodzących przez przecięcie dwóch prostych danych będzie:

$$(4) \qquad M + \lambda N = 0,$$

λ jest stałą nieoznaczoną.

W rzeczy samėj, równanie (4) będąc 1go stopnia względem x i y, przedstawia linią prostą; spółrzędne punktu przecięcia się prostych (3) znoszą M i N, a tém samém, sprawdzają równanie (4); więc prosta (4) przechodzi przez punkt przecięcia się dwóch prostych danych. Nakoniec, równanie (4) jest równaniem ogólném prostych, zadosyć czyniących temu warunkowi; t. j., że ono przedstawia wszystkie proste przechodzące przez punkt dany. W rzeczy samėj, jakakolwiek z tych prostych będzie zupełnie wyznaczoną, gdy ją się zmusi do przejścia przez drugi punkt różny od punktu danego; otóż będzie zawsze można rozporządzić ilością λ w sposób, aby prosta (4) przeszła przez ten drugi punkt dowolnie wzięty; więc równanie (4) będzie mogło przedstawiać którąkolwiek bądź z prostych szukanych.

48. *Prosta równoległa do prostéj stałéj.*

1° Kiedy dwie proste są równoległe, ich spółczynniki kątowe są równe.

Niech będzie, w rzeczy samėj, a spółczynnik kątowy 1széj prostéj, a α jéj kąt z osią Ox; a' spółczynnik kątowy 2giéj prostéj, a α' jéj kąt z Ox; θ wyznaczając kąt osi, ma się

$$a = \frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}\,(\theta - \alpha)}, \qquad a' = \frac{\text{wst}\,\alpha'}{\text{wst}\,(\theta - \alpha')}.$$

Gdy dwie proste sę równoległe, będzie $\alpha = \alpha'$; a tém samém, $a = a'$.

Odwrotnie, gdy spółczynniki kątowe są równe, proste są równoległe.

Ma się, w rzeczy samėj, według tego założenia,

$$\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(\theta - \alpha)} = \frac{\text{wst}\,\alpha'}{\text{wst}(\theta - \alpha')};$$

albo

$$2\text{wst}\,\alpha\,\text{wst}(\theta - \alpha') = 2\text{wst}\,\alpha'\,\text{wst}(\theta - \alpha);$$

ztąd:

$$\text{dos}(\theta - \alpha - \alpha') - \text{dos}(\theta + \alpha - \alpha') = \text{dos}(\theta - \alpha - \alpha') - \text{dos}(\theta - \alpha + \alpha');$$

i nakoniec

$$\text{dos}(\theta + \alpha - \alpha') = \text{dos}(\theta - \alpha + \alpha').$$

Dostawy są równe, summa lub różnica łuków jest równa liczbie całkowitéj okręgów; otóż summa nie może być równą ilości $2K\pi$, gdyż wynikłoby wtedy $\theta = K\pi$, co nie jest; ma się więc:

$$\alpha - \alpha' = K\pi;$$

co wymaga aby proste były równoległe.

2° Wynika ztąd, że równanie prostéj, przechodzącéj przez punkt dany (x_1, y_1) i równoległéj do prostéj mającéj za spółczynnik kątowy a, jest:

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

V°. Równanie prostéj przechodzącéj przez dwa punkta.

49. Niech będą (x_1, y_1), (x_2, y_2) spółrzędne dwóch punktów danych, i

(1) $$Ax + By + C = 0$$

równanie prostéj, A, B, C są ilości nieoznaczone; wyraźmy że ta prosta przechodzi przez dwa punkta dane, otrzyma się warunki:

(2) $$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

(3) $$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Z tych dwóch związków potrzeba wyciągnąć $\frac{A}{C}$ i $\frac{B}{C}$ potém przenieść ich wartości w równanie (1); albo, co na jedno wychodzi, wyrugować A, B, C, między trzema rownaniami (1), (2), i (3), jednorodnemi i 1szego stopnia względem stałych A, B, C; wypadkiem z rugowania jest:

(4) $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

lub, rozwijając ten wyznacznik,

(4*bis*) $$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Można jeszcze wyrugować w ten sposób:

Odejmijmy równanie (2) od równania (1), potém od równania (3), będzie:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0;$$

zkąd wynika dzieląc stronami, po przeniesieniu wyrazów co do B w drugą stronę,

(5) $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

lub jeszcze:

(5*bis*) $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

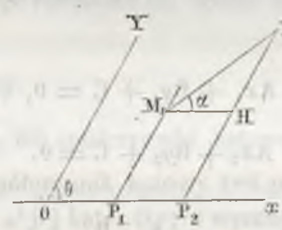
równania (4), (4*bis*), (5), (5*bis*) są różnymi kształtami równania prostéj przechodzącéj przez dwa punkta dane.

Ostatni kształt nam pokazuje, że spółczynnikiem kątowym *a* prostéj przechodzącéj przez dwa punkta jest:

(6) $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Spółczynnik kątowy może się otrzymać wprost sposobem następującym:

Dwa punkta są M_1 i M_2, prowadźmy ich spółrzędne i równoległą M_1H do osi odciętych;



trójkąt M_1HM_2 daje:

$$a = \frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(\theta - \alpha)} = \frac{M_2H}{M_1H};$$

otóż: $$M_2H = y_2 - y_1; \qquad M_1H = x_2 - x_1;$$

więc (6) $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

50. *Równanie prostéj przechodzącéj przez punkt dany* (x_1, y_1) *i przez punkt przecięcia się dwóch prostych danych* $M = 0$, $N = 0$.

Równaniem ogólném prostych przechodzących przez przecięcie dwóch prostych danych jest: n^er^(47),

$$(mx + m_1y + m_2) + \lambda(nx + n_1y + n_2) = 0;$$

wyznaczymy λ wyrażając, że ono przechodzi przez punkt dany; znajduje się za równanie prostéj szukanéj:

(7) $$\frac{mx + m_1y + m_2}{mx_1 + m_1y_1 + m_2} = \frac{nx + n_1y + n_2}{nx_1 + n_1y_1 + n_2}.$$

51. *Warunek aby trzy punkta były w linii prostéj.*

Niech będą (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), trzy punkta dane; równanie prostéj przechodzącéj przez dwa ostatnie, jest: n^er^(49)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

aby trzy punkta były w linii prostéj, potrzeba aby pierwszy był na prostéj łączącéj drugi z trzecim

t. j., aby ich spółrzędne sprawdzały równanie poprzedzające; znajduje się tym sposobem *warunek szukany*:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ten związek rozwinięty przedstawi się pod kształtem następującym:

$$(8bis)\qquad (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_0 - x_0y_2) + (x_0y_1 - x_1y_0) = 0;$$

dwa ostatnie nawiasy wyprowadzają się z piérwszego przez przemianę kołową.

VI°. Spółrzędne punktu dzielącego odcinek w stosunku danym.

52. Niech będą M_1 (x_1, y_1) i M_2 (x_2, y_2) dwa punkta będące końcami odcinka; idzie o znalezienie spółrzędnych (x, y) punktu M, dzielącego odcinek w stosunku wyznaczonym t, j., takim że:

$$(1)\qquad \frac{MM_1}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

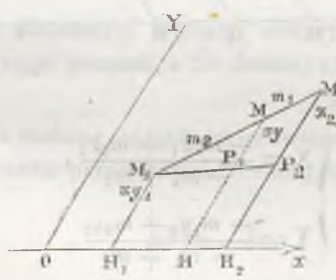
$\frac{m_2}{m_1}$ jest wartością stosunku danego.

Przypuśćmy naprzód punkt M leżący między punktami M_1 i M_2 t. j., *wewnątrz odcinka*; prowadźmy spółrzędne trzech punktów, potém, przez punkt M_1, równoległą do Ox; ma się równość: (na chwilę we wszystkich tych równościach zauważymy, tylko wartość bezwzględną odcinków):

$$\frac{MP}{M_2P_2} = \frac{M_1M}{M_1M_2},$$

lub:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2};$$



zkąd wypada;

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Ma się także:

$$\frac{M_1P}{M_1P_2} = \frac{M_1M}{M_1M_2}, \qquad \text{lub} \qquad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m_2}{m_2 + m_1},$$

zkąd wynika jeszcze:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Tak więc, przypuszczając spółrzędne dodatne, spółrzędnemi punktu M uważanego wewnątrz odcinka M_1M_2 i dzielącego go w stosunku danym, to jest:

$$(1) \qquad \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

są:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \\[2ex] y = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}. \end{cases}$$

Dowiedziemy że te wzory, za pomocą umów stosownych, mogą być ogólnymi, t. j. stosować się do wszystkich przypadków.

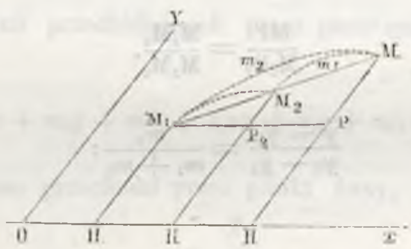
Przypuśćmy, w rzeczy samej, punkt M *zewnętrzny odcinka* M_1M_2; znajdzie się on po prawéj lub po lewéj stronie, według tego jak m_2 będzie wyższém lub niższém od m_1.

Połóżmy go po prawéj stronie, na przykład; otrzyma się, jak to pokazuje figura poniżéj umieszczona:

$$\frac{MP}{M_2P_2} = \frac{m_2}{m_2 - m_1}, \qquad \text{lub} \qquad \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m_2}{m_2 - m_1};$$

potém:

$$\frac{M_1P}{M_1P_1} = \frac{m_2}{m_2 - m_1}, \qquad \text{lub} \qquad \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m_2}{m_2 - m_1}.$$



Wyciąga się z tych dwóch równości:

$$(1^o) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{-m_1 x_1 + m_2 x_2}{-m_1 + m_2}, \\[2ex] Y = \dfrac{-m_1 y_1 + m_2 y_2}{-m_1 + m_2}. \end{cases}$$

Przypuśćmy punkt M po lewéj stronie odcinka M_1M_2, otrzyma się:

$$(2^o) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 - m_2}, \\[2ex] Y = \dfrac{m_1 y_1 - m_2 y_2}{m_1 - m_2}. \end{cases}$$

Widzimy, że grupy wzorów (1°) i (2°) wejdą do grupy (2), *jeżeli się umówi uważać stosunek* $\frac{m_2}{m_1}$ *jako dodatny lub odjemny, według tego jak punkt podziału będzie wzięty wewnątrz lub na zewnątrz odcinka.*

Co się tyczy położenia zewnętrznego punktu podziału, ono będzie zależyć od wartości bezwzględnéj stosunku $\frac{m_2}{m_1}$; i tak, na mocy równości (1) punkt M będzie ze strony M_2 lub ze strony M_1 według tego jak stosunek $\frac{m_2}{m_1}$ będzie większym lub mniejszym od jedności.

Pozostaje nam nakoniec dowieść że wzory (2) są prawdziwe, dla jakichkolwiek bądź znaków spółrzędnych.

W tym celu, przenieśmy osie równolegle do ich pierwotnego położenia, tak aby spółrzędne punktów były wszystkie dodatne; niech będą wtedy (X', Y'), (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2) nowe spółrzędne trzech punktów M, M_1, M_2; i a, b, spółrzędne nowego początku. Wzory (2) dają się zastosować do przypadku obecnego, ponieważ spółrzędne są wszystkie dodatne; otrzyma się, na przykład,

$$(m_1 + m_2)X' = m_1x'_1 + m_2x'_2.$$

Lecz ma się, n^er^ (28) :

$$X = a + X', \qquad x_1 = a + x'_1, \qquad x_2 = a + x'_2.$$

Wyciągając ztąd wartości na X', x'_1, x'_2, i podstawiając ich wartości w związku poprzedzającym, znajduje się, po wykonaniu wszystkich uproszczeń,

$$(m_1 + m_2)X = m_1x_1 + m_2x_2.$$

Wzory (2) dają się więc zastosować do wszystkich przypadków.

53. 1° *Umowa o znakowaniu odcinków.*

Odcinek zawarty między dwoma punktami a i b będzie oznaczonym przez ab; i zgodzimy się,

według zwyczaju przyjętego w Geometryi wyższéj, wskazywać *kierunek odcinka* przez porządek samychże liter, 1^sza^ litera oznaczając *początek*, a 2^ga^ *koniec;* i tak ab i ba będą przedstawiały odcinki kierunków przeciwnych.

Zgodzimy się nadto uważać za *dodatne* odcinki skierowane w pewnym kierunku, a jako *odjemne*, te które będą skierowane w kierunku przeciwnym. Według tego, otrzyma się równość :

$$ab = -ba.$$

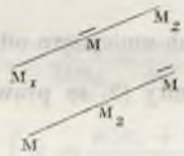
2° *Umowa co do znaku stosunków.*

Jeżeli jakikolwiek punkt dzieli odcinek dany, zgodziliśmy się, w tém co poprzedza, uważać *stosunek* w którym odcinek jest podzielonym jako *dodatny* lub *odjemny* według tego, jak punkt podziału jest wzięty *wewnątrz* lub *na zewnątrz* odcinka.

Gdy się wrócimy do liter pytania poprzedzającego, stosunek będzie przedstawionym, mając wzgląd na umowę (1°), co do wielkości i co do znaku, za pomocą znakowania następującego:

$$\frac{M_1M}{MM_2}; \qquad \text{tak aby} \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

Gdyż, jeżeli punkt podziału M jest wewnętrzny, odcinki M_1M i MM_2 są tegoż samego kierunku



lub tegoż samego znaku; one będą kierunków przeciwnych, jeżeli punkt M jest zewnętrzny.

Ta uwaga jest bardzo ważną; wzory których użyjemy będą zawsze podległe téj podwójnéj umowie; będą one wtedy całkiem ogólne, a ich zastosowanie tak jak i tłómaczenie wypadków do których one prowadzą nie przedstawi wtedy ani trudności, ani dwuznaczności.

VII° Środek średnich odległości.

54. 1° Określenie.

Niech będzie układ n punktów $M_1M_2,\ldots M_n$, których spółrzędnemi są względnie (x_1, y_1), (x_2, y_2),... (x_n, y_n); nazywa się *środkiem odległości proporcyonalnych* tego układu punkt którego spółrzędne X i Y są określone przez związki:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \\ Y &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \end{aligned} \right.$$

$m_1, m_2, \ldots m_n$ są liczbami danemi.

Środkiem średnich odległości układu jest punkt którego spółrzędne są określone przez związki

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \\ Y &= \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}. \end{aligned} \right.$$

Te wzory wyprowadzają się z pierwszych przypuszczając w nich liczby $m_1, m_2, \ldots, m_n$ równe między sobą.

2° Wykreślenie.

Dla wykreślenia środka odległości proporcyonalnych $M_1, M_2, M_3, \ldots$, podzielmy odcinek M_1M_2 w stosunku odwrotnym do stosunku danego $\frac{m_1}{m_2}$; niech będzie I punkt podziału, tak aby:

$$\frac{M_1I}{IM_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

spółrzędnemi x' i y' punktu I będą n$^{\text{er}}$ (52) :

$$x' = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2},$$

$$y' = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Złączmy IM_3, i podzielmy odcinek IM_3 w stosunku odwrotnym stosunku znanego $\dfrac{m_1 + m_2}{m_3}$; niech będzie I′ punkt podziału, tak że :

$$\frac{\mathrm{II}'}{\mathrm{I'M}_3} = \frac{m_3}{m_1 + m_2};$$

spółrzędnemi x'' i y'' punktu I′ będą :

$$\mathrm{I}' \left\{ \begin{aligned} x'' &= \frac{(m_1 + m_2)x' + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ y'' &= \frac{(m_1 + m_2)y' + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \end{aligned} \right. \quad \text{lub} \quad \left\{ \begin{aligned} x'' &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ y'' &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned} \right.$$

Złączmy $\mathrm{I'M}_4$ i podzielmy odcinek $\mathrm{I'M}_4$ w stosunku odwrotnym do stosunku danego $\dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{m_4}$; niech będzie I″ punkt podziału, tak że :

$$\frac{\mathrm{I'I''}}{\mathrm{I''M}_4} = \frac{m_4}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Spółrzędnemi x''' i y''' punktu I″ będą :

$$\left\{ \begin{aligned} x''' &= \frac{(m_1 + m_2 + m_3)x'' + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}, \\ y''' &= \frac{(m_1 + m_2 + m_3)y'' + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}; \end{aligned} \right. \quad \text{lub} \quad \left\{ \begin{aligned} x''' &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}, \\ y''' &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \end{aligned} \right.$$

Prawo następstwa tych wykreśleń jest widocznêm i widzimy że postępując dalèj w ten sposób dojdzie się do punktu określonego przez wzory (1), to jest do środka odległości proporcyonalnych.

Wykreślenie *środka średnich proporcyonalnych* wynika z tego co poprzedza; zostaje się tym sposobem sprowadzonym do prawidła następującego:

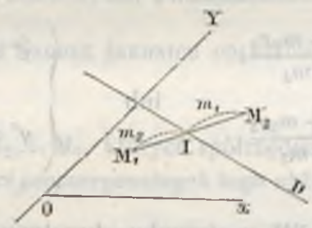
Weźmy środek I boku M_1M_2; złączmy IM_3, i weźmy na IM_3 punkt I′ taki, że $\frac{II'}{I'M_3}=\frac{1}{2}$; złączmy $I'M_4$, i weźmy na $I'M_4$ punkt I″ taki, że $\frac{I'I''}{I''M_4}=\frac{1}{3}$; i tak daléj, aż się zupełnie wyczerpie, bez powtórzenia, różne punkta układu.

VIII° Znaleźć stosunek w którym prosta dana dzieli odcinek dany.

55. *Daje się prosta przez swe równanie.*

Niech będą $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ końce odcinka, i:

(D) (1) $$Ax + By + C = 0$$



równanie prostéj. Prosta D przetnie odcinek M_1M_2 w pewnym punkcie I takim, że:

$$\frac{M_1I}{IM_2}=\frac{m_2}{m_1};$$

idzie o wyznaczenie stosunku $\frac{m_2}{m_1}$. Jeżeli x i y są spółrzędnemi punktu I, ma się n^er^ (52)

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \qquad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2};$$

punkt I należąc do prostéj D, jego spółrzędne powinny sprawdzać równanie (1) prostéj, ma się więc:

$$A(m_1x_1+m_2x_2)+B(m_1y_1+m_2y_2)+C(m_1+m_2)=0.$$

To równanie wyznaczy stosunek nieznany $\frac{m_1}{m_2}$; wyciąga się z niego, w rzeczy saméj,

(2) $$\frac{M_2I}{IM_1}=\frac{m_1}{m_2}=-\frac{Ax_2+By_2+C}{Ax_1+By_1+C}.$$

Punkt podziału I będzie *wewnętrznym* lub *zewnętrznym* odcinka M_1M_2 według tego jak stosunek:

$$-\frac{Ax_2+By_2+C}{Ax_1+By_1+C}$$

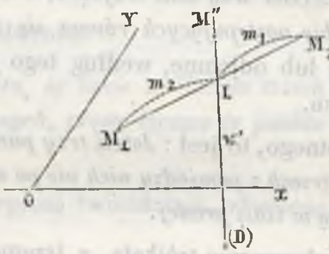
będzie *dodatnym* lub *odjemnym;* a w tym drugim przypadku, punkt I będzie ze strony M_2 lub ze strony M_1 według tego jak wartość bezwzględna tego stosunku będzie niższą lub wyższą od jedności.

56. *Prosta jest daną przez dwa punkta.*

Niech będą jeszcze $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ końcami odcinka; a (x', y'), (x'', y'') spółrzędne dwóch punktów wyznaczających prostą D. Równaniem prostéj D będzie :

$$\text{(D)} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Stosunek $\frac{m_1}{m_2}$ w którym ta prosta dzieli odcinek M_1M_2 będzie danym przez wzór (2); tak więc



znajdzie się :

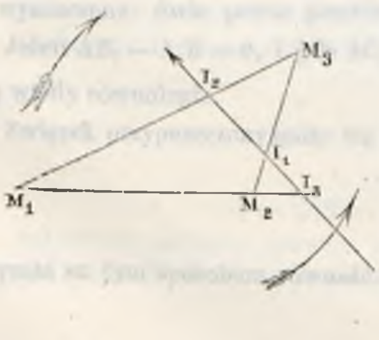
$$(3) \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{M_2I}{IM_1} = -\frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}}.$$

57. Zastosowania.

1° Przetnijmy trójkąt $M_1M_2M_3$ przez jakąkolwiek poprzeczną $I_1I_2I_3$; niech będzie :

$$Ax + By + C = 0$$

równanie téj poprzecznéj ; a I_1, I_2, I_3, punkta w których ona przecina względnie boki M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 ; otrzyma się według wzoru (2) n^ru^ (55) :



$$1°) \quad \begin{cases} \dfrac{M_2I_1}{I_1M_3} = -\dfrac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_3 + By_3 + C}; \\[2ex] \dfrac{M_3I_2}{I_2M_1} = -\dfrac{Ax_3 + By_3 + C}{Ax_1 + By_1 + C}; \\[2ex] \dfrac{M_1I_3}{I_3M_2} = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}. \end{cases}$$

Mnożąc te równości stronami, wypadnie :

$$(2^\circ)\qquad \frac{M_2I_1}{I_1M_3}\cdot\frac{M_3I_2}{I_2M_1}\cdot\frac{M_1I_3}{I_3M_2}=-1.$$

Widzimy, zważając bądź to na umowę (1°), bądź to na umowę (2°) n^ru (53), że ta ostatnia równość jest prawdziwą algebraicznie, to jest że obie strony mają zawsze tenże sam znak; gdyż poprzeczna wyznaczy zawsze na trzech bokach trójkąta albo jeden stosunek odjemny, albo trzy stosunki odjemne. To sprawdzenie wreszcie nie jest potrzebném, gdyż związki któreśmy wyprowadzili są zupełnie ogólne a przeto dające się zastosować do wszystkich przypadków.

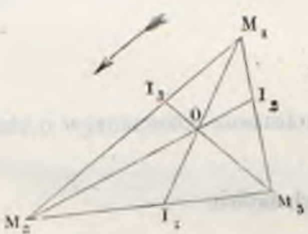
Równość (2°) może się jeszcze napisać, mając wzgląd na 1^szą umowę n^ru (53) :

$$(4)\qquad M_1I_3\,.\,M_2I_1\,.\,M_3I_2=M_1I_2\,.\,M_3I_1\,.\,M_2I_3;$$

to jest, *jeżeli jakakolwiek sieczna przecina trzy boki trójkąta, ona wyznaczy sześć odcinków takich, że iloczyn z trzech odcinków nie po sobie następujących równa się iloczynowi z trzech innych;* odcinki powinny być uważane jako dodatne lub odjemne, według tego jak one są skierowane w pewnym kierunku lub w kierunku przeciwnym.

Łatwo dowieść twierdzenia odwrotnego, to jest : *Jeżeli trzy punkta, leżące na bokach trójkąta, wyznaczają sześć odcinków takich że iloczyn trzech z pomiędzy nich nie po sobie następujących równa się iloczynowi z trzech innych, te trzy punkta są w linii prostéj.*

2° Złączmy punkt O, wzięty na płaszczyźnie trójkąta, z trzema wierzchołkami M_1, M_2, M_3, tego trójkąta; niech będą I_1, I_2, I_3, punkta w których proste OM_1, OM_2, OM_3 spotykają względnie boki M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2; otrzyma się według wzoru (3) n^ru (56), oznaczając przez x_0, y_0 spółrzędne punktu O :



$$(1^\circ)\qquad\left\{\begin{aligned}
\frac{M_2I_1}{I_1M_3}&=-\frac{\begin{vmatrix}x_2&y_2&1\\x_0&y_0&1\\x_1&y_1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_3&y_3&1\\x_0&y_0&1\\x_1&y_1&1\end{vmatrix}};\\[1ex]
\frac{M_3I_2}{I_2M_1}&=-\frac{\begin{vmatrix}x_3&y_3&1\\x_0&y_0&1\\x_2&y_2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_0&y_0&1\\x_2&y_2&1\end{vmatrix}};\\[1ex]
\frac{M_1I_3}{I_3M_2}&=-\frac{\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_0&y_0&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_2&y_2&1\\x_0&y_0&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}}.
\end{aligned}\right.$$

Mnożąc te równości stronami, i uważając że licznik 1go stosunku jest znaku przeciwnego mianownikowi drugiego, i że tak samo rzecz się ma co do innych, przyjdzie :

$$(2^{\circ}) \qquad \frac{M_2I_1}{I_1M_3}\cdot\frac{M_3I_2}{I_2M_1}\cdot\frac{M_1I_3}{I_3M_2} = -1.$$

Zważając na jedną lub drugą z umów nru (53), okaże się, że piérwsza strona jest dodatną. Mając wzgląd na umowę (1°) nru (53), równość (2°) będzie się mogła napisać :

$$(5) \qquad M_1I_3 . M_2I_1 . M_3I_2 = - M_1I_2 . M_2I_1 . M_3I_3 .$$

Więc *jeżeli trzy proste, wychodzące z wierzchołków trójkąta, spotykają się w tymże samym punkcie, one wyznaczają na bokach przeciwległych, sześć odcinków takich, że iloczyn trzech z pomiędzy nich nie po sobie następujących równa się mniéj iloczynowi z trzech innych.*

Dowiedzie się łatwo twierdzenie odwrotne :

Gdy proste leżące na bokach trójkąta, są takie że iloczyn trzech odcinków nie po sobie następujących równa się mniéj iloczynowi z trzech innych, proste łączące te punkta wierzchołkami przeciwległymi przecinają się w tymże samym punkcie.

Ćwiczenie. Dowieść rachunkiem wprost twierdzenia odwrotne dwóch podań niedawno przez nas należycie uzasadnionych.

IX° Przecięcie się prostych.

58. Niech będą dane równania dwóch prostych :

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 ; \end{cases}$$

spółrzędne ich punkta przecięcia się muszą sprawdzać jednocześnie równania tych dwóch prostych; otrzymuje się je więc, rozwiązując układ (1); tym sposobem znajduje się :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}, \\ y = \dfrac{CA_1 - C_1A}{AB_1 - A_1B}. \end{cases}$$

Kiedy mianownik $(AB_1 - A_1B)$ jest różnym od zera, wzory (2) dają na x i y wartości skończone i wyznaczone; dwie proste przecinają się wtenczas oczywiście.

Jeżeli $AB_1 - A_1B = 0$, i gdy $AC_1 - A_1C \gtrless 0$; wartości na x i y są nieskończone; dwie proste są wtedy równoległe.

Związek przypuszczony może się napisać:

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1},$$

wyraża on tym sposobem równość spółczynników kątowych dwóch linii prostych.

Jeżeli $AB_1 - A_1B = 0$, i gdy jednocześnie $AC_1 - A_1C = 0$, wartości na x i y są nieoznaczone; dwie proste jednoczą się, t. j. przystają do siebie w całej rozciągłości.

Aby dwie proste były równoległe, potrzeba i dosyć aby spółczynniki zmiennych były proporcyonalnymi.

To podanie dowodzi się za pomocą wzorów (2) jak to już wykonaliśmy w roztrząsaniu poprzedzającém.

Można także je uzasadnić w sposób następujący:

Równanie ogólne prostych przechodzących przez punkt spotkania się dwóch prostych (1) jest:

$$Ax + By + C + \lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0,$$

albo, robiąc jednorodném i porządkując:

$$(A + \lambda A_1)x + (B + \lambda B_1)y + (C + \lambda C_1)z = 0. \tag{3}$$

Otóż, jeżeli dwie proste (1) są równoległe, ich punkt przecięcia się znajduje się do nieskończoności; równanie (3) musi więc módz przedstawiać prostą w nieskończoności, co wymaga żeby było: $A + \lambda A_1 = 0$, $B + \lambda B_1 = 0$, czyli:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = -\lambda; \tag{4}$$

ten warunek konieczny jest oczywiście dostatecznym; gdyż, jeżeli on jest spełnionym, można kazać przejść prostej w nieskończoności przez ich punkt spotkania się; ten punkt znajduje się więc do nieskończoności.

59. *Warunek ażeby trzy proste spotykały się w jednym punkcie.*

Przypuśćmy że równaniami trzech prostych są:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Jeżeli x i y są spółrzędnemi punktu wspólnego dla tych trzech prostych, potrzeba aby wartości na x i y wyciągnięte z dwóch pierwszych równań, na przykład, i podstawione w trzeciém przywiodły je do tożsamości; t. j. aby wypadek z rugowania zmiennych x i y między trzema równaniami był zerem; ma się więc:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

albo rozwijając

$$A(B_1C_2 - B_2C_1) + A_1(B_2C - BC_2) + A_2(BC_1 - B_1C) = 0; \tag{2bis}$$

takim jest warunek szukany.

60. Jeżeli $M=0$, $N=0$, $P=0$, są równaniami trzech prostych nie zbiegających się, równanie jakiejkolwiek prostéj będzie można zawsze sprowadzić do kształtu:

$$mM+nN+pP=0,$$

m, n, p są ilości stałe.

Niech będą na przykład:

$$(1)\qquad \begin{cases} M=ax+a_1y+a_2=0,\\ N=bx+b_1y+b_2=0,\\ P=cx+c_1y+c_2=0,\end{cases}$$

równania trzech prostych stałych; i niech będzie:

$$(2)\qquad \alpha x+\beta y+\gamma=0$$

równanie jakiejkolwiek prostéj dowolnie wziętéj; α β, γ, są danemi. Będzie można zawsze napisać równanie téj ostatniéj prostéj pod kształtem:

$$mM+nN+pP=0,$$

t. j., zastępując M, N, P, przez funkcye linijne (1) które one przedstawiaja:

$$(3)\qquad m(ax+a_1y+a_2)+n(bx+b_1y+b_2)+p(cx+c_1y+c_2)=0.$$

Dla udowodnienia tego, dosyć jest pokazać że można zawsze znaleźć na m, n, p wartości skończone i wyznaczone tak, aby dwa równania (2) i (3) przedstawiały też samą prostą. Wyraźmy, w rzeczy saméj, że proste (1) i (2) się zbiegają, ma się:

$$(3)\qquad \frac{ma+nb+pc}{\alpha}=\frac{ma_1+nb_1+pc_1}{\beta}=\frac{ma_2+nb_2+pc_2}{\gamma};$$

oznaczywszy przez λ wartość wspólną tych stosunków, znajduje się do wyznaczenia wartości niezmiennych $\frac{m}{\lambda}$, $\frac{n}{\lambda}$, $\frac{p}{\lambda}$, trzy równania:

$$(4)\qquad \begin{cases} ma+nb+pc=\lambda\alpha,\\ ma_1+nb_1+pc_1=\lambda\beta,\\ ma_2+nb_2+pc_2=\lambda\gamma.\end{cases}$$

Wyciągając z tych równań m, n, p, w funkcyi λ i podstawiając ich wartości w równaniu (3), ilość nieoznaczona λ zniknęłaby jako czynnik wspólny. Otóż warunek konieczny i dostateczny aby wartości na m, n, p były skończone i wyznaczone jest, żeby mianownik wspólny t. j., wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

był różnym od zera; warunek ten ma miejsce sam przez się, gdyż jeśliby to wyrażenie było zerem, trzy proste M, N, P, byłyby zbiegającemi się (59); co jest przeciwném przyjętemu założeniu. Więc...

X° Równania jednorodne.

61. *Wszelkie równanie jednorodne i* m[tego] *stopnia między spółrzędnemi* x *i* y *jakiegokolwiek punktu, przedstawia pęk* m *prostych mających za wierzchołek początek.*

1[sze] Dowodzenie.

Niech będzie $f(x, y) = 0$ jakiekolwiek równanie jednorodne, a A jakikolwiek punkt miejsca przedstawionego przez to równanie; spółrzędne (a, b) punktu A muszą sprawdzać równanie dane, t. j., że się otrzyma:

$$f(a; b) = 0. \tag{1}$$

Lecz funkcya $f(x, y)$ jest jednorodną, ma się przeto tożsamość:

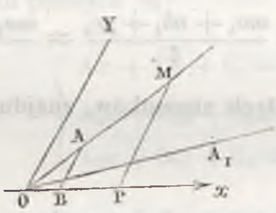
$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y); \tag{2}$$

którato tożsamość da, według związku (1),

$$f(\lambda a, \lambda b) = 0; \tag{3}$$

t. j., że jakiémkolwiek bądź jest λ, punkt którego spółrzędnymi są λa i λb będzie należeć do miejsca określonego przez równanie dane. Otóż punkt $(\lambda a, \lambda b)$ jest jakimkolwiek punktem prostéj OA; niech będzie, w rzecy samej, $OP = \lambda a$, prowadźmy PM równoległą do Oy aż do jéj spotkania się w M z OA; ma się:

$$\frac{MP}{AB} = \frac{OP}{OB}, \quad \text{lub} \quad \frac{MP}{b} = \frac{\lambda a}{a}; \quad \text{zkąd} \quad MP = \lambda b.$$



Wynika ztąd że wszystkie punkta prostéj OA należą do miejsca geometrycznego o którém mowa.

Jeżeli (a_1, b_1) są spółrzędnemi innego punktu A_1 sprawdzającego równanie dane, dowiedzie się podobnież że prosta OA_1 jest częścią miejsca; etc... Więc równanie $f(x, y) = 0$ przedstawia pęk prostych przechodzących przez początek; otóż, nie otrzyma się więcéj jak m prostych, gdyż krzywo, będąca tegoż samego rzędu, nie może być spotkaną w więcéj jak m punktach przez jakąkolwiek prostą n[er] (35). Tak więc równanie jednorodne $f(x, y)=0$ przedstawia m prostych rzeczywistych lub urojonych przechodzących przez początek; niektóre z pomiędzy tych m prostych mogą do siebie przystawać.

2[gie] Dowodzenie.

Równanie $f(x, y) = 0$ jest jednorodném, ma się więc tożsamość n[ru] (15)

$$f(x, y) = x^m\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{4}$$

Założmy $\frac{y}{x}=t$; wielomian $l(1, t)$, stopnia m, może się rozłożyć na m czynników 1^{go} stopnia rzeczywiseych lub urojonych; niech będzie naprzykład:

$$f(1, t)=(t-a_1)(t-a_2)....(t-a_m).$$

Tożsamość (4) daje wtedy, zastępując t przez $\frac{y}{x}$,

$$f(x, y)=x^m\left(\frac{y}{x}-a_1\right)\left(\frac{y}{x}-a_2\right)....\left(\frac{y}{x}-a_m\right);$$

a tém samém równanie krzywéj da się napisać:

$$(5) \qquad f(x, y)=(y-a_1x)(y-a_2x)....(y-a_mx)=0.$$

To równanie będzie oczywiście sprawdzoném założywszy:

albo $\qquad y-a_1x=0,$

albo $\qquad y-a_2x=0,$

. . . .

albo $\qquad y-a_mx=0.$

Równanie $f(x, y)=0$ jest więc sprawdzoném przez spółrzędne wszystkich punktów leżących na tych m prostych; te m prostych stanowią przeto miejsce geonometryczne przedstawione przez równanie jednorodne $f(x, y)=0$.

62. *Równanie* f(x) = 0, *niezależne od* y, *i stopnia* m, *przedstawia* m *prostych równoległych do osi rzędnych.*

To równanie może się oczywiście napisać:

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)....(x-a_m)=0$$

i podanie wysłowione wynika ztąd bezpośrednio.

63. *Liczba związków koniecznych ażeby jakiekolwiek równanie stopnia* m *przedstawiało* m *prostych przechodzących przez początek jest równą* $\frac{m(m+1)}{2}$.

Liczbą całkowitą wyrazów równania jest n^{er} (36) $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$; według założenia równanie musi być jednorodném n^{ru} (61); potrzeba więc znieść spółczynniki wszystkich wyrazów następujących po wyrazach stopnia m; otóż liczbą tych wyrazów jest $\frac{(m+1)(m+2)}{2}-(m+1)$, albo $\frac{m(m+1)}{2}$.

Wniosek 1. Ażeby jakiekolwiek równanie stopnia m przedstawiało m prostych przechodzących przez jakikolwiek punkt dany, potrzeba $\frac{m(m+1)}{2}$ związków między jego spółczynnikami.

Niech będą, w rzeczy saméj, a i b spółrzędnemi punktu, przenieśmy początek w ten punkt, musimy zrobić jednorodném nowe równanie, co prowadzi do $\frac{m(m+1)}{2}$ związków.

Wniosek 2. Ażeby jakiekolwiek równanie stopnia m przedstawiało m prostych zbiegających się, potrzeba $\left[\frac{m(m+1)}{2}-2\right]$ związków między jego spółczynnikami.

Punkt zbiegania się jest nieoznaczonym, potrzeba wyrugować ilości a i b między związkami poprzednio otrzymanymi; więc....

64. *Liczba warunków* ażeby jakiekolwiek równanie stopnia m przedstawiało m prostych równoległych do jednéj z osi spółrzędnych jest równą $\frac{m(m+1)}{2}$. Przychodzi się do tego wniosku opierając się na podaniu n[ru] (62) i rozumując zupełnie tymże samym sposobem jak poprzednio.

Można to wyprowadzić także z podań wystawionych w n[rze] (63), a dających się zastosować do przypadku prostych równoległych.

XI°. Punkta i proste urojone.

65. Wprowadzenie urojonych do badań geometrycznych jest rzeczą nieodbicie potrzebną, bez czego, wysłowienia ogólne stałyby się niepodobnemi, prawa ogólne zniknęłyby. W geometryi analitycznéj, ilości urojone przedstawiają się koniecznie; w tym celu dosyć jest oznaczyć z dokładnością znaczenie które winniśmy przywiązywać do tych wyrażeń i wskazać umowy, które nam wypada przyjąć.

Kiedy spółrzędne x i y są rzeczywistemi, wyznaczają one jakikolwiek punkt; kiedy te spółrzędne będą urojonemi, powiemy że one wyznaczają jakikolwiek *punkt urojony.*

Dwa punkta urojonych sprzężone są dwoma punktami urojonemi, których spółrzędne są względnie urojonych sprzężonemi; i tak

$$(1)\qquad M_1\begin{cases} x_1 = a + a_1\sqrt{-1}, \\ y_1 = b + b_1\sqrt{-1}, \end{cases}\qquad M_2\begin{cases} x_2 = a - a_1\sqrt{-1}, \\ y_2 = b - b_1\sqrt{-1}. \end{cases}$$

są dwoma punktami urojonych sprzężonemi.

Równanie 1[go] stopnia, ze spółczynnikami rzeczywistymi,

$$(2)\qquad Ax + By + C = 0$$

przedstawia jakąkolwiek prostą; to równanie jest sprawdzone przez spółrzędne w niezliczoném mnóstwie punktów rzeczywistych; ono jest także sprawdzone przez spółrzędne w niezliczoném mnóstwie punktów urojonych; lecz jednemu punktowi urojonemu (leżącemu na téjże saméj prostéj) odpowiada zawsze jakikolwiek punkt urojony sprzężony (leżący na téjże saméj prostéj).

Kiedy spółczynniki równania (2) będą urojonymi, powiemy że równanie (2) przedstawia jakąkolwiek *prostą urojoną.*

Zrobiemy nad prostemi urojonemi spostrzeżenia następujące:

1° Jest zawsze jakikolwiek punkt rzeczywisty leżący na jakiéjkolwiek prostéj urojonéj i nieznajduje się na niéj jak tylko jeden; w rzeczy saméj, równanie tego rodzaju prostéj jest kształtu

$$(3) \qquad (A_1 + A_2\sqrt{-1})x + (B_1 + B_2\sqrt{-1})y + (C_1 + C_2\sqrt{-1}) = 0;$$

to równanie jest oczywiście sprawdzoném przez spółrzędne punktu rzeczywistego przecięcia się dwóch prostych rzeczywistych.

$$(4) \qquad \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0; \end{aligned}$$

nie może oczywiście w niém się znajdować tylko sam jeden punkt rzeczywisty, gdyż inaczéj prosta byłaby rzeczywistą.

2° Nazwiemy spółczynnikiem kątowym prostéj urojonéj (3) stosunek

$$-\frac{A_1 + A_2\sqrt{-1}}{B_1 + B_2\sqrt{-1}};$$

lecz spółczynnik kątowy będzie rzeczywisty kiedy się otrzyma:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2},$$

t. j., kiedy punkt rzeczywisty leżący na prostéj urojonéj będzie w nieskończoności.

3° Na jakiéjkolwiek prostéj urojonéj, nie ma pary punktów urojonych sprzężonych, chyba w nieskończoności.

Kiedy wyrazimy. w rzeczy saméj że równanie (3) jest sprawdzoném przez spółrzędne dwóch punktów (1), otrzyma się cztéry związki.

$$\begin{aligned} A_1a + B_1b + C_2 - (A_2a_1 + B_2b_1) = 0, \\ A_2a + B_2b + C_2 + (A_1a_1 + B_1b_1) = 0, \\ A_1a + B_1b + C_1 + (A_2a_1 + B_2b_1) = 0, \\ A_2a + B_2b + C_2 - (A_1a_1 + B_1b_1) = 0; \end{aligned}$$

zkąd wypada:

$$\begin{cases} A_1a_1 + B_1b_1 = 0, \\ A_2a_1 + B_1b_1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1a + B_1b + C_1 = 0, \\ A_2a + B_2b + C_2 = 0. \end{cases}$$

Ilości a_1 i b_1 są różnemi od zera, dwa 1sze związki wymagają żeby było

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};$$

a wtedy wartości na a i b dane przez dwa ostatnie są nieskończonemi.

4° Wszelka prosta przechodząca przez dwa punkta urojone sprzężone jest rzeczywistą. Ten fakt jest następstwem spostrzeżenia poprzedzającego; jego sprawdzenie jest wreszcie łatwém.

66 1°. Równanie jakiéjkolwiek prostéj rzeczywistéj może być przedstawione przez:

$$\text{(5)} \qquad \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}, \qquad \text{gdzie } m^2 + n^2 = 1;$$

ilości m i n wyznaczają dyrekcyą dodatną téj prostéj poczynając od punktu M_1, ilości $-m$ i $-n$ wyznaczają dyrekcyą odjemną (n^{er} (41), 4°).

ozciągniemy tę umowę do prostych urojonych; dajmy że x_1, y_1, m, n, są urojonemi, powiemy że m i n wyznaczają jeden z kierunków prostéj urojonéj (5), a zaś $-m$ i $-n$ wyznaczają inny kierunek wprost pierwszemu przeciwny.

2° W przypadku odcinka rzeczywistego M_1M_2 widzieliśmy n[er] (33) równanie (10), że długość go odcinka będzie daną co do wielkości i co do znaku przez związki:

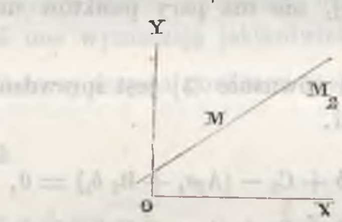
$$M_1M_2 = \frac{x_2 - x_1}{\text{dos}\,\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\text{dos}\,\beta},$$

albo

$$M_1M_2 = \frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n},$$

(6) przypuściwszy

$$m^2 + n^2 = 1.$$



Gdy M_1 i M_2 są dwoma punktami urojonemi, zgodzimy się określić przez równości (6) wielkość i kierunek odcinka M_1M_2.

Niech będą M_1, M_2, M_3, trzy punkta urojone w linii prostéj; kiedy m i n są ilościami wyznaczającemi dyrekcyą téj prostéj; otrzyma się, według tego co poprzedza:

$$M_1M_2 = \frac{x_2 - x_1}{m} \quad \text{lub} \quad \frac{y_2 - y_1}{n},$$

$$M_2M_3 = \frac{x_3 - x_2}{m} \quad \text{lub} \quad \frac{y_3 - y_2}{n},$$

$$M_3M_1 = \frac{x_1 - x_3}{m} \quad \text{lub} \quad \frac{y_1 - y_3}{n};$$

zkąd wypada

$$\text{(7)} \qquad M_1M_2 + M_2M_3 + M_3M_1 = 0;$$

jestto podanie zasadnicze o dodawaniu odcinków w linii prostéj; widzimy że ono daje się zastosować do odcinków urojonych.

Tak więc znajduje się dokładnie wyrażoném znaczenie które winniśmy dać wyrażeniom: *dyrekcya* jakiéjkolwiek *prostéj urojonéj*; *kierunek i wielkość* jakiegokolwiek *odcinka urojonego*; *dodawanie algebraiczne odcinków urojonych* w linii prostéj.

67. Nakoniec zgodzimy się zastosować do punktów urojonych wzory (2) n^ru (52). I tak, mając dane dwa punkta urojone $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$, związki.

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \\ y &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right.$$

wyznaczą jakikolwiek punkt $M(x,y)$, ogólnie urojony, dzielący odcinek urojony M_1M_2 w stosunku

$$(8\ bis)\qquad \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1};$$

przyjmiemy także do znakowania odcinków urojonych umowę n^ru (53), stosunek $\frac{m_2}{m_1}$ może także być urojonym.

Jako przypadek szczególny tych wzorów punkt *środkowy* M odcinka urojonego M_1M_2 będzie określony przez związki:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Punkt środkowy odcinka utworzonego przez dwa punkta urojone sprzężone *jest rzeczywistym.*

§ II. — KĄTY I ODLEGŁOŚCI.

1° Kąt jakiéjkolwiek prostéj z osiami spółrzędnych.

68. Mając dane równanie jakiéjkolwiek prostéj

$$(1)\qquad Ax + By + C = 0,$$

spółczynnikiem kątowym a téj prostéj jest $\frac{A}{B}$, i ma się n^er (39)

$$(2)\qquad a = -\frac{A}{B} = \frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(\theta - \alpha)},$$

α jest kątem prostéj z osią odciętych.

Z równości (2) wyciąga się

$$a(\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\alpha - \text{wst}\,\alpha\,\text{dos}\,\theta) = \text{wst}\,\alpha;$$

zkąd

$$\text{st}\,\alpha = \frac{a\,\text{wst}\,\theta}{1 + a\,\text{dos}\,\theta}; \tag{3}$$

ten wzór daje poznać kąt α prostéj z osią odciętych w funkcyi spółczynnika kątowego a z tą prostą.

Kieby osie są prostokątne, $\theta = 90^0$, i ma się:

$$\text{st}\,\alpha = a. \tag{3 bis}$$

Dowodzi się bezpośrednio, za pomocą wzoru (3), że jeżeli spółczynniki kątowe a i a' dwóch prostych są równe, dwie proste są równoległe.

Ma się w rzeczy samej, oznaczając przez α i α' kąty tych prostych z Ox,

$$\text{st}\,\alpha = \frac{a\,\text{wst}\,\theta}{1 + a\,\text{dos}\,\theta},$$

$$\text{st}\,\alpha' = \frac{a'\,\text{wst}\,\theta}{1 + a'\,\text{dos}\,\theta};$$

otóż jeśli $a' = a$, wypada oczywiście $\text{st}\,\alpha' = \text{st}\,\alpha$; lub

$$\alpha' = \alpha + k\pi.$$

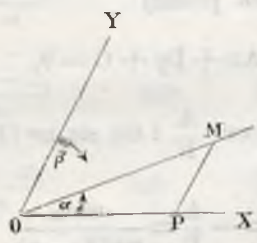
Wynika także że związku (2) że równaniami dwójsiecznych kątów osi są:

$$y - x = 0, \quad y + x = 0;$$

1sze równanie daje dwójsieczną kąta części dodatnych osi; 2gie daje dwójsieczną kąta spełniającego kąt osi dany θ., t. j., dwójsieczną kąta $(\pi - \theta)$.

69. *Związek między kątami jakiéjkolwiek prostéj z osiami; wyznaczenie tych kątów.*

Prowadźmy przez początek spółrzędnych równoległą do prostéj uważanéj; niech będą α i β kąty téj prostéj z osiami Ox i Oy, te kąty są określone jak to było powiedzianém w przypadku 5tym, nru (40);



niech dędzie M jakikolwiek punkt prostéj, i $OM = \rho$; rzućmy obwód OPM spółrzędnych x i y, tego punktu na Ox, Oy, i OM, ma się (θ jest kątem osi)

$$(4)\qquad \begin{cases} x + y\,\mathrm{dos}\,\theta = \rho\,\mathrm{dos}\,\alpha \\ x\,\mathrm{dos}\,\theta + y = \rho\,\mathrm{dos}\,\beta \\ x\,\mathrm{dos}\,\alpha + y\,\mathrm{dos}\,\beta = \rho. \end{cases}$$

Rugując x i y między temi równaniami, znajduje się związek szukany między kątami α i β, to jest:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{dos}\,\theta & \mathrm{dos}\,\alpha \\ \mathrm{dos}\,\theta & 1 & \mathrm{dos}\,\beta \\ \mathrm{dos}\,\alpha & \mathrm{dos}\,\beta & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ta równość przestawia się pod kształtem następującym:

$$(6)\qquad \mathrm{dos}^2\alpha + \mathrm{dos}^2\beta - 2\,\mathrm{dos}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\beta\,\mathrm{dos}\,\theta = \mathrm{wst}^2\theta.$$

Będziemy mieli w wielu zdarzeniach sposobność użycia tego związku.

Jeżeli się daje równanie prostéj

$$Ax + By = 0,$$

identyfikując to równanie z równaniem wynikającém z dwóch piérwszych równań (4), to jest:

$$\frac{x + y\,\mathrm{dos}\,\theta}{\mathrm{dos}\,\alpha} = \frac{x\,\mathrm{dos}\,\theta + y}{\mathrm{dos}\,\beta},$$

znajduje się:

$$(7)\qquad \frac{\mathrm{dos}\,\beta - \mathrm{dos}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\theta}{A} = \frac{\mathrm{dos}\,\beta\,\mathrm{dos}\,\theta - \mathrm{dos}\,\alpha}{B} = k.$$

Z równości (7) wyciąga się

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{dos}\,\alpha = k\,\dfrac{A\,\mathrm{dos}\,\theta - B}{\mathrm{wst}^2\theta}, \\ \mathrm{dos}\,\beta = k\,\dfrac{A - B\,\mathrm{dos}\,\theta}{\mathrm{wst}^2\theta}. \end{cases}$$

Podstawiwszy te wartości w związku (6), wypada, po niektórych uproszczeniach,

$$(11)\qquad k^2 = \frac{\mathrm{wst}^4\theta}{A^2 + B^2 - 2AB\,\mathrm{dos}\,\theta}.$$

Ma się więc ostatecznie

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathrm{dos}\,\alpha = \dfrac{A\,\mathrm{dos}\,\theta - B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\,\mathrm{dos}\,\theta}}, \\ \mathrm{dos}\,\beta = \dfrac{A - B\,\mathrm{doz}\,\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\,\mathrm{dos}\,\theta}}; \end{cases} \quad \text{zkąd} \quad \frac{\mathrm{dos}\,\alpha}{\mathrm{dos}\,\beta} = \frac{A\,\mathrm{dos}\,\theta - B}{A - B\,\mathrm{dos}\,\theta}.$$

Znaki górne i dolne powinny być brane razem; i jakiemkolwiek jest założenie wybrane, dyrekcya prostéj znajduje się bez dwuznaczności, jeśli się ma wzgląd na dwa równania (12) jednocześnie.

11° Kąt dwóch prostych.

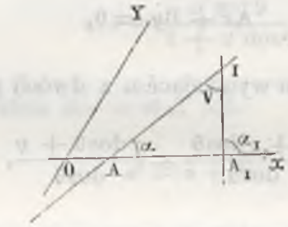
70. Niech będą równaniami dwóch prostych

$$(1)\qquad \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \end{cases}$$

równania które można napisać

$$(2)\qquad \begin{cases} y = ax + b \\ y = a_1x + b_1 \end{cases},\ \text{założywszy}\ \begin{cases} a = -\dfrac{A}{B},\ b = -\dfrac{C}{B}, \\ a_1 = -\dfrac{A_1}{B_1},\ b_1 = -\dfrac{C_1}{B_1}. \end{cases}$$

Jeżeli α i α_1 są kątami, części dwóch prostych, znajdujących się po nad osią odciętych, z dyrekcyą



dodatnéj osi, ma się

$$(3)\qquad V = \alpha_1 - \alpha.$$

V jest kątem AIA_1.

Ztąd wypada

$$\operatorname{st} V = \frac{\operatorname{st}\alpha_1 - \operatorname{st}\alpha}{1 + \operatorname{st}\alpha \operatorname{st}\alpha_1},$$

Otóż według n^ru (68)

$$\operatorname{st}\alpha = \frac{a \operatorname{wst}\theta}{1 + a \operatorname{dos}\theta},\qquad \operatorname{st}\alpha_1 = \frac{a_1 \operatorname{wst}\theta}{1 + a_1 \operatorname{dos}\theta};$$

podstawiając te wartości we wzorze poprzedzającym, znajduje się

$$(4)\qquad \operatorname{st} V = \frac{(a_1 - a)\operatorname{wst}\theta}{1 + (a + a_1)\operatorname{dos}\theta + aa_1};$$

albo, zastępując a i a_1 przez ich wartości $-\dfrac{A}{B}$, $-\dfrac{A_1}{B_1}$

$$(4\ bis)\qquad \operatorname{st} V = \frac{(AB_1 - A_1B)\operatorname{wst}\theta}{AA_1 + BB_1 - (AB_1 + A_1B)\operatorname{dos}\theta}$$

W przypadku osi prostokątnych, gdzie $\theta = 90^0$, te wzory stają się

(5) $$\operatorname{st} V = \frac{a_1 - a}{1 + aa_1}$$

(5 *bis*) $$\operatorname{st} V = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1}.$$

Dwie proste tworzą zawsze dwa kąty spełniające; kiedy się żąda, za pomocą tego wzoru, ocenić bez dwuznaczności jeden z tych kątów, będzie potrzeba naprzód napisać związek (3) określający kąt uważany, przypominając sobie powyżej wzmiankowane znaczenie kątów α, które daje wzór (3) n^ru (68).

Roztrząsanie wzorów (4) i (5).

Uważmy naprzód że licznik i mianownik wartości st V nie mogą być zerami jednocześnie dla wartości rzeczywistych na a i a_1.

W rzeczy samej, $\operatorname{wst}\theta$ jest różną od zera, przeto gdyby się miało jednocześnie

$$a_1 - a = 0,$$

$$1 + aa_1 + (a + a_1)\operatorname{dos}\theta = 0;$$

ztądby wypadło

$$1 + a^2 + 2a\operatorname{dos}\theta = 0, \quad \text{lub} \quad (a + \operatorname{dos}\theta)^2 + \operatorname{wst}^2\theta = 0;$$

równość nie mogąca nigdy być sprawdzoną, ponieważ $\operatorname{wst}\theta$ jest różną od zera.

1° Aby dwie proste były równoległe, potrzeba i dosyć jest ażeby st V była zerem, t. j., aby spółczynniki kątowe były sobie równymi.

2° Aby dwie proste były prostopadłe, trzeba i dosyć jest aby st V była nieskończoną; więc, według uwagi zrobionéj, będzie miało miejsce, jeżeli

(6) $$1 + aa_1 + (a + a_1)\operatorname{dos}\theta = 0;$$

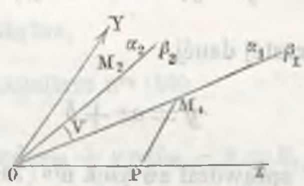
a w przypadku osi prostkątnych

(6 *bis*) $$1 + aa_1 = 0.$$

Związek (6) albo (6 *bis*) jest warunkiem (koniecznym i dostatecznym) aby dwie proste były prostokątnemi.

71. Można jeszcze rozwiązać to pytanie sposobem następującym:

Niech będą α_1 i β_1 kąty prostéj OM_1 z osiami, α_2 i β_2 kąty prostéj OM_2; prowadźmy spółrzędne



jakiegokolwiek punktu M_1 pierwszéj prostéj, i rzućmy obwód OPM_1 na Ox, Oy i OM, oznaczywszy przez V kąt M_1OM_2. Znajduje się tym sposobem, zakładając $OM_1 = l$:

$$x + y\,\mathrm{dos}\,\theta = l\,\mathrm{dos}\,\alpha_1,$$

$$x\,\mathrm{dos}\,\theta + y = l\,\mathrm{dos}\,\beta_1,$$

$$x\,\mathrm{dos}\,\alpha_2 + y\,\mathrm{dos}\,\beta_2 = l\,\mathrm{dos}\,V;$$

wyrugowawszy x, y i l między temi trzema równościami, znajduje się

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{dos}\,\theta & \mathrm{dos}\,\alpha_1 \\ \mathrm{dos}\,\theta & 1 & \mathrm{dos}\,\beta_1 \\ \mathrm{dos}\,\alpha_2 & \mathrm{dos}\,\beta_2 & \mathrm{dos}\,V \end{vmatrix} = 0,$$

albo

$$(1\,bis)\qquad \mathrm{wst}^2\theta\,\mathrm{dos}\,V = \mathrm{dos}\,\alpha_1\mathrm{dos}\,\alpha_2 + \mathrm{dos}\,\beta_1\mathrm{dos}\,\beta_2 - (\mathrm{dos}\,\alpha_1\mathrm{dos}\,\beta_2 + \mathrm{dos}\,\alpha_2\mathrm{dos}\,\beta_1)\mathrm{dos}\,\theta;$$

a w przypadku osi prostokątnych:

$$(2)\qquad \mathrm{dos}\,V = \mathrm{dos}\,\alpha_1\mathrm{dos}\,\alpha_2 + \mathrm{dos}\,\beta_1\mathrm{dos}\,\beta_2.$$

Jeżeli teraz równania dwóch prostych są dane pod kształtem

$$(3)\qquad \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0; \end{cases}$$

wyciągnie się naprzód jedną po drugiej wartość $\mathrm{dos}\,\alpha_1$, $\mathrm{dos}\,\beta_1$; $\mathrm{dos}\,\alpha_2$, $\mathrm{dos}\,\beta_2$, za pomocą wzorów (12) n^ru (69); po czém, podstawiając te wartości we wzorze (1 *bis*), otrzyma się

$$(4)\qquad \mathrm{dos}\,V = \frac{AA_1 + BB_1 - (A_1B + AB_1)\mathrm{dos}\,\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\,\mathrm{dos}\,\theta}\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1B_1\mathrm{dos}\,\theta}}.$$

Ten wzór daje dwa kąty spełniające jakie tworzą dwie proste; ztądto pochodzi obecność znaku podwójnego.

III° Równanie prostéj przechodzącéj przez punkt dany i prostopadłéj do linii prostéj danéj.

72. Przypuśćmy naprzód punkt dany przez jego spółrzędne x_1 i y_1.

Równaniem ogólném prostych przechodzących przez ten punkt jest

$$y - y_1 = a'(x - x_1);$$

aby ta prosta była prostopadłą do prostéj danéj

$$(1)\qquad y = ax + b$$

potrzeba aby spółczynnik kątowy a' sprawdzał związek n^ru (70)

$$1 + aa' + (a + a')\mathrm{dos}\,\theta = 0;$$

zkąd się wyciąga

(2) $$a' = -\frac{1 + a \operatorname{dos}\theta}{a + \operatorname{dos}\theta}.$$

Równaniem prostopadłéj szukanéj jest więc

(3) $$y - y_1 = -\frac{1 + a \operatorname{dos}\theta}{a + \operatorname{dos}\theta}(x - x_1);$$

a w przypadku osi prostokątnych

(3 *bis*) $$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1).$$

73. Przypuśćmy punkt dany przecięciem się dwóch prostych

(1) $$\begin{cases} \mathrm{M} = mx + m_1 y + m_2 = 0, \\ \mathrm{N} = nx + n_1 y + n_2 = 0; \end{cases}$$

i niech będzie równanie prostej danéj

(2) $$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0.$$

Równaniem ogólném prostych przechodzących przez punkt (1), jest

(3) $$\mathrm{M} + \lambda \mathrm{N} = 0,$$

lub

$$(m + \lambda n)x + (m_1 + \lambda n_1)y + m_2 + \lambda n_2 = 0.$$

Wyraźmy że ta prosta jest prostopadłą do prostéj danéj (2); ma się, postawiwszy się w przypadku osi prostokątnych

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \cdot \frac{m + \lambda n}{m_1 + \lambda n_1} = -1;$$

zkąd się wyciąga

$$\lambda = -\frac{\mathrm{A}m + \mathrm{B}m_1}{\mathrm{A}n + \mathrm{B}n_1}.$$

Równanie prostopadłéj będzie, zatém

(4) $$\frac{mx + m_1 y + m_2}{\mathrm{A}m + \mathrm{B}m_1} = \frac{nx + n_1 y + n_2}{\mathrm{A}n + \mathrm{B}n_1}.$$

IV° Odległość punktu danego od linii prostéj danéj.

74. Przypuśćmy naprzód osie prostokątne.

1° Równanie prostéj jest dane pod kształtem n^ru (40)

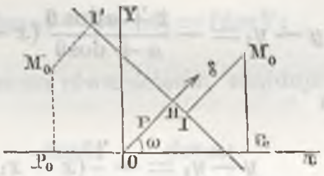
(1) $$x \operatorname{dos}\omega + y \operatorname{wst}\omega - p = 0,$$

i niech będą x_0, y_0 spółrzędnemi punktu.

Dwa przypadki się przedstawiają :

1szy PRZYPADEK : Punkt $M_0(x_0, y_0)$ i początek spółrzędnych są z obu slron prostéj. Prowadźmy rostopadłą M_0I i spółrzędne punktu M_0, potém rzućmy obwód OP_0M_0I na OH; ma się

$$p = x_0 \operatorname{dos}\omega + y_0 \operatorname{wst}\omega + \delta_0 \operatorname{dos}(\widehat{M_0I, OH}),$$



oznaczając przez δ_0 wartość bezwzględną odległości szukanéj; otóż kąt M_0I z OH jest równy 180°, więc

(2) $$\delta_0 = x_0 \operatorname{dos}\omega + y_0 \operatorname{wst}\omega - p.$$

2gi PRZYPADEK : Punkt $M'_0(x'_0, y'_0)$ i początek O są z téj saméj strony względem prostéj. Rzućmy jeszcze na OH obwód $OP'_0M'_0I'H$; ma się

$$p = x'_0 \operatorname{dos}\omega + y'_0 \operatorname{wst}\omega + \delta'_0 \operatorname{dos}(\widehat{M'_0I', OH}),$$

oznaczywszy przez δ'_0 wartość bezwzględną odległości. Otóż kąt M'_0I' z OH jest tu także równym 180°, a zatém

(3) $$\delta'_0 = p - x'_0 \operatorname{dos}\omega - y'_0 \operatorname{wst}\omega.$$

Słowem, odległość punktu $M_0(x_0, y_0)$ od prostéj

(1) $$x \operatorname{dos}\omega + y \operatorname{wst}\omega - p = 0$$

jest daną, w wartości bezwzględnéj, przez wzór

(4) $$\delta = \pm (x_0 \operatorname{dos}\omega + y_0 \operatorname{wst}\omega - p);$$

$+$ jeżeli początek i punkt M_0 są z obu stron prostéj; $-$ jeżeli początek i punkt M_0 są z téj saméj strony względem prostéj.

2° Równanie prostéj jest danêm pod kształtem ogólnym

(5) $$Ax + By + C = 0.$$

To równanie może być sprowadzoném do kształtu

(6) $$x \operatorname{dos}\omega + y \operatorname{wst}\omega - p = 0,$$

założywszy warunki

(7) $$\frac{\operatorname{dos}\omega}{A} = \frac{\operatorname{wst}\omega}{B} = \frac{-p}{C}; \qquad \operatorname{dos}^2\omega + \operatorname{wst}^2\omega = 1.$$

Otóż odległość punktu (x_0, y_0) od prostéj (6) jest

$$\delta = x_0 \operatorname{dos}\omega + y_0 \operatorname{wst}\omega - p.$$

Związek (7) nam daje na wartości ilości nieznanych $\operatorname{dos}\omega$, $\operatorname{wst}\omega$, i p

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{dos}\omega &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \\ \operatorname{wst}\omega &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \\ p &= \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \end{aligned}\right.$$

Podstawiając w wyrażeniu poprzedzającém na δ, będzie

(8)
$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

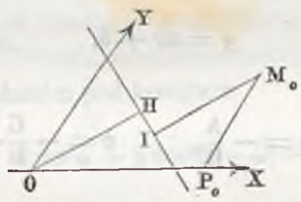
Tak więc *odległość punktu od prostéj jest równa* 1[széj] *stronie równania prostéj, w którém się zastąpiło* x *i* y *przez spółrzędne punktu danego, podzielonéj przez pierwiastek z summy kwadratów spółczynników ilości zmiennych.*

75. Przypuśćmy teraz osie pochyłe.

1[sza] Metoda. Możemy przypuścić równanie prostéj danéj sprowadzone do kształtu

(1)
$$x\operatorname{dos}\omega + y\operatorname{dos}(\theta-\omega) - p = 0.$$

Rzucając obwód OP_0M_0IH na prostą OH i rozumując jak w przypadku poprzedzającym, widzimy



że odległość w wartości bezwzględnéj punktu $M_0(x_0, y_0)$ od prostéj (1) jest daną za pomocą wzoru

(2)
$$\delta = \pm(x_0\operatorname{dos}\omega + y_0\operatorname{dos}(\theta-\omega) - p);$$

bierze się znak $+$, jeżeli punkt M_0 i początek są z obu stron prostéj; bierze się znak $-$, jeżeli punkt M_0 i początek są z téjże saméj strony względem prostéj.

Jeżeli teraz równanie prostéj danéj jest

(3)
$$Ax + By + C = 0,$$

sprowadzi się je do kształtu (1) zakładając

(4)
$$\frac{\operatorname{dos}\omega}{A} = \frac{\operatorname{dos}(\theta-\omega)}{B} = -\frac{p}{C};$$

odległością szukaną będzie wtedy, nie zważając na znak,

$$\delta = x_0 \operatorname{dos}\omega + y_0 \operatorname{dos}(\theta - \omega) - p.$$

Dla wyznaczenia ilości nieznanych $\operatorname{dos}\omega$, $\operatorname{dos}(\theta-\omega)$, p, uważmy że ω i $(\theta-\omega)$ są kątami prostéj OH z osiami, i że między tymi kątami ma się związek (6) n^ru (69),

$$(5) \qquad \operatorname{dos}^2\omega + \operatorname{dos}^2(\theta-\omega) - 2\operatorname{dos}\omega \operatorname{dos}(\theta-\omega)\operatorname{dos}\theta = \operatorname{wst}^2\theta.$$

Oznaczywszy przez k wartość wspólną stosunków (4), wyciąga się ze związku (5)

$$(6) \qquad k = \frac{\operatorname{wst}\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\operatorname{dos}\theta}}.$$

Ztąd wyciągniemy łatwo $\operatorname{dos}\omega$, $\operatorname{dos}(\theta-\omega)$ i p; podstawiając te wartości w wyrażeniu na δ, znajduje się

$$(7) \qquad \delta = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)\operatorname{wst}\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\operatorname{dos}\theta}};$$

jestto wyrażenie odległości punktu (x_0, y_0) od prostéj

$$Ax + By + C = 0.$$

2^ga Metoda. Możemy przypuścić równanie prostéj danéj

$$(8) \qquad Ax + By + C = 0$$

sprowadzone do kształtu

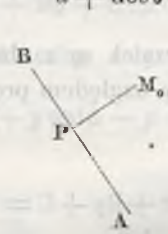
$$(9) \qquad y = ax + b,$$

założywszy

$$(10) \qquad a = -\frac{A}{B}, \qquad b = -\frac{C}{B}.$$

Równanie prostéj, poprowadzonéj przez punkt dany $M_0(x_0, y_0)$ prostopadle do prostéj (9) będzie n^er (72)

$$(11) \qquad y - y_1 = -\frac{1 + a\operatorname{dos}\theta}{a + \operatorname{dos}\theta}(x - x_1).$$



Niech będą x i y spółrzędnemi spodka P téj prostopadłéj, znajdziemy

$$\overline{M_0P}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\operatorname{dos}\theta;$$

otóż, otrzyma się spółrzędne x i y punktu przecięcia się dwóch prostych AB i M_0P, rozwiązując dwa równania (9) i (11); lecz, gdy wyrażenie na $\overline{M_0P}$, nie zawiera w sobie tylko różnice $(x-x_0)$ i $(y-y_0)$ również jak równanie (11), będzie lepiéj przyrządzić także równanie (9), aby nie zawierało w sobie tylko też same różnice; co się zrobi pisząc je w sposób następujący

$$(12) \qquad y - y_0 = a(x - x_0) + (ax_0 + b - y_0).$$

Rozwiązanie równań (11) i (12) względem $(x-x_0)$ i $(y-y_0)$ nam daje

$$\begin{cases} x - x_0 = \dfrac{(y_0 - ax_0 - b)(a + \operatorname{dos}\theta)}{1 + a^2 + 2a\operatorname{dos}\theta}, \\[2ex] y - y_0 = \dfrac{(y_0 - ax_0 - b)(1 + a\operatorname{dos}\theta)}{1 + a^2 + 2a\operatorname{dos}\theta}. \end{cases}$$

Podstawiwszy te wartości w wyrażeniu na M_0P, otrzymamy

$$\delta^2 = \overline{M_0P}^2 = \frac{(y_0 - ax_0 - b)^2}{(1 + a^2 + 2a\operatorname{dos}\theta)^2}\left[(a + \operatorname{dos}\theta)^2 + (1 + a\operatorname{dos}\theta)^2 - 2(a + \operatorname{dos}\theta)(1 + a\operatorname{dos}\theta)\operatorname{dos}\theta\right];$$

po wykonaniu wszystkich uproszczeń, wypadnie wyciągając pierwiastek kwadratowy :

$$(13) \qquad \delta = \frac{(y_0 - ax_0 - b)\operatorname{wst}\theta}{\pm\sqrt{1 + 2a\operatorname{dos}\theta + a^2}};$$

albo, zastępując a i b przez ich wartości (10) :

$$(14) \qquad \delta = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)\operatorname{wst}\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\operatorname{dos}\theta}}.$$

76. Streszczenie i roztrząsanie.

1° Kiedy równanie prostéj jest danem pod kształtem

$$(1) \qquad x\operatorname{dos}\omega + y\operatorname{dos}(\theta - \omega) - p = 0,$$

odległość, w wartości bezwzględnéj, punktu $M_0(x_0, y_0)$ od téj prostéj będzie daną za pomocą wzoru

$$(2) \qquad \delta = \pm(x_0\operatorname{dos}\omega + y_0\operatorname{dos}(\theta - \omega) - p);$$

musi się wziąć znak $+$, gdy punkt M_0 i początek będą z obu stron prostéj; weźmie się znak $-$, kiedy punkt i początek spółrzędnych będą z téjże saméj strony względem prostéj.

W przypadku osi prostokątnych, równaniem prostéj będzie

$$(1\ bis) \qquad x\operatorname{dos}\omega + y\operatorname{wst}\omega - p = 0,$$

a otrzyma się na wyrażenie odległości

$$(2\ bis) \qquad \delta = \pm(x_0\operatorname{dos}\omega + y_0\operatorname{wst}\omega - p).$$

2° Kiedy równanie prostéj jest danem pod kształtem

$$(3) \qquad Ax + By + C = 0,$$

odległość punktu $M_0(x_0, y_0)$ od téj prostéj będzie daną za pomocą wzoru

$$(4)\qquad \delta = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} \qquad \text{(osie pochyłe)}$$

$$(4\ bis)\qquad \delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{(osie prostokątne).}$$

Aby te ostatnie wzory dawały wartość bezwzględną odległości, będzie potrzeba poprzedzić pierwiastek znakiem + lub — według tego jak licznik będzie dodatny lub odjemny.

Rozwiążemy, przy téj sposobności, pytanie następujące przedstawiające się często w innych zdarzeniach.

Mając dane punkt $M_0(x_0, y_0)$ *i prostą*

$$(D)\qquad Ax + By + C = 0,$$

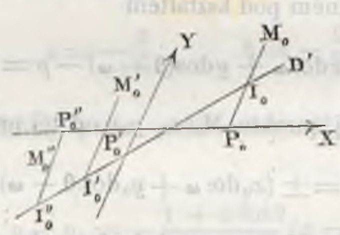
znaleźć znak wyrażenia

$$(Ax_0 + By_0 + C).$$

Jeżeli $B > 0$, wyrażenie $(Ax_0 + By_0 + C)$ będzie dodatném lub odjemném według tego jak punkt M_0 będzie na wierzchu lub pod spodem prostéj (D), idąc równolegle do osi rzędnych dodatnych; jeżeli zaś $B < 0$ rzecz będzie się miała odwrotnie.

Jeżeli $A > 0$, wyrażenie $(Ax_0 + By_0 + C)$ będzie dodatném lub odjemném według tego jak punkt M_0 będzie na prawo lub na lewo linii (D), idąc równolegle do osi odciętych odjemnych; jeżeli zaś $A < 0$, wyrażenie powyższe przyjmie znaki przeciwne.

Aby dowieść tego podania, zauważmy naprzód że jeżeli punkt M_0 jest na wierzchu prostéj (D), wartość algebraiczna rzędnéj punktu będzie większą jak wartość algebraiczna rzędnéj prostéj odpowiedniéj odciętéj punktu danego; okaże się to łatwo rozbierając trzy położenia możliwe punktu, to



jest M_0, M'_0, M''_0. Rzecz jest widoczną dla dwóch pierwszych położeń; co się tyczy 3ciego M''_0, ma się, w wartości bezwzględnéj, $M''_0P''_0 < I''_0P''_0$; otóż rzędne są tu odjemne; więc etc....

To przypuściwszy, wartością algebraiczną rzędnéj punktu jest y_0: wartością algebraiczną rzędnéj linii prostéj, dla odciętéj x_0, jest $-\frac{Ax_0 + C}{B}$; ma się więc, według spostrzeżenia poprzedzającego,

$$y_0 > -\frac{Ax_0 + C}{B}, \qquad \text{lub} \qquad y_0 + \frac{Ax_0 + C}{B} > 0.$$

Jeżeli B jest dodatném, wypadnie ztąd, mnożąc przez B,

$$Ax_0 + By_0 + C > 0$$

jeżeli zaś B jest odjemném, otrzyma się

$$Ax_0 + By_0 + C < 0.$$

Różne części podania wysłowionego dowiodą się tymże samym sposobem.

77. *Równania dwójsiecznych kątów dwóch linii prostych.*

Niech będą równania dwóch linii prostych

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0. \end{cases}$$

Znajdziemy po prostu równanie dwójsiecznéj, wyrażając że odległości od jakiegokolwiek punktu (x, y) téj prostéj do dwóch prostych danych są równemi, co daje, według wzoru n^ru (76)

$$(2) \qquad \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} = \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1B_1\cos\theta}}.$$

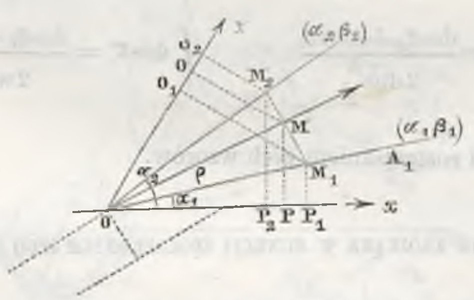
Biorąc kolejno znaki $+$ i $-$ ma się równania jednéj i drugiéj dwójsiecznéj: Gdyby się chciało wyszczególnić jedną z tych dwójsiecznych; wyznaczy się, według położenia jednego z tych punktów, znaki funkcyi $(Ax + By + C)$, $(A_1x + B_1y + C_1)$, mając wzgląd na uwagę n^ru (76); wybierze się wtedy znak $+$ lub $-$ tak, ażeby dwie strony równania (2) miały tenże sam znak. Sprawdzi się bez trudności, że dwie dwójsieczne są prostokątnemi, to jest że ich spółczynniki kątowe sprawdzają związek

$$1 + (a + a_1)\cos\theta + aa_1 = 0.$$

Będzie można, zająć się wyznaczeniem dwójsiecznéj wychodząc wprost z samegoż jéj określenia, to jest dzieląc na dwie części równe kąt dwóch prostych danych; jest tam do przeprowadzenia całego zadania potrzebna dyskussya która wskaże początkującym dla wprawy wyborne do wykonania ćwiczenie.

78. *Mając dane kąty* (α_1, β_1) *i* (α_2, β_2) *dwóch prostych z osiami, znaleźć kąty dwójsiecznéj z temiż samemi osiami.*

Weźmy na każdéj z prostych, dwie długości OM_1 i OM_2 równe jedności; jeżeli M jest punktem



w którym prosta M_1M_2 spotyka dwójsieczną, otrzyma się między prostopadłemi spuszczonemi z tych trzech punktów na osie Ox i Oy, związki następujące:

$$2MP = M_1P_1 + M_2P_2; \qquad 2MQ = M_1Q_1 + M_2Q_2;$$

lub, oznaczając przez α' i β' kąty dwójsiecznéj OM z osiami Ox i Oy, a przez ρ długość OM :

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\rho \operatorname{dos}\alpha' = \operatorname{dos}\alpha_1 + \operatorname{dos}\alpha_2; \\ 2\rho \operatorname{dos}\beta' = \operatorname{dos}\beta_1 + \operatorname{dos}\beta_2. \end{cases}$$

Z tych równości wyciągniemy

$$4\rho^2[\operatorname{dos}^2\alpha' + \operatorname{dos}^2\beta' - 2\operatorname{dos}\alpha'\operatorname{dos}\beta'\operatorname{dos}\theta] = \begin{cases} \operatorname{dos}^2\alpha_1 + \operatorname{dos}^2\beta_1 - 2\operatorname{dos}\alpha_1\operatorname{dos}\beta_1\operatorname{dos}\theta \\ + \operatorname{dos}^2\alpha_2 + \operatorname{dos}^2\beta_2 - 2\operatorname{dos}\alpha_2\operatorname{dos}\beta_2\operatorname{dos}\theta \\ + 2(\operatorname{dos}\alpha_1\operatorname{dos}\alpha_2 + \operatorname{dos}\beta_1\operatorname{dos}\beta_2 - (\operatorname{dos}\alpha_1\operatorname{dos}\beta_2 + \operatorname{dos}\alpha_2\operatorname{dos}\beta_1)\operatorname{dos}\theta \end{cases};$$

otóż, mając wzgląd na związek (6) n^ru (69) i na związek (1 *bis*) n^ru (71), ta równość staje się, dzieląc jéj obie strony przez $\operatorname{wst}^2\theta$:

$$4\rho^2 = 2 + 2\operatorname{dos}V,$$

lub według związku
$$1 + \operatorname{dos}V = 2\operatorname{dos}^2\frac{V}{2},$$

$$(2)\qquad \rho^2 = \operatorname{dos}^2\frac{V}{2},$$

V jest kątem dwóch prostych danych.

Dla drugiéj dwójsiecznéj, otrzymałoby się

$$2\rho\operatorname{dos}\alpha' = \operatorname{dos}\alpha_1 - \operatorname{dos}\alpha_2,\qquad 2\rho\operatorname{dos}\beta' = \operatorname{dos}\beta_1 - \operatorname{dos}\beta_2;$$

dalszy ciąg rachunku odbędzie się podobnież jak w pierwszym przypadku.

Tak więc gdy (α_1, β_1) *i* (α_2, β_2) *są kątami prostych z osiami spółrzędnych a* V *jest kątem tych dwóch prostych, kąty* (α', β') *i* (α'', β'') *każdéj z dwójsiecznych z osiami będą dane za pomocą wzorów następujących :*

$$(3)\qquad \begin{cases} \operatorname{dos}\alpha' = \dfrac{\operatorname{dos}\alpha_1 + \operatorname{dos}\alpha_2}{2\operatorname{dos}\frac{V}{2}}, \\[2ex] \operatorname{dos}\beta' = \dfrac{\operatorname{dos}\beta_1 + \operatorname{dos}\beta_2}{2\operatorname{dos}\frac{V}{2}}; \end{cases}\qquad \begin{cases} \operatorname{dos}\alpha'' = \dfrac{\operatorname{dos}\alpha_1 - \operatorname{dos}\alpha_2}{2\operatorname{wst}\frac{V}{2}}, \\[2ex] \operatorname{dos}\beta'' = \dfrac{\operatorname{dos}\beta_1 - \operatorname{dos}\beta_2}{2\operatorname{wst}\frac{V}{2}}. \end{cases}$$

Nie będziemy się zajmowali roztrząsaniem tych wzorów.

V° Powierzchnia trójkąta w funkcyi spółrzędnych jego wierzchołków.

79. Niech będą M_1, M_2, M_3 trzy wierzchołki trójkąta; a (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ich spółrzędnemi względnemi; z punktu M_1 spuśćmy prostopadłą M_1H na bok M_2M_3, otrzyma się, oznaczywszy przez S powierzchnią trójkąta

$$2S = \overline{M_1H}.\overline{M_2M_3}.$$

Odległość M_2M_3 dwóch punktów M_2 i M_3 wyraża się przez:

$$\overline{M_2M_3}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + 2(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)\operatorname{dos}\theta;$$

co się tyczy M_1H, jestto odległość punktu M_1 od prostéj M_2M_3 któréj równaniem jest

$$(1^\circ) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ma się więc na mocy n^ru (76)

$$(2^\circ) \qquad M_1H = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \operatorname{wst}\theta}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + 2(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)\operatorname{dos}\theta}};$$

przeto:

$$(1) \qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \operatorname{wst}\theta;$$

a w przypadku osi prostokątnych:

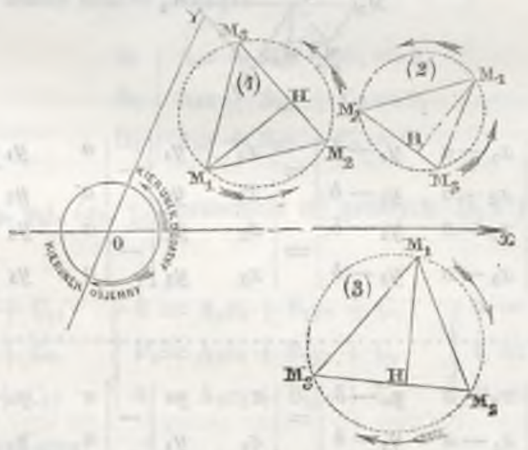
$$(1\ bis) \qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Kiedy jeden z wierzchołków M_3, na przykład, jest początkiem spółrzędnych, ma się

$$(2) \qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \operatorname{wst}\theta.$$

Aby druga strona równości (1) przedstawiała wartość bezwzględną powierzchni trójkąta, będzie potrzeba poprzedzić wyznacznik znakiem *więcéj* lub *mniéj* według tego jak dla przejścia kolejno od M_1 ku M_2, potém od M_2 ku M_3, postępując po obwodzie koła opisanego, obraca się w kierunku kątów *dodatnych* lub *odjemnych*, to jest od Ox ku Oy, lub od Oy ku Ox.

Na usprawiedliwienie tego prawidła, dosyć jest pokazać, rozbierając różne przypadki mogące się



przedstawić, że druga strona równości (2) musi aby dać wartość bezwzględną prostopadłéj, być poprzedzoną znakiem $+$ lub $-$ według tego jak obrot określony powyżéj ma miejsce w kierunku dodatnym lub w kierunku odjemnym. I tak na figurze (I) punkt M_1 jest pod spodem M_2M_3, lecz spółczynnik y w równaniu (1°), to jest $(x_3 - x_2)$ jest dodatny; więc na mocy n^{ru} (76) druga strona równości (2°) musi być poprzedzoną znakiem $+$; otóż kierunek jest dodatny; więc.....

Na figurze (II) punkt M_1 jest na wierzchu prostéj M_2M_3, a spółczynnik y, to jest $(x_3 - x_2)$ jest dodatny; więc..... Na figurze (III), punkt M_1 jest na wierzchu prostéj M_2M_3, lecz spółczynnik y jest odjemny; a tém samém druga strona równości (2°) musi być poprzedzoną znakiem $-$; otóż kierunek obrotu jest odjemny; więc.....

80. Powierzchnia wielokąta.

Niech będą $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ wierzchołkami wielokąta, a (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),... (x_n, y_n) ich spółrzędne względne. Przenieśmy osie tak, ażeby nowy początek był wewnątrz wielokąta, i niech będą x'_i i y'_i nowemi spółrzędnemi punktu M_i lub (x_i, y_i), tak że

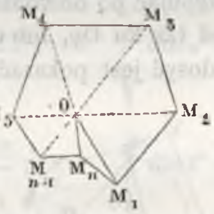
$$(1) \qquad \begin{cases} x_i = a + x'_i \\ y_i = b + y'_i, \end{cases}$$

a i b są spółrzędnemi początku O'. Łącząc punkt O' z różnymi wierzchołkami rozłoży się wielokąt na trójkąty, i otrzyma się

$$(2) \qquad 2S = \text{wst}\,\theta \left\{ \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x'_{n-1} & y'_{n-1} \\ x'_n & y'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_n & y'_n \\ x'_1 & y'_1 \end{vmatrix} \right\},$$

przypuściwszy że wskazówki $1, 2, 3, \ldots n$ znaczą wierzchołki po sobie następujące które się spotyka przebiegając wielokąt, i że ruch obrotu ma miejsce w kierunku dodatnym.

Zastępując x'_i i y'_i przez ich wartości (1), znajdzie się



$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - a & y_1 - b \\ x_2 - a & y_2 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & y_1 \\ a & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & x_1 \\ b & x_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - a & y_2 - b \\ x_3 - a & y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & y_2 \\ a & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & x_2 \\ b & x_3 \end{vmatrix};$$

....

$$\begin{vmatrix} x'_n & y'_n \\ x'_1 & y'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_n - a & y_n - b \\ x_1 - a & y_1 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & y_n \\ a & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & x_n \\ b & x_1 \end{vmatrix}.$$

Związek (2) staje się wtedy

$$(3)\qquad 2S = \operatorname{wst}\theta \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\}.$$

81. Wróćmy do wyrażenia (1) n^ru (79) powierzchni trójkąta. Można położyć ten wyznacznik pod dwoma kształtami następującymi

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \qquad 2S = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix};$$

mnożąc stronami i liniami te dwa wyznaczniki, znajduje się

$$4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2 + y_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 & x_1x_3 + y_1y_3 \\ 1 & x_2x_1 + y_2y_1 & x_2^2 + y_2^2 & x_2x_3 + y_2y_3 \\ 1 & x_3x_1 + y_3y_1 & x_3x_2 + y_3y_2 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Mnóżmy przez -2 trzy ostatnie linie, potém dzielmy przez -2 piérwszą kolumnę, wyznacznik będzie pomnożony przez 4. Wtedy, do trzech ostatnich linii dodajmy względnie pierwszą pomnożoną przez $x_1^2 + y_1^2$, przez $x_2^2 + y_2^2$, przez $x_3^2 + y_3^2$; działajmy w podobny sposób na trzech ostatnich kolumnach; założywszy

$$(1)\qquad \overline{M_iM_k}^2 = d_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2$$

otrzymuje się

$$(2)\qquad 16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{23} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

VI° Powierzchnia trójkąta którego boki są dane równaniami.

82. Niech będą równania trzech boków trójkąta

$$(1)\qquad \begin{array}{l|l} D_1 & A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ D_2 & A_2x + B_2y + C_2 = 0, \\ D_3 & A_3x + B_3y + C_3 = 0; \end{array}$$

oznaczmy przez (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) przecięcia się prostych D_2 i D_3, D_3 i D_1, D_1 i D_2. Ztąd łatwo się otrzyma

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_1 = A_1x_1 + B_1y_1 + C_1, \\ 0 = A_2x_1 + B_2y_1 + C_2, \\ 0 = A_3x_1 + B_3y_1 + C_3; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 0 = A_1x_2 + B_1y_2 + C, \\ P_2 = A_2x_2 + B_2y_2 + C, \\ 0 = A_3x_2 + B_3y_2 + C; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 0 = A_1x_3 + B_1y_3 + C_1, \\ 0 = A_2x_3 + B_2y_3 + C_2, \\ P_3 = A_3x_3 + B_3y_3 + C_3; \end{array}\right.$$

ilości P_1, P_2, P_3 są różnemi od zera.

Otóż jeżeli się weźmie wyznacznik utworzony przez pierwsze strony tych równań, to jest

$$\begin{vmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{vmatrix},$$

będzie, według równości (2) i przez wzgląd na twierdzenie dotyczące mnożenia wyznaczników

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

otóż, wiemy według n^ru (79) że

$$(4)\qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \operatorname{wst}\theta$$

oznaczając przez S powierzchnią trójkąta.

Równość (3) stanie się więc

$$(5)\qquad P_1P_2P_3 = \frac{2S}{\operatorname{wst}\theta} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Potrzeba ocenić teraz ilości P_1, P_2, P_3.

W tym celu, wyrugujmy x_1 i y_1 między równaniami pierwszej grupy (2), tak postępując znajdziemy

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 - P_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 - 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 - 0 \end{vmatrix} = 0,$$

lub

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} - P_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Zkąd się wyciąga P_1; otrzyma się P_2 i P_3 działając tak samo na dwóch innych grupach. Podstawiając wartości tym sposobem otrzymane w równości (5), znajduje się ostatecznie

$$(6)\qquad 2S = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2 . \operatorname{wst}\theta}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Prawidło wysłowione w n^rze (79) daje się jeszcze zastosować do tego przypadku, ponieważ wyrażenie (6) jest tylko przekształceniem wyrażenia (4) bez zmiany znaku.

§ III. — BIEGUNOWA PUNKTU WZGLĘDEM JAKIEGOKOLWIEK UKŁADU DWÓCH PROSTYCH.

I°. Określenie i równanie biegunowéj punktu.

83. Mając dane dwie proste stałe SA i SB; przez punkt stały P prowadzi się jakąkolwiek sieczną, spotykającą w a i b dwie proste stałe; na téj siecznéj bierze się punkt M taki że

$$(1) \qquad \frac{2}{PM} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb};$$

kiedy sieczna obraca się około punktu P, punkt M kreśli prostą która jest nazwaną *biegunową punktu* P, a punkt P nosi nazwisko *bieguna*.

W związku (1) odcinki są policzone poczynając od punktu P, i będziemy przestrzegali ugody nru (53) co do znaków i co do znakowania.

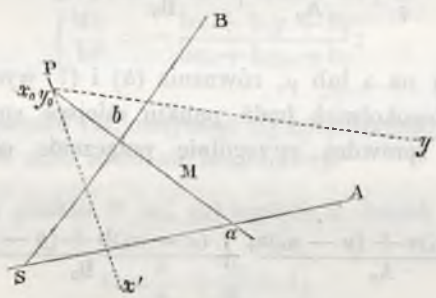
To określenie jest przypadkiem szczególnym określenia więcéj ogólnego które zobaczymy w nauce własności ogólnych krzywych.

Zauważmy zaraz że związek (1) może przybrać kształty następujące:

$$\frac{1}{PM} - \frac{1}{Pa} = \frac{1}{Pb} - \frac{1}{PM}, \qquad \text{albo} \qquad \frac{Pa - PM}{Pa} = \frac{PM - Pb}{Pb};$$

otóż

$$(1) \qquad \begin{cases} PM + Ma + aP = 0, & \text{zkąd} \quad PM - Pa = -Ma; \\ PM + Mb + bP = 0, & \text{zkąd} \quad PM - Pb = -Mb; \end{cases}$$



ma się więc, co do wielkości i co do znaku, drugi kształt

$$(2) \qquad \frac{Ma}{Pa} + \frac{Mb}{Pb} = 0, \qquad \text{lub} \qquad \frac{Ma}{aP} + \frac{Mb}{bP} = 0.$$

Związki (1) lub (2) określają zarówno miejsce punktu M albo biegunową punktu P.

84. Dla znalezienia równania biegunowéj, weźmiemy noprzód związek (1) jako punkt wyjścia:

Niech będą (x_0 i y_0) spółrzędne punktu P zaś

$$(3) \qquad \begin{cases} A = ax + a_1 y + a_2 = 0 \\ B = bx + b_1 y + b_2 = 0 \end{cases}$$

równania dwóch prostych SA i SB.

Spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu (x, y) prostéj PM będą

$$(4) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda\rho, \\ y = y_0 + \mu\rho, \end{cases}$$

(5°, n^er 40); ρ przedstawia odległość PM, a stałe λ i μ zależą od kątów α i β jakie tworzy prosta PM z osiami Ox i Oy.

To przypuściwszy, oznaczmy przez ρ, ρ_1, ρ_2, długości odcinków PM, Pa, Pb; związek (1) stanie się

$$(5) \qquad \frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Otóż, odległości ρ_1 i ρ_2 otrzymają się zastępując x i y przez ich wartości (4) w jednem i drugiém równaniach (3); znajdzie się tak więc, oznaczając przez A_0 i B_0, czém się stają A i B kiedy się w nich zastąpi x i y przez spółrzędne x_0 i y_0 punktu P:

$$(6) \qquad \rho_1 = -\frac{A_0}{\lambda a + \mu a_1}, \quad \rho_2 = -\frac{B_0}{\lambda b + \mu b_1};$$

związek poprzedzający staje się wtedy

$$(7) \qquad \frac{2}{\rho} + \frac{\lambda a + \mu a_1}{A_0} + \frac{\lambda b + \mu b_1}{B_0} = 0.$$

Dla wartości dowolnéj danéj na λ lub μ, równania (4) i (7) wyznaczą punkt odpowiedni M; innemi słowy, spółrzędne jakiegokolwiek bądź punktu miejsca sprawdzą (4) i (7) i wszelkie połączenie tych równań; one sprawdzą szczególnie połączenie otrzymane rugując λ i μ, co prowadzi do

$$(8) \qquad 2 + \frac{(x - x_0)a + (y - y_0)a_1}{A_0} + \frac{(x - x_0)b + (y - y_0)b_1}{B_0} = 0.$$

To równanie, dając związek między stałemi i spółrzędnemi x i y jakiegokolwiek punktu miejsca, będzie równaniem miejsca punktu M; widzimy że tém miejscem jest linia prosta.

Rozwijając równanie (8) biegunowéj będzie

$$\frac{ax + a_1 y + a_2 - ax_0 - a_1 y_0 - a_2}{A_0} + \frac{bx + b_1 y + b_2 - bx_0 - b_1 y_0 - b_2}{B_0} - 2 = 0;$$

to równanie sprowadza się, mając wzgląd na znaczenie ilości A_0 i B_0, do

$$(10) \qquad \frac{ax + a_1 y + a_2}{ax_0 + a_1 y_0 + a_2} + \frac{bx + b_1 y + b_2}{bx_0 + b_1 y_0 + b_2} = 0;$$

napiszemy je pod kształtem skróconym

$$\frac{A}{A_0}+\frac{B}{B_0}=0. \tag{10 bis}$$

85. Można także znaleźć równanie biegunowéj biorąc za punkt wyjścia związek (2), to jest

$$\frac{Ma}{aP}+\frac{Mb}{bP}=0. \tag{2}$$

Niech będą, jak poprzednio,

$$A=ax+a_1y+a_2=0$$

$$B=bx+b_1y+b_2=0,$$

równania dwóch prostych; oznaczmy, nadto, przez x_0, y_0 spółrzędne punktu P; x, y spółrzędne punktu M.

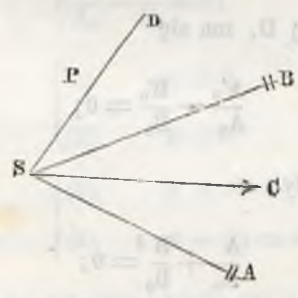
Według wzoru (2) nru (55) stosunki w których proste SA i SB dzielą względnie odcinek PM będą

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{Ma}{aP}=-\dfrac{ax+a_1y+a_2}{ax_0+a_1y_0+a_2}, \\[2ex] \dfrac{Mb}{bP}=-\dfrac{bx+b_1y+b_2}{bx_0+b_1y_0+b_2}; \end{cases}$$

podstawiając te wartości w związku (2), otrzymuje się bezpośrednio rownanie (10) to jest związek między spółrzędnemi punktu M albo równanie biegunowéj.

86. Równaniem biegunowéj punktu P (x_0, y_0) względem dwóch prostych A i B jest więc

$$C=\frac{A}{A_0}+\frac{B_1}{B_0}=0; \tag{1}$$



widzimy że biegunowa, przechodzi przez punkt spotkania się dwóch prostych.

Równanie jakiéjkolwiek prostéj przechodzącéj przez punkt S jest

$$A + \lambda B = 0;$$

wyraźmy że ona przechodzi przez punkt P, ma się

$$A_0 + \lambda B_0 = 0, \qquad \text{albo} \qquad \lambda = -\frac{A_0}{B_0};$$

równaniem prostéj SP jest więc

(2)
$$D = \frac{A}{A_0} - \frac{B}{B_0} = 0.$$

Cztéry proste

$$A = 0,$$

$$B = 0;$$

$$C = \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0,$$

$$D = \frac{A}{A_0} - \frac{B}{B_0} = 0$$

tworzą co się zowie *pękiem harmonicznym;* proste *połączone* A i B są nazwane *sprzężonemi* względem pary dwóch prostych C i D; a proste *połączone* C i D są także *sprzężonemi* względem pary A i B.

Te nazwania, które znajdziemy późniéj w teoryi więcéj ogólnéj, są usprawiedliwione przez własności następujące:

Prosta C *jest, względem pary* A *i* B, *biegunową jakiegokolwiek punktu prostej* D; *a prosta* D *jest biegunową jakiegokolwiek punktu linii* C.

Prosta B *jest, względem pary* C *i* D, *biegunową jakiegokolwiek punktu linii* A; *a prosta* A *jest biegunową jakiegokolwiek punktu prostéj* B.

Dowiedźmy odwrotne twierdzenia tych własności:

1° Niech będzie P' (x'_0, y'_0) jakikolwiek punkt prostéj SP albo D, biegunową tego punktu będzie

$$\frac{A}{A'_0} + \frac{B}{B'_0} = 0;$$

otóż punkt P' znajdując się na prostéj D, ma się

$$\frac{A'_0}{A_0} - \frac{B'_0}{B_0} = 0;$$

równanie poprzedzające staje się wtedy

$$\frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0;$$

jestto dokładnie prosta C.

2°. Niech będzie Q (x_1, y_1) punkt prostéj C; biegunową tego punktu będzie

$$\frac{A}{A_1}+\frac{B}{B_1}=0;$$

otóż punkt Q (x_1, y_1) znajdując się na prostéj C, ma się

$$\frac{A_1}{A_0}+\frac{B_1}{B_0}=0;$$

równanie poprzedzające staje się wtedy

$$\frac{A}{A_0}-\frac{B}{B_0}=0;$$

jestto dokładnie równaniem prostéj D.

3° Niech będzie (x_2, y_2) punkt prostéj A; biegunową tego punktu będzie, względem układu (C i D),

$$\frac{C}{C_2}+\frac{D}{D_2}=0;$$

otóż ma się

$$\begin{cases} C_2=\dfrac{A_2}{A_0}+\dfrac{B_2}{B_0}, \\ D_2=\dfrac{A_2}{A_0}-\dfrac{B_2}{B_0} \end{cases}$$

a ponieważ A_2 jest zerem, równanie poprzedzające sprowadza się do

$$C-D=0, \qquad \text{albo} \qquad B=0.$$

Gdy punkt (x_2, y_2) jest na prostéj B, ilość B_2 jest zerem, i równanie biegunowéj staje się

$$C+D=0, \qquad \text{lub} \qquad A=0.$$

Uważmy że równania *pęka harmonicznego*

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} A=0, \\ B=0; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{A}{A_0}+\dfrac{B}{B_0}=0, \\ \dfrac{A}{A_0}-\dfrac{B}{B_0}=0; \end{cases} \end{array}\right.$$

mogą jeszcze się napisać

$$\begin{cases} (1) \quad A=0, \\ (2) \quad B=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3) \quad A+kB=0, \\ (4) \quad A-kB=0; \end{cases}$$

proste *połączone* (1) i (2) są *sprzężonemi* względem układu (3), i (4); i odwrotnie, proste *połączone* (3) i (4) są *sprzężonemi* względem układu (1), (2).

II°. Wykreślenie biegunowej.

87. Biegunową punktu jest linia prosta, dosyć do jéj wykreślenia, wyznaczyć znajdujące się na niéj dwa jakiegokolwiek punkta; a nawet jeden tylko, kiedy punkt spotkania się dwóch prostych układu jest wykreślony. Związki (1) i (2), określające biegunową, dozwolą wykreślenia ustawionych na niéj tylu punktów ile się nam podoba; lecz własność następująca daje prostsze wykreślenie. Ta własność jest wreszcie ważną z punktu widzenia teorytycznego.

Mając dane dwie proste SA *i* SB *i punkt stały* P; *jeżeli, przez punkt* P, *poprowadzi się jakiegokolwiek sieczne, i gdy się złączy pod przekątną punkta przecięcia się tych siecznych z dwiema prostemi; punkta spotkania się tych przekątnych są na biegunowéj punktu* P *względem dwóch prostych danych.*

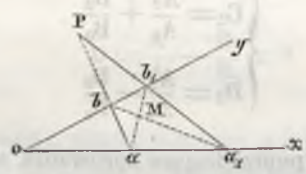
To podanie może się dowieść analitycznie wielu sposobami; wskażemy tylko następujący.

Weźmy dwie proste stałe za osie spółrzędnych; i niech będą (x_0, y_0) spółrzędne punktu P; niech będą nadto

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \lambda_1(x - x_0)$$

równania dwóch siecznych Pa i Pa$_1$.



Robiąc kolejno w dwóch równaniach ostatnich, naprzód $y = 0$, potém $x = 0$, otrzymamy

$$\begin{cases} 0a = x_0 - \dfrac{y_0}{\lambda} = \dfrac{\lambda x_0 - y_0}{\lambda}, \\ 0a_1 = x_0 - \dfrac{y_0}{\lambda_1} = \dfrac{\lambda_1 x_0 - y_0}{\lambda_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0b = y_0 - \lambda x_0, \\ 0b_1 = y_0 - \lambda_1 x_0. \end{cases}$$

Równaniami dwóch przekątnych ab$_1$ i a$_1$b będą n$^{\text{er}}$ (40, 3°)

$$\frac{x}{0a} + \frac{y}{0b_1} = 1, \qquad \frac{x}{0a_1} + \frac{y}{0b} = 1,$$

albo

(1) $$\frac{\lambda x}{\lambda x_0 - y_0} - \frac{y}{\lambda_1 x_0 - y_0} = 1$$

(2) $$\frac{\lambda_1 x}{\lambda_1 x_0 - y_0} - \frac{y}{\lambda x_0 - y_0} = 1.$$

Spółrzędne punktu M przecięcia się tych przekątnych, sprawdzają te dwa równania jednoczesne; one sprawdzają więc wypadek otrzymany odejmując je stronami, to jest

$$x\left[\frac{\lambda}{\lambda x_0 - y_0} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 x_0 - y_0}\right] - y\left[\frac{1}{\lambda_1 x_0 - y_0} - \frac{1}{\lambda x_0 - y_0}\right] = 0;$$

albo, sprowadzając do jednakowego mianownika

$$(3)\qquad \frac{(\lambda_1 - \lambda)\,[xy_0 + x_0y]}{(\lambda x_0 - y_0)\,[\lambda_1 x_0 - y_0]} = 0.$$

Otóż λ_1 jest różném od λ, inaczéj dwie sieczne Pa i Pa_1 przystałyby do siebie, i otrzymałoby się nieoznaczoność; dwa równania (1) i (2) przedstawiały by wtedy jednę i tę samą prostą; równanie sprowadza się więc do:

$$(4)\qquad xy_0 + x_0y = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 0.$$

To równanie, sprawdzone przez spółrzędne punktu M i niezależne od dowolnych λ i λ_1, przedstawia więc miejsce punktu M.

Widzimy że tém miejscem jest linia prosta; i według równania ogólnego (1) nru (86), jest widoczném, że tą prostą jest biegunówa punktu P; gdyż, w przypadku obecnym

$$A = x, \qquad B = y,$$

i równanie

$$\frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0$$

staje się wtedy

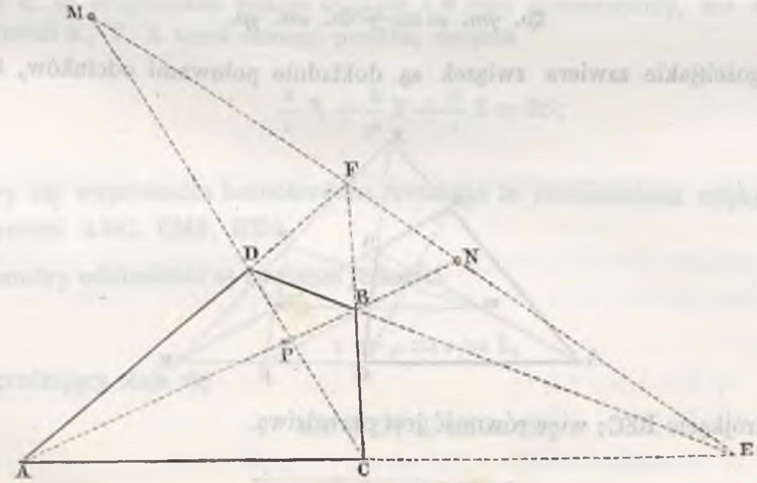
$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 0.$$

III. Własności czworoboku zupełnego.

88. Nazywa się *czworobokiem zupełnym* figura utworzona przez układ czterech prostych nieograniczonych; sześć punktów przecięcia tych czterech prostych tworzą *sześć wierzchołków* czworoboku; proste łączące dwa wierzchołki nie leżące na tymże samym boku są przekątnemi. Jest *trzy przekątne*.

Mamy wyprowadzić z tego co poprzedza kilka ważnych własności czworoboku zupełnego.

Niech będą A, B, C, D, E, F *sześć wierzchołków* czworoboku; AB, CD, EF, *trzy przekątne*; M, N, P przecięcia się tych przekątnych.



1°. Czworobok zupełny przedstawia trzy pęki harmoniczne mające za wierzchołki punkta M, N, P, to jest

$$(MA,\ MB;\ MP,\ MN),$$
$$(NC,\ ND;\ NP,\ NM),$$
$$(PE,\ PF;\ PN,\ PM);$$

albo, posługując się znakowaniem skróconém nader używaném w geometryi:

$$(M,\ \overline{AB}\ \overline{NP}),$$
$$(N,\ \overline{CD}\ \overline{PM}),$$
$$(P,\ \overline{EF}\ \overline{MN}),$$

podkreśliliśmy *proste połączone.*

Dowodzenie téj własności wyprowadza się bezpośrednio z twierdzenia, któreśmy uzasadnili w n^rze^ (87).

I tak, uważając punkt M i układ MN, NP, widzimy, że MB jest biegunową punktu A; gdyż, z punktu A wychodzą dwie sieczne A. CE, A. DF; i przekątne FC i DE przecinają się w D; ma się więc pęk harmoniczny utworzony przez dwie pary (MN, MP) ; (MA, MB).

Uważmy punkt N i układ NP, NM; widzimy że ND jest biegunową punktu C; gdyż, z punktu C wychodzą dwie sieczne C. AE, C. BF; i przekątne EB i AF przecinają się w D; ma się więc pęk harmoniczny utworzony przez dwie pary (NP, NM); (NC, ND).

Wyprowadzi się tymże samym sposobem istnienie trzeciego pęku harmonicznego, utworzonego przez dwie pary (PN, PM); (PE, PF).

2° Pęk harmoniczny dzieli harmonicznie poprzeczną jakąkolwiek; zobaczymy poniżéj powód i znaczenie téj własności; podług tego, podanie któreśmy dowiedli może się wysłowić w tych wyrazach:

W czworoboku zupełnym, każda przekątna jest podzielona harmonicznie przez dwie inne.

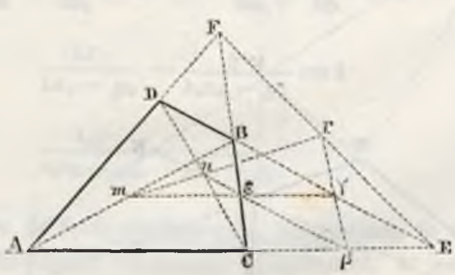
3° Mamy jeszcze twiezdzenie następujące:

W każdym czworoboku zupełnym, środki m, n, p *trzech przekątnych* AB, CD, EF, *są w linii prostéj.*

W rzeczy saméj, trzy proste $\beta\gamma$, $\gamma\varepsilon$, $\beta\varepsilon$, łączące środki boków trójkąta BCE, przechodzą względnie przez środki *p, m, n,* trzech przekątnych; pytanie zależy od udowodnienia powyżéj już wyłożonéj n^ru^ (57, 1°) równości

$$\beta p.\ \gamma m.\ \varepsilon n = +\beta n.\ \varepsilon m.\ \gamma p.$$

Otóż sześć długościąjakie zawiera związek są dokładnie połowami odcinków, które *poprzeczna*



ADF oddziela na trójkącie BEC; więc równość jest prawdziwą.

ROZDZIAŁ II

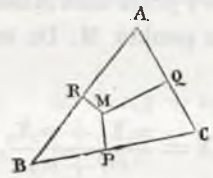
SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE JAKIEGOKOWIEK PUNKTU.

§ 1. — OKREŚLENIE — ZWIĄZKI ZASADNICZE.

I°. Określenie i znaki.

89. Jeżeli się zauważy trójkąt stały ABC, punkt M płaszczyzny będzie określony przez swe odległości od boków trójkąta względnie pomnożone przez liczby stałe dodatne dowolnie wzięte.

Niech będą, na przykład, MP, MQ, MR, odległości względne punktu M od boków BC, CA, AB



trójkąta; załóżmy

$$(1)\qquad \begin{cases} X = \lambda . MP, \\ Y = \mu\, MQ, \\ Z = \nu . MR; \end{cases}$$

ilości X, Y, Z, są *spółrzędne trzylinijne* punktu M.

Trójkąt ABC do którego się odnosi punkt jest nazwany *trójkątem odniesienia*; boki trójkąta są *osiami odniesienia*; liczby stałe λ, μ, ν, są nazwane *parametrami odniesienia*.

Jeżeli a, b, c, są długościami boków trójkąta a S jego powierzchnią, ma się między spółrzędnemi trzylinijnemi X, Y, Z tegoż samego punktu, związek

$$(2)\qquad \frac{a}{\lambda} X + \frac{b}{\mu} Y + \frac{c}{\nu} Z = 2S;$$

związek, który się wyprowadza bezpośrednio, uważając że powierzchnia trójkąta ABC jest summą trzech powierzchni AMC, CMB, BMA.

Kiedy parametry odniesienia są równemi jedności

$$\lambda = \mu = \nu = 1,$$

związek poprzedzający staje się

$$(3)\qquad aX + bY + cZ = 2S;$$

lub, jeszcze

(3 *bis*) $$X \operatorname{wst} A + Y \operatorname{wst} B + Z \operatorname{wst} C = \frac{S}{R},$$

oznaczając przez A, B, C, kąty trójkąta odniesienia; przez R promień koła opisanego, i mając wzgląd na równości:

$$\frac{a}{\operatorname{wst} A} = \frac{b}{\operatorname{wst} B} = \frac{c}{\operatorname{wst} C} = 2R.$$

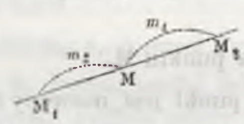
90. Znaki spółrzędnych trzylinijnych są wyznaczone za pomocą umowy następującéj:

Każda spółrzędna będzie uważana jako dodatna lub odjemna, według tego jak punkt jest położony względem osi odpowiedniéj, z téjże saméj strony jak wierzchołek przeciwny lub ze strony różnéj.

To też X punktu będzie uważaném jako dodatne lub odjemne według tego jak ten punkt będzie wzięty lub nie, względem boku BC, z téjże saméj strony jak wierzchołek A; i podobnież co do innych.

Zostaje się przywiedzionym do téj umowy przez roztrząsanie związku (2), który musi być zawsze sprawdzony, jakiémkolwiek jest położenie punktu M. Do tego również zostaje się sprowadzonym przez dyskussyą wzorów następujących:

(4) $$\begin{cases} X = \dfrac{m_1X_1 + m_2X_2}{m_1 + m_2}, \\[2ex] Y = \dfrac{m_1Y_1 + m_2Y_2}{m_1 + m_2}, \\[2ex] Z = \dfrac{m_1Z_1 + m_2Z_2}{m_1 + m_2}. \end{cases}$$



dających spółrzędne X, Y, Z, punktu M dzielącego odcinek M_1M_2 w stosunku $\frac{m_1}{m_2}$; tak że się ma:

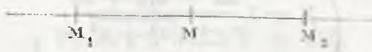
(4 *bis*) $$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Te wzory dowodzą się za pomocą spostrzeżeń zupełnie podobnych do tych, które już podaliśmy w n^rach^ (52) i (53).

Ztąd także wyprowadzamy że spółrzędne X, Y, Z, jakiegokolwiek punktu M, położonego na prostéj wyznaczonéj przez dwa punkta $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ i $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$, będą mogły być określone za pomocą równości:

(5) $$\begin{cases} X = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2, \\ Y = \lambda_1Y_1 + \lambda_2Y_2, \\ Z = \lambda_1Z_1 + \lambda_2Z_2; \end{cases} \quad \text{z warunkiem} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

a stosunek odległości punktu zmiennego M względem dwóch punktów stałych M_1 i M_2 będzie dany



przez równość:

(5 *bis*)
$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

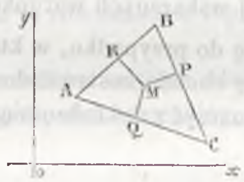
Zmieniając ilości λ_1 i λ_2 otrzyma się wszystkie punkta linii prostéj M_1M_2.

II° Zmiana spółrzędnych.

91. Wskażemy wzory pozwalające na przejście ze spółrzędnych kartezyańskich do spółrzędnych trzylinijnych i odwrotnie; te wzory są nadewszystko pożyteczne jako sposób dowodzenia.

Przypuśćmy że równaniami trzech boków trójkąta odniesienia będą, względem dwóch osi prostokątnych Ox i Oy:

(1)
$$\begin{cases} \text{BC} \quad ax + a_1y + a_2 = 0, \\ \text{CA} \quad bx + b_1y + b_2 = 0, \\ \text{AB} \quad cx + c_1y + c_2 = 0. \end{cases}$$



Szukajmy naprzód spółrzędnych trzylinijnych X, Y, Z jakiegokolwiek punktu M w funkcyi jego spółrzędnych kartezyańskich x, y. W tym celu zauważmy że:

$$\begin{cases} MP = \dfrac{ax + a_1y + a_2}{\pm\sqrt{a^2 + a_1^2}}, \\[2ex] MQ = \dfrac{bx + b_1y + b_2}{\pm\sqrt{b^2 + b_1^2}}, \\[2ex] MR = \dfrac{cx + c_1y + c_2}{\pm\sqrt{c^2 + c_1^2}}. \end{cases}$$

Otóż podług określenia nru (89)

$$X = \lambda.MP, \qquad Y = \mu.MQ, \qquad Z = \nu.MR;$$

otrzyma się więc :

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
X &= \lambda\,\frac{ax + a_1y + a_2}{\pm\sqrt{a^2 + a_1^2}},\\
Y &= \mu\,\frac{bx + b_1y + b_2}{\pm\sqrt{b^2 + b_1^2}},\\
Z &= \nu\,\frac{cx + c_1y + c_2}{\pm\sqrt{c^2 + c_1^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Weźmiemy za *parametry odniesienia* wartości następujące :

$$
(3)\qquad \lambda = +\sqrt{a^2 + a_1^2},\qquad \mu = +\sqrt{b^2 + b_1^2},\qquad \nu = +\sqrt{c^2 + c_1^2};
$$

i aby pozostać w zgodzie z umową n^ru (90), rozporządzimy znakami pierwiastków we wzorach (2), lub, co na jedno wychodzi, zmienimy znaki pierwszych stron równań (1) tak, ażeby wartości X, Y, Z dostarczone przez równania (2), były dodatnemi, jeśli się przypuści punkt (x, y) położony wewnątrz trójkąta ABC. Wzorami zmiany będą wtedy :

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
X &= ax + a_1y + a_2,\\
Y &= bx + b_1y + b_2,\\
Z &= cx + c_1y + c_2;
\end{aligned}
\right.
$$

litery a, a_1, a_2; b, b_1, etc. przedstawiają spółczynniki równań boków trójkąta odniesienia, po zmienieniu znaków odpowiednio do powyżéj wskazanych warunków.

Uwaga. Wzory zmiany (4) odnoszą się do przypadku, w którym się przypisuje parametrom odniesienia wartości szczególne (3); gdyby się chciało zostawić dowolnymi te parametry, należałoby wziąć wtedy wzory (2), starając się usilnie oznaczyć z dokładnością znaki pierwiastków, jak już o tém było uprzednio powiedzianém.

92. Szukajmy teraz wzorów pozwalających na przejście ze spółrzędnych trzylinijnych do spółrzędnych kartezyańskich.

Wyprowadzimy to zagadnienie odwrotne jedynie ze wzorów (4).

Załóżmy :

$$
(5)\qquad P = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix}
$$

i oznaczmy przez a', a'_1, a'_2; b', b'_1,... wyznaczniki częściowe wyznacznika P, tak że :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&a' = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},\qquad a'_1 = -\begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix},\qquad a'_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix},\\
&b' = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \text{etc.}\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Mnóżmy wtedy równania (4) względnie przez a', b', c'; potém przez a'_1, b'_1, c'_1; nakoniec przez a'_2, b'_2, c'_2, i dodajmy; znajduje się :

$$(6)\quad \begin{cases} Px = a'X + b'Y + c'Z, \\ Py = a'_1X + b'_1Y + c'_1Z, \\ P\ \ = a'_2X + b'_2Y + c'_2Z; \end{cases}$$

zkąd dzieląc dwa pierwsze równania przez trzecie :

$$(7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a'X + b'Y + c'Z}{a'_2X + b'_2Y + c'_2Z}, \\ y = \dfrac{a'_1X + b'_1Y + c'_1Z}{a'_2X + b'_2Y + c'_2Z}; \end{cases}$$

te wzory rozwiązują pytanie. Spółrzędne trzylinijne X, Y, Z, sprawdzają wtedy związek :

$$(7\ bis)\qquad a'_2X + b'_2Y + c'_2Z = P.$$

Uwaga I. Mianownik wartości (7) porównany z zerem

$$(8)\qquad a'_2X + b'_2Y + c'_2Z = 0$$

daje, w układzie obecnym spółrzędnych trzylinijnych, równanie prostéj w nieskończoności; gdyż dla wartości $\frac{X}{Z}$ i $\frac{Y}{Z}$ sprawdzających to równanie, x i y są nieskończonemi.

Uwaga II. Przypuszczając że jeden z boków trójkąta odniesienia, bok AB naprzykład oddala się do nieskończoności, znajdziemy, jako przypadek szczególny, wzory zmiany dla układów spółrzędnych kartezyańskich.

Widzi się to jeszcze za pomocą związków (2), wprowadzając do nich założenia $c = 0$, $c_1 = 0$.

III° Przypadki w których parametry odniesienia są wystawione na widok.

93. Weźmiemy równania boków trójkąta odniesienia pod kształtem następującym :

$$(1)\quad \begin{cases} BC \quad x\,\mathrm{dos}\,\alpha + y\,\mathrm{wst}\,\alpha - p = 0, \\ CA \quad x\,\mathrm{dos}\,\beta + y\,\mathrm{wst}\,\beta - q = 0, \\ AB \quad x\,\mathrm{dos}\,\gamma + y\,\mathrm{wst}\,\gamma - r = 0; \end{cases}$$

α, β, γ, są kątami jakie tworzą z osią odciętych dodatnych, prostopadłe spuszczone z początku spółrzędnych na proste pod uwagę wzięte i skierowane ku tym prostym; p, q, r, są wartościami bezwzględnemi odległości początku od prostych uważanych.

Jeżeli λ, μ, ν, są parametry odniesienia, spółrzędnemi trzylinijnemi jakiegokolwiek punktu będą, nie zważając na znak :

$$\begin{cases} X = \lambda(x \operatorname{dos}\alpha + y \operatorname{wst}\alpha - p), \\ Y = \mu(x \operatorname{dos}\beta + y \operatorname{wst}\beta - q), \\ Z = \nu(x \operatorname{dos}\gamma + y \operatorname{wst}\gamma - r). \end{cases}$$

Lecz przypuścimy tu założenie następujące :

Początek spółrzędnych kartezyańskich jest wewnątrz trójkąta odniesienia.

Spółrzędne trzylinijne jakiegokolwiek punktu będą wtedy dane podług n^ru (76) co do wielkości i co do znaku za pomocą wzorów następujących :

$$(2) \qquad \begin{cases} X = \lambda(p - x \operatorname{dos}\alpha - y \operatorname{wst}\alpha), \\ Y = \mu(q - x \operatorname{dos}\beta - y \operatorname{wst}\beta), \\ Z = \nu(r - x \operatorname{dos}\gamma - y \operatorname{wst}\gamma); \end{cases}$$

aby się o tém przekonać, dosyć jest przypuścić punkt uważany wewnątrz trójkąta odniesienia, mając zarazem wzgląd na umowę n^ru (90) i na prawidło n^ru (76).

Nadto spółrzędne X, Y, Z, powinny podług n^ru (89) sprawdzać związek :

$$(3) \qquad \frac{X}{\lambda} \operatorname{wst} A + \frac{Y}{\mu} \operatorname{wst} B + \frac{Z}{\nu} \operatorname{wst} C = \frac{S}{R}.$$

94. *Związki zasadnicze między kątami* α, β, γ, *i kątami* A, B, C, *trójkąta odniesienia.*

Zastąpmy, w związku (3), X, Y, Z przez ich wartości (2); równanie otrzymane musi mieć miejsce tożsamościowo; tém samém znajdzie się :

$$(1^\circ) \qquad \begin{cases} \operatorname{dos}\alpha \operatorname{wst} A + \operatorname{dos}\beta \operatorname{wst} B + \operatorname{dos}\gamma \operatorname{wst} C = 0, \\ \operatorname{wst}\alpha \operatorname{wst} A + \operatorname{wst}\beta \operatorname{wst} B + \operatorname{wst}\gamma \operatorname{wst} C = 0, \\ p \operatorname{wst} A + q \operatorname{wst} B + r \operatorname{wst} C = \dfrac{S}{R}. \end{cases}$$

Rugując kolejno między dwoma piérwszymi związkami (1°) : wst A, wst B, potém wst C, znajduje się

$$\frac{\operatorname{wst} A}{\operatorname{wst}(\beta - \gamma)} = \frac{\operatorname{wst} B}{\operatorname{wst}(\gamma - \alpha)} = \frac{\operatorname{wst} C}{\operatorname{wst}(\alpha - \beta)}.$$

Załóżmy na chwilę :

$$(2^\circ) \qquad A_1 = \beta - \gamma, \qquad B_1 = \gamma - \alpha, \qquad C_1 = \alpha - \beta;$$

otrzyma się równości :

$$(3^\circ) \qquad \begin{cases} A_1 + B_1 + C_1 = 0 \\ A + B + C = \pi \end{cases}$$

$$(4^\circ) \qquad \frac{\operatorname{wst} A}{\operatorname{wst} A_1} = \frac{\operatorname{wst} B}{\operatorname{wst} B_1} = \frac{\operatorname{wst} C}{\operatorname{wst} C_1} = \frac{1}{k};$$

otóż, wyciąga się ze związków (3°)

$$\mathrm{wst}(A + B) = \mathrm{wst}\,C, \qquad \mathrm{wst}(A_1 + B_1) = -\mathrm{wst}\,C_1;$$

albo, mając wzgląd na równości (4°):

$$\begin{cases} \mathrm{wst}\,A\,\mathrm{dos}\,B + \mathrm{wst}\,B\,\mathrm{dos}\,A = \mathrm{wst}\,C, \\ \mathrm{wst}\,A\,\mathrm{dos}\,B_1 + \mathrm{wst}\,B\,\mathrm{dos}\,A_1 = \mathrm{wst} - C. \end{cases}$$

Wyprowadzi się z tego, dodając stronami, pierwszy ze związków następujących:

$$(5^\circ)\qquad \begin{cases} \mathrm{wst}\,A(\mathrm{dos}\,B + \mathrm{dos}\,B_1) + \mathrm{wst}\,B(\mathrm{dos}\,A + \mathrm{dos}\,A_1) = 0; \\ \mathrm{wst}\,B(\mathrm{dos}\,C + \mathrm{dos}\,C_1) + \mathrm{wst}\,C(\mathrm{dos}\,B + \mathrm{dos}\,B_1) = 0, \\ \mathrm{wst}\,C(\mathrm{dos}\,A + \mathrm{dos}\,A_1) + \mathrm{wst}\,A(\mathrm{dos}\,C + \mathrm{dos}\,C_1) = 0; \end{cases}$$

dwa ostatnie otrzymują się za pomocą rachunku podobnego, lub za pomocą prostéj przemiany liter. Ponieważ wst A, wst B, wst C, są różnemi od zera, więc powyższe związki mogą się napisać:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dos}\,A + \mathrm{dos}\,A_1}{\mathrm{wst}\,A} + \dfrac{\mathrm{dos}\,B + \mathrm{dos}\,B_1}{\mathrm{wst}\,B} = 0, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{dos}\,B + \mathrm{dos}\,B_1}{\mathrm{wst}\,B} + \dfrac{\mathrm{dos}\,C + \mathrm{dos}\,C_1}{\mathrm{wst}\,C} = 0, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{dos}\,C + \mathrm{dos}\,C_1}{\mathrm{wst}\,C} + \dfrac{\mathrm{dos}\,A + \mathrm{dos}\,A_1}{\mathrm{wst}\,A} = 0. \end{cases}$$

Zkąd się wyprowadza, dodając do któregokolwiek z nich różnicę dwóch innych:

$$(6^\circ)\qquad \mathrm{dos}\,A + \mathrm{dos}\,A_1 = 0, \qquad \mathrm{dos}\,B + \mathrm{dos}\,B_1 = 0, \qquad \mathrm{dos}\,C + \mathrm{dos}\,C_1 = 0;$$

z równości (4°) i (6°) wyciąga się:

$$(7^\circ)\qquad k^2 = 1.$$

Ma się także między kątami α, β, γ, *i kątami* A, B, C, *trójkąta odniesienia związki zasadnicze:*

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{wst}(\beta - \gamma)}{\mathrm{wst}\,A} = \frac{\mathrm{wst}(\gamma - \alpha)}{\mathrm{wst}\,B} = \frac{\mathrm{wst}(\alpha - \beta)}{\mathrm{wst}\,C} = k, \quad \text{lub} \quad k^2 = 1,$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{dos}(\beta - \gamma) = -\mathrm{dos}\,A, \\ \mathrm{dos}(\gamma - \alpha) = -\mathrm{dos}\,B, \\ \mathrm{dos}(\alpha - \beta) = -\mathrm{dos}\,C. \end{cases}$$

$$(6)\qquad p.\mathrm{wst}\,A + q.\mathrm{wst}\,B + r.\mathrm{wst}\,C = \frac{S}{R}.$$

Nie należy zapominać że te związki były uzasadnione, przypuszczając początek spółrzędnych kartezyańskich wewnątrz trójkąta odniesienia. Poszukiwanie związków odpowiednich przypadkom, w których początek jest zewnętrzny, nie będzie mogło przedstawiać trudności. Należy także zauważyć, że kiedy się dojdzie do jakiegokolwiek związku, do którego więcéj nie wchodzą jak tylko same elementa trójkąta odniesienia, związek będzie miał miejsce widocznie jakiémkolwiek jest położenie początku spółrzędnych kartezyańskich, ponieważ ilości zależące od położenia osi nie figurują więcéj w związku o którym mowa.

§ II. — LINIA PROSTA. — ODLEGŁOŚCI.

I° Linia prosta. — Prosta w nieskończoności.

95. W układzie spółrzędnych trzylinijnych, równanie jakiéjkolwiek linii prostéj będzie kształtu :

$$MX + NY + PZ = 0, \tag{1}$$

M, N, P, są stałemi.

To wynika bezpośrednio z twierdzenia wysłowionego w n.rze (60).

Z tego wyprowadzamy na równanie prostéj przechodzącéj przez dwa punkta (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Równaniami ogólnemi prostych, przechodzących przez wierzchołki A, B, C, trójkąta odniesienia, będą :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Y = \lambda_1 Z, & \text{dla wierzchołka A,} \\ Z = \lambda_2 X, & \text{dla wierzchołka B,} \\ X = \lambda_3 Y, & \text{dla wierzchołka C;} \end{array} \right.$$

λ_1, λ_2, λ_3 są stałemi dowolnemi.

96. Prosta w niekończoności.

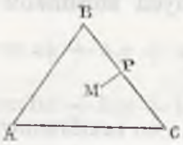
Oznaczymy w ogólności przez X, Y, Z, spółrzędne *trzylinijne* jakiegokolwiek punktu, te spółrzędne muszą sprawdzać związek kształtu :

$$mX + nY + pZ = \text{stałéj} = k, \tag{4}$$

związek który może się dać *a priori*. Parametrami odniesienia będą wtedy :

$$\lambda = \frac{ak}{2S} \cdot \frac{1}{m}, \quad \mu = \frac{bk}{2S} \cdot \frac{1}{n}, \quad \nu = \frac{ck}{2S} \cdot \frac{1}{p}; \tag{5}$$

a, b, c, S są bokami i powierzchnią trójkąta, mogącymi także dać się dowolnie. W rzeczy saméj, λ, μ, ν, przedstawiając parametry odniesienia, odległościami jakiegokolwiek punktu (X, Y, Z) od trzech bo-



kówtrójkąta będą :

$$\frac{X}{\lambda}, \quad \frac{Y}{\mu}, \quad \frac{Z}{\nu};$$

a ponieważ powierzchnia trzech trójkątów częściowych musi dać powierzchnią całkowitą S, ma się więc :

$$a\frac{X}{\lambda} + b\frac{Y}{\mu} + c\frac{Z}{\nu} = 2S.$$

Identyfikując ten związek ze związkami (4), przychodzi się do wartości (5).

Dodawszy teraz że równanie prostéj w nieskończoności otrzyma się, porównywając z zerem pierwszą stronę związku (4), będzie :

(6) $$mX + nY + pZ = 0.$$

Aby tego dowieść, szukajmy przecięcia się prostéj (1) z bokami trójkąta odniesienia, i wyraźmy że punkta są w nieskończoności.

Dla boku BC, na przykład, ma się $X = 0$; równanie (1) i związek (4) dają wtedy :

$$NY + PZ = 0,$$

$$nY + pZ = k;$$

Y i Z muszą być nieskończone, i będzie potrzeba aby

$$\frac{N}{n} = \frac{P}{p}.$$

Szukając tak samo przecięcia się prostéj z innymi bokami trójkąta ABC, otrzymuje się że

(7) $$\frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{P}{p}$$

są warunki konieczne i dostateczne ażeby prosta

$$MX + NY + PZ = 0$$

była w nieskończoności.

Równanie (6) *przedstawia więc prostą w nieskończoności.*

Wynika z tego co poprzedza, że dla układu szczególnego spółrzędnych określonych w n^{rze} (93), równaniem prostéj w nieskończoności jest :

(8) $$X \operatorname{wst} A + Y \operatorname{wst} B + Z \operatorname{wst} C = 0.$$

Przyszłoby się podobnież do tego następstwa, rozwiązując równania (2) n^{ru} (93) względem x i y, i wyrażając za pomocą wartości skończonych stosunków $\frac{X}{Z}$, $\frac{X}{Y}$, że wartości znalezione są nieskończonemi.

Prosta równoległa do jakiéjkolwiek prostéj danéj.

97. Niech będzie jakakolwiek prosta dana

$$(9) \qquad MX + NY + PZ = 0;$$

równanie ogólne prostych równoległych do prostéj (9) otrzyma się, szukając równania ogólnego prostych przechodzących przez punkt przecięcia się prostéj danéj z prostą w nieskończoności

$$mX + nY + pZ = 0.$$

Równaniem szukaném będzie więc

$$(10) \qquad MX + NY + PZ + \rho(mX + nY + pZ) = 0,$$

ρ oznaczając stałą zupełnie dowolną.

Pod kształtem danym w n^{rze} (93) i przypuszczając parametry odniesienia równymi jedności, równaniem ogólném prostych równoległych do prostéj (9) będzie :

$$(11) \qquad MX + NY + PZ + \rho(X \operatorname{wst} A + Y \operatorname{wst} B + Z \operatorname{wst} C) = 0.$$

Jako zastosowanie, równaniem prostéj równoległéj do boku BC, albo do boku AC, albo do boku AB, trójkąta odniesienia, będzie :

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\rho_1 X + (X \operatorname{wst} A + Y \operatorname{wst} B + Z \operatorname{wst} C) = 0, \\ &\rho_2 Y + (X \operatorname{wst} A + Y \operatorname{wst} B + Z \operatorname{wst} C) = 0, \\ &\rho_3 Z + (X \operatorname{wst} A + Y \operatorname{wst} B + Z \operatorname{wst} C) = 0. \end{aligned} \right.$$

Rzecz oczywista że można, jeżeli się w tém znajduje korzyść, zastąpić w równaniach (10), (11) lub (12), funkcye linijne :

$$(mX + nY + pZ) \qquad \text{albo} \qquad (X \operatorname{wst} A + Y \operatorname{wst} B + Z \operatorname{wst} C)$$

przez stałą któréj one są równemi.

II° Odległość któregokolwiek punktu od jakiéjkolwiek prostéj. — Odległość dwóch punktów.

98. Niech będzie równanie linii prostéj danéj :

$$(1) \qquad MX + NY + PZ = 0,$$

a X_0, Y_0, Z_0, spółrzędne punktu.

Jakimkolwiek jest układ spółrzędnych trzylinijnych, spółrzędne X, Y, Z, jakiegokolwiek punktu są związane ze spółrzędnemi kartezyańskiemi tegoż samego punktu za pomocą związków n^{ru} [90]:

$$(2) \qquad \begin{cases} X = ax + a_1 y + a_2, \\ Y = bx + b_1 y + b_2, \\ Z = cx + c_1 y + c_2. \end{cases}$$

Równaniem w układzie spółrzędnych kartezyańskich prostéj danéj (1) będzie odtąd:

$$M(ax + a_1 y + a_2) + N(bx + b_1 y + b_2) + P(cx + c_1 y + c_2) = 0;$$

a podług n^{ru} [76], odległość δ punktu (X_0, Y_0, Z_0) albo (x_0, y_0), od téj prostéj będzie miała za wyrażenie:

$$\frac{M(ax_0 + a_1 y_0 + a_2) + N(bx_0 + b_1 y_0 + b_2) + P(cx_0 + c_1 y_0 + c_2)}{\pm\sqrt{(aM + bN + cP)^2 + (a_1 M + b_1 N + c_1 P)^2}};$$

lub nakoniec, mając wzgląd na związek (2)

$$\delta = \frac{MX_0 + NY_0 + PZ_0}{\pm\sqrt{(aM + bN + cP)^2 + (a_1 M + b_1 N + c_1 P)^2}};$$

wyrażenie odległości któregokolwiek punktu od jakiéjkolwiek prostéj jest więc proporcyonalném do pierwszéj strony równania prostéj.

W kształcie przybranym w n^{rze} (93), ma się:

$$\begin{cases} a = -\lambda \operatorname{dos}\alpha, & b = -\mu \operatorname{dos}\beta, & c = -\nu \operatorname{dos}\gamma, \\ a_1 = -\lambda \operatorname{wst}\alpha; & b_1 = -\mu \operatorname{wst}\beta; & c_1 = -\nu \operatorname{wst}\gamma; \end{cases}$$

znajduje się wtedy, mając wzgląd na związki (5) n^{ru} (94), dla odległości δ punktu (X_0, Y_0, Z_0) od prostéj (1):

$$(4) \qquad \delta = \frac{MX_0 + NY_0 + PZ_0}{\sqrt{\lambda^2 M^2 + \mu^2 N^2 + \nu^2 P^2 - 2\mu\nu NP \operatorname{dos} A - 2\lambda\nu PM \operatorname{dos} B - 2\lambda\mu MN \operatorname{dos} C}}$$

λ, μ, ν, są parametrami odniesienia.

99. Odległość dwóch punktów.

Niech będą (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) spółrzędnemi trzylinijnemi dwóch punktów danych, a (x_1, y_1), (y_2, y_2) ich spółrzędne kartezyańskie. Wzory (2) n^{ru} [93] dają, oznaczając parametry odniesienia przez λ, μ, ν:

$$\begin{cases} \dfrac{X_1}{\lambda} = p - x_1 \operatorname{dos}\alpha - y_1 \operatorname{wst}\alpha, & \dfrac{X_2}{\lambda} = p - x_2 \operatorname{dos}\alpha - y_2 \operatorname{wst}\alpha, \\ \dfrac{Y_1}{\mu} = q - x_1 \operatorname{dos}\beta - y_1 \operatorname{wst}\beta, & \dfrac{Y_2}{\mu} = q - x_2 \operatorname{dos}\beta - y_2 \operatorname{wst}\beta, \\ \dfrac{Z_1}{\nu} = r - x_1 \operatorname{dos}\gamma - y_1 \operatorname{dos}\gamma, & \dfrac{Z_2}{\nu} = r - x_2 \operatorname{dos}\gamma - y_2 \operatorname{dos}\gamma. \end{cases}$$

Odejmując te równości stronami tak jak one po sobie w każdym wierszu poziomym następują, wypadnie:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{X_1 - X_2}{\lambda} = (x_2 - x_1)\operatorname{dos}\alpha + (y_2 - y_1)\operatorname{wst}\alpha, \\[2ex] \dfrac{Y_1 - Y_2}{\mu} = (x_2 - x_1)\operatorname{dos}\beta + (y_2 - y_1)\operatorname{wst}\beta, \\[2ex] \dfrac{Z_1 - Z_2}{\nu} = (x_2 - x_1)\operatorname{dos}\gamma + (y_2 - y_1)\operatorname{wst}\gamma. \end{cases}$$

Rozwiążmy równania (1) dwa po dwa, względem różnic $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$; znajduje się, mając wzgląd na związki (4) n^ru [94]:

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)\operatorname{wst}C = \dfrac{Y_1 - Y_2}{\mu}\operatorname{wst}\alpha - \dfrac{X_1 - X_2}{\lambda}\operatorname{wst}\beta; \\[2ex] (x_2 - x_1)\operatorname{wst}A = \dfrac{Z_1 - Z_2}{\nu}\operatorname{wst}\beta - \dfrac{Y_1 - Y_2}{\mu}\operatorname{wst}\gamma; \\[2ex] (x_2 - x_1)\operatorname{wst}B = \dfrac{X_1 - X_2}{\lambda}\operatorname{wst}\gamma - \dfrac{Z_1 - Z_2}{\nu}\operatorname{wst}\alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} (y_2 - y_1)\operatorname{wst}C = -\dfrac{Y_1 - Y_2}{\mu}\operatorname{dos}\alpha + \dfrac{X_1 - X_2}{\lambda}\operatorname{dos}\beta \\[2ex] (y_2 - y_1)\operatorname{wst}A = -\dfrac{Z_1 - Z_2}{\nu}\operatorname{dos}\beta + \dfrac{Y_1 - Y_2}{\mu}\operatorname{dos}\gamma; \\[2ex] (y_2 - y_1)\operatorname{wst}B = -\dfrac{X_1 - X_2}{\lambda}\operatorname{dos}\gamma + \dfrac{Z_1 - Z_2}{\nu}\operatorname{dos}\alpha. \end{cases}$$

Dla otrzymania wartości symetrycznych, dodajmy trzy równania każdej grupy, i zauważmy że

$$\operatorname{wst}A + \operatorname{wst}B + \operatorname{wst}C = 4\operatorname{dos}\frac{A}{2}\operatorname{dos}\frac{B}{2}\operatorname{dos}\frac{C}{2};$$

wypadnie:

$$4\operatorname{dos}\frac{A}{2}\operatorname{dos}\frac{B}{2}\operatorname{dos}\frac{C}{2}(x_2 - x_1) = \frac{X_1 - X_2}{\lambda}(\operatorname{wst}\gamma - \operatorname{wst}\beta) + \frac{Y_1 - Y_2}{\mu}(\operatorname{wst}\alpha - \operatorname{wst}\gamma) + \frac{Z_1 - Z_2}{\nu}(\operatorname{wst}\beta - \operatorname{wst}\alpha);$$

$$4\operatorname{dos}\frac{A}{2}\operatorname{dos}\frac{B}{2}\operatorname{dos}\frac{C}{2}(y_2 - y_1) = \frac{X_1 - X_2}{\lambda}(\operatorname{dos}\beta - \operatorname{dos}\gamma) + \frac{Y_1 - Y_2}{\mu}(\operatorname{dos}\gamma - \operatorname{dos}\alpha) + \frac{Z_1 - Z_2}{\nu}(\operatorname{dos}\alpha - \operatorname{dos}\beta).$$

Teraz dodajmy summę kwadratów, mając wzgląd na związki (5) n^ru [94] i zauważmy że:

$$\begin{cases} S^2 = \overline{M_1M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \\[1ex] 1 + \operatorname{dos}A = 2\operatorname{dos}^2\dfrac{A}{2}, \\[2ex] \operatorname{dos}B + \operatorname{dos}C - \operatorname{dos}A + 1 = 4\operatorname{wst}\dfrac{A}{2}\operatorname{dos}\dfrac{B}{2}\operatorname{dos}\dfrac{C}{2}\ ;\ \text{etc.}, \end{cases}$$

znajduje się wzór ostateczny

$$(2)\qquad 4\overline{M_1M_2}^2 . \operatorname{dos}^2\frac{A}{2} . \operatorname{dos}^2\frac{B}{2} . \operatorname{dos}^2\frac{C}{2} = \left(\begin{array}{l} \operatorname{dos}^2\frac{A}{2}\frac{(X_1-X_2)^2}{\lambda^2}+\operatorname{dos}^2\frac{B}{2}\frac{(Y_1-Y_2)^2}{\mu^2} \\ \qquad +\operatorname{dos}^2\frac{C}{2}\frac{(Z_1-Z_2)^2}{\nu^2} \\ -2\operatorname{wst}\frac{A}{2}\operatorname{dos}\frac{B}{2}\operatorname{dos}\frac{C}{2}\frac{(Y_1-Y_2)}{\mu}\frac{(Z_1-Z_2)}{\nu} \\ -2\operatorname{wst}\frac{B}{2}\operatorname{dos}\frac{A}{2}\operatorname{dos}\frac{C}{2}\frac{(Z_1-Z_2)}{\nu}\frac{(X_1-X_2)}{\lambda} \\ -2\operatorname{wst}\frac{C}{2}\operatorname{dos}\frac{A}{2}\operatorname{dos}\frac{B}{2}\frac{(X_1-X_2)}{\lambda}\frac{(Y_1-Y_2)}{\mu} \end{array}\right)$$

λ, μ, ν są parametrami odniesienia.

100. Warunek ażeby dwie proste były prostokątnemi.

Niech będą równania dwóch prostych:

$$(1)\qquad \begin{cases} M_1X+N_1Y+P_1Z=0, \\ M_2X+N_2Y+P_2Z=0. \end{cases}$$

Przedstawmy te równania w układzie kartezyańskim za pomocą wzorów (2) nr[u] [93]; potém wyraźmy że te dwie proste są prostokątnemi; dojdzie się tym sposobem do równania warunkowego:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\lambda^2M_1M_2+\mu^2N_1N_2+\nu^2P_1P_2-2\mu\nu\operatorname{dos}A(N_1P_2+N_2P_1) \\ &\qquad -2\nu\lambda\operatorname{dos}B(P_1M_2+P_2M_1)-2\lambda\mu\operatorname{dos}C(M_1N_2+M_2N_1)=0. \end{aligned}$$

Uwaga. Możnaby było wyprowadzić z tego równania wysokości trojkąta odniesienia; lecz je otrzymamy poniżéj n[er] [102] przez poszukiwanie wprost.

101. Przejść z układu spółrzędnych trzylinijnych do innego układu spółrzędnych trzylinijnych.

Niech będą X, Y, Z spółrzędne jakiegokolwiek punktu względem trójkąta ABC, a

$$(1)\qquad mX+nY+pZ=k$$

związek który powinny sprawdzać te spółrzędne.

Daje się względem trójkąta ABC, równania trzech boków nowego trójkąta odniesienia A'B'C', niech będzie:

$$(2)\qquad \begin{cases} a'X + b'Y + c'X = 0, & B'C' \\ a''X + b''Y + c''Z = 0, & C'A' \\ a'''X + b'''Y + c'''Z = 0. & A'B' \end{cases}$$

Wzór (3) n^ru [98] daje nam odległości punktu M(X, Y, Z) od trzech boków nowego trójkąta; a oznaczając przez X', Y', Z', ilości proporcyonalne do tych odległości, będziemy mieli na wzory zmiany szukanej:

$$(3)\qquad \begin{cases} X' = \lambda'(a'X + b'Y + c'Z), \\ Y' = \mu'(a''X + b''Y + c''Z), \\ Z' = \nu'(a'''X + b'''Y + c'''Z). \end{cases}$$

Stałe λ', μ', ν', zależą od spółczynników a', a'', a''', b',... i od nowych parametrów odniesienia dowolnie wybranych. Dyskussya znaków na ocenienie odległości, będzie zależała od położenia względnego dwóch trójkątów i musi się wykonać dla każdego przypadku szczególnego, w którym wypadnie użyć tych wzorów zmiany; zdarzenie to wreszcie bardzo jest rzadkiem.

W téj zmianie analitycznéj figura nie jest zmienioną, więc prosta w nieskończoności być nią nie przestanie.

Spółrzędne X, Y, Z, sprawdzają związek kształtu

$$(1)\qquad mX + nY + pZ = k;$$

spółrzędne X', Y' Z' muszą także sprawdzać inny związek taki jak:

$$(4)\qquad m'X' + n'Y' + p'Z' = k.$$

Dla znalezienia tego ostatniego związku, dość rozwiązać równania (3) względem X, Y, Z, i podstawić w związku (1) wartości otrzymane.

III° Równania dwójsiecznych, linii łączących wierzchołki ze środkami boków i wysokości trójkąta odniesienia.

102. Umieścimy się w przypadku układu szczególnego n^ru [93], w którym równania boków trójkąta odniesienia są kształtu:

$$(1)\qquad \begin{cases} X = p - x\,\mathrm{dos}\,\alpha - y\,\mathrm{wst}\,\alpha = 0, \\ Y = q - x\,\mathrm{dos}\,\beta - y\,\mathrm{wst}\,\beta = 0, \\ Z = r - x\,\mathrm{dos}\,\gamma - y\,\mathrm{wst}\,\gamma = 0; \end{cases}$$

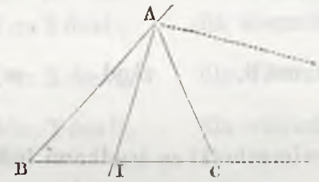
przytem, jeżeli się przypuści parametry odniesienia równymi jedności, potem początek wewnątrz trójkąta, pierwsze strony równań poprzedzających dadzą, co do wielkości i co do znaku, spółrzędne trzylinijne X, Y, Z, punktu (x, y).

1°. DWÓJSIECZNE.

Szukajmy, na przykład, dwójsiecznych kąta A. Równaniem jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez punkt A, jest

$$Y = mZ;$$

Kiedy I jest punkt w którym ona spotyka bok BC, spółrzędne tego punktu, równe i tegoż



samego znaku, powinny sprawdzić to równanie; ma się więc:

$$m = 1; \qquad \text{zkąd} \qquad Y = Z.$$

Dla dwójsiecznej zewnętrznej spółrzędne punktu I są równe i znaku przeciwnego; a tem samem ma się:

$$m = -1; \qquad \text{zkąd} \qquad Y = -Z.$$

Równaniami dwójsiecznych są więc:

		Wewnętrznych.	*Zewnętrznych.*	
(2)	{	$Y - Z = 0,$	$Y + Z = 0,$	WIERZCHOŁEK A;
		$Z - X = 0,$	$Z + X = 0,$	WIERZCHOŁEK B
		$X - Y = 0,$	$X + Y = 0,$	WIERZCHOŁEK C

Wyprowadza się ztąd:

Trzy dwójsieczne wewnętrzne trójkąta są zbiegającemi się z sobą.

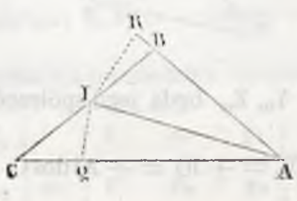
Dwójsieczne zewnętrzne dwóch kątów zbiegają się w tymże samym punkcie z dwójsieczną wewnętrzną 3ciego kąta.

Gdyż uważając na przykład równania trzech dwójsiecznych wewnętrznych, widzimy że jedno z tych równań jest następstwem dwóch innych; a tem samem, wszelkie rozwiązanie wspólne dla dwóch z pomiędzy nich sprawdza 3cie; czyli punkt wspólny dla dwóch tych prostych znajduje się na 3ciej.

2° LINIE ŁĄCZĄCE WIERZCHOŁKI ZE ŚRODKAMI BOKÓW.

Równaniem jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez punkt A, jest

$$Y = mZ;$$



Niech będzie I spodek linii łączącej wierchołek ze środkiem boku, a Y_0, Z_0, spółrzędne tego punktu, ma się:

$$Y_0 = + IQ = IC.\,\mathrm{wst}\,C,$$

$$Z_0 = + IR = IB.\,\mathrm{wst}\,B;$$

otóż $IC = IB$, i te spółrzędne powinny sprawdzać równanie powyższe; co daje:

$$\mathrm{wst}\,C = m.\,\mathrm{wst}\,B, \qquad \text{zkąd} \qquad m = \frac{\mathrm{wst}\,C}{\mathrm{wst}\,B}.$$

Przeto równaniami linii łączących wierzchołki ze środkami boków są:

$$(3) \qquad \begin{cases} Y\,\mathrm{wst}\,B = Z\,\mathrm{wst}\,C, & \text{dla wierzchołka A,} \\ Z\,\mathrm{wst}\,C = X\,\mathrm{wst}\,A, & \text{dla wierzchołka B,} \\ X\,\mathrm{wst}\,A = Y\,\mathrm{wst}\,B, & \text{dla wierzchołka C,} \end{cases}$$

Wyprowadza się jeszcze z tych równań że:

Trzy linie łączące wierzchołki ze środkami boków trójkąta przecinają się w tymże samym punkcie.

Spółrzędnemi ich punktu spotkania się, który daje *środek ciężkości trójkąta* są:

$$\begin{cases} X\,\mathrm{wst}\,A = Y\,\mathrm{wst}\,B = Z\,\mathrm{wst}\,C, \\ X\,\mathrm{wst}\,A + Y\,\mathrm{wst}\,B + Z\,\mathrm{wst}\,C = \frac{S}{R}; \end{cases}$$

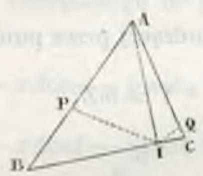
zkąd, rozwiązując:

$$X\,\mathrm{wst}\,A = Y\,\mathrm{wst}\,B = Z\,\mathrm{wst}\,C = \frac{S}{3R}.$$

3° Wysokości.

Uważmy wysokość odpowiednią wierzchołkowi A. Równaniem jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez ten punkt, jest

$$Y = mZ;$$



jeżeli I jest spodek wysokości i niech Y_0, Z_0, będą jego spółrzędnemi, ma się:

$$Y_0 = + IQ = + AI\,\mathrm{dos}\,C,$$

$$Z_0 = + IR = + AI\,\mathrm{dos}\,B.$$

Ponieważ te spółrzędne muszą sprawdzać równanie prostéj, ma się więc

$$\operatorname{dos} C = m \operatorname{dos} B, \quad \text{zkąd} \quad m = \frac{\operatorname{dos} C}{\operatorname{dos} B}.$$

Przeto równaniami wysokości są:

$$(4) \quad \begin{cases} X \operatorname{dos} B = Z \operatorname{dos} C, & \text{dla wierzchołka A,} \\ Z \operatorname{dos} C = X \operatorname{dos} A, & \text{dla wierzchołka B,} \\ X \operatorname{dos} A = Y \operatorname{dos} B. & \text{dla wierzchołka C.} \end{cases}$$

Widzimy jeszcze że:

Trzy wysokości trójkąta przecinają się w tymże samym punkcie.

Spółrzędne punktu spotkania się trzech wysokości są danemi przez:

$$\begin{cases} X \operatorname{dos} A = Y \operatorname{dos} B = Z \operatorname{dos} C, \\ X \operatorname{wst} A + Y \operatorname{wst} B + Z \operatorname{wst} C = \frac{S}{R}, \end{cases}$$

zkąd się wyciąga:

$$(4\ bis) \quad X \operatorname{dos} A = Y \operatorname{dos} B = Z \operatorname{dos} C = \frac{S}{R \operatorname{st} A . \operatorname{st} B . \operatorname{st} C}.$$

IV° Powierzchnia trójkąta.

103. I° *Mając dane spółrzędne trzylinijne* (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) *wierzchołków trójkąta* $M_1M_2M_3$, *obliczyć powierzchnią trójkąta.*

Oznaczając przez (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), spółrzędne kartezyańskie wierzchołków, ma się na mocy n^ru (79)

$$(1) \quad 2\Sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Lecz podług wzorów n^ru [93], otrzymamy równości:

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = (p - x_1 \operatorname{dos}\alpha - y_1 \operatorname{wst}\alpha)\lambda, & X_2 = (p - x_2 \operatorname{dos}\alpha - y_2 \operatorname{wst}\alpha)\lambda, & X_3 = (p - x_3 \operatorname{dos}\alpha - y_3 \operatorname{wst}\alpha)\lambda, \\ Y_1 = (q - x_1 \operatorname{dos}\beta - y_1 \operatorname{wst}\beta)\mu, & Y_2 = (q - x_2 \operatorname{dos}\beta - y_2 \operatorname{wst}\beta)\mu, & Y_3 = (q - x_3 \operatorname{dos}\beta - y_3 \operatorname{wst}\beta)\mu, \\ Z_1 = (r - x_1 \operatorname{dos}\gamma - y_1 \operatorname{dos}\gamma)\nu; & Z_2 = (r - x_2 \operatorname{dos}\gamma - y_2 \operatorname{dos}\gamma)\nu; & Z_3 = (r - x_3 \operatorname{dos}\gamma - y_3 \operatorname{dos}\gamma)\nu. \end{cases}$$

Otóż, zastosowanie znanego twierdzenia o mnożeniu wyznaczników daje nam bezpośrednio:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & -\operatorname{dos}\alpha & -\operatorname{wst}\alpha \\ q & -\operatorname{dos}\beta & -\operatorname{wst}\beta \\ r & -\operatorname{dos}\gamma & -\operatorname{wst}\gamma \end{vmatrix} \lambda\mu\nu.$$

1szy wyznacznik drugiéj strony ma na wartość 2Σ;

2gi wyznacznik rozwinięty staje się :

$$p\,\mathrm{wst}(\gamma-\beta)+q\,\mathrm{wst}(\alpha-\gamma)+r\,\mathrm{wst}(\beta-\alpha);$$

to wyrażenie, mając wzgląd na związki (4) i (6) nru [94], sprowadza się do $\frac{S}{R}$.

Ma się więc

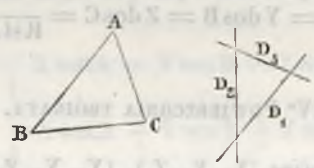
$$\Sigma=\pm\frac{R}{2S}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{\lambda\mu\nu}; \tag{3}$$

λ, μ, ν są parametrami odniesienia.

Σ jest powierzchnią trójkąta $M_1M_2M_3$; S jest powierzchnią trójkąta odniesienia, a R promieniem koła opisanego.

2° *Obliczyć powierzchnią trójkąta, którego boki są dane równaniami.*

Niech będą równania trzech prostych odniesionych do trójkąta ABC:



$$\left\{\begin{aligned} D_1 &: a_1X+b_1Y+c_1Z=0, \\ D_2 &: a_2X+b_2Y+c_2Z=0, \\ D_3 &: a_3X+b_3Y+c_3Z=0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Oznaczmy przez X_1, Y_1, Z_1, spółrzędne punktu przecięcia się prostéj D_2 z D_3; przez X_2, Y_2, Z_2, spółrzędne punktu przecięcia się prostéj D_3 z D_1, etc...; otrzymamy :

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= a_1X_1+b_1Y_1+c_1Z_1, \\ 0 &= a_2X_1+b_2Y_1+c_2Z_1, \\ 0 &= a_3X_1+b_3Y_1+c_3Z_1; \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} 0 &= a_1X_2+b_1Y_2+c_1Z_2, \\ Q_2 &= a_2X_2+b_2Y_2+c_2Z_2, \\ 0 &= a_3X_2+b_3Y_2+c_3Z_2; \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} 0 &= a_1X_3+b_1Y_3+c_1Z_3, \\ 0 &= a_2X_3+b_2Y_3+c_2Z_3; \\ Q_3 &= a_3X_3+b_3Y_3+c_3Z_3. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Na mocy znanego twierdzenia względem mnożenia wyznaczników, wyprowadzi się ze związków (5) :

$$Q_1Q_2Q_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Potrzeba teraz wyrachować Q_1, Q_2, Q_3. Załóżmy naprzód:

$$(7)\quad P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};\ P_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \frac{\text{wst}A}{\lambda} & \frac{\text{wst}B}{\mu} & \frac{\text{wst}C}{\nu} \end{vmatrix};\ P_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \frac{\text{wst}A}{\lambda} & \frac{\text{wst}B}{\mu} & \frac{\text{wst}C}{\nu} \end{vmatrix};\ P_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \frac{\text{wst}A}{\lambda} & \frac{\text{wst}B}{\mu} & \frac{\text{wst}C}{\nu} \end{vmatrix}.$$

Jeżeli do pierwszéj grupy związków (5) przydamy związek:

$$X_1 \frac{\text{wst}\,A}{\lambda} + Y_1 \frac{\text{wst}\,B}{\mu} + Z_1 \frac{\text{wst}\,C}{\nu} = \frac{S}{R},$$

i jeśli wyrugujemy X_1, Y_1, Z_1, między czterema równaniami tym sposobem otrzymanemi, wypadnie:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & Q_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ \frac{\text{wst}\,A}{\lambda} & \frac{\text{wst}\,B}{\mu} & \frac{\text{wst}\,C}{\nu} & \frac{S}{R} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{zkąd się wyciąga} \quad Q_1 = \frac{S}{R} \cdot \frac{P}{P_1},$$

mając wzgląd na związki (7), otrzyma się podobnież Q_2 i Q_3.

Na mocy wzoru (3) i wartości które się znalazło, związek (6) daje:

$$(8)\qquad 2\Sigma = \frac{1}{\lambda\mu\nu} \cdot \left[\frac{S}{R}\right]^2 \cdot \frac{P^2}{P_1 P_2 P_3};$$

jestto wzór szukany. Σ przedstawia powierzchnią trójkąta określonego przez trzy proste (4); λ, μ, ν, są parametrami odniesienia; S i R oznaczają powierzchnią i promień opisany na kole trójkąta odniesienia; P, P_1, P_2, P_3, są ilości określone za pomocą równości (7).

Spostrzeżenie.

Nie damy tu wyznaczenia kątów; zobaczymy poniżéj metodę ułatwiającą to poszukiwanie.

Nie należy zapominać wreszcie, że jeżeli użycie spółrzędnych trzylinijnych przedstawia wielkie korzyści w nauce własności rzutowych czyli opisowych figur, rzecz się ma inaczéj kiedy idzie o własności metryczne. Układ spółrzędnych trzylinijnych jest często skutecznem narzędziem w poszukiwaniach analitycznych, lecz nie potrzeba go za nadto nadużywać; natura kwestyi musi w tym względzie być przewodnikiem dla zgłębiającego ten przedmiot.

V° Biegunowa jakiegokolwiek punktu względem dwóch prostych.

104. Przypomnijmy sobie że biegunowa była określoną w n[rze] (83) za pomocą związku

(1) $$\frac{2}{PM}=\frac{1}{Pa}+\frac{1}{Pb};$$

albo

(1 *bis*) $$\frac{Ma}{Pa}+\frac{Mb}{Pb}=0.$$

Niech będą równania dwóch prostych danych:

(A) $$aX+a_1Y+a_2Z=0,$$

(B) $$bX+b_1Y+b_2Z=0,$$

a (X, Y, Z), (X_0, Y_0, Z_0) spółrzędne względem punktów M i P.

Na mocy wzorów (4) n[ru] [90], jeżeli X', Y', Z', są spółrzędnemi punktu a otrzyma się:

$$X'=\frac{X+\frac{Ma}{aP}X_0}{1+\frac{Ma}{aP}},\qquad Y'=\frac{Y+\frac{Ma}{aP}Y_0}{1+\frac{Ma}{aP}},\qquad Z'=\frac{Z'+\frac{Ma}{aP}Z_0}{1+\frac{Ma}{aP}}.$$

Ponieważ te spółrzędne muszą sprawdzać równanie prostej (A), więc ztąd się wyprowadza:

(2) $$\frac{Ma}{aP}=-\frac{aX+a_1Y+a_2Z}{aX_0+a_1Y_0+a_2Z_0};$$

znajdzie się podobnież

(2 *bis*) $$\frac{Mb}{bP}=-\frac{bX+b_1Y+b_2Z}{bX_0+b_1Y_0+b_2Z_0}.$$

Podstawiając te wartości w równaniu (1 *bis*), otrzymuje się na równanie biegunowéj:

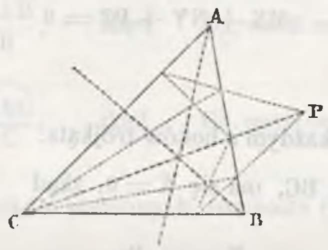
(3) $$\frac{aX+a_1Y+a_2Z}{aX_0+a_1Y_0+a_2Z_0}+\frac{bX+b_1Y+b_2Z}{bX_0+b_1Y_0+b_2Z_0}=0,$$

albo

$$\frac{A}{A_0}+\frac{B}{B_0}=0.$$

105. Zastosujmy ten wzór do trójkąta odniesienia.

Biegunowemi punktu (X_0, Y_0, Z_0) względem trzech kątów trójkąta odniesienia są odpowiednio :



$$\text{dla wierzchołka A : } \frac{Y}{Y_0}+\frac{Z}{Z_0}=0; \qquad \text{prosta AP } \frac{Y}{Y_0}-\frac{Z}{Z_0}=0,$$

$$\text{dla wierzchołka B : } \frac{Z}{Z_0}+\frac{X}{X_0}=0; \qquad \text{prosta BP } \frac{Z}{Z_0}-\frac{X}{X_0}=0,$$

$$\text{dla wierzchołka C : } \frac{X}{X_0}+\frac{Y}{Y_0}=0; \qquad \text{prosta CP } \frac{X}{X_0}-\frac{Y}{Y_0}=0.$$

Te wzory dają dowodzenie bezpośrednie twierdzeń następujących :

1° *Biegunowe tegoż samego punktu względem trzech kątów trójkąta spotykają odpowiednio boki przeciwne w trzech punktach położonych w linii prostéj.*

2° *Biegunowe jakiegokolwiek punktu względem dwóch kątów trójkąta przecinają się na linii prostej, łączącéj ten punkt z wierzchołkiem* 3ciego *kąta.* (CHASLES, *Geometrya wyższa*, strona 275.)

§ III. — ZASTOSOWANIA.

1° WŁASNOŚCI POPRZECZNYCH.

106. Pomiędzy własnościami które udowodnimy, dwie były już uzasadnione w n^rze [57]; damy ich nowe dowodzenia :

I° *Gdy trójkąt* ABC *jest przecięty przez jakąkolwiek poprzeczną* abc, *ma się między odcinkami związek*

$$\text{(I)} \qquad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=+1,$$

to twierdzenie jest przypisywaném *Menelausowi.*

II° *Gdy trójkąt jest przecięty przez jakąkolwiek poprzeczną* abc, *ma się, między wstawami kątów utworzonych przez linie* aA, bB, cC, *z bokami kąta zkąd ona wychodzi, związek następujący :*

$$\text{(II)} \qquad \frac{\text{wst}\,\widehat{aAB}}{\text{wst}\,\widehat{aAC}}\cdot\frac{\text{wst}\,\widehat{bBC}}{\text{wst}\,\widehat{bBA}}\cdot\frac{\text{wst}\,\widehat{cCA}}{\text{wst}\,\widehat{cCB}}=+1;$$

(CHASLES, *Geometrya wyższa*, strona 261.

Weźmy trójkąt o którym mowa za trójkąt odniesienia i przypuśćmy parametry odniesienia równemi jedności. Niech będzie

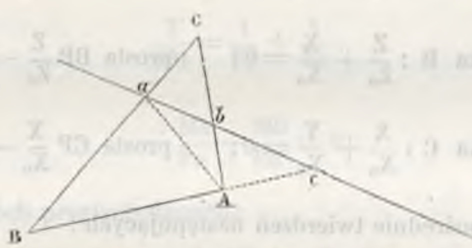
(1) $$MX + NY + PZ = 0$$

równaniem poprzecznej.

Szukajmy przecięć się téj prostéj z każdym z boków trójkąta.

Dla punktu a położonego na boku BC, ma się $X = 0$, zkąd

$$\frac{Y_0}{Z_0} = -\frac{P}{N}.$$



Otóż, zważając na umowę n[ru] [53] o znakach odcinków; i na umowę n[ru] [90] o znakach spółrzędnych trzylinijnych, znajduje się :

$$Y_0 = Ca \,.\, \text{wst}\, C, \qquad Z_0 = -\, Ba \,.\, \text{wst}\, B,$$

gdyż, jeżeli Ca jest odcinek dodatny, Ba będzie odjemny; co się tyczy spółrzędnych Y_0 i Z_0, one są dodatne. Ma się tym sposobem pierwszą z równości następujących :

(2) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{Ca \,.\, \text{wst}\, C}{Ba \,.\, \text{wst}\, B} = \frac{P}{N}, \quad \text{dla punktu a;} \\ &\frac{Ab \,.\, \text{wst}\, A}{Cb \,.\, \text{wst}\, C} = \frac{M}{P}, \quad \text{dla punktu b;} \\ &\frac{Bc \,.\, \text{wst}\, B}{Ac \,.\, \text{wst}\, A} = \frac{N}{M}, \quad \text{dla punktu c;} \end{aligned}\right.$$

dwie inne równości téj grupy otrzymują się za pomocą rachunku i dyskussyi podobnych; zauważy się dla punktu C że spółrzędne są znaków przeciwnych, lecz odcinki Bc, Ac, są tegoż samego znaku.

Mnożąc stronami równości (2), otrzymuje się :

$$\frac{Ca}{Ba} \cdot \frac{Ab}{Cb} \cdot \frac{Bc}{Ac} = +$$

jestto związek któryśmy mieli dowieść.

Teraz złączmy aA, bB, cC; uważmy, na przykład, kąty $\widehat{aAB}$, $\widehat{aAC}$; ma się

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{Ba}{Aa}=\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{aAB}}{\mathrm{wst}\,B}, \quad \text{zkąd} \quad Ba.\mathrm{wst}\,B = Aa.\mathrm{wst}\,\widehat{aAB};\\ &\frac{Ca}{Aa}=\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{aAC}}{\mathrm{wst}\,C}, \quad \text{zkąd} \quad Ca.\mathrm{wst}\,C = Aa.\mathrm{wst}\,\widehat{aAC}. \end{aligned}\right.$$

Za pomocą tych związków i związków podobnych, równości (2) będą mogły się napisać:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{aAC}}{\mathrm{wst}\,\widehat{aAB}}=\frac{P}{N},\\ &\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{bBA}}{\mathrm{wst}\,\widehat{bBC}}=\frac{M}{P},\\ &\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{cCB}}{\mathrm{wst}\,\widehat{cCA}}=\frac{N}{M}. \end{aligned}\right.$$

Lecz, aby związki (3) a tém samém, związki (4) były prawdziwe co do wielkości i co do znaku ilości, potrzeba przyjąć umowę następującą:

Kąty takie jak $\widehat{aAB}$, $\widehat{aAC}$,..... *będą dodatne lub odjemne według tego jak odcinki odpowiednie* aB, aC,..... *będą dodatne lub odjemne; czyli, co na jedno wychodzi, kąty* $\widehat{aAB}$, $\widehat{aAC}$,..... *będą dodatne lub odjemne według tego jak one będą policzone w pewnym kierunku lub w kierunku przeciwnym, poczynając od* Aa.

Mnożąc stronami równości (4) otrzymuje się związek (II) który był do dowiedzenia.

107. III° *Proste wyprowadzone z jednego punktu do trzech wierzchołków trójkąta* ABC, *spotykają boki przeciwne we trzech punktach* a, b, c, *takich, że się ma równanie*

$$(\mathrm{III})\quad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=-1;$$

to twierdzenie jest przypisywaném Janowi de *Ceva*. (*Nowe Roczniki*, tom X.)

IV° *Kiedy trzy proste, wychodzące z wierzchołków trójkąta* ABC *przechodzą przez jeden punkt* O, *ma się między wstawami kątów jakie one tworzą, każda z dwoma bokami kąta z którego ona wychodzi, związek*

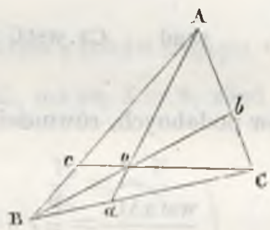
$$(\mathrm{IV})\quad \frac{\mathrm{wst}\,\widehat{aAB}}{\mathrm{wst}\,\widehat{aAC}}\cdot\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{bBC}}{\mathrm{wst}\,\widehat{bBA}}\cdot\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{cCA}}{\mathrm{wst}\,\widehat{cCB}}=-1;$$

(Chasles, *Geometrya wyższa*, strona 263).

Weźmy trójkąt o którym mowa za trójkąt odniesienia, i niech będą X_0, Y_0, Z_0, spółrzędnemi punktu O.

Równaniem jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez wierzchołek A, jest

$$Y = \lambda Z;$$



ponieważ, ta prosta, winna przejść przez punkt O, więc:

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0}.$$

Możemy uważać Y i Z jako spółrzędne punktu a; otrzyma i

$$Y = Ca.\mathrm{wst}C, \qquad Z = -Ba.\mathrm{wst}B;$$

gdyż jeżeli Ca jest odcinek dodatny, Ba będzie odjemny, zapatrując się na położenie obecne punktu a; i spółrzędne Y i Z są dodatne. Ma się tym sposobem, pierwszy ze związków następujących:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{Ca.\mathrm{wst}C}{Ba.\mathrm{wst}B} = -\frac{Y_0}{Z_0},\\ &\frac{Ab.\mathrm{wst}A}{Cb.\mathrm{wst}C} = -\frac{Z_0}{X_0},\\ &\frac{Bc.\mathrm{wst}B}{Ac.\mathrm{wst}A} = -\frac{X_0}{Y_0};\end{aligned}\right.$$

dwa inne związki otrzymają się za pomocą spostrzeżeń podobnych.

Mając wzgląd na równości (3) a tem samem na umowę w kilku słowach wyrażoną na końcu n^ro [106], związki (5) będą mogły się napisać

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{aAC}}{\mathrm{wst}\,\widehat{aAB}} = -\frac{Y_0}{Z_0},\\ &\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{bBA}}{\mathrm{wst}\,\widehat{bBC}} = -\frac{Z_0}{X_0},\\ &\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{cCB}}{\mathrm{wst}\,\widehat{cCA}} = -\frac{X_0}{Y_0}.\end{aligned}\right.$$

Mnożąc stronami równania (5), potém równania (6), otrzymuje się bezpośrednio związki (III) i (IV) które założyliśmy sobie wyprowadzić.

II° Trójkąty jednokładne.

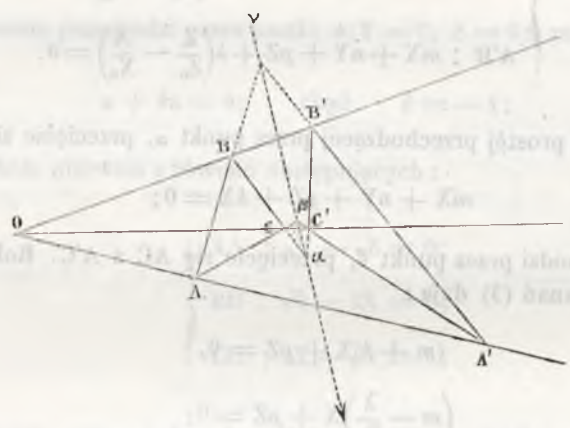
108. I° *Gdy dwa trójkąty mają swe wierzchołki po dwa na trzech prostych zbiegających się, w jednym punkcie, ich boki spotykają się dwójkami we trzech punktach ustawionych w linii prostéj.*

II° *Odwrotnie : jeżeli dwa trójkąty są takie że ich boki przecinają się, po dwa względnie, we trzech punktach położonych w linii prostéj, ich wierzchołki są na trzech prostych zbiegających się w jednym punkcie.*

Te twierdzenia, odkryte w XVII wieku przez znakomitego *Desargues'a*, tworzą punkt wyjścia figur jednokładnych; dwa trójkąty dla tego są nazwane *jednokładnymi*, które p. *Poncelet*, w swym traktacie *rzutowych własności figur*, nazywa także trójkątami *odpowiedniczemi*.

Weźmy jeden z trójkątów, ABC na przykład, za trójkąt odniesienia.

1° Niech będą X_0, Y_0, Z_0, spółrzędne punktu zbiegania się trzech prostych AA′, BB′, CC′; równa-



niami boków BC, CA, AB, są

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&BC: && X=0,\\
&CA: && Y=0,\\
&AB: && Z=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Proste OA OB, OC, będą miały względnie na równania :

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&OA: \frac{Y}{Y_0}-\frac{Z}{Z_0}=0,\\
&OB: \frac{Z}{Z_0}-\frac{X}{X_0}=0,\\
&OC: \frac{X}{X_0}-\frac{Y}{Y_0}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Niech będzie teraz

$$mX + nY + pZ = 0$$

równaniem prostéj B'C'; równania prostych B'A', C'A' (przechodzących: 1sza, przez przecięcie się OB z B'C'; 2ga, przez przecięcie się OC z B'C') będą kształtu:

$$mX + nY + pZ + \lambda\left(\frac{Z}{Z_0} - \frac{X}{X_0}\right) = 0,$$

$$mX + nY + pZ + \mu\left(\frac{X}{X_0} - \frac{Y}{Y_0}\right) = 0,$$

te dwie proste przetną się na OA, jeżeli $\lambda = -\mu$; przeto równaniami boków trójkąta A'B'C', będą:

$$(3)\quad \begin{cases} B'C' : mX + nY + pZ = 0, \\ C'A' : mX + nY + pZ + \lambda\left(\frac{Y}{Y_0} - \frac{X}{X_0}\right) = 0, \\ A'B' : mX + nY + pZ + \lambda\left(\frac{Z}{Z_0} - \frac{X}{X_0}\right) = 0. \end{cases}$$

Równaniem jakiéjkolwiek prostéj przechodzącéj przez punkt α, przecięcie się BC z B'C' jest

$$mX + nY + pZ + kX = 0;$$

wyraźmy że ta prosta przechodzi przez punkt β, przecięcie się AC z A'C'. Robiąc $Y = 0$, równanie poprzedzające i drugie z równań (3) dają:

$$(m + k)X + pZ = 0,$$

$$\left(m - \frac{\lambda}{X_0}\right)X + pZ = 0;$$

zkąd wypada

$$k = -\frac{\lambda}{X_0};$$

równaniem prostej $\alpha\beta$ będzie więc

$$mX + nY + pZ - \lambda\frac{X}{X_0} = 0;$$

jest rzeczą oczywistą że ta prosta przechodzi przez punkt γ, przecięcie się AB z A'B'.

2° Dla uzasadnienia odwrotnego podania, weźmy jeszcze jeden z trójkątów, ABC na przykład, za trójkąt odniesienia; równaniami jego boków będą:

$$(1)\quad \begin{cases} BC : X = 0, \\ CA : Y = 0, \\ AB : Z = 0; \end{cases}$$

niech będzie równaniem prostéj $\alpha\delta\gamma$

(2) $$(D) \quad aX + bY + cZ = 0;$$

równaniami boków B'C', C'A', A'B', będą wtedy:

(3) $$\begin{cases} B'C' : aX + bY + cZ + \lambda X = 0, & \text{(przechodzące przez przecięcie się BC z D);} \\ C'A' : aX + bY + cZ + \mu Y = 0, & \text{(przechodzące przez przecięcie się CA z D);} \\ A'B' : aX + bY + cZ + \nu Z = 0, & \text{(przechodzące przez przecięcie się AB z D).} \end{cases}$$

Szukajmy teraz równań trzech prostych AA', BB', CC'.

Punkt A' jest przecięciem się C'A' z B'A'; równaniem jakiéjkolwiek prostéj przechodzącéj przez ten punkt jest

$$aX + bY + cZ + \mu Y + k(aX + bY + cZ + \nu Z) = 0;$$

jeżeli się wyrazi że ta prosta przechodzi przez punkt A(Y = 0, Z = 0), ma się

$$a + ka = 0; \quad \text{zkąd} \quad k = -1;$$

znajduje się tym sposobem pierwsze z równań następujących:

(4) $$\begin{cases} AA' : \mu Y - \nu Z = 0; \\ BB' : \nu Z - \lambda X = 0; \\ CC' : \lambda X - \mu Y = 0; \end{cases}$$

dwa ostatnie otrzymają się przez rachunek podobny; albo prościéj, za pomocą często w analizie dogodnéj drogi symetryi.

Otóż trzy proste (4) są widocznie zbiegającemi się; więc... etc.....

109. *Jeżeli się złączy jakikolwiek punkt* O *z trzema wierzchołkami trójkąta* ABC *i gdy* a, b, c, *będą przecięciami prostych* OA, OB, OC, *z bokami przeciwnymi, trzy punkta przecięcia się względem par prostych* (BC, bc), (AC, ac), (AB, ab) *są na linii prostéj.*

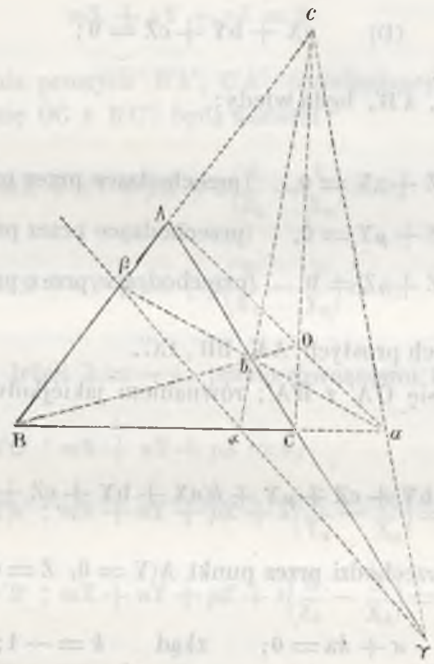
To podanie jest przypadkiem szczególnym pierwszego z twierdzeń poprzedzających, ponieważ trzy proste Aa, Bb, Cc, są zbiegającemi się; tylko tu, wierzchołki drugiego trójkąta abc są względnie na bokach pierwszego ABC.

Można także dać wprost dowodzenie twierdzenia, biorąc trójkąt ABC za trójkąt odniesienia.

Jeżeli X_0, Y_0, Z_0, są spółrzędnemi punktu O, proste Aa, Bb, Cc, będą miały względnie na równania:

$$\frac{Y}{Y_0} - \frac{Z}{Z_0} = 0, \qquad \frac{Z}{Z_0} - \frac{X}{X_0} = 0, \qquad \frac{X}{X_0} - \frac{Y}{Y_0} = 0.$$

Wyznaczywszy wtedy punkta a, b, c, znajduje się na równania boków bc, ca, ab :



$$-\frac{X}{X_0}+\frac{Y}{Y_0}+\frac{Z}{Z_0}=0,\qquad \frac{X}{X_0}-\frac{Y}{Y_0}+\frac{Z}{Z_0}=0,\qquad \frac{X}{X_0}+\frac{Y}{Y_0}-\frac{Z}{Z_0}=0.$$

Szukając względnych przecięć tych prostych z bokami BC, CA, AB, sprawdzi się że trzy punkta są na linii prostéj

$$\frac{X}{X_0}+\frac{Y}{Y_0}+\frac{Z}{Z_0}=0.$$

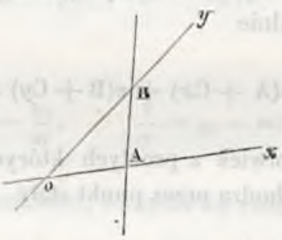
ROZDZIAŁ III.

PUNKT.

§ I. — SPÓŁRZĘDNE JAKIEJKOLWIEK PROSTÉJ. — RÓWNANIE JAKIEGOKOLWIEK PUNKTU.

I° Spółrzędne jakiéjkolwiek prostéj. — Równanie 1^{go} stopnia.

110. Mając dane dwie proste stałe Ox i Oy, określimy jakąkolwiek prostą przez odległości od początku O punktów A i B, w których ona spotyka osie. Te odległości są uważane jako dodatne



lub odjemne według tego jak one są skierowane w pewnym kierunku Ox i Oy lub w kierunku przeciwnym; odwrotności tych odległości, to jest $\frac{1}{\mathrm{OA}}$, $\frac{1}{\mathrm{OB}}$, będą nazwane *spółrzędnemi prostéj* AB i oznaczymy je przez u, v. Spółrzędnemi jakiéjkolwiek prostéj AB będą więc:

(1) $$u = \frac{1}{\mathrm{OA}}, \quad v = \frac{1}{\mathrm{OB}}.$$

Często przedstawimy te ilości przez stosunki $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$ tak że się otrzyma:

(1 *bis*) $$\frac{u}{w} = \frac{1}{\mathrm{OA}}, \quad \frac{v}{w} = \frac{1}{\mathrm{OB}};$$

i ilośc u, v, w będą nazwane *spółrzędnemi jednorodnemi* prostéj AB.

Według tego, gdy u i v są spółrzędnemi jakiéjkolwiek prostéj, równaniem téj prostéj albo równaniem do którego składu wchodzi *spółrzędnych punkt* będzie zgodnie z wzorem n[ru] [40]

$$(2) \qquad vx + vy - 1 = 0.$$

Jeżeli osie Ox i Oy będą prostokątne, damy dla u i v nazwisko *spółrzędnych prostokątnych* linii prostéj.

Uwaga. Związek taki jak $f(u, v) = 0$, między zmiennemi u i v, przedstawia szereg ciągły prostych, których przecięcia się po sobie następujące tworzą jakąkolwiek krzywą; proste (u, v) są stycznemi do téj krzywéj (zastanowimy się poniżéj z większymi szczegółami nad tym przedmiotem); z tego powodu, równanie $f(u, v) = 0$ jest nazwane *równaniem styczneczkowém* krzywéj. Dało się ilościom u i v nazwisko *spółrzędnych styczneczkowych;* jestto nazwanie którego często będziemy używali.

III. *Wszelkie równanie* 1[go] *stopnia między zmiennemi* u i v *przedstawia jakikolwiek punkt.*

Niech będzie równanie

$$(3) \qquad Au + Bv + C = 0,$$

jakiemukolwiek rozwiązaniu (u, v) tego równania odpowiada którakolwiek prosta mająca na równanie

$$ux + vy - 1 = 0;$$

otóż wszystkie proste przechodzą przez jakikolwiek punkt stały. Dodajmy w rzeczy saméj te równania; pomnożywszy drugie przez C, wypadnie

$$u(A + Cx) + v(B + Cy) = 0.$$

To równanie przedstawia którąkolwiek z prostych których spółrzędne sprawdzają związek (3); widzimy że wszystkie te proste przechodzą przez punkt stały

$$(4) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{A}{C}; \\ y = -\dfrac{B}{C}; \end{cases}$$

możemy więc uważać równanie (3) jako określające ten punkt.

Tak więc równanie 1[go] *stopnia między spółrzędnemi* u *i* v *jakiéjkolwiek prostéj, to jest*

$$(3) \qquad Au + Bv + C = 0,$$

przedstawia jakikolwiek punkt, przez który przechodzą wszystkie proste, których spółrzędne u *i* v *sprawdzają to równanie; spółrzędnemi kartezyańskiemi punktu są:*

$$(4) \qquad x = -\frac{A}{C}, \qquad y = -\frac{B}{C}.$$

112. *Przypadki szczególne.*

Wartości (4) robią widocznemi wnioski następujące.

Równania

$$Au + C = 0, \qquad Bv + C = 0$$

przedstawiają : pierwsze jakikolwiek punkt położony na osi Ox, drugie jakikolwiek punkt na osi Oy.

Równanie jakiegokolwiek punktu, zrobione jednorodném, pisze się

(5) $$Au + Bv + Cw = 0$$

Równaniem początku spółrzędnych będzie

(6) $$w = 0.$$

II Różne kształty równania punktu.

113. Rozwiązując to pytanie, dowiedziemy że równanie jakiegokolwiek punktu jest 1^{go} stopnia.

Mając dane spółrzędne kartezyańskie $x_0 y_0$, *jakiegokolwiek punktu, znaleźć równanie styczneczkowe punktu.*

Równaniem jakiéjkolwiek prostéj przechodzącéj przez ten punkt jest

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

otóż spółrzędnemi téj prostéj są :

$$\frac{1}{u} = x_0 - \frac{y_0}{m}, \qquad \frac{1}{v} = y_0 - mx_0.$$

Rugując m między temi dwiema równościami, otrzyma się związek następujący

(7) $$ux_0 + vy_0 - 1 = 0,$$

między spółrzędnemi jakiéjkolwiek prostéj przechodzącéj przez punkt dany; jestto równanie punktu; widzimy że ono jest pierwszego stopnia.

Damy równaniu następnemu

(8) $$au + bv - 1 = 0$$

nazwisko *kształtu normalnego* równania jakiegokolwiek punktu; spółrzędnemi kartezyańskiemi tego punktu będą wtedy a i b.

114. Możemy jeszcze otrzymać równanie jakiegokolwiek punktu pod innym kształtem który będzie pożytecznym przy tłómaczeniu rachunków.

1° Osie pochyłe.

Niech będzie ρ odległość OM_0 a ω kąt prostéj OM z Ox; ma się :

$$\frac{x_0}{\rho} = \frac{\mathrm{wst}(\theta - \omega)}{\mathrm{wst}\,\theta}, \qquad \frac{y_0}{\rho} = \frac{\mathrm{wst}\,\omega}{\mathrm{wst}\,\theta};$$

podstawiając te wartości w równaniu (7), wypadnie

$$u\,\mathrm{wst}(\theta - \omega) + v\,\mathrm{wst}\,\omega - \frac{\mathrm{wst}\,\theta}{\rho} = 0;$$

to jest że *równanie*

(9) $$u\,\mathrm{wst}(\theta - \omega) + v\,\mathrm{wst}\,\omega - p = 0$$

przedstawia jakikolwiek punkt, którego odległością od początku jest $\frac{\mathrm{wst}\,\theta}{p}$ *i którego promień wodzący tworzy z* Ox *kąt* ω.

2° Osie prostokątne.

Równanie

(10) $$u\,\mathrm{dos}\,\omega + v\,\mathrm{wst}\,\omega - p = 0$$

przedstawia jakikolwiek punkt, którego odległością od początku jest $\frac{1}{p}$ *i którego promień wodzący tworzy z osią* Ox kąt ω.

III° Punkt w nieskończoności. — Proste równoległe.

115. Jeżeli w równaniu (3) przypuści się C zerem, wypadnie

(11) $$\mathrm{A}u + \mathrm{B}v = 0;$$

wzory (4) pokazują nam, że *równanie* (11) *przedstawia jakikolwiek punkt w nieskończoności, położony na linii prostéj mającéj za spółczynnik kątowy* $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$.

ównania

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

przedstawiają : 1sze jakikolwiek punkt w nieskończoności na osi Ox; 2gie jakikolwiek punkt w nieskończoności na osi Oy.

116. *Spółrzędne prostéj w nieskończoności są zerami.* To jest widoczném przez samo określenie nru [110]; ztąd także wypada, że

Spółrzędne dwóch prostych równoległych są proporcyonalne.

Jeżeli jakakolwiek prosta przechodzi przez początek spółrzędnych, jéj spółrzędne są nieskończone;

prosta jest ogólnie nieoznaczonéj dyrekcyi, chyba że stosunek jéj spółrzędnych nieskończonych miałby wartość skończoną i oznaczoną.

Spółrzędne osi Ox będą nieskończone, otrzyma się warunek gr. $\frac{u}{v} = 0$; spółrzędne osi Oy będą nieskończone; otrzyma się warunek gr. $\frac{v}{u} = 0$.

Albo jeszcze : jeżeli się bierze spółrzędne jednorodne u, v, w, otrzymamy :

Dla osi Ox, $u = 0$, $w = 0$;

Dla osi Oy, $v = 0$, $w = 0$.

Wszystkie te wypadki sprawdzają się bezpośrednio uważając, że jeżeli

$$Mx + Ny + P = 0 \tag{12}$$

jest równaniem przedstawiającém *spółrzędnych-punkt* jakiéjkolwiek prostéj, spółrzędne téj prostéj będą :

$$\frac{u}{w} = -\frac{M}{P}, \quad \frac{v}{w} = -\frac{N}{P}, \quad \text{albo} \quad \frac{u}{M} = \frac{v}{N} = -\frac{w}{P}. \tag{12 bis}$$

IV° Równanie jakiegokolwiek punktu położonego na jakiéjkolwiek prostéj danéj.

117. Przypuśćmy naprzód prostą daną przez swe spółrzędne u_0, v_0; i niech będzie

$$Au + Bv + C = 0$$

równaniem punktu szukanego. Ponieważ prosta dana musi przechodzić przez ten punkt, otrzyma się

$$Au_0 + Bv_0 + C = 0;$$

zkąd wypada, odejmując :

$$A(u - u_0) + B(v - v_0) = 0. \tag{13}$$

Jestto równanie jakiegokolwiek punktu położonego na prostéj (u_0, v_0).

118 Przypuśćmy powtóre prostą określoną przez dwa punkta :

$$\begin{cases} A_1u + B_1v + C_1 = 0, & (M_1) \\ A_2u + B_2v + C_2 = 0; & (M_2) \end{cases} \tag{14}$$

równaniem jakiegokolwiek punktu położonego na prostéj M_1M_2 będzie :

$$A_1u + B_1v + C_1 + \lambda(A_2u + B_2v + C_2) = 0, \quad (M). \tag{15}$$

W rzeczy saméj, spółrzędne jakiéjkolwiek prostéj, przechodzącéj przez M_1 i M_2, to jest sprawdzającéj równania (14), zadosyć uczynią oczywiście równaniu (15); więc prosta M_1M_2 przechodzi przez punkt (15). Będzie można wreszcie rozporządzić spółczynnikiem λ w sposób taki, ażeby równanie (15) przedstawiało jakikolwiek punkt prostéj.

119. *Równanie jakiegokolwiek punktu dzielącego odcinek w stosunku danym.*

Niech będą M_1 i M_2 (14) końce odcinka; punkt M (15) znajdujący się na tym odcinku ma na spółrzędne podług n^ru [111]

$$x = -\frac{A_1 + \lambda A_2}{C_1 + \lambda C_2}, \qquad y = -\frac{B_1 + \lambda B_2}{C_1 + \lambda C_2}.$$

Wreszcie spółrzędne punktów M_1 i M_2 są względnie

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{A_1}{C_1}, & x_2 = -\dfrac{A_2}{C_2}, \\ y_1 = -\dfrac{B_1}{C_1}, & y_2 = -\dfrac{B_2}{C_2}. \end{cases}$$

Zastępując A_1, B_1; A_2, B_2; przez te wartości we wzorach poprzedzających, znajduje się :

$$x = \frac{C_1 x_1 + \lambda C_2 x_2}{C_1 + \lambda C_2}, \qquad y = \frac{C_1 y_1 + \lambda C_2 y_2}{C_1 + \lambda C_2}.$$

Porównywając te ostatnie wartości z poprzednio otrzymanemi za pomocą związków (1) i (2) n^ru [52], wypada :

(16) $$\frac{\lambda C_2}{C_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{M_1M}{MM_2};$$

mając zawsze wzgląd na umowy n^ru [53].

Przeto, *mając dane dwa punkta*

(17) $$\begin{cases} A_1 u + B_1 v + C_1 = 0, & (M_1) \\ A_2 u + B_2 v + C_2 = 0; & (M_2) \end{cases}$$

równanie

(18) $$\frac{m_1}{C_1}(A_1 u + B_1 v + C_1) + \frac{m_2}{C_2}(A_2 u + B_2 v + C_2) = 0,$$

będzie przedstawiało jakikolwiek punkt znajdujący się na prostéj M_1M_2 *i dzielący ten odcinek w stosunku takim, że :*

(19) $$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Mając dane, pod kształtem normalnym, *równania dwóch punktów*

(17 *bis*) $$\begin{cases} a_1 u + b_1 v - 1 = 0, & (M_1) \\ a_2 u + b_2 v - 1 = 0, & (M_2) \end{cases}$$

równanie

(18 *bis*) $$m_1(a_1 u + b_1 v - 1) + m_2(a_2 u + b_2 v - 1) = 0$$

będzie pazedstawiało jakikolwiek punkt, znajdujący się na prostéj M_1M_2 *i dzielący ten odcinek w stosunku*

(19 *bis*) $$\frac{M_1M}{M_2M} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Przypadki szczególne.

Punkt *środkowy* odcinka otrzyma się robiąc $m_2 = m_1$, co daje w przypadku ogólnym :

(20) $$\frac{A_1u + B_1v + C_1}{C_1} + \frac{A_2u + B_2v + C_2}{C_2} = 0;$$

w przypadku kształtów normalnych :

(20 *bis*) $$(a_1u + b_1v - 1) + (a_2u + b_2v - 1) = 0.$$

Punkt *w nieskończoności* na odcinku otrzyma się, przypuszczając $m_2 = -m_1$, co daje, w przypadku ogólnym :

(21) $$\frac{A_1u + B_1v + C_1}{C_1} - \frac{A_2u + B_2v + C_2}{C_2} = 0;$$

w przypadku kształtów normalnych :

(21 *bis*) $$(a_1u + b_1v - 1) - (a_2u + b_2v - 1) = 0.$$

V° Równanie punktu przecięcia się dwóch prostych.

120. Niech będą (u_1, v_1), (u_2, v_2) spółrzędne dwóch prostych danych i

$$Au + Bv + C = 0$$

równaniem ich punktu spotkania się; to równanie musi być sprawdzoném przez spółrzędne dwóch prostych; otrzyma się tym sposobem :

$$Au_1 + Bv_1 + C = 0,$$

$$Au_2 + Bv_2 + C = 0.$$

Rugując A, B, C między temi trzema równaniami, znajduje się na równanie punktu spotkania się dwóch prostych :

(22) $$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ztąd wypada bezposrednio *warunek ażeby trzy proste* (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2) *przecinały się w jednym punkcie*, tym warunkiem jest :

(23) $$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

VI. Spółrzędne jakiéjkolwiek prostéj, przechodzącéj przez punkt zbiegania się dwóch prostych.

121. Niech będą (u_1, v_1) i (u_2, v_2) spółrzędne dwóch prostych danych; równaniami tych dwóch prostych będą podług n^ru [110]

$$(D_1)\qquad u_1x + v_1y - 1 = 0,$$

$$(D_2)\qquad u_2x + v_2y - 1 = 0.$$

Równaniem jakiéjkolwiek prostéj (D) przechodzącéj przez ich punkt przecięcia się będzie:

$$(D)\qquad m_1(u_1x + v_1y - 1) + m_2(u_2x + v_2y - 1) = 0;$$

zkąd wypada dla spółrzędnych u i v prostéj (D):

$$(24)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2}, \\[2ex] v = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}; \end{cases}$$

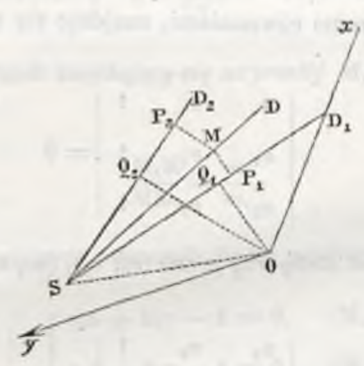
te związki wyznaczają spółrzędne jakiéjkolwiek prostéj (D), *przechodzącéj przez punkt przecięcia się prostych* D_1 i D_2.

122. Istnieje między stosunkiem $\frac{m_2}{m_1}$ i wstawami kątów trzech prostych D, D_1, D_2, związek wielkiéj wagi którego uzasadnieniem niezwłocznie się zajmiemy.

Równaniem prostéj (D) jest

$$m_1(u_1x + v_1y - 1) + m_2(u_2x + v_2y - 1) = 0.$$

Niech będą: S punkt zbiegania się trzech prostych; O, początek spółrzędnych; i $M(x, y)$ jakikolwiek punkt prostéj (D); niech będą, nadto, MP_1, MP_2; OQ_1, OQ_2, prostopadłe spuszczone względnie z punktów M i O na proste D_1 i D_2.



Zapatrując się na położenie obecne punktu M względem prostych, na mocy n[ru] [76] będzie :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{MP_1} &= \mathrm{SM\,wst}\,\widehat{\mathrm{DSD_1}} = \frac{(u_1x+v_1y-1)\,\mathrm{wst}\,\theta}{+\sqrt{u_1^2+v_1^2-2u_1v_1\,\mathrm{dos}\,\theta}},\\ \mathrm{MP_2} &= \mathrm{SM\,wst}\,\widehat{\mathrm{DSD_2}} = \frac{(u_2x+v_2y-1)\,\mathrm{wst}\,\theta}{-\sqrt{u_2^2+v_2^2-2u_2v_2\,\mathrm{dos}\,\theta}}.\end{aligned}\right.$$

Ma się także :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{OQ_1} &= \mathrm{OS\,wst}\,\widehat{\mathrm{OSD_1}} = \frac{\mathrm{wst}\,\theta}{+\sqrt{u_1^2+v_1^2-2u_1v_1\,\mathrm{dos}\,\theta}},\\ \mathrm{OQ_2} &= \mathrm{OS\,wst}\,\widehat{\mathrm{OSD_2}} = \frac{\mathrm{wst}\,\theta}{+\sqrt{u_2^2+v_2^2-2u_2v_2\,\mathrm{dos}\,\theta}}.\end{aligned}\right.$$

Z tych równości wypada :

$$\left\{\begin{aligned} u_1x+v_1y-1 &= \frac{\mathrm{SM}}{\mathrm{OS}}\cdot\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{DSD_1}}}{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{OSD_1}}},\\ u_2x+v_2y-1 &= -\frac{\mathrm{SM}}{\mathrm{OS}}\cdot\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{DSD_2}}}{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{OSD_2}}}.\end{aligned}\right.$$

Podstawiając te wartości w równaniu prostéj (D), wypadnie

$$(1^\circ)\qquad m_1\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{DSD_1}}}{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{OSD_1}}} - m_2\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{DSD_2}}}{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{OSD_2}}} = 0.$$

Przypomnimy sobie umowy już przyjęte :

Umowy.

Kąty, liczone poczynając od pewnéj prostéj, będą uważane jako dodatne lub odjemne stosownie do tego, jak ruch obrotu ma miejsce, poczynając od téj prostéj, w pewnym kierunku lub w kierunku przeciwnym.

Nadto, znakowanie $\widehat{\mathrm{DSD_1}}$ *będzie wskazywało że się idzie od prostéj* D *ku prostéj* $\mathrm{D_1}$; *a znakowanie* $\widehat{\mathrm{D_1SD}}$ *będzie wskazywało ruch w kierunku przeciwnym; tak, że*

$$\widehat{\mathrm{DSD_1}} = -\widehat{\mathrm{D_1SD}}.$$

Otóż, na figurze obecnéj, jeżeli kąt $\widehat{\mathrm{DSD_1}}$ jest uważany jako dodatny, kąt $\widehat{\mathrm{DSD_2}}$ będzie odjemny. Mając na uwadze osnowę umowy 1[éj], z równości (1°), otrzymamy :

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{D_1SD}}}{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{DSD_2}}}\cdot\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{OSD_2}}}{\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{OSD_1}}};$$

lecz oceniając odległość MP_2 uważaliśmy $\operatorname{wst}\widehat{DSD_2}$ jako ilość dodatną; a ponieważ według spostrzeżenia i umowy poprzedzającéj, kąt $\widehat{DSD_2}$ jest odjemny, musi się zastąpić $\operatorname{wst}\widehat{DSD_2}$ przez $-\operatorname{wst}\widehat{DSD_2}$; co daje

$$\frac{m_2}{m_1}=-\frac{\operatorname{wst}\widehat{D_1SD}}{\operatorname{wst}\widehat{DSD_2}}\cdot\frac{\operatorname{wst}\widehat{OSD_2}}{\operatorname{wst}\widehat{OSD_1}}.$$

Więc, spółrzędne jakiéjkolwiek prostéj (D), *przechodzącéj przez punkt przecięcia się dwóch prostych* $D_1(u_1, v_1)$, $D_2(u_2, v_2)$, *są dane za pomocą wzorów:*

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} u&=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_1+m_2},\\ v&=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2};\end{aligned}\right.$$

a stosunek $\frac{m_2}{m_1}$ *jest spojony z kątami tych prostych przez związek:*

$$(25\ bis)\qquad \frac{m_2}{m_1}=-\frac{\operatorname{wst}\widehat{D_1SD}}{\operatorname{wst}\widehat{DSD_2}}\cdot\frac{\operatorname{wst}\widehat{OSD_2}}{\operatorname{wst}\widehat{OSD_1}};$$

O *jest początkiem spółrzędnych;* S *punktem spotkania się prostych.*

Należy mieć wzgląd w tym wzorze na umowę, którąśmy dopiero co sobie przypomnieli nad znakowaniem i znakami kątów.

Dwójsieczne.

Kiedy prosta D będzie dwójsieczną kąta dwóch prostych D_1 i D_2, otrzyma się:

$$D_1SD=+DSD_2,\qquad \text{albo}\qquad D_1SD=-DSD_2;$$

według tego jak prosta jest dwójsieczną kąta DSD_2 albo jego spełnienia (*supplementum*), a tém samém:

$$(26)\qquad \frac{m_2}{m_1}=+\frac{\operatorname{wst}\widehat{OSD_2}}{\operatorname{wst}\widehat{OSD_1}},\qquad \text{albo}\qquad \frac{m_2}{m_1}=-\frac{\operatorname{wst}\widehat{OSD_2}}{\operatorname{wst}\widehat{OSD_1}}.$$

VII° Wzory wyprowadzone z twierdzeń poprzedzających.

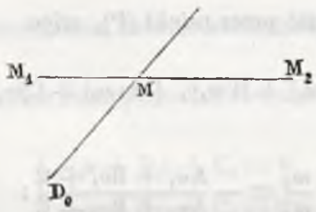
123. Wzory zasadnicze, wyłożone w n^rach [119] i [122], prowadzą nas do innych wzorów, które należy oznaczyć:

1° *Znaleźć stosunek w którym jakakolwiek prosta* (u_0, v_0) *dzieli odcinek dany.*

Niech będą równania końców odcinka :

$$(M_1) \qquad A_1u + B_1v + C_1 = 0;$$

$$(M_2) \qquad A_2u + B_2v + C_2 = 0;$$



a (u_0, v_0) spółrzędne prostéj (D_0).

Równaniem jakiegokolwiek punktu M znajdującego się na prostéj M_1M_2 jest na mocy n^ru [119] równania (18)

$$(M) \qquad \frac{m_1}{C_1}(A_1u + B_1v + C_1) + \frac{m_2}{C_2}(A_1u + B_2v + C_2) = 0,$$

i ma się :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

Otóż prosta (u_0, v_0) musi przechodzić przez punkt M; ma się więc

$$(27) \qquad \frac{m_2}{m_1} \quad \text{lub} \quad \frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{A_1u_0 + B_1v_0 + C_1}{A_2u_0 + B_2v_0 + C_2}\cdot\frac{C_2}{C_1};$$

estto wzór rozwiązujący pytanie.

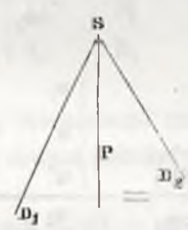
W przypadku *kształtu normalnego* równań punktów, otrzyma się :

$$(27\,bis) \qquad \frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{a_1u_0 + b_1v_0 - 1}{a_2u_0 + b_2v_0 - 1}.$$

W razie gdyby prosta była daną przez dwa punkta, wyznaczyłoby się jéj spółrzędne u_0, v_0, jak to zobaczymy poniżéj.

II° *Daje się dwie proste* D_1 i D_2 *spotykające się w* S, *i jakikolwiek punkt* P; *znaleźć stosunek wstaw kątów* $\widehat{PSD_1}$, $\widehat{PSD_2}$.

Niech będą (u_1, v_1), (u_2, v_2) spółrzędne dwóch prostych D_1 i D_2, zaś



$$(P) \qquad Au + Bv + C = 0$$

równanie punktu danego.

Oznaczając przez u i v spółrzędne jakiegokolwiek punktu linii SP, ma się zgodnie z wzorem n^ru [122]:

$$u = \frac{m_1 u_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Ponieważ ta prosta musi przechodzić przez punkt (P), więc

$$\mathrm{A}(m_1 u_1 + m_2 u_2) + \mathrm{B}(m_1 v_1 + m_2 v_2) + \mathrm{C}(m_1 + m_2) = 0;$$

zkąd się wyciąga:

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\mathrm{A}u_1 + \mathrm{B}v_1 + \mathrm{C}}{\mathrm{A}u_2 + \mathrm{B}v_2 + \mathrm{C}};$$

i podług równości (25 *bis*) n^ru [122]

$$(28) \qquad \frac{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{D_1SP}}}{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{PSD_2}}} \cdot \frac{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{OSD_2}}}{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{OSD_1}}} = -\frac{\mathrm{A}u_1 + \mathrm{B}v_1 + \mathrm{C}}{\mathrm{A}u_2 + \mathrm{B}v_2 + \mathrm{C}},$$

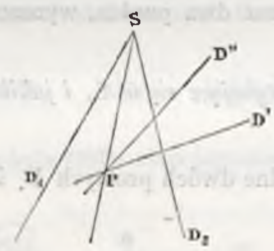
O jest początkiem spółrzędnych; ten wzór rozwiązuje pytanie założone.

III° *Daje się dwie proste* $\mathrm{D_1}$ i $\mathrm{D_2}$ *przecinające się w* S, *i punkt* P *stanowiący przecięcie dwóch prostych* D′ i D″; *znaleźć związek między kątami* $\widehat{\mathrm{PSD_1}}$ i $\widehat{\mathrm{PSD_2}}$.

Jeżeli (u', v'), (u'', v'') są spółrzędnemi dwóch prostych D′ i D″, równaniem ich punktu przecięcia się (P), będzie podług n^ru [120]:

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Stosując do tego przypadku związek poprzedzający, ma się:



$$(29) \qquad \frac{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{D_1SP}}}{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{PSD_2}}} \cdot \frac{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{OSD_2}}}{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{OSD_1}}} = -\frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix}};$$

ten wzór rozwiązuje pytanie założone.

Uwaga. Związki któreśmy ustanowili pozwolą dowieść bezpośrednio już wyłożonych w n[rze] [106] twierdzeń nad poprzecznemi.

To zastosowanie będzie dla początkujących pożytecznem ćwiczeniem.

VIII° Spółrzędne jakiejkolwiek prostej przechodzącej przez dwa punkta.

124. Przypuśćmy naprzód dwa punkta dane przez ich równania:

$$\begin{cases} A_1u + B_1v + C_1 = 0, \\ A_2u + B_2v + C_2 = 0; \end{cases}$$

spółrzędne prostéj otrzymają się, rozwiązując te dwa równania względem u i v.

Jeśliby dwa punkta były dane przez ich spółrzędne (x_1, y_1), (x_2, y_2), wyprowadziłoby się z tego na mocy n[ru] [113] równania dwóch punktów, to jest

$$\begin{cases} x_1u + y_1v - 1 = 0, \\ x_2u + y_2v - 1 = 0; \end{cases}$$

i znalazłoby się na spółrzędne prostéj:

$$(30) \qquad u = \frac{y_2 - y_1}{x_1y_2 - x_2y_1}, \qquad v = \frac{x_1 - x_2}{x_1y_2 - x_2y_1}.$$

125. *Warunek ażeby trzy punkta były w linii prostéj.*

Gdy równaniami trzech punktów są:

$$\begin{cases} A_1u + B_1v + C_1 = 0, \\ A_2u + B_2v + C_2 = 0, \\ A_3u + B_3v + C_3 = 0; \end{cases}$$

związek szukany otrzyma się, pisząc że trzy równania mają rozwiązanie wspólne, co daje:

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

126. Jeżeli $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, są równaniami trzech punktów nie w linii prostéj, równanie jakiegokolwiek punktu będzie się mogło zawsze położyć pod kształtem:

$$mM + nN + pP = 0,$$

m, n, p, są stałemi.

Dowodzenie jest to samo słowo w słowo, jak to, które było danem w n[rze] [60] dla twierdzenia podobnego nad linią prostą.

IX° Równania jednorodne.

127. Jeżeli równanie $f(u, v) = 0$ jest jednorodném co do u i v, ma się tożsamościowo:

$$f(u, v) = v^m f\left(\frac{u}{v}, 1\right) = v^m\left(\frac{u}{v} + a_1\right)\left(\frac{u}{v} + a_2\right)\ldots\ldots\left(\frac{u}{v} + a^m\right);$$

a tém samém, równanie dane będzie mogło się napisać

$$f(u, v) = (u + a_1 v)(u + a_2 v)\ldots(u + a^m v) = 0.$$

To równanie będzie oczywiście sprawdzoném, zakładając

$$u + a_1 v = 0, \quad \text{albo} \quad u + a_2 v = 0, \ldots, \quad \text{albo} \quad u + a^m v = 0.$$

Otóż te równania przedstawiają m punktów w nieskończoności, znajdujących się względnie na m prostych, których spółczynnikami kątowymi są a_1, a_2,... a^m podług n^ru [115].

Więc *wszelkie równanie jednorodne i* m^tego *stopnia między spółrzędnemi* u *i* v *jakiéjkolwiek prostéj przedstawiają jakikolwiek układ* m *punktów na prostéj w nieskończoności.*

Dowiodłoby się podobnież podług n^ru [112] że równania m^tego stopnia i kształtu

$$f(u) = 0, \qquad f(v) = 0,$$

przedstawiają: 1^szo *jakikolwiek układ* m *punktów znajdujących się na osi* Ox; 2^gie *jakikolwiek układ* m *punktów znajdujących się na osi* Oy.

§ II. — ODLEGŁOŚCI.

I° Odległość dwóch punktów.

128. Niech będą równania dwóch punktów:

$$\begin{matrix} (M_1) \\ (M_2) \end{matrix} \quad \begin{cases} A_1 u + B_1 v + C_1 = 0 \\ A_2 u + B_2 v + C_2 = 0; \end{cases} \quad \text{kształty normalne} \quad \begin{cases} a_1 u + b_1 v - 1 = 0, \\ a_2 u + b_2 v - 1 = 0. \end{cases}$$

spółrzędnemi dwóch punktów będą na mocy n^ru [111]

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{A_1}{C_1}, & x_2 = -\dfrac{A_2}{C_2}, \\ y_1 = -\dfrac{B_1}{C_1}, & y_2 = -\dfrac{B_2}{C_2}; \end{cases}$$

przeto otrzyma się, θ będąc kątem osi

$$(1) \qquad \overline{M_1M_2}^2 = \frac{(A_1C_2 - A_2C_1)^2}{C_1^2C_2^2} + \frac{(B_1C_2 - B_2C_1)^2}{C_1^2C_2^2} + 2\,\frac{(A_1C_2 - A_2C_1)(B_1C_2 - B_2C_1)\cos\theta}{C_1^2C_2^2};$$

a w razie *kształtu normalnego* dla równań punktów:

(1 *bis*) $$\overline{M_1M_2}^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 2 + (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)\mathrm{dos}\,\theta.$$

Jeżeli osie spółrzędnych są prostokątne, wyrażeniem odległości będzie:

(2) $$\overline{M_1M_2}^2 = \frac{(A_1C_2 - A_2C_1)^2 + (B_1C_2 - B_2C_1)^2}{C_1^2C_2^2};$$

a w razie kształtu normalnego

(2 *bis*) $$\overline{M_1M_2}^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2.$$

II° Odległość punktu od prostéj.

129. Niech będą u_0, v_0, spółrzędnemi prostéj, a

(M) $$Au + Bv + C = 0,$$

równanie punktu.

Równaniem przedstawiającém *spółrzędnych-punkt* prostéj będzie podług n^ru [110]

$$u_0x + v_0y - 1 = 0,$$

a spółrzędne punktu M będą podług n^ru [111]

$$x = -\frac{A}{C}, \quad y = -\frac{B}{C}$$

Według tego, jeżeli θ jest kątem osi, odległość punktu od prostéj będzie

$$MP = \frac{(u_0x + v_0y - 1)\mathrm{wst}\,\theta}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0\mathrm{dos}\,\theta}} = \frac{(Au_0 + Bv_0 + C)\mathrm{wst}\,\theta}{C\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0\mathrm{dos}\,\theta}}.$$

Tak więc odległość punktu

$$Au + Bv + C = 0$$

od prostéj (u_0, v_0) jest:

(1) $$MP = \frac{(Au_0 + Bv_0 + C)\mathrm{wst}\,\theta}{C\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0\mathrm{dos}\,\theta}},$$ jeżeli osie są pochyłe

(1 *bis*) $$MP = \frac{Au_0 + Bv_0 + C}{C\sqrt{u_0^2 + v_0^2}};$$ jeśli osie są prostokątne.

Kiedy równanie punktu jest dane pod kształtem normalnym

$$au + bv - 1 = 0$$

wyrażeniem odległości jest:

(2) $$MP = \frac{(au_0 + bv_0 - 1)\mathrm{wst}\,\theta}{\sqrt{v_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0\mathrm{dos}\,\theta}}; \qquad \text{(osie pochyłe)}$$

(2 *bis*) $$MP = \frac{au_0 + bv_0 - 1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}; \qquad \text{(osie prostokątne).}$$

Odległość początku od prostéj u_0, v_0 :

Należy zrobić $a = 0$, $b = 0$, wypadnie wtedy :

(3) $$OP = \frac{\mathrm{wst}\,\theta}{\sqrt{u_0^2 + v_2^0 - 2u_0v_0\mathrm{dos}\,\theta}} \text{ (osie pochyłe); } OP = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + v_0^2}} \text{ (osie prostokątne).}$$

III° Kąt prostéj danéj z osiami; kąt dwóch prostych.

130. Niech będą u_0, v_0 spółrzędne prostéj danéj, jego równaniem będzie:

$$u_0x + v_0y - 1 = 0;$$

a kąt α téj prostéj z osią OX będzie dany podług n^ru [68] za pomocą wzorów :

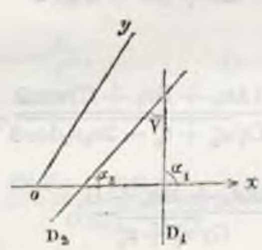
(1) $$\mathrm{st}\,\alpha = \frac{v_0\mathrm{wst}\,\theta}{u_0\mathrm{dos}\,\theta - v_0}, \qquad \text{(osie pochyłe)}$$

(1 *bis*) $$\mathrm{st}\,\alpha = -\frac{u_0}{v_0}, \qquad \text{(osie prostokątne).}$$

Kąt dwóch prostych.

Niech będą (u_1, v_1), (u_2, v_2) spółrzędne dwóch prostych; ma się

$$\mathrm{st}\,V = \frac{\mathrm{st}\,\alpha_1 - \mathrm{st}\,\alpha_2}{1 + \mathrm{st}\,\alpha_1\,\mathrm{st}\,\alpha_2};$$



więc, mając wzgląd na wartości poprzedzające:

(2) $$\mathrm{stV} = \frac{(u_2v_1 - u_1v_2)\mathrm{wst}\theta}{u_1u_2 + v_1v_2 - (u_1v_2 + u_2v_1)\mathrm{dos}\theta}, \qquad \text{(osie pochyłe)}$$

(2 *bis*) $$\mathrm{stV} = \frac{u_2v_1 - u_1v_2}{u_1u_2 + v_1v_2}, \qquad \text{(osie prostokątne).}$$

Ztąd da się wyprowadzić *za warunek prostopadłości* dwóch prostych (u_1, v_1) i (u_2, v_2):

(3) $$u_1u_2 + v_1v_2 - (u_1v_2 + u_2v_1)\mathrm{dos}\theta = 0 \qquad \text{(osie pochyłe)}$$

(3 *bis*) $$u_1u_2 + v_1v_2 = 0, \qquad \text{(osie prostokątne).}$$

IV° Powierzchnia trójkąta.

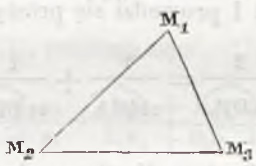
132. *Daje się równania wierzchołków.*

Niech będą:

(M_1) $A_1u + B_1v + C_1 = 0,$ $\qquad a_1u + b_1v - 1 = 0,$

(M_2) $A_2u + B_2v + C_2 = 0,$ w kształcie normalnym $\qquad a_2u + b_2v - 1 = 0,$

(M_3) $A_3u + B_3v + C_3 = 0,$ $\qquad a_3u + b_3v - 1 = 0.$



Spółrzędnemi wierzchołków będą względnie podług nru [111]:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{A_1}{C_1}, & x_2 = -\dfrac{A_2}{C_2}, & x_3 = -\dfrac{A_3}{C_3}, \\ y_1 = -\dfrac{B_1}{C_1}, & y_2 = -\dfrac{B_2}{C_2}, & y_3 = -\dfrac{B_3}{C_3}; \end{cases}$$

i otrzymamy podług wzoru (1) nru [79]:

(1) $$2S = \frac{1}{C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\mathrm{wst}\theta;$$

a w przypadku kształtów normalnych:

(1 *bis*) $$2S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}\mathrm{wst}\theta.$$

133. *Daje się spółrzędne boków trójkąta.*

Niech będą (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) spółrzędne względne prostych M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2; równaniami tych prostych będą:

$$u_1x + v_1y - 1 = 0,$$

$$u_2x + v_2y - 1 = 0,$$

$$u_3x + v_3y - 1 = 0.$$

Podług wzoru (6) n$^{\mathrm{ru}}$ [82] otrzymamy wtedy:

$$2S = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}^2 . \mathrm{wst}\,\theta}{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}.$$

§ III. — PUNKT BIEGUNOWY JAKIÉJKOLWIEK PROSTÉJ WZGLĘDEM JAKIEGOKOLWIEK UKŁADU DWÓCH PUNKTÓW.

I° Określenie i równanie.

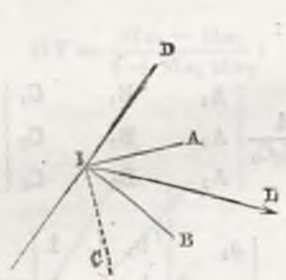
134. Mając dane dwa punkta A i B i prostą stałą D, łączy się jakikolwiek punkt I prostéj D z punktami A i B; potém, przez punkt I prowadzi się prostą IL, taką aby

$$(1) \qquad \frac{2}{\mathrm{st}\,\widehat{DIL}} = \frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIA}} + \frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIB}};$$

jeżeli punkt I przenosi się na prostéj D, linia IL obraca się około punktu stałego, który nazwiemy *punktem biegunowym* prostéj D.

W związku (1) będziemy przestrzegali umów wyrażonych w n$^{\mathrm{rze}}$ [122] nad znakami i znakowaniem kątów. Związek (1) może się napisać

$$\frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIL}} - \frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIA}} = \frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIB}} - \frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIL}};$$



i według tego położy się powyższe wyrażenie pod kształtem dogodniejszym (uważając że ma się zawsze między trzema kątami utworzonymi przez proste IA, IB, IC, związek : $\widehat{AIB} + \widehat{BIC} + \widehat{CIA} = 0$):

$$(2) \qquad \frac{\text{wst}\,\widehat{LIA}}{\text{wst}\,\widehat{DIA}} + \frac{\text{wst}\,\widehat{LIB}}{\text{wst}\,\widehat{DIB}} = 0.$$

Zobaczymy poniżéj w nauce o krzywych uogólnienie tego określenia.

135. Niech będą równania dwóch punktów stałych :

$$(A) \qquad a_1u + a_2v + a_3 = 0,$$

$$(B) \qquad b_1u + b_2v + b_3 = 0;$$

u_0, v_0 spółrzędne prostéj stałéj D; a u, v spółrzędne prostéj IL.

Podług wzoru (28) n^ru [123], otrzymamy względem wstaw kątów utworzonych w kącie $\widehat{LID}$ przez sieczną IA (O będąc początkiem spółrzędnych) :

$$\frac{\text{wst}\,\widehat{LIA}}{\text{wst}\,\widehat{DIB}} \cdot \frac{\text{wst}\,\widehat{OID}}{\text{wst}\,\widehat{OIL}} = + \frac{a_1u + a_2v + a_3}{a_1u_0 + a_2v_0 + a_3};$$

otrzymamy podobnież, uważając sieczną IB :

$$\frac{\text{wst}\,\widehat{LIB}}{\text{wst}\,\widehat{DIB}} \cdot \frac{\text{wst}\,\widehat{OID}}{\text{wst}\,\widehat{OIL}} = + \frac{b_1u + b_2v + b_3}{b_1u_0 + b_2v_0 + b_3}.$$

Podstawiając te wartości w związku (2), znajduje się :

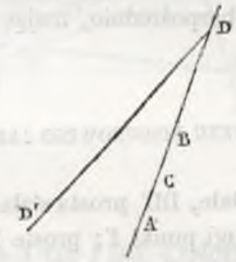
$$(3) \qquad \frac{a_1u + a_2v + a_3}{a_1u_0 + a_2v_0 + a_3} + \frac{b_1u + b_2v + b_3}{b_1u_0 + b_2v_0 + b_3} = 0;$$

jestto związek I^go stopnia między spółrzędnemi prostéj IL; więc prosta IL przechodzi przez jakikolwiek punkt stały, a kształt równania (3) pokazuje że ten punkt stały jest na prostéj AB.

Równanie (3) może się napisać pod kształtem skróconym

$$(4) \qquad \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0.$$

136. Wracając do rachunków i rozumowań n^ru [86], sprawdza się że jeżeli A i B są dwa punkta



stałe, jeżeli D jest punktem przecięcia się prostéj D z linią AB a C punktem biegunowym prostéj D:

« 1° Wszelka prosta przechodząca przez punkt D będzie miała punkt C za punkt biegunowy » względem układu (A, B); i odwrotnie, wszelka prosta przechodząca przez punkt C będzie miała » punkt D za punkt biegunowy względem tegoż samego układu (A, B).

» 2° Dwa punkta A i B posiadają też same własności względem układu (C, D). »

Cztery punkta :

$$(5) \qquad [(1)\ A=0, \quad (2)\ B=0; \quad (3)\ A+\lambda B=0, \quad (4)\ A-\lambda B=0],$$

tworzą układ harmoniczny.

Punkta *złączone* (1) i (2) będą nazwane *sprzężonymi* względem pary (3), (4); a punkta *złączone* (3) i (4) będą *sprzężonymi* względem pary (1), (2).

Uważmy nakoniec, że jeżeli się złączy cztery punkta A, B; C, D, z jakimkolwiek punktem płaszczyzny, z początkiem O na przykład, cztery proste OA, OB; OC, OD, utworzą układ harmoniczny.

W rzeczy samėj, spółrzędnemi punktu A są :

$$x=-\frac{a_1}{a_3}, \qquad y=-\frac{a_2}{a_3};$$

prosta łącząca go z początkiem będzie więc miała na równanie :

$$\frac{x}{a_1}-\frac{y}{a_2}=0.$$

Tak więc cztery proste OA, OB, OC, OD będą względnie :

$$\begin{cases} OA \quad \dfrac{x}{a_1}-\dfrac{y}{a_2}=0, \\ OB \quad \dfrac{x}{b_1}-\dfrac{y}{b_2}=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2x-a_1y=0, \\ b_2x-b_1y=0; \end{cases}$$

albo :

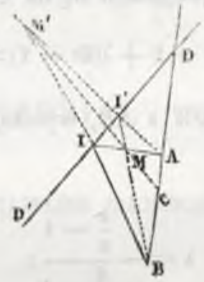
$$\begin{cases} OC \quad \dfrac{x}{a_1+\lambda b_1}-\dfrac{y}{a_2+\lambda b_2}=0, \\ OD \quad \dfrac{x}{a_1-\lambda b_1}-\dfrac{y}{a_2-\lambda b_2}=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2x-a_1y+\lambda(b_2x-b_1y)=0, \\ a_2x-a_1y-\lambda(b_2x-b_1y)=0; \end{cases}$$

pod drugim kształtem rozpoznaje się bezpośrednio, mając wzgląd na wzory n^ru [86], jakikolwiek układ harmoniczny.

II° Wykreślenie punktu biegunowego jakiėjkolwiek prostėj.

137. Niech będą A i B dwa punkta stałe, DD′ prosta stała; złączmy jakikolwiek punkt I prostėj D z punktami A i B; złączmy również drugi punkt I′; proste IA i I′B, IB i I′A przecinają się w punktach M i M′; prosta MM′ spotyka prostą AB w jednym punkcie C, który będzie *punktem biegunowym* prostėj DD′.

To wykreślenie wypada oczywiście z uwag poprzedzających, ponieważ punkt C szukany może być uważanym jako należący do biegunowéj punktu D, względnego do jakichkolwiek dwóch prostych,



takich jak M'A, M'B, przechodzących przez punkta stałe A i B.

Sprawdzimy wszakże to wykreślenie przez rachunek wprost otrzymany i zupełnie podobny do tego któryśmy już wskazali w n^rze^ [87]; przedstawimy to sprawdzenie jako przykład rachunku.

Weźmy za początek jakikolwiek punkt stały O na prostéj DD', a za osie proste OA i OB; niech będą OA $= a$, OB $= b$; równaniami dwóch punktów A i B będą :

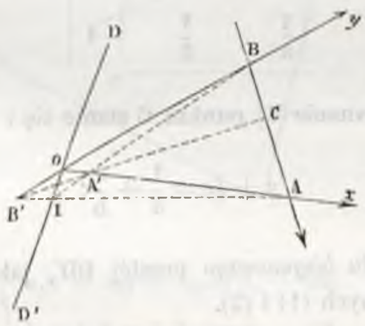
$$(1)\quad \begin{cases} (A) & au - 1 = 0, \\ (B) & bv - 1 = 0. \end{cases}$$

Prosta D przechodząc przez początek, jéj spółrzędne u_0 i v_0 będą nieskończone; lecz prosta mająca jakąkolwiek dyrekcyą wyznaczoną, musi mieć :

$$(2)\qquad \mathrm{gr.}\frac{u_0}{v_0} = k,$$

k jest jakąkolwiek stałą daną.

To przypuściwszy, złączmy jakikolwiek punkt I prostéj D z punktami A i B; niech będą A' i B'



przecięcia się względne prostych IB i IA z OA i OB, i załóżmy :

$$\mathrm{OA}' = \alpha, \qquad \mathrm{OB}' = \beta.$$

Równaniami punktów A′ i B′ będą

$$\alpha u - 1 = 0, \qquad \beta v - 1 = 0\,;$$

a równaniem jakiegokolwiek punktu znajdującego się na A′B′ będzie:

$$\alpha u - 1 + \lambda(\beta v - 1) = 0.$$

Otrzymamy punkt C, przecięcie się A′B′ z AB, wyrażając że prosta AB $\left(u = \frac{1}{a}, \quad v = \frac{1}{b}\right)$ przechodzi przez ten punkt, co daje:

$$\lambda = -\frac{\frac{\alpha}{a} - 1}{\frac{\beta}{b} - 1}\,;$$

tym sposobem znajdziemy na równanie punktu C (przecięcie się A′B′ z AB):

$$(3) \qquad \left(u - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\beta}\right) = \left(v - \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Otóż trzy proste $D(u_0, v_0)$, $IA'\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{b}\right)$, $IB'\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{\beta}\right)$ powinny zbiegać się w jednym punkcie I więc

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0\,;$$

albo, robiąc u_0, v_0 nieskończonemi i mając wzgląd na związek (2), otrzymamy

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4).$$

Mając wzgląd na związek (4), równanie (3) punktu C stanie się:

$$(5) \qquad u + kv = \frac{1}{a} + \frac{k}{b}\,;$$

jestto dokładnie równaniem *punktu biegunowego* prostéj DD′, jak to się łatwo sprawdza stosując wzór (3) n^{ru} [135] do równań obecnych (1) i (2).

ROZDZIAŁ IV.

SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE JAKIEJKOLWIEK PROSTEJ.

---

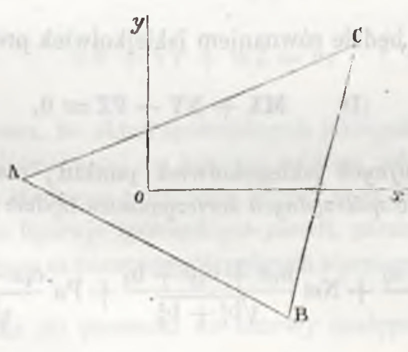
§ I. — OKREŚLENIE. — ZWIĄZKI ZASADNICZE.

1° Określenie i znaki.

138. Określmy jakąkolwiek prostą przez swe odległości od trzech punktów stałych, te odległości są względnie pomnożone przez trzy liczby stałe; damy tym iloczynom nazwisko *spółrzędnych trzylinijnych prostéj;* trzy punkta stałe stanowią *wierzchołki odniesienia;* trójkąt utworzony będzie *trójkątem odniesienia;* a liczby stałe będą *parametrami odniesienia.*

W pewnych pytaniach, jest często pożytecznem postawić w obec siebie trzy układy spółrzędnych następujące : spółrzędne kartezyańskie, spółrzędne trzylinijne jakiegokolwiek bądź punktu i spółrzędne trzylinijne jakiéjkolwiekbądź prostéj. Zbliżymy tu do siebie te różne układy.

Niech będą x, y spółrzędne kartezyańskie jakiegokolwiek punktu odniesionego do dwóch osi



prostokątnych Ox, Oy; i

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &a_1x + a_2y + a_3 = 0, \quad && BC\\ &b_1x + b_2y + b_3 = 0, && CA\\ &c_1x + c_2y + c_3 = 0; && AB\end{aligned}\right.$$

równania kartezyańskie boków trójkąta odniesienia ABC.

Spółrzędne trzylinijne (X, Y, Z) jakiegokolwiek punktu $M(x, y)$ będą określone przez równości :

$$(2)\qquad \begin{cases} X = l\delta_1, \\ Y = m\delta_2, \\ Z = n\delta_3, \end{cases}$$

δ_1, δ_2, δ_3, są odległości punktu M od trzech boków BC, CA, AB; a l, m, n są parametrami odniesienia w układzie obecnym spółrzędnych trzylinijnych jakiegokolwiek punktu; l, m, n, są ilości dodatne, które zostawimy dowolnemi.

Otrzyma się, podług określenia (2) i wzoru (4 *bis*) n[ru] [76] :

$$X = l\,\frac{a_1x + a_2y + a_3}{+\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},$$

$$Y = m\,\frac{b_1x + b_2y + b_3}{+\sqrt{b_1^2 + b_2^2}};$$

$$Z = n\,\frac{c_1x + c_2y + c_3}{+\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Dajmy na to, że początek O jest *zawsze* wewnątrz trójkąta odniesienia; i przypuśćmy nadto, że się zmieniło znaki względem pierwszych stron równań (1), tak że wzory (2 *bis*) dają *wciąż* na X, Y, Z *wartości dodatne,* kiedy się bierze punkt M wewnątrz trójkąta odniesienia ABC.

Jeżeli teraz oznaczymy przez a, b, c, długości boków trójkąta odniesienia, a przez S jego powierzchnią; spółrzędne trzylinijne X, Y, Z jakiegokolwiek punktu muszą sprawdzać związek :

$$a\delta_1 + b\delta_2 + c\delta_3 = 2S,$$

albo podług równości (2) :

$$(3)\qquad \frac{a}{l}X + \frac{b}{m}Y + \frac{c}{n}Z = 2S.$$

139. To przypuściwszy, niech będzie równaniem jakiéjkolwiek prostéj D :

$$(4)\qquad (D)\qquad MX + NY + PZ = 0,$$

w układzie *spółrzędnych trzylinijnych* jakiegokolwiek punktu; mając wzgląd na związki (2 *bis*), równaniem téj prostéj w układzie *spółrzędnych kartezyańskich* będzie :

$$Ml\,\frac{a_1x + a_2y + a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + Nm\,\frac{b_1x + b_2y + b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} + Pn\,\frac{c_1x + c_2y + c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = 0.$$

Odległość jakiegokolwiek punktu (x_0, y_0) lub (X_0, Y_0, Z) od téj prostéj będzie miała na wyrażenie według n[ru] [76] :

$$(5)\qquad \Delta = \frac{MX_0 + NY_0 + PZ_0}{\sqrt{\left(Ml\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} + Nm\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} + Pn\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2 + \left(Ml\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} + Nm\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} + Pn\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2}}.$$

Według tego, jeżeli oznaczymy przez Δ_1, Δ_2, Δ_3, odległości wierzchołków A, B, C trójkąta odniesienia od prostéj (D) albo (4), otrzymamy za pomocą wzoru (5) i związku (3) :

$$(6)\qquad \frac{\frac{a}{l}\Delta_1}{M}=\frac{\frac{b}{m}\Delta_2}{N}=\frac{\frac{c}{n}\Delta_3}{P}.$$

Oznaczmy przez U, V, W *spółrzędne trzylinijne iakiéjkolwiek prostéj* (D), określimy te spółrzędne przez równości następujące :

$$(7)\qquad \begin{cases} U=\lambda\Delta_1, \\ V=\mu\Delta_2, \\ W=\nu\Delta_3; \end{cases}$$

λ, μ, ν są parametrami odniesienia; weźmiemy na wartości tych parametrów :

$$(7\,bis)\qquad \lambda=\frac{a}{l},\qquad \mu=\frac{b}{m},\qquad \nu=\frac{c}{n}.$$

Parametry odniesienia obecne λ, μ, ν, są więc połączone z temiż układu spółrzędnych trzylinijnych przez związki (7 *bis*); one pozostają dowolne jeżeli ilości l, m, n są same przez się dowolnemi. Podług tego wyboru i tego znakowania związek (3) pisze się :

$$(8)\qquad \lambda X+\mu Y+\nu Z=2S.$$

Z równań (7), (6) i (4) wyprowadzimy bezpośrednio że :

Jeżeli U, V, W są spółrzędnemi trzylinijnemi jakiéjkolwiekbądź prostéj, równaniem téj prostéj w układzie spółrzędnych trzylinijnych jakiegokolwiekbądź punktu będzie :

$$(9)\qquad UX+VY+WZ=0;$$

ten wniosek zasadniczy przypuszcza, że układ spółrzędnych jakiegokolwiek punktu i układ spółrzędnych jakiéjkolwiek prostéj są odniesionemi do jednego trójkąta odniesienia; i nadto, że parametry odniesienia w jednym i drugim układzie są połączone między sobą przez związki (7 *bis*); w pierwszym układzie (tym w którym głównie figuruje *spółrzędnych-punkt*), parametrami odniesienia są : l, m, n; w drugim (który jest przedstawionym za pomocą spółrzędnych *styczneczkowych*), parametrami są : λ, μ, ν.

Uwaga. Roztrząsanie równania (9) prowadzi do umowy następującéj, względnéj co do znaków spółrzędnych U, V, W.

Powinno się wziąć z tymże samym znakiem *długości prostopadłych*, które idąc z punktów odniesienia ku prostéj uważanéj, są zwrócone w pewnym kierunku; a ze znakiem przeciwnym, te które mają kierunek odwrotny.

II° Związek między spółrzędnemi trzylinijnemi jakiéjkolwiek prostéj.

140. Podług wzoru (5) odległość wierzchołka A trójkąta odniesienia od prostéj (9) jest :

$$\frac{UX}{\sqrt{\left(Ul\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Vm\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Wn\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2+\left(Ul\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Vm\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Wn\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2}};$$

a według określenia (7) tą odległością jest

$$\frac{U}{\lambda}.$$

Porównywając te dwie wartości zauważywszy że związek (8) daje $\lambda X = 2S$; znajduje się na związek spółrzędnych U, V, W, jakiéjkolwiek prostéj :

$$(10)\qquad \left(Ul\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Vm\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Wn\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2+\left(Ul\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Vm\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Wn\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2=4S^2.$$

Możemy dać temu równaniu kształt daleko prostszy. Rozwijając pierwszą stronę znajdujemy naprzód że spółczynnikiem U^2 jest

$$l^2 \quad \text{albo} \quad \frac{a^2}{\lambda^2}, \quad \text{podług (7 } bis\text{)}.$$

Spółczynnikiem 2VW jest

$$mn\frac{b_1c_1+b_2c_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}\sqrt{c_1^2+c_2^2}}.$$

Otóż równania (1) mogą się pisać :

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}x+\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}y+\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=0,$$

$$\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}x+\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}y+\frac{b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=0,$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}x+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}y+\frac{c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=0.$$

Lecz, podług umów przyjętych i zmian wykonanych na znakach pierwszych stron, związki (2 *bis*) dają wartości dodatne dla X, Y, Z, kiedy punkt M i początek O są wewnątrz trójkąta odniesienia; więc, podług prawidła wyrażonego w n^rze^ [70], otrzymamy, oznaczywszy przez α, β, γ kąty z osią Ox, prostopadłych spuszczonych z początku O na proste BC, CA, AB :

$$(11)\quad\begin{cases}\dfrac{a_1}{+\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=-\operatorname{dos}\alpha, & \dfrac{b_1}{+\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=-\operatorname{dos}\beta, & \dfrac{c_1}{+\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=-\operatorname{dos}\gamma;\\[2ex] \dfrac{a_2}{+\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=-\operatorname{wst}\alpha; & \dfrac{b^2}{+\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=-\operatorname{wst}\beta; & \dfrac{c_2}{+\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=-\operatorname{wst}\gamma.\end{cases}$$

Wypada ztąd :

$$\frac{b_1c_1+b_2c_2}{+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\operatorname{dos}\beta\operatorname{dos}\gamma+\operatorname{wst}\beta\operatorname{wst}\gamma=\operatorname{dos}(\beta-\gamma)=-\operatorname{dos}A,$$

mając wzgląd na związki (5) nru [94].

Więc ostatecznie *spółrzędne trzylinijne* U, V, W *jakiéjkolwiek prostéj muszą sprawdzać związek :*

$$(12)\qquad \frac{a^2}{\lambda^2}U^2+\frac{b^2}{\mu^2}V^2+\frac{c^2}{\nu^2}W^2-2\frac{bc}{\mu\nu}VW\operatorname{dos}A-2\frac{ca}{\nu\lambda}WU\operatorname{dos}B-2\frac{ab}{\lambda\mu}UV\operatorname{dos}C=4S^2.$$

a, b, c, S *są długościami boków i powierzchnią trójkąta odniesienia;* A, B, C, *są jego kątami;* λ, μ, ν *są parametry odniesienia względne co się tyczy układu spółrzędnych trzylinijnych jakiéjkolwiek prostéj,* to jest *liczby przez które się mnoży odległości względne wierzchołków* A, B, C, *od prostéj uważanéj.*

Wprowadzając promień R koła opisanego do trójkąta odniesienia, ta równość będzie mogła się napisać :

$$(12\,bis)\qquad U^2\frac{\operatorname{wst}^2A}{\lambda^2}+V^2\frac{\operatorname{wst}^2B}{\mu^2}+W^2\frac{\operatorname{wst}^2C}{\nu^2}-2\frac{VW}{\mu\nu}\operatorname{wst}B\operatorname{wst}C\operatorname{dos}A-2\frac{WV}{\nu\lambda}\operatorname{wst}C\operatorname{wst}A\operatorname{dos}B$$
$$-2\frac{UV}{\lambda\mu}\operatorname{wst}A\operatorname{wst}B\operatorname{dos}C=\frac{S^2}{R^2}.$$

Można dać temu związkowi kształty najrozmaitsze; nie będziemy jednak dłużéj zastanawiać się nad tym przedmiotem dostatecznie już rozwiniętym.

Jeżeli parametry odniesienia są równe jedności, związkiem między spółrzędnemi trzylinijnemi U, V, W, *jakiéjkolwiek prostéj jest :*

$$(13)\qquad U^2\operatorname{wst}^2A+V^2\operatorname{wst}^2B+W^2\operatorname{wst}^2C-2VW\operatorname{wst}B\operatorname{wst}C\operatorname{dos}A$$
$$-2WU\operatorname{wst}C\operatorname{wst}A\operatorname{dos}B-2UV\operatorname{wst}A\operatorname{wst}B\operatorname{dos}C=\frac{S^2}{R^2}.$$

141. Zauważyliśmy w nrze [90], że równając z zerem pierwszą stronę związku (3) lub (8), który muszą sprawdzać spółrzędne trzylinijne X, Y, Z, jakiegokolwiek punktu, otrzymało się równanie prostéj w nieskończoności.

Dowiedziemy poniżéj, że równając z zerem pierwszą stronę związku (12) który muszą sprawdzać spółrzędne trzylinijne U, V, W jakiéjkolwiek prostéj, otrzymuje się równanie dwóch punktów kołowych w nieskończoności.

III° Podanie zasadnicze.

142. *Mając dane dwie proste* $D_1(U_1, V_1, W_1)$ i $D_2(U_2, V_2, W_2)$ *przecinające się w* O, *jakakolwiek trzecia prosta* D(U, V, W) *przechodząca przez przecięcie się dwóch pierwszych i taka że*

$$\frac{\operatorname{wst}\widehat{D_1OD}}{\operatorname{wst}\widehat{DOD_2}} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{14}$$

będzie miała za spółrzędne:

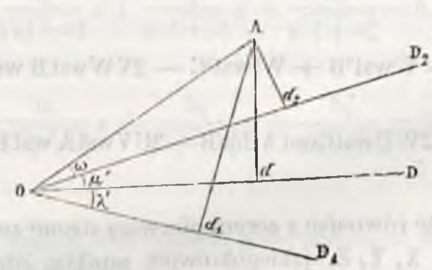
$$\left\{\begin{aligned} U &= \frac{m_1U_1 + m_2U_2}{\rho}, \\ V &= \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{\rho}, \\ W &= \frac{m_1W_1 + m_2W_2}{\rho}, \end{aligned}\right. \tag{14 bis}$$

wzory w których

$$\left\{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\operatorname{dos}\theta} \\ \theta &= \widehat{D_1OD_2}. \end{aligned}\right. \tag{14 ter}$$

To twierdzenie, zasadnicze w teoryi spółrzędnych trzylinijnych jakiéjkolwiek prostéj, można dowieść sposobem następującym.

Niech będą: A jeden z wierzchołków odniesienia; O, punkt przecięcia się dwóch prostych D_1 i D_2; λ', μ', ω, kąty $\widehat{DOD_1}$, $\widehat{DOD_2}$, $\widehat{AOD_2}$, d, d_1, d_2, odległości wierzchołka A od prostych D, D_1, D_2; ma się:



$$d_2 = \mathrm{OA}\operatorname{wst}\omega,$$
$$d = \mathrm{OA}\operatorname{wst}(\omega + \mu') = d_2\operatorname{dos}\mu' + \mathrm{OA}\operatorname{dos}\omega\operatorname{wst}\mu',$$
$$d_1 = \mathrm{OA}\operatorname{wst}(\omega + \lambda' + \mu') = d_2\operatorname{dos}(\lambda' + \mu') + \mathrm{OA}\operatorname{dos}\omega\operatorname{wst}(\lambda' + \mu');$$

Rugując dosω między dwoma ostatnimi związkami, znajduje się :

$$d = \frac{d_2 \mathrm{wst}\lambda' + d_1 \mathrm{wst}\mu'}{\mathrm{wst}(\lambda' + \mu')};$$

albo według określenia spółrzędnych jakiéjkolwiek prostéj

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{U}_2 \mathrm{wst}\lambda' + \mathrm{U}_1 \mathrm{wst}\mu'}{\mathrm{wst}(\lambda' + \mu')}.$$

Gdy teraz ma się wzgląd na związki :

$$\lambda'' + \mu' = 0, \qquad \frac{\mathrm{wst}\lambda'}{\mathrm{wst}\mu'} = \frac{m_2}{m_1},$$

dojdzie się, przez zmiany łatwe, do związków (14 *bis*).

Odwrotnie : jeżeli spółrzędne U, V, W, jakiéjkolwiek prostéj sprawdzają związki :

$$(15) \qquad \frac{\mathrm{U}}{m_1\mathrm{U}_1 + m_2\mathrm{U}_2} = \frac{\mathrm{V}}{m_1\mathrm{V}_1 + m_2\mathrm{V}_2} = \frac{\mathrm{W}}{m_1\mathrm{W}_1 + m_2\mathrm{W}_2},$$

ta prosta przejdzie przez punkt zbiegania się prostych D_1 i D_2 i otrzyma się :

$$(15) \qquad \frac{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{D}_1\mathrm{OD}}}{\mathrm{wst}\widehat{\mathrm{DOD}_2}} = \frac{m_2}{m_1};$$

ma się zawsze wzgląd na znaki i znakowanie kątów według umów przyjętych w n^rze^ [122].

W rzeczy saméj, równaniami odniesionemi do układu *spółrzędnych-punkt* dwóch prostych D_1 i D_2 są (9):

$$(\mathrm{D}_1) \qquad \mathrm{U}_1\mathrm{X} + \mathrm{V}_1\mathrm{Y} + \mathrm{W}_1\mathrm{Z} = 0,$$

$$(\mathrm{D}_2) \qquad \mathrm{U}_2\mathrm{X} + \mathrm{V}_2\mathrm{Y} + \mathrm{W}_2\mathrm{Z} = 0;$$

a podług wartości (15), równanie prostéj D, t. j.

$$\mathrm{UX} + \mathrm{VY} + \mathrm{WZ} = 0,$$

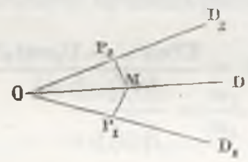
stanie się :

$$(\mathrm{D}) \qquad m_1(\mathrm{U}_1\mathrm{X} + \mathrm{V}_1\mathrm{Y} + \mathrm{W}_1\mathrm{Z}) + m_2(\mathrm{U}_2\mathrm{X} + \mathrm{V}_2\mathrm{Y} + \mathrm{W}_2\mathrm{Z}) = 0;$$

jest to oczywiście równanie jakiéjkolwiek prostéj przechodzącéj przez przecięcie się dwóch pierwszych; i stosunkiem odległości jakiegokolwiek z jéj punktów od prostych D_1 i D_2 jest $\frac{m_2}{m_1}$. Ma się, w rzeczy samėj, podług wzorów (5) i (10)

$$MP_1 = \frac{U_1X + V_1Y + W_1Z}{2S},$$

$$MP_2 = \frac{U_2X + V_2Y + W_2Z}{2S}.$$



143. Spółrzędne U, V, W, jakiėjkolwiek prostéj D, przechodzącéj przez przecięcie się dwóch prostych (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2), będą kształtu :

$$(16) \qquad \begin{cases} U = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \\ V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2, \\ W = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2; \end{cases}$$

λ_1 i λ_2 są stałemi.

Między λ_1, λ_2 i kątem θ dwóch prostych ma się związek :

$$(16\ bis) \qquad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \mathrm{dos}\,\theta = 1;$$

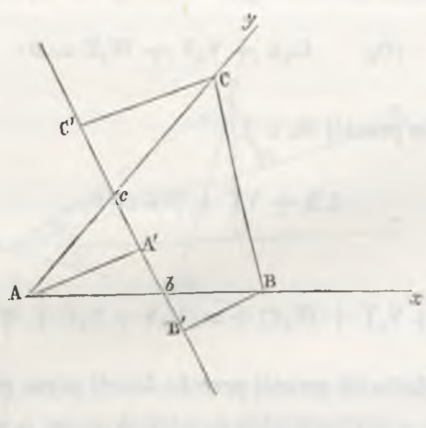
to wypada z równości (14 *ter*).

IV° Przypadek szczególny spółrzędnych trzylinijnych.

144. Spółrzędne jakiéjkolwiek prostéj określone i badane w Rozdziale III są przypadkiem szczególnym spółrzędnych trzylinijnych jakiėjkolwiek prostéj.

Niech będzie, w rzeczy samėj, ABC trójkąt odniesienia i jakakolwiek prosta stała *bc*; jeżeli AA', BB', CC', są odległościami punktów A, B, C, od prostéj uważanéj, spółrzędnemi trzylinijnemi téj prostéj będą :

$$\lambda.AA', \qquad \mu.BB', \qquad \nu.CC'.$$



Ponieważ jest jakikolwiek związek między temi spółrzędnemi, prosta będzie zupełnie określoną przez związki :

(I°) $$\frac{\mu.BB'}{\lambda.AA'} \qquad \frac{\nu.CC'}{\lambda.AA'}$$

Otóż ma się :

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{Bb}{Ab}, \quad \text{albo} \quad \frac{BB'}{AA'} = \frac{AB - Ab}{Ab};$$

$$\frac{CC'}{AA'} = \frac{Cc}{Ac}, \quad \text{albo} \quad \frac{CC'}{AA'} = \frac{AC - Ac}{Ac}.$$

Stosunki (I°) wyznaczające prostą będą mogły się więc pisać :

$$\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{AB}{Ab} - 1\right), \qquad \frac{\nu}{\lambda}\left(\frac{AC}{Ac} - 1\right).$$

Weźmy teraz za parametry odniesienia :

$$\lambda = 1, \qquad \mu = \frac{1}{AB} \qquad \nu = \frac{1}{AC};$$

stosunki określające prostą staną się wtedy :

$$\left(\frac{1}{Ab} - \frac{1}{AB}\right), \qquad \left(\frac{1}{Ac} - \frac{1}{AC}\right).$$

Otóż jeżeli się przypuści, że wierzchołki B i C oddalają się do nieskończoności, trójkąt odniesienia sprowadza się do dwóch prostych nieograniczonych Ax, Ay; a prosta uważana jest wtedy wyznaczoną przez ilości :

$$\frac{1}{Ab}, \qquad \frac{1}{Ac};$$

to są dokładnie znaczenia spółrzędnych u i v (Rozdział III).

V° Zmiana spółrzędnych.

145. Pytanie do rozwiązania jest następujące :

Znając spółrzędne u, v (Rozd. III, n^er^ [110]), *jakiéjkolwiek prostéj, wyznaczyć spółrzędne trzylinijne* U, V, W *téj prostéj ; i odwrotnie.*

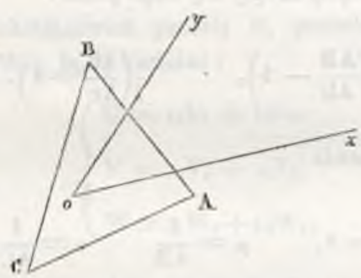
Niech będą równania trzech wierzchołków trójkąta odniesienia :

$$(17) \quad \begin{cases} A_1u + A_2v + A_3 = 0 & (A), \\ B_1u + B_2v + B_3 = 0 & (B), \\ C_1u + C_2v + C_3 = 0 & (C); \end{cases}$$

odniesione do dwóch osi Ox, Oy, pod kątem θ.

Podług wzoru (1) n[ru] [129] i określenia (7) n[ru] [139], otrzymamy :

$$
(18) \qquad \left\{
\begin{aligned}
U &= \lambda \frac{(A_1 u + A_2 v + A_3)\,\mathrm{wst}\,\theta}{A_3 \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\,\mathrm{dos}\,\theta}}, \\
V &= \mu \frac{(B_1 u + B_2 v + B_3)\,\mathrm{wst}\,\theta}{B_3 \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\,\mathrm{dos}\,\theta}}, \\
W &= \nu \frac{(C_1 u + C_2 v + C_3)\,\mathrm{wst}\,\theta}{C_3 \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\,\mathrm{dos}\,\theta}},
\end{aligned}
\right.
$$



λ, μ, ν są parametrami odniesienia.

Z tych równości da się jeszcze wyprowadzić :

$$
(18\ bis) \qquad \frac{A_3 U}{\lambda(A_1 u + A_2 v + A_3)} = \frac{B_3 V}{\mu(B_1 u + B_2 v + B_3)} = \frac{C_3 W}{\nu(C_1 u + C_2 v + C_3)}.
$$

Te wzory będą prostsze, gdy się weźmie równania (17) wierzchołków odniesienia pod kształtem normalnym.

Rozwiąże się zagadnienie odwrotne, t. j. wyrazi się u i v w funkcyi U, V, W, poddając równania (18) pod rachunek podobny do tego, który był rozwinięty w n[rze] [92]; dojdzie się tym sposobem do związków kształtu następującego :

$$
(19) \qquad \left\{
\begin{aligned}
u &= \frac{A'_1 \frac{U}{\lambda} + B'_1 \frac{V}{\mu} + C'_1 \frac{W}{\nu}}{A'_3 \frac{U}{\lambda} + B'_3 \frac{V}{\mu} + C'_3 \frac{W}{\nu}}, \\
v &= \frac{A'_2 \frac{U}{\lambda} + B'_2 \frac{V}{\mu} + C'_2 \frac{W}{\nu}}{A'_3 \frac{U}{\lambda} + B'_3 \frac{V}{\mu} + C'_3 \frac{W}{\nu}}.
\end{aligned}
\right.
$$

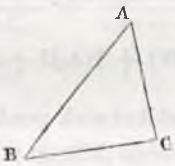
Nie będziemy zastanawiać się dłużéj nad tem pytaniem; jedynie rzeczą ważną i do sprawdzenia rzeczywistości analitycznych rachunków koniecznie potrzebną jest kształt związków (18 *bis*) i (19).

§ II. — PUNKT. — ODLEGŁOŚCI.

1° Równanie punktu.

146. *Równanie liniine iednorodne*

$$AU + BV + CW = 0 \tag{20}$$



przedstawia jakikolwiek punkt, którego spółrzędne trzylinijne są danemi przez związki :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{X}{A} = \dfrac{Y}{B} = \dfrac{Z}{C}, \\ \lambda X + \mu Y + \nu Z = 2S. \end{array} \right. \tag{20 bis}$$

Niech będzie, w rzeczy samėj, jakiekolwiek bądź rozwiązanie (U, V, W) równania (20); prosta (U, V, W) będzie miała na równanie podług n^ru [139] równanie (9)

$$UX + VY + WZ = 0.$$

Rugując W między tém równaniem i równaniem (20) wypadnie :

$$U(AZ - CX) + V(BZ - CY) = 0;$$

to ostatnie równanie przedstawia nieskończoną ilość prostych, przechodzących przez punkt stały

$$\frac{X}{A} = \frac{Y}{B} = \frac{Z}{C}.$$

Tak więc, wszystkie proste, których spółrzędne sprawdzają równanie (20), przechodzą przez jeden i tenże sam punkt; można przeto uważać równanie (20) jako wyznaczające ten punkt.

Równania :

$$BV + CW = 0,$$

$$AU + CW = 0,$$

$$AU + BV = 0,$$

przedstawiają punkta położone względnie na bokach BC, CA i AB trójkąta odniesienia.

147. *Równanie jakiegokolwiek punktu położonego na jakiéjkolwiek prostéj, przechodzącéj przez dwa punkta dane.*

Niech będą równania dwóch punktów danych :

$$(21)\qquad \begin{cases} (M_1) & A_1U + B_1V + C_1W = 0, \\ (M_2) & A_2U + B_2V + C_2W = 0. \end{cases}$$

Równaniem jakiegokolwiek punktu, położonego na prostéj łączącéj te dwa punkta, będzie :

$$(22)\qquad (A_1U + B_1V + C_1W) + k(A_2U + B_2V + C_2W) = 0;$$

to równanie przedstawia, w rzeczy saméj, jakikolwiek punkt i spółrzędne prostéj przechodzącéj przez punkta M_1 i M_2 sprawdzają oczywiście równanie (22); co więcéj, k jest stosunkiem dowolnym, więc..

Rozwiązując równania (21) względem U, V, W, otrzymamy *spółrzędne prostéj przechodzącéj przez dwa punkta dane.*

148. *Znaleźć równanie punktu, dzielącego w stosunku danym jakikolwiek odcinek dany.*

Niech będą równania końców odcinka :

$$(23)\qquad \begin{cases} (M_1) & A_1U + B_1V + C_1W = 0, \\ (M_2) & A_2U + B_2V + C_2W = 0; \end{cases}$$

i przypuśćmy że musi się mieć :

$$\overline{M_1 \qquad M \qquad M_2}$$

$$(24)\qquad \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Spółrzędne trzylinijne punktów M_1 i M_2 są na mocy nru [146].

$$(25)\qquad \frac{X_1}{A_1} = \frac{Y_1}{B_1} = \frac{Z_1}{C_1}; \quad \frac{X_2}{A_2} = \frac{Y_2}{B_2} = \frac{Z_2}{C_2}; \quad \text{ma się zawsze} \quad \lambda X + \mu Y + \nu Z = 2S;$$

spółrzędne (X, Y, Z) punktu M, dzielącego odcinek w stosunku danym, muszą sprawdzać podług nru [90] związki :

$$\frac{X}{m_1X_1 + m_2X_2} = \frac{Y}{m_1Y_1 + m_2Y_2} = \frac{Z}{m_1Z_1 + m_2Z_2}.$$

Równaniem styczneczkowém punktu M będzie, a tém samém, na mocy nru [140]

$$U(m_1X_1 + m_2X_2) + V(m_1Y_1 + m_2Y_2) + W(m_1Z_1 + m_2Z_2) = 0;$$

albo podług wartości (25) :

(26) $$m_1 \cdot \frac{A_1U + B_1V + C_1W}{\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1} + m_2 \cdot \frac{A_2U + B_2V + C_2W}{\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2} = 0;$$

takiém jest równanie punktu dzielącego odcinek dany w stosunku określonym przez równość (24) : λ, μ, ν są parametrami odniesienia.

Otrzymamy *punkt środkowy* przypuszczając $m_2 = m_1$; zkąd

(27) $$\frac{A_1U + B_1V + C_1W}{\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1} + \frac{A_2U + B_2V + C_2W}{\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2} = 0.$$

149. *Warunkiem aby trzy punkta*

$$\begin{cases} A_1U + B_1V + C_1W = 0, \\ A_2U + B_2V + C_2W = 0, \\ A_3U + B_3V + C_3W = 0, \end{cases}$$

były w linii prostéj jest :

(28) $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

150. *Wyznaczyć punkt przecięcia się dwóch prostych* (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W).

Jeżeli równaniem tego punktu jest

$$AU + BV + CW = 0;$$

musi się mieć nadto warunki :

$$AU_1 + BV_1 + CW_1 = 0,$$

$$AU_2 + BV_2 + CW_2 = 0;$$

rugując A, B, C, otrzymamy na *równanie szukane :*

(29) $$\begin{vmatrix} U & V & W \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0.$$

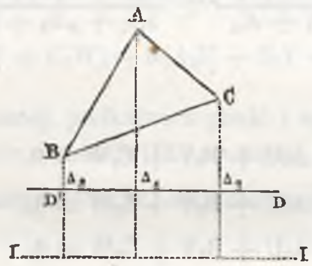
Jest to także *warunek ażeby trzy proste* (U, V, W), (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2) *przecinały się w jednym punkcie.*

II° Prosta w nieskończoności. — Punkt w nieskończoności.

151. *Prosta w nieskończoności.*

Spółrzędne prostéj w nieskończoności są oczywiście nieskończone; lecz one mają między sobą stosunek wyznaczony.

Niech będzie jakakolwiek prosta DD', λ, μ, ν parametry odniesienia; a Δ_1, Δ_2, Δ_3 odległości wierzchołków odniesienia od téj prostéj; przypuśćmy stałą prostą DD', i wystawmy sobie poprowadzoną



do prostéj stałéj jakąkolwiek prostą równoległą II', znajdującą się poniżéj téj stałéj w jakiéjkolwiek odległości L; spółrzędnemi U, V, W, prostéj II' będą:

$$U = \lambda\Delta_1 + \lambda L, \qquad V = \mu\Delta_2 + \mu L, \qquad W = \nu\Delta_3 + \nu L;$$

zkąd się wyciąga:

$$\frac{U}{W} = \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{\frac{\Delta_1}{L} + 1}{\frac{\Delta_3}{L} + 1}, \qquad \frac{V}{W} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\frac{\Delta_2}{L} + 1}{\frac{\Delta_3}{L} + 1},$$

przypuszczając teraz że ilość zmienna L zwiększa się nieograniczenie, wypadnie:

$$\text{gr.}\frac{U}{W} = \frac{\lambda}{\nu}, \qquad \text{gr.}\frac{V}{W} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Spółrzędne nieskończone prostéj w nieskończoności sprawdzają więc związki:

(30) $$\frac{U}{\lambda} = \frac{V}{\mu} = \frac{W}{\nu};$$

λ, μ, ν, *są parametrami odniesienia.*

Jeżeli parametry odniesienia są równe jedności, te związki stają się:

(30 *bis*) $$U = V = W.$$

To podanie można wyprowadzić także z tego, że jak to nam przedstawia wzór (8) n^{ru} [139] równaniem prostéj w nieskończoności odniesioném do układu spółrzędnych-punkt jest

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0;$$

a wtedy, podług związków (4), (6) i (7) n^ru [139], musi się mieć:

$$\frac{U}{\lambda} = \frac{V}{\mu} = \frac{W}{\nu}.$$

152 *Punkt w nieskończoności.*

Równaniem jakiegokolwiek punktu jest

(31) $$AU + BV + CW = 0;$$

ten punkt będzie w nieskończoności, jeżeli jego równanie jest sprawdzoném przez spółrzędne prostéj w nieskończoności, t. j. jeżeli ma się według związku n^ru [151]

(32) $$\lambda A + \mu B + \nu C = 0.$$

Ten związek sprowadza się do

(32 *bis*) $$A + B + C = 0,$$

jeśli parametry odniesienia są równe jedności.

153. *Proste równoległe.*

Niech będą dwie proste (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2); te dwie proste będą równoległe jeżeli ich punkt spotkania się jest w nieskończoności, t. j. jeżeli ma się podług związków (29) i (30):

(33) $$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Spółrzędnemi jakiéjkolwiek prostéj, równoległéj do prostéj danéj (U_1, V_1, W_1) *i w odległości* L *od téj ostatniéj, będą:*

(34) $$\begin{cases} U = U_1 + \lambda L, \\ V = V_1 + \mu L, \\ W = W_1 + \nu L; \end{cases}$$

λ, μ, ν są parametry odniesienia.

154. *Punkt w nieskończoności na jakiéjkolwiek dyrekcyi danéj.*

Niech będą U_0, V_0, W_0 spółrzędne jakiéjkolwiek prostéj, znaleźć równanie punktu w nieskończoności na téj prostéj.

Jeżeli równaniem punktu szukanego jest

$$AU + BV + CW = 0,$$

należy wyrazić że prosta przechodzi przez ten punkt, i że ten punkt jest w nieskończoności; ma się tym sposobem:

$$AU_0 + BV_0 + CW_0 = 0,$$

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0.$$

Rugując A, B, C, otrzyma się na równanie punktu:

$$(35) \qquad \begin{vmatrix} U & V & W \\ U_0 & V_0 & W_0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

A jeżeli parametry odniesienia są równe jedności, to równanie staje się:

$$(35\ bis) \qquad U(V_0 - W_0) + V(W_0 - U_0) + W(U_0 - V_0) = 0.$$

III° Odległość dwóch punktów. — Odległość jakiegokolwiek punktu od jakiéjkolwiek prostéj.

155. *Odległość dwóch punktów.*

Niech będą równania dwóch punktów:

$$(M_1) \qquad A_1U + B_1V + C_1W = 0,$$

$$(M_2) \qquad A_2U + B_2V + C_2W = 0.$$

Ich spółrzędne względne są:

$$\frac{X_1}{A_1} = \frac{Y_1}{B_1} = \frac{Z_1}{C_1} = \frac{2S}{\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1},$$

$$\frac{X_2}{A_2} = \frac{Y_2}{B_2} = \frac{Z_2}{C_2} = \frac{2S}{\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2}.$$

Podstawiając te wartości we wzorze (2) n^{ru} [99], otrzyma się wyrażenie szukane. Przed podstawieniem będzie potrzeba położyć we wzorze przytoczonym l, m, n, zamiast λ, μ, ν; a potém mieć wzgląd na związki (7 *bis*) n^{ru} [139]. Wyrażenie które otrzymamy tym sposobem, przedstawia się pod kształtem dosyć zawikłanym, lubo nader symetrycznym; wreszcie, tu się ostatecznie zatrzymamy, nie wchodząc nadal w rozwijania i zastosowania tego rodzaju wzorów. Ich powikłanie daje nam widzieć dostatecznie, że układ spółrzędnych trzylinijnych nie powinien być przyjętym ogólnie, jak tylko w nauce własności opisowych figur.

156. *Odległość jakiegokolwiek punktu od jakiéjkolwiek prostéj.*

Przypuśćmy prostą daną przez swe spółrzędne U_0, V_0, W_0; a punkt dany za pomocą swego równania, na przykład :

$$AU + BV + CW = 0. \tag{36}$$

Spółrzędnemi punktu są wtedy na mocy n^ru [140]

$$\frac{X_1}{A} = \frac{Y_1}{B} = \frac{Z_1}{C} = \frac{2S}{\lambda A + \mu B + \nu C};$$

równaniem, o spółrzędnych-punkt prostéj, będzie podług n^ru [139]:

$$U_0X + V_0Y + W_0Z = 0,$$

przeto otrzymamy na odległość punktu (X_1, Y_1, Z_1) od téj prostéj [n^er [139] wzór (5); n^er [140], związek (10) i (12)]

$$\frac{U_0X_1 + V_0Y_1 + W_0Z_1}{\sqrt{\frac{a^2}{\lambda^2}U_0^2 + \frac{b_2}{\mu^2}V_0^2 + \frac{c^2}{\nu^2}W_0^2 - 2\frac{bc}{\mu\nu}\operatorname{dos}A\,V_0W_0 - 2\frac{ac}{\lambda\nu}\operatorname{dos}B\,W_0V_0 - 2\frac{ab}{\lambda\mu}\operatorname{dos}C\,U_0V_0}}$$

albo

$$\frac{U_0X_1 + V_0Y_1 + W_0Z_1}{2S}.$$

Zastępując X_1, Y_1, Z_1, przez ich wartości poprzedzające, znajdujemy ostatecznie że :

Odległość D_0 *punktu*

$$AU + BV + CW = 0$$

od prostéj (U_0, V_0, W_0), *ma na wyrażenie :*

$$D_0 = \frac{AU_0 + BV_0 + CW_0}{\lambda A + \mu B + \nu C}; \tag{37}$$

λ, μ, ν, *są parametrami odniesienia.*

157. *Przejść z jednego układu spółrzędnych trzylinijnych styczneczkowych do innego układu spółrzędnych trzylinijnych styczneczkowych.*

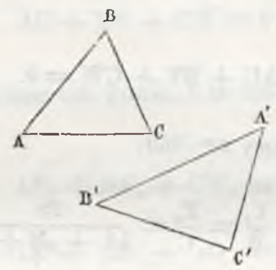
Daje się, względem trójkąta ABC, równania trzech wierzchołków nowego trójkąta odniesienia A′, B′, C′; niech będzie :

$$a'U + b'V + c'W = 0, \quad (A')$$

$$a''U + b''V + c''W = 0, \quad (B')$$

$$a'''U + b'''V + c'''W = 0, \quad (C').$$

Wzór (37) nru poprzedzającego da nam odległości wierzchołków A', B', C', od prostéj (U, V, W);



oznaczywszy przez U', V', W', ilości proporcyonalne tym odległościom, znajdziemy:

$$
(2) \qquad \begin{cases} U' = \lambda'(a'U + b'V + c'W), \\ V' = \mu'(a''U + b''V + c''W), \\ W' = \nu'(a'''U + b'''V + c'''W); \end{cases}
$$

są to wzory zmian szukanych.

Stałe λ', μ', ν', zależą od spółczynników a', a'', a''', b',... etc., dawnych parametrów odniesienia λ, μ, ν, i nowych parametrów odniesienia dowolnie wziętych.

Spółrzędne U', V', W', muszą sprawdzać związek podobny do związku (12) nru [140], lecz ogólnie odeń odrębny.

IV° Dwójsieczne, linie łączące wierzchołki ze środkami boków im przeciwnych, wysokości trójkąta odniesienia.

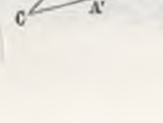
158. Przypuśćmy, w tém poszukiwaniu, parametry odniesienia λ, μ, ν, równe jedności; będzie łatwo wykonać też same rachunki, zostawiając te parametry dowolnymi.

Pamiętajmy, że wtedy parametrami odniesienia spółrzędnych trzylinijnych jakiegokolwiek punktu są względnie *a*, *b*, *c* (związek (7 *bis*) ner [139]); *a*, *b*, *c*, są długości boków trójkąta odniesienia. Jeżeli przeciwnie parametry odniesienia układu spółrzędnych jakiegokolwiek punktu są równe jedności, parametry układu styczneczkowego odpowiedniego (to jest takiego aby równanie (9) nru [139] miało miejsce) będą: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$.

1° *Linie łączące wierzchołki ze środkami boków im przeciwnych.*

Podług równania (26) nru [148] równaniem punktu środkowego A' boku BC będzie:

$$V + W = 0;$$



otrzymamy więc dla spółrzędnych linii łączących *wierzchołki ze środkami boków* im przeciwnych:

$$(38)\left\{\begin{array}{lll} U=0, & V+W=0, & \text{linia } AA' \text{ t. j. środkowa odpowiednia wierzchołkowi } A, \\ V=0, & W+V=0, & \text{linia } BB' \ldots\ldots B, \\ W=0, & U+V=0, & \text{linia } CC' \ldots\ldots C, \end{array}\right.$$

Te trzy proste przechodzą oczywiście przez punkt

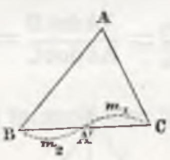
$$(38\ bis)\qquad U+V+W=0;$$

jestto *równanie środka ciężkości trójkąta.*

2° *Dwójsieczne.*

Równaniem punktu A′ dzielącego bok BC tak ażeby

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{c}{b},$$



będzie, podług wzoru (26) nru [148]

$$bV+cW=0, \qquad \text{albo} \qquad V\,\mathrm{wst}\,B+W\,\mathrm{wst}\,C=0.$$

Otrzymamy dla spółrzędnych dwójsiecznych:

$$(39)\left\{\begin{array}{ll} \textit{Dwójsieczne wewnętrzne.} & \textit{Dwójsieczne zewnętrzne.} \\ \text{wierzchołek } A: V=0,\ V\,\mathrm{wst}\,B+W\,\mathrm{wst}\,C=0; & U=0,\ W\,\mathrm{wst}\,B-W\,\mathrm{wst}\,C=0, \\ \text{wierzchołek } B: V=0,\ W\,\mathrm{wst}\,C+U\,\mathrm{wst}\,A=0; & V=0,\ W\,\mathrm{wst}\,C-U\,\mathrm{wst}\,A=0, \\ \text{wierzchołek } C: W=0,\ U\,\mathrm{wst}\,A+V\,\mathrm{wst}\,B=0; & W=0,\ U\,\mathrm{wst}\,A-V\,\mathrm{wst}\,B=0. \end{array}\right.$$

Oznaczmy przez a, b, c spodki dwójsiecznych wewnętrznych, a przez a_1, b_1, c_1, spodki dwójsiecznych zewnętrznych.

Trzy proste Aa, Bb, Cc, zbiegają się w punkcie

$$(40)\qquad U\,\mathrm{wst}\,A+V\,\mathrm{wst}\,B+W\,\mathrm{wst}\,C=0.$$

jestto *środek koła wpisanego.*

Trzy grupy (Bb_1, Cc_1, Aa), (Cc_1, Aa_1, Bb), (Aa_1, Bb_1, Cc), zbiegają się także względnie w trzech punktach:

$$(41,\ 1^\circ) \qquad -\mathrm{U\,wst\,A} + \mathrm{V\,wst\,B} + \mathrm{W\,wst\,C} = 0,$$

$$(41,\ 2^\circ) \qquad \mathrm{U\,wst\,A} - \mathrm{V\,wst\,B} + \mathrm{W\,wst\,C} = 0,$$

$$(41,\ 3^\circ) \qquad \mathrm{U\,wst\,A} + \mathrm{V\,wst\,B} - \mathrm{W\,wst\,C} = 0;$$

są to *środki kół zawpisanych.*

Grupy z trzech punktów (a_1, b_1, c_1), (a_1, b, c), (b_1, a, c), (c_1, a, b) są względnie w linii prostéj (*) te cztery proste mają za spółrzędne

$$(42 \qquad \begin{cases} a_1b_1c_1 \ : \ \mathrm{U\,wst\,A} = \mathrm{V\,wst\,B} = \mathrm{W\,wst\,C}; \\ a_1\,b\,c \ : \ -\mathrm{U\,wst\,A} = \mathrm{V\,wst\,B} = \mathrm{W\,wst\,C}; \\ b_1\,a\,c \ : \ \mathrm{U\,wst\,A} = -\mathrm{V\,wst\,B} = \mathrm{W\,wst\,C}; \\ c_1\,a\,b \ : \ \mathrm{U\,wst\,A} = \mathrm{V\,wst\,B} = -\mathrm{W\,wst\,C}. \end{cases}$$

3° *Wysokości.*

Równaniem punktu h dzielącego bok BC tak ażeby

$$\frac{\mathrm{B}h}{h\mathrm{C}} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\mathrm{A}h\,\mathrm{dot\,B}}{\mathrm{A}h\,\mathrm{dot\,C}} = \frac{\mathrm{st\,C}}{\mathrm{st\,B}}$$

będzie, podług wzoru (26) nru [148]

$$\mathrm{V\,st\,B} + \mathrm{W\,st\,C} = 0.$$

Otrzymamy wtedy na spółrzędne wysokości :

$$(43) \qquad \begin{cases} \mathrm{U} = 0, & \mathrm{V\,st\,B} + \mathrm{W\,st\,C} = 0, & \text{wierzchołek A,} \\ \mathrm{V} = 0, & \mathrm{W\,st\,C} + \mathrm{U\,st\,A} = 0, & \text{wierzchołek B,} \\ \mathrm{W} = 0, & \mathrm{U\,st\,A} + \mathrm{V\,st\,B} = 0, & \text{wierzchołek C.} \end{cases}$$

Te trzy proste przechodzą przez punkt

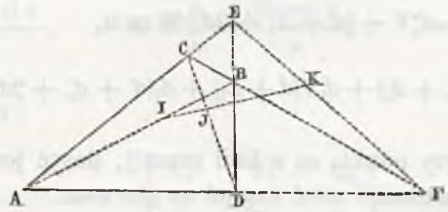
$$(43\ bis) \qquad \mathrm{U\,st\,A} + \mathrm{V\,st\,B} + \mathrm{W\,st\,C} = 0;$$

jestto *punkt spotkania się wysokości.*

(*) Możnaby jeszcze tę własność nieco prościej wyrazić : *Dwa którekolwiek z czterech środków są zawsze w linii prostej z jednym wierzchołków trójkąta, utworzonego przez przecięcia się trzech prostych danych.*

159. *Trzy punkta środkowe przekątnych jakiegokolwiek czworoboku zupełnego są w linii prostéj.*

Niech będzie ABCD czworobok; AB, CD, EF jego trzy przekątne I, J, K ich środki względne.



Weźmy trójkąt ABC za trójkąt odniesienia, i parametry odniesienia równe jedności; niech będzie wtedy

$$\text{(D)} \qquad d\mathrm{U} + d_1\mathrm{V} + d_2\mathrm{W} = 0,$$

równanie 4tego wierzchołka D.

Wyznaczymy równania trzech punktów I, J, K stosując wzór (26) nru [148] w którym przypuścimy $m_2 = m_1$ a $\lambda = \mu = \nu = 1$.

Równaniami punktów A i B są względne $\mathrm{U} = 0$, $\mathrm{V} = 0$, równaniem punktu środkowego I będzie

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{U} + \mathrm{V} = 0.$$

Równaniem punktu środka (J) prostéj łączącéj dwa punkta (C) lub $\mathrm{W} = 0$ i D będzie

$$\text{(J)} \qquad \mathrm{W} + \frac{d\mathrm{U} + d_1\mathrm{V} + d_2\mathrm{W}}{d + d_1 + d_2} = 0.$$

Szukajmy teraz równań punktów E i F.

Równaniem jakiegokolwiek punktu położonego na BD jest:

$$k'\mathrm{V} + (d\mathrm{V} + d_1\mathrm{V} + d_2\mathrm{W}) = 0;$$

otrzymamy punkt E, wyrażając że to równanie jest sprawdzoném przez spółrzędne ($\mathrm{U} = 0$, $\mathrm{W} = 0$) prostéj AC, co daje $k' = -d_1$; więc równaniem punktu (E) jest:

$$\text{(E)} \qquad d\mathrm{U} + d_2\mathrm{W} = 0.$$

Otrzyma się podobnież równanie punktu F wyrażając, że jakikolwiek punkt AD znajduje się na BC; ma się tym sposobem:

$$\text{(F)} \qquad d_1\mathrm{V} + d_2\mathrm{W} = 0.$$

Punkt środka K prostéj EF będzie miał na równanie

$$\text{(K)} \qquad \frac{d\mathrm{U} + d_2\mathrm{W}}{d + d_2} + \frac{d_1\mathrm{V} + d_2\mathrm{W}}{d_1 + d_2} = 0.$$

Równania trzech punktów I, J, K mogą się pisać :

$$\text{(I)}\qquad U + V = 0,$$

$$\text{(J)}\qquad dU + d_1V + (d + d_1 + 2d_2)W = 0,$$

$$\text{(K)}\qquad dU(d_1 + d_2) + d_1V(d + d_2) + d_2(d + d_1 + 2d_2)W = 1.$$

Jest łatwo sprawdzić że te trzy punkta są w linii prostéj; dosyć jest w tym celu wyrugować W między dwoma ostatniemi równaniami i mieć wzgląd na pierwsze.

Uwaga. Byłoby jeszcze łatwo dowieść, w tym układzie spółrzędnych, twierdzenia poprzecznych już wyłożone w n^rze [106].

V° Powierzchnia jakiegokolwiek trójkąta.

160. Przypuści się dane równania wierzchołków jakiegokolwiek trójkąta :

$$(M_1)\qquad A_1U + B_1V + C_1W = 0,$$

$$(M_2)\qquad A_2U + B_2V + C_2W = 0,$$

$$(M_3)\qquad A_3U + B_3V + C_3W = 0.$$

Jeżeli (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) są spółrzędnemi wierzchołków, ma się podług wzoru (3) n^ru [103]

$$\Sigma = \frac{R}{2S}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}\frac{1}{lmn};$$

położywszy l, m, n, zamiast λ, μ, ν; Σ jest powierzchnią szukaną; S i R oznaczają powierzchnią promień koła opisanego trójkąta odniesienia.

Otóż otrzymamy, na mocy n^ru [146] za spółrzędne wierzchołków ;

$$\frac{X_1}{A_1} = \frac{Y_1}{B_1} = \frac{Z_1}{C_1} = \frac{2S}{\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1},$$

$$\frac{X_2}{A_2} = \frac{Y_2}{B_2} = \frac{Z_2}{C_2} = \frac{2S}{\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2},$$

$$\frac{X_3}{A_3} = \frac{Y_3}{B_3} = \frac{Z_3}{C_3} = \frac{2S}{\lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3};$$

λ, μ, ν są parametrami odniesienia układu obecnego spółrzędnych trzylinijnych jakiéjkolwiek prostéj.

Podstawiając te wartości we wzorze poprzedzającym i mając wzgląd na związki (7 *bis*) n^{ru} [139]), to jest

$$l = \frac{a}{\lambda} = \frac{2R \operatorname{wst} A}{\lambda}, \qquad m = \frac{b}{\mu} = \frac{2R \operatorname{wst} B}{\mu}, \qquad n = \frac{c}{\nu} = \frac{2R \operatorname{wst} C}{\nu},$$

otrzymuje się wzór ostateczny :

$$\Sigma = S\lambda\mu\nu . \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{(\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1)(\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2)(\lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3)};$$

wyprowadziwszy poprzednio ze związku znanego

$$\operatorname{wst} A \operatorname{wst} B \operatorname{wst} C = \frac{S}{2R^2}.$$

VI° PUNKT BIEGUNOWY JAKIÉJKOLWIEK PROSTÉJ WZGLĘDEM JAKIEGOKOLWIEK UKŁADU DWÓCH PUNKTÓW.

161. *Mając dane dwa punkta stałe* A *i* B *i prostą stałą* D, *łączy się jakikolwiek punkt* I *prostéj* D *z punktami* A *i* B; *potem przez punkt* I *prowadzi się prostą* IL *taką że :*

$$\frac{2}{\operatorname{st} \widehat{DIL}} = \frac{1}{\operatorname{st} \widehat{DIA}} + \frac{1}{\operatorname{st} \widehat{DIB}}; \tag{45}$$

kiedy punkt I *przenosi się na prostéj* (D), *linia* IL *obraca się około punktu stałego który nazwiemy* PUNKTEM BIEGUNOWYM *prostéj* (D).

W związku (45) będziemy przestrzegali umów wymienionych w n^{rze} [122] nad znakami i znakowaniem kątów.

Związek (45) może się pisać (ob. n^{er} [134]).

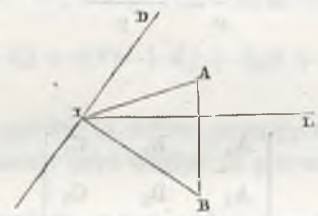
$$\frac{\operatorname{wst} \widehat{LIA}}{\operatorname{wst} \widehat{DIA}} + \frac{\operatorname{wst} \widehat{LIB}}{\operatorname{wst} \widehat{DIB}} = 0. \tag{46}$$

Niech będą wtedy :

$$\begin{aligned} aU + a_1V + a_2W &= 0, \quad (A) \\ bU + b_1V + b_2W &= 0, \quad (B) \end{aligned} \tag{47}$$

równania dwóch punktów stałych; a (U_0, V_0, W_0) spółrzędne prostéj stałéj (D); U, V, W, spółrzędne prostéj ruchoméj IL.

Podług wzorów (14) i (14 *bis*) n[ru] [142], otrzymamy, oznaczając przez U_1, V_1, W_1 spółrzędne prostéj IA :



$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\rho}{m_1}U_1 = U + \frac{\text{wst}\,\widehat{LIA}}{\text{wst}\,\widehat{AID}}U_0, \\[2ex] \frac{\rho}{m_1}V_1 = V + \frac{\text{wst}\,\widehat{LIA}}{\text{wst}\,\widehat{AID}}V_0, \\[2ex] \frac{\rho}{m_1}W_1 = W + \frac{\text{wst}\,\widehat{LIA}}{\text{wst}\,\widehat{AID}}W_0, \end{array}\right.$$

Otóż wartości na U_0, V_0, W_0 muszą sprawdzać równanie punktu (A), ztąd się wyciąga :

$$\frac{\text{wst}\,\widehat{LIA}}{\text{wst}\,\widehat{AID}} = -\frac{aU + a_1V + a_2W}{aU_0 + a_1V_0 + a_2W_0}.$$

Otrzyma się podobnież

$$\frac{\text{wst}\,\widehat{LIB}}{\text{wst}\,\widehat{BID}} = \frac{bU + b_1V + b_2W}{bU_0 + b_1V_0 + b_2W_0}.$$

Podstawiając wartości tych stosunków w związku (46), ma się na *równanie punktu biegunowego*

$$(48) \qquad \frac{aU + a_1V + a_2W}{aU_0 + a_1V_0 + a_2W_0} + \frac{bU + b_1V + b_2W}{bU_0 + b_1V_0 + b_2W_0} = 0,$$

równanie które się może pisać pod kształtem skróconym następującym

$$(48\ bis) \qquad \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0.$$

Możnaby na nowo przytoczyć tutaj uwagi już zrobione w n[rach] [136] i [137].

162. Zastosujmy ten wzór do trójkąta odniesienia. Punkta biegunowe jakiéjkolwiek prostéj (U_0, V_0, W_0), względem par punktów utworzonych przez trzy wierzchołki trójkąta odniesienia, są względnie

dla boku BC : $\frac{V}{V_0} + \frac{W}{W_0} = 0,$

dla boku CA : $\frac{W}{W_0} + \frac{U}{U_0} = 0,$

dla boku AB : $\frac{U}{U_0} + \frac{V}{V_0} = 0,$

Przecięcie się prostéj (U_0, V_0, W_0) z

$$\left\{\begin{array}{l} BC : \frac{V}{V_0} - \frac{W}{W_0} = 0, \\ CA : \frac{W}{W_0} - \frac{U}{U_0} = 0, \\ AB : \frac{U}{U_0} - \frac{V}{V_0}. \end{array}\right.$$

Wyprowadzimy z tych równań dowodzenie bezpośrednie twierdzeń następujących :

1° *Proste łączące wierzchołki jakiegokolwiek trójkąta z punktami biegunowymi téjże saméj prostéj, względem trzech wierzchołków tego trójkąta, są zbiegającemi się; równaniem punktu zbiegania się jest :*

$$\frac{U}{U_0} + \frac{V}{V_0} + \frac{W}{W_0} = 0.$$

2° *Jeżeli się zauważy dwa z tych punktów znajdujące się na bokach* AB *i* BC, *na przykład,* i *przecięcie prostéj* D_0 *z bokiem* BC, *te trzy punkta będą w linii prostéj.*

Spółrzędne téj prostéj będą w przypadku wymienionym

$$-\frac{U}{U_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{W}{W_0}.$$

ROZDZIAŁ V

ZASADY ZMIANY FIGUR.

Damy w tym rozdziale niektóre wiadomości wstępne, dotyczące zasad zmiany figur. Zasady te będące podstawą Geometryi czystéj, nie są potrzebne rzeczywiście dla Geometryi Analitycznéj, która przez samą pomoc spółrzędnych i przekształceń algebraicznych, może jasno wyłożyć własności figur. Ponieważ jednak analiza i geometrya zwykły sobie udzielać wzajemnego poparcia, należy więc umieć dokładnie język Geometryi, aby módz tłómaczyć jéj zasady i wypadki ogólne.

§ I. — STOSUNEK NIEHARMONICZNY.

I° Określenie stosunku nieharmonicznego.

163. *Mając dane cztery punkta* A, B, C, D, *leżące na jakiéjkolwiek linii prostéj,* P. Chasles *nazwał stosunkiem nieharmonicznym tych czterech punktów iloraz stosunków odległości dwóch którychkolwiek z tych punktów od dwóch innych. Takiemi są, na przykład:*

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}, \qquad \text{albo} \qquad \frac{DA}{DC} : \frac{BA}{BC}, \qquad \text{etc....}$$

Jeżeli zauważymy, na przykład, stosunek następujący, który oznaczymy za pomocą znakowania $(\overline{AB}\ \overline{CD})$

$$R = (\overline{AB}\ \overline{CD}) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA.DB}{DA.CB}, \tag{1}$$

powiemy że dwa punkta A i B są *sprzężone,* tak jak dwa punkta C i D; albo jeszcze, że A i B tworzą 1sza *parę;* C i D drugą *parę.*

To się rozumie że umowy zrobione w nrze [53] nad znakami i znakowaniem odcinków przechowują się zawsze.

Cztery punkta mogą dać 24 *stosunki nieharmoniczne,* stosownie do różnych sposobów, za pomocą których sprzęga się te punkta. Lecz pomiędzy tymi stosunkami jest tylko *sześć* różnych; a w liczbie tych sześciu, trzy są *odwrotnością* trzech innych. To wypada bezpośrednio z uwag następujących:

Jeżeli się przemieni porządek punktów *sprzężonych*, stosunek staje się *odwrotnym;* i tak

$$(\overline{AB}\,\overline{CD}) = \frac{1}{(\overline{BA}\,\overline{CD})}, \qquad \text{zkąd} \qquad (\overline{AB}\,\overline{CD}) = (\overline{BA}\,\overline{DC}).$$

Jeżeli się przemieni porządek grup, stosunek się *nie zmienia*. W rzeczy saméj równość

$$(\overline{AB}\,\overline{CD}) = (\overline{CD}\,\overline{AB})$$

jest oczywistą, gdyż obie strony téj równości dając na wyrażenie stosunku nieharmonicznego tenże sam wypadek, muszą tém samém być między sobą równe.

Usunąwszy stosunki odwrotne, trzema stosunkami nieharmonicznymi różnymi są:

$$(\overline{AB}\,\overline{CD}), \qquad (\overline{AC}\,\overline{BD}), \qquad (\overline{AD}\,\overline{BC});$$

albo

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}, \qquad \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC}, \qquad \frac{BA}{BD} : \frac{CA}{CD}.$$

Wreszcie, gdy jeden z tych stosunków jest znanym, wartości dwóch innych będą wyznaczone (Chasles, *Geometrya wyższa*, str. 25).

Uważmy przecież że stosunek nieharmoniczny jest określony i jedyny, jeżeli z góry sprzęga się punkta, to jest, gdy się oznacza pary.

I tak, stosunkiem nieharmonicznym dwóch par AB i CD jest

$$(1) \qquad R = (\overline{AB}\,\overline{CD}) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA.DB}{CB.DA}.$$

Uwaga. Zgodzimy się rozciągnąć to określenie jakiegokolwiek układu stosunku nieharmonicznego do *czterech punktów urojonych*, leżących w linii prostej; odległość dwóch punktów urojonych musi być pojętą i określoną jak to już było zrobionem w n[rze] [66].

164. Układ linii prostych, wychodzących z jednego punktu tworzy *jakikolwiek pęk*.

Nazywa się stosunkiem nieharmonicznym jakiegokolwiek pęku czterech prostych, stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięcia pęku przez jakąkolwiek poprzeczną. To określenie daje się zastosować do jakiegokolwiek pęku prostych urojonych.

Aby to określenie miało jakiekolwiek znaczenie, należy nam uzasadnić podanie następujące:

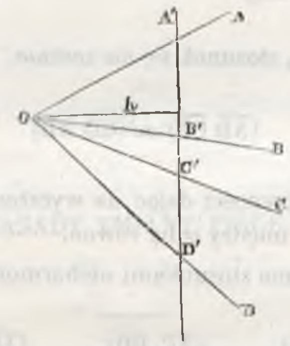
Jeżeli się przecina pęk czterech prostych, rzeczywistych albo urojonych, przez jakąkolwiek poprzeczną, stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięcia jest stałym.

Jeżeli cztery proste są rzeczywiste, wartością stałą tego stosunku jest:

$$\frac{\text{wst}\,\widehat{CA}}{\text{wst}\,\widehat{CB}} : \frac{\text{wst}\,\widehat{DA}}{\text{wst}\,\widehat{DB}}.$$

1° Przypuśćmy naprzód cztery proste rzeczywiste.

Niech będą : O wierzchołek pęku, a OA, OB, OC, OD cztery proste; A', B', C', D' przecięcia pęku przez jakąkolwiek poprzeczną. Oznaczając przez h odległość wierzchołka od poprzecznéj i wyrażając dwoma różnymi sposobami powierzchnią każdego z trójkątów wyznaczonych przez poprzeczną, ma się :



$$C'A'.h = OA'.OC'.\text{wst}\,\widehat{CA}\,,$$

$$C'B'.h = OC'.OB'.\text{wst}\,\widehat{CB}\,,$$

$$D'A'.h = OA'.OD'.\text{wst}\,\widehat{DA}\,,$$

$$D'B'.h = OB'.OD'.\text{wst}\,\widehat{DB}\,.$$

Widzimy, że te równości będą miały miejsce co do wielkości i znaku jeżeli zgodziwszy się uważać odcinki, takie jak C'A' i A'C', jako mające znaki przeciwne, zgodzimy się jednocześnie uważać kąty odpowiadające $\widehat{COA}$ i $\widehat{AOC}$, jako przyjmujące także znaki przeciwne.

Wypada z tych równości :

$$(2) \qquad (A'B'C'D') = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{\text{wst}\,\widehat{CA}}{\text{wst}\,\widehat{CB}} : \frac{\text{wst}\,\widehat{DA}}{\text{wst}\,\widehat{DB}};$$

C.B.D.D.

2° Przypuśćmy teraz proste urojone.

Proste będąc zbiegającemi się, jeżeli x_0, y_0, są spółrzędne rzeczywiste albo urojone ich punktu zbiegania się, będzie można, przypuszczając

$$x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y'$$

przywieść równania tych czterech prostych do kształtu następującego :

$$(3) \qquad OA : y = ax; \qquad OB : y = bx; \qquad OC : y = cx; \qquad OD : y = dx.$$

Niech będą A′, B′, C′, D′, przecięcia tych czterech prostych przez poprzeczną

(2°) $$x = \lambda y + \mu,$$

a (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) spółrzędne względne tych czterech punktów.

Podług wzoru (6) n^ru [66], który określa odległość *algebraiczną* dwóch punktów urojonych, otrzyma się:

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}, \qquad \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4}.$$

Otóż równania (3) i (2°) dają:

$$y_1 = \frac{\mu a}{1 - \lambda a}, \qquad y_2 = \frac{\mu b}{1 - \lambda b}, \qquad y_3 = \frac{\mu c}{1 - \lambda c}, \qquad y_4 = \frac{\mu d}{1 - \lambda d}.$$

Ztąd da się wyciągnąć bez trudności:

(4) $$(A'B'C'D') = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b} = \frac{(c - a)(d - b)}{(c - b)(d - a)}.$$

165. Podług tego, będziemy mogli określić stosunek nieharmoniczny jakiegokolwiek pęku czterech prostych rzeczywistych wyrażeniem następującem:

(5) $$R = (O, ABCD) = \frac{\text{wst}\, \widehat{CA}}{\text{wst}\, \widehat{CB}} : \frac{\text{wst}\, \widehat{DA}}{\text{wst}\, \widehat{DB}};$$

oznacza się często ten stosunek za pomocą znakowania (O, ABCD).

W stosunku nieharmonicznym który uważamy, powiemy że proste OA i OB są sprzężone, tak jak dwie proste OC i OD; albo jeszcze, że dwie proste OA i OB tworzą pierwszą *parę;* a dwie proste OC i OD, drugą *parę*.

166. Przytoczymy jedynie podania następujące:

Jeżeli dwa układy czterech punktów odpowiednich mają jakikolwiek stosunek nieharmoniczny równy, inne stosunki nieharmoniczne są równe z jednej i z drugiej strony.

Jeżeli dwa pęki czterech prostych odpowiednich mają jakikolwiek stosunek nieharmoniczny równy, inne stosunki nieharmoniczne są równe z obu stron.

II° Proporcya harmoniczna.

167. Mówi się że cztery punkta A, B, C, D, tworzą jakikolwiek układ harmoniczny, jeżeli ich stosunek nieharmoniczny równa się — 1, to jest, że:

(6) $$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1;$$

punkta połączone A i B są nazwane *sprzężonymi* harmonicznymi względem pary punktów połączonych C i D, i odwrotnie.

To nazwanie proporcyi harmonicznej było nadanem przez Geometrów Greckich; nazwisko zaś i odkrycie stosunku nieharmonicznego należą się niezaprzeczenie Panu *Chasles'owi* w zupełności.

Pęk z czterech prostych OA, OB, OC, OD, tworzy jakikolwiek układ harmoniczny, jeżeli ich stosunek nieharmoniczny równa się — 1, to jest, że:

$$(7) \qquad (O, ABCD) = \frac{\text{wst}\,\widehat{CA}}{\text{wst}\,\widehat{CB}} : \frac{\text{wst}\,\widehat{DA}}{\text{wst}\,\widehat{DB}} = -1;$$

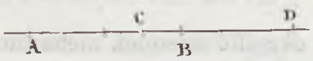
dwie proste połączone OA i OB są nazwane *sprzężonemi* harmonicznemi względem drugiej pary prostych połączonych OC i OD, i odwrotnie.

168. *Związek harmoniczny* czterech punktów, to jest:

$$(6) \qquad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1$$

może się położyć pod różnymi kształtami, które należy poznać.

1° Związek (6) daje kolejno:



$$\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}, \quad \text{albo} \quad \frac{CA}{DA} = \frac{BC}{DB}, \quad \text{albo} \quad \frac{CA}{DA.DC} = \frac{BC}{DB.DC};$$

$$\text{albo} \quad \frac{DA - DC}{DA.DC} = \frac{DC - DB}{DB.DC}; \quad \text{albo} \quad \frac{1}{DC} - \frac{1}{DA} = \frac{1}{DB} - \frac{1}{DC};$$

ma się więc nakoniec

$$(6\ bis) \qquad \frac{2}{DC} = \frac{1}{DA} + \frac{1}{DB}.$$

Związek który tłómaczymy wysłowieniem następującem:

Odległość punktu C *od punktu* D *jest średnicą harmoniczną między odległościami punktów* A *i* B *od punktu* D; *albo jeszcze, punkt* C *jest względem punktu* D *środkiem harmonicznym punktów* A *i* B.

2° Oznaczmy przez I środek odcinka AB, podzielonego harmonicznie przez odcinek CD, ma się podług n[ru] [11]

$$\left\{\begin{array}{lll} AI + IC + CA = 0, & \text{zkąd} & CA = CI + IA; \\ BC + CI + IB = 0, & \text{zkąd} & CB = CI + IB; \\ DA + AI + ID = 0, & \text{zkąd} & DA = DI + IA; \\ DB + BI + ID = 0, & \text{zkąd} & DB = DI + IB. \end{array}\right.$$

Podstawiając te wartości w związku harmonicznym (6), i uważając że :

$$AI = IB \qquad \text{albo} \qquad IB = -IA,$$

otrzymuje się, po wykonaniu uproszczeń :

(6 *ter*) $$\overline{IA}^2 = IC.ID.$$

Zkąd : *jeżeli jakikolwiek odcinek* AB *jest podzielony harmonicznie przez dwa punkta* C i D, *połowa tego odcinka jest średnią proporcyonalną między odległościami jego środka* I *od punktów sprzężonych* C i D; *i odwrotnie.*

Za pomocą podobnych rachunków wykonanych w porządku odwrotnym dowiedzie się twierdzenia odwrotnego.

169. Związek harmoniczny jakiegokolwiek pęku czterech prostych jako to :

(7) $$\frac{\text{wst}\,\widehat{CA}}{\text{wst}\,\widehat{CB}} : \frac{\text{wst}\,\widehat{DA}}{\text{wst}\,\widehat{DB}} = -1$$

podlega, także podobnym przekształceniom.

1° Związek (7) daje koleją :

$$\frac{\text{wst}\,CA}{\text{wst}\,DA} = \frac{\text{wst}\,BC}{\text{wst}\,DB}, \quad \text{albo} \quad \frac{\text{wst}\,CA}{\text{wst}\,DA.\text{wst}\,DC} = \frac{\text{wst}\,BC}{\text{wst}\,DB.\text{wst}\,DC}.$$

Otóż

$$\widehat{CA} + \widehat{AD} + \widehat{DC} = 0, \quad \text{zkąd} \quad \widehat{CA} = \widehat{DA} - \widehat{DC};$$

$$\widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 0, \quad \text{zkąd} \quad \widehat{BC} = \widehat{DC} - \widehat{DB};$$

ztąd wypada :

$$\text{wst}\,\widehat{CA} = \text{wst}\,\widehat{DA}\,\text{dos}\,\widehat{DC} - \text{wst}\,\widehat{DC}\,\text{dos}\,\widehat{DA},$$

$$\text{wst}\,\widehat{BC} = \text{wst}\,\widehat{DC}\,\text{dos}\,\widehat{DB} - \text{wst}\,\widehat{DB}\,\text{dos}\,\widehat{DC};$$

Związek harmoniczny staje się wtedy :

$$\frac{\text{wst}\,\widehat{DA}\,\text{dos}\,\widehat{DC} - \text{wst}\,\widehat{DC}\,\text{dos}\,\widehat{DA}}{\text{wst}\,\widehat{DA}\,.\text{wst}\,\widehat{DC}} = \frac{\text{wst}\,\widehat{DC}\,\text{dos}\,\widehat{DB} - \text{wst}\,\widehat{DB}\,\text{dos}\,\widehat{DC}}{\text{wst}\,\widehat{DB}\,.\text{dos}\,\widehat{DC}},$$

albo ostatecznie

(7 *bis*) $$\frac{2}{\text{st}\,\widehat{DC}} = \frac{1}{\text{s}\,\widehat{DA}} + \frac{1}{\text{st}\,\widehat{DB}}.$$

Wysłowimy ten związek, mówiąc że :

Prosta OC *jest względem prostej* OD *osią harmoniczną dwóch prostych* OA i OB.

2° Oznaczmy przez OI dwójsieczną kąta AOB, podzielonego harmonicznie przez kąt COD; ma się:

$$\widehat{AI} = \widehat{IB}, \qquad \text{albo} \qquad \widehat{AI} = -\widehat{BI}.$$

Z drugiej strony:

$$AI + IC + CA = 0, \quad \text{lub} \quad CA = CI + IA; \quad \text{zkąd} \quad \text{wst}\,\widehat{CA} = \text{wst}(\widehat{CI} + \widehat{IA})$$

$$CB + BI + IC = 0, \quad \text{lub} \quad CB = CI - IA; \quad \text{zkąd} \quad \text{wst}\,\widehat{CB} = \text{wst}(\widehat{CI} - \widehat{IA});$$

$$DA + AI + ID = 0, \quad \text{lub} \quad DA = DI + IA; \quad \text{zkąd} \quad \text{wst}\,\widehat{DA} = \text{wst}(\widehat{DI} + \widehat{IA});$$

$$DB + BI + ID = 0, \quad \text{lub} \quad DB = DI - IA; \quad \text{zkąd} \quad \text{wst}\,\widehat{DB} = \text{wst}(\widehat{DI} - \widehat{IA}).$$

Podstawiając te wartości w związku harmonicznym (7), otrzymuje się:

$$(7\ ter) \qquad \text{st}^2\,\widehat{IA} = \text{st}\,\widehat{IC}\,.\,\text{st}\,\widehat{ID}.$$

Jeżeli kąt AOB *jest podzielonym harmonicznie przez kąt* COD, *styczna połowy tego kąta jest średnią proporcyonalną między stycznemi kątów jakie tworzy jego dwójsieczna z prostemi sprzężonemi* OC i OD; *i odwrotnie.*

Uwaga. Sprawdźmy, mimochodem, tożsamość związków (6 *bis*) i (7 *bis*) ze związkami które nam posłużyły do określenia biegunowych nru [83] i [134]; co usprawiedliwia wyrażenie harmoniczne któregośmy w onym razie użyli.

III° Wyrażenie stosunku nieharmonicznego czterech prostych.

170. Przypuśćmy naprzód cztery proste dane przez ich równania:

Ponieważ proste są zbiegającemi się, jeżeli

$$M = 0, \qquad N = 0$$

są równaniami dwóch prostych, przechodzących przez punkt zbiegania się, równania czterech prostych pęku będą mogły zawsze sprowadzić się do kształtu:

$$(8) \qquad \begin{cases} A = M - aN = 0, \\ B = M - bN = 0, \\ C = M - cN = 0, \\ D = M - dN = 0, \end{cases}$$

a, b, c, d, są stałemi; układ spółrzędnych pozostaje wreszcie dowolnym, układem kartezyańskim lub układem trzylinijnym.

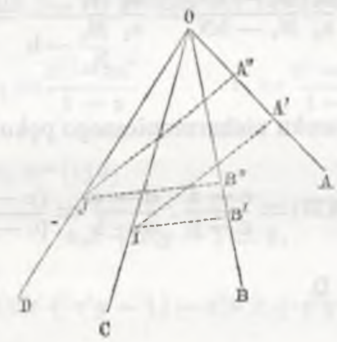
Idzie o wyznaczenie wyrażenia stosunku nieharmonicznego tego pęku, uważając jako *połączone* proste A i B, potem proste C i D.

Tym stosunkiem nieharmonicznym jest:

(9) $$R = (0, \overline{AB}\ \overline{CD}) = \frac{\text{wst}\ \widehat{CA}}{\text{wst}\ \widehat{CB}} : \frac{\text{wst}\ \widehat{DA}}{\text{wst}\ \widehat{DB}}.$$

Weźmy jakikolwiek punkt I na prostej OC, tak że otrzyma się

(1°) $$M_0 - cN_0 = 0,$$



gdy M_0 i N_0 oznaczają wypadki podstawienia spółrzędnych punktu I w funkcyach linijnych M i N.

Jeżeli IA′ i IB′ są prostopadłe spuszczone z punktu I na proste OA i OB, otrzyma się:

$$IA' = OI.\text{wst}\ \widehat{CA} = \frac{M_0 - aN_0}{a_1},$$

$$IB' = OI.\text{wst}\ \widehat{CB} = \frac{M_0 - bN_0}{b_1},$$

mianowniki a_1 i b_1 zależą tylko od spółczynników równań $A = 0$, $B = 0$ a wcale nie od spółrzędnych punktu uważanego n^ru [76], n^ru [98]; można nadto przypuścić że a_1 i b_1 oznaczają wartości bezwzględne, ponieważ kierunek kąta CA, na przykład, zmienia się widocznie ze znakiem wyrażenia $(M_0 - aN_0)$.

Wypada ztąd, mając wzgląd na równość (1°):

$$\frac{\text{wst}\ \widehat{CA}}{\text{wst}\ \widehat{CB}} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{M_0 - aN_0}{M_0 - bN_0} = \frac{b_1}{a_1} \frac{\frac{M_0}{N_0} - a}{\frac{M_0}{N_0} - b} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{c - a}{c - b}.$$

Weźmy teraz jakikolwiek punkt J na prostej OD, tak że się otrzyma:

(2°) $$M_1 - dN_1 = 0;$$

gdy M_1 i N_1 oznaczają wypadki podstawienia spółrzędnych punktu J w funkcyach linijnych M i N. Jeśli JA″ i JB″ są prostopadłe spuszczone z punktu J na proste OA i OB, otrzyma się :

$$JA'' = OJ.\text{wst}\,\widehat{DA} = \frac{M_1 - aN_1}{a_1}$$

$$JB'' = OJ.\text{wst}\,\widehat{DB} = \frac{M_1 - bN_1}{b_1}.$$

Mając wzgląd na równość (2°) wypada ztąd :

$$\frac{\text{wst}\,\widehat{DA}}{\text{wst}\,\widehat{DB}} = \frac{b_1}{a_1}.\frac{M_1 - aN_1}{M_1 - bN_1} = \frac{b_1}{a_1}.\frac{\frac{M_1}{N_1} - a}{\frac{M_1}{N_1} - b} = \frac{b_1}{a_1}.\frac{d - a}{d - b}.$$

Przeto, wyrażeniem szukanem stosunku nieharmonicznego pęku czterech prostych (8) będzie :

$$R = (O, ABCD) = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b} = \frac{(c - a)(d - b)}{(c - b)(d - a)}, \tag{10}$$

uważając jako *połączone* A i B; C i D.

Kiedy równania pęku są kształtu :

$$\left\{\begin{array}{l} A = M \\ B = N \\ C = M - hN, \\ D = M - kN, \end{array}\right. \tag{11}$$

wyrażeniem stosunku nieharmonicznego będzie (robiąc $a = 0$, $b = \infty$, $c = h$, $d = k$) :

$$R = (O, ABCD) = \frac{h}{k}, \tag{12}$$

uważając zawsze jako *połączone* A i B, C i D.

Te wzory mają miejsce, jakimkolwiek jest układ spółrzędnych czy *kartezyański* czy też *trzylinijny*.

Uwaga. Te wypadki są jeszcze dokładne kiedy proste pęku są urojone. W rzeczy samej, równania (8) mogą przez zmianę zmiennych sprowadzić się do kształtu (3) n^ru [164]; a równość (4) tegoż samego n^ru daje dokładnie wyrażenie, które należy znaleźć.

171. Ze związków (10) i (12) da się wyprowadzić, że pęk :

$$(A) = M - aN, \qquad (B) = M - bN, \qquad (C) = M - cN, \qquad (D) = M - dN \tag{13}$$

jest harmonicznym, kiedy

$$(c - a)(d - b) + (c - b)(d - a) = 0. \tag{14}$$

Pęk

(15) $(A) = M$; $(B) = N$; $(C) = M - hN$, $(D) = M - kN$

będzie harmonicznym, kiedy się otrzyma :

(16) $$h + k = 0.$$

Proste A i B są *połączone*, tak jak C i D.

172. Przypuśćmy teraz cztery proste pęku, dane przez ich spółrzędne.

1° *Spółrzędne* (*dwulinijne*) u i v (Roz. III).

Niech będą (u', v'), (u'', v'') spółrzędne dwóch prostych, wyznaczających wierzchołek pęku; niech będą (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_4) spółrzędne względne prostych OA, OB, OC, OD.

Podług wzoru n^ru [121], spółrzędne (u_1, v_1) prostej OA będą kształtu :

(1°) $$u_1 = \frac{u' - au''}{1 - a}, \qquad v_1 = \frac{v' - av''}{1 - a};$$

równaniem tej prostej będzie przeto, n^er [110]

$$u_1 x + v_1 y - 1 = 0,$$

albo

(OA) $$(u'x + v'y - 1) - a(u''x + v''y - 1) = 0.$$

Otrzyma się tak samo na równania innych prostych :

(OB) $$(u'x + v'y - 1) - b(u''x + v''y - 1) = 0,$$

(OC) $$(u'x + v'y - 1) - c(u''x + v''y - 1) = 0,$$

(OD) $$(u'x + v'y - 1) - d(u''x + v''y - 1) = 0.$$

Stosując wtedy twierdzenie n^ru [170], otrzymamy

$$(R = (O, ABCD) = \frac{(c - a)}{(c - b)} \cdot \frac{(d - b)}{(d - a)}.$$

Otóż, jeżeli z równości (1°) i z podobnych wyciąga się wartości a, b, c, d, w funkcyi u_i, v_i, i gdy się je podstawi we wzorze poprzedzającym, znajduje się na wyrażenie stosunku nieharmonicznego dwa kształty następujące :

(17) $$R = (O, ABCD) = \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2} : \frac{u_4 - u_1}{u_4 - u_2} \quad \text{lub} \quad = \frac{v_3 - v_1}{v_3 - v_2} : \frac{v_4 - v_1}{v_2 - v_2}.$$

2° *Spółrzędne trzylinijne jakiejkolwiek prostej*. (Roz. IV.)

Niech będą (U', V', W), (U'', V'', W''), spółrzędne prostych wyznaczających wierzchołek pęku; niech będą, nadto, (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2), (U_3, V_3, W_3), (U_4, V_4, W_4) spółrzędne względne prostych OA, OB, OC, OD.

Podług wzorów n^{ru} [142], spółrzędne (U_1, V_1, W_1) prostej OA będą mogły położyć się pod kształtem:

$$(1^\circ) \qquad U_1 = \frac{U' - aU''}{\rho'}, \qquad V_1 = \frac{V' - aV''}{\rho'}, \qquad W_1 = \frac{W' - aW''}{\rho'},$$

równaniem tej prostej będzie przeto na mocy n^{ru} [139]:

$$U_1 X + V_1 Y + W_1 Z = 0,$$

albo

$$(U'X + V'Y + W'Z) - a(U''X + V''Y + W''Z) = 0.$$

W podobny sposób odbędzie się przekształcenie względem innych prostych, z czego na wyrażenie stosunku nieharmonicznego da się ostatecznie wyprowadzić:

$$R = (O, ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-b}{d-a}.$$

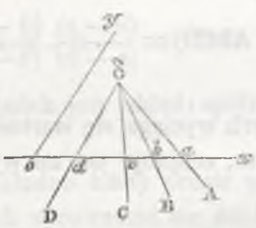
Teraz, jeżeli z równości (1°) i z podobnych wyciąga się wartości a, b, c, d, w funkcyi U_1, V_1; U', V', etc. i gdy się je podstawi we wzorze poprzedzającym, znajduje się na wyrażenie stosunku nieharmonicznego kształty następujące:

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} R &= (O, ABCD) = \frac{U_3V_1 - U_1V_3}{U_3V_2 - U_2V_3} : \frac{U_4V_1 - U_1V_4}{U_4V_2 - U_2V_4}; \\ R &= (O, ABCD) = \frac{V_3W_1 - V_1W_3}{V_3W_2 - V_2W_3} : \frac{V_4W_1 - V_1W_4}{V_4W_2 - V_2W_4}; \\ R &= (O, ABCD) = \frac{W_3U_1 - W_1U_3}{W_3U_2 - W_2U_3} : \frac{W_4U_1 - W_1U_4}{W_4U_2 - W_2U_4}; \end{aligned} \right.$$

Drugie dowodzenie.

1° *Spółrzędne dwulinijne.*

Stosunek nieharmoniczny pęku równa się stosunkowi nieharmonicznemu układu punktów, wyzna-



czonemu, na przykład na osi odciętych.

Otóż:

$$ca = Oa - Oc = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_3},$$

$$cb = Ob - Oc = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3},$$

$$da = Oa - Od = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_4},$$

$$db = Ob - Od = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_4};$$

więc rozumując podobnież dla osi Oy:

$$(17) \qquad (S, ABCD) = \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2} : \frac{u_4 - u_1}{u_4 - u_2} \quad \text{lub} \quad = \frac{v_3 - v_1}{v_3 - v_2} : \frac{v_4 - v_1}{v_4 - v_2}.$$

2° *Spółrzędne trzylinijne.*

Kiedy się wyznaczy przecięcia prostych pęku z jednym z boków trójkąta odniesienia, z bokiem AB na przykład, równaniem czterech punktów będą:

$$U - \frac{U_1}{V_1} V = 0, \qquad U - \frac{U_2}{V_2} V = 0, \qquad U - \frac{U_3}{V_3} V = 0, \qquad U - \frac{U_4}{V_4} V = 0.$$

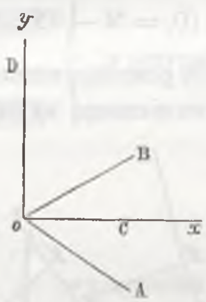
Wtedy będzie można za pomocą wzoru (20) dowiedzionego poniżej wyprowadzić wyrażenia (18).

173. Przytoczmy dwie następujące własności pęków harmonicznych.

1° *Jeżeli w jakimkolwiek pęku harmonicznym dwa promienie sprzężone* OC *i* OD *są prostokątnymi, te promienie będą dwójsiecznemi dwóch kątów spełniających, utworzonych przez promienie* OA *i* OB.

2° *W jakimkolwiek pęku harmonicznym, wszelka poprzeczna, równoległa do jednego z promieni, jest przeciętą przez trzy inne na dwie części równe.*

Aby dowieść 1° podania, weźmy za osie dwie proste prostokątne OC i OD; równaniami dwóch



prostych OA i OB będą

$$y - ax = 0, \qquad y - bx = 0;$$

a ponieważ pęk jest harmonicznym, otrzyma się podług n^ru [171]

$$a + b = 0, \qquad \text{czyli} \qquad b = -a;$$

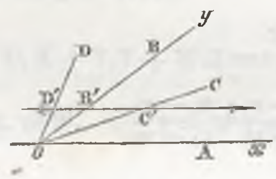
więc OC jest dwójsieczną kąta AOB; etc...

Dla uzasadnienia drugiego podania, weźmy jeden z promieni za jedną z osi spółrzędnych, OA na przykład; a za oś rzędnych, prostą OB sprzężoną prostej OA.

Równaniami OC i OD będą, ponieważ pęk jest harmonicznym,

$$\text{OC} \quad y - kx = 0; \qquad \text{OD} \quad y + kx = 0.$$

Przetnijmy pęk przez prostą C'B'D' równoległą do Ox, $y = h$; otrzyma się za odcięte punktów



C' i D' dwie wartości równe i znaków przeciwnych; więc etc...

IV° Wyrażenie stosunku nieharmonicznego czterech punktów.

174. Przypuśćmy naprzód cztery punkta dane przez ich równania.

Ponieważ cztery punkta są w linii prostej, jeżeli

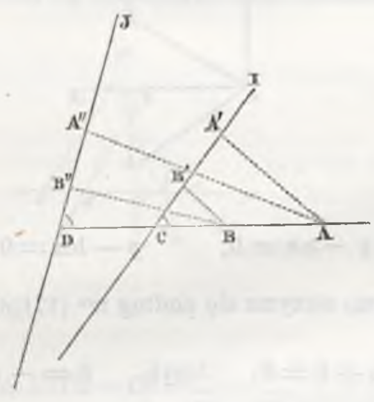
$$\text{M} = 0, \qquad \text{N} = 0$$

są równaniami dwóch punktów wyznaczających tę prostą, równania czterech punktów układu będą się mogły zawsze sprowadzić do kształtu :

$$(19) \qquad \begin{cases} (\text{A}) = \text{M} - \text{aN} = 0, \\ (\text{B}) = \text{M} - \text{bN} = 0, \\ (\text{C}) = \text{M} - \text{cN} = 0, \\ (\text{D}) = \text{M} - \text{dN} = 0, \end{cases}$$

a, b, c, d, są stałemi; układ spółrzędnych pozostaje wreszcie dowolnym.

Idzie o wyznaczenie stosunku nieharmonicznego układu kiedy się uważa jako *połączone* punkta



A i B, C i D. Tym stosunkiem nieharmonicznym jest :

$$\text{R} = (\text{ABCD} = \frac{\text{CA}}{\text{CB}} : \frac{\text{DA}}{\text{DB}}.$$

Wystawmy sobie jakąkolwiek prostą CI przechodzącą przez punkt C, tak że się otrzyma:

$$(1^{\circ})\qquad M_0 + cN_0 = 0,$$

gdy M_0 i N_0 oznaczają wypadki podstawienia spółrzędnych prostej CI w funkcyach linijnych M i N.

Jeżeli AA′ i BB′ są prostopadłemi spuszczonemi z punktów A i B na prostą CI, ma się:

$$\left.\begin{aligned} AA' &= CA.\mathrm{wst}C = \frac{M_0 - aN_0}{k\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0\,\mathrm{dos}\,\theta}},\\ BB' &= CB.\mathrm{wst}C = \frac{M_0 - bN_0}{k\sqrt{u_0^2 + v_c^2 - 2u_0v_0\,\mathrm{dos}\,\theta}},\end{aligned}\right\} \text{ w przypadku spółrzędnych dwulinijnych, n}^{\text{er}}\ [129].$$

albo

$$\left.\begin{aligned} AA' &= CA.\mathrm{wst}C = \frac{M_0 - aN_0}{a_1},\\ BB' &= CB.\mathrm{wst}C = \frac{M_0 - bN_0}{b_1},\end{aligned}\right\} \text{ w przypadku spółrzędnych trzylinijnych, n}^{\text{er}}\ [156].$$

Uważmy jakąkolwiek inną prostą przechodzącą przez D, tak że się otrzyma:

$$(2^{\circ})\qquad M_1 - dN_1 = 0,$$

gdy M_1 i N_1 oznaczają wypadki podstawienia spółrzędnych prostej DJ w funkcyach linijnych M i N.

Jeżeli AA″ i BB″ są prostopadłemi spuszczonemi z punktów A i B na prostą DJ, ma się:

$$\left.\begin{aligned} AA'' &= DA.\mathrm{wst}D = \frac{M_0 - aN_0}{k\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1\,\mathrm{dos}\,\theta}},\\ BB'' &= DB.\mathrm{wst}D = \frac{M_1 - bN_1}{k\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1\,\mathrm{dos}\,\theta}},\end{aligned}\right\} \text{ w przypadku spółrzędnych dwulinijnych, n}^{\text{er}}\ [129].$$

albo

$$\left.\begin{aligned} AA'' &= DA.\mathrm{wst}D = \frac{M_1 - aN_1}{a_1},\\ BB'' &= DC.\mathrm{wst}D = \frac{M_1 - bN_1}{b_1},\end{aligned}\right\} \text{ w przypadku spółrzędnych trzylinijnych, n}^{\text{er}}\ [156].$$

stałe k, k_1, a_1, b_1, są tu też same jak w grupie wzorów powyższych.

Wyciąga się ztąd, dla obu układów spółrzędnych:

$$(20)\qquad R = (ABCD) = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b},$$

uważając jako *połączone* A i B, C i D.

Kiedy równania czterech punktów układu będą kształtu :

$$
(21)\qquad \begin{cases} (A) = M, \\ (B) = N, \\ (C) = M - hN, \\ (D) = M - \quad , \end{cases}
$$

wyrażeniem stosunku nieharmonicznego będzie :

$$
(22)\qquad R = (ABCD) = \frac{h}{k},
$$

łącząc A i B, C i D.

175. Układ

$$
(23)\qquad (A) = M - aN, \quad (B) = M - bN, \quad (C) = M - cN, \quad (D) = M - dN;
$$

będzie harmonicznym, gdy się otrzyma :

$$
(24)\qquad (c - a)(d - b) + (c - b)(d - a) = 0.
$$

Układ

$$
(25)\qquad (A) = M, \quad (B) = N, \quad (C) = M - hN, \quad (D) = M - kN,
$$

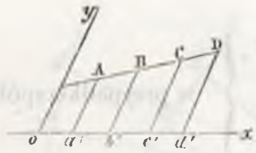
będzie *harmonicznym*, gdy się otrzyma

$$
(26)\qquad h + k = 0.
$$

176. Przypuśćmy teraz cztery punkta układu dane przez ich spółrzędne.

1° *Spółrzędne kartezyańskie.*

Niech będą (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) spółrzędne względne czterech punktów A, B, C, D; jeżeli a′, b′, c′, d′, są rzutami tych czterech punktów na osi odciętych, stosunek nieharmoniczny układu rzutów będzie równy stotunkowi nieharmonicznemu układu danego.



Otóż

$$
\begin{aligned}
a'c' + c'0 + 0a' &= 0, &\text{zkąd}\quad c'a' &= 0a' - 0c' = x_1 - x_3;\\
b'c' + c'0 + 0b' &= 0, &\text{zkąd}\quad c'b' &= 0b' - 0c' = x_2 - x_3;\\
a'd' + d'0 + 0a' &= 0, &\text{zkąd}\quad d'a' &= 0a' - 0d' = x_1 - x_4;\\
b'd' + d'0 + 0b' &= 0, &\text{zkąd}\quad d'b' &= 0b' - 0d' = x_2 - x_4.
\end{aligned}
$$

Przeto, rozumując tak samo dla osi rzędnych :

$$
(27)\qquad R = (ABCD) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} \qquad \text{lub} \qquad = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2}.
$$

2° *Spółrzędne trzylinijne.*

Złączmy cztery punkta z jednym z wierzchołków trójkąta odniesienia, z wierzchołkiem A na przykład; stosunek nieharmoniczny szukany będzie równy stosunkowi nieharmonicznemu tych czterech prostych. Otóż te cztery proste będą miały względnie na równania:

$$Y - \frac{Y_1}{Z_1} Z = 0; \quad Y - \frac{Y_2}{Z_2} Z = 0; \quad Y - \frac{Y_3}{Z_3} Z = 0; \quad Y - \frac{Y_4}{Z_4} Z = 0.$$

Stosując do tego pęku wzór (10) nru [170], otrzymuje się zaraz 1szy ze związków następujących:

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} R &= (ABCD) = \frac{Y_3Z_1 - Y_1Z_3}{Y_3Z_2 - Y_2Z_3} : \frac{Y_4Z_1 - Y_1Z_4}{Y_4Z_2 - Y_2Z_4}, \\ R &= (ABCD) = \frac{Z_3X_1 - Z_1X_3}{Z_3X_2 - Z_2X_3} : \frac{Z_4X_1 - Z_1X_4}{Z_4X_2 - Z_2X_4}, \\ R &= (ABCD) = \frac{X_3Y_1 - X_1Y_3}{X_3Y_2 - X_2Y_3} : \frac{X_4Y_1 - X_1Y_4}{X_4Y_2 - X_2Y_4}. \end{aligned} \right.$$

Uwaga. Można będzie ze wzorów (27) i (28) wyprowadzić łatwo wzór (20) dowiedziony wprost.

177. Przypuśćmy dwie pary punktów albo dwie pary prostych dane względnie przez równani drugiego stopnia, takie jak:

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} &1^{sza}\text{ para}: \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0, \\ &2^{ga}\text{ para}: \quad A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Niech będą a i b pierwiastki 1szego równania, c i d pierwiastki drugiego, stosunkiem nieharmonicznym układu będzie podług wzoru (10) nru [170]

$$R = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{cd + ab - ad - bc}{cd + ab - bd - ac}.$$

Otóż równania (29) dają:

$$a + b = -\frac{B}{A}, \qquad c + d = -\frac{B_1}{A_1};$$

$$ab = \frac{C}{A}; \qquad cd = \frac{C_1}{A}.$$

Podstawiając te wartości w wyrażeniu R, znajdzie się:

$$(30)\quad R = \frac{2(AC_1 + A_1C) - BB_1 + \sqrt{B^2 - 4AC}\,\sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2(AC_1 + A_1C) - BB_1 - \sqrt{B^2 - 4AC}\,\sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}.$$

Układ będzie harmonicznym, kiedy się otrzyma:

$$(31)\quad 2(AC_1 + A_1C) - BB_1 = 0.$$

Mając wzgląd na wzór (27) n^ru [176], tenże sam rachunek i te same wnioski dadzą się zastosować do przypadku, w którymby równania (29) określały pary punktów.

Uwaga. Jeżeli odcięte czterech punktów (albo spółrzędne tegoż samego imienia czterech prostych), są pierwiastkami jakiegokolwiek równania 4^tego stopnia, takiego jak

$$\text{(32)}\qquad Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0,$$

trzy stosunki nieharmoniczne układu czterech punktów są dane przez równanie na ρ

$$\text{(33)}\qquad I^3(\rho+2)\left(\rho-\frac{5}{2}\right)^2 = 27J^2(\rho+1)^3;$$

równanie, w którem I i J przedstawiają *niezmienniki:*

$$\text{(34)}\qquad \begin{cases} I = AE - 4BD + 3C^2, \\ J = ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3, \end{cases}$$

(*Nowe Roczniki*, tom XIX, str. 107.)

§ II. — PODZIAŁY JEDNOKREŚLNE. — INWOLUCYA.

1° Podziały jednokreślne.

178. *Podziały jednokreślne na dwóch prostych różnych.*

Pęki jednokreślne wierzchołków różnych.

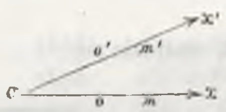
Daje się nazwisko *podziału* jakiemukolwiek szeregowi punktów w linii prostej; prosta jest nazwaną *podstawą* podziału.

Uważmy dwa podziały na dwóch prostych różnych D i D′; te dwa podziały będą *jednokreślne*, jeżeli jakiemukolwiek punktowi jednego z podziałów odpowiada jakikolwiek punkt i jeden tylko drugiego podziału, i odwrotnie.

Punkta sobie odpowiadające są nazwane punktami *odpowiednymi*.

Podług tego, jeżeli O i O′ są dwa początki dowolnie wzięte na każdej z prostych, i jeżeli m i m' są dwa punkta odpowiedne; Om i O′m' będą połączone przez związek:

$$\text{(1)}\qquad A.Om.O'm' + B.Om + C.O'm' + D = 0,$$



albo, przedstawiając przez x i x' odległości Om i O′m'

$$\text{(1 bis)}\qquad Axx' + Bx + Cx' + D = 0;$$

A, B, C, D, są spółczynnikami dowolnymi.

Ponieważ związek (1) zawiera tylko trzy stosunki dowolne $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, wynika ztąd, że dwa podziały jednokreślne będą wyznaczone, kiedy się da trzy pary punktów odpowiednych.

Przytoczymy jedynie następującą wartość zasadniczą, której sprawdzenie jest łatwem za pomocą wzoru (27) n^ru [176] :

Stosunek nieharmoniczny czterech jakichkolwiek punktów jednego z podziałów jest równy stosunkowi ich odpowiednych.

179. Daje się nazwisko pęku dla jakiegokolwiek układu prostych przechodzących przez jeden punkt, nazwany wierzchołkiem pęku.

Uważmy dwa pęki wierzchołków różnych, te dwa pęki będą jednokreślne, jeżeli dla jakiejkolwiek prostéj jednego z pęków odpowiada jakakolwiek prosta i tylko jedna drugiego pęku; i odwrotnie.

Ztąd wypada oczywiście, że

Dwie jakiekolwiek proste wyznaczają na każdym z pęków dwa podziały które będą jednokreślne.

180. *Podziały jednokreślne jednej podstawy.*

Pęki jednokreślne spólnego wierzchołka.

Dwa podziały, leżące na jednej prostej mają jedną podstawę.

Nazywa się *punktem podwójnym* wszelki punkt prostej, który należąc do jednego podziału przystaje do swego odpowiednego w drugim.

Dwa podziały jednokreślne jednej podstawy mają dwa punkta podwójne rzeczywiste albo urojone.

Uważmy dwa pęki jednokreślne spólnego wierzchołka; nazywa się *promieniem podwójnym* wszelka prosta, która należąc do jednego pęku, przystaje do swego odpowiedniego w drugim.

Dwa pęki jednokreślne, mające spólny wierzchołek, mają zawsze dwa *promienie podwójne*, rzeczywiste albo urojone.

Gdy kąt obraca się około swego wierzchołka, jego ramiona tworzą dwa pęki jednokreślne, promienie podwójne są urojone, a ich położenie jest niezależnem od wielkości kąta.

Odeszlemy, po obszerniejsze tego przedmiotu wyjaśnienie, do *Geometryi wyższej* P. Chasles'a, albo do *Geometryi elementarnej* P. Rouché.

II° Inwolucya (określenia).

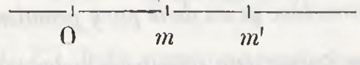
181. *Podziały w inwolucyi.*

Mówi się że dwa podziały jednokreślne są w *Inwolucyi*, gdy m i m' są dwoma punktami sobie odpowiednymi; m uważamy jako należący do 1^szego podziału, ma za odpowiedny m' w drugim; i odwrotnie, m' uważany jako należący do 1^szego podziału, ma za odpowiedny m w drugim.

Podług tego określenia, związek jednokreślny (1) na mocy n^ru [170] nie powinien się zmienić gdy się zmieni m i m', albo gdy się wykona przemianę x i x'.

Jeżeli O jest początkiem spólnym dwóch podziałów, związek inwolucyi będzie mógł się napisać :

$$xx' - \lambda(x + x') - \mu = 0; \qquad (1)$$



x i x' oznaczają wartości algebraiczne odległości Om i Om'; λ i μ są stałe.

Podług tego związku który zawiera w sobie tylko dwie stałe, widzimy że :

1° *Dosyć jest dwóch par punktów odpowiednych dla wyznaczenia dwóch podziałów w inwolucyi.*

Jeżeli I jest punktem 1szego podziału odpowiednym punktów w nieskończoności w drugim, a J jest punktem 2giego podziału odpowiednym punktów w nieskończoności w pierwszym, znajduje się za pomocą związku (1) :

$$OI = \lambda, \qquad OJ = \lambda; \qquad OI = OJ.$$

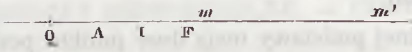
2° *Aby dwa podziały jednokreślne były w inwolucyi, potrzeba i dosyć jest żeby punkta* I i J, *odpowiedne punktów w nieskończoności, schodziły się w jeden.*

Punkta *podwójne* inwolucyi będą dane, przypuszczając $x' = x$, to jest przez równanie :

$$x^2 - 2\lambda x - \mu = 0.$$

Oznaczmy przez e i f te dwa punkta; widzimy że punkt I odpowiedny punktów w nieskończoności, jest środkiem odcinka (zamkniętego urojonego) ef; punkt I jest *środkiem inwolucyi.*

Jeżeli się odniesie podziały do środka I, należy zrobić $\lambda = 0$; a związek inwolucyi weźmie kształt prosty :



(2) $$xx' = \mu, \qquad \text{albo} \qquad Im.Im' = \overline{Ie}^2.$$

Ztąd wypada : ner [166].

3° *Odcinek* ef, *utworzony przez dwa punkta podwójne inwolucyi, jest podzielonym harmonicznie przez wszystkie pary* (a, a'), (b, b'), (c, c'),...

Przytoczymy jeszcze tę własność, której dowodzenie jest bezpośredniem za pomocą związku poprzedzającego (2) i wzoru (27) nru [176] :

4° *Jeżeli trzy pary* (a, a'), (b, b'), (c, c') *są w inwolucyi, cztery jakiekolwiek z tych sześciu punktów mają ich stosunek nieharmoniczny równy stosunkowi czterech punktów odpowiednych; i odwrotnie, trzy pary będą w inwolucyi, jeżeli cztery jakiekolwiek z pomiędzy nich mają ich stosunek nieharmoniczny równy stosunkowi czterech odpowiednych.*

I tak :

$$(abca') = (a'b'c'a), \qquad (aa'bb') = (a'ab'b), \qquad \text{etc.}$$

182. *Pęki w inwolucyi.*

Dwa pęki jednokreślne są w inwolucyi, gdy się może otrzymać jakąkolwiek prostą przecinającą je podług dwóch podziałów w inwolucyi.

1° *Dwa pęki w inwolucyi będą wyznaczone przez dwie pary promieni odpowiednych.*

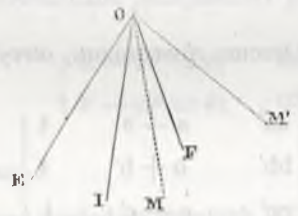
2° *W dwóch pękach w inwolucyi, są zawsze dwa promienie podwójne rzeczywiste albo urojone.*

Przecięcia tych dwóch promieni podwójnych przez jakąkolwiek sieczną są punktami podwójnymi dwóch podziałów w inwolucyi, wyznaczonych przez tę sieczną.

3° *Dwa promienie podwójne* OE, OF *tworzą układ harmoniczny z każdym układem innych par* (OA, OA′), (OB, OB′), (OC, OC′), etc....

A jeżeli OI jest dwójsieczną kąta EOF, ma się (7 tw.) n^ci^ [169]

$$
\text{(3)} \qquad \mathrm{st}^2\, \widehat{IE} = \mathrm{st}\, \widehat{IM} \,.\, \mathrm{st}\, \widehat{IM'}\,;
$$



dwójsieczna OI może być nazwaną *osią w inwolucyi*.

Wysłowimy własność następującą :

Jeżeli trzy pary (A, A′), (B, B′), (C, C′) *prostych są w inwolucyi, cztery jakiekolwiek z tych sześciu prostych mają ich stosunek nieharmoniczny równy stosunkowi czterech prostych odpowiednych; i odwrotnie.*

I tak :

$$
(O,\ ABCA') = (O,\ A'B'C'A); \qquad (O,\ ABA'B') = (O,\ A'B'AB); \qquad \text{etc.}
$$

Uwaga. Wiedza inwolucyi została uogólnioną przez P. de Jonquières; zobaczyć *Teoryę geometryczną* (Teoria geometrica) przez L. Cremona.

III° Inwolucya (Równania).

183. *Pęki w inwolucyi.*

Niech będą równania dwóch jakichkolwiek prostych

$$
M = 0, \qquad M' = 0,
$$

wyznaczające wierzchołek spólny dwóch pęków; niech będą nadto równania trzech par :

$$
\text{(1)} \quad \begin{cases} OA, & M - aM' = 0, \\ OA', & M - a'M' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} OB, & M - bM' = 0, \\ OB', & M - b'M' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} OC, & M - cM' = 0, \\ OC', & M - c'M' = 0. \end{cases}
$$

Wyrazimy że te trzy pary tworzą inwolucyą, tłomacząc analitycznie własność (4°) n^ru^ [182]; albo lepiej jeszcze, podług własności (3°) tegoż samego numeru, że istnieje para :

$$
\text{(2)} \quad \begin{cases} OE & M - \lambda M' = 0 \\ OF & M - \lambda' M' = 0, \end{cases}
$$

taka, aby trzy pary (A, A′), (B, B′), (C, C′) były sprzężone względem pary (E, F); ta ostatnia para będzie tworzyć układ *promieni podwójnych* inwolucyi.

Otóż na mocy związku (14) n^ru [171], warunkami, aby trzy pary (A, A′), (B, B′), (C, C′) tworzyły względnie układ harmoniczny z parą (E, F), będą:

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')(a+a') + aa' = 0, \\ \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')(b+b') + bb' = 0, \\ \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')(c+c') + cc' = 0. \end{cases}$$

Rugując $\lambda\lambda'$ i $(\lambda+\lambda')$ między temi trzema równaniami, otrzymamy:

$$(4)\quad \begin{vmatrix} aa' & a+a' & 1 \\ bb' & b+b' & 1 \\ cc' & c+c' & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

takim jest warunek aby trzy pary (A, A′), (B, B′), (C, C′) *były w inwolucyi.*

Gdy ten związek jest sprawdzony, znajdziemy wartości na λ i λ' za pomocą dwóch równań (3), a promienie podwójne inwolucyi będą wtedy wyznaczone przez równania (2).

184. Przypuśćmy że $M = 0$ i $M' = 0$ są równaniami dwóch promieni odpowiednych, OC i OC′ na przykład; będzie potrzeba wtedy zrobić

$$c = 0, \qquad c' = \infty,$$

a warunek inwolucyi stanie się

$$(5)\quad aa' = bb' = \text{stałej} = k.$$

Tak, że jeżeli

$$(6)\quad \begin{cases} L = 0, \\ L' = 0, \end{cases}$$

są równania dwóch promieni odpowiednych, zównaniami *jakiejkolwiek pary inwolucyi* będą:

$$L - aL' = 0, \quad OM$$

$$L - \frac{k}{a}L' = 0, \quad OM'$$

a jest jakąkolwiek stałą dowolną, a k jakąkolwiek ilością stałą.

185. Przypuśćmy nakoniec, że $M = 0$, $M' = 0$, są *dwoma promieniami podwójnymi* inwolucyi, to jest

$$OE : M - \lambda M' = 0,$$

$$OF : M - \lambda' M' = 0,$$

co wymaga żeby było

$$\lambda = 0, \qquad \lambda' = \infty;$$

związki (3) dają wtedy

(8) $$a + a' = 0.$$

Więc, jeżeli

(9) $$\begin{cases} E = 0 \\ F = 0, \end{cases}$$

są równania *promieni podwójnych*, równaniami *jakiejkolwiek pary inwolucyi* będą:

(10) $$\begin{cases} E - aF = 0, & OM \\ F - aF = 0; & OM' \end{cases}$$

a jest jakąkolwiek stałą dowolną.

Dwie proste OM i OM' są sprzężone względem prostych OE i OF; otrzyma się, oznaczając przez OI

dwojsieczną kąta EOF n^{er} [169] (7 *ter*)

(11) $$st^2\, \widehat{IF} = st\, \widehat{IM} \,.\, st\, \widehat{IM'};$$

związek który się sprawdzi łatwo za pomocą równań (10).

Nakoniec równania (10) pokazują nam jeszcze że *w dwóch pękach w inwolucyi, istnieje zawsze dwa promienie odpowiedne prostokątne; jeden z tych promieni jest osią inwolucyi.*

Widzimy to, biorąc dwie proste OE i OF za osie spółrzędnych.

186. Podziały w inwolucyi.

Niech będą równania dwóch jakichkolwiek punktów

$$M = 0, \qquad M' = 0,$$

wyznaczające podstawę dwóch podziałów w inwolucyi; niech będą nadto, równania trzech par:

(12) $$\begin{cases} (A) & M - aM' = 0, \\ (A') & M - a'M' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (B) & M - bM' = 0, \\ (B') & M - b'M' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (C) & M - cM' = 0, \\ (C') & M - c'M' = 0. \end{cases}$$

Wyrazimy, że te trzy pary tworzą inwolucyą, pisząc że istnieje para :

$$(13)\qquad \begin{cases} (E) & M - \lambda M' = 0, \\ (F) & M - \lambda' M' = 0, \end{cases}$$

taka, aby trzy pary (A, A′), (B, B′), (C, C′) były sprzężone względem pary (E, F); ta ostatnia para będzie tworzyć układ *punktów podwójnych* inwolucyi.

Otóż, podług związku (24) n[ru] [175], warunkami szukanymi będą :

$$(14)\qquad \begin{cases} \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')(a + a') + aa' = 0, \\ \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')(b + b') + bb' = 0, \\ \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')(c + c') + cc' = 0. \end{cases}$$

Rugując $\lambda\lambda'$ i $(\lambda + \lambda')$ między temi trzema równaniami, znajdujemy :

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} aa' & a + a' & 1 \\ bb' & b + b' & 1 \\ cc' & c + c' & 1 \end{vmatrix}$$

jestto *związek aby trzy pary* (12) *były w inwolucyi.*

Gdy ten związek jest sprawdzony, *punkta podwójne inwolucyi* będą wyznaczone za pomocą równań (14) i (13).

187. Przypuśćmy że $M = 0$, $M' = 0$ są równaniami dwóch punktów odpowiednych C i C′, na przykład; będzie potrzeba zrobić wtedy :

$$c = 0, \qquad c' = \infty;$$

a związek inwolucyi stanie się :

$$(16)\qquad aa' = bb' = \text{stałej} = k.$$

Tak że, jeżeli

$$(17)\qquad \begin{cases} L = 0 \\ L' = 0, \end{cases}$$

są równania dwóch punktów odpowiednych, równaniami jakiejkolwiek pary inwolucyi będą :

$$L - aL' = 0, \qquad (M)$$

$$L - \frac{k}{a}L' = 0, \qquad (M')$$

a jest jakąkolwiek stałą dowolną, a k jakąkolwiek liczbą stałą.

188. Przypuśćmy nakoniec że $M = 0$, $M' = 0$ są równaniami dwóch punktów podwójnych inwolucyi, to jest

$$\begin{cases} E : M - \lambda M' = 0 \\ F : M - \lambda' M' = 0, \end{cases}$$

co wymaga żeby było :

$$\lambda = 0, \quad \lambda' = \infty;$$

związki (14) dają wtedy :

(19) $$a + a' = 0.$$

Więc jeżeli

(20) $$\begin{cases} E = 0 \\ F = 0, \end{cases}$$

są równania dwóch punktów podwójnych, równaniami jakiejkolwiek pary inwolucyi będą :

$$\begin{cases} E - aF = 0, & (M) \\ E + aF = 0; & (M') \end{cases}$$

a jest jakąkolwiek stałą dowolną.

Dwa punkta M i M' są sprzężone względem punktów E i F; otrzyma się, oznaczając przez I środek odcinka EF n^{er} [168] (6 *ter*)

(22) $$\overline{IE}^2 = IM.IM'.$$

§ III. — FIGURY JEDNOKREŚLNE.

I° Jednokreślność.

189. Jeżeli się przekształca jedną figurę na inną tak, że jakiemukolwiek punktowi $\mu(\xi, \eta)$ 1^{szej} odpowiada jeden tylko punkt $m(x, y)$ drugiej; i odwrotnie jakiemukolwiek punktowi m 2^{giej} figury odpowiada jeden tylko punkt μ 1^{szej}; *wykona się przekształcenie koniczne.*

Jakiemukolwiek punktowi $\mu(\xi, \eta)$ 1^{szej} figury musi odpowiadać jeden tylko punkt $m\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ 2^{giej} figury i odwrotnie; (ξ, η, są spółrzędne kartezyańskie punktu μ; x, y, z, są spółrzędne jednorodne punktu m); więc ξ i η muszą być funkcyami wymiernemi $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, i kształtu

(1) $$\xi = \frac{Ax + By + Cz}{A_2x + B_2y + C_2z}, \qquad \xi = \frac{A_1x + B_1y + C_1z}{A'_2x + B'_2y + C'_2z};$$

ponieważ wartości $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ musi odpowiadać wartość (ξ, η), i odwrotnie.

W tym przypadku, jakiejkolwiek prostej danej w 1^{ym} układzie

(2) $$M\xi + N\eta + P = 0,$$

odpowiada, w drugim układzie, koniczna

(2 *bis*)

$$M(Ax+By+Cz)(A'_2x+B'_2y+C'_2z)+N(A_1x+B_1y+C_1z)(A_2x+B_2y+C_2z)+P(A_2x+B_2y+C_2z)(A'_2x+B'_2y+C'_2z)=0;$$

ztąd nazwisko *przekształcenia konicznego*.

190. Figura jest przekształcona *jednokreślnie* na inną, kiedy jakiemukolwiek punktowi 1szej odpowiada punkt jedyny drugiej, i odwrotnie; nadto, kiedy jakiejkolwiek prostej 1go układu odpowiada prosta jedyna w drugim, i odwrotnie.

Potrzeba więc, aby drugi warunek był spełnionym, żeby prosta (2) przekształcała się zawsze na jakąkolwiek prostą; to jest aby równanie (2 *bis*) sprowadzało się stale jakiemikolwiek bądź wreszcie byłyby M, N, P do równania 1go stopnia; co nie jest oczywiście możebnem, chyba że się przypuści

$$A'_2 = A_2, \qquad B'_2 = B_2, \qquad C'_2 = C_2.$$

Przeto *wzorami ogólnymi przekształcenia jednokreślnego*, będą:

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{Ax + By + Cz}{A_2x + B_2y + C_2z}; \\ \eta = \dfrac{A_1x + B_1y + C_1z}{A_2x + B_2y + C_2z}; \end{cases}$$

punktami odpowiednymi są $\mu(\xi, \eta)$ i $m\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right)$.

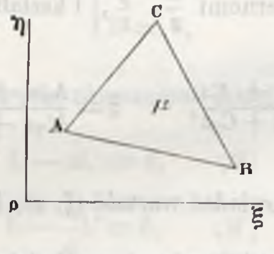
Otóż, jeżeli się odniesie do wzorów (7) nru [92], będzie można tłómaczyć wzory poprzedzające (3) z podwójnego punktu zapatrywania się na takowe.

« Io ξ i η będąc *spółrzędnemi kartezyańskiemi* jakiegokolwiek punktu μ względem osi prostokątnych $O\xi$, $O\eta$ możemy uważać x, y i z za *spółrzędne trzylinijne* tegoż samego punktu μ, który » będzie wtedy odniesionym do trójkąta, takiego jak ABC.

» W tym przypadku, spółrzędne x, y, z, muszą sprawdzać związek kształtu:

$$mx + ny + pz = \text{stałej}.$$

Kształt krzywej nie jest zmienionym; lecz będzie można korzystać z *ośmiu* stałych, które wzory



przekształcenia (3) wprowadziły w równanie krzywej, aby dać temu równaniu kształt najprostszy możebny.

« II° ξ i η będąc *spółrzędnemi kartezyańskiemi* jakiegokolwiek punktu μ względem osi $O\xi$ i $O\eta$,
» możemy uważać $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ za spółrzędne kartezyańskie jednorodne innego punktu m, odniesionego
» do tych samych osi i odpowiedniego punktowi μ. Przez to podstawienie, krzywa Σ

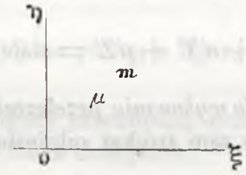
$$(\Sigma) \qquad F(\xi, \eta) = 0$$

» znajduje się przekształconą na inną krzywą (S)

$$(S) \qquad F\left(\frac{Ax + By + Cz}{A_2x + B_2y + C_2z}, \quad \frac{A_1x + B_1y + C_1z}{A_2x + B_2y + C_2z}\right) = 0;$$

» krzywa (S) jest *przekształconą jednokreślną* krzywej Σ. »

W tym przypadku, spółrzędne $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, nie są podległe żadnemu związkowi.



Więc

Dojdzie się do dania jakiemukolwiek równaniu kształt najprostszy możebny, bądź to, odnosząc je do trójkąta stałego, to jest robiąc użytek ze spółrzędnych trzyliniinych; bądź to przekształcając jednokreślnie krzywą którą ono przedstawia; wzory przekształcenia są te same w obu przypadkach.

W 1$^{\text{ym}}$ przypadku, kształt krzywej nie jest zmienionym, prosta w nieskończoności pozostaje prostą w nieskończoności; tylko, równanie prostej w nieskończoności nie ma więcej tegoż samego kształtu. Spółrzędne x, y, z, muszą sprawdzać powyżej wskazany związek linijny.

W drugim przypadku, kształt krzywej jest nieco zmieniony; punkta w nieskończoności, w 1$^{\text{ym}}$ układzie, znajdują się, w 2$^{\text{gim}}$ układzie, na prostej w odległości skończonej

$$(\mathrm{I}) \qquad A_2x + B_2y + C_2z = 0,$$

jak to widzimy na wzorach (3); i odwrotnie, punktom w nieskończoności 2$^{\text{giej}}$ figury, odpowiadają punkta na prostej w odległości skończonej

$$(\mathrm{J}') \qquad a_2\xi + b_2\eta + c_2 = 0;$$

to ostatnie równanie otrzyma się porównywając z zerem mianownik wspólny wartości $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ dostarczonych przez równania (3).

191. Uważmy wzory ogólne n$^{\text{ru}}$ [101]:

$$(4) \qquad \begin{cases} X = aX' + bY' + cZ', \\ Y = a'X' + b'Y' + c'Z', \\ Z = a''X' + b''Y' + c''Z', \end{cases}$$

w których X, Y, Z, X', Y', Z', oznaczają spółrzędne trzylinijne.

Będziemy mogli także tłómaczyć te wzory zapatrując się na nie z podwójnego punktu widzenia.

I° *Można uważać wzory* (4) *jako służące do przejścia z jakiegokolwiek trójkąta odniesienia* ABC *do jakiegokolwiek innego trójkąta odniesienia* A'B'C'.

W tym przypadku, figura nie jest zmienioną, i prosta w nieskończoności pozostaje prostą w nieskończoności. Spółrzędne X, Y, Z, powinny sprawdzać związek kształtu :

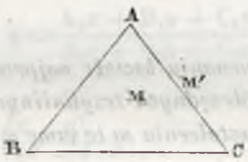
$$mX + nY + pZ = \text{stałej};$$

a spółrzędne X', Y', Z', muszą sprawdzać inny związek tegoż samego kształtu; lecz którego spółczynniki nie są te same

$$m'X' + n'Y' + p'Z' = \text{stałej}.$$

II° *Można uważać wzory* (4) *jako służące do wykonania przekształcenia jednokreślnego.*

W tym przypadku, zachowuje się tenże sam trójkąt odniesienia ABC; jakiemukolwiek punktowi



M(X, Y, Z) odpowiada jakikolwiek inny punkt M'(X', Y', Z'); spółrzędne X, Y, Z; X', Y', Z', tych dwóch punktów powinny sprawdzać jeden związek, taki jak

$$mX + nY + pZ = \text{stałej} = k,$$

$$mX' + nY' + pZ' = \text{stałej} = k.$$

Figura pierwotna jest zmienioną; prostej w nieskończoności 1^go^ układu odpowiada, w drugim układzie, prosta I w odległości skończonej; prostej zaś w nieskończoności drugiego układu odpowiada, w pierwszym, prosta J' w odległości skończonej.

Uwaga. Należy zauważyć że wzory (4) nie są najogólniejszymi wzorami przekształcenia jednokreślnego, odpowiadają one przypadkowi w którym jeden punkt podwójny jest w odległości skończonej.

Wzorami ogólnymi przekształcenia jednokreślnego, w spółrzędnych trzylinijnych są :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{aX' + bY' + cZ'}{AX' + BY' + CZ'}, \\ Y &= \frac{a_1X' + b_1Y' + c_1Z'}{AX' + BY' + CZ'}, \\ Z &= \frac{a_2X' + b_2Y' + c_2Z'}{AX' + BY' + CZ'}; \end{aligned} \right.$$

$X, Y, Z; X', Y', Z'$, są spółrzędne dwóch punktów odpowiednych M, M', odniesionych do jednego trójkąta. Te spółrzędne powinny sprawdzać wszystkie tenże sam związek linijny, to jest że się powinno mieć jednocześnie :

$$lX + mY + nZ = k,$$

$$lX' + mY' + nZ' = k.$$

Równanie przekształcone krzywej przedstawi się pod tąż samą formą, czy się użyje wzorów (4) czy też (5); nie będzie ono jednak przedstawiać tej samej krzywej w obu razach, gdyż punktowi (X, Y, Z) odpowiada punkt (X', Y', Z') różny według tego jak się go wyznaczy za pomocą związków (4), albo za pomocą związków (5).

192. Wróćmy do przekształcenia jednokreślnego.

Lubo nie zamierzamy sobie robić użytku z tego przekształcenia, przytoczymy, bez ich dowodzenia, własności główne następujące :

« Kiedy trzy punkta są w linii prostej na jednej z figur, trzy punkta odpowiedne innej figury są także w linii prostej.

» Kiedy trzy proste jakiejkolwiek figury przechodzą przez jeden punkt, trzy proste odpowiedne innej figury przechodzą również przez tenże sam punkt.

» Stosunek nieharmoniczny czterech punktów w linii prostej na jednej z figur jest równy stosunkowi nieharmonicznemu czterech punktów odpowiednych.

» Stosunek nieharmoniczny pęku na jednej z figur jest równy stosunkowi nieharmonicznemu czterech prostych odpowiednych.

» Czterem punktom (albo czterem prostym) wziętym dowolnie na jednej z figur, można zrobić odpowiednemi cztery punkta (albo cztery proste) wzięte dowolnie na drugiej figurze.

» Znajduje się, na płaszczyznie, *trzy punkta podwójne*, to jest trzy punkta które są same przez się ich odpowiednymi w przekształceniu jednokreślnem; znajduje się, *trzy proste podwójne*, to jest proste, tworzące swe odpowiedne same przez się.

Uwaga. Przekształcenie jednokreślne było w roku 1830 przedstawionem po raz pierwszy Akademii Bruxelskiej przez P. Chasles, w memoryale pod tytułem *Dwie zasady ogólne nauki* : Dwójność i Jednokreślność.

II° Jednokładność.

193. Kiedy, w przekształceniu jednokreślnem, proste łączące *dwa punkta odpowiedne*, takie jak μ i m, przechodzą przez *punkt stały*, przekształcenie jest nazwane *jednokładnem;* w tym razie *proste odpowiedne* przecinają się na *prostej stałej.*

Punkt stały O, przez który przechodzą proste łączące dwa punkta odpowiedne jest nazwany *środkiem jednokładności*; prosta stała na której się przecinają proste odpowiedne jest nazwaną *osią jednokładności.*

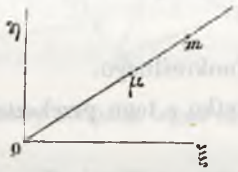
Weźmy wzory (3) :

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{Ax + By + Cz}{A_2x + B_2y + C_2z}, \\ \eta = \dfrac{A_1x + B_1y + C_1z}{A_2x + B_2y + C_2z}, \end{cases}$$

i wyraźmy ze proste łączące dwa jakiekolwiek punkta odpowiednie μ i m przechodzą przez punkt stały.

Jeżeli się wybierze ten punkt za początek spółrzędnych, znajduje się, bez trudności, że *wzorami przekształcenia jednokładnego* są, we spółrzędnych kartezyańskich,

$$(5)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{Ax}{A_2x + B_2y + C_2z}, \\ \eta = \dfrac{Ay}{A_2x + B_2y + C_2z}. \end{cases}$$



Sprawdza się wtedy że proste odpowiednie :

$$M\xi + N\eta + P = 0$$

$$A(M\xi + N\eta) + P(A_2\xi + B_2\eta + C_2) = 0$$

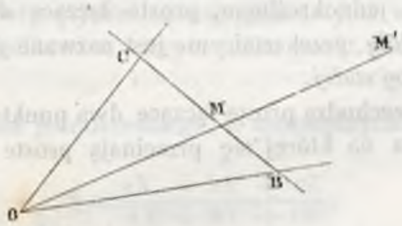
przecinają się na prostej stałej, albo na osi jednokładności,

$$(6)\quad A_2\xi + B_2\eta + (C_2 - A = 0.$$

194. Wzory przekształcenia jednokładnego przedstawią się, we spółrzędnych trzylinijnych, pod kształtem bardzo prostym, jeżeli się weźmie *środek jednokładności* O za jeden z wierzchołków trójkąta odniesienia, a *oś jednokładności* za bok przeciwny BC.

Wyrażając że wzory ogólne (5) n^{ru} [191] zadość uczynią temu podwójnemu warunkowi, dojdziemy do wyrażeń następujących :

$$(7)\quad \frac{X}{aX'} = \frac{Y}{bY'} = \frac{Z}{cZ'} = \frac{1}{AX' + BY' + CZ'};$$



X, Y, Z; X', Y', Z', są spółrzędnemi trzylinijnemi punktów odpowiednych M i M'; powinny one sprawdzać jeden związek linijny, taki jak :

$$l(X' + mY' + nZ' = k.$$

195. Wzory (7) dają nam bezpośrednio dowodzenie podań następujących :

1° W przekształceniu jednokładnem jest niezliczone mnóstwo punktów podwójnych, to jest punktów które są same przez się ich odpowiednymi; tymi punktami podwójnymi są : środek jednokładności, i wszystkie punkta osi jednokładności.

2° Jest niezliczone mnóstwo prostych podwójnych, to jest prostych tworzących swe odpowiednie same przez się; są to proste przechodzące przez środek jednokładności.

3° Stosunki odległości dwóch punktów odpowiednych od osi jednokładności i od prostej podwójnej są proporcyonalne.

$$\frac{X}{X'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{Y}{Y'}.$$

196. Jeżeli dwie figury S i S_1 są jedna perspektywą drugiej, i gdy się je odbije na płaszczyźnie tych figur, otrzyma się wtedy dwie figury ustawione jednokładnie. Odwrotnie, dwie figury jednokładne mogą być perspektywami jedna drugiej.

Ta własność dowodzi się łatwo za pomocą geometryi.

Jednokładność była wynalezioną przez P. Poncelet i użytą w jego *Traktacie własności rzutowych albo opisowych figur* (1822).

Przytoczymy nakoniec to ważne twierdzenie :

Przekształcenie jednokreślne najogólniejsze może zawsze być sprowadzonem do przekształcenia jednokładnego; albo innemi słowy, dwie figury płaskie jednokreślne mogą być tak ustawione aby były jednokładne.

Dowiedziemy że wprawiając w ruch, na płaszczyźnie, 2ga figurę (S), a zostawiając stałą 1szą (Σ), może się sprowadzić wzory ogólne (3) nru [190]

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{Ax + By + C}{A_2x + B_2y + C_2}, \\[2ex] \eta = \dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}, \end{cases}$$

przekształcenia jednokreślnego aby miały kształt szczególny (5), nru [193], oznaczający przekształcenie jednokładne.

Prostej w nieskończoności 1szej figury odpowiada w 2giej figurze, prosta w odległości skończonej

$$(I) \qquad \underbrace{(A_1B_2 - A_2B_1)}_{A'}\xi + \underbrace{(A_2B - AB_2)}_{B'}\eta + \underbrace{(AB_1 - A_1B)}_{C'} = 0,$$

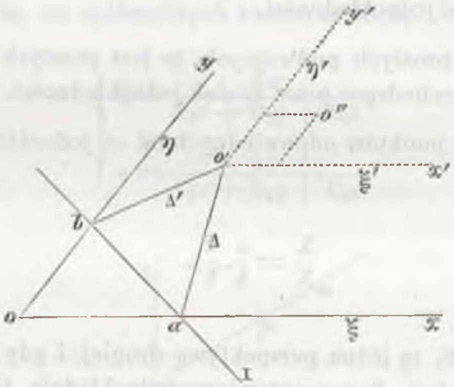
otrzymuje się ją rozwiązując równanie (3) względem x i y, i porównywając z zerem mianownik.

Prostej w nieskończoności 1szej figury odpowiada, w 2giej figurze, prosta w odległości skończonej

$$(J') \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Osi ξ 1szej figury, $\eta = 0$, odpowiada, w 2giej prosta

$$(\Delta) \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0;$$



zaś osi η 1szej figury, $\xi = 0$, odpowiada w 2giej prosta

$$(\Delta_1) \qquad Ax + By + C = 0.$$

Prosta I przecina Ox i Oy w a i b; przez a prowadźmy równoległą do prostej Δ, i uważmy tę prostą jako należącą do 1szej figury; podobnież, poprowadźmy przez b równoległą do prostej Δ_1, i uważmy tę prostą jako należącą do 1szej figury; równaniami względnemi tych dwóch prostych będą:

$$(O') \qquad \begin{cases} A_1\xi + B_1\eta + \dfrac{C'}{A'} A_1 = 0, \\[2ex] A\xi + B\eta + \dfrac{C'}{B'} B = 0. \end{cases}$$

Weźmy za początek spółrzędnych punkt spotkania się O' tych dwóch prostych, co wymaga aby A_1 i B były zerami.

Wzory przekształcenia staną się wtedy:

$$(3\ bis) \qquad \begin{cases} \xi' = \dfrac{Ax' + C}{A_2x' + B_2y' + C_2}, \\[2ex] \eta' = \dfrac{B_1y' + C_1}{A_2x' + B_2y' + C_2}; \end{cases}$$

a równaniami prostych (I) i (J') będą:

$$(I) \qquad \frac{A_2}{A}\xi + \frac{B_2}{B_1}\eta' - 1 = 0,$$

$$(J') \qquad A_2x' + B_2y' + C_2 = 0.$$

Proste drugiej figury odpowiedne nowym osiom $O'\xi'$, $O'\eta'$ będą:

$$Ax' + C = 0, \qquad B_1y' + C_1 = 0;$$

one się przetną w pewnym punkcie O″. Przenieśmy 2gą figurę równolegle do jej położenia pierwotnego tak aby punkt O″ przystał do początku O; co wymaga żeby było:

$$C = 0, \qquad C_1 = 0;$$

wzory przekształcenia stają się wtedy:

$$(3\ ter)\quad \begin{cases} \xi' = \dfrac{Ax'}{A_2x' + B_2y' + C_2}, \\ \eta' = \dfrac{B_1y'}{A_2x' + B_2y' + C_2}. \end{cases}$$

Nakoniec, obróćmy 2gą figurę na swej płaszczyznie około punktu O″ (który teraz przystaje do O′) aż prosta (J′ stanie się równoległą do prostej (I); otrzyma się wtedy $A = B_1$; i wzory przekształcenia przyjmą formę ostateczną:

$$\xi' = \frac{Ax'}{A_2x' + B_2y' + C_2},$$

$$\eta' = \frac{Ay'}{A_2x' + B_2y' + C_2};$$

są to dokładnie wzory przekształcenia jednokładnego.

§ IV. — FIGURY ODPOWIEDNICZE.

1° Przekształcenie odpowiednicze.

197. *Jeżeli się przekształca jedną figurę na inną tak że jakiemukolwiek punktowi 1szej odpowiada jedyna prosta drugiej; i że odwrotnie, dla jakiejkolwiek prostej drugiej figury odpowiada w pierwsze punkt, i jeden tylko; dwie figury tym sposobem otrzymane są* ODPOWIEDNICZE.

Odniesiemy zaraz, dla uzyskania więcej symetryi, dwie figury do jednego trójkąta odniesienia.

Niech będą x, y, z, spółrzędne trzylinijne jakiegokolwiek punktu M pierwszej figury; a u, v, w, spółrzędne trzylinijne prostej D odpowiednej w 2giej figurze.

Podług określenia, powinno się mieć między temi spółrzędnemi związki następujące:

$$(1)\qquad \frac{x}{au + bv + cw} = \frac{y}{a_1u + b_1v + c_1w} = \frac{z}{a_2u + b_2v + c_2w};$$

które rozwiązane względem u, v, w, dadzą, na przykład:

$$(2)\qquad \frac{u}{a'x + a'_1y + a'_2z} = \frac{v}{b'x + b'_1y + b'_2z} = \frac{w}{c'x + c'_1y + c'_2z};$$

a, a_1... a′, a'_1... są stałemi; u, v, w, są spółrzędne trzylinijne prostej D 2giej figury odpowiedne punktowi $M(x, y, z)$ 1szej figury.

198. *Jeżeli punkt opisuje prostą stałą, proste odpowiedne przechodzą przez punkt stały.*

Niech będą u_0, v_0, w_0 spółrzędne prostej D_0 1szej figury; jego równaniem będzie :

$$u_0x + v_0y + w_0z = 0,$$

x, y, z są jakimkolwiek punktem tej prostej. Zastępując x, y, z, przez wartości (1), otrzymuje się :

$$u(au_0 + a_1v_0 + a_2w_0) + v(bu_0 + b_1v_0 + b_2w_0) + w(cu_0 + c_1v_0 + c_2w_0) = 0.$$

To równanie przedstawia punkt, przez który przechodzą wszystkie proste (u, v, w) 2giej figury odpowiedne jakiemukolwiek punktowi (x, y, z), leżącemu na prostej (u_0, v_0, w_0); spółrzędnemi (x_1, y_1, z_1), tego punktu, będą :

$$(3)\qquad \frac{x_1}{au_0 + a_1v_0 + a_2w_0} = \frac{y_1}{bu_0 + b_1v_0 + b_2w_0} = \frac{z_1}{cu_0 + c_1v_0 + c_2w_0};$$

punkt (x_1, y_1, z_1) jest punktem odpowiednym, w 2giej figurze, prostej D_0 1szej.

Jeżeli prosta przechodzi przez punkt stały, punkta odpowiedne opisują prostą stałą.

Niech będą x_1, y_1, z_1, spółrzędne punktu M_1 2giej figury; jego równaniem będzie :

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0,$$

u, v, w, są spółrzędne jakiejkolwiek prostej przechodzącej przez ten punkt.

Zastępując u, v, w, przez wartości (2), otrzymuje się :

$$x(a'x_1 + b'y_1 + c'z_1) + y(a'_1x_1 + b'_1y_1 + c'_1z_1) + z(a'_2x_1 + b'_2y_1 + c'_2z_1) = 0.$$

To równanie przedstawia prostą na której znajdują się wszystkie punkta (x, y, z) 1szej figury, odpowiedne jakiejkolwiek prostej (u, v, w) przechodzącej przez punkt (x_1, y_1, z_1). Spółrzędnemi u_0, v_0, w_0, tej prostej będą :

$$(4)\qquad \frac{u_0}{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1} = \frac{v_0}{a'_1x_1 + b'_1y_1 + c'_1z_1} = \frac{w_0}{a'_2x_1 + b'_2y_1 + c'_2z_1};$$

prosta (u_0, v_0, w_0) jest prostą odpowiedną w 1szej figurze, punktowi (x_1, y_1, z_1) 2giej.

199. I tak :

1° Punktowi (x_0, y_0, z_0) albo M_0 1szej figury, odpowiada w drugiej, prosta $D_1(u_1, v_1, w_1)$ określona przez związki (2),

$$(2\ bis)\qquad \frac{u_1}{a'x_0 + a'_1y_0 + a'_2z_0} = \frac{v_1}{b'x_0 + b'_1y_0 + b'_2z_0} = \frac{w_1}{c'x_0 + c'_1y_0 + c'_2z_0}.$$

2° Prostej $D_0(u_0, v_0, w_0)$ 1szej figury odpowiada w drugiej punkt $M_1(x_1, y_1, z_1)$, określony przez związki (3), albo :

$$(3\ bis)\qquad \frac{x_1}{au_0 + a_1v_0 + a_2w_0} = \frac{y_1}{bu_0 + b_1v_0 + b_2w_0} = \frac{z_1}{cu_0 + c_1v_0 + c_2w_0}$$

3° Punktowi $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 2giej figury odpowiada w pierwszej prosta $D_0(u_0, v_0, w_0)$, określona przez związki (4), albo :

$$(4\ bis) \qquad \frac{u_0}{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1} = \frac{v_0}{a'_1x_1 + b'_1y_1 + c'_1z_1} = \frac{w_0}{a'_2x_1 + b'_2y_1 + c'_2z_1}.$$

4° Prostej $D_1(u_1, v_1, w_1)$ 2giej figury odpowiada w pierwszej punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$, określony przez związki (1), albo :

$$(1\ bis) \qquad \frac{x_0}{au_1 + bv_1 + cw_1} = \frac{y_0}{a_1u_1 + b_1v_1 + c_1w_1} = \frac{z_0}{a_2u_1 + b_2v_1 + c_2w_1}.$$

200. Przytoczymy, bez ich dowodzenia, podania następujące :

« Czterem prostym, wziętym dowolnie na jednej z figur, można zrobić odpowiednymi cztery punkta wzięte dowolnie na drugiej figurze.

» Stosunek nieharmoniczny czterech punktów w linii prostej na jednej z figur równa się stosunkowi nieharmonicznemu czterech prostych odpowiednych drugiej figury.

» Miejscem punktów M_0 1szej figury, takich że proste odpowiedne D_1 2giej figury przechodzą przez te same punkta, jest koniczna S; a proste D_1 obwijają same przez się koniczną S_1.

» Miejscem punktów M_1 2giej figury, takich że proste odpowiedne D_0 1szej figury przechodzą przez te same punkta, jest koniczna poprzednia S; a proste D_0 obwijają także koniczną S_1.

» Dwie koniczne S i S_1, są odpowiednicze jedna drugiej; nazwano je *konicznemi podwójnemi* przekształcenia odpowiedniczego. Te dwie koniczne są podwójnie styczne.

» Wszystkie te podania dowodzą się z największą łatwością, za pomocą wzorów nru [199].

II° Przekształcenie przez biegunowe wzajemne.

201 W przekształceniu odpowiedniczem ogólnem, jakiemukolwiek punktowi, uważanemu za należący do 1szej albo do 2giej figury, odpowiadają proste różne.

Niech będzie punkt (x_0, y_0, z_0) należący do 1szej figury; spółrzędne prostej odpowiednej w 2giej figurze, będą wyznaczone przez równania (2 *bis*); równaniem tej prostej będzie :

$$D_1 \qquad x(a'x_0 + a'_1y_0 + a_2z_0) + y(b'x_0 + b'_1y_0 + b'_2z_0) + z(c'x_0 + c'_1y_0 + c'_2z_0) = 0.$$

Temuż samemu punktowi (x_0, y_0, z_0) uważanemu za należący do 2giej figury, odpowiadać będzie w 1szej figurze prosta D_0 której spółrzędne będą wyznaczone przez związki (4 *bis*); równaniem tej prostej będzie :

$$(D_0) \qquad x(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0) + y(a'_1x_0 + b'_1y_0 + c'_1z_0) + z(a'_2x_0 + b'_2y_0 + c'_2z_0) = 0.$$

Otóż, proste D_1 i D_0 są widocznie różne, jeżeli punkt (x_0, y_0, z_0) pozostaje dowolnym.

Jeżeli przekształcenie odpowiednicze jest takiem, że dla jakiegokolwiek punktu uważanego za należący do 1szej albo do 2giej figury, odpowiada zawsze taż sama prosta, przekształcenie odpowiednicze bierze nazwisko przekształcenia przez BIEGUNOWE WZAJEMNE.

Zobaczymy poniżej przyczynę tego nazwania.

Szukajmy warunków aby dwie proste D_1 i D_0 przystały do siebie, jakimkolwiek byłby punkt (x_0, y_0, z_0) uważany. Powinno się mieć:

$$\frac{a'x_0 + a'_1 y_0 + a'_2 z_0}{a'x_0 + b'y_0 + c'z_0} = \frac{b'x_0 + b'_1 y_0 + b'_2 z_0}{a'_1 x_0 + b'_1 y_0 + c'_1 z_0} = \frac{c'x_0 + c'_1 y_0 + c'_2 z_0}{a'_2 x_0 + b'_2 y_0 + c'_2 z_0},$$

jakiemikolwiek byłyby x_0, y_0, z_0.

Otóż, jeżeli się pomnoży względnie przez x_0, y_0, z_0 dwa wyrazy każdego z tych stosunków, i gdy się doda liczniki i mianowniki, otrzymuje się jedność. Te stosunki muszą być stałe i równe jedności, z tego wypada:

$$\frac{a'_1}{b'} = \frac{a'_2}{c'} = \frac{b'_2}{c'_1} = 1.$$

Równanie prostej D_0 albo D_1 staje się wtedy:

$$x(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0) + y(b'x_0 + b'_1 y_0 + c'_1 z_0) + z(c'x_0 + c'_1 y_0 + c'_2 z_0) = 0.$$

Zobaczymy poniżej że jestto biegunowa punktu (x_0, y_0, z_0) względem konicznej

$$a'x^2 + b'_1 y^2 + c'_2 z^2 + 2c'_1 yz + 2c'xz + 2b'xy = 0.$$

202. Zakończymy wysłowieniem podania następującego:

Można zawsze, nie zmieniając wcale formy przekształconej odpowiedniczej ogólnej, sprowadzić ją do takiego położenia, aby mogła być przekształconą bezpośrednio przez biegunowe wzajemne figury pierwotnej.

Można będzie dowieść tego twierdzenia przez metodę wielce podobną do tej która była już rozwiniętą w nrze [196].

Uwaga. P. Chasles rozwinął ważne spostrzeżenia o użytku metod któreśmy poprzednio wyłożyli (*Geometrya Wyższa*, od strony 432 do 456); nie możemy lepiej zrobić jak tylko do przeczytania tego dzieła odesłać naszych gorliwie się zajmujących postępem analizy, czytelników.

Nie zrobimy użytku z tych metod przekształcenia; jest przecież rzeczą ważną dokładne ich poznanie, albowiem Geometrya i Analiza nie powinny pozostać dla siebie nawzajem obcemi. Wreszcie własności harmoniczne, albo jednokładne, albo wzajemne, są to własności istotnie charakterystyczne; i Analiza powinna się umieć zapewnić o ich rzeczywistem istnieniu, w miarę jak one się zdarzą.

ĆWICZENIA.

203. 1° Jeśli trzy boki trójkąta zmiennego ABC, obracają się około trzech punktów stałych P, P′, P″, leżących w linii prostej, a dwa wierzchołki A i B posuwają się każdy na jednej z dwóch linii prostych także stałych; wtedy trzeci wierzchołek (C) opisuje linią prostą.

2° *Albo ogólnie*, jeśli boki wielokąta obracają się każdy około jednego z punktów leżących na linii prostej, a wszystkie wierzchołki, *oprócz* jednego, posuwają się na liniach prostych także stałych; wtedy ostatni wierzchołek opisuje linią prostą; i tak samo każdy punkt spotkania dwóch boków nieprzyległych opisuje linią prostą.

3° Jeśli trzy wierzchołki trójkąta zmiennego ABC posuwają się każdy po jednej ze trzech linii prostych stałych OA, OB, OC, spotykających się w jednym punkcie, a zaś dwa boki obracają się każdy około jednego z dwóch punktów stałych; wtedy trzeci bok przechodzi przez punkt stały w linii prostej z dwoma pierwszymi punktami.

4° *Albo ogólnie.* Jeśli wierzchołki wielokąta posuwają się każdy po jednej z linii prostych stałych, spotykających się w jednym punkcie, a wszystkie boki, *oprócz* jednego, obracają się każdy około jednego z punktów stałych na linii prostej; wtedy ostatni bok przechodzi przez punkt stały leżący na tej prostej, i to się stosuje do każdej przekątnej.

5° Dwa wierzchołki A i B trójkąta zmiennego ABC poruszają się na dwóch prostych stałych OA, OB; jego boki przechodzą przez trzy punkta stałe, P, P′, P″; dwa bieguny P′ i P″ około których obracają się AC i BC są w linii prostej z punktem O; 3ci wierzchołek C, opisuje linią prostą.

6° Wierzchołki trójkąta zmiennego ABC opisują trzy proste stałe dowolnie wzięte; dwa jego boki AB i AC przechodzą przez dwa punkta stałe, w linii prostej z punktem spotkania linii na których się poruszają wierzchołki B i C; trzeci bok BC przechodzi przez punkt stały.

N. B. Twierdzenia 5°, 1° i 2° są dosłownie przytoczone ze *Zbiorów matematycznych* Pappusa, który żył w Alexandryi, na końcu IV wieku naszej ery.

7° Gdy linia prosta jest taką, że summa algebraiczna prostopadłych spuszczonych na tę prostą z n punktów stałych i względnie pomnożonych przez liczby stałe jest zerem, ta prosta przechodzi przez punkt stały; tym punktem jest środek odległości proporcyonalnych n punktów danych.

8° Jeśli dwa trójkąty są takie że prostopadłe spuszczone z wierzchołków pierwszego na boki drugiego spotykają się w jednym punkcie, odwrotnie prostopadłe spuszczone z wierzchołków drugiego na boki pierwszego przechodzą także przez tenże sam punkt.

9° Trójkąt zmienny ABC pozostaje podobnym sobie samemu; wierzchołek A pozostaje stałym, drugi B opisuje prostą stałą; trzeci wierzchołek opisze także prostą.

10° Mając dane pięć linii prostych, bierze się z nich cztery tworzące czworobok zupełny, w którym środki trzech przekątnych są w linii prostej; pięć prostych tym sposobem otrzymanych przechodzą przez tenże sam punkt.

11° Cztery linie proste na jednej płaszczyznie, brane po trzy, tworzą cztery trójkąty, w każdym z nich jest punkt spotkania trzech wysokości; dowieść że te cztery punkta są w linii prostej.

12° Mając dane trzy punkta A, B, C i dwie proste X i Y; na BB jako przekątnej, wykreśla się równoległobok którego boki są równoległe do X i Y; działa się podobnież z BC i CA; drugie przekątne trzech równoległoboków tym sposobem otrzymanych przechodzą przez tenże sam punkt.

13° Wszelka poprzeczna poprowadzona na płaszczyznie czworoboku spotyka jego cztery boki i jego dwie przekątne w sześciu punktach będących w inwolucyi.

14° Sześć linii prostych, poprowadzonych z jednego punktu do czterech wierzchołków i do punktów spotkania boków przeciwległych czworoboku, tworzą pęk w inwolucyi.

15° Biorąc dowolnie punkt P na płaszczyznie czworoboku, wykreśla się biegunowe tego punktu względne trzech kątów z których jeden jest utworzony przez dwa boki przeciwległe czworoboku; drugi przez dwa inne boki przeciwległe, a trzeci przez dwie przekątne; te trzy biegunowe, przechodzą przez tenże sam punkt.

16° Biorąc dowolnie prostą D na płaszczyznie czworoboku, wyznacza się *punkta biegunowe* tej prostej względem trzech układów dwóch punktów, 1szy dostarczony przez końce jednej z przekątnych,

2^{gi} przez końce drugiej przekątnej, a 3^{ci} przez punkta spotkania boków przeciwległych; te trzy punkta biegunowe są w linii prostej.

17° Gdy dwa boki przeciwległe czworoboku są prostokątne, zarówno jak dwie przekątne, dwa inne boki są także prostokątne.

18° Mając dane trójkąt i poprzeczną, jeżeli z jednego punktu poprowadzi się linie proste do wierzchołków trójkąta i do punktów w których poprzeczna spotyka boki przeciwległe, te proste tworzą trzy pary w inwolucyi. Twierdzenie odwrotne jest prawdziwem.

19° Jeżeli z punktu jednego poprowadzi się trzy proste do wierzchołków trójkąta, wszelka poprzeczna musi spotykać te proste i boki trójkąta w sześciu punktach tworzących trzy pary w inwolucyi i odwrotnie.

20° Jeżeli z jakiegokolwiek punktu poprowadzi się promienie do trzech wierzchołków trójkąta, proste poprowadzone przez tenże sam punkt prostopadle do tych promieni, pójdą spotkać boki przeciwległe w trzech punktach leżących w linii prostej.

21° Jeżeli trzy promienie wychodzące z wierzchołków trójkąta idą się odbić w jednym punkcie na linii prostej; promienie odbite spotkają względnie, trzy boki przeciwne w trzech punktach leżących w linii prostej.

22° Kiedy trzy trójkąty, jednokładne dwójkami, mają też samą oś jednokładności, ich trzy środki jednokładności są w linii prostej.

23° Kiedy trzy trójkąty jednokładne mają po dwa brane, tenże sam środek jednokładności, ich trzy osie jednokładności schodzą się w jednym punkcie.

N. B. Wysłowienia podań (13°, 14°, 15°, 17°, 24°.) były wyjęte z *Geometryi Wyższej* P. Chasles.

24° W każdym czworoboku, dwójsieczne czterech kątów tworzą drugi czworobok którego przekątne przechodzą przez punkt spotkania boków przeciwległych.

25° Jeśli, w czworoboku zupełnym, poprowadzono poprzeczną która spotyka jego trzy przekątne i wzięto na każdej z tych przekątnych punkt, który z poprzeczną, dzieli ją harmonicznie, trzy punkta tak wyznaczone będą w linii prostej.

26° Mając dane n punktów $A_1, A_2, \ldots A_n$ w linii prostej, i punkt O na tej prostej, nazywa się *środkiem harmonicznym* tego układu, względem punktu O, punkt C taki że

$$\frac{n}{OC} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \cdots + \frac{1}{AO_n},$$

Jeżeli się złączy jakikolwiek punkt S z punktami O, $A_1, A_2, \ldots A_n$, C; i gdy jakakolwiek poprzeczna spotyka promienie pęków w punktach ω, $a_1, a_2, \ldots a_n$, γ; punkt γ będzie względem ω *środkiem harmonicznym* układu $a_1, a_2, \ldots a_n$.

KSIĘGA DRUGA

KOŁO

ROZDZIAŁ PIERWSZY

KOŁO (SPÓŁRZĘDNE KARTEZYAŃSKIE).

§ I. — RÓWNANIE KOŁA.

I° Równanie koła według jego określenia geometrycznego.

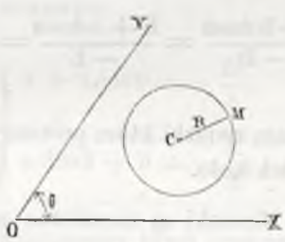
204. *Koło* jest miejscem punktów równie oddalonych od jakiegokolwiek punktu stałego.

Punkt stały jest *środkiem* koła; odległość stała środka od różnych punktów jest *promieniem.*

Jeżeli x i y są spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu M *okręgu koła;* a, b, spółrzędnemi środka a R promieniem; otrzyma się, według określenia i wzoru (2) n^ru [31]

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\theta = R^2; \tag{1}$$

znajdziemy tym sposobem związek między spółrzędnemi x, y jakiegokolwiek punktu koła i stałemi a, b, R i θ; jestto więc równaniem koła.



Kiedy osie Ox i Oy są prostokątne, ma się $\theta = 90°$, i równanie koła przybierze kształt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{2}$$

205. Kiedy środek koła przystaje do początku spółrzędnych, ilości a i b są zerami; równaniem koła jest wtedy

$$(3)\qquad x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\,\theta = R^2$$

w przypadku osi pochyłych; a

$$(4)\qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

w przypadku osi prostokątnych.

Kiedy koło jest styczne do osi rzędnych, ma się

$$R = a\,\mathrm{wst}\,\theta; \quad \text{albo} \quad R = a, \quad \text{jeżeli} \quad \theta = 90^\circ;$$

gdy ono jest stycznem do osi odciętych, ma się

$$R = b\,\mathrm{wst}\,\theta \quad \text{albo} \quad R = b, \quad \text{jeżeli} \quad \theta = 90^\circ.$$

Widzimy że równanie jakiegokolwiek koła jest drugiego stopnia względem zmiennych x i y; będziemy szukać teraz warunków aby równanie drugiego stopnia przedstawiało jakiekolwiek koło.

II° Warunki aby równanie ogólne drugiego stopnia przedstawiało jakiekolwiek koło.

206. Równanie ogólne drugiego stopnia, względem zmiennych x i y, jest kształtu

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Z drugiej strony, równanie (1) n^ru [204] staje się, rozwijając

$$(2)\qquad x^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\,\theta + y^2 - 2(a + b\,\mathrm{dos}\,\theta)x - 2(b + a\,\mathrm{dos}\,\theta)y + a^2 + b^2 + 2ab\,\mathrm{dos}\,\theta - R^2 = 0.$$

Aby równanie (1) przedstawiało jakiekolwiek koło, trzeba aby było identyczne z równaniem (2) t. j. aby spółczynniki tychże samych potęg zmiennych x i y były proporcyonalne; otrzymuje się tym sposobem

$$(3)\qquad \frac{1}{A} = \frac{\mathrm{dos}\,\theta}{B} = \frac{1}{C} = \frac{a + b\,\mathrm{dos}\,\theta}{-D} = \frac{b + a\,\mathrm{dos}\,\theta}{-E} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab\,\mathrm{dos}\,\theta - R^2}{F}.$$

Ten ciąg stosunków równych daje nam związki które powinny istnieć między A, B, C, D, E, F, aby równanie (1) przedstawiało jakiekolwiek koło.

Uważmy naprzód że trzy pierwsze stosunki są niezależne od nieoznaczonych a, b, i R; ma się więc warunki konieczne

$$(4)\qquad \begin{cases} A = C, \\ \dfrac{B}{A} = \mathrm{dos}\,\theta \end{cases}$$

kiedy osie spółrzędnych są pochyłe; albo

$$(5)\qquad A = C, \qquad B = 0,$$

jeżeli osie są prostokątne; to jest że

1° *Kwadraty spółczynników położonych na czele dwóch kwadratów ilości zmiennych muszą sobie być równe i powinny być poprzedzone tymże samym znakiem.*

2° *Stosunek pół spółczynnika wyrazu na* x y *do spółczynnika jednego z kwadratów musi być równym dostawie kąta osi.*

Te dwa warunki są konieczne; one są nadto dostateczne, gdyż jeżeli są spełnione, pozostanie trzy równania które pozwolą wyznaczyć ilości nieznane a, b, R. Temi trzema równaniami są

$$(6)\qquad \begin{cases} a + b\,\mathrm{dos}\theta = -\dfrac{D}{A}, \\ a\,\mathrm{dos}\theta + b = -\dfrac{E}{A}, \\ a^2 + b^2 + 2ab\,\mathrm{dos}\theta = R^2 + \dfrac{F}{A}. \end{cases}$$

Spółrzędne a i b środka koła są *rzeczywiste*, ponieważ są dane przez dwa równania 1^{go} stopnia, są *skończone*, gdyż ich mianownikiem wspólnym jest $(1 - \mathrm{dos}^2\theta)$ albo $\mathrm{wst}^2\theta$, ilość różna od zera.

Co się tyczy promienia R, ponieważ on jest danym przez jego kwadrat, będzie mogło się zdarzyć że R będzie *rzeczywistym, zerem*, albo *urojonym*.

Jeżeli R będzie rzeczywistym, równanie (1) będzie przedstawiało *jakiekolwiek koło rzeczywiste.*

Jeżeli R będzie zerem, równanie (1) będzie przedstawiać, *jakiekolwiek koło sprowadzone do jego środka;* mówi się wtedy że ma się *jakiekolwiek koło nieskończenie małe*, albo *jakiekolwiek koło znikające.*

Jeżeli R będzie urojonym, powiemy że równanie (1) przedstawia *jakiekolwiek koło urojone;* to koło nie może być przedstawionem geometrycznie; jestto pojęcie czysto analityczne, do którego *jesteśmy sprowadzeni, uważając że w tym przypadku, równanie* (1) *zadość uczyni wszelkim warunkom koniecznym aby ono przedstawiało jakiekolwiek koło.*

207. *Wykreślenie koła przedstawionego przez równanie* (1).

Spółrzędne środka są dane przez dwa równania

$$\begin{cases} a + b\,\mathrm{dos}\theta = -\dfrac{D}{A}, \\ a\,\mathrm{dos}\theta + b = -\dfrac{E}{A}; \end{cases}$$

albo, co na jedno wychodzi, środek jest wyznaczony przez przecięcie prostych

$$\begin{cases} x + y\,\mathrm{dos}\theta = -\dfrac{D}{A}, \\ x\,\mathrm{dos}\theta + y = -\dfrac{E}{A}. \end{cases}$$

1sza z tych prostych przechodzi przez punkt $\left(y=0,\ x=-\frac{D}{A}\right)$, (niech będzie M ten punkt), i jest prostopadłą do osi x, ponieważ jej spółczynnikiem kątowym jest $-\frac{1}{\operatorname{dos}\theta}$; 2ga prosta przechodzi przez punkt $\left(x=0,\ y=-\frac{E}{A}\right)$, (niech będzie N ten punkt), i jest prostopadłą do osi y, ponieważ jej spółczynnikiem kątowym jest $-\operatorname{dos}\theta$ (*). Punkt C, przecięcie się dwóch prostych MC i NC, jest więc środkiem koła.

Wykreślmy promień R. Ma się

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\operatorname{dos}\theta - \frac{F}{A};$$

otoż

$$a^2 + b^2 + 2ab\operatorname{dos}\theta = \overline{OC}^2;$$

więc

$$R^2 = \overline{OC}^2 - \frac{F}{A}.$$

Przypuśćmy R rzeczywistym; jeżeli $\left(-\frac{F}{A}\right) > 0$, R będzie przeciwprostokątną trójkąta prosto-

(*) Zdaje się że tę okoliczność można prostszym sposobem rozjaśnić. Jakoż, warunek, aby dwie proste były prostokątnemi jest:

$$(1) \qquad 1 + aa_1 + (a + a_1)\operatorname{dos}\theta = 0$$

w przypadku osi pochyłych.

1° Jeżeli $a = 0$, t. j. jeśli jedna z prostych jest równoległą do osi odciętych

$$a_1 = -\frac{1}{\operatorname{dos}\theta}.$$

2° Jeżeli $a = \infty$, t. j. jeśli jedna z prostych jest równoległą do osi rzędnych. W tym przypadku, podzieliwszy uprzednio wzór (1) przez a, otrzymamy

$$\frac{1}{a} + a_1 + \left(1 + \frac{a_1}{a}\right)\operatorname{dos}\theta = 0;$$

zkąd, przypuszczając $a = \infty$, wypadnie

$$a_1 = -\operatorname{dos}\theta.$$

kątnego którego dwoma bokami są OC i $\sqrt{-\frac{F}{A}}$; jeżeli $\left(-\frac{F}{A}\right) < 0$, R będzie bokiem kąta prostego trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest OC i drugim bokiem $\sqrt{\frac{F}{A}}$.

208. Wniesiemy z tego co poprzedza że wszelkie równanie drugiego stopnia przedstawiające jakiekolwiek koło można sprowadzić do kształtu

$$(7) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2ax - 2by + c = 0,$$

jeżeli osie spółrzędnych są pochyłe; albo do kształtu

$$(8) \qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c' = 0,$$

jeżeli osie są prostokątne.

W tym ostatnim przypadku, jest łatwo uwydatnić środek i promień; w tym celu, uzupełnimy kwadraty na x i na y, t. j. napiszmy równanie pod kształtem

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c;$$

widzimy pod tym kształtem, że a i b są spółrzędnemi środka, i że promień R jest

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}.$$

§ II. — PRZECIĘCIE SIĘ JAKIEJKOLWIEK PROSTEJ Z JAKIEMKOLWIEK KOŁEM; STYCZNA.

I° Przecięcie się jakiegokolwiek koła z jakąkolwiek prostą.

209. Przypuśćmy koło odniesione do swego środka i do dwóch osi prostokątnych, jego równanie będzie wtedy

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

szukajmy punktów przecięcia tego koła z prostą

$$(2) \qquad y = mx + n.$$

Spółrzędne punktów przecięcia są wartościami na x i y sprawdzającemi jednocześnie te dwa równania.

Rugując y znajduje się

$$(3) \qquad x^2(1 + m^2) + 2mnx + n^2 - R^2 = 0;$$

to równanie da odcięte punktów przecięcia. Otóż równanie (3) jest drugiego stopnia; i jakiejkolwiek wartości na x, odpowiada według równania (2) jakakolwiek i jedna tylko wartość dla y; więc *jakakolwiek prosta spotyka jakikolwiek okręg koła w dwóch punktach.*

Ilością od której zależy rzeczywistość pierwiastków równania (3) jest

$$m^2n^2 - (1 + m^2)(n^2 - R^2),$$

albo

$$R^2(1 + m^2) - n^2.$$

1° Jeżeli $\quad R^2(1 + m^2) - n^2 > 0, \quad$ albo $\quad \frac{n^2}{1 + m^2} < R^2,$

to jest odległość środka od prostej jest mniejsza od promienia, znajduje się dwa punkta przecięcia *rzeczywiste*.

2° Jeżeli $\quad R^2(1 + m^2) - n^2 < 0, \quad$ albo $\quad \frac{n^2}{1 + m^2} > R^2,$

to jest odległość środka od prostej jest większa od promienia, dwa punkta przecięcia są *urojone*. Uważmy zaraz że te dwa punkta są *urojone sprzężone*; gdyż, jeżeli wartości na x są *urojone*, one będą *sprzężone*; a ponieważ wartości na y są dane za pomocą jakiegokolwiek równania 1go stopnia o spółczynnikach rzeczywistych, te wartości będą również *sprzężone*.

3° Jeżeli $\quad R^2(1 + m^2) = n^2, \quad$ albo $\quad \frac{n^2}{1 + m^2} = R^2,$

to jest odległość środka od prostej jest równa promieniowi, dwa punkta przecięcia w jeden się schodzą; *prosta jest styczną* (*).

210. Widzimy z tego co poprzedza, że aby znaleść równanie stycznej równoległej do jakiejkolwiek prostej danej

(4) $$y - mx = 0,$$

weźmie się równanie jakiejkolwiek prostej równoległej, to jest :

$$y = mx + n;$$

(*) W geometryi elementarnej linią styczną do okręgu koła, nazywa się linia prosta mająca jeden tylko punkt wspólny z tymże okręgiem; punkt ten nazywa się punktem styczności. W kole linia styczna jest prostopadła do promienia przez punkt styczności przechodzącego, i na tej własności polegają sposoby prowadzenia stycznych do okręgów kół. Kołami albo okręgami kół stycznemi nazywają się dwa okręgi mające jeden tylko punkt wspólny. Okręgi kół bywają styczne do siebie zewnętrznie lub wewnętrznie; w pierwszym razie summa promieni kół stycznych, w drugim zaś razie różnica tychże promieni, jest równa odległości środków. Aby opisanie linii stycznej zastosować, uważając jakąkolwiek linię krzywą, należy wprowadzić w niem pewne modyfikacye. Wystawiwszy sobie sieczną linii krzywej, obracającą się około jednego z punktów przecięcia dopóty, dopóki drugi punkt przecięcia nie zejdzie się z pierwszym, natenczas linia sieczna zamieni się na styczną. Linią więc styczną do linii krzywej jest sieczna, której dwa punkta przecięcia się z tąż krzywą, są nieskończenie blisko siebie położone, czyli schodzą się z sobą. To opisanie stycznych stosuje się do wszystkich linii krzywych, pierwszy zaś opis jest prawdziwym tylko dla linii krzywych stopnia drugiego, nie zaś dla innych krzywych, względem których linia styczna w jednym punkcie, może być sieczną w innych punktach. *Metoda* albo *sposób stycznych* ma za przedmiot prowadzenie stycznych do krzywych, danych za pomocą równań. Zagadnienie to zostało rozwiązane przez DESCARTES'A, FERMAT'A, BARROW'A i innych. Rozwiązanie nawet podane przez ostatniego może być uważane za źródło, z którego rachunek różniczkowy wypłynął.

n jest ilością nieoznaczoną; wyrazi się że dwa punkta przecięcia tej prostej z kołem przystaną do siebie, t. j. że równanie (3) ma dwa pierwiastki równe, ma się tym sposobem równanie warunkowe

$$n^2 = R^2(1 + m^2),$$

dające wartość szukaną na n.

Równaniem stycznej do koła (1), równoległej do prostej danej (4), jest więc

$$(5) \qquad y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}.$$

Widzimy przez to że można zawsze poprowadzić dwie styczne równoległe do jakiejkolwiek prostej danej.

Można także wziąć równanie prostej pod kształtem

$$x\,\mathrm{dos}\,\alpha + y\,\mathrm{wst}\,\alpha - p = 0;$$

ilość p jest nieoznaczoną, lecz α dane; jestto kąt z częścią dodatną osi odciętych prostej, której zna się kierunek.

Zidentyfikowawszy równanie poprzedzające z równaniem (5); albo też, szukając przecięcia prostej z kołem i wyrażając że dwa punkta do siebie przystają, znajduje się

$$p = \pm R;$$

równanie stycznej do koła (1) będzie więc

$$(6) \qquad x\,\mathrm{dos}\,\alpha + y\,\mathrm{wst}\,\alpha \pm R = 0.$$

Wniesiemy z tego ostatniego rachunku że *styczna jest prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt zetknięcia.* W rzeczy samej, według równania (6), odległość początku od stycznej jest równa R; spodek tej prostopadłej jest więc na okręgu koła, jestto tem samem, punkt zetknięcia stycznej.

II° Punkta kołowe w nieskończoności.

211. Szukajmy przecięć jakiegokolwiek koła z prostą w nieskończoności.

Weźmy równanie jakiegokolwiek koła odniesionego do osi jakichkolwiek

$$x^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\,\theta + y^2 - 2ax - 2by + c = 0;$$

zróbmy to równanie jednorodnem zastępując w niem spółrzędne x i y przez spółrzędne jednorodne $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; ono przybierze natenczas kształt

$$(1) \qquad x^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\,\theta + y^2 - 2(ax + by)z + cz^2 = 0.$$

Równaniem prostej w nieskończoności jest $z = 0$, jak o tem z łatwością się przekonamy przytaczając dowodzenie nru (42); robiąc $z = 0$ w równaniu poprzedzającem, wypadnie

$$x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{dos}\theta = 0.$$

Punkta koła położone na prostej w nieskończoności są urojone i dane za pomocą równań

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{dos}\theta = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

w przypadku osi pochyłych; lub za pomocą

$$(3) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

w przypadku osi prostokątnych.

Pierwsze z równań (2) przedstawia jakiekolwiek koło znikające albo dwie proste urojone

$$(4) \qquad [y + x(\operatorname{dos}\theta + \sqrt{-1}\operatorname{wst}\theta)][y + x(\operatorname{dos}\theta - \sqrt{-1}\operatorname{wst}\theta)] = 0.$$

Pierwsze z równań (3) przedstawia jakiekolwiek koło znikające albo dwie proste urojone

$$(5) \qquad (y + x\sqrt{-1})(y - x\sqrt{-1}) = 0.$$

Widzimy że równania wyznaczające punkta koła (1) położone na prostej w nieskończoności są niezależne od ilości a, b, c.

Więc: *wszystkie koła, położone na jakiejkolwiek płaszczyźnie, przechodzą przez dwa punkta stałe, urojone i zawsze się przechowują nietknięte i bez żadnej zmiany w swym pierwotnym stanie do nieskończoności; te punkta zostały nazwane punktami kołowemi w nieskończoności.*

Uwaga. *Gdy jakakolwiek krzywa drugiego stopnia*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey)z + Fz^2 = 0,$$

przechodzi przez punkta kołowe w niekończoności

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = 0,$$

ta krzywa jest jakiemkolwiek kołem.

W rzeczy samej, na mocy przyjętego założenia, dwa równania

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0, \end{cases}$$

muszą mieć też same pierwiastki; co wymaga żeby było

$$A = C, \qquad B = 0;$$

więc.....

III° STYCZNA DO JAKIEGOKOLWIEK KOŁA W JAKIMKOLWIEK PUNKCIE DANYM.

212. Styczna w jakimkolwiek punkcie M_1 jest położeniem granicy jakiejkolwiek siecznej przechodzącej przez ten punkt kiedy drugi punkt przecięcia M_2 przybliża się nieograniczenie do pierwszego.

Niech będzie równanie koła danego.

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\,\theta + 2ax + 2by + C = 0.$$

zaś x_1, y_1; x_2, y_2, spółrzędnemi względnemi punktu stałego M_1 i punktu ruchomego M_2.

Równaniem siecznej jest

$$(2) \qquad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

potrzeba znaleźć granicę stosunku $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ kiedy punkt M_2 zejdzie się z punktem M_1 zostając zawsze na okręgu koła.

Otóż jeżeli założymy

$$y_2 = y_1 + k, \qquad x_2 = x_1 + h,$$

widzimy że iloraz

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{lub} \quad \frac{k}{h},$$

jest stosunkiem przyrostka k, funkcyi y do przyrostka h, zmiennej niezależnej x, dla wartości szczególnej x_1 na x; granicą jest więc pochodna y względem x, y będąc funkcyą x określoną przez równanie (1).

Otrzyma się, według prawidła różniczkowania funkcyi niewyraźnych

$$y'_x = -\frac{f'x}{f'y} = -\frac{x + y\,\mathrm{dos}\,\theta + a}{x\,\mathrm{dos}\,\theta + y + b};$$

zkąd

$$\text{gr.}\,\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = y'_{x_1} = -\frac{x_1 + y_1\,\mathrm{dos}\,\theta + a}{x_1\,\mathrm{dos}\,\theta + y_1 + b}.$$

Równaniem stycznej do koła (1), w punkcie (x_1, y_1), będzie więc

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + y_1\,\mathrm{dos}\,\theta + a}{x_1\,\mathrm{dos}\,\theta + y_1 + b}(x - x_1);$$

z warunkiem

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\,\mathrm{dos}\,\theta + 2ax_1 + 2by_1 + c = 0.$$

Po zniesieniu mianownika w 1szem z tych równań i uproszczeniu rachunku za pomocą rownania wa runkowego, ma się nakoniec na *równanie stycznej w punkcie* (x_1, y_1)

$$(3) \qquad x(x_1 + y_1\mathrm{dos}\theta + a) + y(x_1\mathrm{dos}\theta + y_1 + b) + ax_1 + by_1 + c = 0,$$

z warunkiem

$$(3\ bis) \qquad x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\mathrm{dos}\theta + 2ax_1 + 2by_1 + c = 0.$$

Oznaczywszy przez $f(x, y, z)$ pierwszą stronę równania (1) zrobionego jednorodnem, równanie stycznej będzie mogło się napisać

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0.$$

213. Kiedy równanie koła jest kształtu

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

równaniem stycznej w punkcie $(x_1\ y_1)$ jest

$$(5) \qquad xx_1 + yy_1 - R^2 = 0,$$

z warunkiem

$$(5\ bis) \qquad x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0.$$

Sprawdzimy jeszcze że styczna jest prostopadłą do promienia przechodzącego przez punkt zetknięcia. W rzeczy samej, spółczynnikiem kątowym stycznej jest $-\frac{x_1}{y_1}$; spółczynnikiem kątowym promienia przechodzącego przez punkt zetknięcia jest $\frac{y_1}{x_1}$; ich iloczyn jest równy -1; więc te dwie proste są prostokątnemi.

IV° Styczne do jakiegokolwiek koła przez jakikolwiek punkt wzięty na płaszczyźnie koła.

214. Przypuśćmy koło odniesione do swego środka i do dwóch osi prostokątnych; jego równanie będzie zatem

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Niech będą x_0 i y_0 spółrzędnemi punktu danego P; x_1, y_1, spółrzędnemi punktu zetknięcia jakiejkolwiek ze stycznych. Równaniem stycznej w tym punkcie jest

$$xx_1 + yy_1 - R^2 = 0;$$

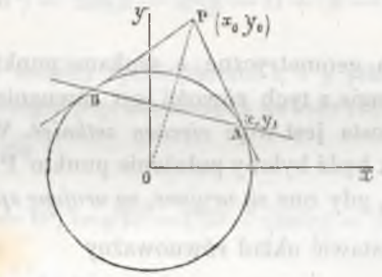
wyraźmy że ona przechodzi przez punkt P, wypadnie

$$x_0x_1 + y_0y_1 - R^2 = 0;$$

ma się nadto równanie warunkowe

$$x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0.$$

Spółrzędne nieznane punktów zetknięcia będą dane przez te dwa ostatnie równania, które staną się, znosząc skaźnik 1 :



$$(2) \qquad \begin{cases} xx_0 + yy_0 - R^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0. \end{cases}$$

Wyrugowawszy y między temi dwoma równaniami, otrzyma się równanie

$$(3) \qquad x^2(x_0 + y_0^2) - 2R^2x_0x + R^2(R^2 - y_0^2) = 0,$$

które wyznaczy odcięte punktów zetknięcia.

Ponieważ jakiejkolwiek wartości na x odpowiada jedna tylko wartość na y, wynika ztąd że *przez jakikolwiek punkt wzięty na płaszczyznie jakiegokolwiek koła, można zawsze poprowadzić dwie styczne do tego koła.*

Rzeczywistość pierwiastków równania (3) zależy od znaku wyrażenia

$$R^4x_0^2 - R^2(R^2 - y_0^2)(x_0^2 + y_0^2),$$

albo

$$R^2y_0^2(x_0^2 + y_0^2 - R^2).$$

1° Jeżeli $\qquad x_0^2 + y_0^2 - R^2 > 0, \qquad$ albo $\qquad \overline{OP} > R,$

to jest jeżeli punkt jest zewnątrz koła, dwie styczne są *rzeczywiste.*

2° Jeżeli $\qquad x_0^2 + y_0^2 - R^2 < 0, \qquad$ albo $\qquad \overline{OP} < R,$

to jest jeżeli punkt jest wewnątrz koła, styczne są urojone, są to dwie proste *urojone sprzężone*, dwa punkta zetknięcia są dwoma punktami *urojonymi sprzężonymi.*

3° Jeżeli $\qquad x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0, \qquad$ albo $\qquad \overline{OP} = R,$

to jest jeżeli punkt jest na kole, dwie styczne schodzą się z sobą; widzimy przez to że jakakolwiek styczna w jakimkolwiek punkcie koła jest *istotnie przystawaniem do siebie dwóch stycznych wychodzących z tego punktu.*

215. Można uważać równania (2), to jest

$$(2)\quad \begin{cases} xx_0 + yy_0 - R^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0, \end{cases}$$

jako przedstawiające dwa miejsca geometryczne, a szukane punkta zetknięcia znajdą się na przecięciu tych dwóch krzywych. Drugie z tych równań jest równaniem koła danego; pierwsze przedstawia jakąkolwiek prostą, ta prosta jest więc *cięciwą zetknięć*. Widzimy że cięciwa zetknięć jest zawsze rzeczywista, jakiemkolwiek bądź byłoby położenie punktu P : ta własność wypływa po prostu z uwagi że dwa punkta zetknięcia, gdy one są *urojone*, są *urojone sprzężone*.

Za układ równań (2) można podstawić układ równoważny

$$(3)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 - xx_0 - yy_0 = 0, \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0, \end{cases}$$

jeżeli się uważa x i y jako nieznane; 1[sze] było otrzymanem odejmując równania (2) stronami. Punkta zetknięcia będą jeszcze na przecięciu dwóch krzywych przedstawionych przez te równania : 2[gie] jest równaniem koła danego, 1[sze] jest równaniem koła wykreślonego na odległości OP jako średnicy.

V° Równanie stycznych poprowadzonych przez jakikolwiek punkt dany.

216. Przypuśćmy koło odniesione do swego środka i do dwóch osi prostokątnych :

$$(1)\quad x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

i niech będą α, β, spółrzędnemi punktu danego.

Weźmy równanie jakiejkolwiek stycznej równoległej do jakiejkolwiek prostej danej, to jest równanie n[ru] [210]

$$y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2};$$

i wyraźmy że ta prosta przechodzi przez punkt (α, β), co daje

$$\beta = m\alpha \pm R\sqrt{1 + m^2}.$$

To równanie, zrobione wymiernem i uporządkowane względem m, stanie się

$$(2)\quad m^2(\alpha^2 - R^2) - 2\alpha\beta m + \beta^2 - R^2 = 0;$$

to równanie daje spółczynniki kątowe dwóch stycznych poprowadzonych do koła (1) *przez punkt* (α, β).

Otóż, jeżeli x i y są spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu jakiejkolwiek z tych stycznych, ma się

$$m = \frac{y - \beta}{x - \alpha};$$

ta wartość spółczynnika kątowego musi sprawdzać równanie (2); znajduje się, po tem podstawieniu :

$$(3) \qquad (y - \beta)^2(\alpha^2 - R^2) - 2\alpha\beta(x - \alpha)(y - \beta) + (x - \alpha)^2(\beta^2 - R^2) = 0.$$

Mamy tym sposobem związek między spółrzędnemi x i y jakiegokolwiek punktu jakiejkolwiek ze stycznych; jestto *równanie stycznych poprowadzonych do koła* (1) *przez punkt* (α, β).

Równanie (3) rozwinięte, staje się

$$x^2(\beta^2 - R^2) + y^2(\alpha^2 - R^2) - \alpha^2R^2 - \beta^2R^2 - [2\alpha\beta xy - 2\beta R^2 y - 2\alpha R^2 x] = 0;$$

otóż, to równanie można jeszcze napisać :

$$x^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) + y^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) - R^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + R^4 + 2\alpha\beta xy - 2\alpha R^2 x - 2\beta R^2 y;$$

sprawdza się wtedy łatwo że równanie (3) można sprowadzić do kształtu

$$(3\ bis) \qquad (x^2 + y^2 - R^2)(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) - (\alpha x + \beta y - R^2)^2 = 0.$$

217. Jeżeli punkt (α, β) jest na kole, ma się $\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$, i równanie (3 *bis*) daje

$$(\alpha x + \beta y - R^2)^2 = 0;$$

to jest że styczna w jakimkolwiek punkcie jakiegokolwiek koła jest przystawaniem do siebie dwóch stycznych wychodzących z tego punktu.

Jeżeli punkt (α, β) jest środkiem koła, ma się $\alpha = 0$, $\beta = 0$; równanie kwadratowe stycznych staje się natenczas

$$x^2 + y^2 = 0;$$

są to dwie proste które wyznaczają punkta kołowe w nieskończoności, jak o tem nas przekonywa dowodzenie ścisłe n^ru [211]; środek jest więc przecięciem się dwóch stycznych których spółczynnikami kątowymi są $\pm\sqrt{-1}$; cięciwą zetknięcia jest prosta w nieskończoności; punktami zetknięcia są punkta kołowe w nieskończoności. Zobaczymy poniżej że te proste są *assymptotami* koła.

VI° Potęga jakiegokolwiek punktu względem koła.

218. Weźmy równanie ogólne koła

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2ax + 2by + c = 0;$$

jeżeli x_0, y_0 są spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu P płaszczyzny i gdy się podstawi ich wartości w 1^{szej} stronie równania koła, wyrażenie

$$(2) \qquad x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0\mathrm{dos}\theta + 2\mathrm{a}x_0 + 2\mathrm{b}y_0 + \mathrm{c}$$

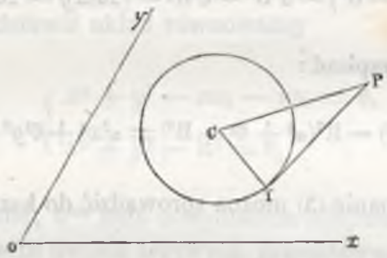
jest nazwanem *potęgą punktu* (x_0, y_0) *względem koła*.

Dowiedziemy że

Potęga jakiegokolwiek punktu względem koła jest równą kwadratowi stycznej poprowadzonej z punktu do tego koła;

lub inaczej : *Kwadrat stycznej poprowadzonej z jakiegokolwiek punktu do jakiegokolwiek koła jest równym pierwszej stronie równania koła, w której się zastąpi spółrzędne zmienne przez spółrzędne punktu, byle tylko można było otrzymać sprowadzonemi do jedności spółczynniki kwadratów zmiennych.*

W rzeczy samej, α i β będąc spółrzędnemi środka koła a R jego promieniem, pierwszą stronę



równania (1) można, według n^{ru} [206], położyć pod kształtem tożsamościowym :

$$x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\theta + 2\mathrm{a}x + 2\mathrm{b}y + \mathrm{c} = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{dos}\theta - \mathrm{R}^2;$$

otrzyma się więc, zastępując x, y, przez x_0, y_0 :

$$x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0\mathrm{dos}\theta + 2\mathrm{a}x_0 + 2\mathrm{b}y_0 + \mathrm{c} = (x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta^2) + 2(x_0-\alpha)(y_0-\beta)\mathrm{dos}\,\theta - \mathrm{R}^2.$$

Otóż, I będąc punktem zetknięcia stycznej poprowadzonej z punktu P, ma się :

$$\overline{\mathrm{CP}}^2 = (x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 + 2(x_0-\alpha)(y_0-\beta)\mathrm{dos}\theta,$$

$$\overline{\mathrm{PI}}^2 = \overline{\mathrm{CP}}^2 - \mathrm{R}^2;$$

więc

$$(2) \qquad \overline{\mathrm{PI}}^2 = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0\mathrm{dos}\theta + 2\mathrm{a}x_0 + 2\mathrm{b}y_0 + \mathrm{c};$$

C. B. D. D.

219. To twierdzenie pozwoli nam rozwiązać bezpośrednio zagadnienie następujące :

Znaleźć miejsce punktów których stosunek odległości do dwóch kół jest stałym.

Rozumiemy tu przez odległość jakiegokolwiek punktu do jakiegokolwiek koła długość stycznej poprowadzonej z tego punktu do koła.

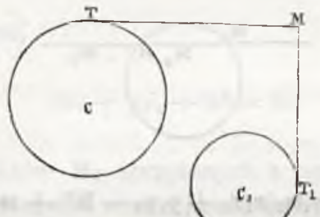
Niech będą równania dwóch kół

$$x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\theta + 2\mathrm{a}x + 2\mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\theta + 2\mathrm{a}_1x + 2\mathrm{b}_1y + \mathrm{c}_1 = 0;$$

niech będą x i y spółrzędne jakiegokolwiek punktu M miejsca, takiego żeby było

$$\overline{\mathrm{MT}}^2 = k^2.\overline{\mathrm{MT}}_1^2.$$



Według twierdzenia poprzedniego ta równość da związek następujący :

$$x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\,\theta + 2\mathrm{a}x + 2\mathrm{b}y + \mathrm{c} = k^2(x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\,\theta + 2\mathrm{a}_1x + 2\mathrm{b}_1y + \mathrm{c}_1\ ;$$

jestto związek między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu miejsca, *jestto więc równaniem miejsca.* Można położyć to równanie pod kształtem

(3) $$x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\,\theta + 2\,\frac{\mathrm{a} - \mathrm{a}_1k^2}{1 - k^2}\,x + 2\,\frac{\mathrm{b} - \mathrm{b}_1k^2}{1 - k^2}\,y + \frac{\mathrm{c} - \mathrm{c}_1k^2}{1 - k^2} = 0;$$

widzimy że *miejscem* jest jakiekolwiek koło.

VII° Stosunek w którym jakiekolwiek koło dzieli odcinek dany.

220. Weźmiemy równanie koła pod kształtem

(1) $$x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2 = 0.$$

Niech będą $\mathrm{M}_1(x_1, y_1)$ i $\mathrm{M}_2(x_2, y_2)$ końce odcinka; spółrzędne x i y jakiegokolwiek punktu dzielącego ten odcinek w stosunku $\frac{m_2}{m_1}$, będą według n^rów [52] i [53]

(2) $$\begin{cases} x = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] y = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

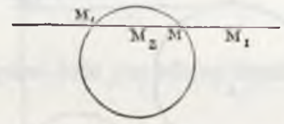
gdzie

(2 *bis*) $$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\mathrm{M}_1\mathrm{M}}{\mathrm{MM}_2}.$$

Jeżeli punkt M jest jakimkolwiek punktem koła, wartości (2) muszą sprawdzać równanie (1) tego koła, co daje

$$(m_1x_1 + m_2x)^2 + (m_1y_1 + m_2y_2)^2 - R^2(m_1 + m_2)^2 = 0;$$

albo, porządkując względem m_1



$$(3) \qquad m_1^2(x_1^2 + y_1^2 - R^2) + 2m_1m_2(x_1x_2 + y_1y_2 - R^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2 - R^2) = 0.$$

To równanie wyznaczy wartość stosunków

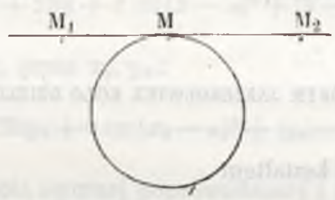
$$\frac{m_2}{m_1} \quad \text{albo} \quad \frac{M_1M}{MM_2}$$

w których koło (1) *dzieli odcinek* M_1M_2.

221. Z równania (3) wypływa wiele następstw ważnych.

1° Kiedy prosta M_1M_2 jest styczną do koła, dwa stosunki stają się równe, ponieważ dwa punkta M i M′ schodzą się z sobą; przeto równanie (3) musi mieć dwa pierwiastki równe. Ma się wtedy:

$$(x_1x_2 + y_1y_2 - R^2)^2 - (x_1^2 + y_1^2 - R^2)(x_2^2 + y_2^2 - R^2) = 0.$$



Otóż jeżeli uważamy x_2 i y_2 jako zmienne, a x_1 i y_1 jako stałe równanie

$$(4) \qquad (x^2 + y^2 - R^2)(x_1^2 + y_1^2 - R^2) - (xx_1 + yy_1 - R^2)^2 = 0$$

da związek między spółrzędnemi x i y jakiegokolwiek punktu stycznych poprowadzonych do koła przez punkt M_1; *będzie to równaniem stycznych poprowadzonych przez punkt* (x_1, y_1).

Znajdujemy tym sposobem równanie (3 *bis*) n^ru [216].

2° Przypuśćmy że dwa pierwiastki równania (3) są równe i znaków przeciwnych; otrzyma się

$$\frac{M_1M}{MM_2} + \frac{M_1M'}{M'M_2} = 0,$$

$$\frac{MM_1}{M'M_1} : \frac{MM_2}{M'M_2} = -1$$

to jest że dwie pary M_1, M_2; M, M', tworzą układ harmoniczny.

Ma się wtedy związek

$$x_2 x_1 + y_2 y_1 - R^2 = 0,$$

albo, uważając x_2 i y_2 jako zmienne,

$$(5) \qquad x x_1 + y y_1 - R^2 = 0.$$

To równanie daje miejsce punktów M_2 sprzężonych z punktem stałym M_1 względem dwóch punktów przecięcia, z kołem, jakiejkolwiek siecznej przechodzącej przez punkt M_1.

Rozpoznajemy *równanie cięciwy zetknięć stycznych poprowadzonych do koła przez punkt* $M_1(x_1, y_1)$.

§ III. — PRZECIĘCIA KÓŁ.

1° Przecięcie się dwóch kół.

222. Niech będą równania dwóch kół;

$$(1) \qquad \begin{cases} C = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2ax + 2by + c = 0, \\ C_1 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2a_1 x + 2b_1 y + c_1 = 0; \end{cases}$$

spółrzędne punktów przecięcia są wartościami na x i y, sprawdzającemi te dwa równania albo kombinacye tych dwóch równań.

Zróbmy jednorodnemi równania (1) co daje

$$(2) \qquad \begin{aligned} C &= x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2axz + 2byz + cz^2 = 0, \\ C_1 &= x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2a_1 xz + 2b_1 yz + c_1 z^2 = 0; \end{aligned}$$

odejmijmy stronami, wypadnie

$$z\{2(a - a_1)x + 2(b - b_1)y + (c - c_1)z\} = 0.$$

Punkta przecięcia są więc na jednem z kół danych, i na jednej albo drugiej z dwóch prostych

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2(a - a_1)x + 2(b - b_1)y + (c - c_1)z = 0. \end{cases}$$

Pierwsza z tych prostych jest prosta w nieskończoności; ona daje punkta kołowe w nieskończoności; te punkta należą, w rzeczy samej, do wszystkich okręgów kół.

Druga prosta wyznaczy punkta leżące, ogólnie, w odległości skończonej; *nazwano ją osią pierwiastną dwóch kół.* Ta prosta jest zawsze rzeczywistą, nawet gdy się koła *nie przecinają;* albowiem wtedy punkta przecięcia, w odległości skończonej, są urojonemi sprzężonemi; owoż wiemy że prosta przechodząca przez dwa punkta urojone sprzężone jest rzeczywistą.

Równaniem osi pierwiastnej dwóch kół (1) jest więc

$$(3) \qquad A = C - C_1 = 2(a - a_1)x + 2(b - b_1)y + c - c_1 = 0.$$

223. *Roztrząsanie przecięcia się dwóch kół.*

Odnieśmy dwa koła do dwóch osi prostokątnych, biorąc środek jednego za początek, a linią środków za oś odciętych, równaniami dwóch kół będą wtedy

$$(4) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ (x - d)^2 + y^2 - r^2 = 0. \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami, otrzymuje się

$$(5) \qquad x = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d};$$

jestto równanie osi pierwiastnej; wypada z tego że *oś pierwiastna dwóch kół jest prostopadłą do linii środków.*

Podstawiwszy wartość (5) na x w 1szem z równań (4), ma się

$$y^2 = \frac{4d^2R^2 - (d^2 + R^2 - r^2)^2}{4d^2},$$

wartość która będzie mogła się położyć pod kształtem następującym

$$(6) \qquad y^2 = \frac{(d + R + r)(d + R - r)(d + r - R)(r + R - d)}{4d^2}.$$

Jakiejkolwiek wartości rzeczywistej albo urojonej na y odpowiada, według równania (5), jakakolwiek wartość rzeczywista albo urojona na x; kwestya jest więc sprowadzoną do dyskusyi równania (6). Otóż można zawsze dobrać osie w sposób taki żeby było

$$d > 0 \quad \text{i} \quad R > r;$$

wtenczas pierwszy i drugi czynnik na y^2 są dodatne; i dosyć będzie nam się zająć znakiem iloczynu

$$(r + d - R)(r + R - d).$$

1° Aby wartość (6) na y była rzeczywistą, trzeba i dosyć jest aby iloczyn poprzedzający był dodatnym; co będzie miało miejsce jeśli się ma jednocześnie

$$\begin{cases} r + d - R > 0, \\ r - d + R > 0; \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} r + d - R < 0, \\ r - d + R < 0. \end{cases}$$

Ostatnie założenie nie może być przyjętem, gdyż dodając dwie nierówności, otrzymuje się $2r < 0$; co nie może mieć miejsca. Więc aby wartości na y były rzeczywiste, trzeba i dosyć jest żeby było

$$(7) \qquad \begin{cases} d < R + r, \\ d > R - r; \end{cases}$$

to jest *że odległość środków musi być mniejszą od summy promieni, a większą od ich różnicy.*

2° Wartości na y będą równemi, albo zerami, jeżeli ma się

$$(8) \qquad \begin{cases} d = R + r, \\ \text{albo } d = R - r; \end{cases}$$

w 1szym przypadku, koła są *styczne zewnętrznie;* w drugim przypadku, one są *styczne wewnętrznie.*

3° Wartości na y są urojone, kiedy dwa czynniki będą znaków przeciwnych; co będzie miało miejsce jeżeli

$$(9) \qquad \begin{cases} d > R + r, \\ \text{albo } d < R - r; \end{cases}$$

w 1szym przypadku, koła są *zewnętrzne*, w drugim *wewnętrzne*.

224. *Rozbierzmy przypadek w którym dwa koła są spółśrodkowe.*

Równania jednorodne tych dwóch kół będą mogły się napisać

$$(10) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - R^2z^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - R_1^2z^2 = 0. \end{cases}$$

Odejmując stronami te dwa równania, wypadnie

$$(R^2 - R_1^2)z^2 = 0, \qquad \text{albo} \qquad z^2 = 0;$$

są to równania prostych, przechodzących przez punkta wspólne dwom kołom. Widzimy że punkta przecięcia, które w przypadku ogólnym są w odległości skończonej, schodzą się wtedy z punktami kołowymi w nieskończoności. To się rozpoznaje jeszcze uważając że oś pierwiastna, według równania (3) nru [222]

$$2(a - a_1)x + 2(b - b_1)y + (c - c_1)z = 0,$$

schodzi się z prostą w nieskończoności kiedy $(a - a_1)$ i $(b - b_1)$ stają się zerami.

Dwa okręgi kół (10) są więc styczne jeden do drugiego w dwóch punktach, albo podwójnie styczne; punktami zetknięcia są punkta kołowe w nieskończoności; cięciwą zetknięć jest prosta w nieskończoności; styczne (albo *assymptoty* koła) mają na równanie

$$(11) \qquad x^2 + y^2 = 0;$$

otrzymuje się je robiąc $z=0$ w równaniu jednego z kół. Jestto także równanie jakiegokolwiek koła znikającego, stycznego do dwóch kół.

II° Własności osi pierwiastnych.

225. Widzieliśmy w n^rze [222], że równaniem osi pierwiastnej dwóch kół

$$
(1)\qquad \begin{cases} C = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2ax + 2by + c = 0, \\ C_1 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0. \end{cases}
$$

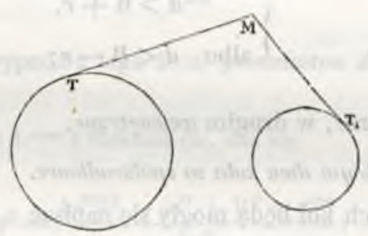
jest

$$
(2)\qquad C - C_1 = 2(a-a_1)x + 2(b-b_1)y + c - c_1 = 0.
$$

Oś pierwiastna jest miejscem punktów z którego można poprowadzić do dwóch kół styczne równe.

Szukajmy, w rzeczy samej, miejsca punktów M określonego przez związek

$$
MT = MT_1.
$$



Ma się, na mocy n^ru [218]

$$
\overline{MT}^2 = C = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2ax + 2by + c;
$$

$$
\overline{MT_1}^2 = C_1 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2a_1x + 2b_1y + c_1,
$$

zkąd wypada

$$
C = C_1, \quad \text{albo} \quad C - C_1 = 0;
$$

jestto dokładnie równaniem osi pierwiastnej.

226. *Osie pierwiastne trzech kół przecinają się w jednym punkcie.*

Niech będą, przyjmując znakowania poprzedzające,

$$
(3)\qquad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0
$$

równania trzech kół; równaniami osi pierwiastnych będą

dla 2^giego i 3^ciego kół : $A_1 = C_2 - C_3$;

dla 3^ciego i 1^szego kół : $A_2 = C_3 - C_1$;

dla 1^szego i 2^giego kół : $A_3 = C_1 - C_2$.

Otóż, te trzy proste są zbiegające się; gdyż, dodając ich trzy równania, ma się

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$

to jest że równanie jednej z prostych jest następstwem dwóch innych; albo, spółrzędne punktu wspólnego prostym A_2 i A_3, na przykład, sprawdzają równanie prostej A_1.

227. *Kiedy wiele kół przechodzi przez dwa punkta stałe, ich cięciwy przecięcia z któremkolwiek kołem danem przechodzą przez jakikolwiek punkt stały.*

Jeśli równaniami dwóch kół, przechodzących przez dwa punkta stałe są

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0,$$

równaniem jakiegokolwiek koła przechodzącego przez dwa teżsame punkta będzie

$$C_1 + \lambda C_2 = 0,$$

albo, sprowadzając do jedności spółczynniki kwadratów :

$$C' = \frac{C_1 + \lambda C_2}{1 + \lambda} = 0;$$

gdyż to koło przechodzi widocznie przez dwa punkta wspólne kołom C_1 i C_2, to jest przez dwa punkta dane.

Niech będzie teraz jakiekolwiek koło stałe C, którego równaniem jest

$$(5) \qquad C = 0;$$

oś pierwiastna dwóch kół (4) i (5) będzie miała na równanie

$$C' - C = 0, \qquad \text{albo} \qquad \frac{C_1 + \lambda C_2}{1 + \lambda} - C = 0;$$

albo nakoniec

$$(6) \qquad (C_1 - C) + \lambda(C_2 - C) = 0$$

ta prosta przechodzi widocznie, jakiemkolwiek bądź byłoby λ, przez punkt stały

$$C_1 - C = 0, \qquad C_2 - C = 0;$$

przecięcie się osi pierwiastnych kół C_1 i C, C_2 i C.

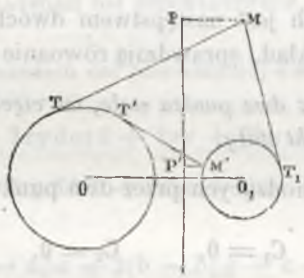
228. *Styczna, poprowadzona do jakiegokolwiek koła przez jakikolwiek punkt wzięty na okręgu drugiego koła, jest średnio proporcyonalną między odległością środków i podwójną prostopadłą spuszczoną z tego punktu na oś pierwiastną dwóch kół.*

Dwa koła będąc odniesione do dwóch osi prostokątnych, ich równania będą mogły się napisać

$$(1) \qquad \begin{cases} C = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \\ C_1 = x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0; \end{cases}$$

a równaniem osi pierwiastnej dwóch kół będzie

$$A = C - C_1 = 2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + (c_1 - c) = 0.$$



Odległością MP jakiegokolwiek punktu M płaszczyzny od osi pierwiastnej A jest

$$MP = \frac{C - C_1}{2\sqrt{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2}};$$

otóż, jeżeli O i O_1 są środkami dwóch kół, i jeżeli MT i MT_1 są stycznemi poprowadzonemi z punktu M do dwóch kół, ma się

$$OO_1 = \sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2}; \qquad \overline{MT}^2 = C, \qquad \overline{MT_1}^2 = C_1;$$

związek poprzedzający daje więc

$$\overline{MT}^2 - \overline{MT_1}^2 = 2\overline{MP}.\overline{OO_1};$$

biorąc różnicę zawsze dodatną.

Przypuściwszy punkt M na kole C_1, ma się jako przypadek szczególny, podanie wysłowione :

$$\overline{M'T'}^2 = 2\overline{M'P'}.\overline{OO_1}.$$

III° Styczne wspólne do dwóch kół.

229. Niech będą dwa koła odniesione do dwóch osi prostokątnych, mające na równania

(1) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0,$$

(2) $$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2 = 0.$$

Jakakolwiek styczna do koła (1), to jest jakakolwiek prosta której odległość od środka (a, b) jest równą R, będzie miała na równanie

(3) $$(x - a)\mathrm{dos}\alpha + (y - b)\mathrm{wst}\alpha - R = 0$$

α jest jakąkolwiek ilością nieoznaczoną. Wyraźmy że ta prosta jest styczną do drugiego okręgu koła, to jest że odległość środka (a_1, b_1) od tej prostej jest równą R_1; ma się tym sposobem równanie warunkowe

$$(4) \qquad (a_1 - a)\cos\alpha + (b_1 - b)\sin\alpha - R = \pm R_1.$$

Wyciągając z tego równania wartość na $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ potem podstawiając wartości otrzymane w równaniu (3), znajdzie się równania stycznych wspólnych.

Przed wykonaniem tego podstawienia, skombinujmy równania (3) i (4), odejmując od 1szego połowę drugiego, utworzy się tym sposobem równanie więcej symetryczne

$$(5) \qquad \left(x - \frac{a + a_1}{2}\right)\cos\alpha + \left(y - \frac{b + b_1}{2}\right)\sin\alpha = \frac{R \pm R_1}{2}.$$

Otóż przedstawiwszy przez d^2 odległość środków, to jest założywszy

$$(6) \qquad d^2 = (a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2,$$

wyprowadzi się ze związku (4)

$$\begin{cases} d^2\sin\alpha = (b_1 - b)(R \pm R_1) + (a_1 - a)\sqrt{d^2 - (R \pm R_1)^2}, \\ d^2\cos\alpha = (a_1 - a)(R \pm R_1) - (b_1 - b)\sqrt{d^2 - (R \pm R_1)^2}. \end{cases}$$

Podstawiając te wartości w równaniu (5), znajduje się ostatecznie na równania stycznych wspólnych.

$$(7) \qquad \left.\begin{aligned} &\left(x - \frac{a_1 + a}{2}\right)[(a_1 - a)(R \pm R_1) - (b_1 - b)\sqrt{d^2 - (R \pm R_1)^2}] \\ +&\left(y - \frac{b_1 + b}{2}\right)[(b_1 - b)(R \pm R_1) + (a_1 - a)\sqrt{d^2 - (R \pm R_1)^2}] \end{aligned}\right\} = d^2\frac{R \mp R_1}{2};$$

$$(7\ bis) \qquad \left.\begin{aligned} &\left(x - \frac{a_1 + a}{2}\right)[(a_1 - a)(R \pm R_1) + (b_1 - b)\sqrt{d^2 - (R \pm R_1)^2}] \\ +&\left(y - \frac{b_1 + b}{2}\right)[(b_1 - b)R \pm R_1) - (a_1 - a)\sqrt{d^2 - (R \pm R_1)^2}] \end{aligned}\right\} = d^2\frac{R \mp R_1}{2};$$

znaki wyższe i niższe powinny być wzięte razem. Ma się więc cztery styczne wspólne. Rzeczywistość stycznych zależy od znaku ilości $[d^2 - (R \pm R_1)^2]$.

230. Równaniem linii środków jest

$$(8) \qquad \frac{x - a}{a_1 - a} = \frac{y - b}{b_1 - b};$$

przecięcie się tej prostej ze stycznemi wspólnemi da *środki podobieństwa dwóch kół*. Lecz, jeżeli się żąda wyznaczyć te punkta, będzie daleko prościej szukać wprost przecięcia się prostych (5) i (8), mając wzgląd na związek (4); znajduje się tym sposobem bardzo łatwo, że spółrzędnemi środków podobieństwa dwóch kół są

$$(9) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_1 R \pm a R_1}{R \pm R_1}, \\ y = \dfrac{b_1 R \pm b R_1}{R \pm R_1}; \end{cases}$$

wartości które można napisać zaraz, uważając że środki podobieństwa dzielą odcinek utworzony przez środki w stosunku promieni i zastosowując wzory n^ru [52].

§ IV. — BIEGUNOWA PUNKTU WZGLĘDEM KOŁA.

I° Określenie i równanie biegunowej.

231. *Przez punkt stały,* P, *wzięty na płaszczyźnie koła, prowadzi się jakakolwiek sieczną która spotyka koło w punktach* A *i* B; *na tej siecznej bierze się punkt* M *taki że*

$$(1) \qquad \frac{2}{PM} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB};$$

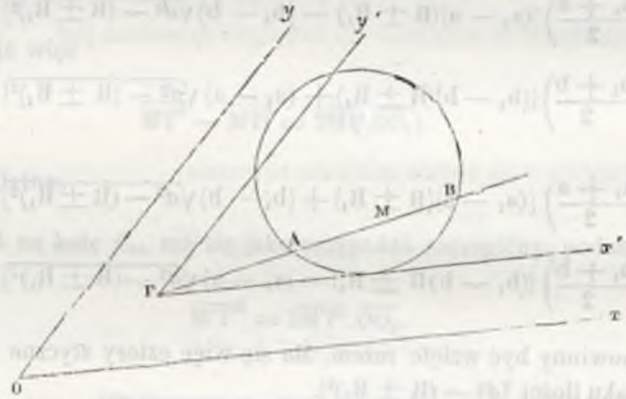
miejscem punktów M *jest linia prosta, którą nazwano* BIEGUNOWĄ PUNKTU P.

Wreszcie, przytaczając dokładnie rozumowanie użyte w n^rze [83], z łatwością się sprawdza że związek (1) można jeszcze położyć pod kształtem

$$(2) \qquad \frac{MA}{PA} + \frac{MB}{PB} = 0.$$

232. Niech będzie równanie koła

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2ax + 2by + c = 0;$$



przenieśmy osie równolegle do ich pierwotnego położenia z punktu O do punktu P; zakładając

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y', \end{cases}$$

jeżeli x_0 i y_0 są spółrzędnemi punktu P. Równanie koła staje się wtedy:

$$\left.\begin{aligned} &x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta + 2x'(x_0 + y_0\cos\theta + a) + 2y'(x_0\cos\theta + y_0 + b) \\ &\qquad + \underbrace{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0\cos\theta + 2ax_0 + 2by_0 + c}_{C_0} \end{aligned}\right\} = 0;$$

oznaczymy przez C_0 wyraz niezależny.

Nazwawszy ρ odległość nowego początku P od jakiegokolwiek punktu (x', y') siecznej PM; można założyć

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = \lambda\rho, \\ y' = \mu\rho, \end{cases}$$

λ i μ są stałemi n^ru [84]. Oznaczmy przez ρ, ρ_1, ρ_2, długości odcinków PM, PA, PB, związek (1) n^ru [231] stanie się

$$(5) \qquad \frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Otóż wartości ρ_1 i ρ_2 otrzymają się zastępując x' i y' przez wartości (4) w równaniu (3); znajdzie się tym sposobem

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos\theta + \frac{2}{\rho}[\lambda(x_0 + y_0\cos\theta + a) + \mu(x_0\cos\theta + y_0 + b)] + \frac{C_0}{\rho^2} = 0;$$

zkąd wypada

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\frac{2}{C_0}[\lambda(x_0 + y_0\cos\theta + a) + \mu(x_0\cos\theta + y_0 + b)].$$

Związek (5) staje się wtedy

$$(6) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{C_0}[\lambda(x_0 + y_0\cos\theta + a) + \mu(x_0\cos\theta + y_0 + b)] = 0.$$

Spółrzędne jakiegokolwiek bądź punktu miejsca sprawdzą równania (5) i (6) i wszelkie połączenie tych równań; one sprawdzą szczególnie połączenie otrzymane rugując λ i μ, co prowadzi do

$$(7) \qquad x'(x_0 + y_0\cos\theta + a) + y'(x_0\cos\theta + y_0 + b) + C_0 = 0.$$

To równanie dające związek między stałemi i spółrzędnemi x' i y' jakiegokolwiek punktu miejsca, będzie równaniem miejsca punktu M; widzimy że tem miejscem jest linia prosta.

Aby otrzymać równanie tej prostej względem osi pierwotnych, potrzeba zastąpić x' przez $(x - x_0)$ a y' przez $(y - y_0)$; znajdzie się, wykonawszy wszystkie uproszczenia:

$$(8) \qquad x(x_0 + y_0\cos\theta + a) + y(x_0\cos\theta + y_0 + b) + ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Uważmy że jeśli się zrobi jednorodną pierwszą stronę równania (1), tak że

$$(9) \qquad C = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2axz + 2byz + cz_2 = 0;$$

równanie biegunowej punktu (x_0, y_0) będzie mogło się napisać:

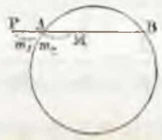
$$(10) \qquad xC'_x + yC'_{y_0} + zC'_{z_0} = 0.$$

Uwaga I. Widzimy że biegunowa jest cięciwą zetknięć stycznych poprowadzonych do koła z punktu (x_0, y_0), według dowodzenia n[ru] [215].

Uwaga II. Kiedy punkt (x_0, y_0) jest na kole, biegunowa schodzi się ze styczną w tym punkcie, na mocy dowodzenia n[ru] [212].

233. Można także znaleźć równanie biegunowej biorąc za punkt wyjścia zawiązek (2) n[ru] [231], to jest

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AP}} + \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BP}} = 0. \tag{11}$$



Oznaczmy przez x_0 i y_0 spółrzędne punktu P; x i y spółrzędne punktu M, i $\frac{m_2}{m_1}$ którykolwiek ze stosunków $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AP}}$ w których koło

$$x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{dos}\theta + 2\mathrm{a}x + 2\mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0 \tag{12}$$

dzieli odcinek PM. Spółrzędnemi punktu A będą

$$\frac{m_1 x + m_2 x_0}{m_1 + m_2}, \quad \frac{m_1 y + m_2 y_0}{m_1 + m_2};$$

one muszą sprawdzać równanie (12) koła, otrzyma się wtedy

$$\left.\begin{aligned} &(m_1 x + m_2 x_0)^2 + (m_1 y + m_2 y_0)^2 + 2(m_1 x + m_2 x_0)(m_1 y + m_2 y_0) \operatorname{dos}\theta \\ + 2\mathrm{a}(m_1 + m_2)&(m_1 x + m_2 x_0) + 2\mathrm{b}(m_1 + m_2)(m_1 y + m_2 y_0) + \mathrm{c}(m_1 + m_2)^2 \end{aligned}\right\} = 0. \tag{13}$$

To równanie wyznaczy wartości stosunku $\frac{m_2}{m_1}$: dwa pierwiastki dadzą co do wielkości i znaku stosunki $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AP}}$, $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BP}}$; otóż według związku (11) summa tych wartości musi być zerem. Otrzyma się więc równanie biegunowej punktu (x_0, y_0) równając z zerem spółczynnik iloczynu $m_1 m_2$ w równaniu (13); znajduje się tym sposobem

$$x(x_0 + y_0 \operatorname{dos}\theta + \mathrm{a}) + y(x_0 \operatorname{dos}\theta + y_0 + \mathrm{b}) + \mathrm{a}x_0 + \mathrm{b}y_0 + \mathrm{c} = 0; \tag{14}$$

równanie tożsamościowe z równaniem (8).

234. Gdy równaniem koła jest

$$x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2 = 0, \tag{15}$$

równanie biegunowej punktu (x_0, y_0) staje się

$$(16) \qquad xx_0 + yy_0 - R^2 = 0;$$

rozpoznaje się równanie cięciwy zetknięć stycznych poprowadzonych z punktu (x_0, y_0).

II° Własności i wykreślenie biegunowej.

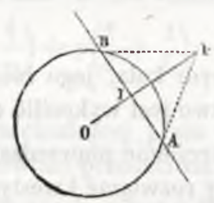
235. *Biegunowa punktu jest prostopadłą do średnicy przechodzącej przez ten punkt; a iloczyn odległości środka od bieguna i od jego biegunowej jest równy kwadratowi z promienia.*

Weźmy, w rzeczy samej, równanie koła pod kształtem

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

biegunowa punktu (x_0, y_0) jest

$$(2) \qquad xx_0 + yy_0 - R^2 = 0.$$



Prostopadła spuszczona ze środka O na biegunową jest

$$y = \frac{y_0}{x_0} x,$$

ona przechodzi widocznie przez punkt P.

Odległością punktu O od biegunowej jest

$$\mathrm{OI} = \frac{R^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}; \qquad \text{otóż} \qquad \mathrm{OP}\ \sqrt{x_0^2 + y_0^2};$$

więc

$$(3) \qquad \overline{\mathrm{OI}}.\overline{\mathrm{OP}} = R^2.$$

Wnosimy ztąd że biegunowa przecina koło, jeżeli punkt P jest zewnętrzny; ona go nie przecina, jeżeli punkt P jest wewnętrzny.

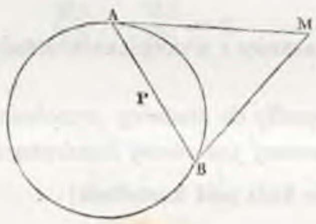
Widzimy jeszcze, zrobiwszy jednorodnem równanie (2), *że biegunowa środka jest prostą w nieskończoności.*

236. *Jeżeli przez punkt stały* P, *poprowadzi się jakąkolwiek sieczną, i styczne do koła w punktach* A i B *w których sieczna przecina koło; miejscem przecięć tych stycznych jest biegunowa punktu* P.

Niech będą, w rzeczy samej, x_0, y_0 spółrzędne punktu P, a X, Y, spółrzędne punktu M, przecięcia się dwóch stycznych. Sieczna APB jest biegunową punktu M, jej równaniem będzie więc

$$xX + yY - R^2 = 0;$$

otóż, ta sieczna przechodząc przez punkt P, jej równanie musi być sprawdzonem przez spółrzędne



tego punktu, otrzyma się wtedy

$$x_0X + y_0Y - R^2 = 0.$$

Mamy tym sposobem związek między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu M, jestto więc równanie miejsca tych punktów. Otóż, rozpoznaje się w tem równaniu, równanie biegunowej punktu (x_0, y_0); więc.....

Uwaga. Kiedy punkt P jest zewnętrznym koła, jego biegunowa jest cięciwą zetknięć stycznych poprowadzonych z tego punktu; wtedy łatwo jest wykreślić tę biegunową.

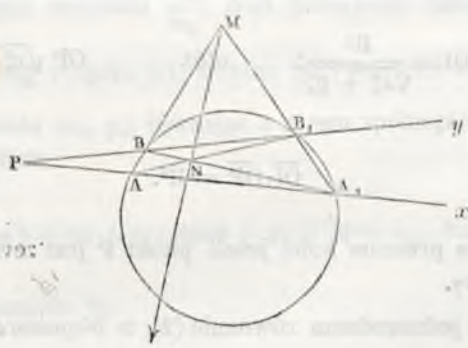
Kiedy punkt P jest wewnętrznym, wykreślenie poprzedzające nie daje się więcej zastosować, lecz podanie któreśmy dowiedli pozwoli wtedy rozwiązać kwestyą.

237. *Jeżeli przez punkt stały* P *poprowadzi się jakiekolwiek sieczne, i gdy się złączy pod przekątną punkta przecięcia się tych siecznych z kołem; te przekątne przecinają się na biegunowej punktu* P.

Niech będą dwie sieczne PAA_1, PBB_1; niech będą M i N przecięcia się względne cięciw AB i A_1B; AB_1 i A_1B; prosta MN jest biegunową punktu P.

Weźmy za osie spółrzędnych dwie sieczne uważane; równaniem koła będzie, na przykład,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta + 2Ax + 2By + C = 0,$$



równanie w którem θ, A, B, C, przedstawiają ilości zmienne z położeniem osi Ox i Oy, to jest siecznych.

Oznaczmy przez α, α_1; β, β_1, odległości PA, PA_1; PB, PB_1; równania różne prostych AB, A_1B_1; AB_1, A_1B będą wtedy

$$(2)\quad \begin{cases} AB : \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}-1=0, \\ A_1B_1 : \dfrac{x}{\alpha_1}+\dfrac{y}{\beta}-1=0; \end{cases} \quad \text{proste wyznaczające punkt M;}$$

$$(3)\quad \begin{cases} AB_1 : \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta_1}-1=0, \\ A_1B : \dfrac{x}{\alpha_1}+\dfrac{y}{\beta}-1=0; \end{cases} \quad \text{proste wyznaczające punkt N.}$$

Dodając równania (2) ma się

$$(4)\qquad x\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)+y\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)-2=0,$$

jestto równanie jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez punkt M; dodając równania (3), ma się

$$(4\ bis)\qquad x\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)+y\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)-2=0,$$

jestto równanie jakiejkolwiek prostej przechodzącej przez punkt N. Równania (4) i (4 *bis*) będąc tożsamościowe, jedno albo drugie z tych równań przedstawia prostą MN.

Lecz α i α_1 są odcięte punktów przecięcia się prostej Px z okręgiem koła (1), albo pierwiastki równania otrzymanego, robiąc $y=0$ w równaniu tego koła, to jest

$$x^2+2Ax+C=0, \qquad \text{albo} \qquad \frac{C}{x^2}+2A.\frac{1}{x}+1=0;$$

ztąd wypada

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}=-\frac{2A}{C}.$$

Podobnież β i β_1 są pierwiastki równania otrzymanego robiąc $x=0$ w równaniu koła (1), to jest

$$y^2+2By+C=0, \qquad \text{albo} \qquad C.\frac{1}{y^2}+2B.\frac{1}{y}+1=0;$$

ztąd wypada

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}=-\frac{2B}{C}.$$

Zastępując $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)$, $\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)$ przez te wartości w równaniu (4), znajdzie się na równanie prostej MN

$$(5)\qquad Ax+By+C=0.$$

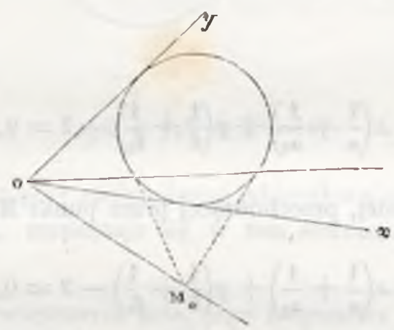
Otóż jestto równanie biegunowej początku, względem osi dobranych; ta prosta jest stałą, jakiemikolwiek bądź byłyby osie; przeto prosta MN pozostaje stałą, jakiemikolwiek bądź byłyby sieczne, i ona jest biegunową punktu P.

238. *Jeżeli, przez punkt spotkania dwóch stycznych do koła, poprowadzi się dwie proste sprzężone harmonicznie względem tych dwóch stycznych, biegun jednej będzie na drugiej.*

Te dwie proste są nazwane *prostemi sprzężonemi* względem koła.

Weźmy dwie styczne za osie spółrzędnych, równaniem koła będzie

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{dos}\theta + 2\mathrm{a}(x+y) + \mathrm{a}^2 = 0.$$



Biegunowa punktu (x_0, y_0) ma na równanie według n[ru] [232]

$$(2) \qquad x(x_0 + y_0 \operatorname{dos}\theta + \mathrm{a}) + y(x_0 \operatorname{dos}\theta + y_0 + \mathrm{a}) + \mathrm{a}x_0 + \mathrm{a}y_0 + \mathrm{a}^2 = 0.$$

Niech będą dwie proste sprzężone harmoniczne względem osi Ox i Oy; ich równaniami będą na mocy objaśnień przytoczonych w n[rze] [175]

$$(3) \qquad (\mathrm{D}_0) \quad y - kx = 0, \qquad (\mathrm{D}_1) \quad y + kx = 0.$$

Biegun prostej D_0 otrzyma się identyfikując jego równanie z równaniem (2), ma się tym sposobem

$$\frac{x_0 + y_0 \operatorname{dos}\theta + \mathrm{a}}{k} = \frac{x_0 \operatorname{dos}\theta + y_0 + \mathrm{a}}{1} = \frac{\mathrm{a}^2 + \mathrm{a}(x_0 + y_0)}{0}.$$

Z tego się wyprowadza

$$\mathrm{a} + x_0 + y_0 = 0, \qquad x_0 + y_0 \operatorname{dos}\theta + \mathrm{a} + k(x_0 \operatorname{dos}\theta + y_0 + \mathrm{a}) = 0;$$

otóż, mając wzgląd na 1[szy] związek, drugi staje się

$$y_0 + kx_0 = 0;$$

to jest że biegun prostej D_0 znajduje się na prostej D_1.

III° Własność kół przechodzących przez dwa punkta stałe.

239. Przypuśćmy szereg kół mających tę samą oś pierwiastną, i przechodzących przez dwa punkta stałe (rzeczywiste albo urojone sprzężone) leżące zwykle na osi poziomej; weźmy za oś odciętych prostą przechodzącą przez dwa punkta stałe, a za początek środek (zawsze rzeczywisty) prostej łączącej te dwa punkta; równaniem ogólnem kół przechodzących przez dwa punkta stałe będzie

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0,$$

λ jest jakąkolwiek ilością nieoznaczoną a c przedstawia jakąkolwiek ilość stałą.

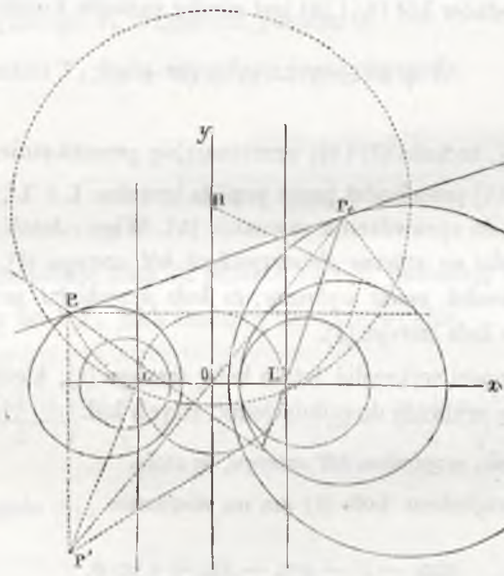
Niech będzie

$$(2) \qquad c = \pm d^2;$$

jeżeli $c = + d^2$, punkta przecięcia się okręgów kół (1) z osią pierwiastną wspólną Oy są urojone; te punkta są rzeczywiste, jeżeli $c = - d^2$.

Równanie (1) można położyć pod kształtem

$$(3) \qquad (x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - c.$$



Pomiędzy kołami zadosyć czyniącemi kwestyi, są *dwa koła znikające*, które odpowiadają uprzednio przez nas przytoczonemu związkowi

$$\lambda^2 = c;$$

środki tych dwóch kół dają dwa punkta

$$(4) \qquad \lambda = \pm \sqrt{c}$$

leżące na Ox, równo oddalone od punktu O. Te punkta były nazwane przez P. Poncelet, *punktami granicami*.

Dwa punkta granice L i L′ są rzeczywiste albo urojone według tego jak c jest równem $+d^2$ albo $-d^2$, to jest według tego jak koła nie przecinają albo przecinają oś pierwiastną.

Potęga początku O względem wszystkich kół (1) jest stałą i równą c albo $\pm d^2$; więc odległość punktów granic L i L′ od punktu O jest równa długości stałej stycznych poprowadzonych z punktu O do kół (1).

240. Potęga punktu stałego H, wziętego na osi pierwiastnej, względem wszystkich kół szeregu (1) jest stałą; i jeżeli $OH = h$, ma się

$$\overline{HM}^2 = h^2 + c;$$

HM jest styczną poprowadzoną z punktu H do jakiegokolwiek z tych kół; ta własność jest wreszcie następstwem bezpośredniem własności osi pierwiastnej nru [225].

Okręg koła zakreślony z punktu H, jako środka, promieniem HM, będzie miał na równanie

$$(4) \qquad x^2 + (y - h)^2 = h^2 + c.$$

Otóż kwadrat z odległości środków kół (3) i (4) jest równy summie kwadratów z promieni, gdyż

$$\lambda^2 + h^2 = (\lambda^2 - c) + (h^2 + c);$$

to jest jak to zobaczymy poniżej, że koła (3) i (4) przecinają się prostokątnie.

Sprawdza się nadto że koło (4) przechodzi przez punkta granice L i L′, ponieważ ich spółrzędne ($y = 0$, $x^2 = c$) posłużą także do sprawdzenia równania (4). Więc : *Jeżeli z jakiegokolwiek punktu osi pierwiastnej wspólnej, poprowadzi się styczne do wszystkich kół szeregu* (1), *punkta zetknięcia będą na temże samem kole, mającem za środek punkt wybrany; to koło przechodzi przez punkta granice* L i L′ *i przecina prostokątnie wszystkie koła szeregu* (1).

Możemy za pomocą tej własności wykreślić łatwo koła szeregu (1), kiedy one nie przecinają osi pierwiastnej wspólnej, i gdy się wybrało dowolnie jedno z tych kół.

241. *Biegunowe punktów granic, względem kół szeregu, są stałe.*

Biegunowa punktu (x_0, y_0) względem koła (1) ma na równanie

$$(5) \qquad x(x_0 - \lambda) + yy_0 - \lambda x_0 + c = 0.$$

Biegunową punktu $L(x_0 = +\sqrt{c},\ y_0 = 0)$ będzie

$$(6) \qquad x + \sqrt{c} = 0;$$

a biegunową punktu L′ będzie

$$(6\ bis) \qquad x - \sqrt{c} = 0.$$

Otóż równania (6) i (6 *bis*) są niezależne od λ; więc te proste są stałe.

Tak więc biegunowa punktu granicy L, *względem wszystkich kół szeregu, jest stałą; jestto równoległa do osi pierwiastnej przechodząca przez drugi punkt granicy* L'.

Ta własność daje jeszcze łatwe wykreślenie kół szeregu (1) kiedy się zna punkta granice.

Biegunowe (6) i (6 *bis*) będą urojone, jeżeli punkta granice są urojone.

242. *Jeżeli się daje punkt stały* P_0 *na płaszczyźnie kół* (1). *biegunowe punktu* P_0 *względem tych kół, przejdą przez punkt stały* P_1; *i odwrotnie, biegunowe punktu* P_1 *przejdą przez punkt* P_0.

Okręg koła zakreślony na prostej P_0P_1, *jako średnicy przejdzie przez punkta granice* L *i* L'; to jest *że odcinek* P_0P_1 *będzie widziany pod kątem prostym, z któregokolwiek z punktów granic.*

Prosta P_0P_1 *będzie styczną wspólną w* P_0 *i* P_1 *do dwóch kół szeregu.*

Jeżeli x_0 i y_0 są spółrzędne punktu P_0, biegunowa tego punktu względem kół szeregu (1) będzie daną przez równanie (5); otóż, jakiemkolwiek bądź byłoby λ, ta prosta przechodzi przez punkt stały

$$(7) \qquad \begin{cases} x + x_0 = 0, \\ xx_0 + yy_0 + c = 0. \end{cases}$$

1sze równanie przedstawia równoległą do osi pierwiastnej, i przechodzącą przez punkt symetryczny punktu P_0; 2giem równaniem jest biegunowa, względem koła zakreślonego na L i L' z punktu $P'(-x_0, -y_0)$ symetrycznego P_0 względem punktu O.

Spółrzędne x_1, y_1 punktu P_1 będą więc dane przez równania

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 + x_0 = 0, \\ x_1x_0 + y_1y_0 + c = 0; \end{cases}$$

symetrya tych równań pokazuje nam że punkta P_0 i P_1 posiadają własności wzajemne.

Okręg koła zakreślony na P_0P_1 jako średnicy ma na równanie

$$\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0 + y_1}{2}\right)^2 = \left(x_0 - \frac{x_1 + x_0}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{y_1 + y_0}{2}\right)^2;$$

albo, zważywszy na związki (8):

$$(9) \qquad x^2 + \left(y - \frac{x_0^2 + y_0^2 - c}{2y_0}\right)^2 = x_0^2 + \left(\frac{x_0^2 - y_0^2 - c}{4y_0^2}\right)^2;$$

otóż ten okręg koła przechodzi przez punkta granice ($y = 0$, $x^2 = c$); sprawdzenie jest łatwe. Jeżeli się wyznaczy środek c_0 jakiegokolwiek koła (1) przechodzącego przez punkt P_0, prosta łącząca ten środek z punktem P_0 ma za spółczynnik kątowy

$$+ \frac{2x_0y_0}{c + y_0^2 - x_0^2},$$

tóż iloczyn tego spółczynnika kątowego przez spółczynnik prostej P_0P_1; to jest

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1},$$

jest, mając wzgląd na związki (8)

$$-\frac{2x_0y_0}{c + y_0^2 - x_0^2}\cdot\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = -\frac{2x_0y_0}{c + y_0^2 - x_0^2}\cdot\frac{y_0\dfrac{x_0^2 - c}{y_0}}{2x_0} = -1;$$

więc prosta C_0P_0 jest prostopadłą do prostej P_0P_1. Zobaczymy podobnież że jeżeli C_1 jest środkiem jakiegokolwiek koła (1) przechodzącego przez punkt P_1 prosta C_1P_1 jest jeszcze prostopadłą do P_0P_1. Więc prosta P_0P_1 jest styczną wspólną w P_0 i P_1 do dwóch kół szeregu (1).

Te różne własności dają się uzasadnić łatwo za pomocą geometryi elementarnej. (Zobacz : *Traktat własności figur opisowych* albo *Zastosowanie Analizy i Geometryi* przez p. PONCELET, tom II, str. 338.)

IV° KĄT DWÓCH PROSTYCH.

243. Niech będą równania dwóch prostych, odniesione do dwóch osi prostokątnych,

$$(1)\qquad \begin{cases} D & Ax + By + Cz = 0, \\ D_1 & A_1x + B_1y + C_1z = 0, \end{cases}$$

x, y, z są spółrzędne jednorodne jakiegokolwiek punktu.

Kąt V tych dwóch prostych jest danym przez wzór n^ru [70]

$$(2)\qquad \operatorname{st} V = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1}.$$

Ślady δ i δ_1 dwóch prostych na prostej w nieskończoności są względnie wyznaczone przez równania

$$(3)\qquad \begin{cases} (\delta) & Ax + By = 0, \quad z = 0, \\ (\delta_1) & A_1x + B_1y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$$

Z drugiej strony punkta kołowe w nieskończoności ω i ω_1 są dane przez równania

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad z = 0.$$

albo

$$(4)\qquad \begin{cases} (\omega) & y - x\sqrt{-1} = 0, \quad z = 0, \\ (\omega_1) & y + x\sqrt{-1} = 0, \quad z = 0. \end{cases}$$

Oznaczmy przez R *stosunek nieharmoniczny* czterech punktów w nieskończoności ω, ω_1; δ, δ_1, albo czterech prostych przechodzących przez początek,

$$\begin{cases} Ax + By = 0, \\ A_1x + B_1y = 0, \\ y - x\sqrt{-1} = 0, \\ y + x\sqrt{-1} = 0, \end{cases}$$

które wyznaczają te cztery punkta.

Przypomnijmy sobie wzory (8) i (10) n^{ru} [170]

$$(5) \qquad R = (0,\ \delta\delta_1\omega\omega_1) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)};$$

ma się, w przypadku obecnym

$$a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{A}{B_1}, \quad c = \sqrt{-1}, \quad d = -\sqrt{-1};$$

przeto

$$R = \frac{(B\sqrt{-1} + A)(A_1 - B_1\sqrt{-1})}{(B_1\sqrt{-1} + A_1)(A - B\sqrt{-1})} = \frac{AA_1 + BB_1 + (A_1B - AB_1)\sqrt{-1}}{AA_1 + BB_1 + (A_1B - AB_1)\sqrt{-1}}.$$

Otóż z równania (2), wyciąga się

$$AB_1 - A_1B = (AA_1 + BB_1)\operatorname{st} V;$$

podstawiając tę wartość w wyrażeniu na R, ma się ostatecznie

$$(6) \qquad R = \frac{1 - \sqrt{-1}\operatorname{st} V}{1 + \sqrt{-1}\operatorname{st} V} = e^{-2V\sqrt{-1}};$$

zkąd

$$(6\ bis) \qquad \operatorname{st} V = \frac{1 - R}{(1 + R)\sqrt{-1}}.$$

Tak więc kąt dwóch prostych jest tylko funkcyą stosunku nieharmonicznego w układzie czterecpunktów, utworzonym przez punkta kołowe w nieskończoności i przez ślady dwóch prostych na prostej w nieskończoności.

Ma się więc to ważne twierdzenie :

Jeżeli R *jest stosunek nieharmoniczny układu czterech punktów utworzonego przez punkta kołowe w nieskończoności i ślady dwóch prostych na prostej w nieskończoności, kąt* V *tych dwóch prostych będzie spojony ze stosunkiem nieharmonicznym* R *przez związek bardzo prosty*

$$(7) \qquad \operatorname{st} V = \frac{1 - R}{(1 + R)\sqrt{-1}}, \quad \text{zkąd} \quad R = \frac{1 - \sqrt{-1}\operatorname{st} V}{1 + \sqrt{-1}\operatorname{st} V}.$$

Przy ocenieniu tego stosunku nieharmonicznego, należy uważać jako *połączone* punkta kołowe w nieskończoności, i ślady dwóch prostych, tak że jeżeli ω i ω_1 są punkta kołowe, a δ, δ_1 są ślady prostych, ma się

$$(8) \qquad \mathrm{R} = (\delta\delta_1\omega\omega_1) = \frac{\omega\delta}{\omega\delta_1} : \frac{\omega_1\delta}{\omega_1\delta_1}.$$

Równoważnik tego twierdzenia był danym przez p. Chasles'a (*Geometrya Wyższa*, n^{er} 652).

Kiedy dwie proste są prostokątne, stosunek nieharmoniczny R jest równym — 1, i odwrotnie. Więc :

Kiedy dwie proste są prostokątne, ich ślady na prostej w nieskończoności tworzą, z dwoma punktam kołowymi w nieskończoności, układ harmoniczny, i odwrotnie.

244. Podanie któreśmy uzasadnili, niezależnie od swej ważności geometrycznej, będzie nader pożytecznem dla wyznaczenia kąta dwóch prostych w jakimkolwiek układzie spółrzędnych.

W tym celu, wyznaczy się stosunek nieharmoniczny utworzony przez ślady dwóch prostych na linii w nieskończoności i punkta kołowe w nieskończoności; wzór (7) da wtedy poznać kąt dwóch prostych. Zobaczymy, we spółrzędnych trzylinijnych, zastosowanie tej metody.

§ V. — RÓWNANIA KÓŁ ZADOSYĆ CZYNIĄCYCH PEWNYM WARUNKOM.

1° Równanie jakiegokolwiek koła przechodzącego przez trzy punkta.

245. Niech będą $\mathrm{M}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{M}_2(x_2, y_2)$, $\mathrm{M}_3(x_3, y_3)$ trzy punkta dane, a

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{dos}\,\theta - 2\mathrm{a}x - 2\mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$$

równanie koła szukanego.

Ilości nieoznaczone są a, b, c, i widzimy że trzy punkta wystarczą do wyznaczenia koła. Wyraźmy że okręg koła (1) przechodzi przez trzy punkta dane, i przypuśćmy osie spółrzędnych prostokątne, równanie koła jest

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2\mathrm{a}x - 2\mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0,$$

a trzema równaniami warunkowemi będą

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 - 2\mathrm{a}x_1 - 2\mathrm{b}y_1 + \mathrm{c} = 0, \\ x_2^2 + y_2^2 - 2\mathrm{a}x_2 - 2\mathrm{b}y_2 + \mathrm{c} = 0, \\ x_3^2 + y_3^2 - 2\mathrm{a}x_3 - 2\mathrm{b}y_3 + \mathrm{c} = 0. \end{array} \right.$$

Aby rozwiązać kwestyą będzie potrzeba wyciągnąć wartości na a, b, c, z równań (3), i podstawić ich wartości w równaniu (2); albo, co wychodzi na jedno, będzie potrzeba wyrugować a, b, c, między czterema równaniami (2) i (3); wypadek z tego wyrugowania będzie

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

jestto równanie koła przechodzącego przez trzy punkta dane.

246. *Wykreślenie środka.*

Spółrzędnemi środka koła (2) są a i b; dla ich wyznaczenia, wyrugujmy c, między równaniami (3) odejmując je stronami.

Wykonajmy to działanie i zastąpmy a i b przez x i y które uważać będziemy jako spółrzędne zmienne jakiegokolwiek punktu, otrzymamy tym sposobem trzy równania następujące :

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - 2(x_1 - x_2)x - 2(y_1 - y_2)y = 0,$$

$$x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 - 2(x_2 - x_3)x - 2(y_2 - y_3)y = 0,$$

$$x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 - 2(x_3 - x_1)x - 2(y_3 - y_1)y = 0.$$

Te trzy równania przedstawiają trzy proste przechodzące przez jeden punkt, ponieważ jedno z tych równań jest oczywiście następstwem dwóch innych; punkt spotkania tych trzech prostych jest środkiem koła szukanego.

Otóż 1sza z tych prostych przechodzi przez środek prostej M_1M_2 i jest prostopadłą do tejże samej prostej. W rzeczy samej, spółrzędne punktu środka M_1M_2 to jest

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

sprawdzają widocznie 1sze z równań powyższych. Spółczynniki kątowe dwóch prostych są względnie

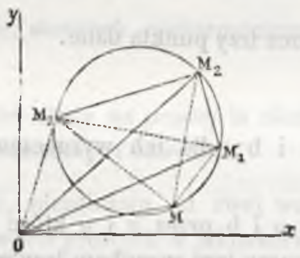
$$-\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}, \qquad +\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

one są więc prostopadłemi według nru [70]. Taż sama uwaga daje się zastosować do dwóch innych prostych. Znajduje się tym sposobem wykreślenie elementarne środka jakiegokolwiek koła przechodzącego przez trzy punkta.

247. Równanie (4) prowadzi nas do własności względnej jakiegokolwiek koła przechodzącego przez trzy punkta. Niech będzie M jakikolwiek punkt (x, y) koła przechodzącego przez trzy punkta M_1, M_2, M_3, a O początek spółrzędnych.

Równanie (4) rozwinięte daje

$$x^2+y^2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} - (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



Otóż ma się

$$x^2+y^2=\overline{\mathrm{OM}}^2 \qquad x_1^2+y_1^2=\overline{\mathrm{OM}}_1^2, \qquad x_2^2+y_2^2=\overline{\mathrm{OM}}_2^2, \qquad x_3^2+y_3^2=\overline{\mathrm{OM}}_3^2;$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \text{powierz. } \mathrm{M_1M_2M_3}, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \text{powierz. } \mathrm{MM_2M_3}, \text{ etc...};$$

ztąd wyprowadzamy związek *metryczny* lub ogólnie *miarowy*

$$(5)\quad \overline{\mathrm{OM}}^2 \text{ powierz. } \mathrm{M_1M_2M_3} = \overline{\mathrm{OM}}_1^2 \text{ powierz. } \mathrm{MM_2M_3} + \overline{\mathrm{OM}}_2^2 \text{ powierz. } \mathrm{MM_3M_1} + \overline{\mathrm{OM}}_3^2 \text{ powierz. } \mathrm{MM_1M_2},$$

O jest jakikolwiek punkt dowolnie wzięty na płaszczyznie, a M jakikolwiek punkt okręgu koła przechodzącego przez trzy punkta stałe M_1, M_2, M_3.

(Powierz. M′M″M‴) będzie przedstawiała *więcej* albo *mniej* wartość liczebną powierzchni, według tego jak dla przyjścia od M′, ku M″, ku M‴, obraca się w pewnym kierunku lub w kierunku przeciwnym, na mocy umowy przyjętej w n^rze [79].

248. Możemy jeszcze wyprowadzić z równania (4) związek między odległościami wzajemnemi czterech punktów M, M_1, M_2, M_3 leżących na kole.

Ma się w rzeczy samej, według równania (4), równość

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2+y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0;$$

tę równość można jeszcze napisać

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2 & -2x & -2y \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 \\ 1 & x_2^2+y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 \\ 1 & x_3^2+y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Otóż pomnóżmy te wyznaczniki stronami podług prawidła znanego (tu pomnóżmy liniami), i załóżmy

$$\begin{cases} d_{12} = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2, & d_{13} = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2, & d_{14} = (x-x_3)^2+(y-y_3)^2, \\ d_{23} = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2, & d_{24} = (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2, & d_{34} = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2, \end{cases}$$

znajduje się bezpośrednio związek szukany, to jest

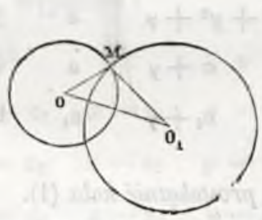
$$(6) \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad d_{rs} = d_{sr}.$$

Związek (6) wychodzi w gruncie na twierdzenie Ptolemeusza. Ten sposób rachunku był wskazanym przez p. Caylay (*Dziennik Kembrydzki*, tom II).

II° Równanie kół przecinających prostokątnie koła dane.

249. Dwa koła się przecinają prostokątnie kiedy ich styczne w punkcie przecięcia są prostopadłe między sobą.

Jeżeli M jest punktem w którym dwa koła (O) i (O_1) przecinają się pod kątem prostym, pro-



mienie OM i O_1M są prostopadłemi między sobą, jako względnie prostopadłe do dwóch stycznych w M przypuszczonych prostokątnemi; trójkąt OO_1M będąc prostokątnym w M, ma się więc

$$OO_1^2 = \overline{OM}^2 + \overline{O_1M}^2;$$

to jest *aby dwa okręgi kół były prostokątnymi potrzeba i dosyć aby kwadrat z odległości środków był równym summie kwadratów z promieni.*

Zostawimy do wykonania, jako ćwiczenie, dowodzenie analityczne tego podania.

250. Niech będą dwa koła dane

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2+y^2-2ax-2by+c=0, & (O)\\ x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c=0; & (O_1)\end{cases}$$

niech będzie równanie jakiegokolwiek koła

$$(2)\qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0, \quad (C)$$

mającego przecinać prostokątnie dwa koła dane; szukajmy związków które w tym celu muszą sprawdzać nieoznaczone α, β, γ.

Spółrzędne koła (O) są a, b; kwadratem z jego promienia jest (a^2+b^2-c); i tak samo dla innych. Musi się więc otrzymać według podania poprzedzającego

$$(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2=(a^2+b^2-c)+(\alpha^2+\beta^2-\gamma),$$

$$(\alpha-a_1)^2+(\beta-b_1)^2=(a_1^2+b_1^2-c_1)+(\alpha^2+\beta^2-\gamma);$$

albo upraszczając

$$(3)\qquad \begin{cases} 2\alpha a+2\beta b-\gamma-c=0,\\ 2\alpha a_1+2b\beta_1-\gamma-c_1=0;\end{cases}$$

te są warunki aby koło przecinało prostokątnie koła (O) i (O_1).

Wyrugowawszy α i β między równaniami (2) i (3), znajduje się

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2+\gamma & x & y\\ c+\gamma & a & b\\ c_1+\gamma & a_1 & b_1\end{vmatrix}=0;$$

jestto równanie ogólne kół przecinających prostokątnie koła (1).

Równanie zamyka stałą dowolną γ; liczba tych kół (4) jest zatem nieskończoną.

Miejscem środków kół (4).

Spółrzędne α i β środka jakiegokolwiek z tych kół będą dane przez równania (3); jeżeli się je odejmie stronami, zastąpiwszy α i β przez zmienne x i y, otrzyma się na miejsce środków

$$(5)\qquad 2(a-a_1)x+2(b-b_1)y+(c-c_1)=0.$$

To równanie przedstawia linią prostą; otóż, odejmując stronami równania (1), znajduje się tę samą prostą. Więc :

Miejscem środków kół przecinających prostokątnie koła (O) i (O$_1$) *jest oś pierwiastna tych dwóch kół.*

251. *Równanie koła przecinającego prostokątnie trzy koła dane.*

Niech będą równania zrobione jednorodnemi

$$(1)\qquad \begin{aligned} F &= x^2 + y^2 - 2(a_1x + b_1y)z + c_1z^2 = 0, \\ G &= x^2 + y^2 - 2(a_2x + b_2y)z + c_2z^2 = 0, \\ H &= x^2 + y^2 - 2(a_3x + b_3y)z + c_3z^2 = 0, \end{aligned}$$

trzech kół danych, a

$$(2)\qquad x^2 + y^2 - 2(\alpha x + \beta y)z + \gamma z^2 = 0,$$

równanie koła mającego przecinać prostokątnie trzy koła dane.

Według twierdzenia n^{ru} [249], warunkami aby koło (2) przecinało prostokątnie koła (1), będą

$$(3)\qquad \begin{cases} + c - 2\alpha a_1 - 2\beta b_1 + \gamma = 0, \\ + c_2 - 2\alpha a_2 - 2\beta b_2 + \gamma = 0, \\ + c_3 - 2\alpha a_3 - 2\beta b_3 + \gamma = 0. \end{cases}$$

Wyrugowawszy α, β, γ, między równaniami (2) i (3), otrzyma się na równanie szukane koła dającego przecięcia prostokątne (*du cercle orthomique*)

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 1 \\ c_3 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

To równanie można przekształcić w sposób następujący : Odejmijmy pierwszą linię od każdej z następujących, potem zmieńmy znaki, wypadnie :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x^2 + y^2 - c_1 & x - a_1 & y - b_1 & 0 \\ x^2 + y^2 - c_2 & x - a_2 & y - b_2 & 0 \\ x^2 + y^2 - c_3 & x - a_3 & y - b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

albo, rozwijając względem ostatniej kolumny :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - c_1 & x - a_1 & y - b_1 \\ x^2 + y^2 - c_2 & x - a_2 & y - b_2 \\ x^2 + y^2 - c_3 & x - a_3 & y - b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Odejmując nakoniec od 1szej kolumny, summę dwóch ostatnich względnie pomnożonych przez x i y, ma się ostatecznie

$$(5)\quad \begin{vmatrix} a_1x + b_1y - c_1 & x - a_1 & y - b_1 \\ a_2x + b_2y - c_2 & x - a_2 & y - b_2 \\ a_3x + b_3y - c_3 & x - a_3 & y - b_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{albo} \quad \begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \\ H'_x & H'_y & H'_z \end{vmatrix} = 0 \quad (6);$$

takim jest kształt godzien uwagi do którego da się sprowadzić równanie koła przecinającego prostokątnie trzy koła dane.

Zauważmy własność następującą :

Trzy biegunowe jakiegokolwiek punktu P_0 koła dającego przecięcia prostokątne, wzięte względem trzech kół danych, przechodzą przez jeden punkt P_1, który to punkt należy zarówno do koła dającego przecięcia prostokątne; dwa punkta P_0 i P_1 posiadają wzajemnie tę samą własność.

Niech będą x_0, y_0, z_0, spółrzędne jednorodne punktu P_0; biegunowe względne tego punktu względem kół F, G, H, będą miały na równania

$$(7)\quad \begin{cases} xF'_{x_0} + yF'_{y_0} + zF'_{z_0} = 0, \\ xG'_{x_0} + yG'_{y_0} + zG'_{z_0} = 0, \\ xH'_{x_0} + yH'_{y_0} + zH'_{z_0} = 0, \end{cases} \quad \text{albo (7 bis)} \quad \begin{cases} x_0F'_x + y_0F'_y + z_0F'_z = 0, \\ x_0G'_x + y_0G'_y + z_0G'_z = 0, \\ x_0H'_x + y_0H'_y + z_0H'_z = 0, \end{cases}$$

Otóż jeżeli wyrazimy że trzy proste przecinają się w jednym punkcie, znajduje się dokładnie równanie (6) koła dającego przecięcia prostokątne; więc jeżeli punkt P_0 znajduje się na tem kole, trzy proste (7) zbiegną się w jednym punkcie P_1.

Spółrzędne punktu P_1 są dane przez równania (7) albo (7 *bis*); zmieniając położenie punktu P_0, otrzyma się miejsce punktu P_1 rugując x_0, y_0, z_0 między równaniami (7*bis*), co prowadzi do równania (6) koła dającego przecięcia prostokątne.

Równanie (7 *bis*) pokazuje nam jeszcze że biegunowe punktu P_1 przechodzą przez punkt P_0. W rzeczy samej, jedną z tych biegunowych jest

$$xF'_{x_0} + yF'_{y_0} + zF'_{z_0} = 0;$$

lecz spółrzędne punktu P_1 muszą sprawdzać równania (7 *bis*); ma się na przykład,

$$x_0F'_{x_0} + y_0F'_{y_0} + z_0F'_{z_0} = 0;$$

otóż ten związek wyraża że prosta poprzedzająca przechodzi przez punkt (x_0, y_0, z_0).

Więc.....

III° Dowodzenie analityczne kilku własności elementarnych koła.

252. Uwaga.

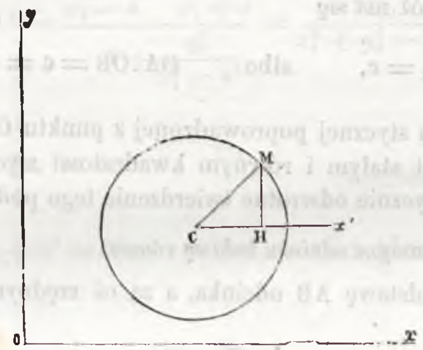
Równanie jakiejkolwiek krzywej jest związkiem między spółrzędnemi x i y któregokolwiek z jej punktów; można więc uważać jedną ze spółrzędnych jako funkcyą drugiej, albo ogólniej, można uważać dwie spółrzędne jako funkcye jakiejkolwiek ilości dowolnej albo *parametru* dowolnego; kształt jednej z tych funkcyi może być wzięty do woli, druga wynika wtedy z równania danego. Jest często dogodnie wyrazić dwie spółrzędne jakiegokolwiek punktu krzywej za pomocą jakiegokolwiek parametru dowolnego; zobaczymy liczne przykłady.

Na pierwszy przykład, weźmy równanie koła odniesionego do osi prostokątnych

(1) $$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2;$$

spółrzędne jakiegokolwiek punktu tego koła będą mogły się wyrazić za pomocą jednej tylko nieoznaczonej przez związki następujące

(2) $$\begin{cases} x-a=R\operatorname{dos}\varphi, \\ y-b=R\operatorname{wst}\varphi, \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} x=a+R\operatorname{dos}\varphi \\ y=b+R\operatorname{wst}\varphi; \end{cases}$$



te wartości sprawdzają oczywiście równanie (1) jakiemkolwiek bądź byłoby φ. Nieoznaczona φ nazywa się *parametrem kątowym* punktu $M(x, y)$.

Widzimy że φ jest kątem promienia CM z osią odciętych, C będąc środkiem koła. Gdyż ma się widocznie (zobacz na figurze) $CH=x-a$, $MH=y-b$; zkąd

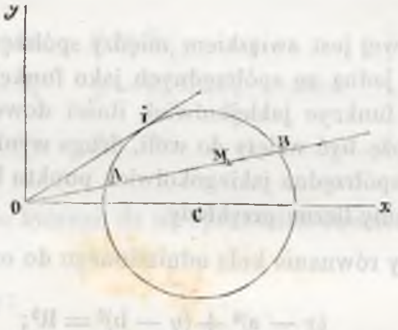
$$\begin{cases} \operatorname{dos}\varphi=\operatorname{dos}\widehat{MCx'}, \\ \operatorname{wst}\varphi=\operatorname{wst}\widehat{MCx'}. \end{cases}$$

253. *Iloczyn odcinków jakiejkolwiek siecznej, przechodzącej przez punkt stały, jest stałym.*

Weźmy punkt stały za początek, a za oś x średnicę przechodzącą przez ten punkt, równanie koła będzie kształtu

(1) $$x^2+y^2-2ax+c=0.$$

Jeżeli OA jest jakąkolwiek sieczną, α jej kątem z osią Ox, $M(x, y)$ jakikolwiek z jej punktów, a ρ odległością OM, ma się



$$(2) \qquad x = \rho\,\mathrm{dos}\,\alpha, \qquad y = \rho\,\mathrm{wst}\,\alpha.$$

Zastępując x i y przez te wartości w równaniu (1), wypadnie

$$(3) \qquad \rho^2 - 2a\rho + c = 0.$$

Pierwiastki ρ_1, ρ_2, równania (3) będą odległościami punktu O od punktów A i B, w których sieczna OAB spotyka koło; otóż ma się

$$(4) \qquad \rho_1\rho_2 = c, \qquad \text{albo} \qquad OA.OB = c = \textit{stałej},$$

Lecz ilość c jest kwadratem stycznej poprowadzonej z punktu O do koła, według nru [218]; więc iloczyn odcinków OA, OB jest stałym i równym kwadratowi stycznej poprowadzonej z punktu O. Zostawiamy udowodnić analitycznie odwrotne twierdzenie tego podania.

254. *Kąty wpisane w tymże samym odcinku koła są równe.*

Weźmy za oś odciętych podstawę AB odcinka, a za oś rzędnych prostopadłą wyniesioną z jego

środka. Jeżeli h jest rzędną środka, równaniem okręgu koła będzie

$$(1) \qquad x^2 + (y - h)^2 = R^2;$$

a oznaczając przez 2a długość AB, ma się

$$(2) \qquad R^2 = a^2 + h^2.$$

Niech będą M jakimkolwiek punktem koła, x_1, y_1, jego spółrzędnemi; V kątem AMB; ma się

$$V = \widehat{MAx} - \widehat{MBx} = \alpha - \beta;$$

zkąd

$$\operatorname{st} V = \frac{\operatorname{st}\alpha - \operatorname{st}\beta}{1 + \operatorname{st}\alpha \operatorname{st}\beta}$$

Otóż α i β będąc kątami prostych AM i BM z dyrekcyą dodatną Ox, ma się

$$\operatorname{st}\alpha = \frac{y_1}{x_1 - a}, \qquad \operatorname{st}\beta = \frac{y_1}{x_1 + a};$$

przeto

$$\operatorname{st} V = \frac{\dfrac{y_1}{x_1 - a} - \dfrac{y_1}{x_1 + a}}{1 + \dfrac{y_1^2}{x_1^2 - a^2}} = \frac{2ay_1}{x_1^2 + y_1^2 - a^2}.$$

Ponieważ punkt M należy do koła, ma się

$$x_1^2 + y_1^2 - 2hy_1 + h^2 = R^2, \qquad \text{albo} \qquad x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 2hy_1;$$

więc

$$(3) \qquad \operatorname{st} V = \frac{a}{h};$$

a tem samem, kąt V jest stałym.

Jeżeli się złączy środek C z punktem A, ma się

$$a = h \operatorname{st} \widehat{OCA}; \qquad \text{więc} \qquad \widehat{OCA} = V.$$

Gdy z punktu A poprowadzi się prostopadłą do CA, przedłużając ją pod spodem AB, na mocy tego wykreślenia wyniknie $\widehat{BAT} = \widehat{OCA} = V$. Ztąd wypada sposób znany Geometryi elementarnej: na danej prostej AB, nakreślić odcinek koła AMB obejmujący kąt dany V.

255. Uzasadnimy jeszcze wiele ważnych własności koła, które się dowodzą łatwo przez geometryą elementarną; lecz dowodzenie analityczne takowych jeśli nie jest pokierowane przezornie, staje się zbyt rozwlekłem.

Środki podobieństwa dwóch kół.

Niech będą dwa koła

$$(1)\qquad \begin{cases} c_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2 = 0, \\ c_2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - R_2^2 = 0. \end{cases}$$

Jak to już widzieliśmy w n[rze] [230]; styczne wspólne do dwóch kół, będąc rzeczywiste albo urojone przecinają linią środków w dwóch punktach S i S′, których spółrzędnemi względnemi są

$$(2)\qquad S\begin{cases} x = \dfrac{a_1R_2 - a_2R_1}{R_2 - R_1}, \\ y = \dfrac{b_1R_2 - b_2R_1}{R_2 - R_1}; \end{cases} \qquad S'\begin{cases} x = \dfrac{a_1R_2 + a_2R_1}{R_2 + R_1}, \\ y = \dfrac{b_1R_2 + b_2R_1}{R_2 + R_1}. \end{cases}$$

Promienie wodzące poprowadzone do dwóch kół przez którykolwiek z tych punktów są w stosunku promieni; te dwa punkta są nazwane: 1[szy] S, *środek podobieństwa zewnętrzny*; 2[gi] S′, *środek podobieństwa wewnętrzny.*

W rzeczy samej, weźmy punkt S, na przykład, za początek spółrzędnych, a linię środków za oś odciętych, otrzyma się

$$(3)\qquad b_1 = 0, \qquad b_2 = 0, \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{R_2}{R_1} = k;$$

równaniami dwóch okręgów kół będą

$$(4)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1x + a_1^2 - R_1^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ka_1x + k^2(a_1^2 - R_1^2) = 0. \end{cases}$$

Poprowadźmy przez punkt S, jakąkolwiek sieczną; niech będzie α kąt jaki ona czyni z osią

odciętych; niech będą x i y spółrzędnemi któregokolwiek z jej punktów, a ρ odległością OM; otrzyma się

$$x = \rho\cos\alpha, \qquad y = \rho\sin\alpha.$$

Jeśli się podstawi te wartości w równaniach kół (4), odległości ρ, punktu S, od punktów M_1 i M'_1 w których ona spotyka koło O_1 będą dane przez równania

$$(5)\qquad \rho^2 - 2a_1 \mathrm{dos}\,\alpha . \rho + a_1^2 - R_1^2 = 0, \quad \text{zkąd} \quad \begin{cases} SM_1 = a_1 \mathrm{dos}\,\alpha - \sqrt{R_1^2 - a_1^2 \mathrm{wst}^2\alpha}, \\ SM'_1 = a_1 \mathrm{dos}\,\alpha + \sqrt{R_1^2 - a_1^2 \mathrm{wst}^2\alpha}; \end{cases}$$

odległości ρ', punktu S, od punktów M_2 i M'_2 w których ona spotyka koło O_2 będą dane przez równania

$$(6)\qquad \rho'^2 - 2k a_1 \mathrm{dos}\,\alpha . \rho' + k^2(a_1^2 - R_1^2) = 0, \quad \text{zkąd} \quad \begin{cases} SM_2 = k[a_1 \mathrm{dos}\,\alpha - \sqrt{R_1^2 - a_1^2 \mathrm{wst}^2\alpha}], \\ SM'_2 = k[a_1 \mathrm{dos}\,\alpha + \sqrt{R_1^2 - a_1^2 \mathrm{wst}^2\alpha}]. \end{cases}$$

Widzimy, podług tych wartości, że się ma, jakiemkolwiek bądź byłoby α :

$$\frac{SM_2}{SM_1} = k, \qquad \frac{SM'_2}{SM'_1} = k;$$

ta własność nie istnieje dla promieni wodzących SM_1 i SM'_2, SM'_1 i SM_2; punkta takie jak M_1 i M_2, M'_1 i M'_2 są nazwane *punktami odpowiednimi*.

Sprawdzi się bez trudności że styczne n[ru] [212] dla punktów odpowiednich takich jak M_1 i M_2, albo M'_1 i M'_2 są równoległe; styczne, dla punktów odpowiadających lecz nie odpowiednich, takich jak M_1 i M'_2, M'_1 i M_2 nie są równoległe.

Te ostatnie własności są wreszcie następstwami podania następującego.

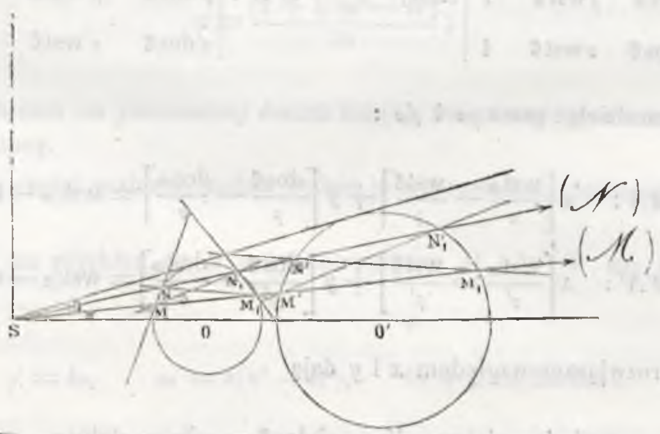
256. *Przez którykolwiek ze środków podobieństwa dwóch kół, prowadzi się sieczne dowolne, łączy się dwa punkta przecięcia leżące na jednem z kół, i dwa punkta przecięcia leżące na drugiem kole; niech będą M i N dwa punkta leżące na pierwszem kole; M' i N' dwa punkta leżące na drugiem kole: M i M' będąc na jednej z siecznych, N i N' na drugiej.*

1° *Jeżeli M' jest odpowiednim M, i N' odpowiednim N, dwie proste MN i M'N' są równoległe.*

2° *Jeśli M' nie jest odpowiednim M, i gdy N' nie jest także odpowiednim N; dwie proste MN i M'N' przecinają się na osi pierwiastnej dwóch kół.*

3° *Jeśli M' jest odpowiednim M, i gdy N' nie jest odpowiednim N; proste MN i M'N' nie są więcej równoległe i nie przecinają się więcej na osi pierwiastnej.*

Pierwsza część tego podania wynika z własności poprzedzającej; gdyż dwie proste MN i $M'N'$ są



wtedy dwie proste odpowiednie; więc.....

Aby dowieść innych własności, weźmy środek S podobieństwa zewnętrzny, na przykład i wybierzmy go za początek spółrzędnych; weźmy linię środków za oś odciętych; równaniami dwóch kół będą wtedy, według numeru poprzedzającego :

$$(1)\qquad \begin{cases} (O) \quad x^2 + y^2 - 2ax + (a^2 - R^2) = 0, \\ (O') \quad x^2 + y^2 - 2kax + k^2(a^2 - R^2) = 0. \end{cases}$$

Niech będą α i β kąty dwóch siecznych OM i ON z osią x; ρ odległość od punktu S jakiegokolwiek punktu (x, y) wziętego na pierwszej, σ, odległość od punktu S jakiegokolwiek punktu (x, y) wziętego na drugiej; otrzyma się

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \rho \operatorname{dos}\alpha, \\ y = \rho \operatorname{wst}\alpha; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sigma \operatorname{dos}\beta, \\ y = \sigma \operatorname{wst}\beta. \end{cases}$$

Według tego równania wyznaczające odległości punktu S od jednego i drugiego okręgu koła na siecznych uważanych, będą :

$$\begin{cases} (3) \quad \rho^2 - 2a\operatorname{dos}\alpha\rho + a^2 - R^2 = 0, & \text{dające} \quad SM \text{ i } SM_1 \ldots\ldots (O), \\ (4) \quad \rho'^2 - 2ak\operatorname{dos}\alpha.\rho' + k^2(a^2 - R^2) = 0; & \ldots\ldots\ldots \quad SM' \text{ i } SM'_1 \ldots\ldots (O'); \\ (5) \quad \sigma^2 - 2a\operatorname{dos}\beta.\sigma + a^2 - R^2 = 0, & \ldots\ldots\ldots \quad SN \text{ i } SN'_1 \ldots\ldots (O), \\ (6) \quad \sigma'^2 - 2ak\operatorname{dos}\beta.\sigma' + k^2(a^2 - R^2) = 0; & \ldots\ldots\ldots \quad SN' \text{ i } SN'_1 \ldots\ldots (O'). \end{cases}$$

Jeżeli M i N są dwa punkta koła (O) na jednej i drugiej siecznej, potem M' i N' dwa punkta koła (O') również leżące na jednej i drugiej siecznej, według wzorów (2) i związku któryśmy przyjęli, równaniami prostych odpowiadających MN, $M'N'$ będą

$$MN: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \rho\operatorname{dos}\alpha & \rho\operatorname{wst}\alpha & 1 \\ \sigma\operatorname{dos}\beta & \sigma\operatorname{wst}\beta & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad M'N': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \rho'\operatorname{dos}\alpha & \rho'\operatorname{wst}\alpha & 1 \\ \sigma'\operatorname{dos}\beta & \sigma'\operatorname{wst}\beta & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

albo rozwijając, potem dzieląc przez $\rho\sigma$ i $\rho'\sigma$:

$$(7)\qquad \begin{cases} MN: \quad x\left[\dfrac{\operatorname{wst}\alpha}{\sigma} - \dfrac{\operatorname{wst}\beta}{\rho}\right] + y\left[\dfrac{\operatorname{dos}\beta}{\rho} - \dfrac{\operatorname{dos}\alpha}{\sigma}\right] = \operatorname{wst}(\alpha - \beta), \\ M'N': \quad x\left[\dfrac{\operatorname{wst}\alpha}{\sigma'} - \dfrac{\operatorname{wst}\beta}{\rho'}\right] + y\left[\dfrac{\operatorname{dos}\beta}{\rho'} - \dfrac{\operatorname{dos}\alpha}{\sigma'}\right] = \operatorname{wst}(\alpha - \beta). \end{cases}$$

Te dwa równania rozwiązane względem x i y dają

$$(8)\qquad \begin{cases} x(\rho\sigma' - \rho'\sigma) = \sigma\sigma'(\rho - \rho')\operatorname{dos}\beta - \rho\rho'(\sigma - \sigma')\operatorname{dos}\alpha, \\ y(\rho\sigma' - \rho'\sigma) = \sigma\sigma'(\rho - \rho')\operatorname{wst}\beta - \rho\rho'(\sigma - \sigma')\operatorname{wst}\alpha. \end{cases}$$

Przypuśćmy teraz że ρ i ρ' są odległości na SM, punktu S od dwóch punktów nie odpowiednich; i że podobnież, σ i σ' są odległości na SN, punktu S od dwóch punktów nie odpowiednich.

Uzasadnimy naprzód między temi długościami wiele związków godnych uwagi.

Wyrugujmy dosα między związkami (3) i (4), potem dosβ między (5) i (6), dojdzie się do równości następujących, zauważywszy że ρ' jest różnem od $k\rho$, i σ' różnem od $k\sigma$, według założenia poprzedzającego:

$$(9)\qquad \begin{cases} \rho\rho' = k(a^2 - R^2), \\ \sigma\sigma' = k(a^2 - R^2). \end{cases}$$

Ztąd, mimochodem, to twierdzenie:

Jeżeli M i N są dwa punkta 1^{go} koła, M' i N' dwa punkta drugiego koła, leżące względnie do dwóch pierwszych na jednychże siecznych; jeśli nadto, M' nie jest odpowiednim M i N' nie jest odpowiednim N; otrzyma się, jakiemikolwiek bądź byłyby sieczne uważane

$$(10)\qquad \overline{SM} \times \overline{SM'} = \overline{SN} \times \overline{SN'}.$$

Z tego podania i z odwrotnego twierdzenia podania n^{ru} [253] wypada że:

Cztery punkta M, N; M', N', zadosyć czyniące warunkom powyżej wymienionym, są na jednem kole.

Teraz od równań (3) i (5) pomnożonych przez k^2, odejmijmy równania (4) i (6), znajdziemy

$$(11)\qquad \begin{cases} k\rho + \rho' = 2ak\,\mathrm{dos}\,\alpha \\ k\sigma + \sigma' = 2ak\,\mathrm{dos}\,\beta. \end{cases}$$

Jest wtedy łatwo sprawdzić że dwie proste MN i $M'N'$ przecinają się na osi pierwiastnej dwóch kół.

Jeżeli się ma wzgląd na związki (9), ponieważ w pierwszem z równań (8), zastępuje się dosα i dosβ przez wartości, wynikające ze związków (11), znajduje się

$$(12)\qquad x = \frac{(1+k)(a^2 - R^2)}{2a};$$

jestto dokładnie równaniem *osi pierwiastnej* dwóch kół (1). Druga część podania wysłowionego znajduje się więc dowiedzioną.

Co się tyczy trzeciej części podania, można będzie ją wyprowadzić, posługując się dwoma równaniami (8).

Jeśli się przypuści, na przykład, że M' jest odpowiednim M i że N' nie jest odpowiednim N, otrzyma się:

$$(13)\qquad \rho' = k\rho, \qquad \sigma\sigma' = k(a^2 - R^2), \qquad k\sigma + \sigma' = 2ak\,\mathrm{dos}\,\beta.$$

Wyruguje się wtedy ρ' i σ', za pomocą tych związków, w wartościach (8) na x i y; potem wyciągnie się ρ i σ z równań (3) i (5). Dojdzie się tym sposobem do równości następujących :

$$(14)\quad\begin{cases} 2x\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\beta}=[\mathrm{a}\,\mathrm{dos}\alpha+\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\alpha}][\mathrm{a}(1-k)\mathrm{dos}\beta+(1+k)\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\beta}]\mathrm{dos}\alpha-(\mathrm{a}^2-\mathrm{R}^2)(1-k)\mathrm{dos}\beta. \\ 2y\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\beta}=[\mathrm{a}\,\mathrm{dos}\alpha+\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\alpha}][\mathrm{a}(1-k)\mathrm{dos}\beta+(1+k)\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\beta}]\mathrm{wst}\alpha-(\mathrm{a}^2-\mathrm{R}^2)(1-k)\mathrm{wst}\beta, \end{cases}$$

1° Przypuśćmy β stałem i wyrugujmy α między dwoma równaniami (14). W tym celu założmy

$$(15)\quad\begin{cases} \mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\beta}, \\ \mathrm{B}=\mathrm{a}(1-k)\mathrm{dos}+(1-k)\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\beta}; \\ p=(\mathrm{a}^2-\mathrm{R}^2)(1-k)\mathrm{dos}\beta, \\ q=(\mathrm{a}^2-\mathrm{R}^2)(1-k)\mathrm{wst}\beta; \end{cases}\qquad\begin{cases} x'=2\mathrm{A}x+p, \\ y'=2\mathrm{A}y+q, \\ \text{zkąd} \\ x'^2+y'^2=4\mathrm{A}^2(x^2+y^2)+2\mathrm{A}(px+qy)+p^2+q^2: \end{cases}$$

równania (14) stają się

$$x'=\mathrm{B}\,\mathrm{dos}\alpha(\mathrm{a}\,\mathrm{dos}\alpha+\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\alpha}),$$

$$y'=\mathrm{B}\,\mathrm{wst}\alpha(\mathrm{a}\,\mathrm{dos}\alpha+\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\alpha}).$$

Dzieląc stronami, potem dodając summę kwadratów po odosobnieniu pierwiastku, znajdujemy

$$\mathrm{st}\alpha=\frac{y'}{x'},\qquad x'^2+y'^2-2\mathrm{aB}\,\mathrm{dos}\alpha(x'\mathrm{dos}\alpha+y'\mathrm{wst}\alpha)+(\mathrm{a}^2-\mathrm{R}^2)\mathrm{R}^2=0.$$

Rugowanie α jest wtedy łatwem, i otrzymuje się ostatecznie

$$(16)\qquad 4\mathrm{A}^2(x^2+y^2)+2\mathrm{A}(px+qy)-2\mathrm{Ba}(2\mathrm{A}x+p)+\mathrm{R}^2(\mathrm{a}^2-\mathrm{R}^2)+p^2+q^2=0.$$

To równanie przedstawia jakiekolwiek koło; otrzyma się tym sposobem dwa koła według tego jak w wartościach na A i B weźmie się pierwiastek $\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\beta}$ ze znakiem + albo ze znakiem —. Więc

Jeżeli na jakiejkolwiek siecznej stałej, przechodzącej przez S, *bierze się dwa punkta nie odpowiednie i gdy się je łączy z dwoma punktami odpowiednimi leżącymi na jakiejkolwiek siecznej ruchomej około* S; *miejsce punktów przecięcia prostych, tym sposobem otrzymanych będzie się składało z dwóch kół, jedno odpowiadające punktom nie odpowiednim zewnętrznym na siecznej stałej, drugie punktom nie odpowiednim wewnętrznym.*

2° Przypuśćmy α stałem i rugujmy β między dwoma równaniami (13); znajdzie się wtedy jakiekolwiek równanie drugiego stopnia. Więc

Jeżeli na jakiejkolwiek siecznej stałej, przechodzącej przez S, *bierze się dwa puukta odpowiednie i gdy się je łączy z dwoma punktami nie odpowiednimi leżącymi na jakiejkolwiek siecznej ruchomej około* S, *miejscem punktów przecięcia prostych tym sposobem otrzymanych jest jakakolwiek krzywa drugiego stopnia, ogólnie różna od jakiegokolwiek koła.*

Sprawdzi się jeszcze wiele innych własności, rozbierając przypadki szczególne tej kwestyi.

(Zobacz : *Zastosowania analizy i geometryi*, przez p. PONCELET, tom I.)

257. *Kiedy jakiekolwiek koło jest stycznem do dwóch innych kół, cięciwa zetknięcia przechodzi przez jeden ze środków podobieństwa dwóch kół.*

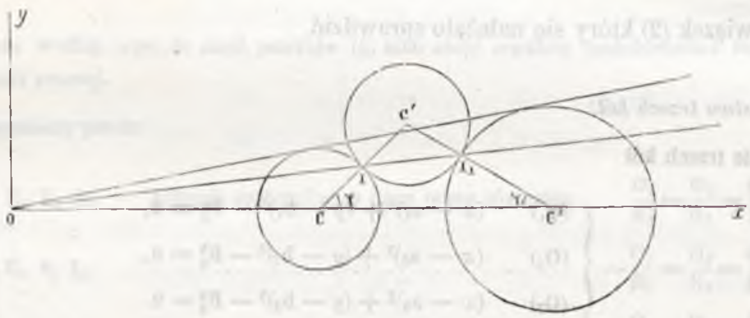
Ta własność wynika z podania dowiedzionego w numerze poprzedzającym, jednakże uzasadnimy ją bezpośrednio za pomocą rachunku.

Przypuśćmy że koło dotyka dwóch kół danych, obu zewnętrznie albo obóch wewnętrznie, i weźmy wtedy za początek środek podobieństwa zewnętrzny. Jeśliby koło dotykało dwa koła, jedno wewnętrznie a drugie zewnętrznie, wziętoby się za początek środek podobieństwa wewnętrzny.

Linia środków będąc osią odciętych, równaniami dwóch kół stałych będą według n[ru] [255]

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax + (a^2 - R^2) = 0; \\ x^2 + y^2 - 2akx + k^2(a^2 - R^2) = 0. \end{cases}$$

Ma się $\frac{R_1}{R} = k$, jeśli R_1 jest promieniem drugiego koła.



Niech będą I i I_1 punktami zetknięcia okręgu koła C' z kołami C i C_1; (x_1, y_1) i (x_2, y_2) spółrzędnemi względnemi I i I_1; niech będzie nakoniec

$$\varphi = \widehat{ICx}, \qquad \varphi_1 = \widehat{I_1C_1O}$$

ma się

$$\text{dla I}\begin{cases} x_1 = a + R\operatorname{dos}\varphi, \\ y_1 = R\operatorname{wst}\varphi; \end{cases} \qquad \text{dla } I_1\begin{cases} x_2 = ka - kR\operatorname{dos}\varphi_1, \\ y_2 = kR\operatorname{wst}\varphi_1. \end{cases}$$

Równaniem cięciwy zetknięć II_1 będzie przeto,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + R\operatorname{dos}\varphi & R\operatorname{wst}\varphi & 1 \\ ka - kR\operatorname{dos}\varphi_1 & kR\operatorname{wst}\varphi_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aby ta prosta przechodziła przez punkt O, potrzeba aby jej równanie było sprawdzonem dla $x = 0$, $y = 0$; t. j. żeby było

$$\begin{vmatrix} a + R\operatorname{dos}\varphi & R\operatorname{wst}\varphi \\ ka - kR\operatorname{dos}\varphi_1 & kR\operatorname{wst}\varphi_1 \end{vmatrix} = 0.$$

albo rozwijając,

$$(2) \qquad a(\mathrm{wst}\,\varphi_1 - \mathrm{wst}\,\varphi) + R\,\mathrm{wst}(\varphi + \varphi_1) = 0.$$

Otóż, jeżeli oznaczymy przez R' promień koła C', trójkąt $CC'C_1$ daje równości

$$\frac{R + R_1}{\mathrm{wst}\,\varphi_1} = \frac{kR + R'}{\mathrm{wst}\,\varphi} = \frac{ka - a}{\mathrm{wst}(\varphi + \varphi_1)};$$

wyprowadza się ztąd :

$$\frac{ka - a}{\mathrm{wst}(\varphi + \varphi_1)} = \frac{(R + R') - (kR + R')}{\mathrm{wst}\,\varphi_1 - \mathrm{wst}\,\varphi} \quad \text{albo} \quad = \frac{R - kR'}{\mathrm{wst}\,\varphi_1 - \mathrm{wst}\,\varphi}.$$

Jestto dokładnie związek (2) który się należało sprawdzić.

258. *Osie podobieństwa trzech kół.*

Niech będą równania trzech kół

$$(1) \qquad \begin{cases} (O_1) & (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2 = 0, \\ (O_2) & (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - R_2^2 = 0, \\ (O_3) & (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 - R_3^2 = 0. \end{cases}$$

Oznaczmy przez :

E_1 i I_1 środki podobieństwa zewnętrzny i wewnętrzny kół O_2 i O_3;

E_2 i I_2 .... O_3 i O_1;

E_3 i I_3 .... O_1 i O_2.

Spółrzędnemi punktów E_0 i I_0 będą według n^ru^ [225]

$$(2) \qquad E_0 \begin{cases} x_0 = \dfrac{a_2R_3 - a_3R_2}{R_3 - R_2}, \\ y_0 = \dfrac{b_2R_3 - b_3R_2}{R_3 - R_2}, \end{cases} \qquad I_0 \begin{cases} x'_0 = \dfrac{a_2R_3 + a_3R_2}{R_3 + R_2}, \\ y'_0 = \dfrac{b_2R_3 + b_3R_2}{R_3 + R_2}; \end{cases}$$

otrzyma się wzory podobne dla innych.

Aby dowieść własności, które mamy na widoku, będzie korzystnie tu się posługiwać równaniami styczneczkowemi. Równaniami styczneczkowemi środków trzech kół będą według n^ru^ [113]

$$(3) \qquad \begin{cases} O_1 = a_1u + b_1v - 1 = 0, \\ O_2 = a_2u + b_2v - 1 = 0, \\ O_3 = a_3u + b_3v - 1 = 0. \end{cases}$$

Równaniem styczneczkowem punktu E_1 będzie

$$ux_1 + vy_1 - 1 = 0,$$

albo

$$u(a_2R_3 - a_3R_2) + v(b_2R_3 - b_3R_2) - R_3 + R_2 = 0,$$

albo nakoniec

$$R_3(ua_2 + vb_2 - 1) - R_2(ua_3 + vb_3 - 1) = 0.$$

Równaniami styczneczkowemi środków podobieństwa trzech kół będą więc, przedstawiając przez O_1, O_2, O_3, funkcye linijne (3)

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{llll} (E_1) & R_2O_3 - R_3O_2 = 0, & (I_1) & R_2O_3 + R_3O_2 = 0, \\ (E_2) & R_3O_1 - R_1O_3 = 0, & (I_2) & R_3O_1 + R_1O_3 = 0, \\ (E_3) & R_1O_2 - R_2O_1 = 0, & (I_3) & R_1O_2 + R_2O_1 = 0. \end{array}\right.$$

Otóż jest widocznem według tego, że sześć punktów (4) albo *sześć środków podobieństwa tworzą cztery grupy trzech punktów w linii prostej.*

Tym sposobem otrzymamy proste

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{lll} E_1\ E_2\ E_3 & \text{których spółrzędne są dane przez równania} & \dfrac{O_1}{R_1} = \dfrac{O_2}{R_2} = \dfrac{O_3}{R_3}, \\ E_1\ I_2\ I_3 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & -\dfrac{O_1}{R_1} = \dfrac{O_2}{R_2} = \dfrac{O_3}{R_3}, \\ E_2\ I_3\ I_1 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dfrac{O_1}{R_1} = \dfrac{O_2}{R_2} = \dfrac{O_3}{R_3}, \\ E_2\ I_1\ I_2 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dfrac{O_1}{R_1} = \dfrac{O_2}{R_2} = -\dfrac{O_3}{R_3}. \end{array}\right.$$

Jest łatwo wyprowadzić ztąd równania tych czterech prostych.

Weźmy, na przykład, pierwsze E_1, E_2, E_3; spółrzędnemi jednorodnemi tej prostej będąc u, v, w, jej równaniem będzie

$$ux + vy - w = 0,$$

pierwsze z równań (5) dają

$$ua_1 + vb_1 - w + \lambda R_1 = 0,$$

$$ua_2 + vb_2 - w + \lambda R_2 = 0,$$

$$ua_3 + vb_3 - w + \lambda R_3 = 0.$$

Rugując u, v, w i λ między temi czterema równaniami, otrzyma się na równanie *osi podobieństwa.*

$$(6)\qquad E_1E_2E_3: \begin{vmatrix} x & y & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & R_1 \\ a_2 & b_2 & 1 & R_2 \\ a_3 & b_3 & 1 & R_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Znajdzie się tymże samym sposobem dla innych :

$$\text{(6 bis)} \qquad E_1I_3I_2 \begin{vmatrix} x & y & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & R_1 \\ a_2 & b_2 & 1 & R_2 \\ a_3 & b_3 & 1 & R_3 \end{vmatrix} = 0\,;$$

etc... etc... etc.....

Dowiedziemy jeszcze własność następującą :

Trzy proste O_1I_1, O_2I_2, O_3I_3 *są zbiegającemi się.*

Równaniem prostej O_1I_1 jest (2)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2R_3 + a_3R_2 & b_2R_3 + b_3R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = 0,$$

to równanie można napisać

$$(O_1I_1) \qquad R_2 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} + R_3 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,;$$

znajdzie się podobnież

$$(O_2I_2) \qquad R_3 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} + R_1 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(O_3I_3) \qquad R_1 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} + R_2 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Otóż jest widocznem że te trzy proste przechodzą przez punkt

$$(7) \qquad R_1 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = R_2 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = R_3 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

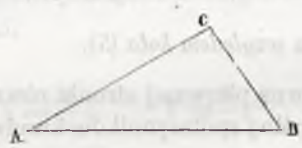
ROZDZIAŁ II.

KOŁO (SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE.)

§ I. — RÓŻNE KSZTAŁTY RÓWNANIA KOŁA.

I° Koło opisane na jakimkolwiek trójkącie.

259. Daje się równania boków trójkąta; przypuścimy je położone pod kształtem



$$X = p - x\,\mathrm{dos}\,\alpha - y\,\mathrm{wst}\,\alpha = 0, \qquad BC$$

$$Y = q - x\,\mathrm{dos}\,\beta - y\,\mathrm{wst}\,\beta = 0, \qquad CA$$

$$Z = r - x\,\mathrm{dos}\,\gamma - y\,\mathrm{wst}\,\gamma = 0, \qquad AB$$

i weźmiemy trójkąt dany za trójkąt odniesienia.

To przypuściwszy, równanie

$$\text{(2)} \qquad aYZ + bXZ + cXY = 0$$

w którem a, b, c, są stałe dowolne, przedstawia jakąkolwiek krzywą drugiego stopnia opisaną na trójkącie ABC. Jest oczywistem, w rzeczy samej, że ta krzywa przechodzi przez wierzchołek A, ponieważ jej równanie jest sprawdzonem przez spółrzędne $(Y = 0,\ Z = 0)$ wierzchołka A; sprawdza się tak samo że ona przechodzi przez wierzchołki B i C.

Dowiedziemy poniżej że to równanie jest *równaniem najogólniejszem* krzywych drugiego stopnia, przechodzących przez trzy punkta A, B, C.

Wyrazimy że równanie (2) przedstawia jakiekolwiek koło, równając spółczynniki kwadratów x^2 i y^2 i znosząc spółczynnik wyrazu xy; otrzymujemy tym sposobem dwa związki

$$\mathrm{a}\,\mathrm{wst}(\beta+\gamma)+\mathrm{b}\,\mathrm{wst}(\alpha+\gamma)+\mathrm{c}\,\mathrm{wst}(\alpha+\beta)=0,$$

$$\mathrm{a}\,\mathrm{dos}(\beta+\gamma)+\mathrm{b}\,\mathrm{dos}(\alpha+\gamma)+\mathrm{c}\,\mathrm{dos}(\alpha+\beta)=0.$$

Rozwiążmy te dwa równania względem a i b, wypadnie

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{wst}(\beta-\gamma)}=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{wst}(\gamma-\alpha)}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{wst}(\alpha-\beta)}. \tag{3}$$

Zkąd wynika nakoniec, *dla równania koła opisanego na trójkącie* ABC

$$\mathrm{YZ}\,\mathrm{wst}(\beta-\gamma)+\mathrm{ZX}\,\mathrm{wst}(\gamma-\alpha)+\mathrm{XY}\,\mathrm{wst}(\alpha-\beta)=0. \tag{4}$$

Jeśli się przypuści początek spółrzędnych wewnątrz trójkąta odniesienia, będzie mogło się zrobić użytek ze związków (4) nru [94], i równaniem *koła opisanego na trójkącie odniesienia* będzie

$$\mathrm{YZ}\,\mathrm{wst}\,\mathrm{A}+\mathrm{ZX}\,\mathrm{wst}\,\mathrm{B}+\mathrm{XY}\,\mathrm{wst}\,\mathrm{C}=0. \tag{5}$$

Wreszcie to równanie, zamykając tylko same elementa trójkąta odniesienia, zachowuje tenże sam kształt jakiemkolwiek bądź byłoby położenie początku spółrzędnych Kartezyańskich.

Uwaga I. *Potęga jakiegokolwiek punktu względem koła* (5).

Potęga jakiegokolwiek punktu jest równą pierwszej stronie równania koła (w spółrzędnych Kartezyańskich) podzielonej przez wartość wspólną spółczynników kwadratów nru [218].

Jeśli, w równaniu (5), zastąpi się X, Y, Z, przez wartości (1), i gdy się oznaczy przez k wartość wspólną spółczynników kwadratów, znajduje się

$$k=\mathrm{dos}\,\beta\,\mathrm{dos}\,\gamma.\mathrm{wst}\,\mathrm{A}+\mathrm{dos}\,\gamma\,\mathrm{dos}\,\alpha.\mathrm{wst}\,\mathrm{B}+\mathrm{dos}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\beta.\,\mathrm{wst}\,\mathrm{C},$$

$$k=\mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}\,\gamma.\mathrm{wst}\,\mathrm{A}+\mathrm{wst}\,\gamma\,\mathrm{wst}\,\alpha.\mathrm{wst}\,\mathrm{B}+\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,\beta.\,\mathrm{wst}\,\mathrm{C}.$$

Dodając i mając wzgląd na związki (5) nru [94], wypadnie

$$2k=-\,\mathrm{wst}\,\mathrm{A}\,\mathrm{dos}\,\mathrm{A}-\mathrm{wst}\,\mathrm{B}\,\mathrm{dos}\,\mathrm{B}-\mathrm{wst}\,\mathrm{C}\,\mathrm{dos}\,\mathrm{C},$$

zkad, przypomniawszy sobie że

$$\mathrm{wst}\,2\mathrm{A}+\mathrm{wst}\,2\mathrm{B}+\mathrm{wst}\,2\mathrm{C}=4\,\mathrm{wst}\,\mathrm{A}\,\mathrm{wst}\,\mathrm{B}\,\mathrm{wst}\,\mathrm{C}=\frac{2\mathrm{S}}{\mathrm{R}^2},$$

wypada

$$k=-\frac{\mathrm{S}}{2\mathrm{R}^2}.$$

Przeto, potęga P^2 jakiegokolwiek punktu (X_0, Y_0, Z_0) względem koła (5) będzie miała na swe wyrażenie

(5 *bis*) $$P^2 = -\frac{2R^2}{S}(Y_0Z_0 \operatorname{wst} A + Z_0X_0 \operatorname{wst} B + X_0Y_0 \operatorname{wst} C).$$

Doszłoby się również do wartości czynnika liczebnego $-\frac{2R^2}{S}$, uważając że potęga jakiegokolwiek punktu ma wyrażenie kształtu

$$k_1(Y_0Z_0 \operatorname{wst} A + Z_0X_0 \operatorname{wst} B + X_0Y_0 \operatorname{wst} C),$$

k_1 będąc czynnikiem niezależnym od położenia punktu; wyznaczyłoby się wtedy czynnik k_1 biorąc, za punkt (X_0, Y_0, Z_0) środek koła znaleziony w n^rze^ [260].

UWAGA II. Jeśliby równania boków trójkąta były wzięte pod kształtem ogólnym

(6) $$\begin{cases} M = ax + a'y + a'', & BC \\ N = bx + b'y + b'', & CA \\ P = cx + c'y + c'', & AB; \end{cases}$$

oznaczając przez X, Y, Z odległości jakiegokolwiek punktu koła od prostych M, N, P, miałoby się wtedy, biorąc odpowiednio znaki,

$$X = \frac{M}{m_1}, \qquad Y = \frac{N}{n_1}, \qquad Z = \frac{P}{p_1},$$

przedstawiając przez m_1, n_1, p_1 pierwiastki

$$\sqrt{a^2 + a'^2}, \qquad \sqrt{b^2 + b'^2}, \qquad \sqrt{c^2 + c'^2}.$$

Zastępując X, Y, Z, przez wartości poprzedzające w równaniu (5), otrzymałoby się

(7) $$m_1 NP \operatorname{wst} A + n_1 PM \operatorname{wst} B + p_1 MN \operatorname{wst} C = 0.$$

Ta uwaga stosuje się do różnych równań, które napotykamy w poszukiwaniach następujących.

260. *Wyznaczenie środka i promienia.*

Promień R będzie danym przez jakąkolwiek z równości

(8) $$\frac{a}{\operatorname{wst} A} = \frac{b}{\operatorname{wst} B} = \frac{c}{\operatorname{wst} C} = 2R,$$

a, b, c, będąc długościami boków trójkąta odniesienia.

Dla wyznaczenia spółrzędnych X_0, Y_0, Z_0, środka O, uważamy że

$$X_0 = OP = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = R\sqrt{1 - \mathrm{wst}^2 A} = R\,\mathrm{dos}\,A\,;$$

ma się więc

$$(9)\qquad \begin{cases} X_0 = R\,\mathrm{dos}\,A, \\ Y_0 = R\,\mathrm{dos}\,B, \\ Z_0 = R\,\mathrm{dos}\,C. \end{cases}$$

261. *Znaczenie geometryczne równania* (5).

Niech będzie M jakimkolwiek punktem koła; X, Y, Z, jego spółrzędne. Według położenia dobranego dla punktu M, widzimy że X, Y albo MA_1, MB_1, są dodatne, a Z albo MC_1 jest odjemnem; otrzyma się więc

$$\begin{cases} -\,YZ\,\mathrm{wst}\,A = \text{powierz. } MB_1C_1, \\ -\,XZ\,\mathrm{wst}\,B = \text{powierz. } MA_1C_1, \\ +\,XY\,\mathrm{wst}\,C = \text{powierz. } MA_1B_1 \end{cases}$$

równanie (5) daje wtedy związek

$$(10)\qquad \text{powierz. } MB_1C_1 + \text{powierz. } MA_1C_1 - \text{powierz. } MA_1B_1 = 0\,;$$

to jest że powierzchnia trójkąta $A_1B_1C_1$ jest zerem; więc trzy punkta A_1, B_1, C_1, są w linii prostej. Ztąd *to twierdzenie :*

Jeśli z jakiegokolwiek punktu koła opisanego na jakimkolwiek trójkącie spuści się prostopadłe na trzy boki trójkąta, spodki tych prostopadłych są w linii prostej.

262. Przytoczymy jeszcze podanie następujące :

Miejscem punktów takich że jeśli się spuści z tych punktów prostopadłe na trzy boki trójkąta stałego ABC, *powierzchnia trójkąta* $A_1B_1C_1$ *utworzonego przez spodki tych prostopadłych będąc stałą, jest jakiemkolwiek kołem spółśrodkowem z kołem opisanem na trójkącie* ABC.

Niech będzie M jeden z tych punktów; X, Y, Z, jego spółrzędne; otrzyma się

$$\text{powierz.}\, MB_1C_1 = YZ\,\text{wst}\,A,$$

$$\text{powierz.}\, MA_1C_1 = ZX\,\text{wst}\,B,$$

$$\text{powierz.}\, MA_1B_1 = XY\,\text{wst}\,C;$$

otóż, jeżeli k^2 jest wartością stałą powierzchni, ma się

$$\text{powierz.}\, MB_1C_1 + \text{powierz.}\, MA_1C_1 + \text{powierz.}\, MA_1B_1 = \text{powierz.}\, A_1B_1C_1 = k^2;$$

więc

(11) $$YZ\,\text{wst}\,A + XZ\,\text{wst}\,B + XY\,\text{wst}\,C = k^2.$$

Otóż to równanie przedstawia jakiekolwiek koło spółśrodkowe z kołem (5).

W rzeczy samej, według związku (3) n^{ru} [93], równanie (11) można napisać

(12) $$YZ\,\text{wst}\,A + XZ\,\text{wst}\,B + XY\,\text{wst}\,C = \frac{k^2R^2}{S^2}[X\,\text{wst}\,A + Y\,\text{wst}\,B + Z\,\text{wst}\,C]^2.$$

Lecz równanie prostej w nieskończoności jest według związku (8) n^{ru} [96]

$$X\,\text{wst}\,A + Y\,\text{wst}\,B + Z\,\text{wst}\,C = 0,$$

Widzimy wtedy że dwa koła (5) i (12) są podwójnie styczne i że ich punkta zetknięcia są w nieskończoności, ponieważ punkta wspólne tym dwom kołom muszą sprawdzać równanie

$$[X\,\text{wst}\,A + Y\,\text{wst}\,B + Z\,\text{wst}\,C]^2 = 0;$$

więc te dwa koła są spółśrodkowe, według n^{ru} [224].

Można jeszcze sprawdzić tę własność uważając, że po zastąpieniu X, Y, Z, przez wartości (1) n^{ru} [259], równania (5) i (11) różnią się tylko od siebie wyrazem niezależnym; więc....

II° Równanie kół stycznych do dwóch prostych.

263. Zobaczymy poniżej że

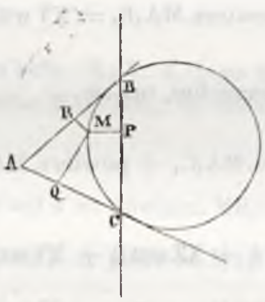
$$YZ = \lambda X^2, \tag{13}$$

jest równaniem najogólniejszem krzywych drugiego stopnia, stycznych do dwóch prostych AC i AB w punktach ich spotkania z prostą BC. Możemy wszelako sprawdzić że krzywe przedstawione przez równanie poprzedzające zadosyć czynią tym warunkom; gdyż, jeśli się szuka przecięcia tej krzywej z prostą AB albo $Z = 0$, znajduje się $X^2 = 0$, co daje dwa punkta schodzące się z sobą; krzywa jest więc styczną w B do prostej AB. Widzimy podobnież że ona jest styczną w C do prostej AC.

Szukajmy teraz warunków aby równanie

$$YZ = \lambda X^2$$

przedstawiało jakiekolwiek koło.



Wyrażając że spółczynniki na x^2 i y^2 są równe i że spółczynnik xy jest zerem, dochodzi się do związków

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{dos}(\beta + \gamma) = \lambda \operatorname{dos} 2\alpha, \\ \operatorname{wst}(\beta + \gamma) = \gamma \operatorname{wst} 2\alpha. \end{array}\right. \tag{14}$$

Wypada ztąd, dodając summę kwadratów,

$$\lambda^2 = 1, \qquad \text{zkąd} \qquad \lambda = \pm 1.$$

Odległości Y i Z będąc tu zawsze dodatne, według naszych umów i położenia koła względem dwóch prostych, należy wziąć wartość $\lambda = 1$; i równaniem koła jest

$$YZ = X^2. \tag{15}$$

Stała λ będąc równą $+1$, związki (14) dają

$$\beta + \gamma = 2\alpha + 2k\pi. \tag{16}$$

Jest więc związek między ilościami α, β, γ figurującemi w równaniach (1) n^ru [259], kiedy równanie (15) przedstawia jakiekolwiek koło; jest to że w istocie koło będąc stycznem w B i C, prosta BC jest prostopadłą do dwójsiecznej kąta A. Jestto dokładnie co wyraża związek (16); gdyż można napisać

$$\alpha - \beta + 2k\pi = \gamma - \alpha;$$

zkąd

$$\mathrm{wst}(\alpha - \beta) = \mathrm{wst}(\gamma - \alpha);$$

a według związków (4) n^ru [94]:

$$\mathrm{wst}\,B = \mathrm{wst}\,C, \qquad \text{albo} \qquad \widehat{B} = \widehat{C}.$$

Wartość $\lambda + 1$ odpowiada przypadkowi w którym początek spółrzędnych kartezyańskich jest w kącie BAC albo w jego wierzchołku przeciwległym; $\lambda = -1$ odpowiada przypadkowi w którym początek spółrzędnych znajduje się w innych kątach.

To następstwo wynika z prawidła uzasadnionego co do znaków funkcyi kształtu $[x\,\mathrm{dos}\,\alpha + y\,\mathrm{wst}\,\alpha - p]$ numeru [76].

Kiedy się uważa X, Y, Z jako spółrzędne trzylinijne i gdy się przyjmuje umowę przytoczoną w n^rze [90], wartość $\lambda = +1$ sama przystoi kwestyi.

264. *Znaczenie geometryczne równania*

$$YZ = X^2.$$

Jeżeli z jakiegokolwiek punktu M, wziętego na kole, spuści się prostopadłe MP, MQ, MR na cięciwę zetknięcia i na styczne, ma się

$$MQ = Y, \qquad MR = Z, \qquad MP = X;$$

zkąd

$$\overline{MP}^2 = \overline{MQ}.\overline{MR}. \tag{17}$$

Odległość jakiegokolwiek punktu koła od jakiejkolwiek cięciwy jest średnio proporcyonalną między jego odległościami od dwóch stycznych wyprowadzonych z końców tej cięciwy.

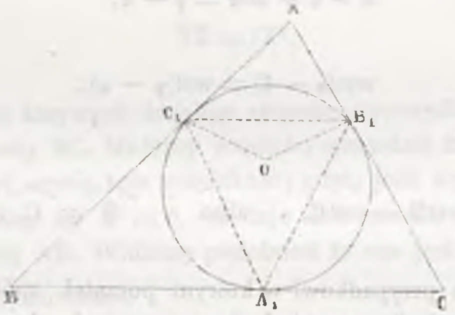
III° Równanie koła wpisanego w jakikolwiek trójkąt.

265. Niech będzie $A_1B_1C_1$ trójkąt utworzony przez trzy punkta zetknięcia; przypuśćmy równania boków B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, położone pod kształtem

$$(18)\quad \begin{cases} X_1 = p_1 - x\,\mathrm{dos}\,\alpha_1 - y\,\mathrm{wst}\,\alpha = 0, & (B_1C_1) \\ Y_1 = q_1 - x\,\mathrm{dos}\,\beta_1 - y\,\mathrm{wst}\,\beta = 0, & (C_1A_1) \\ Z_1 = r_1 - x\,\mathrm{dos}\,\gamma_1 - y\,\mathrm{wst}\,\gamma_1 = 0. & (A_1B_1) \end{cases}$$

Równaniem koła będzie wtedy

(19) $$Y_1Z_1 \operatorname{wst} A_1 + Z_1X_1 \operatorname{wst} B_1 + X_1Y_1 \operatorname{wst} C_1 = 0.$$



Można także uważać koło jako styczne z bokami AB i AC, cięciwą zetknięcia jest B_1C_1 etc..... można przeto położyć jego równanie pod kształty następującymi:

(20) $$\begin{cases} YZ = X_1^2, \\ ZX = Y_1^2, \\ XY = Z_1^2. \end{cases}$$

Jeśli między czterema równaniami (19) i (20), wyruguje się X_1, Y_1, Z_1, otrzyma się związek między spółrzędnemi X, Y, Z, jakiegokolwiek punktu koła, to jest równanie koła odniesionego do trójkąta ABC. (Ten rodzaj dowodzenia jest wzięty z *traktatu sekcyi konicznych* P. SALMON'A.)

Otóż wyprowadza się z równań (20)

$$Y_1Z_1 = \sqrt{X}\sqrt{XYZ}, \qquad Z_1X_1 = \sqrt{Y}\sqrt{XYZ}, \qquad X_1Y_1 = \sqrt{Z}\sqrt{XYZ};$$

podstawiając te wartości w równaniu (19), znajduje się

(21) $$\sqrt{X} \operatorname{wst} A_1 + \sqrt{Y} \operatorname{wst} B_1 + \sqrt{Z} \operatorname{wst} C_1 = 0.$$

Ocenienie kątów A_1, B_1, C_1, będzie zależeć od położenia koła względnie trójkąta.

Przypuśćmy naprzód koło wpisane właściwie mówiąc, to jest wewnątrz trójkąta; wtedy łącząc środek koła wpisanego z punktami zetknięcia A_1, B_1, C_1, widzimy bezpośrednio że

$$A - 2A_1 = \pi, \qquad B + 2B_1 = \pi, \qquad C + 2C_1 = \pi;$$

albo też

$$A_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \qquad B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \qquad C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

Lecz różnica główna tego przypadku od poprzedzającego zależy od kształtu związków (20).

Kiedy się odnosi koło do trójkąta A_1, B_1, C_1, odległości Y i Z, które są względne trójkąta A_1BC_1 są dodatne, ma się jeszcze

$$YZ = X_1^2;$$

kiedy się odnosi koło do trójkąta BA_1C_1, odległości X i Z, które winny zawsze być odniesione do trójkąta ABC, są 1sza odjemna, a 2ga dodatna; ma się więc

$$(-X)Z = Y_1^2;$$

i według tychże samych uwag,

$$(-X)Y = Z_1^2.$$

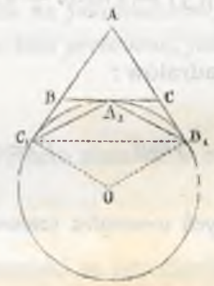
Równaniem koła wpisanego w trójkąt ABC będzie więc

$$\sqrt{X}\,\text{dos}\frac{A}{2} + \sqrt{Y}\,\text{dos}\frac{B}{2} + \sqrt{Z}\,\text{dos}\frac{C}{2} = 0; \tag{22}$$

równanie które wypada zrobić wymiernem.

2° Koło jest zawpisanem w trójkąt; przypuśćmy styczne z bokiem BC i z przedłużeniami dwóch innych boków AB i AC.

Znajdzie się za pomocą uwag podobnych poprzedzającym



$$2A_1 - A = \pi, \qquad B + 2B_1 = \pi, \qquad C + 2C_1 = \pi;$$

zkąd

$$A_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}, \qquad B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \qquad C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

Wyprowadza się ztąd

$$Y_1Z_1 = \sqrt{-X}\,\sqrt{-XYZ}, \qquad X_1Z_1 = \sqrt{Y}\,\sqrt{-XYZ}, \qquad X_1Y_1 = \sqrt{Z}\,\sqrt{-XYZ}.$$

Równanie koła zawpisanego dotykającego bok BC będzie więc

$$\sqrt{-X}\,\text{dos}\frac{A}{2} + \sqrt{Y}\,\text{dos}\frac{B}{2} + \sqrt{Z}\,\text{dos}\frac{C}{2} = 0. \tag{23}$$

IV° Równanie jakiegokolwiek koła opisanego na jakimkolwiek czworoboku.

266. Niech będą równania boków czworoboku

$$
(24)\qquad \begin{cases} M = x\,\mathrm{dos}\,\alpha + y\,\mathrm{wst}\,\alpha - p = 0, & (AB) \\ N = x\,\mathrm{dos}\,\beta + y\,\mathrm{wst}\,\beta - q = 0, & (BC) \\ P = x\,\mathrm{dos}\,\gamma + y\,\mathrm{wst}\,\gamma - r = 0, & (CD) \\ Q = x\,\mathrm{dos}\,\delta + y\,\mathrm{wst}\,\delta - s = 0. & (DA) \end{cases}
$$

Równanie

$$MP = \lambda NQ,$$

przedstawia jakąkolwiek krzywą drugiego stopnia, przechodzącą przez punkta $A(M = 0,\ N = 0)$, $B(N = 0,\ P = 0)$, $C(P = 0,\ Q = 0)$, $D(Q = 0,\ M = 0)$; zobaczymy poniżej że jestto równanie najogólniejsze krzywych zadość czyniących tym warunkom.

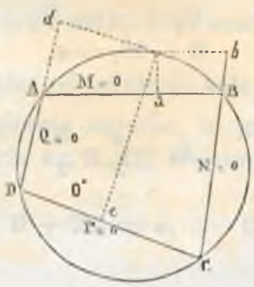
Wyrażając że to równanie przedstawia jakiekolwiek koło, znajduje się związki

$$
(25)\qquad \begin{cases} \mathrm{dos}(\alpha + \gamma) = \lambda\,\mathrm{dos}(\beta + \delta) \\ \mathrm{wst}(\alpha + \gamma) = \lambda\,\mathrm{wst}(\beta + \delta). \end{cases}
$$

Ztąd się wyprowadza, dodając summę kwadratów:

$$\lambda^2 = 1, \qquad \text{zkąd} \qquad \lambda = \pm 1.$$

Otóż jeżeli się przypuści *początek spółrzędnych wewnątrz czworoboku*, trzy funkcye (24), (M, N, P, Q)



będą przedstawiały mniej odległości jakiegokolwiek punktu koła od boków czworoboku, i tylko jedna da wartość bezwzględną tej odległości; winno się wtedy wziąć $\lambda = -1$.

Tak więc, *kiedy początek spółrzędnych jest wewnątrz czworoboku, równaniem koła opisanego jest*

$$(26)\qquad MP + NQ = 0;$$

gdy początek spółrzędnych jest zewnątrz czworoboku, równaniem koła opisanego jest

$$\text{(27)} \qquad \mathrm{MP} - \mathrm{NQ} = 0.$$

Związki (25) dają wtedy :

w 1szym przypadku : $\alpha + \gamma = \pi + \beta + \delta + 2k\pi;$

w 2gim przypadku : $\alpha + \gamma = \beta + \delta + 2k\pi.$

Te związki wyrażają że kąty przeciwne czworoboku wypukłego są spełniające.

267. *Znaczenie geometryczne równań* (26) *i* (27).

Jeśli z jakiegokolwiek punktu m koła opisanego spuści się na boki czworoboku prostopadłe ma, mb, mc, md, ma się, bez względu na znak :

$$\mathrm{M} = \overline{ma}, \qquad \mathrm{N} = \overline{mb}, \qquad \mathrm{P} = \overline{mc}, \qquad \mathrm{Q} = \overline{md};$$

równania (26) albo (27) dają wtedy

$$\text{(28)} \qquad \frac{\overline{ma}.\overline{mc}}{\overline{mb}.\overline{md}} = 1;$$

to jest że

Jeśli jakiekolwiek koło jest opisanem na jakimkolwiek czworoboku, iloczyn prostopadłych spuszczonych z jakiegokolwiek punktu koła na dwa boki przeciwne, jest równy iloczynowi prostopadłych spuszczonych na dwa inne boki.

V° Punkta kołowe w nieskończoności.

Równanie jakiegokolwiek koła.

268. Punkta kołowe w nieskończoności są przecięciami jakiegokolwiek koła przez prostą w nieskończoności.

Możemy wziąć przeto koło opisane na trójkącie odniesienia, a w przypadku spółrzędnych trzylinijnych odpowiednie parametrom odniesienia równym jedności; punkta kołowe w nieskończoności będą wyznaczone przez dwa równania

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} \mathrm{YZ\,wst\,A} + \mathrm{ZX\,wst\,B} + \mathrm{XY\,wst\,C} = 0, \\ \mathrm{X\,wst\,A} + \mathrm{Y\,wst\,B} + \mathrm{Z\,wst\,C} = 0. \end{cases} \qquad (\omega, \omega').$$

269. To nam pozwoli napisać, w tymże samym układzie spółrzędnych równanie jakiegokolwiek koła.

Równaniem ogólnem jakiegokolwiek koła będzie

$$\text{(30)} \quad k(\mathrm{YZ\,wst\,A} + \mathrm{ZX\,wst\,B} + \mathrm{XY\,wst\,C}) + (\mathrm{X\,wst\,A} + \mathrm{Y\,wst\,B} + \mathrm{Z\,wst\,C})(m\mathrm{X} + n\mathrm{Y} + p\mathrm{Z}) = 0;$$

$\frac{m}{k}, \frac{n}{k}, \frac{p}{k}$ są stałemi dowolnemi.

Równanie (30) przedstawia w rzeczy samej jakąkolwiek krzywą drugiego stopnia, przechodzącą przez punkta kołowe w nieskończoności według n^ru [268]; więc ta krzywa jest jakiemkolwiek kołem n^ru [211]; będzie się mogło nakoniec rozporządzić trzema stałemi dowolnemi w sposób taki, aby można było przeprowadzić krzywą przez trzy punkta dowolnie wzięte; jestto więc równanie ogólne jakiegokolwiek koła.

Można dać równaniu (30) różne kształty; wystarczy nam posiadać wskazaną metodę, pozwalającą napisać zaraz to równanie.

§ II. — BIEGUNOWE. — KOŁO DZIEWIĘCIU PUNKTÓW.

I° Biegunowa. — Styczna.

270. Jeżeli P jest jakimkolwiek punktem stałym, i gdy A i B są przecięciami jakiejkolwiek siecznej z kołem; biegunowa punktu P będzie miejscem punktu określonem przez związek

$$\frac{2}{\mathrm{PM}}=\frac{1}{\mathrm{PA}}+\frac{1}{\mathrm{PB}}, \tag{1}$$

albo

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{PA}}+\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{PB}}=0; \tag{2}$$

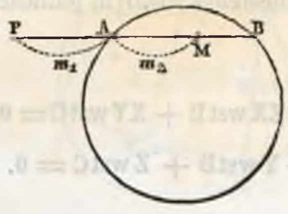
radzimy początkującym przypomnieć sobie rozumowania przytoczone w n^rze [231]

Niech będzie równanie koła dane

$$f(\mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z})=0; \tag{3}$$

a X_0, Y_0, Z_0, spółrzędne punktu P; X, Y, Z, spółrzędne punktu M.

Jeżeli przedstawimy przez $\frac{m_2}{m_1}$ stosunek $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AP}}$, w którym koło dzieli odcinek PM, spółrzędne punktu A będą według n^ru [90]



$$\frac{m_1\mathrm{X}+m_2\mathrm{X}_0}{m_1+m_2},\qquad \frac{m_1\mathrm{Y}+m_2\mathrm{Y}_0}{m_1+m_2},\qquad \frac{m_1\mathrm{Z}+m_2\mathrm{Z}_0}{m_1+m_2}.$$

Ponieważ spółrzędne tego punktu muszą sprawdzać równanie (3) koła, otrzyma się

$$f(m_1\mathrm{X}+m_2\mathrm{X}_0,\qquad m_1\mathrm{Y}+m_2\mathrm{Y}_0,\qquad m_1\mathrm{Z}+m_2\mathrm{Z}_0)=0;$$

albo, rozwijając według wzoru Taylor'a

$$(4)\qquad m_1^2 f(X, Y, Z) + m_1 m_2 [X_0 f'_X + Y_0 f'_Y + Z_0 f'_Z] + m_2^2 f(X_0, Y_0, Z_0) = 0.$$

To równanie wyznaczy, co do wielkości i co do znaku, wartości dwóch stosunków $\frac{MA}{AP}$ i $\frac{MB}{BP}$; otóż, według związku (2), summa tych stosunków musi być zerem; więc ma się

$$(5)\qquad X_0 f'_X + Y_0 f'_Y + Z_0 f'_Z = 0;$$

równanie które można napisać, ponieważ funkcya $f(X, Y, Z)$ jest drugiego stopnia

$$(5\ bis)\qquad X f'_{X_0} + Y f'_{Y_0} + Z f'_{Z_0} = 0.$$

Równania (5) albo (5 *bis*) określają związek między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu M miejsca; one *przedstawiają więc biegunową punktu* $P(X_0, Y_0, Z_0)$.

271. Jeżeli punkt P jest na kole, biegunowa tego punktu jest styczną do koła n^er [232] uwaga II; przeto równanie stycznej w jakimkolwiek punkcie (X_0, Y_0, Z_0) koła

$$f(X, Y, Z) = 0,$$

będzie

$$(6)\qquad X f'_{X_0} + Y f'_{Y_0} + Z f'_{Z_0} = 0,$$

z warunkiem

$$(6\ bis)\qquad f(X_0, Y_0, Z_0) = 0.$$

272. Będzie jeszcze łatwo wyznaczyć *spółrzędne środka jakiegokolwiek koła, uważając że* według numeru [235]

środek jest biegunem prostej w nieskończoności.

A więc spółrzędne środka koła, według wzoru (15) n^ru [263], będą wyznaczone przez związki

$$-\frac{2X}{\operatorname{wst} A} = \frac{Y}{\operatorname{wst} B} = \frac{Z}{\operatorname{wst} C}.$$

273. Można jeszcze dowieść w sposób następujący własność biegunowej przytoczoną w n^rze [237].

Weźmy za trójkąt odniesienia, trójkąt utworzony przez styczne poprowadzone z punktu P i ich cięciwy zetknięcia, równaniem koła będzie

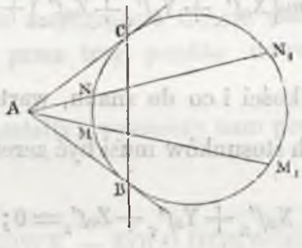
$$YZ = X^2;$$

prosta BC jest biegunową punktu A n^er [232] uwaga I.

Poprowadźmy przez punkt A dwie jakiekolwiek sieczne

$$(MM_1)\qquad Y = \lambda Z; \qquad Y = \mu Z \qquad (NN_1).$$

Spółrzędnemi ich punktów przecięcia z kołem będą



$$M \begin{cases} Y = \lambda Z, \\ X = Z\sqrt{\lambda}; \end{cases} \qquad N \begin{cases} Y = \mu Z, \\ X = Z\sqrt{\mu}; \end{cases}$$

$$M_1 \begin{cases} Y = \lambda Z, \\ X = -Z\sqrt{\lambda}. \end{cases} \qquad N_1 \begin{cases} Y = \mu Z, \\ X = -Z\sqrt{\mu}. \end{cases}$$

Jakakolwiek prosta, przechodząca przez punkt M, będzie miała na równanie

$$Y - \lambda Z + k(X - Z\sqrt{\lambda}) = 0$$

wyraźmy że ona przechodzi przez punkt N_1, znajduje się

$$k = \sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda};$$

ma się więc na równanie prostej MN_1

$$(MN_1) \qquad X(\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda}) + Y - Z\sqrt{\lambda}\,\sqrt{\mu} = 0;$$

znajdzie się tak samo zmieniając $\sqrt{\lambda}$ na $-\sqrt{\lambda}$, a $\sqrt{\mu}$ na $-\sqrt{\mu}$:

$$(M_1N) \qquad X(-\sqrt{\mu} + \sqrt{\lambda}) + Y - Z\sqrt{\mu}\,\sqrt{\lambda} = 0;$$

zkąd wypada odejmując stronami

$$X = 0;$$

to jest że sieczne MN_1 i M_1N przecinają się na biegunowej BC.

Zrobi się takież same sprawdzenie dla prostych MN i M_1N_1.

274. Zastosujmy zasadę n^ru [243] dla wyszukania *warunku prostokątności* dwóch prostych

$$(1) \qquad \begin{cases} M_1X + N_1Y + P_1Z = 0, \\ M_2X + N_2Y + P_2Z = 0. \end{cases}$$

Należy wyrazić że ich ślady na prostej w nieskończoności tworzą z punktami kołowymi w nieskończoności jakikolwiek układ harmoniczny.

Punkta kołowe w nieskończoności są na mocy n^ru [268]

$$(2)\quad \begin{cases} YZ\,\mathrm{wst}A + ZX\,\mathrm{wst}B + XY\,\mathrm{wst}C = 0, \\ X\,\mathrm{wst}A + Y\,\mathrm{wst}B + Z\,\mathrm{wst}C = 0. \end{cases}$$

Wyznaczmy jakikolwiek pęk prostych, mający na przykład swój wierzchołek na wierzchołku C trójkąta odniesienia, i przechodzący przez punkta uważane.

Równaniem jakiejkolwiek prostej równoległej do 1^szej z prostych (1), będzie

$$M_1X + N_1Y + P_1Z + k(X\,\mathrm{wst}A + Y\,\mathrm{wst}B + Z\,\mathrm{wst}C) = 0\,;$$

wyraźmy że ona przechodzi przez wierzchołek C, ma się

$$k\,\mathrm{wst}C = -P_1.$$

Tym sposobem, równaniami dwóch prostych równoległych do prostych (1) przechodzących przez wierzchołek C będą

$$(3)\quad \begin{cases} (M_1\mathrm{wst}C - P_1\mathrm{wst}A)X + (N_1\mathrm{wst}C - P_1\mathrm{wst}B)Y = 0, \\ (M_2\mathrm{wst}C - P_2\mathrm{wst}A)X + (N_2\mathrm{wst}C - P_2\mathrm{wst}B)Y = 0. \end{cases}$$

Wyrugowawszy Z między równaniami (2), otrzyma się równania dwóch prostych (1) przechodzących przez wierzchołek (C) i punkta kołowe w nieskończoności, to jest

$$(4)\qquad X^2\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B + XY(\mathrm{wst}^2A + \mathrm{wst}^2B - \mathrm{wst}^2C) + Y^2\mathrm{wst}^2A\,\mathrm{wst}^2B = 0.$$

Zastosujmy do tych dwóch równań (3) i (4) wzór (31) n^ru [177] to jest

$$(5)\qquad BB_1 = 2(A_1C + AC_1)\,;$$

ma się tu

$$\{A_1 = \mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B, \qquad B_1 = \mathrm{wst}^2A + \mathrm{wst}^2B - \mathrm{wst}^2C, \qquad C_1 = \mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B\,;$$

$$\begin{cases} A = (M_1\mathrm{wst}C - P_1\mathrm{wst}A)(M_2\mathrm{wst}C - P_2\mathrm{wst}A), \\ C = (N_1\mathrm{wst}C - P_1\mathrm{wst}A)(N_2\mathrm{wst}C - P_2\mathrm{wst}B), \\ B = (N_1\mathrm{wst}C - P_1\mathrm{wst}B)(M_2\mathrm{wst}C - P_2\mathrm{wst}A) + (N_2\mathrm{wst}C - P_2\mathrm{wst}B)(M_1\mathrm{wst}C - P_1\mathrm{wst}A). \end{cases}$$

Podstawiając te wartości w związku (5), znajduje się, po wykonaniu wszelkich uproszczeń, *za warunek prostokątności dwóch prostych* (1):

$$(6)\quad M_1M_2 + N_1N_2 + P_1P_2 - (N_1P_2 + N_2P_1)\mathrm{dos}A - (P_1M_2 + P_2M_1)\mathrm{dos}B - (M_1N_2 + M_2N_1)\mathrm{dos}C = 0.$$

II° Koło sprzężone względem jakiegokolwiek trójkąta.

275. Nazwiemy *kołem sprzężonem* względem jakiegokolwiek trójkąta jakiekolwiek koło takie, że jakikolwiek wierzchołek trójkąta jest względem koła biegunem boku przeciwnego.

Jeśli się weźmie trójkąt dany za trójkąt odniesienia równanie

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = 0, \tag{1}$$

będzie równaniem ogólnem krzywych drugiego stopnia sprzężonych względem trójkąta odniesienia.

W rzeczy samej, biegunowa wierzchołka $A(Y_0 = 0,\ Z_0 = 0)$ jest według n^ru [270] $X = 0$; i tak samo o innych; zobaczymy poniżej że równanie to jest ogólnem.

Identyfikując wtedy to równanie (1) z równaniem ogólnem (30) jakiegokolwiek koła n^ru [269], ma się przypuszczając $k = 1$,

$$p \operatorname{wst} B + n \operatorname{wst} C = \operatorname{wst} A,$$

$$m \operatorname{wst} C + p \operatorname{wst} A = \operatorname{wst} B,$$

$$n \operatorname{wst} A + m \operatorname{wst} B = \operatorname{wst} C,$$

$$\frac{\lambda}{m \operatorname{wst} A} = \frac{\mu}{n \operatorname{wst} B} = \frac{\nu}{p \operatorname{wst} C}.$$

Ztąd się wyprowadza z łatwością, przypominając sobie związki

$$\begin{cases} \operatorname{wst}^2 A = \operatorname{wst}^2 B + \operatorname{wst}^2 C - 2 \operatorname{wst} B \operatorname{wst} C . \operatorname{dos} A, \\ \operatorname{wst}^2 B = \operatorname{wst}^2 C + \operatorname{wst}^2 A - 2 \operatorname{wst} C \operatorname{wst} A . \operatorname{dos} B, \\ \operatorname{wst}^2 C = \operatorname{wst}^2 A + \operatorname{wst}^2 B - 2 \operatorname{wst} A \operatorname{wst} B . \operatorname{dos} C, \end{cases}$$

$$m = \operatorname{dos} A, \qquad n = \operatorname{dos} B, \qquad p = \operatorname{dos} C.$$

Zkąd

$$\frac{\lambda}{\operatorname{wst} 2A} = \frac{\mu}{\operatorname{wst} 2B} = \frac{\nu}{\operatorname{wst} 2C}.$$

Równaniem koła sprzężonego względem trójkąta odniesienia jest więc

$$X^2 \operatorname{wst} 2A + Y^2 \operatorname{wst} 2B + Z^2 \operatorname{wst} 2C = 0. \tag{3}$$

Środek koła sprzężonego jest punktem spotkania wysokości; gdyż każdy wierzchołek będąc biegunem boku przeciwnego, prostopadłe spuszczone z jakiegokolwiek wierzchołka na bok przeciwny muszą przejść przez środek. Widzimy to jeszcze z uwag n^ru [272], gdyż otrzyma się dla wyznaczenia środka równania

$$\frac{X\,\mathrm{wst}\,2A}{\mathrm{wst}\,A} = \frac{Y\,\mathrm{wst}\,2B}{\mathrm{wst}\,B} = \frac{Z\,\mathrm{wst}\,2C}{\mathrm{wst}\,C}, \quad \text{albo} \quad X\,\mathrm{dos}\,A = Y\,\mathrm{dos}\,B = Z\,\mathrm{dos}\,C;$$

to jest oczywiście punkt spotkania wysokości według n^ru [102].

Mając wzgląd na tę własność i na własność która była przytoczoną w n^rze [235], wykreśli się łatwo koło sprzężone względem jakiegokolwiek trójkąta danego.

III° Koło dziewięciu punktów jakiegokolwiek trójkąta.

276. Nazywa się tak koło które przechodzi jednocześnie :

1° Przez trzy spodki wysokości jakiegokolwiek trójkąta;

2° Przez środki jego boków;

3° Przez środki prostych, które łączą wierzchołki z punktem zbiegania się wysokości.

Równaniem jakiegokolwiek koła jest na mocy równania n^ru [269]

$$YZ\,\mathrm{wst}\,A + ZX\,\mathrm{wst}\,B + XY\,\mathrm{wst}\,C + (X\,\mathrm{wst}\,A + Y\,\mathrm{wst}\,B + Z\,\mathrm{wst}\,C)(mX + nY + pZ) = 0.$$

Niech będą A_1, B_1, C_1, środki boków trójkąta, który wybierzemy za trójkąt odniesienia, te punkta znajdując się na liniach łączących każdy wierzchołek trójkąta ze środkiem boku przeciwnego, ich spółrzędne względne będą według n^ru [102]

$$(1) \quad A_1\begin{cases} X = 0, \\ Y\,\mathrm{wst}\,B = Z\,\mathrm{wst}\,C; \end{cases} \quad B_1\begin{cases} Y = 0 \\ Z\,\mathrm{wst}\,C = X\,\mathrm{wst}\,A; \end{cases} \quad C_1\begin{cases} Z = 0 \\ X\,\mathrm{wst}\,A = Y\,\mathrm{wst}\,B. \end{cases}$$

Wyraźmy że koło powyższe przechodzi przez te trzy punkta, znajduje się

$$\begin{cases} n\,\mathrm{wst}\,C + p\,\mathrm{wst}\,B + \dfrac{\mathrm{wst}\,A}{2} = 0, \\ p\,\mathrm{wst}\,A + m\,\mathrm{wst}\,C + \dfrac{\mathrm{wst}\,B}{2} = 0, \\ m\,\mathrm{wst}\,B + n\,\mathrm{wst}\,A + \dfrac{\mathrm{wst}\,C}{2} = 0; \end{cases}$$

wyprowadza się ztąd :

$$m = -\frac{1}{2}\mathrm{dos}\,A, \qquad n = -\frac{1}{2}\mathrm{dos}\,B, \qquad p = -\frac{1}{2}\mathrm{dos}\,C.$$

Równaniem koła dziewięciu punktów stale uważanem za trójkąt odniesienia jest więc

$$(2) \quad (X\mathrm{wst}A + Y\mathrm{wst}B + Z\mathrm{wst}C)(X\mathrm{dos}A + Y\mathrm{dos}B + Z\mathrm{dos}C) - 2(YZ\mathrm{wst}A + XZ\mathrm{wst}B + XY\mathrm{wst}C) = 0,$$

albo rozwijając

$$\text{(2 bis)}\qquad X^2\text{wst}2A + Y^2\text{wst}2B + Z^2\text{wst}2C - 2(YZ\,\text{wst}\,A + XZ\,\text{wst}\,B + XY\,\text{wst}\,C) = 0.$$

Pod tym ostatnim kształtem, widzimy że *koło dziewięciu punktów* (2 *bis*), *koło opisane* według równania (5) n$^{\text{ru}}$ [259], *koło sprzężone* na mocy równania (3) n$^{\text{ru}}$ [275], mają też samą *oś pierwiastną*.

277. Dowiedźmy teraz własności przytoczone dla koła dziewięciu punktów.

1° *Promień koła dziewięciu punktów.*

Niech będzie R_1 promień koła, ma się

$$\frac{B_1C_1}{\text{wst}\,A_1} = 2R_1;$$

otóż

$$B_1C_1 = \frac{a}{2}, \qquad \text{wst}\,A_1 = \text{wst}\,A, \qquad \frac{a}{\text{wst}\,A} = 2R$$

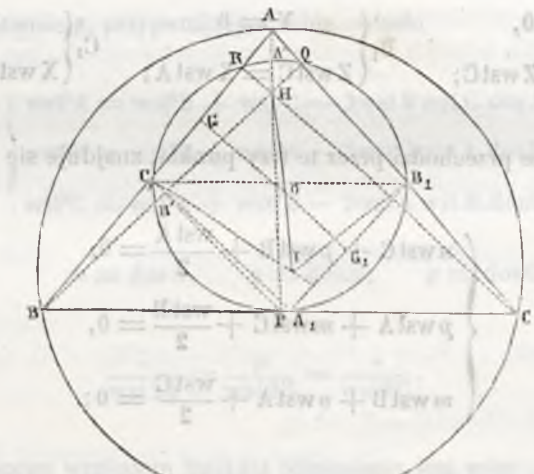
więc

$$(3)\qquad R_1 = \frac{R}{2};$$

promień koła dziewięciu punktów jest równy połowie promienia koła opisanego na trójkącie.

2° *Środek koła dziewięciu punktów.*

Według uwagi n$^{\text{ru}}$ [272] i równania (2 *bis*), spółrzędne środka będą wyznaczone przez równania



$$\left\{\begin{aligned} &\frac{X\,\text{wst}2A - Y\,\text{wst}C - Z\,\text{wst}B}{\text{wst}A} = \frac{-X\,\text{wst}C + Y\,\text{wst}2B - Z\,\text{wst}A}{\text{wst}B} = \frac{-X\,\text{wst}B - Y\,\text{wst}A + Z\,\text{wst}2C}{\text{wst}C},\\ &X\,\text{wst}A + Y\,\text{wst}B + Z\,\text{wst}C = \frac{S}{R} \qquad \text{n}^{\text{er}}\ [93].\end{aligned}\right.$$

Wyprowadza się z tych równań, mając wzgląd na związki (2) nru [275] i na równość

$$S = 2R^2 \mathrm{wst}A\, \mathrm{wst}B\, \mathrm{wst}C:$$

$$(4)\qquad \begin{cases} X_0 = \frac{R}{2}\mathrm{dos}(B - C), \\ Y_0 = \frac{R}{2}\mathrm{dos}(C - A), \\ Z_0 = \frac{R}{2}\mathrm{dos}(A - B). \end{cases}$$

Można jeszcze obliczyć, w ten sposób spółrzędne środka. Ma się

$$Z_0 = OG = G_1G - OG_1.$$

Otóż GG_1 jest równym odcinkowi Z punktu B_1, ponieważ A_1B_1 jest równoległą do AB; lecz punkt B_1 jest przecięciem boku AC z linią łączącą wierzchołek B ze środkiem B_1 tegoż samego boku; odcinek Z punktu B_1 będzie przeto danym przez równania

$$\begin{cases} Y = 0 \qquad Z\,\mathrm{wst}C = X\,\mathrm{wst}A \\ X\,\mathrm{wst}A + Y\,\mathrm{wst}B + Z\,\mathrm{wst}C = \frac{S}{R}, \end{cases}$$

gdyż ztąd wypada

$$Z = GG_1 = \frac{S}{2R\,\mathrm{wst}C}.$$

Ilość OG_1 jest odcinkiem Z środka koła opisanego na trójkącie $A_1B_1C_1$; a tem samem

$$OG_1 = \frac{R}{2}\mathrm{dos}C.$$

Więc

$$Z_0 = \frac{S}{2R\,\mathrm{wst}C} - \frac{R}{2}\mathrm{dos}C.$$

Lecz wiadomo że

$$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \mathrm{wst}A\, \mathrm{wst}B\, \mathrm{wst}C - \mathrm{dos}C = \mathrm{dos}A\, \mathrm{dos}B - \mathrm{wst}A\, \mathrm{wst}B;$$

przeto

$$Z_0 = \frac{R}{2}[2\mathrm{wst}A\, \mathrm{wst}B - \mathrm{dos}C] = \frac{R}{2}\mathrm{dos}(A - B).$$

C. B. D. D.

3° *Środek koła dziewięciu punktów jest środkiem prostej łączącej środek koła opisanego z punktem przecięcia trzech wysokości.*

Spółrzędnemi X_1, Y_1, Z_1 środka koła opisanego są według n^{ru} [260]

$$(5) \qquad X_1 = R\,\mathrm{dos}\,A, \qquad Y_1 = R\,\mathrm{dos}\,B, \qquad Z_1 = R\,\mathrm{dos}\,C.$$

Spółrzędne X_2, Y_2, Z_2, punktu spotkania wysokości są dane przez równania, na mocy n^{ru} [102]

$$X\,\mathrm{dos}\,A = Y\,\mathrm{dos}\,B = Z\,\mathrm{dos}\,C;$$

$$X\,\mathrm{wst}\,A + Y\,\mathrm{wst}\,B + Z\,\mathrm{wst}\,C = \frac{S}{R}.$$

Jeżeli się zauważy że

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} S = 2R^2\mathrm{wst}\,A\,\mathrm{wst}\,B\,\mathrm{wst}\,C, \\ \mathrm{st}\,A + \mathrm{st}\,B + \mathrm{st}\,C = \mathrm{st}\,A\,\mathrm{st}\,B\,\mathrm{st}\,C, \end{array}\right.$$

wyprowadza się z równań poprzedzających

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} X_2 = 2R\,\mathrm{dos}\,B\,\mathrm{dos}\,C, \\ Y_2 = 2R\,\mathrm{dos}\,A\,\mathrm{dos}\,C, \\ Z_2 = 2R\,\mathrm{dos}\,A\,\mathrm{dos}\,B. \end{array}\right.$$

Należy dowieść że

$$X_0 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \qquad Y_0 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}, \qquad Z_0 = \frac{Z_1 + Z_2}{2}.$$

Otóż

$$X_1 + X_2 = 2R\,\mathrm{dos}\,B\,\mathrm{dos}\,C + R\,\mathrm{dos}\,A = R(2\,\mathrm{dos}\,B\,\mathrm{dos}\,C + \mathrm{dos}\,A);$$

a ponieważ

$$\mathrm{dos}\,A = -\mathrm{dos}\,B\,\mathrm{dos}\,C + \mathrm{wst}\,B\,\mathrm{wst}\,C,$$

ztąd wynika

$$X_1 + X_2 = R\,\mathrm{dos}(B - C) = 2X_0.$$

C. B. D. D.

4° *Środek dziewięciu punktów przechodzi przez spodki wysokości.*

Spodek P wysokości odpowiedni wierzchołkowi A na przykład ma za spółrzędne

$$X = 0, \qquad Y\,\mathrm{dos}\,B = Z\,\mathrm{dos}\,C.$$

Jeśli się podstawi te wartości w równaniu (2) koła dziewięciu punktów, znajduje się

$$\mathrm{wst}\,A.2\,\mathrm{dos}\,B\,\mathrm{dos}\,C - 2\,\mathrm{wst}\,A\,\mathrm{dos}\,B\,\mathrm{dos}\,C$$

ilość oczywiście równa *zeru*.

5° *Koło dziewięciu punktów przechodzi przez środki prostych łączących wierzchołki z punktem zbiegania się wysokości.*

Spółrzędne punktu zbiegania się H wysokości są dane przez równości (7); spółrzędnemi wierzchołka A są

$$X = 2R \operatorname{wst} B \operatorname{wst} C, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0;$$

spółrzędnemi punktu A', środka AH, będą więc

$$(8) \qquad X_3 = 2R \operatorname{dos}(B - C), \qquad Y_3 = R \operatorname{dos} A \operatorname{dos} C, \qquad Z_3 = R \operatorname{dos} A \operatorname{dos} B.$$

Podstawmy te wartości w równaniu (2 *bis*) koła dziewięciu punktów uprzednio położonego pod kształtem

$$X[X \operatorname{wst} 2A - 2Y \operatorname{wst} C - 2Z \operatorname{wst} B] + Y^2 \operatorname{wst} 2B + Z^2 \operatorname{wst} 2C - 2YZ \operatorname{wst} A = 0.$$

Otóż ilość między nawiasami znosi się gdy w niej się zastąpi X, Y, Z przez X_3, Y_3, Z_3; ona staje się w rzeczy samej

$$\operatorname{dos}(B - C) \operatorname{wst} A \operatorname{dos} A - \operatorname{dos} A \operatorname{wst} B \operatorname{dos} B - \operatorname{dos} A \operatorname{wst} C \operatorname{dos} C,$$

albo

$$\operatorname{dos} A[\operatorname{dos}(B - C) \operatorname{wst} A - \operatorname{wst} B \operatorname{dos} B - \operatorname{wst} C \operatorname{dos} C],$$

albo

$$\operatorname{dos} A[\operatorname{dos}(B - C) \operatorname{wst}(B + C) - \operatorname{wst} B \operatorname{dos} B - \operatorname{wst} C \operatorname{dos} C];$$

wreszcie, wykonawszy iloczyn $\operatorname{dos}(B - C) \operatorname{wst}(B + C)$, widzimy że ilość między nawiasami jest zerem. Co się tyczy trzech ostatnich wyrazów równania poprzedzającego, one stają się przez podstawienie

$$2R^2 \operatorname{dos}^2 A \operatorname{dos} B \operatorname{dos} C[\operatorname{wst} B \operatorname{dos} B + \operatorname{wst} C \operatorname{dos} B - \operatorname{wst} A],$$

ilość widocznie równa zeru.

Tak więc

Koło dziewięciu punktów jakiegokolwiek trójkąta przechodzi: 1° przez środki boków; 2° przez spodki wysokości; 3° przez środki prostych łączących wierzchołki z punktem spotkania wysokości.

Promień tego koła jest połową promienia koła opisanego na trójkącie; jego środek jest w środku prostej, łączącej środek koła opisanego z punktem spotkania wysokości.

Rozwinięcia któreśmy dali pozwolą rozwiązać analitycznie wielką liczbę kwestyi dotyczących koła dziewięciu punktów.

ROZDZIAŁ III

RÓWNANIE STYCZNECZKOWE KOŁA.

---

§ I. — SPÓŁRZĘDNE DWULINIJNE u i v.

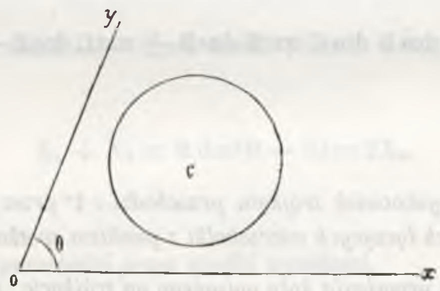
I° RÓWNANIE STYCZNECZKOWE JAKIEGOKOLWIEK KOŁA.

Równanie styczneczkowe jakiejkolwiek krzywej jest związkiem między spółrzędnemi którejkolwiek z jej stycznych; krzywa jest miejscem przecięć w sposób ciągły po sobie następujących jej stycznych, albo linią obwijającą swe styczne.

277. 1sza METODA.

Równaniem w spółrzędnych kartezyańskich jakiegokolwiek koła mającego za promień R, a i b za spółrzędne środka, jest

(1) $$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\operatorname{dos}\theta=R^2.$$



Niech będzie jakakolwiek styczna w jakimkolwiek punkcie x_0, y_0; jej równaniem będzie według numeru [212]

$$\left.\begin{array}{r} x[x_0-a+(y_0-b)\operatorname{dos}\theta]+y[(x_0-a)\operatorname{dos}\theta+(y_0-b)]-a(x_0-a)-b(y_0-b)\\ -b(x_0-a)\operatorname{dos}\theta-a(y_0-b)\operatorname{dos}\theta-R^2\end{array}\right\}=0;$$

z warunkiem

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+2(x_0-a)(y_0-b)\operatorname{dos}\theta-R^2=0.$$

Spółrzędne u_0, v_0 stycznej będą więc według n^ru [110] wyznaczone przez równania

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(x_0-\mathrm{a})+(y_0-\mathrm{b})\operatorname{dos}\theta}{u_0}=\frac{(x_0-\mathrm{a})\operatorname{dos}\theta+(y_0-\mathrm{b})}{v_0}=\frac{(x_0-\mathrm{a})(\mathrm{a}+\mathrm{b}\operatorname{dos}\theta)+(y_0-\mathrm{b})(\mathrm{a}\operatorname{dos}\theta+\mathrm{b})+\mathrm{R}^2}{1};\\ &(x_0-\mathrm{a})^2+(y_0-\mathrm{b})^2+2(x_0-\mathrm{a})(y_0-\mathrm{b})\operatorname{dos}\theta=\mathrm{R}^2; \end{aligned}\right.$$

albo, znosząc wskazówki, biorąc spółrzędne jednorodne w jednym i drugim układzie, i oznaczywszy przez λ wartość wspólną stosunków:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &x+y\operatorname{dos}\theta-(\mathrm{a}+\mathrm{b}\operatorname{dos}\theta)z+\lambda u=0,\\ &x\operatorname{dos}\theta+y-(\mathrm{a}\operatorname{dos}\theta+\mathrm{b})z+\lambda v=0,\\ &x(\mathrm{a}+\mathrm{b}\operatorname{dos}\theta)+y(\mathrm{a}\operatorname{dos}\theta+\mathrm{b})-(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+2\mathrm{ab}\operatorname{dos}\theta-\mathrm{R}^2)z+\lambda w=0,\\ &x^2+y^2+2xy\operatorname{dos}\theta-2xz(\mathrm{a}+\mathrm{b}\operatorname{dos}\theta)-2yz(\mathrm{a}\operatorname{dos}\theta+\mathrm{b})+(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+2\mathrm{ab}\operatorname{dos}\theta-\mathrm{R}^2)z^2=0. \end{aligned}\right.$$

Zamiast ostatniego z tych czterech równań podstawmy następujące, otrzymane dodając trzy pierwsze względnie pomnożone przez x, y, z:

$$(3\ bis)\quad ux+vy+wz=0.$$

Otrzymamy wtedy linię obwijającą styczne (u, v, w), wyrugowawszy x, y, z, λ między trzema pierwszemi równaniami (3) i równaniem (3 *bis*); znajduje się tym sposobem

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 0\\ 1 & \operatorname{dos}\theta & \mathrm{a}+\mathrm{b}\operatorname{dos}\theta & u\\ \operatorname{dos}\theta & 1 & \mathrm{a}\operatorname{dos}\theta+\mathrm{b} & v\\ \mathrm{a}+\mathrm{b}\operatorname{dos}\theta & \mathrm{a}\operatorname{dos}\theta+\mathrm{b} & \mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+2\mathrm{ab}\operatorname{dos}\theta-\mathrm{R}^2 & w \end{vmatrix}=0.$$

Wyprowadza się zląd rozwijając

$$(4)\quad \left.\begin{aligned} &u^2(\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\theta-\mathrm{R}^2)+v^2(\mathrm{b}^2\mathrm{wst}^2\theta-\mathrm{R}^2)+w^2\mathrm{wst}^2\theta+2uv(\mathrm{R}^2\operatorname{dos}\theta+\mathrm{ab}\,\mathrm{wst}^2\theta)\\ &\quad-2\mathrm{a}\,\mathrm{wst}^2\theta.uw-2\mathrm{b}\,\mathrm{wst}^2\theta.vw \end{aligned}\right\}=0;$$

albo, robiąc $w=1$, i zmieniwszy znaki wszystkich wyrazów, znajdziemy ostatecznie

$$(4\ bis)\quad \left.\begin{aligned} &u^2(\mathrm{R}^2-\mathrm{a}^2\mathrm{wst}^2\theta)+v^2(\mathrm{R}^2-\mathrm{b}^2\mathrm{wst}^2\theta)-2uv(\mathrm{R}^2\operatorname{dos}\theta+\mathrm{ab}\,\mathrm{wst}^2\theta)\\ &\quad+2\mathrm{a}\,\mathrm{wst}^2\theta.u+2\mathrm{b}\,\mathrm{wst}^2\theta.v-\mathrm{wst}^2\theta \end{aligned}\right\}=0;$$

takiem jest równanie styczneczkowe jakiegokolwiek koła (osie pochyłe), a i b *są spółrzędnemi środka, a* R promieniem.

278. 2ga Metoda.

Dochodzi się prędzej do równania koła, biorąc za punkt wyjścia wzór nru [129] który daje odległość jakiegokolwiek punktu od prostej.

Jeśli R jest odległością środka od jakiejkolwiek stycznej, i jeśli a i b są spółrzędne środka, albo co wychodzi na jedno, jeżeli

$$au + bv - 1 = 0$$

jest równaniem środka, otrzyma się, według wzoru wymienionego

$$(h\ ter) \qquad R = \frac{(au + bv - 1)\mathrm{wst}\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\,\mathrm{dos}\theta}};$$

zkąd wynika równanie już otrzymane

$$u^2(R^2 - a^2\mathrm{wst}^2\theta) + v^2(R^2 - b^2\mathrm{wst}^2\theta) - 2uv(R^2\mathrm{dos}\,\theta + ab\,\mathrm{wst}^2\theta) + 2a\,\mathrm{wst}^2\theta.u + 2b\,\mathrm{wst}^2\theta.v - \mathrm{wst}^2\theta = 0.$$

379. *Kształty szczególne równania styczneczkowego koła.*

1° osie spółrzędnych prostokątne, albo $\theta = 90°$:

Równanie jakiegokolwiek koła bierze wtedy kształt prostszy

$$(5) \qquad u^2(R^2 - a^2) + v^2(R^2 - b^2) - 2abuv + 2au + 2bv - 1 = 0.$$

2° Początek spółrzędnych jest środkiem koła :

Wtedy a i b są zerami, a równanie jakiegokolwiek koła ma kształt :

$$(6) \qquad u^2 + v^2 - 2uv\,\mathrm{dos}\theta = \frac{\mathrm{wst}^2\theta}{R^2} \qquad \text{(osie pochyłe)}$$

$$(7) \qquad u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2} \qquad \text{(osie prostokątne).}$$

3° Koło jest stycznem do dwóch osi spółrzędnych.

Ma się wtedy $a = \frac{R}{\mathrm{wst}\theta}$, $b = \frac{R}{\mathrm{wst}\theta}$; albo jeszcze, można wyrazić że spółrzędne osi Ox (to jest $u = \infty$, $v = \infty$, a $\mathrm{gr}.\frac{u}{v} = 0$) sprawdzają równanie koła; tak samo jak spółrzędne osi Oy (to jest $u = \infty$, $v = \infty$; $\mathrm{gr}.\frac{v}{u} = 0$); znajduje się tym sposobem

$$(8) \qquad uv - k(u + v) + k^2\mathrm{dos}^2\frac{\theta}{2} = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad k = \frac{\mathrm{st}\,\frac{\theta}{2}}{R}.$$

Uwaga. Aby równanie ogólne drugiego stopnia

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

przedstawiało jakiekolwiek koło, trzeba i dosyć żeby było

$$D^2 - AF = E^2 - CF = \frac{BF - ED}{\cos\theta},$$

θ jest kątem osi.

II° Punkt zetknięcia jakiejkolwiek stycznej.

280. Uważmy naprzód że przez jakikolwiek punkt dowolnie dany

$$(9) \qquad Au + Bv + C = 0,$$

można zawsze poprowadzić dwie styczne do jakiegokolwiek koła; gdyż spółrzędne u i v tych stycznych będą rozwiązaniami wspólnemi dla równań (9) i (4), w liczbie oczywiście równej dwom; koło jest więc *jakąkolwiek krzywą* 2giej *klassy* według nru [36].

281. Niech będą u_0, v_0 spółrzędne jakiejkolwiek stycznej z kołem

$$(10) \qquad f(u, v) = 0, \qquad \text{albo} \qquad f(u, v, w) = 0$$

robiąc jednorodnem równanie koła pierwotnie niejednorodne; to jest że u_0, v_0, są jakiemkolwiek rozwiązaniem równania (10); idzie o znalezienie równania punktu zetknięcia tej stycznej.

1sza Metoda. Punkt zetknięcia stycznej (u_0, v_0) jest położeniem granicy punktu przecięcia się tej stycznej z jakąkolwiek styczną nieskończenie sąsiednią $(u_0 + \Delta u_0, v_0 + \Delta v_0)$. Otóż równaniem punktu przecięcia się tych dwóch prostych jest według nru [120]

$$v - v_0 = \frac{\Delta v_0}{\Delta u_0}(u - u_0).$$

Granicą stosunku $\frac{\Delta v_0}{\Delta u_0}$ jest pochodna v względem u, v jest funkcyą u określoną przez równanie (10).

Ma się więc na równanie punktu zetknięcia

$$v - v_0 = -\frac{f'_{u_0}}{f'_{v_0}}(u - u_0); \qquad \text{z warunkiem} \qquad f(u_0, v_0) = 0,$$

albo

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} - (v_0 f'_{v_0} + u_0 f'_{u_0}) = 0.$$

Jeżeli przypuścimy funkcyę $f(u, v)$ zrobioną jednorodną, ma się

$$u_0 f'_{u_0} + v_0 f'_{v_0} + w_0 f'_{w_0} = 2f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

Tak więc równaniem punktu zetknięcia stycznej (u_0, v_0) z kołem

(10) $$f(u, v, w) = 0,$$

będzie

(11) $$u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0,$$

z warunkiem

(11 *bis*) $$f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

Dla koła

(12) $$u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2},$$

równaniem punktu zetknięcia stycznej (u_0, v_0) będzie

(13) $$\begin{cases} u u_0 + v v_0 = \dfrac{1}{R^2}, \\ u_0^2 + v_0^2 = \dfrac{1}{R^2}. \end{cases}$$

282. 2ga Metoda.

Równanie koła, w spółrzędnych kartezyańskich jednorodnych, będąc

(14) $$F(x, y, z) = 0,$$

spółrzędne u, v, w, jakiejkolwiek stycznej

$$\xi F'_x + \eta F'_y + F'_z = 0,$$

są połączone ze spółrzędnemi x, y, z jej punktu zetknięcia przez związki

(15) $$\frac{F'_x}{u} = \frac{F'_y}{v} = \frac{F'_z}{-w}; \quad \text{zkąd} \quad ux + vy - wz = 0.$$

Rugując x, y, z między równaniami (15), otrzyma się równanie styczneczkowe koła, to jest

(16) $$f(u, v, w) = 0.$$

Otóż jeżeli się założy

(17) $$u = \frac{1}{2} F'_x, \qquad v = \frac{1}{2} F'_y, \qquad w = \frac{1}{2} F'_z,$$

funkcye f i F zmienią się identycznie jedna w drugą, tak że mając wzgląd na związki (17) otrzyma się tożsamość

(18) $$F(x, y, z) = f(u, v, w).$$

W rzeczy samej, jeżeli

$$F(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2,$$

wypadkiem rugowania x, y, z, między równaniami (15) jest

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & -w \\ u & v & -w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Otóż gdy się założy

$$F(u, v, w) = -\frac{\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & -w \\ u & v & -w & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}};$$

sprawdza się łatwo tożsamość (18), po zastąpieniu w niej u, v, w przez wartości (17). Dość jest w tym celu odjąć od ostatniej kolumny licznika w wyznaczniku summę trzech pierwszych względnie pomnożonych przez x, y, z. Możemy więc, kiedy będzie szło o przekształcenie równań jakiegokolwiek układu na inny, uważać spółrzędne u, v, w, jakiejkolwiek stycznej jako określone przez równości (17) w funkcyi spółrzędnych jej punktu zetknięcia.

Wyprowadzimy ztąd spółrzędne punktu zetknięcia w funkcyi spółrzędnych stycznej.

Różniczkujmy dwie strony tożsamości (18) względem u, uważając x, y, z, jako funkcye u; wypadnie

$$f'_u = F'_x . x'_u + F'_y . y'_u + F'_z . z'_u,$$

albo według związków (17)

$$f'_u = 2[ux'_u + vy'_u - wz'_u].$$

Lecz między u, v, w, i x, y, z ma się związek

$$ux + vy - wz = 0$$

zkąd różniczkując względem u,

$$ux'_u + vy'_u - wz'_u + x = 0;$$

przeto

$$x = -\frac{1}{2} f'_u.$$

Dojdzie się więc tym sposobem do związków następujących

(19) $$x = -\frac{1}{2} f'_u, \qquad y = -\frac{1}{2} f'_v, \qquad z = +\frac{1}{2} f'_w,$$

które nie są czem innem jak tylko równaniami (17) rozwiązanemi względem x, y, z.

Związki (17), (18) i (19) uzasadniają jasno odnoszenie się wzajemne (*la corrélation*) między równaniami tegoż samego koła, wziętemi w układzie *spółrzędnych punkt* i w układzie *spółrzędnych styczneczkowych.*

Według tego, jeżeli x_0, y_0, z_0 są spółrzędne punktu zetknięcia jakiejkolwiek stycznej (u_0, v_0, w_0) z kołem

(16) $$f(u, v, w) = 0,$$

równaniem tego punktu zetknięcia będzie

$$ux_0 + vy_0 - wz_0 = 0;$$

albo, według związków (19)

(20) $$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = 0;$$

z warunkiem

(20 *bis*) $$f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

Podobnież, jeżeli (u_0, v_0, w_0) są spółrzędne jakiejkolwiek stycznej z punktem (x_0, y_0, z_0) będącym na stycznej względem koła

(14) $$F(x, y, z) = 0,$$

równaniem tej stycznej będzie

$$xu_0 + yv_0 - zw_0 = 0;$$

albo, według związków (17)

(21) $$xF'_{x_0} + yF'_{y_0} + zF'_{z_0} = 0,$$

z warunkiem

(21 *bis*) $$F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

283. *Warunek aby jakikolwiek punkt dany był na jakiemkolwiek kole.*

Niech będzie równanie koła

(22) $$f(u,\ v,\ w) = 0,$$

(23) $$Au + Bv + Cw = 0,$$

równanie punktu danego.

Oznaczmy przez (u_0, v_0, w_0) spółrzędne stycznej z punktem (23) przypuszczonym na kole; równaniem punktu zetknięcia będzie według n^ru [281]

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = 0, \qquad \text{z warunkiem} \qquad f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

Zidentyfikujmy to ostatnie równanie z równaniem (23), otrzymamy

(24 $$\frac{f'_{w_0}}{A} = \frac{f'_{v_0}}{B} = \frac{f'_{u_0}}{C}, \qquad f(u_0, v_0, w_0) = 0;$$

będzie się mogło zastąpić ostatnie przez $Au_0 + Bv_0 + Cw_0 = 0$.

Rugowanie stosunków $\frac{u_0}{w_0}$, $\frac{v_0}{w_0}$, między trzema równaniami (24) prowadzi nas do warunku szukanego.

III° Punkta kołowe w nieskończoności.

284. Weźmy równanie koła pod kształtem n^ru [279]

$$u^2 + v^2 - 2uv\operatorname{dos}\theta = \frac{\operatorname{wst}^2\theta}{R^2},$$

albo, robiąc je jednorodnem

(25) $$u^2 + v^2 - 2uv\operatorname{dos}\theta = \frac{\operatorname{wst}^2\theta}{R^2}w^2.$$

Równanie jakiegokolwiek punktu w nieskończoności jest kształtu według n^ru [115]

(26) $$Au + Bv = 0;$$

wyraźmy że ten punkt jest na kole (25), otrzyma się według metody wyłożonej w n^rze [283]

$$\frac{u_0 - v_0\operatorname{dos}\theta}{A} = \frac{v_0 - u_0\operatorname{dos}\theta}{B} = \frac{-w_0\frac{\operatorname{wst}^2\theta}{R^2}}{0}$$

$$Au_0 + Bv_0 = 0.$$

Wyrugujmy u_0, v_0, w_0 między temi równaniami, znajduje się $w_0 = 0$; potem

$$\frac{u_0 - v_0\operatorname{dos}\theta}{A} = \frac{v_0 - u_0\operatorname{dos}\theta}{B}, \qquad Au_0 + Bv_0 = 0;$$

zkąd wypada równanie warunkowe

$$A^2 + B^2 + 2AB \operatorname{dos}\theta = 0. \tag{27}$$

Gdy się teraz wyruguje $\frac{A}{B}$ między równaniami (25) i (27), otrzyma się równanie punktów w nieskończoności na kole; znajduje się tym sposobem

$$(28) \quad \begin{cases} u^2 + v^2 - 2uv \operatorname{dos}\theta = 0 & \text{(osie pochyłe)}, \\ u^2 + v^2 = 0 & \text{(osie prostokątne)}; \end{cases}$$

jestto równanie styczneczkowe punktów kołowych w nieskończoności.

Widzimy że równanie (28) wyprowadzi się z równania (25) przypuszczając $w = 0$, to jest szukając stycznych których spółrzędne $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, są nieskończone; albo nakoniec, styczne które przechodzą przez środek.

Uwaga I. Równanie (7) nru [279] pokazuje nam że można uważać równanie styczneczkowe (28) dwóch punktów kołowych w nieskończoności, jako równanie jakiegokolwiek koła środka stałego a którego promień jest nieskończonym.

Uwaga II. *Dwie proste są prostopadłemi kiedy ich punkta biegunowe, odnoszące się do układu dwóch punktów kołowych w nieskończoności, tworzą z tymi dwoma punktami jakikolwiek układ harmoniczny; albo, co wychodzi na jedno, kiedy punkt biegunowy jednej znajduje się na drugiej.*

Niech będą (u_1, v_1) i (u_2, v_2) dwie proste, punkt biegunowy pierwszej względem dwóch punktów kołowych (28) jest według nru [135]

$$\frac{u + v\sqrt{-1}}{u_1 + v_1\sqrt{-1}} + \frac{u - v\sqrt{-1}}{u_1 - v_1\sqrt{-1}} = 0;$$

równanie sprowadzające się do

$$uu_1 + vv_1 = 0;$$

jestto punkt biegunowy nru [285] prostej (u_1, v_1) względem koła (28).

Otóż gdy się wyrazi że prosta (u_2, v_2) przechodzi przez ten punkt; ma się

$$u_1u_2 + v_1v_2 = 0;$$

to jest warunek aby dwie proste były prostopadłemi według nru [131].

IV° Punkt biegunowy jakiejkolwiek prostej.

285. *Jeżeli się uważy jakąkolwiek prostą stałą* D, *gdy przez jakikolwiek punkt* I *tej prostej poprowadzi się dwie styczne* IT_1 *i* IT_2 *do koła; jakakolwiek prosta* IL, *przechodząca przez* I, *i taka że*

$$\frac{2}{\operatorname{st} DIL} = \frac{1}{\operatorname{st} DIT_1} + \frac{1}{\operatorname{st} DIT_2}, \tag{1}$$

przejdzie przez jakikolwiek punkt stały P, *kiedy punkt* I *przenosi się na prostej* D; *powiemy że punkt* P *jest punktem biegunowym prostej* D.

Uważmy naprzód jak w n[rze] [134] że związek (1) można napisać

$$\frac{\text{wst}\,\widehat{LIT_1}}{\text{wst}\,\widehat{DIT_1}} + \frac{\text{wst}\,\widehat{LIT_2}}{\text{wst}\,\widehat{DIT_2}} = 0. \tag{2}$$

Jeżeli O jest początkiem spółrzędnych i gdy się założy

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\text{wst}\,\widehat{LIT_1}}{\text{wst}\,\widehat{T_1ID}} \cdot \frac{\text{wst}\,\widehat{OID}}{\text{wst}\,\widehat{OIL}}, \tag{3}$$

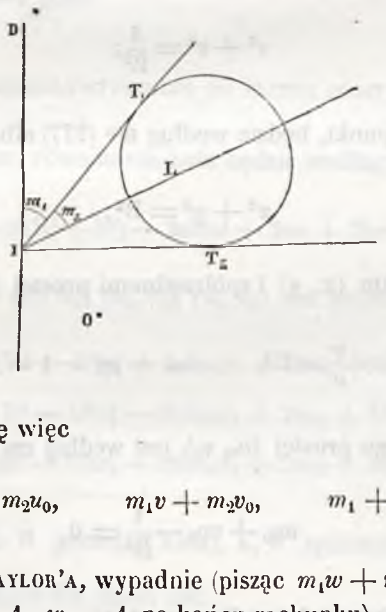
spółrzędne prostej IT_1 będą według wzorów (25) n[ru] [122]

$$u_1 = \frac{m_1 u + m_2 u_0}{m_1 + m_2}, \qquad v_1 = \frac{m_1 v + m_2 v_0}{m_1 + m_2},$$

oznaczając przez u_0 i v_0 spółrzędne prostej D, a przez (u, v) spółrzędne prostej IL.

Otóż prosta IT_1 musi być styczną z kołem; niech będzie

$$f(u, v) = 0, \qquad \text{albo} \qquad f(u, v, w) = 0,$$



równaniem tego koła; otrzyma się więc

$$f(m_1 u + m_2 u_0, \qquad m_1 v + m_2 v_0, \qquad m_1 + m_2) = 0.$$

Rozwijając za pomocą wzoru Taylor'a, wypadnie (pisząc $m_1 w + m_2 w_0$ zamiast $m_1 + m_2$, co można zawsze zrobić przypuściwszy $w = 1$, $w_0 = 1$ na końcu rachunku),

$$m_1^2 f(u, v, w) + m_1 m_2 [u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0}] + m_2^2 f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

To równanie wyznaczy dwa stosunki $\frac{m_2}{m_1}$ odpowiednie dwom stycznym poprowadzonym przez punkt I; otrzyma się według tego równania i określenia (3) wartości $\frac{m_2}{m_1}$:

$$\frac{\text{wst}\,\widehat{\text{OID}}}{\text{wst}\,\widehat{\text{OIL}}}\left[\frac{\text{wst}\,\widehat{\text{LIT}_1}}{\text{wst}\,\widehat{\text{T}_1\text{ID}}}+\frac{\text{wst}\,\widehat{\text{LIT}_2}}{\text{wst}\,\widehat{\text{T}_2\text{ID}}}\right]=-\frac{uf'_{u_0}+vf'_{v_0}+wf'_{w_0}}{f(u_0,\,v_0,\,w_0)}.$$

Jeżeli wtedy ma się wzgląd na związek (2), wypada ztąd

(3) $$uf'_{u_0}+vf'_{v_0}+wf'_{w_0}=0,$$

równanie które można napisać

(3 *bis*) $$u_0f'_u+v_0f'_v+w_0f'_w=0.$$

Równanie (3) jest związkiem między spółrzędnemi $(u,\,v,\,w)$ prostej ruchomej IL; widzimy że ta prosta przechodzi przez jakikolwiek punkt stały; równanie (3) jest równaniem punktu biegunowego prostej $\mathrm{D}(u_0,\,v_0)$.

Uwaga. Kiedy prosta $(u_0,\,v_0,\,w_0)$ jest styczną z kołem, równanie (3) daje oczywiście punkt zetknięcia na mocy związku (11) n^{ru} [281].

286. *Punkt biegunowy jakiejkolwiek prostej nie jest tu czem innem, jak tylko biegunem prostej* nru [231].

Niech będzie, na przykład, równanie styczneczkowe koła

(4) $$u^2+v^2=\frac{1}{\mathrm{R}^2};$$

jego równaniem w spółrzędnych punkt, będzie według nru [277] albo [282]

(5) $$x^2+y^2=\mathrm{R}^2;$$

ma się między spółrzędnemi punktu $(x,\,y)$ i spółrzędnemi prostej $(u,\,v)$ związki

(6) $$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\mathrm{R}^2,\qquad ux+vy-1=0.$$

Równaniem punktu biegunowego prostej $(u_0,\,v_0)$ jest według nru [285]

(7) $$uu_0+vv_0-\frac{1}{\mathrm{R}^2}=0,$$

a spółrzędnemi $(x_0,\,y_0)$ tego punktu będą według nru [111]

(8) $$x_0=\mathrm{R}^2u_0,\qquad y_0=\mathrm{R}^2v_0.$$

Z drugiej strony, biegunową tego punktu względem koła (5) jest według n^ru [231]

$$xR^2u_0 + yR^2v_0 - R^2 = 0, \qquad \text{albo} \qquad xu_0 + yv_0 - 1 = 0;$$

równanie przedstawiające jakąkolwiek prostą której spółrzędnemi są u_0 i v_0 według n^ru [110].

C. B. D. D.

Zobaczymy poniżej własność, która nam pozwoli wykreślić punkt biegunowy jakiejkolwiek prostej względem koła.

287. *Punkt biegunowy prostej w nieskończoności jest środkiem koła.*

Równaniem styczneczkowem koła odniesionego do jego środka jest

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2}; \qquad \text{albo, w spółrzędnych jednorodnych,} \qquad u^2 + v^2 = \frac{w^2}{R^2};$$

punktem biegunowym prostej (u_0, v_0, w_0) jest

$$uu_0 + vv_0 - \frac{ww_0}{R^2} = 0.$$

Spółrzędnemi prostej w nieskończoności są $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, i równanie poprzedzające daje

$$w = 0;$$

jestto równanie początku albo środek koła.

V° RÓWNANIE KOŁA STYCZNEGO DO TRZECH PROSTYCH; etc.

288. Przypuśćmy osie prostokątne, równaniem koła będzie według n^ru [279]

(1) $$u^2(R^2 - a^2) + v^2(R^2 - b^2) - 2abuv + 2au + 2bv - 1 = 0;$$

wyraźmy że ono dotyka trzy proste (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) ma się równania warunkowe

(2) $$\begin{cases} (R^2 - a^2)u_1^2 + (R^2 - b^2)v_1^2 - 2abu_1v_1 + 2au_1 + 2bv_1 - 1 = 0, \\ (R^2 - a^2)u_2^2 + (R^2 - b^2)v_2^2 - 2abu_2v_2 + 2au_2 + 2bv_2 - 1 = 0, \\ (R^2 - a^2)u_3^2 + (R^2 - b^2)v_3^2 - 2abu_3v_3 + 2au_3 + 2bv_3 - 1 = 0, \end{cases}$$

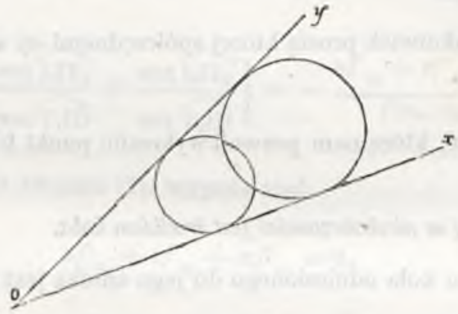
te związki wyznaczą ilości nieznane R (promień koła), a, b (spółrzędne środka).

289. *Wyznaczenie punktów wspólnych dla dwóch kół.*

Niech będą równania dwóch kół.

(1) $$f(u, v, w) = 0, \qquad \varphi(u, v, w) = 0;$$

a (u_0, v_0, w_0), (u_1, v_1, w_1) styczne dla pierwszego i drugiego z tych kół albo jednego z ich punktów wspólnych, równaniami punktów zetknięcia będą



$$uf'_{u_0}+vf'_{v_0}+wf'_{w_0}=0,$$

$$u\varphi'_{u_0}+v\varphi'_{v_0}+w\varphi'_{w_0}=0.$$

Te dwa punkta muszą przystawać do siebie, otrzyma się na wyznaczenie stycznych punktów wspólnych dla dwóch kół, równania

(2)
$$\frac{f'_{u_0}}{\varphi'_{u_1}}=\frac{f'_{v_0}}{\varphi'_{v_1}}=\frac{f'_{w_0}}{\varphi'_{w_1}},$$

$$f(u_0, v_0, w_0)=0, \qquad \varphi(u_1, v_1, w_1)=0;$$

te cztery równania dozwolą obliczyć cztery nieznane $\frac{v_0}{w_0}$, $\frac{v_0}{w_0}$, $\frac{u_1}{w_1}$, $\frac{v_1}{w_1}$.

Zastosujmy dla dwóch kół n^ru [279] (figura powyższa)

(3)
$$\begin{cases} uv-k(u+v)+k^2\mathrm{dos}^2\frac{\theta}{2}=0, \\ uv-g(u+v)+g^2\mathrm{dos}^2\frac{\theta}{2}=0. \end{cases}$$

Otrzyma się, w przypadku obecnym

$$\frac{v_0-k}{v_1-g}=\frac{u_0-k}{u_1-g}=\frac{k(v_0+v_0)-2k^2\mathrm{dos}^2\frac{\theta}{2}}{g(u_1+v_1)-2g^2\mathrm{dos}^2\frac{\theta}{2}};$$

$$u_0v_0-k(u_0+v_0)+k^2\mathrm{dos}^2\frac{\theta}{2}=0,$$

$$u_1v_1-g(u_1+v_1)+g^2\mathrm{dos}^2\frac{\theta}{2}=0.$$

Uważamy za stosowne pominąć rozwiązanie tych równań jako nie przedstawiające trudności ani interesu.

VI° Koło wpisane w jakikolwiek czworobok.

290. Aby pokazać użytek który można zrobić z równań styczneczkowych dowiedziemy własność następującą:

Kiedy jakikolwiek czworobok jest opisanym na kole, gdy jakakolwiek styczna toczy się po kole, iloczyn z jej odległości od dwóch wierzchołków przeciwnych jest do iloczynu z jej odległości od dwóch innych wierzchołków w stosunku stałym.

(Chasles, *Geometrya Wyższa*, stronica 468.)

Niech będą

$$
(1)\qquad \begin{cases} A = au + a_1v - 1 = 0, \\ B = bu + b_1v - 1 = 0, \\ C = cu + c_1v - 1 = 0, \\ D = du + d_1v - 1 = 0; \end{cases}
$$

równania wierzchołków czworobobu, równanie

$$
(2)\qquad AC - \lambda BD = 0
$$

będzie przedstawiało jakąkolwiek koniczną wpisaną w ten czworobok, i gdy czworobok zadość uczyni warunkom wpisalności, ta konicza będzie kołem, dla jakiejkolwiek wartości odpowiedniej na λ.

Jeżeli u i v są spółrzędne jakiejkolwiek stycznej, odległościami punktów A, B, C, D, od tej stycznej będą na mocy n^{ru} [129]

$$
\overline{AA'} = \frac{au + a_1v - 1}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{A}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \overline{BB'} = \frac{B}{\sqrt{u^2+v^2}};
$$

$$
\overline{CC'} = \frac{cu + c_1v - 1}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{C}{\sqrt{u^2+v^2}}; \quad \overline{DD'} = \frac{D}{\sqrt{u^2+v^2}}.
$$

Ztąd wypada, mając wzgląd na związek (2)

$$\frac{\overline{AA'}.\overline{CC'}}{\overline{BB'}.\overline{DD'}} = \frac{A.C}{B.D} = \lambda;$$

C. B. D. D.

291. Widzimy ztąd że wprowadzenie spółrzędnych styczneczkowych pozwoli analizie przystąpić do własności odnoszących się do stycznych, z równą łatwością jak do własności odnoszących się do punktów.

Możność jednoczesnego używania tych dwóch układów spółrzędnych : *spółrzędnych jakiegokolwiek punktu, spółrzędnych jakiejkolwiek prostej* daje analitycznej dostateczne warunki do współzawodnictwa z Geometryą czystą.

Nie mogąc dać więcej rozciągłości badaniu koła, odeszlemy do *Ćwiczeń* wysłowienia licznych własności dotyczących koła.

§ II. — SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE.

I° Równanie styczneczkowe jakiegokolwiek koła.

292 Równanie styczneczkowe jakiegokolwiek koła będzie związkiem między spółrzędnemi U, V, W jakiejkolwiek z jego stycznych.

1sza Metoda.

Niech będzie równanie jakiegokolwiek koła, w spółrzędnych trzylinijnych,

$$(1) \qquad F(X, Y, Z) = 0.$$

Styczna w jakimkolwiek punkcie (X_0, Y_0, Z_0) będzie miała na równanie według n^ru [271]

$$\left\{\begin{array}{ll} & XF'_{x_0} + YF'_{y_0} + ZF'_{z_0} = 0, \\ \text{z warunkiem} & F(X_0, Y_0, Z_0) = 0; \end{array}\right.$$

tem samem spółrzędne (U_0, V_0, W_0) tej stycznej będą dane na mocy n^ru [139] przez równania

$$\frac{F'_{x_0}}{U_0} = \frac{F'_{y_0}}{V_0} = \frac{F'_{z_0}}{W_0}, \quad F(X_0, Y_0, Z_0) = 0.$$

Otrzyma się równanie styczneczkowe koła, rugując X_0, Y_0, Z_0, między temi trzema równaniami; będzie się mogło zastąpić ostatnie przez

$$X_0U_0 + Y_0V_0 + Z_0W_0 = 0,$$

otrzymane, dodając wyrazy ułamków względnie pomnożone przez X_0, Y_0, Z_0.

Tak więc, znosząc wskazówki, wnosimy ztąd że równanie styczneczkowe koła otrzymuje się rugując

X, Y, Z między równaniami

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{F'_x}{U}=\dfrac{F'_y}{V}=\dfrac{F'_z}{W}, \\ UX+VY+WZ=0. \end{cases}$$

Można będzie zastosować tę metodę do równania ogólnego nru [269].

2ga Metoda.

Niech będzie ρ promień koła a

$$(3)\qquad MU+NV+PW=0,$$

równanie jego środka. Jeżeli U, V, W, są spółrzędnemi jakiejkolwiek stycznej do tego koła, odległość punktu (3) od tej stycznej musi być stałą i równą promieniowi. Otrzyma się według wzoru (37) numeru [156].

$$\frac{MU+NV+PW}{\lambda M+\mu N+\nu P}=\rho.$$

To równanie nie jest jednorodne; zrobi się jednorodnem wynosząc do kwadratu, potem mnożąc przez $\frac{S^2}{R^2}$ i mając wzgląd na związek (12 *bis*) nru [140]; równaniem koła będzie więc

$$(MU+NV+PW)^2=\frac{R^2}{S^2}\rho^2(\lambda M+\mu N+\nu P)^2\left[\begin{matrix}\dfrac{U^2\mathrm{wst}^2A}{\lambda^2}+\dfrac{V^2\mathrm{wst}^2B}{\mu^2}+\dfrac{W^2\mathrm{wst}^2C}{\nu^2}-\dfrac{2VW}{\mu\nu}\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C\,\mathrm{dos}A \\ -2\dfrac{WU}{\lambda\nu}\mathrm{wst}C\,\mathrm{wst}A\,\mathrm{dos}B-2\dfrac{UV}{\lambda\mu}\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B\,\mathrm{dos}C\end{matrix}\right];$$

R, S, A, B, C; przedstawiają: promień koła opisanego na trójkącie odniesienia, jego powierzchnią i jego kąty; λ, μ, ν, są parametrami odniesienia według nru [139].

Ilości M, N, P, są proporcyonalne do spółrzędnych środka koła, według nru [146], przedstawiamy je przez X_0, Y_0, Z_0; ma się nadto związek znany

$$(4)\qquad S=2R^2\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C.$$

Tak więc równaniem styczneczkowem jakiegokolwiek koła, którego środek jest

$$(5)\qquad X_0U+Y_0V+Z_0W=0,$$

a promień ρ, będzie

$$(6)\qquad \left\{\begin{matrix} U^2\dfrac{\mathrm{wst}^2A}{\lambda^2}+V^2\dfrac{\mathrm{wst}^2B}{\mu^2}+W^2\dfrac{\mathrm{wst}^2C}{\nu^2}-2VW\dfrac{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}{\lambda\mu}\mathrm{dos}A \\ -2WU\dfrac{\mathrm{wst}C\,\mathrm{wst}A}{\nu\lambda}\mathrm{dos}B-2UV\dfrac{\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B}{\lambda\mu}\mathrm{dos}C\end{matrix}\right\}=\frac{S^2}{R^2\rho^2}\cdot\frac{(UX_0+VY_0+WZ_0)^2}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)};$$

λ, μ, ν są parametrami odniesienia.

294. *Przypadki szczególne równania koła.*

1° *Koło wpisane w trójkąt odniesienia.*

Należy wyrazić że prosta AB($U=0$, $V=0$) jest styczną, to jest zrobić $U=0$, $V=0$ i obie strony równania (6) podzielić przez W^2; znajduje się tym sposobem

(7)
$$\frac{Z_0^2}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2}=\frac{R^2\rho^2}{S^2}\cdot\frac{\mathrm{wst}^2 C}{\nu^2}.$$

Otrzyma się podobnież, pisząc że boki BC i CA dotykają się koła

$$\frac{X_0^2}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2}=\frac{R^2\rho^2}{S^2}\cdot\frac{\mathrm{wst}^2 A}{\lambda^2},$$

$$\frac{Y_0}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2}=\frac{R^2\rho^2}{S^2}\cdot\frac{\mathrm{wst}^2 B}{\mu^2}.$$

Zauważmy koło wpisane w trójkąt, spółrzędne X_0, Y_0, Z_0 są dodatne, a przeto się otrzyma

$$\frac{\lambda X_0}{\mathrm{wst}A}=\frac{\mu Y_0}{\mathrm{wst}B}=\frac{\nu Z_0}{\mathrm{wst}C}=\frac{R\rho}{S}(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0).$$

Zastępując, w równaniu (6), X_0, Y_0, Z_0, przez te wartości, wypadnie

$$VW\frac{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}{\mu\nu}(1+\mathrm{dos}A)+UW\frac{\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}C}{\nu\lambda}(1+\mathrm{dos}B)+UV\frac{\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B}{\lambda\mu}(1+\mathrm{dos}C)=0:$$

równanie mogące się napisać ostatecznie

(8)
$$\frac{\lambda}{\mathrm{st}\frac{A}{2}}VW+\frac{\mu}{\mathrm{st}\frac{B}{2}}UW+\frac{\nu}{\mathrm{st}\frac{C}{2}}UV=0,$$

takiem jest równanie styczneczkowe koła wpisanego w trójkąt odniesienia.

Jeżeli się zauważy że dla koła opisanego i stycznego z bokiem BC, Y_0, Z_0, są dodatne a X_0 odjemne, związki (7) dadzą

$$-\frac{\lambda X_0}{\mathrm{wst}A}=\frac{\mu Y_0}{\mathrm{wst}B}=\frac{\nu Z_0}{\mathrm{wst}C}=\frac{R\rho}{S}(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0);$$

i podstawiając w równaniu (6), znajdzie się na równanie styczneczkowe koła opisanego i stycznego z bokiem BC

(8 *bis*)
$$\frac{\lambda}{\mathrm{st}\frac{A}{2}}VW-\mu\,\mathrm{st}\frac{B}{2}UW-\nu\,\mathrm{st}\frac{C}{2}UV=0;$$

parametrami odniesienia są zawsze λ, μ ν.

2° *Równanie jakiegokolwiek koła stycznego do dwóch prostych.*

Weźmy za trójkąt odniesienia trójkąt utworzony przez dwie styczne i cięciwę zetknięcia, równaniem koła będzie

(9) $$\mathrm{VW} = \frac{\mu\nu}{\lambda^2}\,\mathrm{wst}^2\,\frac{\mathrm{A}}{2}\,\mathrm{U}^2.$$

Znajdzie się dowodzenie w n$^{\text{rze}}$ [296].

II° Punkt zetknięcia jakiejkolwiek stycznej.

295. Zobaczymy poniżej, w nauce stycznych, sposób dowodzenia prędszy i prostszy dla tego rodzaju kwestyi.

Na chwilę poprzestaniemy na metodzie rozwiniętej w n$^{\text{rze}}$ [282]. Rozumowanie wykona się zupełnie tymże samym sposobem; uważając jedynie na to, że w przypadku obecnym, spółrzędne U, V, W, jakiejkolwiek stycznej są połączone ze spółrzędnemi X, Y, Z, punktu zetknięcia, przez związki n$^{\text{ru}}$ [292]

$$\frac{\mathrm{F}'_{\mathrm{x}}}{\mathrm{U}} = \frac{\mathrm{F}'_{\mathrm{y}}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{F}'_{\mathrm{z}}}{\mathrm{W}},\quad \mathrm{UX} + \mathrm{VY} + \mathrm{WZ} = 0.$$

Ztąd wypada, że dla jakiejkolwiek stycznej $\mathrm{U_0, V_0, W_0}$, z kołem

(10) $$f(\mathrm{U, V, W}) = 0,$$

równaniem punktu zetknięcia będzie

(11) $$\mathrm{U}f'_{\mathrm{u}_0} + \mathrm{V}f'_{\mathrm{v}_0} + \mathrm{W}f'_{\mathrm{w}_0} = 0,$$

z warunkiem

(11 *bis*) $$f(\mathrm{U_0, V_0, W_0}) = 0.$$

Uwaga. Aby wyrazić że jakikolwiek punkt

(12) $$\mathrm{MU} + \mathrm{NV} + \mathrm{PW} = 0$$

jest na kole, trzeba będzie wyrugować $\mathrm{U_0, V_0, W_0}$ (zob. n$^{\text{er}}$ [283]) między równaniami

(13) $$\frac{f'_{\mathrm{u}_0}}{\mathrm{M}} = \frac{f'_{\mathrm{v}_0}}{\mathrm{N}} = \frac{f'_{\mathrm{w}_0}}{\mathrm{P}},\qquad f(\mathrm{U_0, V_0, W_0}) = 0.$$

296. *Równanie koła stycznego do dwóch prostych.*

Weźmy za trójkąt odniesienia trójkąt utworzony przez dwie styczne i cięciwę zetknięcia; napiszmy że proste AB i AC dotykają się koła w B i C względnie.

Prosta AB($V=0$, $V=0$) musi być styczną i mieć punkt B($V=0$) za punkt zetknięcia; otrzyma się więc według n[ru] [295]

$$\frac{f'_{v_0}}{0}=\frac{f'_{v_0}}{1}=\frac{f'_{w_0}}{0},\qquad 2f(U_0, V_0, W_0)=U_0f'_{u_0}+V_0f'_{v_0}+W_0f'_{w_0}=0;$$

albo

(1°) $$f'_{u_0}=0,\qquad f'_{w_0}=0,\qquad f'_{v_0}\gtrless 0;\qquad U_0=0,\qquad V_0=0.$$

Wyrażając że prosta AC jest styczną w C, otrzyma się

(2°) $$f'_{u_1}=0,\qquad f'_{v_1}=0,\qquad f'_{w_1}\gtrless 0;\qquad U_1=0,\qquad W_1=0.$$

Jeśli zastosujemy te związki do równania ogólnego (6), i jeśli się zauważy że spółrzędne Y_0, Z_0, są dodatne a że X_0 jest odjemnem, znajduje się

(3°) $$\begin{cases}\dfrac{Y_0\dfrac{S}{R\rho}}{\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0}=\dfrac{\text{wst}\,B}{\mu},\qquad \dfrac{Z_0\dfrac{S}{R\rho}}{\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0}=\dfrac{\text{wst}\,C}{\nu},\\[2ex] \dfrac{X_0Y_0\cdot\dfrac{S^2}{R^2\rho^2}}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2}=-\dfrac{\text{wst}A\,\text{wst}B}{\lambda\mu}.\text{dos}C,\qquad \dfrac{X_0Z_0\cdot\dfrac{S^2}{R^2\rho^2}}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2}=-\dfrac{\text{wst}A\,\text{wst}C}{\lambda\nu}.\text{dos}B.\end{cases}$$

Dzieląc stronami dwie pierwsze, potem dwie ostatnie równości (3°), i równając wartości stosunku $\dfrac{Y_0}{Z_0}$, ma się naprzód

$$B=C,$$

warunek oczywisty *a priori*. Związki (3) dają wtedy

$$-\frac{\lambda X_0}{\text{wst}A\ \text{dos}B}=\frac{\mu Y_0}{\text{wst}B}=\frac{\nu Z_0}{\text{wst}B}=\frac{R\rho}{S}(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0).$$

Podstawienie tych wartości w równaniu (6), daje

$$\left.\begin{aligned}&U^2\frac{\text{wst}^2A}{\lambda^2}+V^2\frac{\text{wst}^2B}{\mu^2}+W^2\frac{\text{wst}^2C}{\nu^2}-2VW\frac{\text{wst}^2B}{\mu\nu}\text{dos}A\\&-2WU\frac{\text{wst}A\ \text{wst}B}{\lambda\nu}.\text{dos}B-2UV\frac{\text{wst}A\ \text{wst}B}{\mu\lambda}.\text{dos}B\end{aligned}\right\}=\left[-U\frac{\text{wst}A\ \text{dos}B}{\lambda}+V\frac{\text{wst}B}{\mu}+W\frac{\text{wst}B}{\nu}\right]^2;$$

albo rozwijając i upraszczając,

(14) $$VW=\frac{\mu\nu}{\lambda^2}\,\text{wst}^2\frac{A}{2}\,U^2;$$

λ, μ, ν są parametrami odniesienia.

Z tego równania wypada wprost twierdzenie następujące :

Uważmy dwie styczne stałe i jakąkolwiek styczną zmienną; iloraz iloczynu odległości punktów zetknięcia dwóch stycznych stałych od stycznej ruchomej przez kwadrat odległości od tejże samej stycznej ich punkta zbiegania się, jest równy kwadratowi wstawy pół kąta dwóch stycznych stałych.

III° Punkta kołowe w nieskończoności.

297. Równanie (6) nru [293] prowadzi nas bezpośrednio do równania punktów kołowych w nieskończoności; dosyć w rzeczy samej według uwagi (1) nru [284] w niem przypuścić promień ρ nieskończonym: znajduje się tym sposobem

$$(15)\quad U^2\frac{\mathrm{wst}^2A}{\lambda^2}+V^2\frac{\mathrm{wst}^2B}{\mu^2}+W^2\frac{\mathrm{wst}^2C}{\nu^2}-2VW\frac{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}{\mu\nu}\mathrm{dos}A-2WU\frac{\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}C}{\lambda\nu}\mathrm{dos}B-2UV\frac{\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B}{\lambda\mu}\mathrm{dos}C=0;$$

albo, przypuściwszy parametry odniesienia równe jedności :

$$(15^{bis})\quad U^2\mathrm{wst}^2A+V\mathrm{wst}^2B+W^2\mathrm{wst}^2C-2VW\mathrm{wst}B\mathrm{wst}C\mathrm{dos}A-2WU\mathrm{wst}A\mathrm{wst}C\mathrm{dos}B-2UV\mathrm{wst}A\mathrm{wst}B\mathrm{dos}C=0.$$

Można jeszcze zauważyć że proste przechodzące przez punkta (15), dotykają się koła (6), muszą zarówno przechodzić przez środek koła, to jest

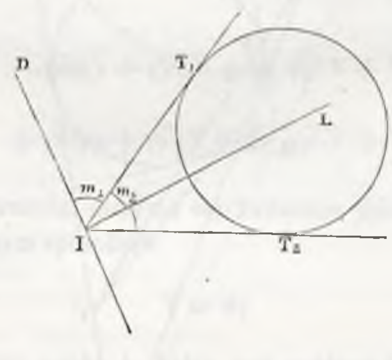
$$UX_0+VY_0+WZ_0=0;$$

więc punkta (15) są punktami kołowymi w nieskończoności.

Można wreszcie sprawdzić łatwo że pierwsza strona równania (15) jest rozkładalną na dwa czynniki 1go stopnia.

IV° Punkt biegunowy jakiejkolwiek prostej.

298. Punkt biegunowy jakiejkolwick prostej (zob. ner [285]) jest określony przez związek



$$(1^\circ)\qquad \frac{\mathrm{wst}\ \widehat{LIT_1}}{\mathrm{wst}\ \widehat{DIT_1}}+\frac{\mathrm{wst}\ \widehat{LIT_2}}{\mathrm{wst}\ \widehat{DIT_2}}=0.$$

Oznaczywszy przez U_0, V_0, W_0, spółrzędne prostej D; przez U, V, W, spółrzędne prostej IL, i założywszy

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\text{wst}\,\widehat{\text{LIT}_1}}{\text{wst}\,\widehat{\text{T}_1\text{ID}}};$$

spółrzędne U_1, V_1, W_1, prostej albo stycznej IT_1, będą dane przez związki n^ru [142]

$$\frac{U_1}{m_1U + m_2V_0} = \frac{V_1}{m_1V + m_2V_0} = \frac{W_1}{m_1W + m_2W_0}.$$

Otóż spółrzędne U_1, V_1, W_1, muszą sprawdzać równanie styczneczkowe

$$f(U, V, W) = 0,$$

koła; otrzyma się więc

$$f(m_1U + m_2U_0, \quad m_1V + m_2V_0, \quad m_1W + m_2W_0) = 0;$$

albo rozwinąwszy za pomocą wzoru Taylora:

$$m_1^2 f(U, V, W) + m_1m_2[Uf'_{U_0} + Vf'_{V_0} + Wf'_{W_0}] + m_2^2 f(U_0, V_0, W_0) = 0.$$

To równanie wyznaczy dwa stosunki $\frac{m_2}{m_1}$ odpowiednie dwóm stycznym poprowadzonym przez punkt I; otóż według związku (1°), summa tych wartości jest *zerem*, ma się więc

$$(16) \qquad Uf'_{U_0} + Vf'_{V_0} + Wf'_{W_0} = 0.$$

Równanie (16) jest związkiem między spółrzędnemi U, V, W, prostej ruchomej IL; widzimy że ona przechodzi przez jakikolwiek punkt stały; równanie (16) jest równaniem *punktu biegunowego* prostej (U_0, V_0, W_0).

299. *Własność punktu biegunowego jakiejkolwiek prostej.*

« Przez dwa punkta jakiekolwiek I i I′ wzięte na prostej stałej D, poprowadzi się styczne do koła; » weźmie się przecięcia M i M′, N i N′, tych dwóch par stycznych; proste MM′ i NN′ przejdą, » jakiemikolwiekbądź byłyby punkta I i I′ przez punkt biegunowy A prostej D. »

Weźmy za trójkąt odniesienia trójkąt utworzony przez prostą D i przez styczne punktów B i C w których ona spotyka koło; równaniem koła będzie wtedy według nru [294] (równania (9))

$$(1) \qquad \mathrm{VW} = k\mathrm{U}^2.$$

Równania dwóch punktów jakichkolwiek I i I′ leżących na prostej D będą kształtu

$$(\mathrm{I}) \quad \mathrm{W} = \rho \mathrm{V}, \qquad (\mathrm{I}') \quad \mathrm{W} = \rho'.\mathrm{V}$$

ρ i ρ' są stałemi dowolnemi.

Otrzymamy wtedy dla spółrzędnych stycznych poprowadzonych do koła (1)

$$\mathrm{IM}\begin{cases} \mathrm{V} = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho}}\mathrm{U}, \\ \mathrm{W} = \sqrt{\rho}\ \sqrt{k}\,\mathrm{U}, \end{cases} \qquad \mathrm{I'M}\begin{cases} \mathrm{V} = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho'}}\mathrm{U}, \\ \mathrm{W} = \sqrt{\rho'}\ \sqrt{k}\,\mathrm{U}, \end{cases}$$

$$\mathrm{IM'}\begin{cases} \mathrm{V} = -\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho}}\mathrm{U}, \\ \mathrm{W} = -\sqrt{k}\ \sqrt{\rho}\,\mathrm{U}, \end{cases} \qquad \mathrm{I'M'}\begin{cases} \mathrm{V} = -\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho'}}\mathrm{U}, \\ \mathrm{W} = -\sqrt{\rho'}\ \sqrt{k}\,\mathrm{U}. \end{cases}$$

Według tego, równania punktów M i M′ będą

$$(\mathrm{M}) \begin{vmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V} & \mathrm{W} \\ 1 & \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho}} & \sqrt{k}\ \sqrt{\rho} \\ 1 & \dfrac{+\sqrt{k}}{\sqrt{\rho'}} & \sqrt{k}\ \sqrt{\rho} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\mathrm{M'}) \begin{vmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V} & \mathrm{W} \\ 1 & \dfrac{-\sqrt{k}}{\sqrt{\rho}} & -\sqrt{k}\ \sqrt{\rho} \\ 1 & \dfrac{-\sqrt{k}}{\sqrt{\rho'}} & -\sqrt{k}\ \sqrt{\rho'} \end{vmatrix} = 0;$$

albo rozwijając

$$(\mathrm{M}) \qquad -\sqrt{k}(\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho'})\,\mathrm{U} + \sqrt{\rho}\ \sqrt{\rho'}.\mathrm{V} + \mathrm{W} = 0,$$

$$(\mathrm{M'}) \qquad +\sqrt{k}(\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho'})\,\mathrm{U} + \sqrt{\rho}\ \sqrt{\rho'}.\mathrm{V} + \mathrm{W} = 0.$$

Jeżeli się odejmie te dwa równania, otrzyma się równanie jakiegokolwiek punktu leżącego na prostej MN′; otóż, znajduje się tym sposobem

$$\mathrm{V} = 0;$$

więc prosta MM′ przechodzi przez punkt A, który jest *punktem biegunowym* prostej BC. Sprawdzi się podobnież że prosta NN′ przechodzi także przez punkt A.

Więc.....

ĆWICZENIA.

300. 1° Miejsce jakiegokolwiek punktu takiego, że summa kwadratów odległości od n punktów danych, względnie pomnożonych przez stałe dane m_1, m_2, m_n, będzie stałą, jest jakiemkolwiek kołem.

2° Mając dane n punktów stałych, jeśli jakakolwiek prosta jest taką, że summa iloczynów, przez liczby stałe m_1, m_2, m_n, prostopadłych spuszczonych z punktów danych na tej prostej, jest stałą; ta prosta obwija jakiekolwiek koło.

Środek jest środkiem odległości proporcyonalnych od n punktów danych.

3° Daje się dwa punkta A i B, i ich biegunowe względem jakiegokolwiek koła środka O; AP i BQ będąc prostopadłemi spuszczonemi względnie z punktu A na biegunową B, i z punktu B na biegunową A; ma się

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}.$$

4° Jeśli w jakiemkolwiek kole, poprowadzi się dwie jakiekolwiek cięciwy prostokątne przez jakikolwiek punkt stały, styczne z końców tych cięciw tworzą jakikolwiek czworobok który jest zawsze wpisanym w inne jakiekolwiek koło stałe.

5° Podstawy wszystkich trójkątów równo-obwodowych, mających tenże sam kąt wierzchołkiem przeciwległy i stały, podpasują toż samo koło.

6° Jeśli przez punkt jakiegokolwiek okręgu poprowadzi się trzy cięciwy i gdy na każdej z nich jako średnicy nakreśli się jakiekolwiek koło, przecięcia po dwa tych trzech kół, różne od punktu wspólnego, są w linii prostej.

7° Mając dane jakiekolwiek koło i jakikolwiek punkt stały P; około punktu P obraca się jakikolwiek kąt prosty; łączy się punkta A i B gdzie boki tego kąta spotykają koło; miejscem rzutów punktu P na prostej AB jest jakiekolwiek koło.

8° Trzy koła, opisane na trzech przekątnych czworoboku zupełnego jako średnicach, mają tęż samą oś pierwiastną.

9° Mając dane dwa koła stałe, wyobraźmy sobie dwa koła zmienne styczne między sobą i z poprzedniemi; miejscem punktu zetknięcia kół zmiennnych jest jakiekolwiek koło.

10° Mając dane różne koła które mają tęż samą oś pierwiastną; jeśli jakiekolwiek koło zmienne przecina dwa z tych kół pod kątem stałym, ono będzie przecinać każde z innych kół pod kątem także stałym.

11° Wzięto na pierwszej prostej dwa punkta A i B i na drugiej prostej dwa punkta a i b, i poprowadzono proste Aa, Bb spotykające się w punkcie S; jeśli się obraca drugą prostą ab około jej punktu spotkania γ z pierwszą, punkt S zmienia położenie; a wtedy wypadnie :

1° że prosta poprowadzona przez punkt S równolegle do prostej ab, w każdem z jej położeń spotyka prostą AB zawsze w jednym punkcie I; 2° że punkt S zakreśli koło mające za środek ten punkt I.

12° Jeśli po wzięciu czterech punktów stałych a, b, c, d, na kole, łączy się jakikolwiek punkt M koła z tymi czterema punktami, stosunek nieharmoniczny pęku (M, abcd) jest stałym.

13° Cztery styczne stałe na kole są spotkane przez jakąkolwiek styczną ruchomą w czterech punktach których stosunek nieharmoniczny jest stałym.

14° Kiedy czworobok jest wpisanym w koło, jakakolwiek poprzeczna spotyka jego dwie pary boków przeciwnych i okręg koła, w trzech parach punktów będących w inwolucyi.

15° Stosunek nieharmoniczny czterech stycznych na kole jest równy stosunkowi czterech punktów zetknięcia.

16° Dwie styczne na kole będąc stałe, jeśli się poprowadzi wiele innych stycznych, ich części zawarte między dwiema pierwszemi będą widziane ze środka koła pod kątami równymi albo wzajemnie się spełniającymi.

17° Kiedy czworobok jest opisanym na kole, dwie pary prostych poprowadzonych z tego samego punktu do jego wierzchołków przeciwnych, i styczne poprowadzone z jednego punktu do okręgu koła, tworzą pęk w inwolucyi.

18° Jeśli na średnicy koła weźmie się dwa punkta dzielące harmonicznie tę średnicę, odległości każdego punktu okręgu koła od tych dwóch punktów stałych mają ich stosunek stały.

19° Biegunowe różnych punktów jakiejkolwiek prostej przechodzą wszystkie przez biegun prostej.

20° Bieguny prostych przechodzących przez punkt stały zakreślają biegunową tego punktu.

21° Jeśli około jakiegokolwiek punktu stałego, daje się obracać cięciwa jakiegokolwiek koła, odległości końców tej cięciwy od jekiejkolwiek osi stałej, podzielone względnie przez odległości dwóch tychże samych punktów od biegunowej punktu stałego, mają summę stałą.

22° Jeśli z każdego punktu jakiejkolwiek prostej poprowadzi się dwie styczne do jakiegokolwiek koła, summa odległości dwóch stycznych od jakiegokolwiek punktu stałego podzielona przez ich odległości od bieguna prostej, jest stałą.

23° Jeśli z każdego punktu prostej stałej poprowadzi się dwie styczne do jakiegokolwiek koła, iloczyn wstaw kątów, jakie one czynią z tą prostą, jest do kwadratu wstawy kąta, jaki promień poprowadzony z tegoż samego punktu do środka koła czyni z tąż samą prostą, w stosunku danym.

24° Cztery punkta w linii prostej mają ich stosunek nieharmoniczny równy stosunkowi ich biegunowych, wziętych względem jakiegokolwiek koła.

25° Gdy czworobok jest opisanym na kole, jego dwie przekątne i proste łączące punkta zetknięcia boków przeciwnych przechodzą wszystkie cztery przez jeden punkt.

26° W czworoboku opisanym na kole, punkt spotkania dwóch przekątnych jest biegunem prostej, łączącej punkta zbiegania się boków przeciwnych. — Dwie przekątne i prosta łącząca punkta zbiegania się boków przeciwnych tworzą trójkąt, którego każdy wierzchołek ma za biegunową bok przeciwny.

27° Kiedy czworobok jest opisanym na kole, środki jego dwóch przekątnych i środek koła są na jednej prostej.

28° Jeśli przez wierzchołki czworoboku wpisanego ABCD, poprowadzi się styczne EF, FG, GH, HE; cztery przekątne dwóch czworoboków przecinają się w jednym punkcie. — Punkta zbiegania się L, M, N, P, boków przeciwnych każdego czworoboku są w linii prostej. — Przekątne FH, EG czworoboku opisanego przechodzą przez punkta L i N, w których się przecinają boki przeciwne czworoboku wpisanego.

29° Kiedy czworobok opisany na kole jest jednocześnie wpisalnym, cięciwy łączące punkta zetknięcia boków przeciwnych są dwójsiecznemi kątów utworzonych przez przekątne. — Iloczyn dwóch stycznych poprowadzonych przez końce tejże samej przekątnej jest równy kwadratowi promienia koła wpisanego. — Środek koła opisanego, środek koła wpisanego i punkt zbiegania się przekątnych są w linii prostej.

30° W czworoboku wpisanym w koło, punkt zbiegania się dwóch przekątnych jest biegunem prostej, łączącej punkta zbiegania się boków przeciwnych. Te trzy proste są takie, że każda z nich ma za biegunową prostą łączącą dwa inne punkta zbiegania się.

31° Gdy czworobok jest wpisanym w koło, biegunowe jakiegokolwiek punktu, względne do koła i do kątów utworzonych przez dwie pary boków przeciwnych przechodzą przez jeden punkt.

32° Gdy cięciwa koła obraca się około punktu stałego, promienie poprowadzone ze środka koła do jej końców czynią z promieniem przechodzącym przez ten punkt, dwa kąty takie, że iloczyn stycznych pół kątów pozostaje stałym.

33° Jeśli z każdego punktu jakiejkolwiek prostej poprowadzi się dwie styczne do jakiegokolwiek koła, iloczyn stycznych trygonometrycznych pół kątów, jakie one czynią z prostą jest stałym.

34° Środki podobieństwa dwóch kół są dwoma punktami sprzężonymi harmonicznymi względem dwóch środków figury. — Dwa środki podobieństwa dwóch kół tworzą inwolucyę z dwiema parami punktów dwóch okręgów kół leżących na linii środków.

35° Oś pierwiastna dwóch kół jest w równej odległości od dwóch biegunowych każdego środka podobieństwa.

36° Biegunowe, względem dwóch kół, jakiegokolwiek punktu osi pierwiastnej, przecinają się na osi pierwiastnej.

37° Bieguny osi pierwiastnej dwóch kół są sprzężonemi harmonicznemi względem dwóch środków podobieństwa.

38° Jeśli z każdego punktu osi pierwiastnej dwóch kół, poprowadzi się do nich dwie styczne, stosunek stycznych trygonometrycznych kątów jakie te dwie proste czynią z osią pierwiastną jest stałym.

39° Przekątne czworoboku opisanego na dwóch kołach spotykają linię środków w dwóch punktach z których każdy ma jedną biegunową w dwóch kołach. — Okręg koła, zakreślony na prostej łączącej środki dwóch kół, przechodzi przez cztery wierzchołki tego czworoboku.

40° Wziąwszy punkt stały na płaszczyznie koła, istnieje zawsze pewna prosta taka, że kwadrat odległości jakiegokolwiek punktu koła od tego punktu stałego, jest do odległości tegoż samego punktu od prostej stałej, w stosunku stałym.

41° Gdy trzy koła mają tę samą oś pierwiastną, wszelka poprzeczna spotyka je w sześciu punktach tworzących inwolucyę.

42° Gdy trzy koła mają jednę oś pierwiastną, jeśli przez jakikolwiek punkt m jednego koła poprowadzi się, w jakimkolwiek kierunku, poprzeczną spotykającą dwa inne w dwóch parach punktów a, a' i b, b', stosunek $\frac{ma.\,ma'}{mb.mb'}$ ma wartość stałą.

43° Gdy trzy koła mają tęż samą oś pierwiastną, styczne poprowadzone z każdego punktu jednego do dwóch innych mają ich długości w stosunku stałym.

44° Gdy trzy koła mają tę samą oś pierwiastną, z każdego punktu jednego widzimy dwa inne pod kątami, których połowy mają ich styczne trygonometryczne w stosunku stałym.

45° Jeśli na prostej łączącej środki podobieństwa dwóch kół jako średnicy, zakreśli się trzecie; z każdego z punktów tego trzeciego zobaczy się dwa pierwsze pod kątami równymi.

46° Gdy trzy koła mają jednę oś pierwiastną, jeśli z jakiegokolwiek punktu do nich się poprowadzi styczne, trzy cięciwy zetknięcia przejdą przez tenże sam punkt.

47° Gdy boki jakiegokolwiek kąta spotykają dwa koła C i C', każde w czterech punktach, to jest a, b, c, d na jednem kole, i a', b', c', d', na drugiem, dwie cięciwy ad i bc, przypuszczone dla tego kąta w pierwszem kole, spotykają dwie cięciwy a'd', b'c', przypuszczone w drugiem kole, w czterech punktach m, n, p, q, które leżą na jednem kole; to koło ma też samą oś pierwiastną jak dwa C i C'.

48° Gdy trzy koła mają też samą oś pierwiastną, jeśli z jakiegokolwiek punktu jednego z nich poprowadzi się jakąkolwiek styczną do każdego z dwóch innych, i gdy się złączy punkta zetknięcia za pomocą jakiejkolwiek prostej, cieciwy przejęte przez dwa koła na tej prostej są między sobą w stosunku stałym.

49° Wziąwszy trzy koła mające też samą oś pierwiastną, jeśli kąt wielkości zmiennej wpisany w jedno koło i którego boki są styczne do dwóch innych, względnie się porusza, tak że jego wierzchołek i jego dwa boki ślizgają się po trzech okręgach kół, cięciwa jaką ten kąt przejmuje w pierwszem kole toczy się po czwartem mającem tę samą oś pierwiastną jak trzy pierwsze.

50° Mając dane trzy koła, jeśli przez jakikolwiek punkt poprowadzi się trzy inne przechodzące względnie, przez punkta przecięcia trzech pierwszych, branych po dwa, te trzy koła przetną się w tymże samym punkcie.

51° Mając dane dwa koła O i O' do których prowadzi się dwa koła styczne C i C', 1sze w M i m_1, a drugie w N i n_1, tak że dwie proste Mm_1, Nn_1 przechodzą przez tenże sam środek podobieństwa dwóch kół O i O′ : 1° oś pierwiastna dwóch kół C i C′ przejdzie przez tenże sam punkt; 2° środek podobieństwa tych dwóch kół otrzyma się na osi pierwiastnej dwóch O i O′, na przecięciu dwóch cięciw MN, $m_1 n_1$.

52° Jakakolwiek prosta L poprowadzona przez środek podobieństwa dwóch kół O i O′ jest osią pierwiastną nieskończonej liczby układów dwóch kół C i C′ stycznych z dwoma O i O′.

Spostrzeżenie. Począwszy od nru [13], wysłowienia tych podań były wyjęte dosłownie z *Geometryi wyższej* p. Chasles'a. *Dowodzenie analityczne* tych twierdzeń będzie wybornem ćwiczeniem i dostarczy jednocześnie *elementów* do ważnej teoryi koła. Olbrzymie postępy uczynione od pół wieku w *Geometryi czystej* wzbogaciły tę teoryą do tyla, że analityczne jej rozwinięcie zmusiłoby przejść zakres zamierzonego przez nas wykładu.

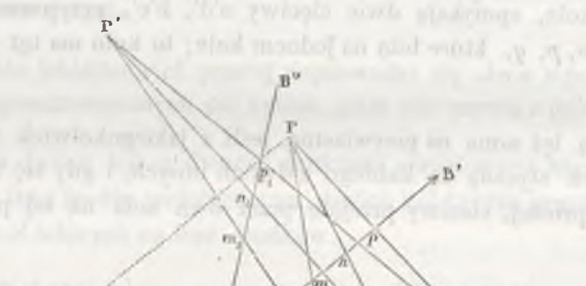
53. Jeśli z jakiegokolwiek punktu A, wziętego na płaszczyznie szeregu kół mających tę samą oś pierwiastną, prowadzi się dwie styczne do każdego koła tego szeregu, wszystkie punkta środkowe cięciw zetknięcia odpowiednich będą na nowym okręgu koła przecinającym prostokątnie pierwsze.

54° Niech będzie jakikolwiek szereg kół mających też samą oś pierwiastną; dowiedziono że biegunowe punktu stałego A, względem kół szeregu, zbiegają się w punkcie stałym A′. Jeśli punkt A porusza się na jakiejkolwiek prostej danej, punkt A′ zakreśla jakąkolwiek koniczną przechodzącą przez *punkta granice*. Ta koniczna jest także miejscem biegunów prostej danej względem kól szeregu.

55° Wszystkie koła mające ich środki na jakiejkolwiek prostej i przecinające prostokątnie jakiekolwiek koło dane mają też samą oś pierwiastną.

56° Jeśli trójkąt T jest jednokładnym do trzech trójkątów T_1, T_2, T_3, mających z T jakikolwiek wierzchołek wspólny, 1° Okręg koła O, opisany na trókącie T, dotyka okręgów kół O_1, O_2, O_3, opisanych na trzech innych trókątach; 2° punkta zetknięcia są wierzchołkami trójkątów T_1, T_2, T_3, należącymi do trójkąta T. 3° Boki trójkąta T przechodzą przez środki podobieństwa w linii prostej, bądź to trójkątów T_1, T_2, T_3, bądź to kół O_1, O_2, O_3.

57° Daje się dwie proste AB i AB′ : z jakiegokolwiek punktu P prowadzi się trzy sieczne stałe



Pa, Pb, Pc, spotykające AB′ w *m, n, p*; potem daje się prostej AB′ jakiekolwiek inne położenie AB″, i odcina się na tej linii długości A*m*, A*n*, A*p*, w Am_1, An_1, Ap_1; łączy się am_1 bn_1, cp_1; dowieść że te trzy linie am_1, bn_1, cp_1, przecinają się w jednym punkcie P′; dowieść że punkt P′ zakreśli jakiekolwiek koło, kiedy prosta AB″ bierze wszystkie położenia możebne około punktu A; środek tego koła jest na prostej AB, na przecięciu tej prostej z równoległą do AB′ poprowadzoną przez punkt P.

KSIĘGA TRZECIA

ROZTRZĄSANIE I UPROSZCZENIE RÓWNANIA OGÓLNEGO DRUGIEGO STOPNIA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

KLASSYFIKACYA KRZYWYCH DRUGIEGO RZĘDU.

§ I. — WYKREŚLENIE I KLASSYFIKACYA KRZYWYCH 2giego RZĘDU.

301. Równanie ogólne krzywych drugiego rzędu jest

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Aby wykreślić i uporządkować krzywe które ono przedstawia, będziemy mieli do rozebrania dwa założenia:

I° 1sze Założenie: Spółczynniki kwadratów nie są zerami razem.

302. Rozwiążemy równanie (1) względem jednej ze zmiennych, y na przykład, i przypuścimy że to na wstępie nam dane do rozwiązania równanie do takiego się kształtu sprowadziło, aby był istotnie dodatnym spółczynnik C na y^2. Ma się tym sposobem

$$(2) \qquad y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + (E^2 - CF)};$$

założywszy

$$(2\ bis) \qquad Y = +\frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + (E^2 - CF)};$$

wypadnie

$$(3) \qquad y = -\frac{Bx + E}{C} \pm Y.$$

Wykreśli się naprzód prostą

$$(4)\qquad y = -\frac{Bx + E}{C};$$

widzimy wtedy, przez równanie (3), że się otrzyma różne punkta krzywej, przenosząc począwszy od punktu odpowiedniego prostej (4), na wierzchu i pod spodem, równolegle do osi rzędnych, długość równą dla Y.

Prosta (4) dzieli więc na dwie części równe cięciwy równoległe do osi Oy; ta prosta nazywa się *średnicą sprzężoną* cięciw równoległych do Oy.

Potrzeba teraz badać zmiany ilości Y, zależące od znaku wyrażenia $(B^2 - AC)$; ma się więc do rozebrania trzy przypadki główne:

$$B^2 - AC > 0, \qquad B^2 - AC < 0; \qquad B^2 - AC = 0.$$

Rozbiór każdego z tych przypadków zależy nadto od kształtu jaki bierze trzy wyraz drugiego stopnia położony pod znakiem pierwiastkowym Y, to jest na mocy znanej nam zasady *algebry elementarnej*, od znaku wyrażenia

$$(BE - CD)^2 - (B^2 - AC)(E^2 - CF).$$

Otóż jeśli założymy

$$(5)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

ma się

$$(5\ bis)\qquad \Delta = -AE^2 - CD^2 - FB^2 + ACF + 2BDE;$$

a tem samem:

$$(6)\qquad (BE - CD)^2 - (B^2 - AC)(E^2 - CF) = -C\Delta.$$

Uważmy że wiersze wyznacznika Δ są to spółczynniki pół pochodnych względem trzech zmiennych x, y, z, równania (1) zrobionego jednorodnem.

303. 1szy Przypadek: $\qquad B^2 - AC < 0.$

Rozbiór tego przypadku zamyka trzy założenia następujące:

1° Ilość położona pod znakiem pierwiastkowym Y rozkłada się na dwa czynniki rzeczywiste, to jest $-C\Delta > 0$;

2° Ilość położona pod znakiem pierwiastkowym Y sprowadza się do kwadratu zupełnego, to jest $-C\Delta = 0$;

3° Ilość położona pod znakiem pierwiastkowym Y jest summą dwóch kwadratów, t. j. $-C\Delta < 0$.

Ilość $(B^2 - AC)$ będąc odjemną, spółczynniki A i C nie mogą być zerami, i powinny być nadto tegoż samego znaku; przypuścimy że równanie (1) było w ten sposób sprowadzonem aby miało spółczynniki kwadratów ze zmiennych dodatne; znak na $(-C\Delta)$ będzie więc tenże sam jak znak na $(-\Delta)$.

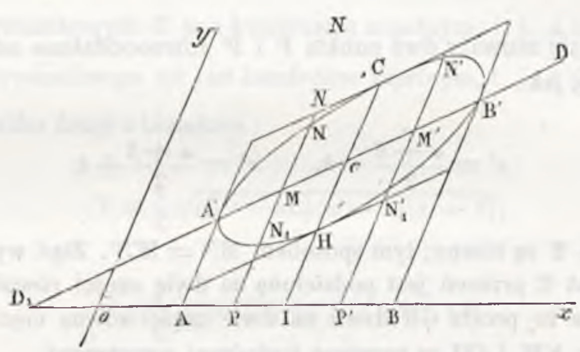
1° Ilość położona pod znakiem pierwiastkowym Y jest rozkładalną na czynniki rzeczywiste, to jest $\Delta < 0$.

Wortość (2 *bis*) na Y będzie wtedy

$$(7) \qquad Y = +\frac{1}{C}\sqrt{(B^2-AC)(x-\alpha)(x-\beta)};$$

przypuśćmy $\alpha < \beta$.

Niech będzie DD_1 prosta przedstawiona przez równanie (4); $OA = \alpha$, $OB = \beta$, A' i B' punkta odpowiednie na prostej D_1.



Kiedy x zmienia się od $-\infty$ aż do α, Y jest urojonem, gdyż trzy czynniki pod znakiem pierwiastkowym są odjemne; dla $x = \alpha = OA$, ma się $Y = 0$; to jest że punkt A' jest punktem dla krzywej.

Dla wszelkiej wartości na x, takiej jak OP, zawartej między α i β, otrzyma się dla Y (7) wartości rzeczywiste, które dadzą punkta N i N_1, na przykład; dla $x = \beta = OB$, wartość na Y musi być zerem, punkt B' będzie punktem krzywej.

Nakoniec, kiedy x zmienia się od β aż do $+\infty$, wartość (7) na Y jest urojoną.

Krzywa tym sposobem otrzymana jest jakąkolwiek krzywą zamkniętą, ponieważ dla jakiejkolwiek wartości skończonej na x odpowiada zawsze jakakolwiek wartość skończona na Y; daje się tej krzywej nazwisko *Elipsy*.

Uwagi. Dwie proste AA' BB', są styczne do krzywej. Dajmy na przykład, dla x wartość cokolwiek wyższą od α, $(\alpha + h)$, otrzymamy dwa punkta takie jak N i N_1 na równoległej do Oy; te dwa punkta zejdą się w A', kiedy h dąży do zera, i równoległa PNN_1 zejdzie się z AA'. Będziemy rozumowali podobnież dla BB'. Wypada ztąd że ilość, położona pod znakiem pierwiastkowym wyrażenia (2), przedstawia, kiedy się ją porównywa z zerem, styczne w punktach w których krzywa jest spotkana przez prostą (4).

Niech będzie I środek AB; równoległa do Oy, poprowadzona przez punkt I, spotyka prostą DD_1

w jakimkolwiek punkcie C, i krzywą w punktach G i H. Wartości na Y, odpowiednie dla odciętej $OI = \frac{\alpha + 6}{2}$, są wartościami *największości* i *najmniejszości* na Y. W rzeczy samej, wartość bezwzględna ilości położonej pod znakiem pierwiastkowym Y albo (7) jest

$$(AC - B^2)(x - \alpha)(6 - x),$$

dla wartości na x zawartych między α i 6; otóż summa dwóch czynników zmiennych jest stałą; iloczyn będzie więc największym możebnym kiedy czynniki będą równe; co daje

$$x - \alpha = 6 - x, \qquad \text{albo} \qquad x = \frac{\alpha + 6}{2}.$$

Wypada ztąd że styczne, w punktach odpowiednich G i H na krzywej, będą równoległe do prostej DD_1.

Widzimy także że jeśli się zauważy dwa punkta P i P′ rownooddalone od OI, to jest jeśli się daje dla x dwie wartości takie jak

$$x' = \frac{\alpha + 6}{2} - k, \qquad x'' = \frac{\alpha + 6}{2} + k,$$

wartości odpowiednie na Y są równe; tym sposobem MN = M′N′. Ztąd wynika, że wszelka cięciwa przechodząca przez punkt C przezeń jest podzieloną na dwie części równe; punkt C jest *środkiem* krzywej. Wypada jeszcze że prosta GH dzieli na dwie części równe cięciwy NN′ równoległe do prostej DD_1. Dwie proste A′B′ i GH są nazwane *średnicami sprzężonemi*.

W rozbiorze innych przypadków, będzie się miało do zrobienia uwagi podobne; nie będziemy ich więcej powtarzali.

304. 2° *Ilość położona pod znakiem pierwiastkowym* Y *jest kwadratem zupełnym*, to jest $\Delta = 0$.

Wartość na Y jest wtedy

$$\text{(8)} \qquad Y = \frac{1}{C}(x - \alpha)\sqrt{B^2 - AC};$$

i równanie (2) krzywej będzie mogło się napisać

$$\text{(8 } bis\text{)} \qquad y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{x - \alpha}{C}\sqrt{B^2 - AC}.$$

Biorąc kolejno znaki + i −, otrzymuje się równania dwóch prostych; lecz te proste są urojone, ponieważ ilość $(B^2 - AC)$ jest odjemną. Wszelako krzywa posiada jeden punkt rzeczywisty odpowiedni dla $x = \alpha$, jestto punkt przecięcia dwóch prostych urojonych (8 *bis*). Można powiedzieć, w tym przypadku, że krzywa sprowadza się do jednego punktu, albo lepiej, do jakiejkolwiek elipsy znikającej, elipsy nieskończenie małej; można powiedzieć także że krzywa jest układem dwóch prostych urojonych.

305. 3° *Ilość położona pod znakiem pierwiastkowym* Y *jest summą dwóch kwadratów*, t. j. $\Delta > 0$.

Wartość na Y przedstawia się pod kształtem

$$(9)\qquad Y = \frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)[(x-a)^2 + b^2]}.$$

Dla wszystkich wartości na x, Y jest urojonem; gdyż 1szy czynnik jest odjemnym, a 2gi czynnik jest ciągle dodatnym i nigdy zerem. Wtedy równanie (1) nie przedstawia więcej krzywej rzeczywistej; w tym przypadku, powiemy że równanie (1) przedstawia jakąkolwiek *elipsę urojoną.*

306. 2gi PRZYPADEK : $B^2 - AC > 0.$

Rozbiór tego przypadku zamyka dwa założenia następujące :

Ilość pod znakiem pierwiastkowym Y jest summą albo różnicą 2ch kwadratów, t. j. $\Delta \gtrless 0$;

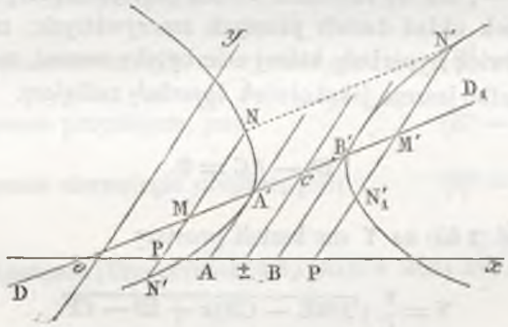
Ilość pod znakiem pierwiastkowym Y jest kwadratem zupełnym, t. j. $\Delta = 0$.

1° *Ilość pod znakiem pierwiastkowym nie jest kwadratem zupełnym*, t. j. $\Delta \gtrless 0$.

Ilość Y weźmie jeden albo drugi z kształtów :

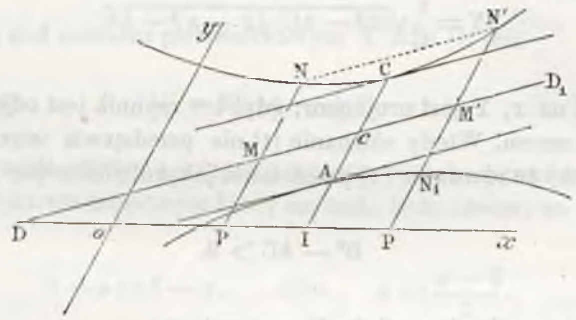
$$(10)\qquad Y = \frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)(x-\alpha)(x-\beta)};$$

$$(10\ bis)\qquad Y = \frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)[(x-a)^2 + b^2]}.$$



Jeśli Y ma kształt (10), widzimy że ilość Y jest rzeczywistą kiedy x zmienia się od $-\infty$ aż do α; ona staje się urojoną dla wszystkich wartości na x zawartych między α i β; i nakoniec, ona musi być rzeczywistą, kiedy x zmienia się od β aż do $+\infty$. Odeszlemy do nru [303] dla wskazania pochodu przy roztrząsaniu zupełnem. Krzywa przedstawiona przez równanie (1) spotyka prostą DD_1 w dwóch punktach A' i B'; ona posiada dwie gałęzie nieskończone; daje się jej nazwisko *hyperboli;* ona ma kształt wskazany na figurze obok.

Kiedy Y ma kształt (10 *bis*), widzimy że pierwiastek Y jest zawsze rzeczywisty dla wszystkich wartości na x zawartych między $-\infty$ i $+\infty$; ponieważ Y nie jest nigdy zerem, krzywa nie spotyka prostej DD_1. Wartość *najmniejszości* na Y ma miejsce dla $x = a = OI$. Krzywa przedstawiona przez równanie (1) posiada dwie gałęzie nieskończone; jej kształt nie różni się rzeczywiście od poprzedza-



jącej; jest to jeszcze jakakolwiek *hyperbola.*

307. 2° *Ilość pod znakiem pierwiastkowym jest kwadratem zupełnym,* to jest $\Delta = 0$.

Wartość na Y jest wtedy

(11) $$Y = \frac{1}{C}(x - \alpha)\sqrt{B^2 - AC},$$

i równanie (2) krzywej będzie mogło się napisać

(11 *bis*) $$y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{x - \alpha}{C}\sqrt{B^2 - AC}.$$

Biorąc kolejno znaki $+$ i $-$, ma się równania dwóch prostych rzeczywistych. Równanie (1) przedstawia więc wtedy jakikolwiek układ dwóch prostych rzeczywistych; można także uważać te dwie proste jako tworzące jakąkolwiek hyperbolę której osie byłyby zerami, to jest jakąkolwiek hyperbolę sprowadzoną do jej środka, albo jeszcze jakąkolwiek *hyperbolę znikającą.*

308. 3. Przypadek : $B^2 - AC = 0$.

W tym przypadku, wartość (2 *bis*) na Y ma kształt prostszy

(12) $$Y = \frac{1}{C}\sqrt{2(BE - CD)x + E^2 - CF}.$$

Uważmy naprzód że związek (6) staje się wtedy

(13) $$(BE - CD)^2 = -C\Delta.$$

Otrzymamy więc do rozebrania dwa założenia następujące :

$$\Delta \gtrless 0; \quad \text{i} \quad \Delta = 0.$$

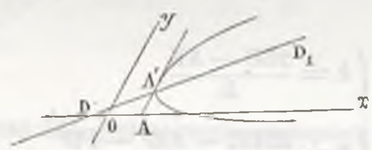
1° *Spółczynnik na* x, *pod znakiem pierwiastkowym, jest różnym od zera,* t. j. $\Delta \gtrless 0$.

Ilość Y będzie kształtu

$$
(14) \qquad Y = \frac{1}{C}\sqrt{m(x-\alpha)}.
$$

Jeśli m jest dodatnem Y będzie urojonem kiedy x będzie się zmieniać od $-\infty$ do α; dla $x=\alpha$, otrzyma się $Y=0$, co daje punkt A' leżący na prostej DD_1. Dla wszystkich wartości na x wyższych od α, pierwiastek Y będzie zawsze rzeczywistym. Prosta AA' dotyka krzywą w A'. Ma się więc krzywą całą po prawej stronie równoległej AA', i posiadającą podwójną gałęź nieskończoną; daje się jej nazwisko *paraboli*.

Jeśli m byłoby odjemnem, otrzymałoby się krzywą tegoż samego kształtu, lecz ona byłaby obró-



coną w kierunku odwrotnym poprzedzającej.

309. 2° *Spółczynnik na* x, *pod znakiem pierwiastkowym jest zerem*, t. j. $\Delta = 0$.

Równanie (2 *bis*), według (13) i (12) sprowadza się do

$$
(15) \qquad y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{E^2 - CF};
$$

biorąc kolejno znak + i — otrzyma się równania dwóch prostych równoległych. Tak więc równanie (1) będzie przedstawiać, w tym przypadku :

dwie proste równoległe rzeczywiste, jeśli $(E^2 - CF) > 0$;

dwie proste przystające, jeśli $(E^2 - CF) = 0$;

dwie proste równoległe urojone, jeśli $(E^2 - CF) < 0$.

II° 2gie Założenie : Spółczynniki kwadratów mogą być zerami razem.

310. Kiedy spółczynnik jakiegokolwiek z kwadratów jest zerem, spółczynnik na y^2 na przykład, można rozwiązać równanie względem drugiej zmiennej x, jeśli spółczynnik na x^2 nie jest zerem; wtedy na nowo się powtórzy dyskussya i część wniosków poprzedzających. Lecz, z punktu widzenia tyczącego się wykreślenia krzywej, jest lepiej rozwiązać równanie względem zmiennej, której kwadratu braknie, potem wykonać dzielenie; tak postępując *wystawia się na widok dwie assymptoty krzywej*; jestto widoczna korzyść tego sposobu działania. W rozbiorze, którego wykonaniem niezwłocznie się zajmiemy, otrzyma się zawartym przypadek, w którym spółczynniki kwadratów są zerami oba.

Przypuśćmy więc $C = 0$; równanie (1) da wtedy

$$
(16) \qquad y = -\frac{Ax^2 + 2Dx + F}{2(Bx+E)}.
$$

Będziemy mieli do rozebrania dwa przypadki następujące :

Spółczynnik iloczynu xy jest różnym od zera; to jest $B \gtrless 0$;

Spółczynnik iloczynu xy jest zerem; to jest $B = 0$.

311. 1szy PRZYPADEK : $B \gtrless 0$.

Ponieważ licznik na y (16) jest drugiego stopnia a że mianownik jest pierwszego stopnia, wykona się dzielenie; otrzyma się tym sposobem

$$(17) \qquad y = -\frac{Ax + k}{2B} + \frac{R}{2(Bx + E)},$$

założywszy

$$\begin{cases} k = \dfrac{2BD - AE}{B}, \\ R = \dfrac{2BDE - AE^2 - FB^2}{B^2}. \end{cases}$$

Otóż, według wartości (5 *bis*) na Δ, odnoszącej się do nru [302], widzimy, po uprzedniem wprowadzeniu założenia $C = 0$, że

$$(18) \qquad R = \frac{\Delta}{B^2}.$$

Ztąd dwa założenia do rozebrania

Reszta dzielenia jest różną od zera, t. j. $\Delta \gtrless 0$;

Reszta dzielenia jest zerem, t. j. $\Delta = 0$.

1° *Reszta dzielenia iest różną od zera*, t. j. $\Delta \lessgtr 0$;

Dla wykreślenia krzywej, wykreśli się naprzód prostą

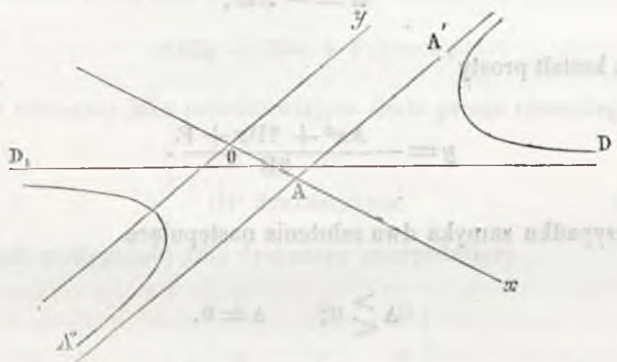
$$(19) \qquad y = -\frac{Ax + k}{2B},$$

niech będzie DD_1 ta prosta; potem, począwszy od punktu prostej odpowiedniego pewnej odciętej x, odniesie się, równolegle do Oy, długość równą

$$(20) \qquad Y = \frac{R}{2(Bx + E)} = \frac{R_1}{x - \alpha},$$

na wierzchu i pod spodem prostej DD_1, według tego jak ilość Y jest dodatną albo odjemną.

Dla wyjaśnienia myśli przypuśćmy R_1 dodatnem; potem, dajmy zmieniać się x od $-\infty$ do $+\infty$. Dla wartości na x odjemnych, bardzo wielkich w wartości bezwzględnej, ilość Y jest odjemną, i bardzo małą w wartości bezwzględnej; otrzymamy więc, pod spodem prostej DD_1, i po lewej stronie osi Oy, punkta zbliżające się nieograniczenie do prostej DD_1 kiedy wartość bezwzględna na x



zwiększa się nieograniczenie; prosta DD_1 jest nazwana *assymptotą* (niemaltyczną) krzywej.

Kiedy się daje zwiększać x algebraicznie, począwszy od $-\infty$, zostawiając je niższem od α, wartość na Y pozostaje odjemną i zwiększa się nieograniczenie w wartości bezwzględnej, kiedy x się odnosi do α; krzywa zbliża się nieograniczenie do prostej AA′, poprowadzonej równolegle do osi Oy, przez punkt A taki jak $OA = \alpha$; prosta A′A″ jest jeszcze *assymptotą* krzywej.

Dajmy teraz dla x wartość cokolwiek wyższą od α, Y staje się wtedy dodatną i bardzo wielką; otrzymamy więc punkta, na wierzchu prostej DD_1 i bardzo oddalone od DD_1, po prawej stronie linii AA′i bardzo zbliżone do AA′, krzywa będzie miała prostą AA′ za *assymptotę*. Nakoniec, jeśli się daje zwiększać x począwszy od α aż do $+\infty$, ilość Y zmniejsza się coraz bardziej pozostając zawsze dodatną; i krzywa zbliża się na nowo nieograniczenie do prostej DD_1, zostając na wierzchu.

Mamy w tym przypadku, krzywą posiadającą dwie gałęzie nieskończone, albo *jakąkolwiek hyperbolę*.

312. 2° *Reszta dzielenia jest zerem*, t. j. $\Delta = 0$.

Połóżmy naprzód równanie (17) pod kształtem następującym :

$$(2By + Ax + k)(Bx + E) = \frac{R}{2};$$

jeżeli wprowadzimy wtedy założenie przyjęte, otrzymuje się

$$(21) \qquad (2By + Ax + k)(Bx + E) = 0.$$

To równanie przedstawia *jakikolwiek układ dwóch prostych*; jedna z nich jest równoległą do osi Oy.

Uwaga. Jeśli A byłoby zerem jednocześnie jak C, druga prosta DD_1, byłaby równoległą do osi Ox.

313. 2gi Przypadek : $B = 0$.

Ponieważ, w przypadku obecnym, B i C są zerami, ma się naprzód

$$B^2 - AC = 0;$$

wartość na Δ jest według n^ru [302]

$$(22)\qquad \Delta = -AE^2;$$

i równanie krzywej ma kształt prosty

$$(23)\qquad y = -\frac{Ax^2 + 2Dx + F}{2E}.$$

Roztrząsanie tego przypadku zamyka dwa założenia następujące

$$\Delta \gtrless 0; \qquad \Delta = 0.$$

1° *Ilość* Δ *jest różną od zera.*

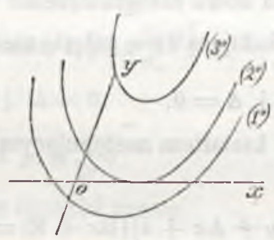
Równanie (23) będzie się mogło przedstawić pod jednym lub drugim z trzech kształtów następujących :

$$(24,\ 1°)\qquad y = m(x - \alpha)(x - \beta);$$

$$(24,\ 2°)\qquad y = m(x - \alpha)^2;$$

$$(24,\ 3°)\qquad y = m[(x - a)^2 + b^2].$$

W trzech przypadkach, otrzymuje się krzywą mającą podwójną gałęź nieskończoną; w 1^ym przy-



padku ta krzywa przecina oś odciętych w dwóch punktach; w 2^gim, ona dotyka tej osi; w 3^cim, ona nie spotyka osi odciętych.

Te krzywe są *parabolami.*

314. 2° *Ilość* Δ *jest zerem.*

Ilość Δ może stać się zerem bądź przez zniesienie spółczynnika E, bądź przez zniesienie spółczynnika A.

Jeżeli E jest zerem, równanie (23) krzywej sprowadza się do

$$(25)\qquad Ax^2 + 2Dx + F = 0, \qquad \text{albo} \qquad (x - \alpha)(x - \beta) = 0, \quad \text{etc.....};$$

równanie przedstawiające dwie proste równoległe, rzeczywiste, przystające albo urojone, według tego jak wyrażenie $(D^2 - AF)$ jest wyższem, równem, albo niższem od zera; te proste są równoległe do osi rzędnych.

Jeżeli A jest zerem, równanie (23) staje się, robiąc je jednorodnem

$$(26) \qquad z(2Ey + 2Dx + Fz) = 0;$$

można jeszcze uważać to równanie jako przedstawiające dwie proste równoległe, z których jedna jest w nieskończoności.

III° Streszczenie.

315. Streścimy w sposób następujący całą dyskussyę poprzedzającą.

Załóżmy

$$(I) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

ten wyznacznik którego tworzenie się było wskazanem w n^rze^ [302] jest nazwany *dyskryminantem* funkcyi drugiego stopnia, tworzącej pierwszą stronę równania krzywej, to jest

$$(II) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

wyznacznik częściowy

$$(III) \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

jest *niezmiennikiem* funkcyi utworzonej przez wyrazy drugiego stopnia na x i y.

Rodzaj i *zmiany* krzywych drugiego stopnia są znamionowane przez znaki i wartości dwóch funkcyi Δ i δ.

I° $\begin{cases} B^2 - AC < 0 \\ \text{Rodzaj elipsy} \end{cases}$ $\begin{cases} \Delta < 0 & \text{Elipsa rzeczywista,} \\ \Delta = 0, & \text{Punkt, albo elipsa znikająca, albo dwie proste urojone które się przecinają;} \\ \Delta > 0, & \text{Elipsa urojona.} \end{cases}$

II° $\begin{cases} B^2 - AC > 0 & \Delta \gtrless 0, \text{ hyperbola,} \\ \text{Rodzaj hyperboli} & \Delta = 0, \text{ Dwie proste rzeczywiste które się przecinają, albo hyperbola znikająca.} \end{cases}$

III° $\begin{cases} B^2 - AC = 0 \\ \text{Rodzaj Paraboli} \end{cases}$

$\Delta \gtrless 0$ Parabola;

$\Delta = 0$:

dwie proste równoległe rzeczywiste..... jeśli $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} < 0$ albo $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} < 0$;

dwie proste równoległe przystające..... jeśli $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0$ kiedy C i E są zerami $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} = 0$;

dwie proste równoległe urojone........ jeśli $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} > 0$ $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} > 0$;

dwie proste równoległe z których jedna w nieskończoności, jeśli $(A = 0,\ B = 0,\ C = 0)$.

Uwaga I. Nie należy zapominać, że dla wysłowienia wniosków zawartych w tej tablicy, przypuściliśmy że została przedwstępnie wykonaną zmiana znaków pierwszej strony równania (II) krzywej w sposób taki, aby spółczynniki kwadratów nie były oba odjemnymi.

Uwaga II. Widzimy przez to streszczenie, że rodzaj i zmiana krzywych drugiego stopnia zależą tylko od znaków funkcyi następujących spółczynników równania krzywej:

$$\text{(IV)} \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Otóż kiedy się wykonywa przekształcenie spółrzędnych, natura i zmiana krzywej nie są oczywiście zmiennemi; więc funkcye δ' i Δ' utworzone jak funkcye (IV), ze spółczynników nowego równania, muszą zachować tenże sam znak jak pierwsze. (Zob. w nrze [331] dowodzenie algebraiczne.)

§ II. — UPROSZCZENIE RÓWNANIA OGÓLNEGO DRUGIEGO STOPNIA PRZEZ PRZEKSZTAŁCENIE SPÓŁRZĘDNYCH.

1° Przypuści się $(B^2 - AC)$ różnem od zera.

(Rodzaj elipsy lub hyperboli.)

316. Ta pierwsza analiza zawiera kwestye następujące:

1° Znieść wyrazy pierwszego stopnia;

2° Znieść iloczyn xy zmiennych; co zwykle się wyraża krócej: *Rugowanie prostokątu* (Evanouissement du rectangle);

albo 3° Znieść kwadraty x^2 i y^2 zmiennych.

1° *Znieść wyrazy pierwszego stopnia.*

Równanie ogólne krzywych drugiego rzędu ma kształt

$$\text{(I)} \qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Przypuśćmy że się bierze nowe osie $O'x'$, $O'y'$, równoległe do dawnych Ox, Oy; jeśli x_0 i y_0 są spółrzędne nowego początku, wzorami przekształcenia będą

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Zastępując x i y przez te wartości, równanie (I) krzywej stanie się

$$\text{(2)} \quad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2(Ax_0 + By_0 + D)x' + 2(Bx_0 + Cy_0 + E)y' + Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F = 0.$$

Zauważmy w tem nowem równaniu, że: 1° spółczynniki wyrazów drugiego stopnia się nie zmieniły; 2° spółczynniki na x' i y' są odpowiednio pochodne, względem x i y, pierwszej strony równania pierwotnego, w których się zastąpiło x i y przez x_0 i y_0; 3° wyraz niezależny jest pierwszą stroną równania pierwotnego, w którem x i y były zastąpione przez x_0 i y_0.

Chcąc znieść, w równaniu (2), wyrazy pierwszego stopnia, będzie potrzeba założyć

$$\left\{\begin{array}{l} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Te dwa równania wyznaczą spółrzędne x_0 i y_0 nowego początku; aby to uproszczenie było możebnem, potrzeba żeby wartości na x_0 i na y_0 były skończone; otóż to będzie miało zawsze miejsce jeśli $(B^2 - AC)$ jest różnem od zera, to jest jeśli krzywa należy do rodzaju elipsy albo hyperboli. To zastrzeżenie nie jest więcej możebnem kiedy ilość $(B^2 - AC)$ jest zerem, gdyż wartości na x_0 i y_0 są nieskończone, krzywa jest wtedy parabolą.

Przypuśćmy $B^2 - AC \gtrless 0$, i wtedy równanie (I) będzie mogło być sprowadzonem do kształtu następującego (znosząc akcenta albo wskazówki)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H. \tag{II}$$

Nowe osie są równoległemi do dawnych, i spółrzędne nowego początku są wyznaczone przez równania (3).

Spółczynniki wyrazów drugiego stopnia nie były zniesione.

Nakoniec wyraz niezależny H można przedstawić pod kształtem prostszym.

W rzeczy samej, ma się

$$-H = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

Otóż jeśli się doda równania (3) względnie pomnożone przez x_0 i y_0, wypadnie

$$0 = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0;$$

zkąd wynika, odejmując

$$-H = Dx_0 + Ey_0 + F. \tag{4}$$

To jest że wartość na H jest równą i ze znakiem przeciwnym pół pochodnej, względem z pierwszej strony równania (1) zrobionego jednorodnem, pochodnej w której się zastąpi x, y, z, względnie przez x_0, y_0, 1.

317. 2° *Znieść iloczyn* xy *zmiennych.*

Dla rozwiązania tej kwestyi, przypuśćmy że było już wykonanem pierwsze uproszczenie wskazane w n^rze poprzedzającym, i będziemy działać na równaniu uproszczonem

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H. \tag{II}$$

Odnieśmy krzywą do dwóch nowych osi, mających ten sam początek co i osie pierwotne. Dyskussya kwestyi wymaga rozbioru dwóch przypadków następujących:

1szy Przypadek: Osie pierwotne są prostokątne jak nowe osie;

2gi Przypadek: Osie pierwotne są pochyłe jak nowe osie.

Osie prostokątne.

318. Przypuśćmy więc osie pierwotne Ox i Oy prostokątne jako osie nowe Ox' i Oy'. Oznaczywszy przez α kąt części dodatnej nowej Ox' z częścią dodatną dawnej osi Ox, wzorami przekształcenia spółrzędnych są według nru [30]

$$\begin{cases} x = x'\operatorname{dos}\alpha + y'\operatorname{wst}\alpha, \\ y = x'\operatorname{wst}\alpha + y'\operatorname{dos}\alpha. \end{cases}$$

Zastąpmy x i y przez te wartości w równaniu (II), ono się stanie

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = H; \tag{1}$$

wyraz niezależny się nie zmienił, ponieważ wzory przekształcenia są jednorodne na x' i y'; wartościami nowych spółczynników A', B', C', będą

$$A' = A\operatorname{dos}^2\alpha + 2B\operatorname{wst}\alpha\operatorname{dos}\alpha + C\operatorname{wst}^2\alpha, \tag{2}$$

$$C' = A\operatorname{wst}^2\alpha - 2B\operatorname{wst}\alpha\operatorname{dos}\alpha + C\operatorname{dos}^2\alpha, \tag{3}$$

$$2B' = (C - A)\operatorname{wst}2\alpha + 2B\operatorname{dos}2\alpha. \tag{4}$$

Będziemy mogli korzystać z nieoznaczoności kąta α dla zniesienia spółczynnika B' wyrazu na $x'y$; to nam da

$$\operatorname{st}2\alpha = \frac{2B}{A - C}; \tag{5}$$

i równanie krzywej weźmie kształt prosty

$$A'x'^2 + C'y'^2 = H. \tag{IV}$$

Obrachujmy wartości na A' i C' w funkcyi A, B, C.

Ma się naprzód, dodając i odejmując równania (2) i (3):

$$\begin{cases} A' + C' = A + C, \\ A' - C' = (A - C)\operatorname{dos}2\alpha + 2B\operatorname{wst}2\alpha. \end{cases} \tag{6}$$

Teraz wyprowadza się ze związku (5)

$$(7)\quad \begin{cases} \text{wst}\,2\alpha = \dfrac{2B}{\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}, \\ \text{dos}\,2\alpha = \dfrac{A-C}{\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}; \end{cases}$$

znaki niższe i wyższe muszą być wzięte razem w tych ostnatnich wzorach; gdyż dzieląc te wartości stronami powinno się znaleść związek (5).

Zastępując $\text{wst}\,2\alpha$ i $\text{dos}\,2\alpha$ przez te wartości, związki (6) stają się

$$(8)\quad \begin{aligned} A' + C' &= A + C, \\ A' - C' &= \pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}; \end{aligned}$$

zkąd wypada ostatecznie

$$(9)\quad \begin{cases} 2A' = A + C \pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}, \\ 2C' = A + C \mp\sqrt{(A-C)^2+4B^2}. \end{cases}$$

W związkach (7), (8) i (9) znaki wyższe i niższe powinny być wzięte razem; tak że kiedy się wybierze za pomocą równania (5), jakąkolwiek wartość dla α, wartości stałe A' i C' będą zupełnie wyznaczone.

Uważmy że pierwiastek wzorów (9) może się napisać

$$\sqrt{(A+C)^2+4(B^2-AC)};$$

zkąd wypada że:

Dla elipsy, w której $B^2 - AC < 0$, wartość bezwzględna pierwiastku jest mniejszą jak wartość bezwzględna na $(A+C)$; przeto, spółczynniki A' i C' są tegoż samego znaku.

Dla hyperboli, w której $B^2 - AC > 0$, wartość bezwzględna pierwiastku jest większą jak wartość bezwzględna na $(A+C)$; przeto, spółczynniki A' i C' są znaków przeciwnych.

319. *Liczba rozwiązań.*

Kąt 2α, jest danym przez jego styczną według n^ru [318], (5); jeżeli φ jest najmniejszym kątem osi dodatnych mających dla stycznej, $\dfrac{2B}{A-C}$, wartością ogólną na α będzie

$$(10)\qquad 2\alpha = \varphi + k\pi, \qquad \text{albo} \qquad \alpha = \frac{\varphi}{2} + k.\frac{\pi}{2}.$$

Uważmy że $\frac{\varphi}{2}$ jest zawsze niższym od $\frac{\pi}{2}$, gdyż według wyboru który zrobiliśmy, kąt φ jest zawsze zawartym między 0 i π.

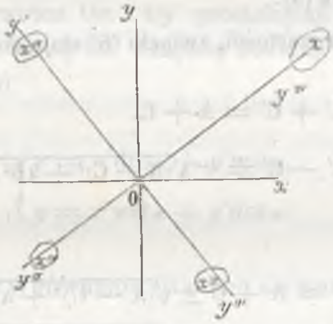
Jeśli się daje dla k wartości 0, 1, 2, 3, otrzyma się dla α cztery wartości

$$(11)\qquad \alpha' = \frac{\varphi}{2}, \qquad \alpha'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}, \qquad \alpha''' = \frac{2\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}, \qquad \alpha^{\text{v}} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\varphi}{2};$$

i jest niepotrzebnem uważać inne wartości dodatne albo odjemne na k, gdyż otrzymałoby się, dla osi Ox', jedno z czterech położeń określonych przez równości (11).

Wartości (11) dają oczywiście *układ jedyny dwóch prostych prostokątnych;* lecz, pomiędzy temi czterema rozwiązaniami, wybór zostaje dowolnym; to jest że można ustalić czterema sposobami różnymi położenie osi dodatnej Ox'. Otóż dowiedziemy, że jakimkolwiek bądź jest rozwiązanie przyjęte, *wartości stałe* A' *i* C', *odpowiednie temu rozwiązaniu, są jedyne.*

Niech będzie naprzód $B > 0$.



Jeśli się wybrało dla α wartości α' albo dla α''', otrzyma się

$$2\alpha' = \varphi, \quad \text{albo} \quad 2\alpha''' = 2\pi + \varphi;$$

ponieważ φ jest zawartym między 0 i π. wartość (7) na $\operatorname{wst} 2\alpha$ musi być dodatną, to jest że się powinno wziąć pierwiastki ze znakami wyższymi.

Jeśli się wybrało dla α wartości α'' albo α^{v}, otrzyma się

$$2\alpha'' = \pi + \varphi, \qquad 2\alpha^{\text{iv}} = 3\pi + \varphi;$$

wartość (7) na $\operatorname{wst} 2\alpha$ musi być odjemną, to jest że się powinno wziąć pierwiastki ze znakami niższymi.

Wnioski będą w kierunku odwrotnym, jeśli $B < 0$.

Wartości na A' i C', odpowiednie różnym wartościom wybranym dla α będą więc:

$$\text{Dla} \quad \alpha = \frac{\varphi}{2} \quad \text{albo} \quad \left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \begin{cases} 2A' = A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}, \\ 2C' = A + C \mp \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}, \end{cases}$$

znaki wyższe odpowiadają dla $B > 0$; znaki niższe, dla $B < 0$.

$$\text{Dla} \quad \alpha = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{albo} \quad \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \begin{cases} 2A' = A + C \mp \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}, \\ 2C' = A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}; \end{cases}$$

znaki wyższe odpowiadają dla $B > 0$; znaki niższe, dla $B < 0$.

320. *Dyskussya wartości na* $\operatorname{st} y\, 2\alpha$.

Wartość na $\operatorname{st} 2\alpha$ jest daną przez równanie

$$\operatorname{st} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Kiedy $B = 0$, wartość na $\operatorname{st} 2\alpha$ jest zerem; więc $2\alpha = k\pi$; nowy układ osi zlewa się w jeden z dawnym.

Kiedy $A = C$, ma się

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \text{albo} \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};$$

nowe osie spółrzędnych są dwójsiecznemi kątów dawnych osi.

Gdy się ma jednocześnie $B = 0$, $A = C$, kąt 2α jest nieoznaczonym.

To winno mieć miejsce w rzeczy samej; gdyż w tym przypadku, równanie (II) przedstawia koło odniesione do jego środka; otóż, jakiemkolwiek bądź byłoby położenie dwóch osi prostokątnych przechodzących przez środek, kształt równania nie zmienia się.

Uwaga. Zamiast znieść spółczynnik B', możnaby było, w przypadku hyperboli, znieść jakikolwiek ze spółczynników A' albo C' n^ru [318]; lecz kształt uproszczony któryby się tym sposobem otrzymało nie przedstawia żadnego interesu.

Osie pochyłe.

321. Przypuśćmy teraz osie pierwotne Ox i Oy pochyłe i czyniące kąt θ, równie jak nowe osie Ox' i Oy', i oznaczmy przez θ' kąt tych ostatnich.

Wzorami przekształcenia spółrzędnych są wtedy według n^ru [29]

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{x' \operatorname{wst}(\theta - \alpha) + y' \operatorname{wst}(\theta - 6)}{\operatorname{wst} \theta}, \\ y &= \frac{x'.\operatorname{wst}\alpha + y'.\operatorname{wst} 6}{\operatorname{wst}\theta}, \end{aligned}\right.$$

α i 6 są względnie kątami nowymi osi dodatnych Ox' i Oy' z dawną osią dodatną Ox, tak aby (przypuszczając, że dla przyjścia od Ox' ku Oy', obraca się w tymże samym kierunku jak dla przyjścia od Ox ku Oy):

$$(1) \qquad \theta' = 6 - \alpha.$$

Przypuśćmy jeszcze równanie krzywej sprowadzone do kształtu

$$(\mathrm{II}) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H.$$

Jeśli się podstawi za x i y wartości powyższe, to równanie stanie się

$$(2) \qquad A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = H,$$

założywszy

$$\begin{cases} (3) \quad A'\,\mathrm{wst}^2\theta = A\,\mathrm{wst}^2(\theta-\alpha) + 2B\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha) + C\,\mathrm{wst}^2\alpha, \\ (4) \quad C'\,\mathrm{wst}^2\theta = A\,\mathrm{wst}^2(\theta-\beta) + 2B\,\mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\beta) + C\,\mathrm{wst}^2\beta, \\ (5) \quad B'\,\mathrm{wst}^2\theta = A\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)\mathrm{wst}(\theta-\beta) + C\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,\beta + B[\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta-\beta) + \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)]. \end{cases}$$

322. Skombinujemy naprzód te równości i z nich wyprowadzimy dwa związki bardzo ważne między dawnymi spółczynnikami A, B, C, i nowymi, A′, B′, C′.

Od kwadratu równości (5) odejmijmy równości (3) i (4), wypadnie

$$\mathrm{wst}^4\theta\,(B'^2 - A'C') = \begin{cases} B^2\left[\{\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta-\beta) + \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)\}^2 - 4\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)\mathrm{wst}(\theta-\beta)\right] \\ -AC[\mathrm{wst}^2\alpha\,\mathrm{wst}^2(\theta-\beta) + \mathrm{wst}^2\beta\,\mathrm{wst}^2(\theta-\alpha) - 2\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)\mathrm{wst}(\theta-\beta)] \end{cases};$$

albo jeszcze

$$\mathrm{wst}^4\theta[B'^2 - A'C'] = (B^2 - AC)[\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta-\beta) - \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)]^2.$$

Otóż, według określenia (1) na θ':

$$\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta-\beta) - \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha) = \mathrm{wst}\,\theta[\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\beta - \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{dos}\,\alpha] = \mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}(\alpha-\beta) = -\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\theta';$$

ma się więc ostatecznie

$$(6) \qquad \frac{B'^2 - A'C'}{\mathrm{wst}^2\theta'} = \frac{B^2 - AC}{\mathrm{wst}^2\theta}.$$

Otrzymamy drugi związek obliczając ilość

$$A' + C' - 2B'\,\mathrm{dos}\,\theta'.$$

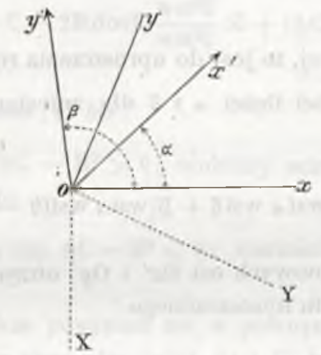
Ma się tym sposobem

$$(7) \quad \mathrm{wst}^2\theta[A' + C' - 2B'\,\mathrm{dos}\,\theta] = \begin{cases} A[\mathrm{wst}^2(\theta-\alpha) + \mathrm{wst}^2(\theta-\beta) - 2\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)\mathrm{wst}(\theta-\beta)\mathrm{dos}(\beta-\alpha)] \\ +C[\mathrm{wst}^2\alpha + \mathrm{wst}^2\beta - 2\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{dos}(\beta-\alpha)] \\ +2B\left[\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha) + \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\beta) - \mathrm{dos}(\beta-\alpha)\{\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta-\beta) + \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)\}\right] \end{cases}.$$

Uproszczenie spółczynników na A, C i B odbędzie się bez trudności mając wzgląd na związki (6) nru [69] i (1 *bis*) nru [71].

W tym celu, wynieśmy w O prostopadłe OX i OY do Ox i Oy, w kierunku przeciwnym obrotu kątów dodatnych. Uważmy wtedy że prosta OX czyni kąty $\alpha_1 = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, $\beta_1 = \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$ z osiami Ox' i Oy'

których kątem jest $\theta' = \beta - \alpha$; prosta OY czyni kąty $\alpha_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)$, $\beta_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \beta\right)$ z temiż osiami.



Otrzyma się więc według związku (6) n^ru [69]:

$$\mathrm{dos}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \mathrm{dos}^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - 2\,\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)\mathrm{dos}(\beta - \alpha) = \mathrm{wst}^2\theta',$$

$$\mathrm{dos}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta\right) + \mathrm{dos}^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \theta\right) - 2\,\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta\right)\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \theta\right)\mathrm{dos}(\beta - \alpha) = \mathrm{wst}^2\theta';$$

albo

(1°) $$\mathrm{wst}^2\alpha + \mathrm{wst}^2\beta - 2\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{dos}(\beta - \alpha) = \mathrm{wst}^2\theta';$$

(2°) $$\mathrm{wst}^2(\theta - \alpha) + \mathrm{wst}^2(\theta - \beta) - 2\,\mathrm{wst}(\theta - \alpha)\mathrm{wst}(\theta - \beta)\mathrm{dos}(\beta - \alpha) = \mathrm{wst}^2\theta'.$$

Podobnież, uważając że kąt V prostych OX i OY jest równym kątowi θ, znajduje się stosując związek (1 *bis*) n^ru [71]

$$\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\theta\right)+\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\theta\right)-\left[\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\theta\right)+\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\theta\right)\right]\mathrm{dos}(\beta-\alpha)=\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{wst}^2\theta'';$$

albo też

(3°) $$\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta - \alpha) + \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta - \beta) - [\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta - \beta) + \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta - \alpha)]\mathrm{dos}(\beta - \alpha) = -\,\mathrm{dos}\,\theta . \mathrm{wst}^2\theta'.$$

Mając wzgląd na związki 1°, 2°, 3°, równość (7) prowadzi do drugiego związku

(8) $$\frac{A' + C' - 2B'\,\mathrm{dos}\,\theta'}{\mathrm{wst}^2\theta'} = \frac{A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta}{\mathrm{wst}^2\theta}.$$

323. Zastąpimy więc równania (3), (4) i (5) przez układ następujący

(9) $$\frac{B'^2 - A'C'}{\mathrm{wst}^2\theta'} = \frac{B^2 - AC}{\mathrm{wst}^2\theta},$$

(10) $$\frac{A' + C' - 2B'\,\mathrm{dos}\,\theta'}{\mathrm{wst}^2\theta'} = \frac{A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta}{\mathrm{wst}^2\theta};$$

(11) $$B'\,\mathrm{wst}^2\theta = A\,\mathrm{wst}(\theta - \alpha)\mathrm{wst}(\theta - \beta) + C\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,\beta + B\{\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta - \beta) + \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta - \alpha)\}.$$

Zobaczymy poniżej znaczenie geometryczne związków (9) i (10).

Uważmy że funkcya $(B'^2 - A'C')$ utworzona z nowych spółczynników, zachowuje tęż samą wartość, nie zważając na spółczynnik liczebny, jak funkcya podobna $(B^2 - AC)$, utworzona z dawnych spółczynników. Z powodu tej niezmienności, ilość $(B^2 - AC)$ nosi nazwisko *niezmiennika* funkcyi jednorodnej $(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$.

324. Wróćmy do kwestyi pierwotnej, to jest do uproszczenia równania (2) n^ru [321].

Możemy korzystać z nieoznaczoności ilości α i β dla zniesienia spółczynnika B'; ma się wtedy według równania (11):

$$(12) \qquad A\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)\mathrm{wst}(\theta-\beta) + C\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,\beta + B[\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}(\theta-\beta) + \mathrm{wst}\,\beta\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)] = 0.$$

Jeśli się zostawi dowolnym kąt θ' nowych osi Ox' i Oy' otrzymamy nieskończoną ilość sposobów sprowadzenia równania (II) do kształtu uproszczonego

$$(\mathrm{IV}) \qquad A'x'^2 + C'y'^2 = H.$$

Dla nadania rachunkom więcej symetryi, wprowadzimy kąt θ' nowych osi, tak aby

$$(13) \qquad \theta' = \beta - \alpha;$$

i związki (12) i (13) pozwolą nam wyznaczyć α i β w funkcyi kąta θ'.

Załóżmy

$$(14) \qquad m = \frac{\mathrm{wst}\,\alpha}{\mathrm{wst}(\theta-\alpha)}, \qquad m' = \frac{\mathrm{wst}\,\beta}{\mathrm{wst}(\theta-\beta)},$$

m i m' są *spółczynnikami kątowymi* nowych osi Ox' i Oy' względem dawnych osi; związek (12) staje się wtedy, podzieliwszy go uprzednio przez $\mathrm{wst}(\theta-\alpha)\mathrm{wst}(\theta-\beta)$:

$$(15) \qquad A + B(m+m') + Cmm' = 0.$$

Ma się wreszcie

$$(16) \qquad \mathrm{st}\,\theta' = \frac{(m'-m)\,\mathrm{wst}\,\theta}{1+(m+m')\mathrm{dos}\,\theta + mm'}.$$

Tak więc, mając danym kąt θ', równania (15) i (16) wyznaczą m i m'; potem związki (14) dadzą poznać α i β, to jest położenie nowych osi dla których równanie krzywej sprowadza się do kształtu prostego

$$(\mathrm{IV}) \qquad A'x'^2 + C'y'^2 = H.$$

Dla obliczenia spółczynników A' i C', będziemy się posługiwać związkami (9) i (10), n^ru [323]; one nam dadzą, po wprowadzeniu założenia $B' = 0$:

$$(17) \qquad \begin{cases} A'C' = (AC - B^2)\dfrac{\mathrm{wst}^2\theta'}{\mathrm{wst}^2\theta}, \\ A' + C' = [A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta]\dfrac{\mathrm{wst}^2\theta'}{\mathrm{wst}^2\theta}. \end{cases}$$

Kąt θ' mając danym, spółczynniki A' i C' są wyznaczone; ich wartościami będą pierwiastki drugiego stopnia

$$Z^2 - (A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta)\frac{\mathrm{wst}^2\theta'}{\mathrm{wst}^2\theta} Z + (AC - B^2)\frac{\mathrm{wst}^2\theta'}{\mathrm{wst}^2\theta} = 0. \qquad (17\ bis)$$

325. *Dyskussya pierwiastków równania* (17 *bis*).

Kiedy krzywa jest elipsą, ma się $AC - B^2 > 0$; widzimy wtedy że wartości na A' i C' są tegoż samego znaku, jeśli one są rzeczywiste.

Kiedy krzywa jest hyperbolą, ma się $AC - B^2 < 0$; wartości na A' i C' są wtedy rzeczywiste i znaków przeciwnych.

Kąt θ' jest ilością dowolną; wszakże powinien on, w pewnych przypadkach, pozostać zawartym między pewnemi granicami, jeśli się chce aby ilości A' i C' były rzeczywistemi. W rzeczy samej, warunkiem rzeczywistości pierwiastków równania (17 *bis*) jest

$$(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta)^2\frac{\mathrm{wst}^4\theta'}{\mathrm{wst}^4\theta} - 4(AC - B^2)\frac{\mathrm{wst}^2\theta'}{\mathrm{wst}^2\theta} > 0;$$

zkąd się wyprowadza

$$\mathrm{wst}^2\theta' > \frac{4\,\mathrm{wst}^2\theta(AC - B^2)}{(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta)^2}. \qquad (18)$$

W przypadku hyperboli, ta nierówność jest oczywiście sprawdzoną, ponieważ $(AC - B^2)$ jest ilością odjemną. Zostaje więc przypadek elipsy, dla którego $(AC - B^2) > 0$. Uważmy naprzód że

$$\frac{4\,\mathrm{wst}^2\theta(AC - B^2)}{(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta)^2} < 1;$$

gdyż ta nierówność wychodzi na następującą

$$4AC\,\mathrm{dos}^2\theta - 4B(A + C)\mathrm{dos}\,\theta + 4B^2 + (A - C)^2 > 0;$$

albo, uporządkowawszy względem B i rozłożywszy na kwadraty

$$[2B - (A + C)\mathrm{dos}\,\theta]^2 (A + C)^2\mathrm{wst}^2\theta > 0;$$

nierówność oczywiście prawdziwa.

Możemy więc założyć

$$\frac{4\,\mathrm{wst}^2\theta(AC - B^2)}{(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta)^2} = \mathrm{wst}^2 V; \qquad (19)$$

jeśli się oznaczy przez V najmniejszy z kątów dodatnych określonych przez równość (19), wypadnie z nierówności (18)

$$(20) \qquad V < \theta' < \pi - V;$$

gdyż θ' jest kąt zawarty między 0 i π.

326. 3° *Znieść kwadraty* x^2 *i* y^2 *zmiennych.*

Przypuścimy jeszcze równanie krzywej sprowadzone do kształtu

$$(\text{II}) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H:$$

i jeśli się odniesie krzywą do nowych osi pochyłych, równanie weźmie kształt

$$(21) \qquad A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = H;$$

rachunki tego przekształcenia są rachunkami n^{rów}[321], [322] i [323].

Otóż można ogólnie rozporządzić nieoznaczonemi α i β w taki sposób aby znieść dwa spółczynniki A' i C'; związki (3) i (4) n^{ru} [321] prowadzą nas wtedy do dwóch równań

$$(22) \qquad \begin{cases} A\,\text{wst}^2(\theta - \alpha) + 2B\,\text{wst}\alpha\,\text{wst}(\theta - \alpha) + C\,\text{wst}^2\alpha = 0, \\ A\,\text{wst}^2(\theta - \beta) + 2B\,\text{wst}\beta\,\text{wst}(\theta - \beta) + C\,\text{wst}^2\beta = 0. \end{cases}$$

Dzieląc 1^{sze} przez $\text{wst}^2(\theta - \alpha)$; 2^{gie} przez $\text{wst}^2(\theta - \beta)$; i założywszy

$$(23) \qquad m = \frac{\text{wst}\alpha}{\text{wst}(\theta - \alpha)}, \qquad m' = \frac{\text{wst}\beta}{\text{wst}(\theta - \beta)},$$

dwa równania (22) stają się

$$(24) \qquad \begin{cases} A + 2Bm + Cm^2 = 0, \\ A + 2Bm' + Cm'^2 = 0. \end{cases}$$

Dwa równania (24) mają też same pierwiastki; lecz ponieważ m i m' powinny mieć wartości różne, gdyż inaczej osie Ox' i Oy' zbiegałyby się z sobą, dla tego będzie można uważać m i m' jako dwa pierwiastki równania

$$(25) \qquad Cm^2 + 2Bm + A = 0.$$

Widzimy naprzód że wartości na m i m' nie będą rzeczywiste, jak tylko jeśli się ma $(B^2 - AC) > 0$; to jest że *to uproszczenie nie będzie możebnem, w ilościach rzeczywistych, jak tylko w przypadku hyperboli.* Równanie krzywej bierze wtedy kształt prosty

$$(\text{V}) \qquad 2B'x'y' = H.$$

Związek (10) n^{ru} [323] daje bezpośrednio robiąc w nim $A' = C' = 0$,

$$-2B \operatorname{dos}\theta' = (A + C - 2B \operatorname{dos}\theta) \frac{\operatorname{wst}^2\theta'}{\operatorname{wst}^2\theta}.$$

Z drugiej strony ma się, według równania (23):

$$\operatorname{st}\theta' = \operatorname{st}(\beta - \alpha) = \frac{(m' - m)\operatorname{wst}\theta}{1 + (m + m')\operatorname{dos}\theta + mm'};$$

lecz równanie (25) daje

$$m + m' = -\frac{2B}{C}, \qquad mm' = \frac{A}{C}, \qquad m' - m = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{C};$$

przeto

$$(26) \qquad \operatorname{st}\theta' = \pm \frac{2\sqrt{B^2 - AC}.\operatorname{wst}^2\theta}{A + C - 2B\operatorname{dos}\theta},$$

zkąd się wyprowadza wartości na $\operatorname{wst}\theta'$ i $\operatorname{dos}\theta'$, potem wartość na B'.

Znajduje się wtedy że równanie hyperboli może zawsze być sprowadzonem do kształtu bardzo prostego:

$$x'y'\operatorname{dos}\theta = -\frac{H}{4} \cdot \frac{A + C - 2B\operatorname{dos}\theta}{B^2 - AC};$$

albo, zastępując $\operatorname{dos}\theta'$ przez jej wartość

$$(VI) \qquad x'y' + \pm \frac{H}{4(B^2 - AC)} \cdot \sqrt{(A + C - 2B\operatorname{dos}\theta)^2 + 4(B^2 - AC)\operatorname{wst}^2\theta}.$$

327. Uwaga.

Nastręcza się pytanie czy można znieść razem spółczynnik iloczynu xy i spółczynnik jakiegokolwiek z kwadratów, x^2 na przykład. A *priori*, jest widocznem że rzecz nie jest możebną ogólnie, ponieważ równanie tym sposobem otrzymane przedstawiałoby dwie proste równoległe.

Widzimy to także przez rachunek; gdyż związki (3) i (5) n^{ru} [321] dałyby wtedy, przyjmując znakowania związków (23) n^{ru} [226]

$$(27) \qquad \begin{cases} Cm^2 + 2Bm + A = 0, \\ Cmm' + B(m + m') + A = 0. \end{cases}$$

Otóż odejmując te równania stronami, wypadnie

$$Cm(m - m') + B(m - m') = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad m = -\frac{B}{C},$$

gdyż α i β, to jest m i m', powinny być ilości różne. Ta wartość podstawiona w 1^{ym} ze związków (27), prowadzi do

$$B^2 - AC = 0;$$

otóż to odpowiada wyraźnie na przypadek któryśmy wyłączyli z przekształcenia obecnego.

Tak więc dwa równania (27), które wyznaczają m i m', są z sobą sprzeczne: to jest że nie można aby się zniosły jednocześnie, w przypadku obecnym, spółczynnik prostokąta xy i spółczynnik jednego z kwadratów.

II° Przypuści się $(B^2 - AC)$ zerem, (rodzaj paraboli).

328. Niech będzie dane równanie ogólne drugiego stopnia

$$\text{(I)} \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

teraz zajmiemy się innym sposobem uproszczenia przez przekształcenie spółrzędnych; ta metoda będzie zastosowaną szczególnie do przypadku w którym $(B^2 - AC)$ jest zerem.

W przekształceniu poprzedzającem, przenieśliśmy naprzód osie równolegle do pierwotnego ich położenia, potem daliśmy się im obrócić na około nowego początku. Przyjmiemy tu pochód zupełnie pierwszemu odwrotny, to jest że odniesiemy naprzód krzywą do nowego układu osi mających tenże sam początek jak pierwsze; potem odniesiemy ją do trzeciego układu osi równoległych względem drugich.

Oznaczmy przez θ kąt dawnych osi Ox i Oy, i niech będą α i β kąty które wyznaczają położenie nowych osi Ox' i Oy', mających tenże sam początek jak pierwsze; wzorami przekształcenia są

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' \operatorname{wst}(\theta - \alpha) + y' \operatorname{wst}(\theta - \beta)}{\operatorname{wst}\theta}, \\[2ex] y = \dfrac{x' \operatorname{wst}\alpha + y' \operatorname{wst}\beta}{\operatorname{wst}\theta}. \end{cases}$$

Jeśli się podstawi te wartości w równaniu (I) krzywej, to równanie weźmie kształt

$$\text{(1)} \qquad A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0;$$

wyraz niezależny oczywiście pozostał niezmiennym; spółczynniki A', B', C' wyrazów drugiego stopnia będą jeszcze wyznaczone przez związki (3), (4), (5) n^ru [321], albo przez związki (9), (10), (11) n^ru [323].

Spółczynniki D', E', wyrazów 1^go stopnia są określone przez związki następujące:

$$\begin{cases} \text{(2)} \qquad D' \operatorname{wst}\theta = D \operatorname{wst}(\theta - \alpha) + E \operatorname{wst}\alpha, \\ \text{(3)} \qquad E' \operatorname{wst}\theta = D \operatorname{wst}(\theta - \beta) + E \operatorname{wst}\beta. \end{cases}$$

Możemy naprzód korzystać z nieoznaczoności ilości α i β dla zniesienia spółczynnika B'; po czem spółczynniki A′ i C′ obliczą się, bądź to jak w nrze [318], jeśli dawne i nowe osie są prostokątne; bądź, jak w nrze [324], jeśli dawne i nowe osie są pochyłe.

Jeśli się daje kąt nowych osi, i szczególnie, jeśli ten kąt jest prostym, w tym razie nie będzie się mogło znieść jak tylko jednym sposobem prostokąt xy; otrzyma się zaś nieskończoną ilość sposobów zniesienia go, jeśli się zostawi dowolnym kąt nowych osi.

Za pomocą tej pierwszej zmiany osi, równanie (I) krzywej znajduje się więc sprowadzonem do kształtu

$$\text{(II)} \qquad A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0.$$

Wartości spółczynników D′ i E′ wyprowadzają się z równań poprzedzających (2) i (3), ponieważ α i β są wyznaczone w funkcyi kąta nowych osi, przez rachunki do których odesłaliśmy.

Uwaga. Kiedy $B^2 - AC = 0$ te rachunki są zawsze praktyczne; lecz należy uważać że jakikolwiek ze spółczynników A′ albo C′ jest zerem, jak to widzimy, bądź przez wzory (9) nru [318], bądź to przez 1szy ze wzorów (17) nru [324].

Ponieważ kąty α i β są wyznaczone przez ich styczną, otrzyma się wiele kątów zadość czyniących kwestyi; i podług wyboru jaki się zrobi, jedna albo druga z ilości A′ i C′ będzie zerem; przypuśćmy, dla wyjaśnienia że $A = 0$; tak aby w przypadku paraboli to pierwsze przekształcenie pozwoliło sprowadzić równanie krzywej do kształtu

$$\text{(II } bis) \qquad C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0.$$

329. To pierwsze przekształcenie mając wykonanem, odniesiemy teraz krzywą do nowego układu osi, $O'x''$ i $O'y''$, równoległych do poprzedzających. Jeżeli x'_0 i y'_0 są spółrzędne nowego początku względem osi Ox' i Oy', wzorami przekształcenia będą

$$\begin{cases} x' = x'_0 + x'', \\ y' = y'_0 + y''. \end{cases}$$

Równanie (II) stanie się wtedy

$$(4) \quad A'x''^2 + C'y''^2 + 2(A'x'_0 + D')x'' + 2(C'y'_0 + E')y'' + A'x'^2_0 + C'y'^2_0 + 2D'x'_0 + 2E'y'_0 + F = 0;$$

spółczynniki A′ i C′ wyrazów drugiego stopnia nie były zmienione przez to drugie przekształcenie.

Będzie można wybrać dwie nieoznaczone x'_0 i y'_0 w sposób taki, ażeby się zniosły dwa z trzech ostatnich wyrazów w równaniu (4). Jeżeli żaden ze spółczynników A′ i C′ nie jest zerem, będzie się mogło znieść wyrazy pierwszego stopnia; znajdziemy tym sposobem wypadki otrzymane poprzednio.

We wszystkich przypadkach, ponieważ przypuszczamy że A′ i C′ nie są zerami razem (gdyż wtedy przekształcenie staje się niepotrzebnem), będzie można znieść wyraz niezależny i jakikolwiek z wyrazów pierwszego stopnia.

W przypadku paraboli, jakikolwiek ze spółczynników A′ albo C′ będąc zerem, jest jeden z wyrazów pierwszego stopnia którego znieść nie będzie można; tak więc, kiedy się przypuszcza jak to zrobiliśmy, $A' = 0$, nie można znieść wyrazu na x.

Równając z zerem, spółczynnik wyrazu na y'' i wyraz niezależny, potem oznaczywszy przez D'' spółczynnik na x'', otrzymamy

$$\left\{\begin{array}{ll}(5) & D'' = A'x'_0 + D', \\ (6) & 0 = C'y'_0 + E', \\ (7) & 0 = A'x'^2_0 + C'y'^2_0 + 2D'x'_0 + 2E'y'_0 + F.\end{array}\right.$$

Zkąd wniesiemy że *równanie ogólne krzywych drugiego stopnia może, we wszystkich przypadkach, sprowadzić się do kształtu*

$$\text{(III)} \qquad A'x''^2 + C'y''^2 + 2D''x'' = 0.$$

W przypadku paraboli, w którym $A' = 0$, *ma się kształt uproszczony*

$$\text{(III } bis) \qquad C'y''^2 + 2D''x'' = 0.$$

330. Wróćmy teraz do szczegółów tyczących wyznaczenia ilości x'_0, y'_0, D''.

Mnożąc równania (5) i (6) przez x'_0, y'_0, dodając i odejmując od równania (7) wypadnie

$$-D''x'_0 = D'x'_0 + E'y'_0 + F;$$

podstawimy więc za układ (5), (6), (7) układ następujący

$$(8) \qquad \left\{\begin{array}{l} D'' = A'x'_0 + D', \\ 0 = C'y'_0 + E', \\ -D''x'_0 = D'x_0 + E'y'_0 + F; \end{array}\right.$$

trzy równania (8) pozwolą nam wyznaczyć łatwiej trzy nieznane x'_0, y'_0 i D''.

W przypadku paraboli, w którym A' *jest zerem*, ma się bezpośrednio

$$\left\{\begin{array}{l} D'' = D', \\ y'_0 = -\dfrac{E'}{C'}, \\ x'_0 = \dfrac{E'^2 - FC'}{2D'}. \end{array}\right.$$

Spółczynnik D'' ma wartość jedyną; wartość na y'_0 jest skończoną, ponieważ C' jest różnem od zera; wartość na x'_0 jest również skończoną, kiedy krzywa jest właściwą parabolą. W rzeczy samej, jeśliby się przypuściło $D' = 0$, równanie (II *bis*) n^ru [328], okazałoby że krzywa sprowadziłaby się do dwóch prostych równoległych.

Kiedy krzywa nie jest parabolą, rzędna y'_0 *ma jeszcze wartość skończoną i wyznaczoną*, to jest

$$y'_0 = -\frac{E'}{C'}.$$

Dla wyznaczenia D'' i x'_0, podstawimy wartość na D'' (1sze z równań (8)), w 3ciem, i zastąpimy y'_0 przez wartość poprzedzającą; znajduje się tym sposobem

$$A'x'^2_0 + 2D'x'_0 + \frac{FC' - E'^2}{C'} = 0.$$

To równanie wyznaczy dwie wartości dla x'_0 i z tego wyniknie dwie wartości odpowiednie dla D''. Jest łatwo sprawdzić że te wartości są zawsze rzeczywiste w przypadku elipsy rzeczywistej.

Można zdać sobie sprawę z istnienia tego dwoistego rozwiązania; osie spółrzędnych $O'x''$ i $O'y''$ są tu, jak zobaczymy poniżej, średnicą i styczną na końcu tej średnicy; otóż można wziąć za początek jeden albo drugi z końców tej średnicy; to jest że się może, zachowując tenże sam kierunek osi, wybrać dwa początki różne.

Jeśli się rozwiąże równanie poprzedzające, znajduje się że wartości odpowiedne na D'' są równe i znaków przeciwnych.

III° Streszczenie.

331. 1° W przypadku *Elipsy i hyperboli*, równanie ogólne krzywych drugiego stopnia może się sprowadzić do kształtu

$$\text{(I)} \qquad Mx^2 + Ny^2 = H;$$

a w przypadku Paraboli, do kształtu

$$\text{(II)} \qquad Ny^2 + 2Px = 0.$$

To uproszczenie może się wykonać *jednym tylko sposobem*, jeśli osie ostateczne, do których krzywa jest odniesioną, są prostokątnemi; a *niezliczonem mnóstwem sposobów*, jeśli kąt osi ostatecznych jest różnym od prostego i dowolnym; to jest że się otrzyma niezliczone mnóstwo układów osi pochyłych, dla których ten kształt uproszczony będzie miał miejsce.

2° W przypadku hyperboli, równanie może być sprowadzonem do kształtu

$$\text{(III)} \qquad xy = k;$$

kąt osi ostatecznych jest wtedy wyznaczonym i ogólnie nie jest prostym.

3° Równanie krzywych drugiego stopnia może, *we wszystkich przypadkach*, być sprowadzonem do kształtu

$$\text{(IV)} \qquad Mx^2 + Ny^2 + 2Px = 0.$$

To uproszczenie może się wykonać *jednym tylko sposobem*, jeśli osie ostateczne są prostokątnemi; a *niezliczonem mnóstwem sposobów*, jeśli kąt osi ostatecznych jest różnym od prostego i dowolnym, to jest że się otrzyma niezliczone mnóstwo układów osi pochyłych dla których równanie będzie miało ten kształt uproszczony.

Uwaga I. Zróbmy jednorodnemi równania (I) i (II), one się stają

$$\text{(I } bis\text{)} \qquad Mx^2 + Ny^2 = Hz^2,$$

$$\text{(II } bis\text{)} \qquad My^2 + MPxz = 0.$$

Prosta w nieskończoności $z = 0$ *spotyka krzywą w dwóch punktach* odrębnych rzeczywistych albo urojonych, według tego jak krzywa jest hyperbolą albo elipsą.

Prosta w nieskończoności spotyka parabolę w dwóch punktach, stykających się z sobą; to jest że parabola jest styczną do prostej w nieskończoności.

Uwaga II. Zakończymy to zastosowanie przekształcenia spółrzędnych do uproszczenia równań drugiego stopnia, sprawdzając *niezmienność* funkcyj δ i Δ.

Niech będzie równanie pierwotne zrobione jednorodnem

$$(1) \qquad F(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

Wykonajmy w pierwszej stronie podstawienie

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \alpha_1 y' + \alpha_2 z', \\ y = \beta x' + \beta_1 y' + \beta_2 z', \\ z = \gamma x' + \gamma_1 y' + \gamma_2 z', \end{cases}$$

przejdzie się ztąd do wzorów zwyczajnych przekształcenia spółrzędnych przypuszczając

$$(3) \qquad z = 1, \qquad z' = 1; \qquad \gamma = 0, \qquad \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 1.$$

Podstawienie (2) przekształci równanie (1) na

$$(4) \qquad \varphi(x', y', z') = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x'z' + 2E'y'z' + F'z'^2 = 0;$$

tak że się otrzyma, mając wzgląd na związki (2), tożsamość

$$(5) \qquad F(x, y, z) = \varphi(x', y', z').$$

Weźmy pochodne tożsamości (5) względem x', y', z', uważając x, y, z, jako funkcye x', y', z', określone przez związki (2), ma się

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi'_{x'} = \alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z; \\ \varphi'_{y'} = \alpha_1 F'_x + \beta_1 F'_y + \gamma_1 F'_z; \\ \varphi'_{z'} = \alpha_2 F'_x + \beta_2 F'_y + \gamma_2 F'_z. \end{cases}$$

Jeżeli się zastąpi pochodne przez ich wartości i gdy się założy

$$(7)\quad \begin{cases} A = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B} + \gamma\mathrm{D}, & A_1 = \alpha_1\mathrm{A} + \beta_1\mathrm{B} + \gamma_1\mathrm{D}, & A_2 = \alpha_2\mathrm{A} + \beta_2\mathrm{B} + \gamma_2\mathrm{D}, \\ B = \alpha\mathrm{B} + \beta\mathrm{C} + \gamma\mathrm{E}, & B_1 = \alpha_1\mathrm{B} + \beta_1\mathrm{C} + \gamma_1\mathrm{E}, & B_2 = \alpha_2\mathrm{B} + \beta_2\mathrm{C} + \gamma_2\mathrm{E}, \\ \varphi = \alpha\mathrm{D} + \beta\mathrm{E} + \gamma\mathrm{F}; & \varphi_1 = \alpha_1\mathrm{D} + \beta_1\mathrm{E} + \gamma_1\mathrm{F}; & \varphi_2 = \alpha_2\mathrm{D} + \beta_2\mathrm{E} + \gamma_2\mathrm{F}; \end{cases}$$

tożsamości (6) się stają

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{A}'x' + \mathrm{B}'y' + \mathrm{D}'z' = Ax + By + \varphi z, \\ \mathrm{B}'x' + \mathrm{C}'y' + \mathrm{E}'z' = A_1x + B_1y + \varphi_1 z, \\ \mathrm{D}'x' + \mathrm{E}'y' + \mathrm{F}'z' = A_2x + B_2y + \varphi_2 z. \end{cases}$$

Różniczkujmy na nowo tożsamości (8) mając wzgląd na związki (2), to nas prowadzi bezpośrednio do wartości ostatecznych:

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{A}' = \alpha A + \beta B + \gamma\varphi, & \mathrm{B}' = \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma\varphi_1, & \mathrm{D}' = \alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma\varphi_2, \\ \mathrm{B}' = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1\varphi, & \mathrm{C}' = \alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1\varphi_1, & \mathrm{E}' = \alpha_1 A_2 + \beta_1 B_2 + \gamma_1\varphi_2, \\ \mathrm{D}' = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2\varphi; & \mathrm{E}' = \alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2\varphi_1; & \mathrm{F}' = \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 + \gamma_2\varphi_2. \end{cases}$$

Idzie teraz o obliczenie funkcyj

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}' & \mathrm{B}' & \mathrm{D}' \\ \mathrm{B}' & \mathrm{C}' & \mathrm{E}' \\ \mathrm{D}' & \mathrm{E}' & \mathrm{F}' \end{vmatrix} \qquad \delta' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}' & \mathrm{B}' \\ \mathrm{B}' & \mathrm{C}' \end{vmatrix};$$

w funkcyi spółczynników A, B,... równania pierwotnego.

Związki (9) dają nam naprzód, stosując zasadę mnożenia wyznaczników

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}' & \mathrm{B}' & \mathrm{D}' \\ \mathrm{B}' & \mathrm{C}' & \mathrm{E}' \\ \mathrm{D}' & \mathrm{E}' & \mathrm{F}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B & \varphi \\ A_1 & B_1 & \varphi_1 \\ A_2 & B_2 & \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Otóż zastosowanie tejże samej zasady do związków (7) prowadzi do

$$\begin{vmatrix} A & B & \varphi \\ A_1 & B_1 & \varphi_1 \\ A_2 & B_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{D} \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{E} \\ \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \end{vmatrix}.$$

Ma się więc związek następujący między funkcyami Δ' i Δ:

$$(I)\qquad \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

albo

$$(I\ bis)\qquad \Delta' = m^2.\Delta.$$

Powtóre, jeżeli się założy

$$(10)\qquad a = \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma, \qquad b = \gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha, \qquad c = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta;$$

sprawdza się bez trudności za pomocą związków (9) i (7):

$$A'C' - B'^2 = a(B\varphi_1 - B_1\varphi) + b(\varphi A_1 - \varphi_1 A) + c(AB_1 - A_1B);$$

$$B\varphi_1 - B_1\varphi = a(CF - F^2) + b(DE - BF) + c(BE - CD),$$

$$\varphi A_1 - \varphi_1 A = a(DE - BF) + b(AF - D^2) + c(BD - AE),$$

$$AB_1 - A_1B = a(BE - CD) + b(BD - AE) + c(AC - B^2).$$

Zkąd się wyprowadza ten drugi związek

$$(II)\qquad \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Jeżeli się teraz przypuści

$$\gamma = 0, \qquad \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 1,$$

związki (I) i (II), *prowadzą do własności niezmienności*, które należało uzasadnić dla funkcyj Δ' i δ', to jest

$$(III)\qquad \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}; \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 . \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Widzimy przez związek (II) że δ' *nie jest niezmiennikiem* funkcyi trzech zmiennych.

§ III. — DYSKUSSYA KSZTAŁTÓW UPROSZCZONYCH.

Wykreślenia.

I° Dyskussya kształtów uproszczonych ; kształty ostateczne.

332. Otrzymaliśmy, dla krzywych drugiego rzędu właściwie nazwanych, kształty uproszczone

$$\text{(I)} \qquad Mx^2 + Ny^2 = H,$$

$$\text{(II)} \qquad Ny^2 + 2Px = 0.$$

Sprawdzimy naprzód że te kształty uproszczone dają także zmiany krzywych drugiego rzędu.

Uważmy pierwsze równanie :

$$\text{(I)} \qquad Mx^2 + Ny^2 = H.$$

Przypuśćmy M i N tychże samych znaków i zróbmy je dodatnymi :

$$\begin{cases} \text{jeżeli} \quad H > 0, & \text{otrzyma się Elipsę rzeczywistą} \\ \text{jeżeli} \quad H = 0, & \text{......... Punkt albo Elipsę znikającą,} \\ \text{jeżeli} \quad H < 0, & \text{......... Elipsę urojoną.} \end{cases}$$

Przypuśćmy M i N znaków przeciwnych, i uwidocznijmy te znaki :

$$Mx^2 - Ny^2 = H;$$

$$\begin{cases} \text{jeżeli} \quad H \gtrless 0, & \text{otrzyma się Hyperbolę,} \\ \text{jeżeli} \quad H = 0, & \text{.......... Dwie proste przecinające się.} \end{cases}$$

Jeżeli jedna ze stałych M lub N jest zerem, a druga ilością dodatną ma się na przykład :

$$Mx^2 = H;$$

$$\begin{cases} \text{jeżeli} \quad H > 0, & \text{otrzyma się Dwie proste równoległe rzeczywiste,} \\ \text{jeżeli} \quad H = 0, & \text{.......... Dwie proste przystające do siebie,} \\ \text{jeżeli} \quad H < 0, & \text{.......... Dwie proste równoległe urojone.} \end{cases}$$

Nakoniec jeżeli dwie stałe są zerami, równanie zrobione jednorodnem stanie się

$$Z^2 = 0;$$

ono przedstawia dwie proste zlewające się w jedną w nieskończoności.

Uważmy powtóre drugie równanie

$$\text{(II)} \qquad Ny^2 + 2Px = 0.$$

Jeżeli N i P są różne od zera, otrzyma się parabolę,

Jeżeli $P = 0$, ma się dwie proste zlewające się w jedną,

Jeżeli $N = 0$, ma się $xz = 0$, to jest jedną prostą w odległości skończonej i drugą w nieskończoności.

Znajdujemy więc, w dwóch kształtach uproszczonych, wszystkie zmiany krzywych drugiego rzędu.

333. Usunąwszy zmiany, pozostaje trzy krzywe właściwie nazwane drugiego rzędu, których równaniami uproszczonemi będą :

$$Mx^2 + Ny^2 = H, \quad \text{Elipsa};$$

$$Mx^2 - Ny^2 = H, \quad \text{Hyperbola};$$

$$Ny^2 - 2Px = 0, \quad \text{Parabola};$$

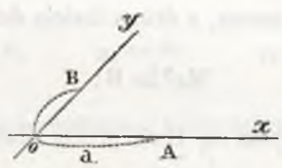
M, N, P, H, oznaczają stałe dodatne.

Damy zaraz dla tych równań kształt ostateczny symetryczniejszy.

1° Elipsa $\qquad Mx^2 + Ny^2 = H.$

Dwie osie do których jest odniesioną elipsa posiadają własność następującą : oś odciętych dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do osi rzędnych, a oś rzędnych dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do osi odciętych. W rzeczy samej, wartości jakiejkolwiek na x odpowiadają dwie wartości na y równe i znaków przeciwnych; i wartości jakiejkolwiek na y odpowiadają dwie wartości na x równe i znaków przeciwnych. Jeżeli osie są pochyłe, one tworzą co się zowie układ *dwóch średnic sprzężonych;* jeżeli osie spółrzędnych są prostokątne będą one osiami krzywej.

Szukajmy przecięć krzywej z osiami spółrzędnych. Niech będą A i B przecięcia krzywej z Ox i Oy;



i założmy $OA = a$, $OB = b$; robiąc $y = 0$, potem $x = 0$, otrzyma się kolejno

$$y = 0, \quad Ma^2 = H; \quad x = 0, \quad Nb^2 = H;$$

zkąd

$$M = \frac{H}{a^2}, \quad N = \frac{H}{b^2};$$

a i b są ilości rzeczywiste, ponieważ M, N i H są dodatne.

Wprowadzając a i b w równanie krzywej, to jest zastępując M i N przez wartości powyższe, równanie elipsy otrzyma kształt następujący

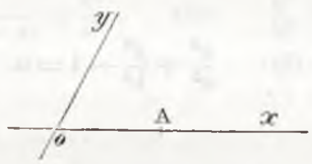
$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Stałe a i b przedstawiają *długości dwóch średnic sprzężonych*, jeżeli osie Ox i Oy są *prostokątne*.

2° Hyperbola $\qquad Mx^2 - Ny^2 = H.$

Osie spółrzędnych posiadają jeszcze własność oznaczoną w przypadku Elipsy.

Oś odciętych spotyka krzywą w punkcie rzeczywistym A, niech będzie OA = a, ma się



$$a^2 = \frac{H}{M}, \quad \text{zkąd} \quad M = \frac{H}{a^2}.$$

Dla otrzymania przecięcia się z osią rzędnych; zróbmy $x = 0$, wypadnie

$$y^2 = -\frac{H}{N}, \quad \text{albo} \quad y = \sqrt{\frac{H}{N}}.\sqrt{-1};$$

oznaczymy przez b spółczynnik $\sqrt{-1}$; ilość *b* jest nazwana *długością średnicy urojonej*; otrzyma się więc

$$b^2 = \frac{H}{N}, \quad \text{zkąd} \quad N = \frac{H}{b^2}.$$

Zastępując M i N przez wartości powyższe, równanie hyperboli weźmie kształt

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Stałe a i b są *długościami dwóch średnic sprzężonych* (1sza rzeczywista, 2ga urojona), jeżeli osie Ox i Oy są pochyłe; a i b przedstawiają *długości osi* krzywej, jeżeli Ox i Oy są *prostokątne*.

3° Parabola $\qquad Ny^2 - 2Px = 0.$

Oś odciętych dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do osi rzędnych; krzywa przechodzi przez początek, ponieważ równanie jest sprawdzonem dla $x = 0$, $y = 0$; nakoniec oś y spotyka krzywą w dwóch punktach zlanych w początku; gdyż, jeżeli się zrobi $x = 0$, ma się $y^2 = 0$. Tak więc oś Ox jest *średnicą*, oś Oy jest *styczną* na końcu tej średnicy.

Równanie paraboli może się oczywiście napisać

$$\text{(III)} \qquad y^2 = 2px;$$

stała $2p$ nazywa się *parametrem paraboli względnym do średnicy* Ox, lub po prostu *parametrem*, kiedy Ox jest osią krzywej.

Wejdziemy w niektóre szczegóły nad wykreśleniem i własnościami bezpośredniemi tych trzech krzywych.

II. Elipsa. — Wykreślenie.

334. Równaniem elipsy jest

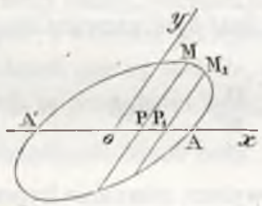
$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

To równanie daje

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \qquad \text{albo} \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x);$$

tak że jeżeli A i A′ są końcami średnicy, jeżeli MP jest rzędną jakiegokolwiek punktu M, ma się

$$\overline{MP}^2 = \frac{b^2}{a^2}\,\overline{PA}\,.\,\overline{PA'}.$$



Otrzyma się podobnież dla drugiego punktu M_1:

$$\overline{M_1P_1}^2 = \frac{b^2}{a^2}\,\overline{P_1A}\,.\,\overline{P_1A'}.$$

Zkąd wypada

$$\text{(1)} \qquad \frac{\overline{MP}^2}{\overline{PA}\,.\,\overline{PA'}} = \frac{\overline{M_1P_1}^2}{\overline{P_1A}\,.\,\overline{P_1A'}}.$$

Więc, *w elipsie, iloraz kwadratu jakiejkolwiek cięciwy przez iloczyn odległości środka tej cięciwy od końców średnicy sprzężonej jest stałym.*

Odwrotnie : *krzywa taka, że iloraz kwadratu rzędnej przez iloczyn odcinków wyznaczonych za pomocą spodka rzędnej na prostej stałej jest stałym, jest elipsą.*

Niech będą dwa punkta stałe A i A′; weźmy tę prostą za oś odciętych; za początek środek O odcinka AA′; i za oś y, równoległą do rzędnych. Jeżeli M jest jakimkolwiek punktem miejsca, i MP jego rzędną, ma się przez założenie

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{PA}.\overline{PA'}}=\frac{b^2}{a^2},$$

oznaczywszy przez $\frac{b^2}{a^2}$ wartość stałą stosunku. Ten związek się staje, wprowadzając spółrzędne punktu M, i przedstawiając przez 2a długość AA′:

$$\frac{y^2}{(a-x)(a-x)}=\frac{b^2}{a^2},\qquad \text{albo}\qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-1=0;$$

estto istotnie równanie elipsy.

335. Użycie kąta posiłkowego.

Jest często dogodnie wyrazić dwie spółrzędne jakiegokolwiek punktu elipsy w funkcyi zmiennej dowolnej; wskażemy wybór następujący.

Załóżmy

$$(2)\qquad \begin{cases} x=a\,\mathrm{dos}\,\varphi,\\ y=b\,\mathrm{wst}\,\varphi;\end{cases}$$

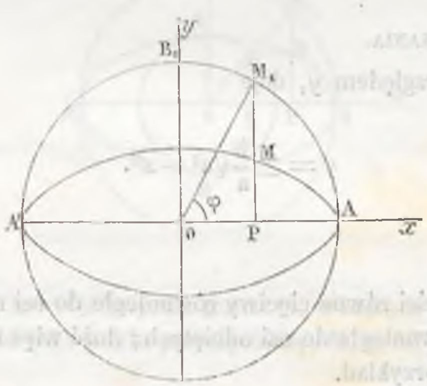
i jest widocznem że równanie elipsy jest sprawdzonem, jakimkolwiek bądź byłoby φ, przez wartości (2); można przedstawić przez ($a\,\mathrm{dos}\varphi$, $b\,\mathrm{wst}\varphi$) spółrzędne x i y jakiegokolwiek punktu elipsy; damy dla zmiennej φ nazwisko *parametru kątowego* punktu (x, y).

Znaczenie geometryczne kąta φ.

1° Osie prostokątne.

Przypuśćmy naprzód że dwie osie Ox i Oy do których elipsa jest odniesioną są prostokątne. Na $AA'=2a$ zakreślmy koło, które przecina oś Oy w B_1.

Jeżeli M jest jakimkolwiek punktem elipsy, przedłużmy rzędną MP aż do jej spotkania w M_1 z ko-



łem, potem złączmy M_1 ze środkiem O; otrzyma się

(3) $$\varphi = \widehat{M_1OA}.$$

W rzeczy samej, według równości (2)

$$x = OP = OM_1 . dos\varphi;$$

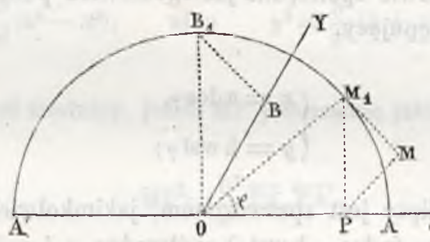
z drugiej strony trójkąt M_1OP daje

$$OP = OM_1 . dos\widehat{M_1OP};$$

więc.....

2° Osie pochyłe.

Dwie osie Ox i Oy są pochyłe; zakreślmy zawsze koło na $AA' = 2a$ jako średnicy; z punktu O wynieśmy prostopadłą do AA', niech będzie B_1 jej przecięcie się z okręgiem koła. Jeżeli M jest jakimkolwiek punktem elipsy, i MP jego rzędną, przez spodek P rzędnej, poprowadzimy prosto-



padłą do AA' i przedłużymy ją aż do jej spotkania się w M_1 z kołem; punkt M_1 jest punktem *odpowiadającym* punktu M; i gdy się złączy M_1O, otrzyma się jeszcze

(4) $$\varphi = \widehat{M_1OA}.$$

Dowodzenie jest toż samo jak w przypadku poprzedzającym.

336. Wykreślenie elipsy.

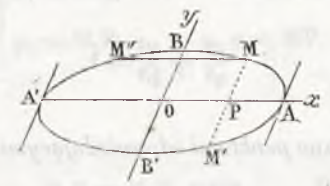
1° Wykreślenie za pomocą równania.

Równanie elipsy, rozwiązane względem y, daje

(5) $$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Osie pochyłe.

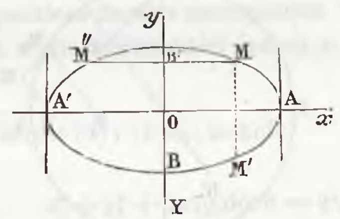
Oś odciętych dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do osi rzędnych, a oś rzędnych dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do osi odciętych; dość więc wykreślić przez punkta część krzywej leżącą w kącie xOy, na przykład, Odcięta x nie mogąc się zmieniać nad a, będziemy zwiększać x od 0 do a; widzimy wtedy że rzędna y zmniejsza się od b aż do 0; wartość b jest *największością* rzędnej y; styczna w B będzie



równoległą do Oy. Łuk BMA będąc stałym, wyprowadzi się według uwag zrobionych, inne części krzywej.

Osie prostokątne.

Wykreślenie wykona się tymże samym sposobem jak w przypadku poprzedzającym. Krzywa będzie wtedy symetryczną względem Ox i Oy; AA′ i BB′ będą dwiema osiami krzywej. Styczne w A i A′



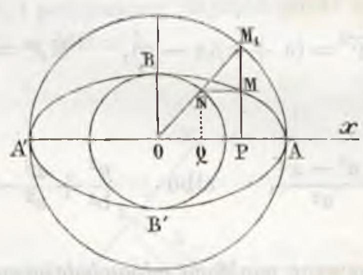
będą prostopadłe do osi AA′; styczne w B i B′ będą prostopadłemi do osi BB′.

2° Wykreślenie za pomocą parametru φ.

Osie prostokątne.

Na dwóch osiach prostokątnych weźmy OA $=$ OA′ $=$ a, OB $=$ OB′ $=$ b; potem zakreślmy pierwsze koło na AA′ jako średnicy, i drugie na BB′ jako średnicy.

Niech będzie a $>$ b; weźmy jakikolwiek punkt M_1 na kole promienia a, i spuśćmy M_1P prostopadłą na OA; złączmy potem M_1O, wreszcie przez punkt N, w którym M_1O spotyka koło promienia b, poprowadźmy NM równoległą do OA; punkt przecięcia się, M, prostych M_1P i MN, będzie punktem elipsy.



W rzeczy samej, ma się, oznaczywszy przez φ kąt $\widehat{M_1OP}$:

$$x = OP = a\cos\varphi, \qquad y = MP = NQ = b\sin\varphi;$$

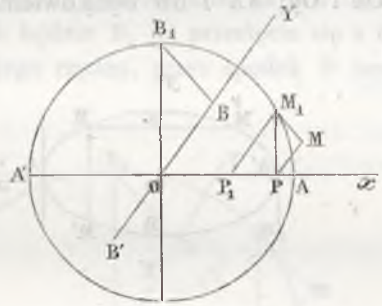
zkąd
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Punkta takie jak M i M_1 są nazwane *punktami odpowiadającymi.*

Osie pochyłe.

Przypuśćmy że a i b są długości dwóch średnic sprzężonych; weźmy na dwóch osiach $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$; potem na AA', na przykład, zakreślmy koło; w O wynieśmy prostopadłą na AA', niech będzie B_1 jej przecięcie się z kołem; złączmy nakoniec B_1B.

Niech będzie teraz M_1 jakikolwiek punkt koła; z tego punktu spuśćmy prostopadłą M_1P na AA';



potem, przez punkt P, poprowadźmy równoległą do OB; i przez M_1, równoległą do B_1B; punkt przecięcia się M tych dwóch linii jest punktem elipsy mającej za średnice sprzężone OA i OB.

W rzeczy samej, ma się, według własności koła i podobieństwa trójkątów.

$$\overline{M_1P}^2 = PA\,.\,PA'; \qquad \frac{M_1P}{OB_1} = \frac{MP}{OB};$$

albo, jeżeli x i y są spółrzędnemi punktu M względem Ox i Oy

$$\overline{M_1P}^2 = (a + x)(a - x), \qquad M_1P = \frac{a}{b}y;$$

zkąd wypada

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \qquad \text{albo} \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Punkta takie jak M i M_1 są nazwane *punktami odpowiadającymi.*

Uwaga. To drugie wykreślenie może być nazwane *wykreśleniem jednokreślnem* elipsy.

Warunki położone przez określenie jednokreślności n^{ru} [190] są w rzeczy samej spełnione w przypadku obecnym. Szukajmy wreszcie związków między spółrzędnemi punktów odpowiadających M i M_1.

Jeżeli, względem osi Ox i Oy, x_1 i y_1 są spółrzędne punktu M_1, zaś x, y, spółrzędne punktu M, ma się (figura powyższa)

$$\begin{cases} x_1 = OP_1, & x = OP, \\ y_1 = M_1P_1, & y = MP. \end{cases}$$

Otóż, θ będąc kątem osi, ma się

$$\frac{MP}{M_1P_1} = \frac{OB}{OB_1}, \qquad M_1P = M_1P_1.\mathrm{wst}\theta, \qquad P_1P = M_1P_1.\mathrm{dos}\theta;$$

zkąd wypada

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = x - y_1\mathrm{dos}\theta, \\ y_1 = \dfrac{a}{b\,\mathrm{wst}\theta}y, \end{cases} \quad \text{albo} \quad (6\ bis) \quad \begin{cases} x = x_1 + y_1\mathrm{dos}\theta, \\ y = \dfrac{b\,\mathrm{wst}\theta}{a}y_1. \end{cases}$$

Widzimy że te związki są przypadkiem bardzo szczególnym wzorów ogólnych (3) n^ru [190] przekształcenia jednokreślnego, prosta w nieskończoności jednej z figur pozostaje do nieskończoności w przekształceniu.

Sprawdza się łatwo za pomocą wzorów (6) i (6 *bis*) że koło

$$(C) \qquad x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\mathrm{dos}\theta = a^2,$$

przekształca się jednokreślnie na elipsę

$$(E) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

i odwrotnie.

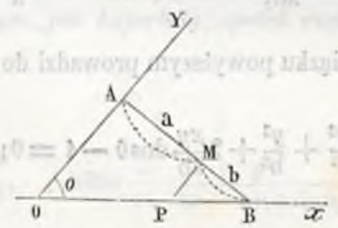
Możemy dać temu kołu, nazwisko *koła jednokreślnego* elipsy.

337. Tworzenie się Elipsy.

Elipsa może być utworzoną przez punkt prostej długości stałej, której końce opierają się na dwóch prostych stałych.

Weźmy dwie proste stałe za osie, i przypuśćmy naprzód punkt opisujący M, leżący między dwoma końcami A i B; niech będą MA = a, MB = b.

Ma się naprzód



$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2OA.OB.\mathrm{dos}\theta.$$

Jeżeli się wykreśli spółrzędne punktu M, ma się przez trójkąty podobne

$$\frac{OA}{MP} = \frac{AB}{MB}, \quad \text{zkąd} \quad OA = \frac{y}{b}.AB,$$

$$\frac{OB}{OP} = \frac{AB}{AM}, \quad \text{zkąd} \quad OB = \frac{x}{a}.AB.$$

Podstawienie tych wartości w związku powyższym daje bezpośrednio

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\operatorname{dos}\theta - 1 = 0;$$

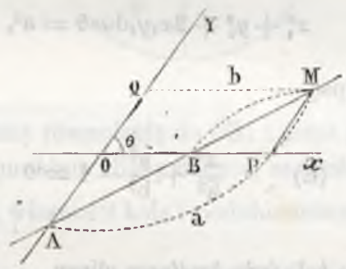
równanie elipsy, gdyż ma się $B^2 - AC = \frac{\operatorname{dos}^2\theta - 1}{a^2b^2} = -\frac{\operatorname{wst}^2\theta}{a^2b^2} < 0.$

Kiedy proste stałe są prostokątne ($\theta = 90°$), one stają się osiami krzywej.

Przypuśćmy teraz punkt opisujący zewnątrz odcinka AB.

Zachowując znakowania poprzedzające, ma się związek

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{OA}.\overline{OB}\operatorname{dos}\theta.$$



Trójkąty podobne dają nam jeszcze :

$$\frac{OA}{MP} = \frac{AB}{MB}, \quad \text{zkąd} \quad OA = \frac{y}{b}AB;$$

$$\frac{OB}{OP} = \frac{AB}{MA}, \quad \text{zkąd} \quad OB = \frac{x}{a}AB.$$

Podstawienie tych wartości w związku powyższym prowadzi do równania następującego :

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2\frac{xy}{ab}\operatorname{dos}\theta - 1 = 0;$$

jestto jeszcze równanie elipsy.

III° Hyperbola. — Wykreślenie.

338. Równanie hyperboli jest

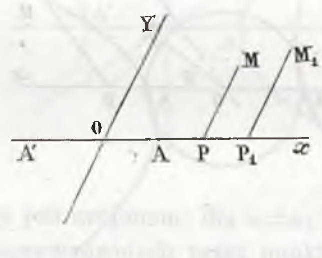
$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

To równanie daje

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \qquad \text{albo} \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x + a)(x - a);$$

tak, że jeżeli A i A′ są końce średnicy rzeczywistej, i jeżeli MP jest rzędną punktu M, ma się

$$\overline{MP}^2 = \frac{b^2}{a^2}\overline{AP}\,.\,\overline{A'P},$$



dla drugiego punktu M_1 otrzyma się podobnież

$$\overline{M_1P_1}^2 = \frac{b^2}{a^2}\overline{AP_1}\,.\,\overline{A'P_1}.$$

Zkąd wypada

$$(1) \qquad \frac{\overline{MP}^2}{\overline{AP}\,.\,\overline{A'P}} = \frac{\overline{M_1P_1}^2}{\overline{AP_1}\,.\,\overline{A'P_1}}.$$

Więc, *w hyperboli, iloraz kwadratu jakiejkolwiek cięciwy przez iloczyn odległości środka tej cięciwy od końców średnicy sprzężonej jest stałym.*

Twierdzenie podobne do twierdzenia elipsy, nru [334]; w elipsie, środek P cięciwy, albo spodek P rzędnej, znajduje się między końcami A i A′ średnicy; w hyperboli, punkt P znajduje się zawsze zewnątrz odcinka AA′.

Odwrotnie: *krzywa taka, że iloraz kwadratu rzędnej przez iloczyn odcinków wyznaczonych za pomocą spodka rzędnej na prostej stałej jest stałym, jest hyperbolą; spodek rzędnej będąc na zewnątrz od końców prostej stałej.*

Ma się, w rzeczy samej

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{PA}\,.\,\overline{PA'}} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \text{albo} \qquad \frac{y^2}{(x - a)(x + a)} = \frac{b^2}{a^2},$$

albo $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

339. Użycie kąta posiłkowego.

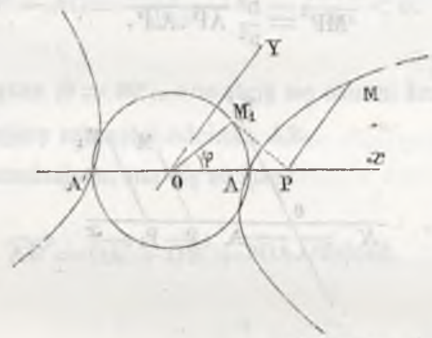
1° Równanie (II) hyperboli będzie sprawdzonem, jakimkolwiek bądź byłby φ, jeśli się założy

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\operatorname{dos}\varphi}, \\ y = b\operatorname{st}\varphi; \end{cases}$$

kąt φ jest *parametrem kątowym* punktu (x, y).

Znaczenie geometryczne kąta φ.

Niech będzie M jakikolwiek punkt hyperboli i P spodek rzędnej; zakreślmy koło na średnicy AA′;



i z punktu P poprowadźmy styczną PM_1 do tego koła, potem złączmy M_1O. Otrzyma się

$$OP = x = \frac{a}{\operatorname{dos}\widehat{M_1OA}}, \qquad \text{zkąd} \qquad \operatorname{dos}\widehat{M_1OP} = \operatorname{dos}\varphi;$$

przeto

$$(3)\qquad \varphi = \widehat{M_1OA}.$$

2° Mogłoby się jeszcze wprowadzić parametr kątowy sposobem następującym.

Równanie hyperboli zrobione jednorodnem będzie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

i będziemy mogli oczywiście założyć

$$(4)\qquad \begin{cases} z = \dfrac{x}{a}\operatorname{dos}\psi, \\ y = \dfrac{bx}{a}\operatorname{wst}\psi. \end{cases}$$

Te wzory są następstwem pierwszych, i kąt ψ nie jest innym jak kątem φ; tylko w pewnych przypadkach, ten sposób wprowadzania parametru kątowego, zrobiwszy równanie jednorodnem, może być daleko więcej korzystnym. Gdyż tak działając, można sprowadzić rachunki tyczące się hyperboli do kształtu rachunków odpowiadających elipsie.

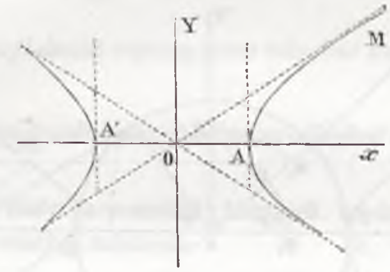
340. Wykreślenie hyperboli.

1° Wykreślenie za pomocą równania.

Rozwiązując równanie (II) hyperboli ma się

$$(5) \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2};$$

oś odciętych dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do osi rzędnych, i tak samo dla osi rzędnych; dość więc wykreślić część krzywej odpowiadającą wartościom dodatnym na x.



Kiedy x jest mniejszem od a, y jest urojonem; dla $x = \pm$a, $y = 0$; nie ma punktów krzywej między równoległemi do osi rzędnych poprowadzonych przez punkta A i A'. Dla wartości na x wyższych nad a, y jest rzeczywistem i zwiększa się nieograniczenie z x; ma się tym sposobem łuk nieograniczony AM; inne części krzywej wykreślają się przez symetryą.

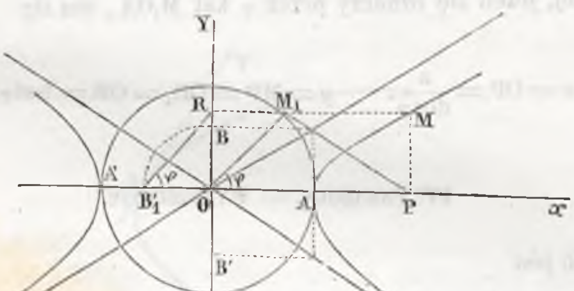
Wykreślenie krzywej odbędzie się tymże samym sposobem jeżeli się przypuści osie pochyłe.

2° Wykreślenie krzywej za pomocą kąta φ.

Osie prostokątne.

Przypomnijmy sobie znaczenie parametru φ dane w n^rze^ [339].

Niech będą a i b osie krzywej; OA = OA' = a, OB = OB' = b. Na osi rzeczywistej AA', jako

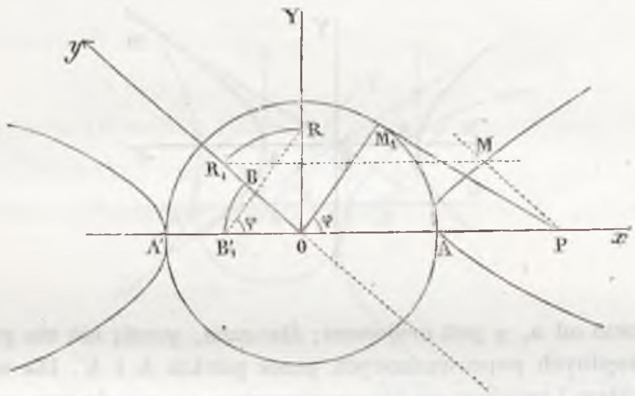


średnicy, zakreślmy koło; weźmy jakikolwiek punkt M_1 na tem kole i poprowadźmy styczną M_1P, któar przedłużymy aż do jej spotkania się w P z Ox. Jeżeli punkt M_1 jest po prawej stronie Oy, weźmiemy na Ox, po lewej stronie O, punkt B'_1 taki że $OB'_1 = b$ (b długość osi urojonej); przez punkt B'_1 poprowadźmy równoległą do OM_1 aż do jej spotkania się w R z OY: przez punkt R nakreśli się równoległą do AA', i przez punkt P prostopadłą do AA'; przecięcie się M tych dwóch prostych będzie punktem hyperboli. Ma się, w rzeczy samej, jeżeli się założy $\widehat{M_1OA} = \varphi$;

$$OP = x = \frac{OM_1}{\operatorname{dos}\varphi} = \frac{a}{\operatorname{dos}\varphi}; \qquad y = MP = OR = b \operatorname{st}\varphi.$$

Osie pochyłe.

Niech będą a i b dwie średnice sprzężone; $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$. Na średnicy rzeczy-



wistej AA', jako średnicy, zakreślmy koło; weźmy jakikolwiek punkt M_1 na tem kole i poprowadźmy styczną M_1P którą przedłużymy aż do jej spotkania się w P z osią Ox. Jeżeli punkt M_1 jest po prawej stronie Oy, weźmiemy na Ox, po lewej stronie O, punkt B'_1 taki że $OB'_1 = b$ (b długość średnicy urojonej); przez punkt B'_1 poprowadźmy równoległą do OM_1 aż do jej spotkania się w R z OY prostopadłą do AA', potem odetnijmy OR na Oy, w OR_1. To wykonawszy, przez punkt R_1 nakreślmy równoległą do Ox, i przez P równoległą do Oy; przecięcie się M tych równoległych będzie punktem hyperboli. W rzeczy samej, jeżeli się oznaczy przez φ kąt $\widehat{M_1OA}$, ma się

$$x = OP = \frac{a}{\operatorname{dos}\varphi}. \qquad y = MP = OR_1 = OR = b \operatorname{st}\varphi.$$

IV° Parabola. — Wykreślenie.

341. Równanie paraboli jest

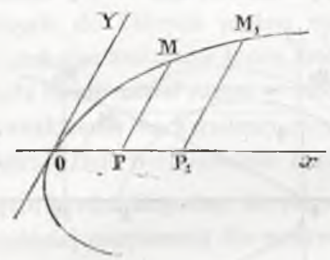
$$\text{(III)} \qquad y^2 - 2px = 0.$$

Jeżeli M i M_1 są dwa punkta krzywej, MP i M_1P_1 rzędne tych punktów, ma się

$$\overline{MP}^2 = 2p.\overline{OP}, \qquad \overline{M_1P_1}^2 = 2p\,\overline{OP_1};$$

zkąd wypada

$$(1) \qquad \frac{\overline{MP}^2}{\overline{OP}} = \frac{\overline{M_1P_1}^2}{\overline{OP_1}}.$$



W paraboli iloraz kwadratu jakiejkolwiek cięciwy przez odległość środka tej cięciwy od końca średnicy odpowiadającej jest stałym.

Odwrotnie : *krzywa taka, że iloraz kwadratu rzędnej przez odległość spodka rzędnej od punktu stałego jest stałym, jest parabolą.*

Weźmy, w rzeczy samej, punkt stały za początek; kierunek rzędnych za oś y; miejsce spodków rzędnych za oś odciętych; ma się według założenia

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{OP}} = \text{stałej} = 2p, \qquad \text{zkąd} \qquad y^2 = 2px;$$

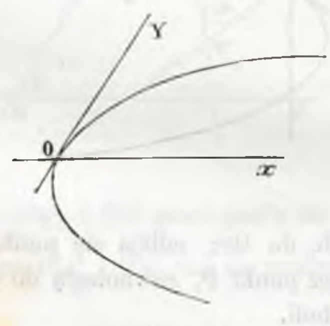
jestto równanie paraboli.

342. Wykreślenie paraboli.

1[sze] Wykreślenie *za pomocą równania*

$$y^2 = 2px, \qquad \text{zkąd} \qquad y = \pm\sqrt{2px}.$$

Aby y było rzeczywistem, będzie potrzeba żeby x było dodatnem; x musi więc zmieniać się



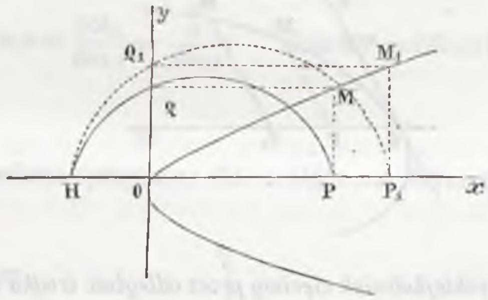
od 0 do $+\infty$. Oś Ox dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do osi y.

Dla $x = 0$, ma się $y = 0$; krzywa jest styczną do osi Oy. Kiedy x zwiększa się, y zwiększa się, i y zwiększa się nieograniczenie z x.

2^{gie} Wykreślenie:

Osie prostokątne.

Weźmy po lewej stronie Oy punkt H taki aby $OH = 2p$. Wybrawszy wtedy punkt dowolny P na Ox, zakreśla się koło na HP jako średnicy; przez punkt Q, gdzie okręg koła przecina oś Oy,



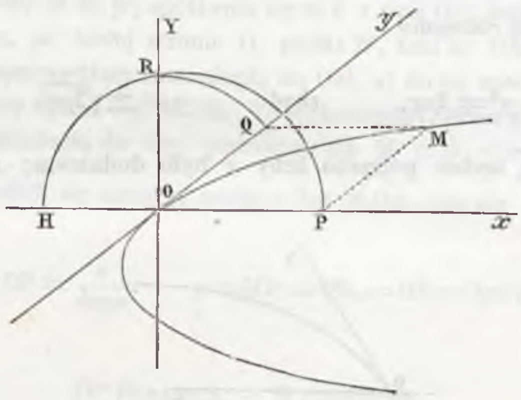
poprowadzi się równoległą do Ox, i przez punkt P prostopadłą do Ox; punkt M, przecięcie się tych dwóch prostych, jest punktem paraboli.

W rzeczy samej, niech będą x i y spółrzędne punktu M, ma się

$$\overline{MP}^2 \quad \text{albo} \quad \overline{OQ}^2 = OH.OP, \quad \text{zkąd} \quad y^2 = 2px.$$

Osie pochyłe.

Weźmy po lewej stronie Oy punkt H taki aby $OH = 2p$. Wybrawszy wtedy punkt dowolny P na Ox, zakreśla się koło na HP jako średnicy; niech będzie R punkt w którym okręg koła spotyka



prostą OY poprowadzoną prostopadle do Ox; odbija się punkt R w Q na Oy; przez punkt Q, prowadzi się równoległą do Ox, i przez punkt P, równoległą do Oy; punkt M, przecięcie się tych dwóch prostych, będzie punktem paraboli.

W rzeczy samej, x i y będąc spółrzędnemi punktu M, ma się

$$\overline{MP}^2 = \overline{OQ}^2 = \overline{OR}^2 = OH.OP, \qquad \text{zkąd} \qquad y^2 = 2px.$$

§ IV. — DYSKUSSYA RÓWNANIA DRUGIEGO STOPNIA PRZEZ ROZŁOŻENIE NA KWADRATY.

343. Jużeśmy, przez wiele metod, uzasadnili klassyfikacyą krzywych drugiego rzędu. W § I, rozklasyfikowaliśmy te krzywe wykreślając je, badając ich kształty. W II § uporządkowaliśmy je szukając kształtów uproszczonych i odrębnych, do których można sprowadzić równanie ogólne drugiego stopnia. Rozklasyfikujemy je teraz szukając kształtów które może wziąć równanie ogólne przez rozłożenie na kwadraty. Ta trzecia metoda bierze udział razem w dwóch pierwszych. Ona trzyma z pierwszą przez sposób rachunku, ponieważ rozłożenie na kwadraty poprzedza rozwiązanie; ona bierze udział w drugiej, gdyż rozłożenie na kwadraty daje bezpośrednio kształty uproszczone.

Metoda którą wyłożymy jest często bardzo dogodną do rozpoznania rodzaju i zmiany krzywej drugiego rzędu; metoda § I jest szczególniej pożyteczną dla wykreślenia tych krzywych.

1° Lemma.

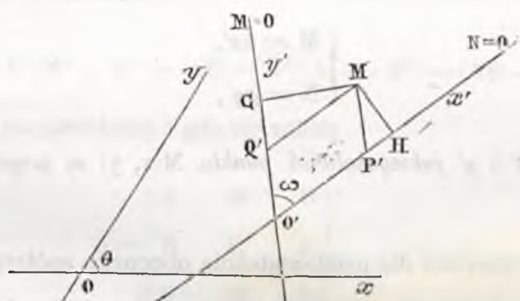
344. Znaleść wzory przekształcenia spółrzędnych, kiedy się daje równania nowych osi.

Niech będą równania, względem dwóch osi $0x$ i $0y$,

$$(1)\qquad \begin{cases} N = Ax + By + C = 0, & O'x', \\ M = A_1x + B_1y + C_1 = 0, & O'y'; \end{cases}$$

dwóch prostych zbiegających się $O'x'$ i $O'y'$. Przypuśćmy że się weźmie te dwie proste za osie, i szukajmy nowych spółrzędnych (x', y') jakiegokolwiek punktu M w funkcyi jego dawnych spółrzędnych (x, y).

Przez punkt M poprowadźmy MQ' i MP' względnie równoległe do $O'x'$ i Oy'; potem spuśćmy MG



prostopadłą na prostą $M = 0$ albo $O'y'$, i MH prostopadłą na prostą $N = 0$ albo $O'x'$.

Oznaczmy przez ω kąt nowych osi $O'x'$ i $O'y'$, ma się według nru [70]

$$(2)\qquad \text{si}\,\omega = \frac{(AB_1 - A_1B)\,\text{wst}\,\theta}{AA_1 + BB_1 - (AB_1 + A_1B)\,\text{dos}\,\theta},$$

θ będąc kątem dawnych osi.

Teraz trójkąty prostokątne MGQ' i MP'H nam dają

$$(1^\circ) \qquad \overline{\mathrm{MG}} = \overline{\mathrm{MQ}'}.\mathrm{wst}\,\omega, \qquad \overline{\mathrm{MH}} = \overline{\mathrm{MP}'}.\mathrm{wst}\,\omega;$$

otóż ma się według n^ru [76]

$$(2^\circ) \quad \begin{cases} \overline{\mathrm{MG}} = \dfrac{(\mathrm{A}_1x + \mathrm{B}_1y + \mathrm{C}_1)\mathrm{wst}\,\theta}{\pm\sqrt{\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{B}_1^2 - 2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{dos}\,\theta}} = \dfrac{\mathrm{M}\,\mathrm{wst}\,\theta}{\pm\sqrt{\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{B}_1^2 - 2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{dos}\,\theta}}, \\[2ex] \overline{\mathrm{MH}} = \dfrac{(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C})\mathrm{wst}\,\theta}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\,\mathrm{dos}\,\theta}} = \dfrac{\mathrm{N}\,\mathrm{wst}\,\theta}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\,\mathrm{dos}\,\theta}}. \end{cases}$$

Znaki pierwiastków we wzorach (2°) wyznaczą się według przepisu n^ru [76], gdy się raz ustali części dodatne nowych osi $\mathrm{O}'x'$, $\mathrm{O}'y'$; ten wybór oznaczy jednocześnie wartość którą należy przyjąć dla kąta ω dwóch prostych, to jest oznaczy kąt ostry albo kąt rozwarty.

Jeżeli założymy wtedy

$$h = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{B}_1^2 - 2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{dos}\,\theta}.\mathrm{wst}\,\omega}{\mathrm{wst}\,\theta}$$

$$g = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\,\mathrm{dos}\,\theta}.\mathrm{wst}\,\omega}{\mathrm{wst}\,\theta},$$

związki (1°) nam dadzą

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}_1x + \mathrm{B}_1y + \mathrm{C}_1 = hx', \\ \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = gy'; \end{cases}$$

albo

$$(4\ bis) \qquad \begin{cases} \mathrm{M} = hx', \\ \mathrm{N} = gy', \end{cases}$$

to jest *że nowe spółrzędne* x' i y' *jakiegokolwiek punktu* M(x, y) *są proporcyonalne funkcyom linijnym* M i N.

Związki (4) albo (4 *bis*) są wzorami dla przekształcenia obecnego spółrzędnych.

345. To lemma uzasadniwszy, weźmy równanie ogólne krzywych drugiego rzędu

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0.$$

Otrzymamy do rozebrania dwa założenia następujące:

1° Spółczynniki kwadratów nie są zerami razem;

2° Spółczynniki kwadratów są zerami razem.

IIº 1sze Założenie : Spółczynniki kwadratów nie są zerami razem.

346. Przypuśćmy spółczynnik A, na przykład, różnym od zera; można przyjąć że się zrobiło dodatnym jakikolwiek ze spółczynników A albo C, spółczynnik A, na przykład, który jest przypuszczonym różnym od zera.

Mnóżmy przez A obie strony równania (I), i uporządkujmy względem potęg x, ma się

$$A^2x^2 + 2Ax(By + D) + ACy^2 + 2EAy + AF = 0;$$

otóż dwa pierwsze wyrazy tworzą część kwadratu wyrażenia

$$M = Ax + By + D; \tag{1}$$

tak że równanie poprzedzające będzie się mogło napisać, odejmując kwadrat $(By + D)$:

$$M^2 + (AC - B^2)y^2 + 2(AE - BD)y + AF - D^2 = 0. \tag{II}$$

347. To pierwsze przekształcenie mając wykonanem, spostrzegamy teraz dwa przypadki do rozebrania : spółczynnik na y^2 jest różnym od zera; spółczynnik na y^2 jest zerem.

1szy Przypadek $AC - B^2 \gtrless 0.$

Mnóżmy obie strony równania (II) przez $(AC - B^2)$ i utwórzmy kwadrat względem y; założywszy

$$N = (AC - B^2)y + (AE - BD), \tag{2}$$

równanie (II) przedstawi się pod kształtem :

$$(AC - B^2)M^2 + N^2 + (AF - B^2)(AC - B^2) - (AE - BD)^2 = 0. \tag{III}$$

Otóż jeżeli się rozwinie wyraz niezależny i gdy się założy

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \tag{3}$$

sprawdza się łatwo że

$$(AF - B^2)(AC - B^2) - (AE - BD)^2 = A.\Delta. \tag{4}$$

Równanie (III) będzie mogło się odtąd napisać

$$(AC - B^2)M^2 + N^2 + A\Delta = 0. \tag{III bis}$$

Otóż funkcye M i N zrównane z zerem przedstawiają dwie proste które się przecinają; gdyż prosta

$N = 0$ jest równoległą do osi Ox, i $M = 0$ przedstawia prostą która nie może być równoległą do Ox, ponieważ A, przez założenie, jest różnym od zera. Przeto możemy wziąć te dwie proste za osie spółrzędnych; i równanie (III *bis*) stanie się, według lemmu uzasadnionego

$$h^2(AC - B^2).x'^2 + g^2.y'^2 + A\Delta = 0.$$

Lecz dyskussya tego ostatniego równania jest widocznie tąż samą jak dyskussya równania (III *bis*), w którem uważałoby się M i N jako spółrzędne jakiegokolwiek punktu krzywej względem nowych osi. Zachowamy więc równanie (III *bis*), i rozbierzemy różne kształty jakie może wziąć to równanie.

1° $B^2 - AC < 0$.

Wtenczas A i C są koniecznie tegoż samego znaku; ponieważ jeden z nich był zrobionym dodatnym, A jest więc ilością dodatną. Według tego

Jeżeli $\Delta < 0$, równanie (III *bis*) będzie mogło się sprowadzić do kształtu

$$M^2 + N^2 = 1,$$

równanie przedstawiające elipsę rzeczywistą.

Jeżeli $\Delta = 0$, równanie (III *bis*) sprowadzi się do kształtu

$$M^2 + N^2 = 0,$$

to przedstawia punkt albo dwie proste urojone.

Jeżeli $\Delta > 0$, równanie (III *bis*) będzie się mogło sprowadzić do kształtu

$$M^2 + N^2 + 1 = 0,$$

równanie które przedstawia elipsę urojoną.

2° $B^2 - AC > 0$.

Jeżeli $\Delta \gtrless 0$, równanie (III *bis*) bierze jeden albo drugi z kształtów

$$M^2 - N^2 = \pm 1;$$

to przedstawia, w obu przypadkach, hyperbolę.

Jeżeli $\Delta = 0$, równanie (III *bis*) sprowadzi się do kształtu

$$M^2 - N^2 = 0;$$

równanie które przedstawia dwie proste zbiegające się.

348. 2gi PRZYPADEK $\qquad AC - B^2 = 0.$

Dla dojścia do równania (III), przypuściliśmy $(B^2 - AC)$ różnem od zera, nie można więc posługiwać się więcej tem równaniem w przypadku obecnym.

Wróćmy wtedy do równania (II), i wprowadźmy założenie obecne, ono staje się

$$\text{(IV)} \qquad M^2 + 2(AE - BD)y + AF - D^2 = 0.$$

Równość (4) n^ru [347] daje tu

$$\text{(5)} \qquad (AE - BD)^2 = - A.\Delta.$$

1° Jeżeli $\Delta \gtrless 0$, równanie (IV) położy się pod kształtem

$$M^2 + N = 0;$$

jestto równanie paraboli.

2° Jeżeli $\Delta = 0$, równanie (IV) staje się

$$M^2 + (AF - D^2) = 0;$$

to równanie przedstawia

dwie proste równoległe rzeczywiste. . . . . . . jeżeli $AF - D^2 < 0$,

dwie proste zlewające się . . . . jeżeli $AF - D^2 = 0$,

dwie proste równoległe urojone . . . . jeżeli $AF - D^2 > 0$.

Kształty odpowiadające tym trzem przypadkom są

$$M^2 = 1, \qquad M^2 = 0, \qquad M^2 = -1.$$

III° 2gie Założenie: Spółczynniki kwadratów są zerami razem.

349. W założeniu obecnem ma się

$$\text{(6)} \qquad A = 0, \qquad C = 0;$$

równanie (I) krzywej sprowadza się więc do

$$\text{(V)} \qquad Bxy + Dx + Ey + \frac{F}{2} = 0.$$

1szy Przypadek $\qquad B \gtrless 0.$

Kładąc jakąkolwiek ze zmiennych na czynnik, x na przykład, widzimy łatwo że równanie (5) może się napisać

$$(By + D)\left(x + \frac{E}{B}\right) + \frac{FB - 2DE}{2B} = 0.$$

45

Otóż w przypadku obecnym ma się

$$(7) \qquad \Delta = -B(FB - 2DE);$$

równanie poprzedzające stanie się więc

$$(\text{VI}) \qquad MN = \frac{\Delta}{2B^2},$$

założywszy

$$\begin{cases} M = By + D, \\ N = x + \dfrac{E}{B^2}; \end{cases}$$

można jeszcze to napisać

$$(\text{VI } bis) \qquad \left(\frac{M+N}{2}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right)^2 = \frac{\Delta}{2B^2}.$$

Dwie proste $\frac{M+N}{2} = 0$ i $\frac{M-N}{2} = 0$ nie są równoległe; równanie (VI *bis*) sprowadza się więc do jakiegokolwiek z kształtów n^ru [348], 2°

Jeżeli $\Delta \gtrless 0$, ma się hyberbolę.

Jeżeli $\Delta = 0$, ma się dwie proste rzeczywiste które się przecinają.

350. 2^gi Przypadek $\qquad B = 0.$

Równanie (V) zrobione jednorodnem staje się

$$(\text{VII}) \qquad z\left(Dx + Ey + \frac{F}{2}\right) = 0,$$

wprowadzając założenie $B = 0$ zrobiwszy je uprzednio jednorodnem.

W przypadku obecnym, ma się oczywiście $\Delta = 0$ i $B^2 - AC = 0$; wreszcie równanie (VII) przedstawia dwie proste z których jedna jest w nieskończoności; można je uważać jako przedstawiające układ dwóch prostych równoległych.

IV° Tablica różnych kształtów które może wziąć równanie ogólne drugiego stopnia.

351. Litery M i N przedstawiają funkcye linijne na x i y;

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

jest równaniem ogólnem krzywej.

1° $B^2 - AC < 0$:
- $M^2 + N^2 = 1$, Elipsa rzeczywista................ wtedy : $\Delta < 0$,
- $M^2 + N^2 = 0$, Elipsa znikająca albo punkt........ wtedy : $\Delta = 0$,
- $M^2 + N^2 = -1$, Elipsa urojona.................... wtedy : $\Delta > 0$.

2 $B^2 - AC > 0$:
- $M^2 - N = 1$, albo $MN = 1$, Hyperbola.............................. wtedy : $\Delta \gtrless 0$,
- $M^2 - N^2 = 0$, albo $MN = 0$, proste rzeczywiste niezbiegające się....... wtedy : $\Delta = 0$.

3° $B^2 - AC = 0$:
- $M^2 + N = 0$, Parabola.............................. wtedy : $\Delta \gtrless 0$.
- $M^2 = 1$, proste rzeczywiste równoległe........
- $M^2 = 0$, proste zlane..........................
- $M^2 = -1$, proste równoległe urojone...........

(dla trzech ostatnich) wtedy : $\Delta = 0$.

Oznaczyło się przez Δ wyrażenie

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

§ V. — RÓWNANIE KRZYWYCH 2giego RZĘDU W SPÓŁRZĘDNYCH TRZYLINIJNYCH.

I° Kształt równania w spółrzędnych trzylinijnych.

352. Wyprowadzimy równanie, w spółrzędnych trzylinijnych, krzywych drugiego rzędu równania danego w spółrzędnych kartezyańskich

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

Wzory ogólne przekształcenia są według nru [91]

$$\begin{cases} X = ax + a_1y + a_2, \\ Y = bx + b_1y + b^2, \\ Z = cx + c_1y + c_2; \end{cases} \tag{2}$$

proste $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, są trzy proste niezbiegające się i tworzą trójkąt odniesienia.

Należy dowieść że równanie (1) *może się zawsze położyć pod kształtem*

$$(3)\qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0,$$

albo lepiej że równanie (3) *może przedstawiać wszystkie krzywe drugiego rzędu.*

W tym celu, zastąpmy X, Y, Z, przez wartości (2) w równaniu (3), i zidentyfikujmy równanie otrzymane z równaniem (1), to jest napiszmy że te same spółczynniki tychże samych potęg zmiennych są proporcyonalne.

Oznaczywszy przez λ wartość wspólną stosunków, znajduje się:

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{ll}
1^\circ & A_{11}a^2 + A_{22}b^2 + A_{33}c^2 + 2A_{12}ab + 2A_{13}ac + 2A_{23}bc = \lambda A,\\
2^\circ & A_{11}a_1^2 + A_{22}b_1^2 + A_{33}c_1^2 + 2A_{12}a_1b_1 + 2A_{13}a_1c_1 + 2A_{23}b_1c_1 = \lambda C,\\
3^\circ & A_{11}a_2^2 + A_{22}b_2^2 + A_{33}c_2^2 + 2A_{12}a_2b_2 + 2A_{13}a_2c_2 + 2A_{23}b_2c_2 = \lambda F;\\
4^\circ & A_{11}aa_1 + A_{22}bb_1 + A_{33}cc_1 + A_{12}(ab_1 + a_1b) + A_{13}(ac_1 + a_1c) + A_{23}(bc_1 + b_1c) = \lambda B,\\
5^\circ & A_{11}aa_2 + A_{22}bb_2 + A_{33}cc_2 + A_{12}(ab_2 + a_2b) + A_{13}(ac_2 + a_2c) + A_{23}(bc_2 + b_2c) = \lambda D,\\
6^\circ & A_{11}a_1a_2 + A_{22}b_1b_2 + A_{33}c_1c_2 + A_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + A_{13}(a_1c_2 + a_2c_1) + A_{23}(b_1c_2 + b_2c_1) = \lambda E.
\end{array}\right.$$

Idzie o wyciągnienie z tych równań spółczynników nieznanych A_{rs} i o sprawdzenie że ich wartości są *skończone*.

W tym celu, założymy

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l}
A_{11}a + A_{12}b + A_{13}c = M_{11},\\
A_{21}a + A_{22}b + A_{23}c = M_{12},\\
A_{31}a + A_{32}b + A_{33}c = M_{13},
\end{array}\right.\quad
\left\{\begin{array}{l}
A_{11}a_1 + A_{12}b_1 + A_{13}c_1 = M_{21},\\
A_{21}a_1 + A_{22}b_1 + A_{23}c_1 = M_{22},\\
A_{31}a_1 + A_{32}b_1 + A_{33}c_1 = M_{23},
\end{array}\right.\quad
\left\{\begin{array}{l}
A_{11}a_2 + A_{12}b_2 + A_{13}c_2 = M_{31},\\
A_{21}a_2 + A_{22}b_2 + A_{23}c_2 = M_{32},\\
A_{31}a_2 + A_{32}b_2 + A_{33}c_2 = M_{33}.
\end{array}\right.$$

Równania (4) napiszą się wtedy

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{ll}
1^\circ & aM_{11} + bM_{12} + cM_{13} = \lambda A,\\
2^\circ & a_1M_{21} + b_1M_{22} + c_1M_{23} = \lambda C,\\
3^\circ & a_2M_{31} + b_2M_{32} + c_2M_{33} = \lambda F;\\
4^\circ & a_1M_{11} + b_1M_{12} + c_1M_{13} = aM_{21} + bM_{22} + cM_{23} = \lambda B,\\
5^\circ & a_2M_{11} + b_2M_{12} + c_2M_{13} = aM_{31} + bM_{32} + cM_{33} = \lambda D,\\
6^\circ & a_1M_{31} + b_1M_{32} + c_1M_{33} = a_2M_{21} + b_2M_{22} + c_2M_{23} = \lambda E.
\end{array}\right.$$

Obliczymy naprzód ilości M_{rs}.

Oznaczymy przez P wyznacznik podstawienia (2), to jest

$$(7)\qquad P = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix};$$

i przedstawimy przez α, β, γ; α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2, etc.... wyznaczniki częściowe co do wartości i co do znaku, tak aby

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha = +\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, & \alpha_1 = -\begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix}, & \alpha_2 = +\begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}, \\ \beta = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, & \beta_1 = +\begin{vmatrix} a & a_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix}, & \text{etc.} \ldots\ldots\ldots \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots & \text{etc.} \ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

Jeżeli teraz uważymy równania (1°), (4°), (5°) grupy (6), to jest:

$$\left\{\begin{array}{l} aM_{11} + bM_{12} + cM_{13} = \lambda A, \\ a_1M_{11} + b_1M_{12} + c_1M_{13} = \lambda B, \\ a_2M_{11} + b_2M_{12} + c_2M_{13} = \lambda D; \end{array}\right.$$

wyciąga się z niej; rozwiązując względem M_{11}, M_{12}, M_{13}

$$(9,\ 1^\circ)\quad \left\{\begin{array}{l} PM_{11} = \lambda(\alpha A + \alpha_1 B + \alpha_2 D), \\ PM_{12} = \lambda(\beta A + \beta_1 B + \beta_2 D), \\ PM_{13} = \lambda(\gamma A + \gamma_1 B + \gamma_2 D). \end{array}\right.$$

Otrzyma się podobnież biorąc kolejno grupy 2°, 4°, 6°; 3°, 5°, 6°:

$$(9,\ 2^\circ)\quad \left\{\begin{array}{l} PM_{21} = \lambda(\alpha B + \alpha_1 C + \alpha_2 E), \\ PM_{22} = \lambda(\beta B + \beta_1 C + \beta_2 E), \\ PM_{23} = \lambda(\gamma B + \gamma_1 C + \gamma_2 E); \end{array}\right.$$

$$(9,\ 3^\circ)\quad \left\{\begin{array}{l} PM_{31} = \lambda(\alpha D + \alpha_1 E + \alpha_2 F), \\ PM_{32} = \lambda(\beta D + \beta_1 E + \beta_2 F), \\ PM_{33} = \lambda(\gamma D + \gamma_1 E + \gamma_2 F). \end{array}\right.$$

Te wartośc wyznaczywszy, weźmy pierwsze równania grup (9, 1°), (9, 2°), (9, 3°) i zastąpmy y ilości M_{rs} przez ich wartości (5), ma się trzy równania

$$\left\{\begin{array}{l} P(A_{11}a + A_{12}b + A_{13}c) = \lambda(\alpha A + \alpha_1 B + \alpha_2 D), \\ P(A_{11}a_1 + A_{12}b_1 + A_{13}c_1) = \lambda(\alpha B + \alpha_1 C + \alpha_2 E), \\ P(A_{11}a_2 + A_{12}b_2 + A_{13}c_2) = \lambda(\alpha D + \alpha_1 E + \alpha_2 F). \end{array}\right.$$

Jeżeli się je pomnoży względnie przez α, α_1, α_2; potem przez β, β_1, β_2, i nakoniec przez γ, γ_1, γ_2, i gdy się doda znajdzie się

$$
(10)\quad \begin{cases} P^2A_{11} = \lambda(A\alpha^2 + C\alpha_1^2 + F\alpha_2^2 + 2B\alpha\alpha_1 + 2D\alpha\alpha_2 + 2E\alpha_1\alpha_2); \\ P^2A_{12} = \lambda[A\alpha\beta + C\alpha_1\beta_1 + F\alpha_2\beta_2 + B(\alpha_1\beta + \alpha\beta_1) + D(\alpha_2\beta + \alpha\beta_2) + E(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)]; \\ \text{etc.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases}
$$

Otrzyma się inne wartości przez rachunek podobny.

Tak więc, *mając dane równanie, we spółrzędnych kartezyańskich, jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu,*

$$
\text{(I)}\qquad f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0;
$$

jeżeli się odniesie tę krzywą do jakiegokolwiek trójkąta odniesienia określonego przez proste

$$
X = ax + a_1y + a_2z = 0,
$$

$$
Y = bx + b_1y + b_2z = 0,
$$

$$
Z = cx + c_1y + c_2z = 0;
$$

równaniem krzywej będzie

$$
\text{(II)}\qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0;
$$

i spółczynniki tego równania będą miały wartości następujące :

$$
P^2.A_{11} = \lambda f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2), \qquad P^2.A_{22} = \lambda f(\beta, \beta_1, \beta_2), \qquad P^2.A_{33} = \lambda f(\gamma, \gamma_1, \gamma_2),
$$

$$
P^2.A_{12} = \lambda[A\alpha\beta + C\alpha_1\beta_1 + F\alpha_2\beta_2 + B(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta) + D(\alpha_2\beta + \alpha\beta_2) + E(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)],
$$

$$
P^2.A_{13} = \lambda[A\alpha\gamma + C\alpha_1\gamma_1 + F\alpha_2\beta_2 + B(\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma) + D(\alpha_2\gamma + \alpha\gamma_2) + E(\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2)],
$$

$$
P^2.A_{23} = \lambda[A\delta\gamma + C\beta_1\gamma_1 + F\beta_2\gamma_2 + B(\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma) + D(\beta_2\gamma + \beta\gamma_2) + E(\beta_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2)].
$$

Ilości P, α, β.... mają wartości określone przez równości (7) i (8).

Trzy proste $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ nie będąc zbiegającemi się, wyznacznik P jest różnym od zera; wartości na A_{rs} są więc skończone.

Tak więc *równaniem ogólnem krzywych drugiego rzędu, we spółrzędnych trzylinijnych, jest*

$$
\text{(IV)}\qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0.
$$

Przedstawiamy to dowodzenie zwłaszcza jako ćwiczenie rachunku; wyciągniemy przecież z niego niektóre wnioski.

Uwaga. Rachunek byłby daleko łatwiejszym jeżelibyśmy chcieli przestać na wykazaniu że równanie (1) krzywych drugiego rzędu bierze kształt (3) kiedy się je odnosi do trójkąta określonego przez proste (2) nie zbiegające się.

Byłoby dość, w tym celu, rozwiązać równanie (2) względem x i y, co daje mając wzgląd na związki (8) :

$$x = \frac{\alpha X + 6Y + \gamma Z}{\alpha_2 X + 6_2 Y + \gamma_2 Z}, \qquad y = \frac{\alpha_1 X + 6_1 Y + \gamma_1 Z}{\alpha_2 X + 6_2 Y + \gamma_2 Z},$$

i podstawić te wartości w równaniu (1).

Lecz rachunek któryśmy rozwinęli wystawia na widok ten fakt ważny, że spółczynniki A_{rs} równania nie mają między sobą żadnej zależności, jeżeli równanie (1) jest przypuszczone ogólnem. Wynika, w rzeczy samej, z wartości (III), że wyznacznik układu równań (4), które wyznaczają sześć nieznanych A_{rs}, jest równym P^2; otóż, według założenia przyjętego, ten wyznacznik nie jest zerem, więc ilości A_{rs} nie mogą się przedstawiać pod kształtem nieoznaczonym; innemi słowy, one nie są połączone żadnym związkiem, w przypadku ogólnym.

353. Widzieliśmy że równanie ogólne, we spółrzędnych trzylinijnych, krzywych drugiego rzędu jest

$$(1) \qquad F(X, Y, Z) = A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0.$$

Poniżej wyłożymy metody proste, które nam pozwolą rozpoznać rodzaj i rozmaitość krzywych przedstawionych przez równanie (1); na chwilę, przestaniemy na szukaniu za pomocą rachunków poprzedzających, warunków aby równanie (1) przedstawiało jakikolwiek układ dwóch prostych; ten warunek zależy jedynie od spółczynników równania a bynajmniej nie od elementów trójkąta do którego krzywa jest odniesioną.

Dla rozwiązania pytania, przypomnijmy sobie że warunkiem koniecznym i dostatecznym aby równanie (1) n^{ru} [352] przedstawiało jakikolwiek układ dwóch prostych jest na mocy n^{ru} [315] albo [351]

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0;$$

wyraźmy ten wyznacznik w funkcyi spółczynników A_{rs} równania (3)

Związki (5) n^{ru} [352] dają, według twierdzenia znanego nad mnożeniem wyznaczników :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}.$$

Z drugiej strony związki (6) n^{ru} [352] tworzą trzy grupy podobne grupom (5) i dają, przez zastosowanie tegoż samego twierdzenia,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Ztąd się wyciąga mnożąc stronami dwie ostatnie równości

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 = \lambda^3 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

widocznie będzie można przypuścić w tej równości $\lambda = 1$.

Ze związku (2) wypada że :

Warunkiem koniecznym i dostatecznym aby równanie (1) *przedstawiało jakikolwiek układ dwóch prostych jest*

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dwie proste będą urojone, jeżeli krzywa przedstawiona przez równanie (1) należy do rodzaju *elipsy; rzeczywiste*, jeżeli ona należy do rodzaju *hyperboli; równoległe*, jeżeli ona należy do rodzaju *paraboli*.

II° Rozłożenie na kwadraty.

354. Mając dane równanie jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu, w spółrzędnych trzylinijnych,

$$(1)\qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0,$$

można zastosować do tego równania sposób rozłożenia wyłożony w § IV, n^ru [343] i następnych.

Przedstawmy przez Δ dyskryminant pierwszej strony, tak że

$$(2)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Prowadząc rachunek jak to było wskazanem w § IV n^ru [343], etc,.... dowiedzie się podań następujących które tylko wysłowiemy :

1° Jeżeli $\Delta \gtrless 0$, równanie będzie się mogło sprowadzić do jakiegokolwiek z kształtów

$$(3)\qquad M^2 \pm N^2 \pm P^2 = 0,$$

M, N, P będąc funkcyami linijnemi i jednorodnemi na X, Y, Z. Równanie (3) będzie przedstawiać wtedy jakąkolwiek z krzywych właściwie nazwanych drugiego rzędu : elipsę, hyperbolę, albo parabolę. Krzywa będzie, jak to zobaczymy poniżej, *sprzężona* względem trójkąta $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$; albo, jeżeli to nam się podoba, ten trójkąt będzie *sprzężonym* względem krzywej.

2° Jeżeli $\Delta = 0$, równanie będzie się mogło sprowadzić do jakiegokolwiek z kształtów

$$M^2 \pm N^2 = 0; \tag{4}$$

krzywa będzie się składać z jakiegokolwiek układu prostych rzeczywistych albo urojonych; te proste będą mogły być równoległemi.

3° Jeżeli *wyznaczniki częściowe* na Δ są zerami, równanie będzie mogło się sprowadzić do kształtu

$$M^2 = 0; \tag{5}$$

krzywa składa się z dwóch prostych zlewających się w jedną.

Twierdzenia odwrotne tych podań są prawdziwe; one są wnioskiem koniecznym analizy prowadzącej do twierdzeń wysłowionych.

Równania (3), (4) i (5) dają jedyne kształty *uproszczone* możebne, do których może się sprowadzić równanie ogólne krzywych drugiego rzędu w spółrzędnych trzylinijnych.

ROZDZIAŁ II.

KLASSYFIKACYA KRZYWYCH DRUGIEJ KLASSY.

§ 1. — SPÓŁRZĘDNE (DWULINIJNE) u, v.

355. Równanie ogólne krzywych 2giej klassy jest

$$(1)\qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0;$$

w rzeczy samej, wszelka krzywa 2giej klassy jest taką, że przez jakikolwiek punkt płaszczyzny nie można poprowadzić jak tylko dwie styczne do tej krzywej; otóż równanie jakiegokolwiek punktu jest 1go stopnia w u i v; równanie jakiejkolwiek krzywej 2giej klassy jest więc drugiego stopnia względem zmiennych u i v.

Zobaczymy w badaniu stycznych, że krzywe 2giej klassy są jednocześnie krzywemi drugiego rzędu; badanie punktów w nieskończoności, jak to zobaczymy poniżej, pozwoli nam rozróżnić rodzaj tych krzywych.

1° Przekształcenie spółrzędnych.

356. Można także, jak w rozdziale poprzedzającym, wykonać uproszczenie równania (1) przez przekształcenie spółrzędnych; nie wejdziemy we wszystkie szczegóły tego rachunku; przecież damy poznać *wzory przekształcenia w przypadku spółrzędnych styczneczkowych.*

Niech będzie równanie nowego początku O′

$$(1)\qquad ux_0 + vy_0 - 1 = 0;$$

jego spółrzędnemi będą x_0 i y_0 według nru [111]. Oznaczmy przez α i β kąty nowych osi $O'x'$ i $O'y$ z dawną osią Ox.

Przypomnijmy sobie naprzód wzory przekształcenia nru [29] dla spółrzędnych kartezyańskich;

x i y będąc spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu w dawnym układzie, x' i y' będąc spółrzędnemi tegoż samego punktu w nowym układzie, ma się

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{x'\text{wst}(\theta - \alpha) + y'\text{wst}(\theta - \epsilon)}{\text{wst}\theta}, \\[2ex] y = y_0 + \dfrac{x'\text{wst}\alpha + y'\text{wst}\epsilon}{\text{wst}\theta}; \end{cases}$$

a dla *wzorów odwrotnych*

$$(3)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{(x - x_0)\text{wst}\epsilon - (y - y_0)\text{wst}(\theta - \epsilon)}{\text{wst}\theta'}, \\[2ex] y' = \dfrac{-(x - x_0)\text{wst}\alpha + (y - y_0)\text{wst}(\theta - \alpha)}{\text{wst}\theta'}, \end{cases} \qquad \text{gdzie} \qquad \theta' = \epsilon - \alpha;$$

θ jest kąt osi pierwotnych, θ' kąt nowych osi.

To przypuściwszy, niech będą u i v spółrzędnemi jakiejkolwiek prostej w układzie pierwotnym; a u' i v' spółrzędnemi tejże samej prostej w nowym, równaniem tej prostej będzie:

$$(4)\qquad \text{w } 1^{\text{szym}} \text{ układzie:} \quad ux + vy - 1 = 0,$$

$$(5)\qquad \text{w } 2^{\text{gim}} \text{ układzie:} \quad u'x' + v'y' - 1 = 0.$$

Podstawmy wartości (2) w równaniu (4), i zidentyfikujmy równanie tym sposobem otrzymane z równaniem (5), znajduje się

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} u' = -\dfrac{u\,\text{wst}(\theta - \alpha) + v\,\text{wst}\alpha}{(ux_0 + vy_0 - 1)\text{wst}\theta}, \\[2ex] v' = -\dfrac{u\,\text{wst}(\theta - \epsilon) + v\,\text{wst}\epsilon}{(ux_0 + vy_0 - 1)\text{wst}\theta}. \end{cases}$$

Podstawmy podobnież wartości (3) w równaniu (5) i zidentyfikujmy równanie tym sposobem otrzymane z równaniem (4); potem uważmy, że oznaczywszy przez x'_0, y'_0 spółrzędne początku dawnego względem nowych osi; ma się według wzorów (3)

$$(6)\qquad \begin{cases} x'_0\text{wst}\theta' = -x_0\text{wst}\epsilon + y_0\text{wst}(\theta - \epsilon), \\ y'_0\text{wst}\theta' = +x_0\text{wst}\alpha - y_0\text{wst}(\theta - \alpha), \end{cases} \qquad \text{w których} \qquad \theta' = \epsilon - \alpha;$$

znajdzie się wtedy

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} u = \dfrac{-u'\text{wst}\epsilon + v'\text{wst}\alpha}{(u'x'_0 + v'y'_0 - 1)\text{wst}\theta'}, \\[2ex] v = \dfrac{u'\text{wst}(\theta - \epsilon) - v'\text{wst}(\theta - \alpha)}{(u'x'_0 + v'y'_0 - 1)\text{wst}\theta'}. \end{cases}$$

Związki (I) *i* (II) *są wzorami przekształcenia w układzie spółrzędnych styczneczkowych.*

357. Takiemi są wzory za pomocą których można wykonać uproszczenie równania ogólnego krzywych 2giej klassy :

$$(1)\qquad \mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}uv + \mathrm{C}v^2 + 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{E}v + \mathrm{F} = 0.$$

Przez wzory (II), to równanie będzie przekształconem na następujące :

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} &\mathrm{A}[-u'\,\mathrm{wst}\,\varepsilon+v'\,\mathrm{wst}\,\alpha]^2+2\mathrm{B}[-u'\,\mathrm{wst}\,\varepsilon+v'\,\mathrm{wst}\,\alpha][u'\,\mathrm{wst}(\theta-\varepsilon)-v'\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)]+\mathrm{C}[u'\,\mathrm{wst}(\theta-\varepsilon)-v'\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)]^2\\ &+2\mathrm{B}[-u'\,\mathrm{wst}\,\varepsilon+v'\,\mathrm{wst}\,\alpha][u'_0x'_0+v'y'_0-1]\,\mathrm{wst}\,\theta'+2\mathrm{E}[u'\,\mathrm{wst}(\theta-\varepsilon)-v'\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)][u'x'_0+v'y'_0-1]\,\mathrm{wst}\,\theta'\\ &+\mathrm{F}(u'x'_0+v'y'_0-1)^2\,\mathrm{wst}^2\theta' \end{aligned}\right\} = 0.$$

Uważmy naprzód że nowy wyraz stały F′ jest równym dawnemu pomnożonemu przez $\mathrm{wst}^2\theta'$, ma się tym sposobem

$$(3)\qquad \mathrm{F}' = \mathrm{F}\,\mathrm{wst}^2\theta'.$$

Aby więc można było kierować tem roztrząsaniem będzie potrzeba rozróżnić dwa przypadki : wyraz niezależny jest różnym od zera, wyraz niezależny jest zerem.

Kiedy wyraz niezależny nie jest zerem, można znieść wyrazy 1go stopnia i iloczyn uv ze zmiennych; i równanie (1) sprowadzi się do jakiegokolwiek z kształtów następujących :

$$(1^\circ)\qquad \mathrm{A}'u'^2 + \mathrm{C}'v'^2 = 1,$$

$$(2^\circ)\qquad \mathrm{A}'u'^2 = 1.$$

Kiedy wyraz niezależny jest zerem nie można ogólnie znieść wyrazów 1go stopnia, i równanie (1) będzie mogło się sprowadzić do jakiegokolwiek z kształtów następujących

$$(3^\circ)\qquad \mathrm{A}'u'^2 + 2\mathrm{D}'v' = 0,$$

$$(4^\circ)\qquad \mathrm{A}'u'^2 = 0,$$

$$(5^\circ)\qquad u'v' = 0$$

Jest jeden tylko przypadek w którym te ostatnie uproszczenia nie będą mogły się wykonać, ten przypadek się zdarzy gdy się będzie miało razem F = 0, D = 0, E = 0; równanie otrzyma wtedy kształt

$$(6^\circ)\qquad \mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}uv + \mathrm{C}v^2 = 0.$$

258. Wskażmy różne krzywe przedstawione przez te kształty uproszczone.

Równanie (1°) przedstawia *elipsę* albo *hyperbolę;* krzywa, w rzeczy samej, nie jest styczną do prostej w nieskończoności ($u' = 0$, $v' = 0$), stosując się w tem wszystkiem do *uwagi* nru [331].

Równanie (2°) *dwa punkta* na osi $\mathrm{O}'x'$.

Równanie (3°) przedstawia *parabolę*, gdyż ta krzywa jest styczną do prostej w nieskończoności ($u' = 0,\ v' = 0$).

Równanie (4°) przedstawia *dwa punkta przystające* do siebie w nieskończoności na osi $O'x'$.

Równanie (5°) przedstawia *dwa punkta*, jeden jest początkiem spółrzędnych, drugi jest w nieskończoności na osi $O'x'$.

Równanie (6°) przedstawia *dwa punkta w nieskończoności* na mocy n^{ru} [115].

359. Ogólnie, równanie (1) n^{ru} [357] przedstawi dwa punkta, gdy się ma

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0;$$

ten warunek jest konieczny i dostateczny; jestto, w rzeczy samej, warunkiem koniecznym i dostatecznym n^{ru} [351] aby pierwsza strona równania dała się rozkładać na iloczyn dwóch czynników linijnych, to jest aby równanie sprowadzało się do kształtu

$$(au + bv + c)(a_1u + b_1v + c_1) = 0.$$

II° Rozłożenie na kwadraty.

360. Można także zastosować do równania

$$(1) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

metodę rozłożenia na kwadraty § IV° n^{ru} [343].

Lecz aby wyciągnąć zląd klassyfikacyę krzywych 2^{giej} klassy, potrzeba działać ostrożnie, i wprowadzić uwagi zrobione w n^{rze} [331].

Klassyfikacya krzywych 2^{giej} klassy.

361. Dla zrobienia tej klassyfikacyi, będziemy się więc opierać na własnościach charakterystycznych tyczących się *uwagi* n^{ru} [331], to jest :

Prosta w nieskończoności spotyka elipsę w dwóch punktach urojonych; hyperbolę, w dwóch punktach rzeczywistych i odrębnych; ona dotyka się paraboli; twierdzenia odwrotne są prawdziwe.

Niech będzie wtedy równaniem ogólnem krzywych 2^{giej} klassy :

$$(1) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

i przedstawmy przez Δ dyskryminant pierwszej strony, tak aby

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Spółrzędnemi prostej w nieskończoności są $u = 0$, $v = 0$; a równanie jakiegokolwiek punktu w nieskończoności jest kształtu według n^ru [115]

$$(3) \qquad v = \lambda u.$$

Szukajmy naprzód warunku aby punkt (3) był na krzywej (1); w tym celu trzeba i dość jest aby dwie styczne, które można poprowadzić z tego punktu do krzywej zlewały się z sobą, to jest aby, jeśli się zastąpi v przez λu w równaniu (1), równanie tym sposobem otrzymane miało dwa pierwiastki równe.

Zastępując v przez λu w równaniu (1), znajduje się

$$(3\ bis) \qquad (C\lambda^2 + 2B\lambda + A)u^2 + 2(\lambda E + D)u + F = 0;$$

żeby dwa pierwiastki tego równania były równe, potrzeba aby

$$(\lambda E + D)^2 - F(C\lambda^2 + 2B\lambda + A) = 0,$$

albo

$$(4) \qquad \lambda^2(E^2 - CF) + 2(DE - BF)\lambda + D^2 - AF = 0.$$

Dwie wartości na λ wyciągnięte z równania (4) dadzą poznać, za pomocą równania (3), dwa punkta w nieskończoności leżące na krzywej (1).

Warunkiem rzeczywistości pierwiastków równania (4) jest

$$(5) \qquad (DE - BF)^2 - (E^2 - CF)(D^2 - AF) > 0.$$

Otóż, ma się tożsamość

$$(6) \qquad (DE - BF)^2 - (E^2 - CF)(D^2 - AF) = - F.\Delta.$$

362. To przypuściwszy, rozróżniać będziemy w roztrząsaniu dwa przypadki następujące:

1° Wyraz niezależny F jest różnym od zera,

2° Wyraz niezależny F jest zerem.

Przypuścimy zawsze, że się zmieniło znaki pierwszej strony równania (1) w sposób taki, aby można było zrobić dodatnym wyraz niezależny F.

1^szy Przypadek $\qquad F > 0.$

Prosta w nieskończoności nie dotyka się oczywiście krzywej, gdyż równanie (1) nie jest sprawdzonem kiedy się w nim zrobi $u = 0$, i $v = 0$; krzywa jest więc *elipsą* albo *hyperbolą*.

Jeżeli $\Delta > 0$, widzimy przez związek (6) i nierówność (5) że pierwiastki równania (4) są urojone; krzywa jest *elipsą*.

Jeżeli $\Delta < 0$, widzimy że pierwiastki równania (4) są rzeczywiste, krzywa jest *hyperbolą*; równanie (3) i (3 *bis*) wyznaczają spółrzędne stycznej w każdym z tych punktów w nieskończoności.

Jeżeli $\Delta = 0$, dwa pierwiastki równania (4) są równymi, dwa punkta w nieskończoności schodzą się z sobą, równie jak dwie styczne w tych punktach; a ponieważ prosta w nieskończoności nie jest styczną, krzywa sprowadza się więc do *dwóch punktów*.

Można jeszcze zdać sobie sprawę z tego rezultatu rozkładając na kwadraty pierwszą stronę równania (4). Sprawdza się wtedy że, jeśli $\Delta = 0$, równanie sprowadza się do kształtu

$$(au + bv + c)(a_1 u + b_1 v + c_1) = 0.$$

Dla rozpoznania rozmaitości krzywej, rozłożymy na kwadraty; a ponieważ wyraz F jest różnym od zera, zrobimy naprzód równanie jednorodnem, co daje

$$\text{(7)} \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0,$$

potem utworzymy kwadrat względem w. Ma się tym sposobem

$$\text{(8)} \qquad [Fw + Ev + Du]^2 + (CF - E^2)v^2 + 2(BF - ED)vu + (AF - D^2)u^2 = 0.$$

1° Niech będzie naprzód $(CF - E^2) \gtrless 0$; otrzyma się rozkładając dalej i mając wzgląd na związek (6):

$$\text{(9)} \qquad (CF - E^2)[Fw + Ev + Du]^2 + [(CF - E^2)v + (BF - ED)u]^2 + F.\Delta.u^2 = 0.$$

Spółczynnik F jest, przez założenie dodatnym, niech będzie naprzód $\Delta > 0$.

Jeżeli $(CF - E^2) < 0$, równanie (9) przyjmuje rozwiązania rzeczywiste na u i v; krzywa jest *elipsą rzeczywistą*;

Jeżeli $(CF - E^2) > 0$, równanie (9) nie przypuszcza żadnego rozwiązania rzeczywistego; krzywa jest *elipsą urojoną*.

Przypuśćmy $\Delta < 0$, wtedy jakimkolwiek byłby znak ilości $(CF - E^2)$ równanie (9) będzie zawsze miało rozwiązanie rzeczywiste; krzywa jest *hyperbolą*.

Przypuśćmy nakoniec $\Delta = 0$; równanie (9) przedstawi widocznie *dwa punkta rzeczywiste* albo *urojone* według tego jak $(CF - E^2)$ będzie *dodatnem* albo *odjemnem*.

2° Niech będzie, powtóre, $(CF - E^2) = 0$; związek (6) staje się, w tym przypadku,

$$(BF - ED)^2 = -F.\Delta.$$

A tem samem dyskryminant Δ jest odjemnym albo zerem; jeżeli $\Delta < 0$, ma się *hyperbolę*.

Jeżeli $\Delta = 0$, wypada ztąd, $(BF - ED) = 0$, i widzimy przez równanie (8), że krzywa sprowadza się do dwóch punktów *rzeczywistych, schodzących się z sobą*, albo *urojonych* według tego jak spółczynnik $(AF - D^2)$ jest *odjemnym, zerem* albo *dodatnym*.

2gi Przypadek $\qquad F = 0.$

Prosta w nieskończoności ($u = 0$, $v = 0$) dotyka się widocznie krzywej; równanie

$$\text{(10)} \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev = 0,$$

przedstawia wtedy *parabolę*.

W tym przypadku, ilość Δ sprowadza się do

$$\Delta = 2BDE - CD^2 - AE^2. \tag{11}$$

Dla rozpoznania rozmaitości krzywej, rozłożymy na kwadraty równanie (10) zrobiwszy je jednorodnem, co daje

$$2Evw + 2Duw + Cv^2 + 2Buv + Au^2 = 0. \tag{12}$$

1° Przypuśćmy że jeden przynajmniej ze spółczynników kwadratów u^2 i v^2 nie jest zerem, niech będzie na przykład, $A \gtrless 0$.

Utworzmy kwadrat względem u, wypadnie

$$(Au + Bv + Dw)^2 + (AC - B^2)v^2 + 2(AE - BD)vw - D^2w^2 = 0;$$

potem jeśli się przypuści $D \gtrless 0$, otrzyma się, tworząc kwadrat względem w:

$$(Au + Bv + Dw)^2 - \left[Dw - \frac{AE - BD}{D}v\right]^2 + \left[AC - B^2 + \frac{(AE - BD)^2}{D^2}\right]v^2 = 0;$$

równanie, które mając wzgląd na wartość (11) względem Δ, położy się pod kształtem ostatecznym;

$$(Du + Ev)[ADu + (2BD - AE)v + 2D^2w] = \Delta . v^2. \tag{13}$$

To równanie przedstawia *parabolę*, jeśli $\Delta \gtrless 0$; kiedy $\Delta = 0$, ma się *dwa punkta*, z których jeden jest w nieskończoności.

Jeżeli A jest różnem od zera, ma się $D = 0$, równanie (12) staje się:

$$v[2Bu + Cv + 2Ew] + Au^2 = 0. \tag{14}$$

Jeżeli stałe A i E nie są zerami, to jest, jeżeli Δ jest różnem od zera, ma się *parabolę;* jeśli $A = 0$, wtedy $\Delta = 0$, ma się *dwa punkta,* z których jeden w nieskończoności; jeśli $E = 0$, wtedy $\Delta = 0$, ma się *dwa punkta w nieskończoności.*

2° Przypuśćmy A i C zerami razem.

Równanie (12) sprowadza się do

$$w(Ev + Du) + Buv = 0, \tag{15}$$

i ma się w tym przypadku

$$\Delta = 2BDE. \tag{16}$$

Jeżeli żadna ze *stałych* B, D, E, nie jest zerem, ma się *parabolę;* widzimy uważając że równanie może się napisać

$$(Bv + Dw)\left(u + \frac{E}{B}w\right) = \frac{ED}{B}w^2.$$

Kiedy $B=0$, ma się *dwa punkta*, z których jeden jest w nieskończoności, drugi jest początkiem; kiedy $D=0$ albo $E=0$, ma się dwa punkta, z których jeden jest w nieskończoności; kiedy ma się razem $D=0$, $E=0$, *dwa punkta są w nieskończoności*.

363. Streszczenie.

Równaniem styczneczkowem krzywej jest:

$$Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev+F=0;$$

oznaczymy przez Δ dyskryminant pierwszej strony

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

przypuścimy nadto, że się zrobiło dodatnym wyraz niezależny, kiedy ten wyraz nie jest zerem.

I° $F>0$ Rodzaj Elipsy i Hyperboli

- $\Delta>0$ Elipsa
  - Elipsa rzeczywista, ... jeżeli $(E^2-CF)>0$,
  - Elipsa urojona, ... jeżeli $(E^2-CF)<0$.
- $\Delta<0$ Hyperbola
  - Jakimkolwiek byłby znak ilości (E^2-CF).
- $\Delta=0$ Dwa punkta
  - jeżeli $E^2-CF>0$, dwa punkta rzeczywiste
  - jeżeli $E^2-CF<0$, dwa punkta urojone;
  - jeżeli $E^2-CF=0$
    - dwa punkta rzeczywiste. . . . . jeżeli $D^2-AF>0$,
    - dwa punkta zlewające się . . . jeżeli $D^2-AF=0$,
    - dwa punkta urojone . . . . . . jeżeli $D^2-AF<0$.

N. B. W przypadku elipsy (E^2-CF) nie może być zerem, gdyż wtedy dyskryminant Δ byłby odjemnym.

II° $F=0$ Rodzaj Paraboli

- $\Delta \gtrless 0$ Parabola właściwie nazwana
- $\Delta=0$
  - dwa punkta, z których jeden w nieskończoności, jeśli E i D nie są zerami razem;
  - dwa punkta w nieskończoności, jeśli $D=0$, i $E=0$.

§ II. — SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE (U, V, W).

364. Za pomocą wzorów (18 *bis*) n^ru [145] będzie można dowieść przez analizę podobną do tej, która była rozwiniętą w n^rze [352], że *równanie styczneczkowe*, w spółrzędnych trzylinijnych, *krzywych* 2^giej *klassy*, jest kształtu

$$A_{11}U^2+A_{22}V^2+A_{33}W^2+2A_{12}UV+2A_{13}UW+2A_{23}VW=0. \tag{1}$$

Można także zastosować do tego równania sposób rozłożenia na kwadraty, wyłożony w n^rze [343], etc..

Przedstawmy przez Δ dyskryminant pierwszej strony, tak aby

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix};$$

i kierujmy rachunkiem jak to było wskazanem w n^rze [343] etc....., dojdzie się do wniosków następujących :

1° Jeżeli $\Delta \gtrless 0$, równanie będzie się mogło sprowadzić do jakiegokolwiek z kształtów

$$(3) \qquad M^2 \pm N^2 \pm P^2 = 0,$$

M, N, P, będąc funkcyami linijnemi jednorodnemi na U, V, W; równanie (3) przedstawi wtedy jakąkolwiek z krzywych właściwie nazwanych 2^giej klassy : *Elipsę, hyperbolę,* albo *parabolę. Trójkąt,* którego wierzchołkami są $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, jest *sprzężonym* względem krzywej, jak to zobaczymy poniżej.

2° Jeżeli $\Delta = 0$, równanie będzie się mogło sprowadzić do jakiegokolwiek z kształtów

$$(4) \qquad M^2 \pm N^2 = 0,$$

krzywa będzie się składać z jakiegokolwiek układu dwóch punktów rzeczywistych albo urojonych; jeden z tych punktów może być w nieskończoności.

3° Jeżeli *wyznaczniki częściowe na* Δ *są zerami,* równanie będzie się mogło sprowadzić do kształtu

$$(5) \qquad M^2 = 0;$$

krzywa składa się z dwóch punktów schodzących się z sobą.

Twierdzenia odwrotne tych podań są następstwem analizy prowadzącej do podań wysłowionych.

Badanie stycznych prowadzi nas do metod prostych dla rozpoznania rodzaju krzywych właściwie nazwanych 2^giej klassy, zobaczyć n^er [535].

KSIĘGA CZWARTA

WIADOMOŚCI OGÓLNE O KRZYWYCH.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

STYCZNE.

§ 1. — SPÓŁRZĘDNE KARTEZYAŃSKIE.

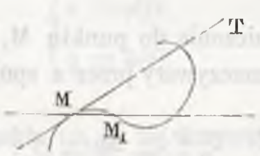
I° Określenie; spółczynnik kątowy.

365. Spółczynnik kątowy stycznej i normalnej.

Jakakolwiek prosta, poruszając się według prawa ciągłego, staje się *styczną* do krzywej, gdy dwa z jej punktów przecięcia się z krzywą zejdą się z sobą.

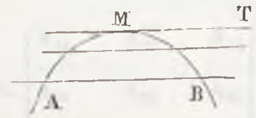
I tak, kiedy jakakolwiek sieczna obraca się około punktu stałego M, leżącego na krzywej i gdy drugi punkt przecięcia się M_1 zejdzie się z punktem M, *ta sieczna* staje się *styczną w* M.

Kiedy jakakolwiek sieczna porusza się równolegle do siebie samej i gdy dwa z jej punktów prze-



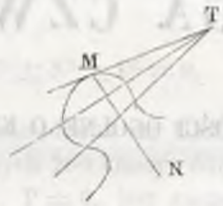
cięcia się zejdą się z sobą sieczna staje się *styczna równoległa do jakiegokolwiek kierunku danego.*

Kiedy jakakolwiek sieczna obraca się około punktu stałego T, nie leżącego na krzywej, i gdy dwa



z jej punktów przecięcia się zejdą się z sobą, sieczna staje się *jakakolwiek ze stycznych poprowadzonych przez punkt* T.

Nazywa się *normalną* do krzywej w jakimkolwiek punkcie, prostopadła do stycznej w tym punkcie.



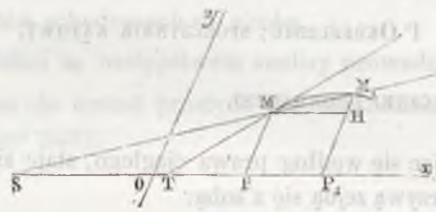
I tak, MT będąc styczną w M, prosta MN, prostopadła do MT, będzie normalną w M.

366. Niech będzie jakikolwiek punkt M(x, y) krzywej

$$(1) \qquad f(x, y) = 0;$$

spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu sąsiedniego będą $x + \Delta x$, $y + \Delta y$; Δy jest przyrostkiem funkcyi y określonej przez równanie (1) krzywej, ten przyrostek jest odpowiedni przyrostkowi dowolnemu Δx danemu dla zmiennej x.

Nakreślmy spółrzędne punktów M i M_1, potem poprowadźmy przez punkt M, MH równoległą



do Ox, jeżeli A jest spółczynnikiem kątowym siecznej MM_1, ma się

$$A = \frac{MP}{SP} = \frac{M_1H}{MH} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Jeżeli punkt M_1 zbliża się nieograniczenie do punktu M, to jest jeżeli sieczna staje się styczną, wtedy Δx i Δy dążą do zera; tak że oznaczywszy przez a spółczynnik stycznej ma się

$$(2) \qquad a = \text{gr}\,\frac{\Delta y}{x} = y'_x;$$

y jest funkcyą x określoną przez związek (1) albo równanie krzywej.

Na mocy twierdzenia funkcyj złożonych, otrzyma się

$$\mathrm{a} = y'_x = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

albo, przyjmując znakowanie krótsze;

(2) $$\mathrm{a} = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Ztąd wypada że *równaniem stycznej*, w jakimkolwiek punkcie (x_1, y_1) krzywej, będzie

(4) $$y - y_1 = -\frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}}(x - x_1),$$

z warunkiem

(4 *bis*) $$f(x_1, y_1) = 0.$$

367. Spółczynnik kątowy a normalnej będzie danym przez związek

(5) $$1 + (\mathrm{a} + \mathrm{a}')\mathrm{dos}\theta + \mathrm{aa}' = 0,$$

a mając wartość (3). W przypadku szczególnym w którym osie są prostokątnemi, ma się

(6) $$\mathrm{a}' = -\frac{1}{y'_x} = \frac{f'_y}{f'_x}.$$

Równaniem normalnej w jakimkolwiek punkcie (x_1, y_1) będzie w przypadku osi prostokątnych:

(7) $$y - y_1 = \frac{f'_{y_1}}{f'_{x_1}}(x - x_1),$$

z warunkiem

(7 *bis*) $$f(x_1, y_1) = 0.$$

368. Zdarza się często że się określa krzywą za pomocą dwóch równań, uważając spółrzędne x i y jakiegokolwiek z jej punktów jako funkcye zmiennej dowolnej. Niech będzie na przykład,

(8) $$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t); \end{cases}$$

zmieniając t, wyznaczy się kolejno punkta (x, y) tej krzywej; i otrzyma się jej równanie w x i y wyrugowawszy zmienną pomocniczą t.

Jest rzeczą ważną umieć wyznaczyć, w tym przypadku, spółczynnik kątowy stycznej. Niech będą

Δx i Δy przyrostki dla x i y odpowiednie przyrostkowi dowolnemu Δt zmiennej t; ma się

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}},\quad \text{zkąd}\quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Lub jeszcze, y jest funkcyą względem t, a t jest funkcyą względem x; według twierdzenia funkcyi funkcyj, otrzyma się

$$y'_x=y'_t.t'_x;$$

otóż, na mocy twierdzenia funkcyj odwrotnych

$$t'_x=\frac{1}{x'_t};$$

więc

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Tak więc *spółczynnik kątowy* a *stycznej, w punkcie* (x, y) *odpowiednim wartości* t *zmiennej pomocniczej, będzie danym przez wzór*

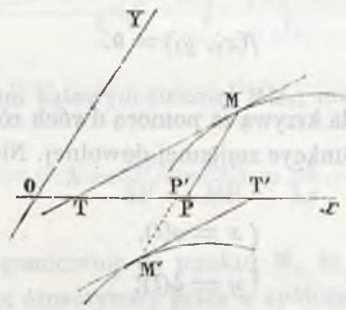
(9) $$\mathrm{a}=\frac{y'_t}{x'_t};$$

przeto, spółczynnikiem kątowym a' *normalnej będzie w przypadku osi prostokątnych*

(10) $$\mathrm{a}'=-\frac{x'_t}{y'_t}.$$

369. Podstyczna.

Jeżeli T jest przecięciem się z Ox stycznej w M, a P spodek rzędnej punktu M, długość TP jest nazwaną *podstyczną*.



Równaniem stycznej w punkcie (x_1, y_1) jest

$$y-y_1=y'_{x_1}(x-x_1);$$

robiąc $y = 0$ w tem równaniu, wypadnie

$$x - x_1 = -\frac{y_1}{y'_{x_1}};$$

otóż, w tym związku

$$x_1 = \mathrm{OP}, \qquad x = \mathrm{OT};$$

więc, oznaczając przez S_t długość podstycznej, otrzyma się, zniosłszy wskaźniki:

$$(11) \qquad S_t = \frac{y}{y'_x}.$$

« Jeśli się zgodzimy uważać podstyczną jako dodatną albo odjemną, według tego jak począwszy od » spodka stycznej jest ona skierowaną w stronę odciętych dodatnych lub odciętych odjemnych, pod- » styczna będzie przedstawioną co do wielkości i co do znaku przez wyrażenie $\frac{y}{y'_x}$.

W rzeczy samej, jeśli rzędna powiększa się z odciętą, to jest jeśli pochodna y'_x jest dodatną, spodek T stycznej jest po lewej stronie spodka P rzędnej, gdy rzędna MP jest dodatną; a po prawej, gdy rzędna M'P' jest odjemną. W pierwszym przypadku, podstyczna jest dodatną równie jak wyrażenie $\frac{y}{y'_x}$; w drugim przypadku, one są obiedwie odjemnemi.

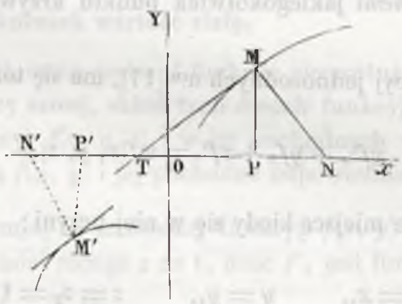
Sprawdzi się że podstyczna i wyrażenie $\frac{y}{y'_x}$ zachowują jeszcze tenże sam znak, jeśli rzędna zmniejsza się gdy się odcięta powiększa.

370. Podnormalna.

Jeżeli N jest przecięciem się osi Ox z normalną w M, a P spodek rzędnej punktu M, długość NP jest nazwana *podnormalna*.

Przypuśćmy osie prostokątne, równaniem normalnej w punkcie (x_1, y_1) jest

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'_{x_1}}(x - x_1);$$



robiąc $y = 0$ w tem równaniu, wypada

$$x - x_1 = y_1 y'_{x_1}.$$

Otóż, w tym związku

$$x = \mathrm{ON}, \qquad x_1 = \mathrm{OP};$$

więc, oznaczając przez S_n długość podnormalnej, otrzyma się, po zniesieniu wskaźników:

(12) $$S_n = + yy'_x.$$

« Jeśli się zgodzimy uważać podnormalną jako dodatną albo odjemną, według tego jak począwszy » od spodka rzędnej ona jest skierowaną w stronę odciętych dodatnych lub odciętych odjemnych, » podnormalna będzie przedstawioną co do wielkości i co do znaku przez wyrażenie yy'_x.

Dyskussya odbędzie się jak w przypadku poprzedzającym.

II° Równanie stycznej w jakimkolwiek punkcie.

371. Niech będzie równanie jakiejkolwiek krzywej

(1) $$f(x, y) = 0;$$

równaniem stycznej w jakimkolwiek punkcie (x_1, y_1) będzie według n^ru^ [366] : (4)

(2) $$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} - (x_1f'_{x_1} + y_1f'_{y_1}) = 0,$$

z warunkiem

(2 *bis*) $$f(x_1, y_1) = 0.$$

Zróbmy jednorodnem równanie (1), to jest zastąpmy x i y przez $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$, potem mnóżmy przez z^m, m będąc stopniem równania, to równanie stanie się

(3) $$f(x, y, z) = 0;$$

x, y, z są *spółrzędnemi jednorodnemi* jakiegokolwiek punktu krzywej; znajdzie się równanie pierwotne (1) robiąc $z = 1$.

Otóż na mocy twierdzenia funkcyj jednorodnych n^ru^ [17], ma się tożsamość

(4) $$xf'_x + yf'_y + zf'_z = mf(x, y, z).$$

Ta równość będzie miała jeszcze miejsce kiedy się w niej uczyni:

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1 = 1;$$

wypada wtedy na mocy związku (2 *bis*)

(4 *bis*) $$x_1f'_{x_1} + y_1f'_{y_1} + z_1f'_{z_1} = 0.$$

Równanie (2) stycznej staje się więc

(5) $$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + f'_{z_1} = 0,$$

z warunkiem

(5 *bis*) $$f(x_1, y_1) = 0.$$

Równania (5) i (5 *bis*) *określają w spółrzędnych kartezyańskich, styczną w jakimkolwiek punkcie* (x_1, y_1) *krzywej* $f(x, y) = 0$. Znakowanie f'_{z_1} wskazuje, że zrobiwszy jednorodną pierwszą stronę równania krzywej, wzięto pochodną względem z i że w tej pochodnej zrobiono

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1 = 1$$

Zamiast dania dla z_1 wartości (1), można zostawić z_1 dowolnem; można także w równaniu (5) zastąpić x i y przez $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$; wtedy x, y, z, będą *spółrzędnemi jednorodnemi* n^ru [3] jakiegokolwiek punktu płaszczyzny. Ztąd wnosimy że:

Mając dane, w spółrzędnych jednorodnych, równanie jakiejkolwiek krzywej

(6) $$f(x, y, z) = 0,$$

równaniem stycznej w jakimkolwiek punkcie (x_1, y_1, z_1) *będzie*

(7) $$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0,$$

z warunkiem

(7 *bis*) $$f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Ten wzór symetryczny dany na równanie stycznej jest nader ważnym.

Uwaga. W rachunku któryśmy dopiero co wykonali, a który nadal często przytaczać będziemy, litera z oznacza jużto zmienną, jużto stałą; nie ma w tem żadnej niedogodności, ani też wątpliwości. Naprzód, jeżeli się ma różniczkować, działamy na tożsamościach, i tylko po odbytych różniczkowaniach przypisujemy dla z jakąkolwiek wartość stałą.

Powtóre, oznaczymy przez też samą cechę f funkcyę pierwotną $f(x, y)$ i funkcyę zrobioną jednorodną $f(x, y, z)$; jestto w rzeczy samej, skład tych dwóch funkcyj w x i y identycznie tenże sam; i gdy się zrobi $z = 1$ w funkcyi $f(x, y, z)$ i w jej pochodnych różnych rzędów względem x i y, okazuje się identycznie funkcyą $f(x, y)$ i jej pochodne odpowiednie tegoż samego rzędu.

I tak równość (4) nam pokazuje, że zrobiwszy funkcyą $f(x, y)$ jednorodną, i wziąwszy pochodną względem z, potem w tej ostatniej robiąc $z = 1$, ilość f'_z jest funkcyą względem x i y identycznie równą funkcyi $[mf(x, y) - xf'_x - yf'_y]$.

III° Styczna i normalna równoległa do jakiegokolwiek kierunku danego.

372. Styczna równoległa do jakiejkolwiek prostej danej.

Niech będzie a spółczynnik kątowy prostej danej, równaniem jakiejkolwiek prostej równoległej będzie

$$(1) \qquad y = \mathrm{a}x + \mathrm{b};$$

wyznaczymy stałą b przez warunek aby ta prosta była styczną. Niech będą x i y spółrzędne punktu zetknięcia; równaniem stycznej do krzywej w tym punkcie jest

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + f'_{z_1} = 0,$$

z warunkiem

$$f(x_1, y_1) = 0.$$

Zidentyfikujmy to równanie z równaniem prostej (1), ma się związki

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{f'_{x_1}}{\mathrm{a}} = \dfrac{f'_{y_1}}{-1} = \dfrac{f'_{z_1}}{\mathrm{b}}, \\ f(x_1, y_1) = 0. \end{cases}$$

Wyrugowawszy x_1 i y_1 między trzema równaniami (2), otrzyma się związek kształtu

$$(3) \qquad \varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = 0,$$

który wyznaczy b w funkcyi a.

Możemy wnioskować z równań (2) o liczbie stycznych równoległych do jakiejkolwiek prostej danej. W rzeczy samej, te równania mogą się napisać

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) = 0, \\ \mathrm{a}f'_{y_1} + f'_{x_1} = 0, \\ \mathrm{b}f'_{y_1} + f'_{z_1} = 0. \end{cases}$$

Dwa pierwsze z tych równań wyznaczą spółrzędne x_1 i y_1 punktów zetknięcia stycznych równoległych do kierunku danego; otóż jeżeli równanie krzywej jest stopnia m, drugie równanie będzie stopnia $(m - 1)$; i liczbą ich rozwiązań wspólnych będzie $m(m - 1)$. Trzecie równanie da jedyną wartość na b dla każdego z tych rozwiązań.

Krzywa stopnia m *przyjmuje więc ogólnie* m(m — 1) *stycznych równoległych do jakiegokolwiek kierunku danego.*

373. Można jeszcze rozwiązać tę kwestyą w sposób następujący.

Niech będzie równanie krzywej

(1) $$f(x, y) = 0,$$

i

(2) $$y = ax + b;$$

równaniem prostej równoległej do jakiegokolwiek kierunku danego, a jest stałą daną a b nieoznaczoną.

Aby ta prosta była styczną, potrzeba wyrazić że dwa z jej punktów przecięcia się z krzywą zejdą się z sobą; otóż jeśli się zastąpi w równaniu krzywej y przez $(ax + b)$, wypadnie

(3) $$f(x, ax + b) = 0.$$

Wyrazi się więc, że to ostatnie równanie ma pierwiastek *podwójny;* a ponieważ wartość odpowiednia (2) na y jest daną przez równanie pierwszego stopnia; wynika ztąd że dwa punkta przecięcia się prostej z krzywą zejdą się z sobą. Będzie tym sposobem sprowadzonym do związku kształtu

(3 *bis*) $$\varphi(a, b) = 0;$$

który wyznaczy wartości stałe b. Wynika z twierdzenia dowiedzionego w n^{rze} [372] że to równanie będzie ogólnie stopnia $m(m-1)$ względem b.

374. Równanie normalnej równoległej do jakiejkolwiek prostej danej.

Przypuścimy osie prostokątne. Niech będzie a spółczynnik kątowy prostej danej, równaniem jakiejkolwiek prostej równoległej będzie

(1) $$y = ax + b.$$

Z drugiej strony, jeżeli x_1 i y_1 są spółrzędnemi spodka jakiejkolwick normalnej równoległej do kierunku danego, równaniem tej normalnej będzie

$$y - y_1 = \frac{f'_{y_1}}{f'_{x_1}}(x - x_1),$$

z warunkiem

$$f(x_1, y_1) = 0.$$

Identyfikując to równanie z równaniem prostej (1), ma się związki

(2) $$\begin{cases} f(x_1, y_1) = 0, \\ af'_{x_1} = f'_{y_1}, \\ b = y_1 - x_1 \dfrac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}}. \end{cases}$$

Wyrugowawszy x_1 i y_1 między temi trzema równaniami, otrzyma się związek kształtu

$$(3) \qquad \varphi(a, b) = 0,$$

który wyznaczy wartości stałe b.

Dwa pierwsze równania grupy (2) są, jedno stopnia m, drugie stopnia $(m-1)$; one przyjmują więc $m(m-1)$ rozwiązań w (x_1, y_1); trzecie równanie da jedyną wartość na b dla każdego z tych rozwiązań.

Więc, *krzywa stopnia* m *przyjmuje ogólnie* m(m — 1) *normalnych równoległych do jakiegokolwiek kierunku danego.*

IV° Styczne i normalne poprowadzone przez jakikolwiek punkt dany.

375. Styczne poprowadzone przez jakikolwiek punkt dany.

Niech będą α, β, spółrzędne punktu danego, i

$$(1) \qquad f(x, y) = 0, \qquad \text{albo} \qquad f(x, y, z) = 0,$$

równanie krzywej; jeżeli x_1 i y_1 są spółrzędnemi punktu zetknięcia jakiejkolwiek ze stycznych, równaniem tej stycznej będzie

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + f'_{z_1} = 0, \qquad \text{z warunkiem} \qquad f(x_1, y_1) = 0.$$

Wyraźmy że ta prosta przechodzi przez punkt stały (α, β), otrzyma się związki

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha f'_{x_1} + \beta f'_{y_1} + f'_{z_1} = 0, \\ f(x_1, y_1) = 0. \end{cases}$$

Te równania wyznaczą spółrzędne punktów zetknięcia wszystkich stycznych, które można poprowadzić przez punkt dany. Liczbą rozwiązań wspólnych dla tych dwóch równań jest widocznie $m(m-1)$, jeśli m jest rzędem krzywej. Więc

Przez jakikolwiek punkt, dany na płaszczyznie krzywej m^tego^ *rzędu można ogólnie poprowadzić* m(m — 1) *stycznych.*

Klassa jakiejkolwiek krzywej jest równą liczbie stycznych, które można poprowadzić do krzywej z jakiegokolwiek punktu wziętego na jej płaszczyznie. Więc

Krzywa rzędu m *jest ogólnie klassy* m(m — 1).

Szczególnie, krzywe drugiego rzędu są 2^giej^ klassy.

Możemy w równaniu (2) znieść wskaźniki, co daje

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \alpha f'_x + \beta f'_y + f'_z = 0; \end{cases}$$

i uważać x i y jako spółrzędne *bieżące* jakiegokolwiek punktu; te dwa równania przedstawią wtedy dwie krzywe, których przecięcia się będą punktami zetknięcia stycznych szukanych. Pierwsze równanie przedstawia krzywą daną; drugie przedstawia krzywą rzędu $(m-1)$, którą nazwiemy *krzywą zetknięć*. Zastępując α, β, przez $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, krzywa zetknięć napisze się pod kształtem więcej symetrycznym

$$(4)\qquad \alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0.$$

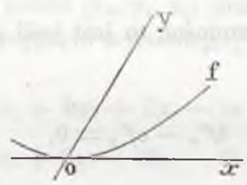
Uwaga. Kiedy punkt dany jest na krzywej pod uwagę wziętej, krzywe (3) zetkną się w tym punkcie, przeto one nie spotykają się więcej z sobą jak tylko w $[m(m-1)-2]$ innych punktach; więc

Przez punkt wzięty na jakiejkolwiek krzywej, nie można poprowadzić tylko $[m(m-1)-2]$ *stycznych odrębnych od stycznej w tym punkcie; ta ostatnia liczy się więc za dwie styczne wychodzące z punktu danego.*

Dowiedźmy, że w przypadku obecnym dwie krzywe (3) dotykają się w punkcie uważanym. Weźmy w rzeczy samej ten punkt za początek, a styczną do krzywej za oś odciętych; równanie krzywej będzie wtedy kształtu

$$(5)\qquad f(x,y,z)=\varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+\ldots+z^{m-2}\varphi_2(x,y)+z^{m-1}.y=0$$

prosta $y=0$ spotyka w rzeczy samej krzywą $f(x,y)=0$ w dwóch punktach zbiegających się z punktem O; funkcye $\varphi_i(x,y)$ są jednorodnemi i stopnia i w x i y.



W przypadku obecnym, ma się $\alpha=0$, $\beta=0$; równaniem *krzywej zetknięć* będzie więc

$$(6)\qquad f'_z=\varphi_{m-1}(x,y)+2z\varphi_{m-2}(x,y)+\ldots+(m-2)z^{m-3}\varphi_2(x,y)+(m-1)z^{m-2}.y=0;$$

ta druga krzywa przechodzi także przez punkt O; a prosta $y=0$ jest styczną w O; więc ....

376. Normalne poprowadzone przez jakikolwiek punkt dany.

Niech będą α i β spórzędne punktu danego, i

$$(1)\qquad f(x,y)=0,$$

równanie krzywej; jeżeli x_1, y_1 są spółrzędnemi spodka jakiejkolwiek z normalnych poprowadzonych przez punkt (α,β), równaniem tej normalnej będzie

$$\begin{cases} y-y_1=\dfrac{f'_{y_1}}{f'_{x_1}}(x-x_1),\\ f(x_1,y_1)=0.\end{cases}$$

Wyraźmy że ta prosta przechodzi przez punkt stały (α, β), otrzyma się związki

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}(\alpha - x_1)f'_{y_1} &= (\beta - y_1)f'_{x_1},\\ f(x_1, y_1) &= 0.\end{aligned}\right.$$

Te równania wyznaczą spodki wszystkich normalnych, które można poprowadzić przez punkt dany. Te dwa równania są oba stopnia m, jeśli m jest stopniem krzywej; liczba ich rozwiązań wspólnych jest więc równą m^2. Przeto :

Przez jakikolwiek punkt, wzięty na płaszczyznie krzywej m^tego^ *rzędu można ogólnie poprowadzić* m^2 *normalnych do tej krzywej.*

Szczególnie, przez jakikolwiek punkt wzięty na płaszczyznie krzywej drugiego rzędu, można poprowadzić *cztery* normalne do krzywej.

Uwaga. Zbliżmy ten wynik do wyniku otrzymanego w n^rze^ [374], i zdajmy sobie sprawę z tej różnicy.

Spółrzędne x, y, spodków normalnych są wyznaczone przez dwa równania (2). Wprowadźmy spółrzędne jednorodne i znieśmy wskaźniki, ma się

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$\gamma(xf'_y + yf'_x) + z(\beta f'_x - \alpha f'_y) = 0.$$

Jeśli się przypuści (α, β, γ) w nieskończoności, to jest jeśli się przypuści $\gamma = 0$, drugie równanie rozkłada się na dwa :

$$(1^\circ)\qquad \beta f'_x - \alpha f'_y = 0,$$

$$(2^\circ)\qquad z = 0,$$

przecięcie się krzywej danej z krzywą (1°) daje spodki $m(m-1)$ normalnych równoległych do jakiegokolwiek kierunku danego; przecięcie się krzywej z prostą (2°) daje punkta w nieskończoności na krzywej; normalne w tych punktach są prostopadłemi do assymptot (niemaltycznych) w nieskończoności; ma się więc m normalnych w nieskończoności przechodzących przez punkt uważany; co czyni całkiem

$$m(m-1) + m \qquad \text{lub} \qquad m^2,$$

normalnych, zgodność przypadku szczególnego z przypadkiem ogólnym jest widoczną.

V° Zastosowania do krzywych drugiego rzędu.

377. Warunek aby jakakolwiek prosta była styczną do jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu.

Równanie jednorodne krzywych drugiego rzędu jest

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0;$$

wyraźmy że prosta

(2) $$ax + by + cz = 0,$$

jest styczną. Jeżeli x, y, z, są spółrzędnemi jednorodnemi punktu zetknięcia, równaniem jakiejkolwiek stycznej będzie

$$\begin{cases} xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0, \\ f(x_1, y_1, z_1) = 0, \end{cases}$$

identyfikując to równanie z równaniem prostej, otrzyma się związki

(3) $$\begin{cases} \dfrac{f'_{x_1}}{a} = \dfrac{f'_{y_1}}{b} = \dfrac{f'_{z_1}}{c} = 2\lambda, \\ f(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases}$$

Ostatnie z tych równań może się zastąpić przez jakiekolwiek prostsze; w tym celu uważmy, że mając wzgląd na pierwsze związki (3), ma się

$$0 = 2f(x_1, y_1, z_1) = x_1 f'_{x_1} + y_1 f'_{y_1} + z_1 f'_{z_1} = 2\lambda(ax_1 + by_1 + cz_1);$$

związek wreszcie widoczny, ponieważ punkt (x_1, y_1, z_1) musi się znaleźć na prostej (2). Tym sposobem układ równań (3) zastąpimy następującym wyraźniejszym

(4) $$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Dz_1 - \lambda a = 0, \\ Bx_1 + Cy_1 + Ez_1 - \lambda b = 0, \\ Dx_1 + Ey_1 + Fz_1 - \lambda c = 0, \\ ax_1 + by_1 + cz_1 \qquad = 0. \end{cases}$$

Wyrugowawszy x_1, y_1, z_1, λ, między temi czterema równaniami, linijnemi i jednorodnemi względem tych nieznanych, znajduje się

(5) $$\begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

jestto *równanie warunku szukanego*.

378. Równanie stycznych poprowadzonych do jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu przez jakikolwiek punkt wzięty na jej płaszczyźnie.

Pierwsza metoda.

Warunkiem aby prosta

(1°) $$ax + by + cz = 0,$$

była styczną, jest

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

a, b, c, są stałemi nieoznaczonemi. Niech będą α, β, γ, spółrzędne jednorodne punktu danego; ponieważ prosta musi przejść przez ten punkt, ma się związek

$$(2^\circ)\qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Równania (1°) i (2°) rozwiązane względem a, b, c, dają

$$(6)\qquad \frac{a}{\beta z - \gamma y} = \frac{b}{\gamma x - \alpha z} = \frac{c}{\alpha y - \beta x} = k,$$

zastąpiwszy a, b, c, przez te wartości w równaniu (5) znajduje się

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} A & B & D & \beta z - \gamma y \\ B & C & E & \gamma x - \alpha z \\ D & E & F & \alpha y - \beta x \\ \beta z - \gamma y & \gamma x - \alpha z & \alpha y - \beta x & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

równanie (7) jest związkiem między spółrzędnemi x, y, z, jakiegokolwiek punktu jakiejkolwiek ze stycznych, poprowadzonych przez punkt (α, β, γ); jestto *równanie tych stycznych.*

Uwaga. Metoda którąśmy wyłożyli daje się zastosować do krzywej jakiegokolwiek rzędu, gdy się zna związek

$$\varphi(a, b, c) = 0,$$

wyrażający że prosta

$$ax + by + cz = 0,$$

jest styczną do tej krzywej.

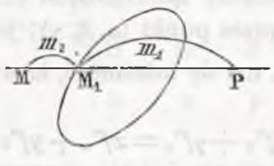
Druga metoda.

Rozwiążemy też samą kwestyą za pomocą innej metody już zastosowanej w nauce o kole.

Niech będą α, β, spółrzędne punktu stałego; x, y, spółrzędne jakiegokolwiek punktu M wziętego na siecznej; x_1, y_1, spółrzędne jednego z punktów w których ta sieczna spotyka krzywą drugiego rzędu

$$(8)\qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Oznaczywszy przez $\frac{m_1}{m_2}$ stosunek w którym punkt M_1 dzieli odcinek MP, spółrzędnemi tego punktu



będą według n^{ru} [52]

$$x_1 = \frac{m_1 x + m_2 \alpha}{m_1 + m_2}, \qquad y_1 = \frac{m_1 y + m_2 \beta}{m_1 + m_2};$$

otóż jest widocznem, że można zastąpić te wyrażenia przez następujące

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{m_1 x + m_2 \alpha}{m_1 z + m_2 \gamma}, \qquad \frac{y_1}{z_1} = \frac{m_1 y + m_2 \beta}{m_1 z + m_2 \gamma},$$

z warunkiem zrobienia na końcu rachunku $z = 1$, $z_1 = 1$, $\gamma = 1$.

Spółrzędne x_1, y_1, z_1, punktu M_1 powinny sprawdzać równanie (8), musi się więc mieć

$$f\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}\right) = 0, \quad \text{lub} \quad f(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

albo nakoniec

$$f(m_1 x + m_2 \alpha, \quad m_1 y + m_2 \beta, \quad m_1 z + m_2 \gamma) = 0.$$

Ten związek rozwinięty wprost, albo przez wzór *Taylora*, staje się

$$(9) \qquad m_1^2 f(x, y, z) + m_1 m_2 [\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z] + m_2^2 f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

To *równanie wyznaczy stosunki*

$$(9\ bis) \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{PM_1}{M_1 M},$$

w których krzywa drugiego rzędu dzieli odcinek MP.

Będzie więc potrzeba w równaniu (9) przypuścić $z = 1$, $\gamma = 1$.

Jeżeli prosta MP jest styczną, dwa stosunki wyznaczone przez równanie (9) są równe, i odwrotnie. Wyrazi się więc, że prosta MP jest styczną, pisząc że równanie (9) ma dwa pierwiastki równe, co daje

$$(10) \qquad 4 f(\alpha, \beta, \gamma) . f(x, y, z) = [\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z]^2;$$

w tem równaniu, należy zrobić $z = 1$, $\gamma = 1$; lecz wprowadziwszy to założenie, będzie można zastąpić x i y przez $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$, α i β przez $\frac{\alpha}{\gamma}$ i $\frac{\beta}{\gamma}$; równanie zachowa tenże sam kształt, ponieważ ono jest jednorodnem razem względem ilości x, y, z i α, β, γ.

Równanie (10) jest więc związkiem między spółrzędnemi (x, y, z) jakiegokolwiek punktu jakiejkolwiek ze stycznych, przechodzących przez punkt (α, β, γ); jestto równanie tych stycznych.

Gdy funkcya f jest drugiego stopnia, ma się tożsamość, łatwą do sprawdzenia

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma; \tag{11}$$

równanie (10) może się jeszcze napisać

$$4f(\alpha, \beta, \gamma).f(x, y, z) = (x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma)^2. \tag{10 bis}$$

379. Równanie stycznych których się daje cięciwa zetknięć.

Niech będzie równanie cięciwy zetknięć

$$mx + ny + pz = 0; \tag{12}$$

jeżeli (α, β, γ) jest biegunem tej prostej, lub jeżeli się zidentyfikuje to równanie z równaniem cięciwy zetknięć stycznych wyprowadzonych z punktu (α, β, γ), otrzyma się

$$\frac{f'_\alpha}{m} = \frac{f'_\beta}{n} = \frac{f'_\gamma}{p} = \lambda; \tag{13}$$

równanie (10 *bis*) będzie wtedy równaniem stycznych. Otóż, wyciąga się naprzód ze związków (13)

$$f'_\alpha = \lambda m, \qquad f'_\beta = \lambda n, \qquad f'_\gamma = \lambda p. \tag{1°}$$

Ma się potem

$$\left\{\begin{aligned} A\alpha + B\beta + D\gamma &= \frac{\lambda}{2} m, \\ B\alpha + C\beta + E\gamma &= \frac{\lambda}{2} n, \\ D\alpha + E\beta + F\gamma &= \frac{\lambda}{2} p, \end{aligned}\right.$$

zkąd wynika, mnożąc przez α, β, γ, i dodając

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\lambda}{2}(m\alpha + n\beta + p\gamma). \tag{2°}$$

Ma się wreszcie rozwiązawszy też same równania

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} B & D & m \\ C & E & n \\ E & F & p \end{vmatrix}, \quad \Delta\beta = -\frac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} A & D & m \\ B & E & n \\ D & F & p \end{vmatrix}, \quad \Delta\gamma = \frac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} A & B & m \\ B & C & n \\ D & E & p \end{vmatrix};$$

zkąd wypada, mając wzgląd na związek (2°):

$$(3^\circ)\qquad \Delta.f(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{\lambda^2}{4}\begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix}.$$

Podstawiwszy wartości (1°) i (3°) w równaniu (10 *bis*), ma się ZA RÓWNANIE STYCZNYCH, KTÓRYCH CIĘCIWA ZETKNIĘĆ JEST DANĄ

$$f(x, y, z)\begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} + (mx + ny + pz)^2.\Delta = 0.$$

380. WARUNEK ABY JAKIKOLWIEK PUNKT BYŁ ZEWNĘTRZNYM DO JAKIEJKOLWIEK KRZYWEJ DRUGIEGO RZĘDU.

Powiemy że jakikolwiek punkt jest *zewnętrznym* do jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu, kiedy można poprowadzić z tego punktu dwie styczne rzeczywiste do krzywej.

Aby otrzymać warunek szukany, dość wyrazić że równanie które daje styczne, przedstawia jakąkolwiek krzywą rodzaju hyperboli.

Weźmiemy równanie stycznych pod kształtem (10 *bis*); aby to równanie przedstawiało dwie proste rzeczywiste, trzeba i dość żeby było

$$(15)\qquad (4Bf_0 - f'_\alpha f'_\beta)^2 - [4Af_0 - f'^2_\alpha][4Cf_0 - f'^2_\beta] > 0,$$

kładąc na chwilę

$$(15\ bis)\qquad f_0 = f(\alpha, \beta, \gamma).$$

Rozwinąwszy nierówność (15), wypadnie

$$f_0[4(B^2 - AC)f_0 + Af'^2_\beta + Cf'^2_\alpha - 2Bf'_\alpha f'_\beta] > 0;$$

co się może jeszcze napisać w sposób następujący:

$$(16)\qquad f_0\begin{vmatrix} A & B & f'_\alpha \\ B & C & f'_\beta \\ f'_\alpha & f'_\beta & 4f_0 \end{vmatrix} < 0.$$

Odejmując od ostatniej kolumny, dwie pierwsze kolumny wzglętnie pomnożone przez 2α i 2β

wypadnie

$$f_0\begin{vmatrix} A & B & 2D\gamma \\ B & C & 2E\gamma \\ f'_\alpha & f'_6 & 2f'_\gamma.\gamma \end{vmatrix}, \quad \text{lub} \quad 2f_0\gamma\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ f'_\alpha & f'_6 & f'_\gamma \end{vmatrix};$$

jeśli w ostatnim wyznaczniku, odejmie się od 3ciej linii dwie pierwsze względnie pomnożone 2α i 26, ma się nakoniec

$$2f_0\gamma\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ 2D\gamma & 2E\gamma & 2F\gamma \end{vmatrix}, \quad \text{albo} \quad 4f_0\gamma^2\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Więc zniosłszy czynnik dodatny i nie mogący być zerem, $4\gamma^2$, nierówność (16) staje się ostatecznie

$$(17) \qquad f(\alpha, 6, \gamma)\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} < 0;$$

takim jest warunek aby punkt $(\alpha, 6, \gamma)$ *był zewnętrznym do krzywej drugiego rzędu.*

Uwagi.

1° Jeżeli punkt $(\alpha, 6, \gamma)$ jest na krzywej, 1sza strona nierówności (17) jest zerem, to jest że krzywa przedstawiona przez równanie (10) należy do rodzaju paraboli; ta krzywa składa się więc z dwóch prostych równoległych; i nadto te równoległe zbiegają się, ponieważ one przechodzą przez punkt $(\alpha, 6, \gamma)$ w odległości skończonej; tak więc dwie styczne schodzą się z sobą [na mocy *uwagi* nru (375)]

2° Jeśli $\Delta = 0$, pierwsza strona nierówności (17) jest zerem; więc równanie (10) przedstawia dwie proste zbiegające się; dwie styczne schodzą się z sobą. Pochodzi to ztąd w rzeczy samej, że krzywa drugiego rzędu sprowadza się tu do jakiegokolwiek układu dwóch prostych według nru [351]; styczne do krzywej są wtedy jakiekolwiek proste poprowadzone przez punkt przecięcia się tych dwóch prostych. Można zdać sobie sprawę z tego wypadku, uważając krzywą jako jakąkolwiek elipsę znikającą.

VI° Styczne przegięcia.

381. *Styczną wielokrotną* jest styczna dotykająca się jakiejkolwiek krzywej w wielu punktach; i tak prosta AB, która dotyka się krzywej w dwóch punktach A i B jest *styczną podwójną.*

Określimy styczną wielokrotną w sposób dokładniejszy, mówiąc :

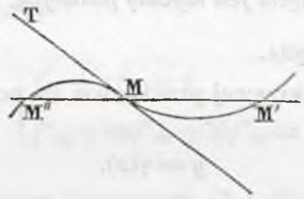
Jeżeli n jest klassą krzywej uważanej, styczna T będzie wielokrotną rzędu p, jeśli z jakiegokolwiek punktu tej linii, nie można poprowadzić do krzywej jak tylko $(n - p)$ stycznych odrębnych od stycznej T.

I tak z jakiegokolwiek punktu stycznej podwójnej do jakiejkolwiek krzywej klassy n, nie można poprowadzić jak tylko $(n - 2)$ stycznych odrębnych od stycznej uważanej.

382. Styczne przegięcia.

Jakakolwiek sieczna ruchoma staje się *styczną przegięcia* gdy trzy z jej punktów przecięcia się z krzywą zejdą się w jeden; punkt zetknięcia jest nazwany punktem przegięcia.

Jeśli, na przykład, jakakolwiek sieczna MM′, spotyka krzywą w trzech punktach M, M′, M″, i że gdy się ona obraca około punktu M, punkta M′ i M″ zbliżają się nieograniczenie i schodzą się z punk-



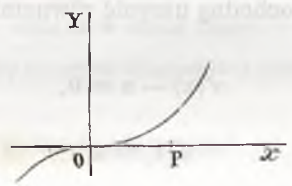
tem M, położenie granicy MT, tej siecznej jest styczną przegięcia; punkt zetknięcia M, jest punktem przegięcia.

Styczne przegięcia spotykają krzywą w trzech punktach zbiegających się; zobaczymy poniżej, że ta własność należy również do stycznych w jakimkolwiek punkcie podwójnym. Lecz jest między temi stycznemi ważna różnica.

Styczna w jakimkolwiek punkcie przegięcia jest *styczną podwójną;* styczna w jakimkolwiek punkcie podwójnym jest *styczną prostą.*

Obecnie dowiedziemy tylko pierwszą część tego założenia.

Weźmy punkt przegięcia za początek spółrzędnych, a styczną przegięcia za oś x; równanie krzy-



wej będzie kształtu

$$(1)\qquad f(x, y, z) = \varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + \dots z^{m-2}(Ay^2 + Bxy) + z^{m-1}y = 0,$$

ponieważ prosta $y = 0$ spotyka tę krzywą w trzech punktach zlewających się w jeden w początku spółrzędnych, to jest w 0.

Szukajmy jaka będzie liczba stycznych, które można prowadzić do krzywej z jakiegokolwiek punktu P, wziętego na stycznej przegięcia Ox.

Punkta zetknięcia tych linii stycznych będą punktami przecięcia się krzywej (1) z krzywą n° (375)

$$\alpha f'_x + f'_z = 0, \quad \alpha \text{ jest odciętą punktu P;}$$

albo rozwijając rachunki

$$(2)\qquad [\alpha_x\varphi'_m + \varphi_{m-1}] + \dots + z^{m-3}[\alpha_x\varphi'_3(x, y) + (m-2)(Ax^2 + Bxy)] + z^{m-2}[\alpha B + (m-1)]y = 0.$$

Dwie krzywe (1) i (2) są widocznie stycznemi w O; czyli że między ich punktami przecięcia są dwa zlewające się w jeden w punkcie O; albo jeszcze, że między stycznemi, które można prowadzić z punktu P do krzywej uważanej, są zawsze dwie zlewające się ze styczną przegięcia, bez względu na położenie punktu P na osi Ox.

Jeśli więc n jest liczbą stycznych, które można prowadzić do krzywej z punktu dowolnie wziętego, z jakiegokolwiek punktu prostej Ox nie będzie można poprowadzić więcej jak $(n-2)$ stycznych różnych od Ox. Zatem *styczna przegięcia jest styczną podwójną.*

383. Wyznaczenie punktów przegięcia.

Przypuścimy naprzód że równanie krzywej przedstawia się pod następującym kształtem

$$y = \varphi(x). \tag{1}$$

Niech będzie

$$y = ax + b, \tag{2}$$

równanie jakiejkolwiek prostej; odcięte punktów przecięcia tej prostej z krzywą będą dane przez równanie

$$\varphi(x) - ax - b = 0. \tag{3}$$

Otóż jeżeli prosta uważana jest styczną przegięcia, powinna ona spotkać krzywą w trzech punktach zlewających się w jeden; czyli że równanie (3) powinno mieć trzy pierwiastki równe. Ten potrójny pierwiastek winien pierwszą i drugą pochodną uczynić równemi zeru, czyli

$$\varphi'(x) - a = 0, \tag{4}$$

$$\varphi''(x) = 0. \tag{5}$$

Rugując a i b w równaniach (3), (4) i (5), otrzyma się związek, który odcięte punktów przegięcia krzywej uważanej sprawdzać powinny.

Ponieważ równanie (5) nie zawiera w sobie żadnej ze stałych a i b, przeto *punkta przegięcia krzywej* (1) *będą wyznaczone przez dwa równania*

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ \varphi''(x) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

384. Przypuśćmy teraz równanie krzywej pod kształtem ogólnym

$$f(x, y) = 0, \quad \text{albo} \quad f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Przecięcia tej krzywej z prostą

$$y = ax + b, \tag{2}$$

będą dane przez równanie

$$f(x, ax + b) = 0. \tag{3}$$

Okażemy że prosta (2) jest styczną przegięcia, wyrażając że równanie (3) ma potrójny pierwiastek; to jest równając z zerem pochodne pierwszą i drugą. Dla otrzymania tych pochodnych zastosujemy do $f(x, y)$ twierdzenie tyczące się funkcyi złożonych. Będziemy uważać y za funkcyą x wyznaczoną związkiem (2). Znajdziemy tym sposobem

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x + af'_y = 0 \\ f''_{xx} + 2af''_{xy} + a^2 f''_{yy} = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Należy teraz wyrugować a i b między równaniami (2) i (4); ponieważ jednak równania (4) wyraźnie nie zawierają w sobie stałej b, przeto dostatecznem będzie wyrugować a z równań (4). Rugowanie to nie przedstawia żadnej trudności. *Spółrzędne punktów przegięcia krzywej uważanej będą więc wyznaczone dwoma równaniami*

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ (f'_y)^2 . f''_x - 2f'_x . f'_y . f''_{xy} + (f'_x)^2 . f''_{yy} = 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Uwaga. Dwa równania (5) sprawdzają się nietylko za pomocą spółrzędnych punktów przegięcia, ale także spółrzędnemi punktów wielokrotnych, które krzywa uważana posiadać może. W rzeczy samej zobaczymy w dalszym ciągu, że styczne w punkcie podwójnym spotykają krzywą w trzech punktach zlewających się w jeden

385. Jakakolwiek krzywa rzędu m posiada w ogóle $3m(m-2)$ punktów przegięcia.

Dla dowiedzenia tego założenia damy naprzód drugiemu z równań (5) następujący kształt, ze wszech miar na uwagę zasługujący.

W rzeczy samej drugie z równań (5) może się tak napisać

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Rozwijając wyznacznik, równanie to łatwo się sprawdza. Przyjąwszy ten kształt równania, i równanie krzywej zrobiwszy jednorodnem, na zasadzie twierdzenia funkcyi jednorodnych, otrzyma się tożsamości

$$\left\{\begin{array}{l} xf'_x + yf'_y + zf'_z = mf(x, y, z), \\ xf''_{xx} + yf''_{xy} + zf''_{xz} = (m-1)f'_x, \\ xf''_{yx} + yf''_{yy} + zf''_{yz} = (m-1)f'_y, \\ xf''_{zx} + yf''_{zy} + zf''_{zz} = (m-1)f'_z. \end{array}\right. \tag{7}$$

Pomnóżmy ostatnią kolumnę wyznacznika (6) przez $(m-1)$ i odejmijmy odeń summę dwóch pierwszych kolumn, względnie pomnożonych przez x i y; mając wzgląd na tożsamości (7) i znosząc czynnik z nie będący zerem, otrzymamy

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f'_{x} & f'_{y} & f'_{z} \end{vmatrix} = 0.$$

Pomnóżmy teraz ostatni wiersz tego wyznacznika przez $(m-1)$ i odejmijmy dwa pierwsze względnie pomnożone przez x i y; otrzymamy ostatecznie *dwa następujące równania, służące do wyznaczenia punktów przegięcia*

(8) $$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = 0,$$

(8 *bis*) $$f(x, y, z) = 0.$$

Wyznacznik (8), zwany *wyznacznikiem funkcyjnym* pochodnych funkcyi $f(x, y, z)$ albo wyznacznikiem Hess'ego (hessien), przyrównany do zera, przedstawia krzywą, której punkta przecięcia z krzywą uważaną są właśnie punktami przegięcia tej ostatniej. Wyznacznik ten jest jednorodnym, a każdy z jego elementów jest stopnia $(m-2)$; więc krzywa przezeń przedstawiona jest rzędu $3(m-2)$, jeśli funkcya $f(x, y, z)$ jest stopnia m.

Przeto jakakolwiek krzywa rzędu m ma w ogóle $3m(m-2)$ punktów przegięcia, rzeczywistych lub urojonych, w odległości skończonej lub w nieskończoności.

Krzywe drugiego rzędu nie posiadają punktów przegięcia, gdyż w tym przypadku $m=2$.

Krzywa trzeciego rzędu ma w ogóle *dziewięć* punktów przegięcia; dowodzi się że pomiędzy tymi dziewięcioma punktami trzy tylko są rzeczywiste. Zobacz n^ro (630).

Uwaga. Klassa krzywej jakiejkolwiek i liczba jej punktów przegięcia zmniejszają się jedynie w razie istnienia punktów wielokrotnych.

VII° Wklęsłość i wypukłość krzywych.

386. Definicya.

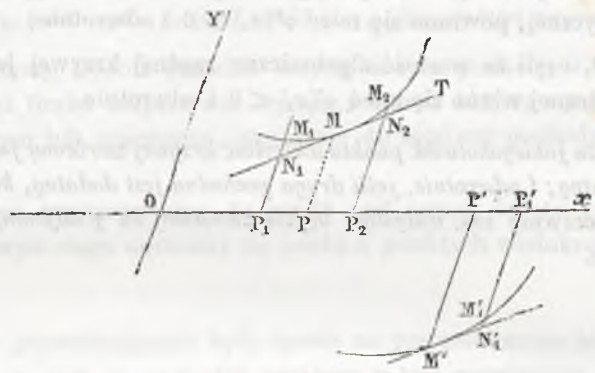
Łuk krzywej, w blizkości jakiegokolwiek punktu M, zwraca swą wklęsłość ku rzędnym dodatnym, jeśli po obu stronach w blizkości tego punktu wartość algebraiczna rzędnej tej krzywej jest większa od wartości algebraicznej rzędnej linii stycznej w punkcie M. W razie przeciwnym wklęsłość zwróconą jest ku rzędnym odjemnym.

W pierwszym razie, jeśli M_1 i M_2 są punktami sąsiednimi punktu M, i gdy łuk znajduje się po nad osią odciętych powinno się mieć

$$M_1P_1 > N_1P_1, \qquad M_2P_2 > N_2P_2.$$

Jeśli łuk znajduje się pod osią x, na przykład w M' i gdy M'_1 jest jakimkolwiek jego punktem sąsiednim, będzie się mieć co do wartości bezwzględnej

$$M'_1P'_1 < N'_1P'_1.$$



Ponieważ te wartości są odjemne, zatem wartość algebraiczna rzędnej krzywej jest większą od wartości algebraicznej rzędnej linii stycznej.

To przyjąwszy, niech będzie równaniem gałęzi krzywej

$$(1) \qquad y = \varphi(x),$$

a x_1 i y_1 spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu M tej krzywej; szukajmy jakim warunkom winna czynić zadość odcięta x_1, ażeby w pobliżu punktu M krzywa zwracała swą wklęsłość ku odciętym dodatnym.

W tym celu wyznaczmy rzędną krzywej, odpowiadającą jakiemukolwiek punktowi, wziętemu dowolnie w blizkości punktu M. Szukana wartość rzędnej będzie odpowiadać wartości odciętej przedstawionej przez $(x_1 + h)$.

Oznaczając przez Y wartość algebraiczną tej rzędnej, otrzyma się według wzoru *Taylora*

$$(2) \qquad Y = \varphi(x_1 + h) = \varphi(x_1) + h\varphi'(x_1) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_1) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x_1) + \text{etc.}\ldots.$$

Równanie stycznej w punkcie M jest

$$y - y_1 = \varphi'(x_1)(x - x_1);$$

wartość algebraiczna Y_1 rzędnej tej stycznej, odpowiadającej odciętej $(x_1 + h)$ wyrazi się przez

$$(3) \qquad Y_1 = \varphi(x_1) + h\varphi'(x_1).$$

Ztąd

$$(4) \qquad Y - Y_1 = \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_1) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x_1) + \text{etc.}\ldots$$

Drugi wyraz tej równości jest wielomianem uporządkowanym według potęg rosnących h; wiadomem jest, że zmiennej h można nadawać wartości dostatecznie małe, ażeby znak wielomianu był ten sam co i znak pierwszego ze składających go wyrazów. Ponieważ ilość $\frac{h^2}{1.2}$ jest zawsze dodatną, jakiby nie był znak h, przeto:

Jeśli $Y - Y_1 > 0$, czyli jeśli rzędna krzywej jest większa co do swej wartości algebraicznej od odpowiedniej rzędnej stycznej, powinno się mieć $\varphi''(x_1) > 0$ i odwrotnie;

Jeśli zaś $Y - Y_1 < 0$, czyli że wartość algebraiczna rzędnej krzywej jest mniejsza od wartości algebraicznej rzędnej stycznej winno się mieć $\varphi''(x_1) < 0$ i odwrotnie.

A zatem, *jeśli w pobliżu jakiegokolwiek punktu wklęsłość krzywej zwróconą jest ku rzędnym dodatnym, druga pochodna jest dodatną; i odwrotnie, jeśli druga pochodna jest dodatną, krzywa zwraca swą wklęsłość ku y dodatnym.* Przeciwnie zaś, *wklęsłość będzie zwróconą ku y odjemnym jeśli druga pochodna jest odjemną; i odwrotnie.*

387. Uwaga I.

Gdyby się miało

$$\varphi''(x_1) = 0, \quad \text{i} \quad \varphi'''(x_1) \gtrless 0,$$

równość (4) stałaby się wtedy

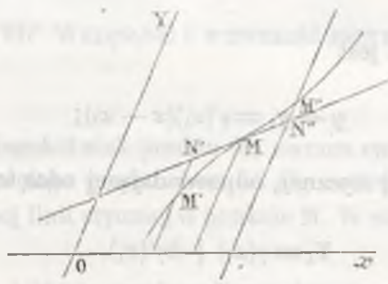
$$(5) \qquad Y - Y_1 = \frac{h_3}{1.2.3}\varphi'''(x_1) + \frac{h^4}{1.2.3.4}\varphi^{\text{IV}}(x_1) + \text{etc.....};$$

łatwo spostrzedz w tym razie, że znak drugiej strony tej równości, dla wartości dostatecznie małych dla h, zmienia się ze znakiem h; to jest, że dla punktów poprzedzających punkt M będzie się miało na przykład $Y - Y_1 < 0$, a dla punktów leżących z drugiej strony punktu M, $Y - Y_1 > 0$; albo też odwrotnie.

Oprócz tego, gdy odcięta jakiegokolwiek punktu krzywej sprawdza związek $\varphi''(x_1) = 0$, punkt ten jest *punktem przegięcia* n° (383).

A zatem, *gdy jakakolwiek krzywa posiada punkt przegięcia, wklęsłość krzywej w przejściu przez ten punkt zmienia swój kierunek.*

Styczna przegięcia przecina krzywą w punkcie styczności.



Gdyby się miało jednocześnie $\varphi''(x_1) = 0$ i $\varphi'''(x_1) = 0$, dyskussya n^ru poprzedzającego mogłaby się w zupełności zastosować i znaleźlibyśmy że wklęsłość jest zwróconą w stronę y dodatnych lub odjemnych, stosownie do tego czy $\varphi^{\text{IV}}(x_1)$ jest dodatną czy odjemną.

W ogóle, gdy pochodne zacząwszy od drugiej aż do pochodnej rzędu p włącznie są zerami, czyli gdy się ma

(6) $\varphi''(x_1)=0, \quad \varphi'''(x_1)=0, \ldots.. \quad \varphi^p(x_1)=0;$

styczna w punkcie (x_1y_1) *spotyka krzywą w* ($p+1$) *punktach zlewających się w jeden.* Mówi się wtedy, że *styczna ma z krzywą styczność rzędu* p, *jeśli punkt* (x_1y_1) *jest punktem zwyczajnym krzywej.*

Jeśli p jest liczbą parzystą, styczna przecina krzywą w tym punkcie, a wklęsłość zmienia swój kierunek; jeśli zaś p jest liczbą nieparzystą, styczna zostawia krzywą z jednej strony, a wklęsłość zwraca się ku y dodatnym lub odjemnym, stosownie do tego czy pochodna $\varphi^{p+1}(x_1)$ jest dodatną lub odjemną.

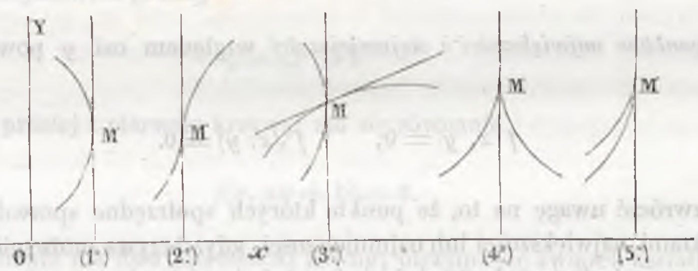
W całym tym rozbiorze przypuszczamy, że punkt pod uwagę wzięty nie jest punktem wielokrotnym krzywej; w dalszym ciągu zajmiemy się nauką o punktach wielokrotnych.

388. Uwaga II.

Dowodzenia numerów poprzedzających były oparte na przypuszczeniu że $\varphi(x)$ daje się rozwinąć według wzoru *Taylora*, to jest, że pochodne uważane w tem rozwinięciu nie są nieskończonemi. W razie gdy ta okoliczność się przedstawia wyniki poprzednio wysłowione nie zawsze mają miejsce i należy wtedy uciec się do innych metod, albo do zmiany osi spółrzędnych celem studjowania krzywej.

Gdyby się na przykład miało $\varphi'(x_1)=\infty$, styczna w punkcie (x_1y_1) byłaby równoległą do osi y; krzywa mogłaby w tym razie przedstawiać w stosunku do osi y : największość (maximum) lub najmniejszość (minimum), przegięcie lub zwykły punkt podwójny, albo wreszcie punkt zwrotu.

Rozbiór własności krzywej w podobnych punktach nie przedstawi żadnej trudności po uprzedniem



podaniu teoryi o punktach podwójnych. Zauważymy więc tylko na teraz, że wnioski numerów poprzednich nie dadzą się w podobnych razach zastosować.

I tak, w przypadkach (1°) i (2°) wklęsłość zmienia kierunek w M; w przypadkach zaś (4°) i (5°) wklęsłość nie zmienia kierunku. W tych warunkach, pochodna $\varphi''(x_1)$ jest w ogóle nieskończonością.

VIII° Największości (maxima) i najmniejszości (minima).

389. Mówi się że krzywa przedstawia w pewnym punkcie *największość* lub *najmniejszość* względem jakiejkolwiek prostej danej, gdy styczna do krzywej w tym punkcie jest równoległą do tej prostej. Punkta takie nazywają się *punktami największości* lub *najmniejszości* względem prostej uważanej. Wyrażenie to winno być pojmowanem w myśl powyżej podanego określenia. Używać go będziemy niekiedy dla krótkości wysłowienia.

Zauważmy mimochodem, że największości lub najmniejszości jakiejkolwiek krzywej nie stanowią jej właściwości wyłącznych, gdyż ich położenie zależy od prostej do której się je odnosi.

Poszukiwania największości i najmniejszości krzywej mają więc po prostu na celu dokładność jej budowy; w tym razie zwykle się ich szuka odnośnie do osi spółrzędnych.

Krzywa przedstawia największość lub najmniejszość względem osi x, gdy jej styczna jest równoległą do osi x; to jest, gdy współczynnik kątowy stycznej jest zerem.

Krzywa przedstawia największość lub najmniejszość względem osi y, gdy styczna do niej jest równoległą do osi y; to jest, gdy współczynnik kątowy stycznej jest równym ilości nieskończenie wielkiej.

Jeśli równanie krzywej jest

(1) $$f(x, y) = 0,$$

spółczynnik kątowy stycznej jest

(2) $$y'_x = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Z tego co powiedziano powyżej wypada że:

1° Spółrzędne *punktów największości* i *najmniejszości* względem osi x powinny sprawdzać dwa równania:

(3) $$f(x, y) = 0, \qquad f'_x(x, y) = 0.$$

II° Spółrzędne *punktów największości* i *najmniejszości* względem osi y powinny sprawdzać dwa równania:

(4) $$f(x, y) = 0, \qquad f'_y(x, y) = 0.$$

Trzeba jednak zwrócić uwagę na to, że punkta których spółrzędne sprawdzają te równania nie koniecznie są punktami największości lub najmniejszości, gdyż krzywa może mieć punkta przegięcia, w których styczne mogą być równoległemi do jednej lub drugiej z dwóch osi spółrzędnych.

Równania (3) i (4) są (jak zobaczymy poniżej) jednocześnie zadowolnione spółrzędnemi punktów wielokrotnych. W tym razie szukanie punktów największości lub najmniejszości jest bezużytecznem.

IX° Styczna podwójna. — Styczna wspólna dwom kołom.

W dalszym ciągu dzieła będziemy rozpatrywać własności stycznych podwójnych, obecnie zaś nadmienimy tylko o sposobie mogącym służyć do wyznaczenia ich w razie spółrzędnych kartezyańskich.

Niech będzie równanie krzywej

(1) $$f(x, y) = 0$$

i

(2) $$y = ax + b.$$

równanie prostej. Spółrzędne punktów przecięcia się prostej z krzywą będą dane równaniem

$$(3) \qquad f(x,\ ax + b) = 0.$$

Ażeby prosta pod uwagę wzięta była styczną podwójną, potrzeba aby to równanie miało dwie pary pierwiastków podwójnych; to jest, że pierwsza strona tego równania powinna być podzielną przez wyrażenie kształtu $(x - \alpha)^2 (x - \beta)^2$.

Otóż wiadomem jest że aby to miało miejsce, trzeba zadosyć uczynić dwom równaniom warunkowym, takim jak

$$(4) \qquad \varphi(a,\ b) = 0, \qquad \Psi(a,\ b) = 0;$$

te dwa związki wyznaczą nieznane a i b. Można ztąd widzieć, że

Krzywa jakakolwiek, posiada w ogóle styczne podwójne; ale że ona nie posiada wogóle stycznych wielokrotnych wyższego rzędu.

Istnienie punktów wielokrotnych zmniejsza liczbę stycznych podwójnych. Wyznaczenie liczby stycznych podwójnych jest zadaniem trudnem, którego tutaj nie będziemy dotykać.

391. Styczna wspólna dwom krzywym.

Niech będą równania dwóch krzywych

$$(1) \qquad f(x,\ y) = 0, \qquad F(x,\ y) = 0.$$

Weźmy równanie jakiejkolwiek prostej

$$(2) \qquad y = ax + b$$

i szukajmy przecięć tej prostej z pierwszą krzywą; ma się równanie

$$f(x,\ ax + b) = 0.$$

Wyrażając że to równanie ma dwa pierwiastki równe; otrzyma się związek kształtu

$$(3) \qquad \varphi(a,\ b) = 0.$$

Szukajmy podobnież przecięć prostej z drugą krzywą, otrzyma się

$$F(x,\ ax + b) = 0;$$

a wyrażając że to równanie ma dwa pierwiastki równe, będziemy mieli związek

$$(4) \qquad \Phi(a,\ b) = 0.$$

Te dwa równania (3) i (4) wyznaczą niewiadome a i b; zkąd się wyprowadzą, posiłkując się równaniem (2) równania stycznych wspólnych.

X° Krzywe styczne. — Krzywe ortogonalne.

392. Warunek aby dwie krzywe były do siebie stycznemi.

Niech będą równania dwóch krzywych

$$f(x, y) = 0, \qquad F(x, y) = 0.$$

Przypuśćmy że te dwie krzywe są względem siebie styczne i niech będą x_1, y_1 spółrzędne punktu styczności.

Spółrzędne x_1, y_1 powinny sprawdzać równania dwóch krzywych, co daje

$$(2) \qquad f(x_1, y_1) = 0, \qquad F(x_1, y_1) = 0;$$

co więcej, styczne odpowiednie do dwóch krzywych w tym punkcie, powinny zlać się w jedne. Aby warunek ten miał miejsce dosyć jest aby spółczynniki kątowe tych dwóch stycznych były sobie równe, to jest

$$-\frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}$$

albo

$$(3) \qquad f'_{x_1}F'_{y_1} - f'_{y_1}F'_{x_1} = 0.$$

Ażeby krzywe (1) były do siebie stycznemi w pewnym punkcie (x_1, y_1), spółrzędne tego punktu powinny sprawdzać trzy równania (2) i (3); należy więc zadosyć uczynić równaniu warunkowemu, które się otrzyma rugując x_1 i y_1 między równaniami (2) i (3).

Stosując tę metodę do dwóch kół

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0 \\ (x - d)^2 + y^2 - r^2 = 0, \end{cases}$$

znajdzie się, że stałe d, R, r, winny zadawalniać jeden z następujących związków (jeśli $R > r$)

$$d = R + r, \qquad d = R - r.$$

393. Warunek aby dwie krzywe były ortogonalne.

Dwie krzywe zwią się ortogonalnemi w jakimkolwiek punkcie ich wzajemnego przecięcia się, jeśli ich styczne w tym punkcie są do siebie prostopadłe.

Niech będą równania dwóch krzywych

$$(1) \qquad f(x, y) = 0, \qquad F(x, y) = 0;$$

a (x_1, y_1) spółrzędne jednego z ich punktów przecięcia się; będzie się miało naprzód

$$(2) \qquad f(x_1, y_1) = 0, \qquad F(x_1, y_1) = 0.$$

Ażeby styczne w tym punkcie były do siebie prostopadłemi, koniecznem i wystarczającem jest aby iloczyn z ich współczynników kątowych był równym -1, przypuszczając że się odnosi krzywe do osi prostokątnych; powinno się więc mieć

$$f'_{x_1}.F'_{x_1} + f'_{y_1}.F'_{y_1} = 0. \tag{3}$$

Otrzyma się warunek aby dwie krzywe były ortogonalnemi rugując x_1 i y_1 między trzema równaniami (2) i (3).

394. Jeśli zastosujemy tę metodę do dwóch kół

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0 \\ (x-d)^2 + y^2 - r^2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

znajdzie się na równanie warunkowe

$$d^2 = R^2 + r^2 \tag{2}$$

czyli, że *kwadrat z odległości środków winien być równym summie kwadratów z promieni.*

2° Uważajmy dwie krzywe

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} - 1 = 0. \tag{2}$$

Jeśli się przypuści $\lambda > c$ a $\mu < c$, c będąc ilością stałą, równanie (1) przedstawiać będzie szereg elips, których osie będą osiami spółrzędnych; równanie zaś (2) przedstawi szereg hyperbol mających także osie spółrzędnych za osie. Te krzywe drugiego rzędu, jak to później zobaczymy, mają też same ogniska i zowią się *konicznemi jednoogniskowemi* (*homofocales*).

Dowiedziemy teraz, że *jakieby nie były wartości stałych* λ i μ, *te krzywe będą ortogonalnemi.*

Spółrzędne x i y punktów wspólnych tym dwóm krzywym mają za wartości

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\lambda^2\mu^2}{c^2} \\ y^2 = \dfrac{(\lambda^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)}{c^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Te krzywe są ortogonalnemi, jeśli spółrzędne punktu przecięcia sprawdzają związek

$$f'_x.F'_x + f'_y.F'_y = 0,$$

który na zasadzie równań (1) i (2) będzie

$$\frac{x^2}{\lambda^2\mu^2} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)}. \tag{4}$$

Otóż zastępując x i y przez ich wartości (3), związek ten sprowadza się widocznie do tożsamości, jakieby nie były λ i μ. Więc.....

3° Niech będą jeszcze dwie krzywe

$$(1) \qquad y^2 = 2\lambda x + \lambda^2,$$
$$(2) \qquad y^2 = 2\mu x + \mu^2;$$

$\lambda \gtrless \mu$; te dwa równania przedstawiają parabole, mające początek spółrzędnych za ognisko wspólne, a zaś oś, oś odciętych.

Spółrzędne punktów wspólnych tym dwom krzywym mają za wartość

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{\lambda + \mu}{2} \\ y^2 &= -\lambda\mu. \end{aligned} \right.$$

Otóż, *jakieby nie były* λ i μ, *krzywe te będą ortogonalnemi*, bo związek

$$f'_x F'_x + f'_y F'_y = 0 \qquad \text{albo} \qquad \lambda\mu + y^2 = 0$$

sprowadza się do tożsamości dla wartości (3).

XI° Krzywe obwijające.

395. Określenie. — Równanie.

Przypuśćmy, że równanie jakiejkolwiek krzywej

$$(1) \qquad C = f(x, y, a) = 0$$

zawiera jakąkolwiek stałą dowolną a; jeśli się zmienia parametr a, otrzyma się szereg ciągły krzywych.

Miejsce po sobie następujących przecięć tych krzywych, tworzy krzywą, nazwaną krzywą obwijającą krzywych C.

Jakakolwiek krzywa może zawsze być uważaną jako miejsce po sobie następujących przecięć jej stycznych, albo obwijającą swych stycznych.

Ażeby otrzymać równanie krzywej obwijającej, przypuśćmy że się nadaje parametrowi pewną wartość a; otrzyma się wtedy jakąś krzywą C.

$$(1) \qquad C = f(x, y, a) = 0;$$

dając następnie parametrowi wartość $(a + \Delta a)$, będziemy mieli inną krzywą C′ tego samego szeregu; jej równanie będzie

$$(2) \qquad C' = f(x, y, a + \Delta a) = 0;$$

spółrzędne punktów przecięcia się krzywych C i C′ sprawdzą zarazem równania (1) i (2).

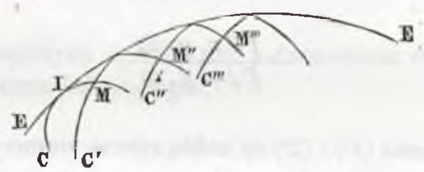
Otóż można zastąpić jedno z tych dwóch równań przez następującą kombinacyą równań (1) i (2)

$$\frac{f(x,\ y,\ a + \Delta a) - f(x,\ y,\ a)}{\Delta a} = 0\,;$$

tak, że spółrzędne punktów przecięcia się krzywej C z krzywą nieskończenie blizką C′ (jeśli Δa jest ilością nieskończenie małą) będą dane przez dwa równania

$$(3)\qquad \begin{cases} f(x,\ y,\ a) = 0 \\ \dfrac{f(x,\ y,\ a + \Delta a) - f(x,\ y,\ a)}{\Delta a} = 0. \end{cases}$$

Kiedy Δa dąży do zera, krzywa C′ zbliża się do krzywej C; a dla $\Delta a = 0$ te dwie krzywe przystaną do siebie. Zanim jednak Δa stanie się zerem, krzywe C i C′ mają skończoną liczbę takich punktów



przecięcia jak M; granica położenia tych punktów przecięcia jest dokładnie wyznaczoną, gdy się Δa zbliża do zera. Punkta te będą dane przez równania (3), wprowadzając w nie hypotezę $\Delta a = 0$. Drugie z równań (3) stanie się wtedy

$$(4)\qquad f'_a(x,\ y,\ a) = 0.$$

Przeto, a będąc danem, równanie (4) i pierwsze z równań (3) wyznaczają granicę położenia punktów przecięcia się krzywej C z krzywą nieskończenie blizką. Niewyznaczoność została usuniętą kombinując równania (1) i (2) w sposób powyżej wskazany i dzieląc to nowe wyrażenie przez Δa.

Zatem, *miejsce po sobie idących przecięć krzywych* C *albo obwijające krzywych* C *otrzyma się, rugując parametr dowolny* a *pomiędzy dwoma równaniami*

$$\begin{cases} (5)\qquad f(x,\ y,\ a) = 0 \\ (6)\qquad f'_a(x,\ y,\ a) = 0\,; \end{cases}$$

pierwsza strona równania (6) jest pochodną względem stałej dowolnej z pierwszej strony danego równania.

396. Krzywa obwijająca styka się z krzywemi zmiennemi w punktach, w których dwie krzywe po sobie idące ją spotykają.

Niech będą x i y spółrzędne punktu przecięcia dwóch krzywych po sobie następujących C i C′; te spółrzędne będą dane przez równania

$$(5)\qquad f(x,\ y,\ a) = 0, \qquad (6)\qquad f'_a(x,\ y,\ a) = 0.$$

Współczynnik kątowy stycznej do krzywej C

(7) $$C = f(x, y, a) = 0,$$

w punkcie (x, y) ma za wartość

(1°) $$-\frac{f'_x(x, y, a)}{f'_y(x, y, a)}.$$

Uważając a jako funkcyą z x i y, wyznaczoną związkiem (6), można będzie przedstawić krzywą obwijającą równaniem (5) albo (7); współczynnik kątowy stycznej do obwijającej ma wtedy za wartość

$$-\frac{f'_x(x, y, a) + a'_x . f'_a(x, y, a)}{f'_y(x, y, a) + a'_y . f'_a(x, y, a)};$$

wyrażenie, sprowadzające się za pomocą związku (6) do następującego

(2°) $$-\frac{f'_x(x, y, a)}{f'_y(x, y, a)}.$$

Dowiedziemy teraz, że wyrażenia (1°) i (2°) są sobie równe numerycznie; ich kształt algebraiczny jest tenże sam, tylko w równaniu (1°) a jest stałą, a w wyrażeniu (2°) a jest funkcyą x i y. Ale ponieważ spółrzędne x i y powinny sprawdzać równania (5) i (6), w których stała a posiada też samą wartość, przeto wartość a (funkcyi x i y), wyprowadzona z równania (6) ma też samą numeryczną wartość jak w równaniach (5) lub (7).

Wyrażenia więc (1°) i (2°) są numerycznie równemi; to jest, że styczne do obwijającej i do krzywej zmiennej C, w punkcie gdzie ta ostatnia krzywa spotkaną jest przez krzywą nieskończenie jej blizką, zlewają się w jednę. Przeto.....

397. Może się zdarzyć, że równanie krzywej zmiennej zależy od dwóch parametrów dowolnych a i b, połączonych z sobą jakimś związkiem. Niech będzie na przykład,

(1) $$f(x, y, a, b) = 0$$

równanie krzywej i

(2) $$\varphi(a, b) = 0,$$

związek między stałemi dowolnemi a i b.

Ażeby otrzymać obwijającą, możemy w równaniu (1) uważać b za funkcyą a, wyznaczoną związkiem (2); otrzymamy biorąc pochodną pierwszej strony równania (1) względem a i równając takową z zerem

$$f'_a(x, y, a, b) + f'_b(x, y, a, b) . b'_a = 0.$$

Ale związek (2) daje nam podobnież

$$\varphi'_a(a, b) + \varphi'_b(a, b) . b'_a = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad b'_a = -\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b};$$

równanie poprzednie stanie się więc

$$f'_a(x, y, a, b) - \frac{\varphi'_a}{\varphi'_b} \cdot f'_b(x, y, a, b) = 0.$$

Otrzymamy zatem *równanie obwijającej* rugując a i b między trzema równaniami

$$\begin{cases} (1) \quad f(x, y, a, b) = 0, \\ (2) \quad \varphi(a, b) \qquad = 0, \\ (3) \quad \dfrac{f'_a(x, y, a, b)}{\varphi'_a(a, b)} = \dfrac{f'_b(x, y, a, b)}{\varphi'_b(a, b)}. \end{cases}$$

398. Może się zdarzyć jeszcze że równanie krzywej

$$(1) \qquad f(x, y, a, b, c) = 0,$$

zależy od trzech parametrów dowolnych a, b, c i jest jednorodnem względem a, b, c; parametry zaś są między sobą połączone związkiem *jednorodnym*

$$(2) \qquad \varphi(a, b, c) = 0.$$

Dzieląc te dwa równania przez jakąkolwiek potęgę z c odpowiednio dobraną i zakładając

$$\frac{a}{c} = \alpha, \qquad \frac{b}{c} = \beta,$$

można je przywieść do kształtu

$$(3) \qquad \begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta, 1) = 0 \\ \varphi(\alpha, \beta, 1) \qquad = 0. \end{cases}$$

Według twierdzenia poprzedzającego otrzyma się obwijającą rugując α i β między równaniami (3) i następującem

$$(4) \qquad \frac{f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta, 1)}{\varphi'_\alpha(\alpha, \beta, 1)} = \frac{f'_\beta(x, y, \alpha, \beta, 1)}{\varphi'_\beta(\alpha, \beta, 1)}.$$

Otóż widocznem jest, że zastępując α i β przez $\frac{a}{c}$ i $\frac{b}{c}$ i znosząc mianownik c, $\varphi'_\alpha(\alpha, \beta, 1)$ na przykład stanie się $\varphi'_a(a, b, c)$, ponieważ $\varphi'_\alpha(\alpha, \beta, 1)$ jest złożoną z α i β tak samo jak $\varphi'_a(a, b, c)$ z a i b; rzecz się ma tak samo z innemi.

Otrzyma się więc równanie obwijającej rugując a, b, c między trzema równaniami jednorodnemi

$$(5) \qquad \begin{cases} f(x, y, a, b, c) = 0 \\ \varphi(a, b, c) = 0 \\ \dfrac{f'_a}{\varphi'_a} = \dfrac{f'_b}{\varphi'_b}. \end{cases}$$

Z ostatniego z tych równań wywodzi się

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} = \frac{af'_a + bf'_b}{a\varphi'_a + b\varphi'_b};$$

otóż na zasadzie twierdzenia o funkcyach jednorodnych i pierwszych równań (5) ma się

$$af'_a + bf'_b + cf'_c = m.f(x, y, a, b, c) = 0;$$

$$a\varphi'_a + b\varphi'_b + cf'_c = n.\varphi(a, b, c) = 0;$$

związek poprzedni stanie się więc

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} = \frac{-cf'_c}{-c\varphi'_c} = \frac{f'_c}{\varphi'_c}.$$

Tak więc *równanie obwijającej* otrzyma się rugując a, b, c, między trzema równaniami następującemi:

$$\begin{cases} (1^\circ) & f(x, y, a, b, c) = 0 \\ (2^\circ) & \varphi(a, b, c) = 0 \\ (3^\circ) & \dfrac{f'_a}{\varphi'_a} = \dfrac{f'_b}{\varphi'_b} = \dfrac{f'_c}{\varphi'_c}. \end{cases}$$

XII° Zastosowania.

399. Uważajmy równanie

(1) $$\lambda^2 L - 2\lambda M + N = 0,$$

w którem L, M, N są funkcyami x i y, a λ parametrem dowolnym.

Szukajmy obwijającej krzywych (1). W tym celu należy wyrugować λ pomiędzy równaniem (1) i pochodną względem λ, to jest

$$\lambda L - M = 0.$$

Tym sposobem otrzyma się następujące równanie *obwijającej*

(2) $$M^2 = LN.$$

N. B. Jeśli L, M, N są funkcyami linijnemi x i y, równanie (1) przedstawia prostą, a równanie (2) krzywą drugiego rzędu, styczną do prostych $L = 0$, $N = 0$ w punktach spotkania się tych prostych z linią prostą $M = 0$.

Krzywa (2) będąc obwijającą prostych (1), równanie (1) będzie równaniem jakiejkolwiek stycznej do krzywej (2).

400. Rozwinięte.

Nazywa się *rozwinięta* jakiejkolwiek krzywej miejsce po sobie następujących przecięć normalnych do tej krzywej. Rozwinięta jest więc obwijającą normalnych.

Krzywa pierwotna nosi miano *rozwijającej*.

1° Rozwinięta elipsy.

Weźmy równanie elipsy pod kształtem n° (344)

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

i przypuśćmy osie prostokątne. Spółrzędne jakiegokolwiek punktu tej krzywej będą mogły być według n^ru^ (335) przedstawione przez

(2) $$\begin{cases} x_1 = a\,\mathrm{dos}.\varphi, \\ y_1 = b\,\mathrm{wst}.\varphi; \end{cases}$$

a równanie normalnej w tym punkcie będzie n° (367)

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1),$$

albo, (zakładając $c^2=a^2-b$)

$$b^2x_1y-a^2y_1x+c^2x_1y_1=0;$$

albo wreszcie, na zasadzie wartości (2),

(3) $$\frac{by}{\mathrm{wst}\varphi}-\frac{ax}{\mathrm{dos}\varphi}+c^2=0 \qquad \text{(normalna w punkcie } \varphi).$$

Należy znaleźć obwijającą prostych (3); to jest wyrugować φ między równaniem (3) i jego pochodną względem φ.

Celem uproszczenia rachunku, przed wzięciem pochodnej względem φ, pomnóżmy równanie (3) przez wst.φ; co daje

$$by-ax.\mathrm{st}.\varphi+c^2.\mathrm{wst}\varphi=0.$$

Weźmy pochodną z tego ostatniego równania, znajdziemy natychmiast

$$x=\frac{c^2}{a^2}\,\mathrm{dos}^3\varphi;$$

wstawiając tę wartość w równanie (3), albo też różniczkując równanie (3) po uprzedniem pomnożeniu go przez dos.φ, znajdziemy

$$y = -\frac{c^2}{b}\,\mathrm{wst}^3\varphi.$$

Zatem *spółrzędne punktu przecięcia się dwóch po sobie następujących normalnych do elipsy* (1) *będą*

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\,\mathrm{dos}^3\varphi, \\ y = -\dfrac{c^2}{b}\,\mathrm{wst}^3\varphi. \end{cases}$$

Punkt ten jest środkiem *koła ściśle stycznego* (*cercle osculateur*) w punkcie, którego parametrem jest φ.

Rozwinięta otrzyma się, rugując φ między dwoma równaniami (4). Z tych równań wypada

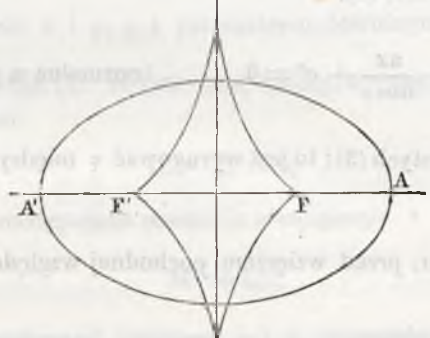
$$\mathrm{dos}\varphi = \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \mathrm{wst}\varphi = -\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1}{3}},$$

po uprzedniem założeniu że

$$(5)\qquad A = \frac{c^2}{a}, \qquad B = \frac{c^2}{b}, \qquad c^2 = a^2 - b^2.$$

Wyprowadza się ztąd

$$(6)\qquad \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$



takiem jest *równanie rozwiniętej elipsy*,

Uwaga. Rozwinięta hyperboli wyprowadzi się z poprzedzających wyników, zamieniając b na $b\sqrt{-1}$.

2° Rozwinięta paraboli.

Weźmiemy równanie paraboli pod kształtem n^ru (341)

$$(1)\qquad y^2 - 2px = 0$$

i przypuścimy że osie są prostokątne. Normalna w punkcie (x_1, y_1) jest

(2) $$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

z warunkiem

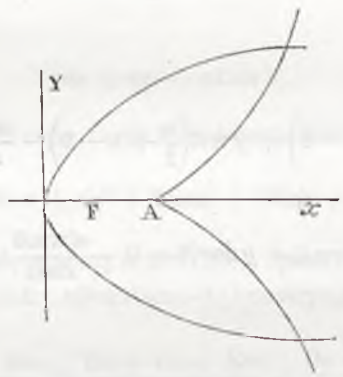
(3) $$y_1^2 - 2px_1 = 0.$$

Trzeba wyrugować x_1 i y_1 między równaniami (2) i (3) i równaniem następującem n° (397)

(4) $$\frac{-p + x - x_1}{y_1} = \frac{y_1}{p}.$$

Równania (2) i (4) rozwiązane względem x i y dają

(5) $$\begin{cases} x = p + 3x_1, \\ y = -\dfrac{2x_1 y_1}{p}; \end{cases} \qquad y_1^2 = 2px_1;$$



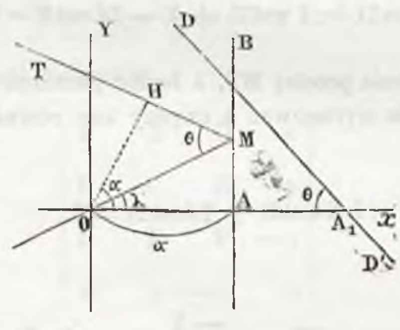
te równania wyznaczają *spółrzędne przecięcia się dwóch po sobie następujących normalnych paraboli* (1).

Rozwinięta otrzyma się rugując x_1 i y_1 między trzema równaniami (5); znajduje się tym sposobem

(6) $$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3;$$

jestto równanie *rozwiniętej paraboli.*

401. *Wierzchołek kąta stałego* OMT *posuwa się na prostej stałej* AB, *gdy jedno z ramion kąta prze-*



chodzi przez punkt stały O; *drugie ramie* MT *obwija jakakolwiek parabola.*

Jeśli p jest odległością OH początku od prostej MT i jeżeli α oznacza kąt prostej OH z osią Ox, równanie prostej MT będzie

$$(1) \qquad x \operatorname{dos} \alpha + y \operatorname{wst} \alpha - p = 0.$$

Jeśli oznaczymy przez θ kąt dany OMT, przez d odległość stałą OA a przez λ kąt zmienny MOA, otrzymamy

$$d = \mathrm{OM} \operatorname{dos}\lambda, \qquad \mathrm{OH} \quad \text{albo} \quad p = \mathrm{OM} \operatorname{wst}\theta;$$

zkąd

$$(1^\circ) \qquad p = \frac{d \operatorname{wst}\theta}{\operatorname{dos}\lambda};$$

ma się jeszcze

$$(2^\circ) \qquad \alpha - \lambda = \frac{\pi}{2} - \theta;$$

równanie prostej MT będzie więc

$$x \operatorname{dos}\left(\frac{\pi}{2} + \lambda - \theta\right) + y \operatorname{wst}\left(\frac{\pi}{2} + \lambda - \theta\right) - \frac{d \operatorname{wst}\theta}{\operatorname{dos}\lambda} = 0$$

albo

$$(2) \qquad x \operatorname{wst}(\theta - \lambda) + y \operatorname{dos}(\theta - \lambda) - \frac{d \operatorname{wst}\theta}{\operatorname{dos}\lambda} = 0,$$

λ jest parametrem dowolnym.

Jeśli się założy

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = x \operatorname{wst}\theta + y \operatorname{dos}\theta, \\ \mathrm{Y} = x \operatorname{dos}\theta - y \operatorname{wst}\theta, \end{cases}$$

równanie (2) przedstawi się pod kształtem prostszym

$$\mathrm{X} \operatorname{dos}^2\lambda - \mathrm{Y} \operatorname{wst}\lambda . \operatorname{dos}\lambda = d \operatorname{wst}\theta,$$

albo jeszcze

$$(4) \qquad \mathrm{X} \operatorname{dos} 2\lambda - \mathrm{Y} \operatorname{wst} 2\lambda + \mathrm{X} - 2d \operatorname{wst}\theta = 0;$$

takim jest kształt ostateczny równania prostej MT, λ będąc parametrem dowolnym. Ażeby otrzymać obwijającą tej prostej trzeba będzie wyrugować λ między tem równaniem i jego pochodną względem λ, a mianowicie

$$(5) \qquad \mathrm{X} \operatorname{wst} 2\lambda + \mathrm{Y} \operatorname{dos} 2\lambda = 0.$$

Z równania (5) wywodzi s

$$\operatorname{st}.2\lambda = \frac{-\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}, \qquad \operatorname{wst} 2\lambda = \frac{-\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}}, \qquad \operatorname{dos} 2\lambda = \frac{+\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}};$$

podstawiając te wartości w równanie (4) i czyniąc takowe wymiernem, wypada

$$X^2 + Y^2 = (X - 2d\,\mathrm{wst}\theta)^2;$$

albo mając wzgląd na wartości (3)

$$x^2 + y^2 = (x\,\mathrm{wst}\theta + y\,\mathrm{dos}\theta - 2d\,\mathrm{wst}\theta)^2. \tag{6}$$

Zobaczymy później, że to równanie przedstawia parabolę mającą za ognisko początek spółrzędnych 0, a za kierownicę prostą

$$x\,\mathrm{wst}\theta + y\,\mathrm{dos}\theta - 2d\,\mathrm{wst}\theta = 0;$$

odległość tej prostej od początku spółrzędnych jest $2d\,\mathrm{wst}\theta$; a kąt z osią $0x$ prostopadłej spuszczonej z punktu 0 na tę prostą jest $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. Zatem jeśli się weźmie na $0x$ punkt A_1, taki aby $0A_1 = 2d$; i jeśli się poprowadzi przez A_1 prostą DD_1 czyniącą kąt θ z linią $A_1 0$, linia DD_1 będzie kierownicą paraboli.

402. *Znaleźć obwijającą prostej*

$$ux + vy - wz = 0, \tag{1}$$

parametry u, v, w *przypuszczając złączone z sobą związkiem jednorodnym drugiego stopnia*

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0. \tag{2}$$

Stosując do tego przypadku regułę podaną w n^rze^ (398), spostrzega się, że otrzymać można obwijającą tej prostej, rugując u, v, w między równaniem (1) i następującemi

$$\frac{Au + Bv + Dw}{x} = \frac{Bu + Cv + Ew}{y} = \frac{Du + Ev + Fw}{-z}. \tag{3}$$

Jeśli oznaczymy przez k wartość wspólną tych stosunków, równanie szukane otrzyma się rugując u, v, w, k, między równaniami

$$\left\{\begin{aligned} &Au + Bv + Dw - kx = 0, \\ &Bu + Cv + Ew - ky = 0, \\ &Du + Ev + Fw + kz = 0, \\ &xu + yv - zw - 0 = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Wynikiem z tego rugowania jest widocznie

$$\begin{vmatrix} A & B & D & x \\ B & C & E & y \\ D & E & F & -z \\ x & y & -z & 0 \end{vmatrix} = 0; \tag{5}$$

obwijająca prostych (1) *jest więc krzywa drugiego rzędu.*

Na zasadzie n[ru] (110) możemy uważać u, v, w, jako spółrzędne styczneczkowe prostej (1), a równanie (2) będzie *równaniem styczneczkowem* obwijającej tych prostych; ale równanie to jest n[ro] (355) równaniem ogólnem krzywych 2[iej] klassy.

Równanie (5) jest przeto równaniem, w spółrzędnych kartezyańskich, krzywych 2[iej] klassy; a ztąd widzimy, że *jakakolwiek krzywa* 2[iej] *klassy jest krzywą* 2[go] *rzędu;* możnaby, z równania (5) wywieść dyskussyą krzywych 2[iej] klassy, streszczoną w n[rze] (363); nie będziemy tu jednak zatrzymywać się nad tą metodą.

§ II. — SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE.

I° Równanie stycznej.

403. Niech będzie równanie jakiejkolwiek krzywej w spółrzędnych trzylinijnych

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = 0,$$

a X_1, Y_1, Z_1, spółrzędne jakiegokolwiek punktu tej krzywej.

Równanie stycznej w tym punkcie będzie

$$(2) \qquad Xf'_{X_1} + Yf'_{Y_1} + Zf'_{Z_1} = 0,$$

z warunkiem

$$(2\ bis) \qquad f(X_1, Y_1, Z_1) = 0.$$

Ażeby tego dowieść, przypomnijmy sobie że spółrzędne jakiegokolwiek punktu M_2 prostej przechodzącej przez punkta $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ i $M(X, Y, Z)$ są według n[ru] (90)

$$(3) \qquad \begin{cases} X_2 = X_1 + kX, \\ Y_2 = Y_1 + kY, \qquad \text{gdzie} \quad k = \dfrac{M_2M_1}{M\,M_2}; \\ Z_2 = Z_1 + kZ \end{cases}$$

przypuśćmy że punkt M_2 należy do krzywej, otrzyma się wtedy

$$f(X_1 + kX, \qquad Y_1 + kY, \qquad Z_1 + kZ) = 0,$$

albo, na zasadzie szeregu *Taylor'a*

$$(4) \qquad f(X_1, Y_1, Z_1) + k\left[Xf'_{X_1} + Yf'_{Y_1} + Zf'_{Z_1}\right] + \frac{k^2}{1.2}\left[X^2 f''_{X_1X_1} + \ldots\right] + \ldots = 0.$$

Otóż pierwszy wyraz tego równania jest zerem, jeśli się przypuści że punkt (X_1, Y_1, Z_1) znajduje się na krzywej; pierwsza strona równania (4) jest podzielną przez k; co powinno mieć miejsce, ponieważ równanie (4) wyznacza stosunki, według których krzywa dzieli odcinek M_1M; jeden z tych stosunków jest więc zerem. Jeśli prosta M_1M jest styczną w M_1, to jest, jeśli jeden z punktów jak na przykład M_2 zlewa się z punktem M_1, dwa z tych stosunków winny być zerem, a pierwsza strona równania (4) powinna być podzielną przez k^2. Zatem warunek, ażeby prosta M_1M była styczną w M_1, jest

$$Xf'_{X_1}+Yf'_{Y_1}+Zf'_{Z_1}=0.$$

Wyrażenie powyższe jest związkiem między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu M tej stycznej, jest ono zatem *równaniem stycznej*.

404. Można jeszcze dowieść to zadanie sposobem następującym:

Prosta (2) przechodzi najpierw przez punkt (X_1, Y_1, Z_1), gdyż funkcya $f(X, Y, Z)$ będąc jednorodną, ma się tożsamość

$$Xf'_X+Yf'_Y+Zf'_Z=m.f(X, Y, Z);$$

a na zasadzie związku (2 *bis*) ma się

$$X_1f'_{X_1}+Y_1f'_{Y_1}+Z_1f'_{Z_1}=0; \tag{5}$$

co wyraża, że prosta (2) przechodzi przez punkt (X_1, Y_1, Z_1).

Dowiedziemy teraz że prosta (2) przechodzi przez punkt nieskończenie blizki poprzedniego punktu, położony na krzywej, to jest, że równanie (2) jest sprawdzonem, jeśli się w niem zastąpi X, Y, Z, przez $(X_1+\delta X_1)$, $(Y_1+\delta Y_1)$, $(Z_1+\delta Z_1)$, przypuszczając że δX_1, δY_1, δZ_1, dążą do zera.

W rzeczy samej, gdy się podstawi za X, Y, Z, powyższe wartości, pierwsza strona równania (2) stanie się

$$(X_1f'_{X_1}+Y_1f'_{Y_1}+Z_1f'_{Z_1})+(\delta X_1f'_{X_1}+\delta Y_1f'_{Y_1}+\delta Z_1f'_{Z_1}); \tag{6}$$

według związku (5), pierwsza część tego wyrażenia jest zerem.

Co do drugiej części, można ją napisać, dzieląc przez δX_1,

$$f'_{X_1}+\frac{\delta Y_1}{\delta X_1}f'_{Y_1}+\frac{\delta Z_1}{\delta X_1}f'_{Z_1}. \tag{7}$$

Ponieważ punkt $(X_1+\delta X_1,\ Y_1+\delta Y_1,\ Z_1+\delta Z_1)$ znajduje się na krzywej, przeto powinno się mieć

$$f(X_1+\delta X_1, \quad Y_1+\delta Y_1, \quad Z_1+\delta Z_1)=0;$$

albo rozwijając za pomocą wzoru *Taylor'a* i zwracając uwagę na związek (2 *bis*)

$$\delta X_1f'_{X_1}+\delta Y_1f'_{Y_1}+\delta Z_1f'_{Z_1}+\frac{\delta X_1^2}{1.2}f''_{X_1X_1}+\ldots=0.$$

Jeśli podzielimy przez δX_1 i jeśli przypuścimy że δX_1, δY_1, δZ, zdążają do zera, powyższa równość da nam

(8) $$\text{granica}\left(f'_{X_1} + \frac{\delta Y_1}{\delta X_1} f'_{Y_1} + \frac{\delta Z_1}{\delta X_1} f'_{Z_1}\right) = 0,$$

gdyż stosunki $\frac{\delta Y_1}{\delta X_1}$, $\frac{\delta Z_1}{\delta X_1}$ mają w ogóle granicę skończoną. Wyrażenie (7), a zatem i (6) są więc zerami w granicy; czyli, że prosta (2) przechodzi przez punkt (X_1, Y_1, Z_1) i przez punkt nieskończenie blizki; ta prosta jest więc styczną w punkcie (X_1, Y_1, Z_1).

II° Styczne z jakiegokolwiek punktu zewnętrznego.

465. Niech będzie równanie krzywej w spółrzędnych trzylijnych

(1) $$f(X, Y, Z) = 0,$$

a X_0, Y_0, Z_0, spółrzędne jakiegokolwiek punktu danego; idzie o wyznaczenie stycznych, które z tego punktu do krzywej poprowadzić można. Jeśli X_1, Y_1, Z_1, są spółrzędnemi punktu styczności jednej ze stycznych, równanie tej stycznej będzie

$$\begin{cases} Xf'_{X_1} + Yf'_{Y_1} + Zf'_{Z_1} = 0 \\ \text{wraz z równaniem} \quad f(X_1, Y_1, Z_1) = 0. \end{cases}$$

Wyraźmy że ta prosta przechodzi przez punkt dany; spółrzędne punktów zetknięcia stycznych będą wyznaczone przez dwa równania następujące (znosząc wskaźniki 1)

(2) $$\begin{cases} f(X, Y, Z) = 0 \\ X_0 f'_X + Y_0 f'_Y + Z_0 f'_Z = 0. \end{cases}$$

Punkta styczności będą przeto przecięciami się dwóch krzywych, przedstawionych przez równania (2); pierwsze z tych równań daje krzywą uważaną, drugie będzie równaniem *krzywej* zetknięć.

Widzimy że *klassą* krzywej (1) jest $m(m-1)$, jeśli m jest rzędem tej krzywej.

III° Zastosowania do krzywych drugiego rzędu.

466. W spółrzędnych trzylinijnych równanie ogólne krzywych drugiego rzędu jest n^ro (352)

(1) $$A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0.$$

powtarzając bez odmiany rachunki n^ru (377), znajdziemy że *warunek aby prosta*

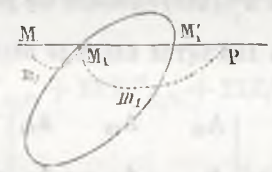
(2) $$aX + bY + cZ = 0,$$

była styczną do krzywej (1) jest

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & a \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

407. Równanie stycznych poprowadzonych do krzywej (1) przez punkt (α, β, γ).

Niech będzie P punktem uważanym; jeśli oznaczymy przez $\frac{m_1}{m_2}$ stosunek w jakim krzywa dzieli



odcinek PM, spółrzędne punktu M_1 będą według n^ru (90)

$$(4) \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{m_1 X + m_2\alpha}{m_1 + m_2} \\ Y_1 = \dfrac{m_1 Y + m_2\beta}{m_1 + m_2}, \quad \text{gdzie} \quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{M_1P}{MM_1} \\ Z_1 = \dfrac{m_1 Z + m_2\gamma}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Ponieważ spółrzędne X_1, Y_1, Z_1 winny sprawdzać równanie (1) krzywej, ma się więc

$$f(m_1X + m_2\alpha, \quad m_1Y + m_2\beta, \quad m_1Z + m_2\gamma) = 0,$$

albo rozwijając

$$(5) \qquad m_1^2 f(X, Y, Z) + m_1 m_2[\alpha f'_X + \beta f'_Y + \gamma f'_Z] + m_2^2 f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Równanie to wyznacza dwa stosunki, w jakich krzywa (1) *dzieli odcinek* MP.

Jeśli linia prosta MP jest styczną, te dwa stosunki są równe i odwrotnie.

Wyraźmy więc, że równanie (5) ma dwa pierwiastki równe; co daje

$$(6) \qquad 4f(\alpha, \beta, \gamma).f(X, Y, Z) = (\alpha f'_X + \beta f'_Y + \gamma f'_Z)^2;$$

albo

$$(6\ bis) \qquad 4f(\alpha, \beta, \gamma).f(X, Y, Z) = (X f'_\alpha + Y f'_\beta + Z f'_\gamma)^2;$$

tym sposobem będzie się mieć związek między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu, którejkolwiek ze stycznych poprowadzonych przez punkt (α, β, γ), czyli *równanie stycznych.*

Rozbiór w n^rze (374) zawarty stosuje się w tym przypadku; wypada zląd że:

Równanie stycznych mających za cięciwę zetknięć prostą

$$mX + nY + pZ = 0,$$

jest

$$(7) \qquad f(X, Y, Z) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & m \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & n \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} + (mX + nY + pZ)^2 . \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

408. Używając ponownie rachunków n^ru (380) dowodzi się jeszcze że

Warunek aby punkt (α, β, γ) był na zewnątrz krzywej drugiego rzędu (1) jest

$$(8) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Rachunki n^ru (380) dadzą się zastosować w tym razie; jeśli bowiem rozłoży się w kwadrat pierwszą stronę równania (6 *bis*), ta pierwsza strona sprowadzi się do summy dwóch kwadratów, z których jeden będzie miał za mianownik wyrażenie $-(B^2 - AC)$, jeśli się użyje w równaniu (6 *bis*) znakowania często w równaniach drugiego stopnia o dwóch zmiennych.

IV° Punkta przegięcia.

409. Jakakolwiek styczna przegięcia spotyka krzywą w trzech punktach zbiegających się z punktem styczności n^ro (381).

Według tego, niech będzie równaniem jakiejkolwiek krzywej rzędu m

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = 0,$$

a X_1, Y_1, Z_1, spółrzędne jakiegokolwiek punktu M, wziętego na tej krzywej.

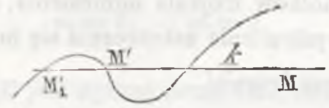
Wyrażenia

$$(2) \qquad \begin{cases} X_1 + kX, \\ Y_1 + kY, \\ Z_1 + kZ, \end{cases}$$

przedstawiają, z przybliżeniem na jeden czynnik n° (90), spółrzędne jakiegokolwiek punktu M′, dzielącego odcinek M_1M w stosunku

$$(2\ bis) \qquad k = \frac{M'M_1}{MM'}.$$

Jeśli się zastąpi X, Y, Z, przez wartości (2) w równaniu (1) krzywej, otrzyma się równanie



$$f(X_1+kX, \qquad Y_1+kY, \qquad Z_1+kZ)=0,$$

albo rozwijając za pomocą wzoru *Taylor'a*

$$(3) \qquad f(X_1, Y_1, Z_1)+[Xf'_{X_1}+Yf'_{Y_1}+Zf'_{Z_1}]+$$

$$+\frac{k^2}{1.2}[X^2f''_{X_1X_1}+Y^2f''_{Y_1Y_1}+Z^2f''_{Z_1Z_1}+2XYf''_{X_1Y_1}+2XZf''_{X_1Z_1}+2YZf''_{Y_1Z_1}]+\frac{k^3}{1.2.3}\ldots=0.$$

To równanie wyznacza wartości *m* stosunków *k*, według których krzywa (1) dzieli odcinek M_1M. Otóż, jeśli punkt M_1 należy do krzywej, jedna z tych wartości będzie zerem; jeśli prosta M_1M jest styczną w M_1, dwie z tych wartości będą zerami; nareszcie, jeśli prosta M_1M spotyka krzywą w trzech punktach zlewających się z punktem M_1, trzy z tych wartości będą zerami. Wyrazi się przeto, że punkt M_1 jest punktem przegięcia pisząc, że równanie (3) ma *trzy pierwiastki równe zeru*; co prowadzi do trzech równań warunkowych

$$(1^\circ) \qquad f(X_1, Y_1, Z_1)=0$$

$$(2^\circ) \qquad Xf'_{X_1}+Yf'_{Y_1}+Zf'_{Z_1}=$$

$$(3^\circ) \qquad X^2f''_{X_1\,1}+Y^2f''_{Y_1Y_1}+Z^2f''_{Z_1Z_1}+2XYf''_{X_1Y_1}+2XZf''_{X_1Z_1}+2YZf''_{Y_1Z_1}=0.$$

Punkt M_1 jest punktem stałym stycznej przegięcia, ale punkt M, albo (X, Y, Z) jest punktem jakimkolwiek tej stycznej. Równanie (2°) przedstawia prostą, która jest styczną przegięcia; i równanie winno być sprawdzonem przez spółrzędne jakiegokolwiek punktu tej prostej.

Inaczej mówiąc, równanie (3°) powinno przedstawiać układ dwóch prostych, z których jedna jest prostą (2°).

Ażeby równanie (3°) przedstawiało układ dwóch prostych potrzeba i wystarczy żeby n^ro (354)

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} f''_{X_1X_1} & f''_{X_1Y_1} & f''_{X_1Z_1} \\ f''_{Y_1X_1} & f''_{Y_1Y_1} & f''_{Y_1Z_1} \\ f''_{Z_1X_1} & f''_{Z_1Y_1} & f''_{Z_1Z_1} \end{vmatrix}=0;$$

Spółrzędne X_1, Y_1, Z_1 punktów przegięcia winny wtedy sprawdzać równania (1°) i (2°).

Te warunki są niezbędne; dodamy że one są wystarczającymi, gdyż jeżeli związki (1°) i (4°) są sprawdzone, pierwsza strona równania (3°) da się rozłożyć na dwa czynniki linijne, z których jeden będzie pierwszą stroną równania (2°). Ażeby dowieść tej drugiej części założenia, można przekształcić równanie (3°) za pomocą związków (1°) i (4°); albo też jeszcze, co jest łatwiejszem, można wziąć punkt (X_1, Y_1, Z_1) za jeden z wierzchołków trójkąta odniesienia, a za jeden z boków, styczną w tym punkcie; sprawdzenie powyższego wysłowienia uskutecznia się bez najmniejszej trudności.

Przeto, *spółrzędne punktów przegięcia krzywej.*

$$f(X, Y, Z) = 0 \tag{4}$$

powinny zarazem sprawdzać równanie

$$\begin{vmatrix} f''_{XX} & f''_{XY} & f''_{XZ} \\ f''_{YX} & f''_{YY} & f''_{YZ} \\ f''_{ZX} & f''_{ZY} & f''_{ZZ} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

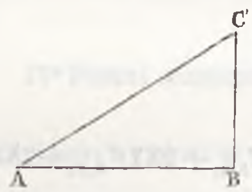
To równanie sprawdza się także przez spółrzędne punktów wielokrotnych.

Można zauważyć że krzywa rzędu m posiada $3m(m-2)$ punktów przegięcia.

410. Dowiedziemy tutaj ważnej własności punktów przegięcia w krzywych trzeciego rzędu :

WSZELKA PROSTA, PRZECHODZĄCA PRZEZ DWA Z PUNKTÓW PZREGIĘCIA KRZYWEJ 3$^{\text{go}}$ RZĘDU, PRZECHODZI KONIECZNIE I PRZEZ TRZECI PUNKT PRZEGIĘCIA.

Weźmy, w rzeczy samej, za boki trójkąta odniesienia prostą przechodzącą przez dwa punkta przegięcia A i B i styczne przegięcia AC i BC; te trzy proste tworzą trójkąt; gdyż jeśliby styczna przegięcia AC na przykład mogła zlać się z linią AB, spotkałaby ona krzywą 3$^{\text{go}}$ rzędu w czterech punktach (trzy punkta zlewające się w jeden A na AC i punkt B). To założywszy, równanie ogólne *krzywych trzeciego rzędu jest*



$$mX^3 + n_1Y^3 + p_2Z^3 + m_1X^2Y + m_2X^2Z + nY^2X + n_2Y^2Z + pZ^2X + p_1Z^2Y + hXYZ = 0. \tag{1}$$

Ponieważ ta krzywa ma przechodzić przez dwa punkta $A(Y = 0,\ Z = 0)$ i $B(X = 0,\ Z = 0)$, równanie (1) sprowadza się do

$$p_2Z^3 + m_1X^2Y + m_2X^2Z + nY^2X + n_2Y^2Z + pZ^2X + p_1Z^2Y + hXYZ = 0 \tag{2}$$

Prosta BC jest styczną przegięcia, więc pierwsza strona równania (2) powinna być sześcianem zupełnym, gdy się w niej uczyni $X = 0$; wprowadzając weń to przypuszczenie, otrzyma się

$$p_2Z^3 + n_2Y^2Z + p_1YZ^2;$$

wyrażenie nie mogące być zupełnym sześcianem chyba jeśli

$$n_2 = 0, \qquad p_1 = 0.$$

Wyrażając podobnież że prosta AC jest styczną przegięcia, znajdzie się

$$m_2 = 0, \qquad p = 0.$$

Równanie (2) sprowadzi się do

$$p_2 Z^3 + m_1 X^2 Y + n Y^2 X + h XYZ = 0;$$

równanie, mogące się przedstawić przez

(3) $$Z^3 = XYT,$$

zakładając

(3 *bis*) $$T = -\frac{1}{p_2}(m_1 X + nY + hZ).$$

Tego kształtu równanie pokazuje, że prosta $T = 0$ jest także styczną przegięcia, i że odpowiedni punkt przegięcia znajduje się na prostej $Z = 0$.

A zatem prosta, przechodząca przez dwa punkta przegięcia krzywej 3go rzędu, przechodzi koniecznie i przez trzeci punkt przegięcia.

§ III. — RÓWNANIA STYCZNECZKOWE. — SPÓŁRZĘDNE u, v.

1° Punkt zetknięcia jakiejkolwiek stycznej.

411. Niech będzie równanie stopnia n między zmiennemi u, v

(1) $$f(u, v) = 0;$$

u i v będąc spółrzędnemi jakiejkolwiek prostej, równanie (1) będzie przedstawiać krzywą obwijającą tych prostych; a jakiekolwiek rozwiązanie równania (1) da spółrzędne stycznej do tej krzywej.

Klassa krzywej równą jest stopniowi jej równania styczneczkowego.

W rzeczy samej, klassa krzywej jest równą liczbie stycznych które można do niej poprowadzić przez punkt jakikolwiek; jeśli więc

(2) $$Au + Bv + C = 0$$

jest równaniem tego punktu, spółrzędne stycznych poprowadzonych przez punkt (2) będą rozwiązaniami wspólnemi dla równań (1) i (2); liczba tych rozwiązań jest widocznie równą n.

412. Równanie punktu zetknięcia jakiejkolwiek stycznej.

Punkt zetknięcia stycznej jest przecięciem się tej stycznej ze styczną nieskończenie jej blizką. Niech będzie styczna (u_1, v_1), ma się najprzód

(3) $$f(u_1 v_1) = 0;$$

i jeśli $u_1 + \Delta u_1$, $v_1 + \Delta v_1$ są spółrzędnemi stycznej nieskończenie blizkiej, równanie punktu przecięcia tych dwóch prostych będzie nr° (120)

$$v - v_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta u_1}(u - u_1);$$

a w granicy stanie się

(4) $$v - v_1 = -\frac{f'_{u_1}}{f'_{v_1}}(u - u_1);$$

takiem jest równanie punktu zetknięcia.

Postępując jak w nrze (371) wywiedzie się że

Równanie punktu zetknięcia stycznej (u_1, v_1) z krzywą

(5) $$f(u, v) = 0, \quad \text{albo} \quad f(u, v, w) = 0,$$

jest

(6) $$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} = 0,$$

z warunkiem

(6 *bis*) $$f(u_1, v_1, w_1) = 0.$$

II° Przecięcie prostej z krzywą.

413. Jeśli równanie styczneczkowe krzywej jest

(1) $$f(u, v) = 0, \quad \text{albo} \quad f(u, v, w) = 0;$$

i gdy v_0, v_0, w_0 są spółrzędnemi prostej danej, nazwawszy przez u_1, v_1, w_1 spółrzędne stycznej w jednym z punktów gdzie ta prosta spotyka krzywą, równanie tego punktu będzie

$$uf'_{v_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} = 0$$

z warunkiem

$$f(u_1, v_1, w_1) = 0.$$

Wyraźmy że prosta (u_0, v_0, w_0) przechodzi przez ten punkt, będziemy mieli związki

$$\begin{cases} v_0 f'_{v_1} + v_0 f'_{v_1} + w_0 f'_{w_1} = 0, \\ f(u_1, v_1, w_1) = 0; \end{cases}$$

albo znosząc wskaźnik 1

$$(2)\qquad \begin{cases} f(u, v, w) = 0, \\ u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0. \end{cases}$$

Styczne w punktach, w których prosta (u_0, v_0, w_0) *spotyka krzywą* (1) *będą zatem stycznemi wspólnemi dwóch krzywych* (2).

Pierwsze równanie jest równaniem krzywej uważanej; przypuścimy ją stopnia n; drugie równanie będzie wtedy stopnia $(n-1)$; liczba rozwiązań wspólnych tym dwom równaniom jest równą $n(n-1)$. Zatem

Krzywa n^{tej} *klassy spotkaną jest przez jakąkolwiek prostą w* $n(n-1)$ *punktach; to jest krzywa* n^{tej} *klassy jest wogóle rzędu* $n(n-1)$.

Rząd krzywej danej przez jej równanie styczneczkowe zmniejsza się skutkiem istnienia stycznych wielokrotnych.

414. Wyrazimy że punkt

$$(1)\qquad Au + Bv + Cw = 0,$$

jest na krzywej, identyfikując jego równanie z równaniem punktu zetknięcia stycznej (u_1, v_1). Tym sposobem otrzymamy

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{f'_{u_1}}{A} = \dfrac{f'_{v_1}}{B} = \dfrac{f'_{w_1}}{C}, \\ f(u_1, v_1, w_1) = 0, \quad \text{albo} \quad Au_1 + Bv_1 + Cw_1 = 0; \end{cases}$$

a rugując u_1, v_1, w_1 między trzema równaniami jednorodnemi (2) otrzymamy warunek aby punkt (1) był na krzywej

$$(3)\qquad f(u, v, w) = 0.$$

III° Zastosowanie do krzywych 2^{giej} klassy.

415. Warunek ażeby punkt jakikolwiek był na krzywej 2^{giej} klassy.

Niech będzie równanie ogólne krzywych 2^{giej} klassy

$$(1)\qquad f(u, v, w) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0,$$

a

$$(2)\qquad au + bv + cw = 0,$$

równanie punktu danego.

Według uwagi n^{ru} (414) powinniśmy mieć

$$\begin{cases} Au_1 + Bv_1 + Dw_1 - \lambda a = 0, \\ Bu_1 + Cv_1 + Ew_1 - \lambda b = 0, \\ Du_1 + Ev_1 + Fw_1 - \lambda c = 0, \\ au_1 + bv_1 + cw_1 - 0 = 0. \end{cases}$$

Rugowanie u_1, v_1, w_1 i λ między temi ostatniemi równaniami prowadzi do *warunku szukanego*, t. j.

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

416. Równanie punktów przecięcia prostej (α, β, γ) z krzywą 2^{giej} klassy.

Jeśli równanie jednego z punktów przecięcia jest

$$(4)\qquad au + bv + cw = 0,$$

stałe a, b, c, winny sprawdzać związek (3); ponieważ prosta dana ma przechodzić przez ten punkt, będzie się mieć

$$(5)\qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Z równań (4) i (5) wyprowadza się

$$\frac{a}{\beta w - \gamma v} = \frac{b}{\gamma u - \alpha w} = \frac{c}{\alpha v - \beta u}.$$

Podstawiając te wartości w związek (3), wypadnie

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} A & B & D & \beta w - \gamma v \\ B & C & E & \gamma u - \alpha w \\ D & E & F & \alpha v - \beta u \\ \beta w - \gamma v & \gamma u - \alpha w & \alpha v - \beta u & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

jestto związek między spółrzędnemi u, v, w, jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez którykolwiek z punktów przecięcia prostej (α, β, γ) z krzywą; jestto więc *równanie dwóch punktów przecięcia*.

Równanie (6) może się przedstawić pod kształtem następującym n° (379)

$$(7)\qquad 4f(\alpha, \beta, \gamma).f(u, v, w) = [uf'_\alpha + vf'_\beta + wf'_\gamma]^2.$$

Zobaczymy w paragrafie następnym inne dowodzenie mogące się zastosować do tego przypadku n^ro^ (423).

417. Warunek aby prosta dana spotykała krzywą (1) w dwóch punktach rzeczywistych.

Ażeby otrzymać ten warunek dosyć jest wyrazić że dwa punkta przedstawione przez równanie (7) są rzeczywistymi, to jest, na zasadzie n^ru^ (36),

$$E^2 - CF > 0, \qquad \text{albo} \qquad D^2 - AF > 0.$$

Spostrzega się łatwo że rachunki rozwinięte w n^rze (380) dadzą się tu zastosować, zastępując A, B, C, D, E, F, przez C, E, F, B, D, A, a x, y, z, przez v, w, u; znajdzie się znosząc czynnik α^2, który przypuścimy różnym od zera

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \begin{vmatrix} C & E & B \\ E & F & D \\ B & D & A \end{vmatrix} < 0;$$

nierówność którą widocznie można napisać

$$(8) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma) \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} < 0;$$

takim jest *warunek ażeby dwa punkta przecięcia krzywej* (1) *z prosią* (α, β, γ) *były rzeczywistymi.*

IV° Punkta zwrotu.

418. Jeśli przez jakikolwiek *punkt zwrotu* linii krzywej poprowadzi się doń styczne, trzy z nich złączą się ze styczną zwrotu. Przypuszczamy na chwilę tylko określenia ogólne punktów zwrotu, szczegóły będą podane w Rozdziale III, następującym.

Niech będzie równanie styczneczkowe krzywej

$$(1) \qquad f(u, v) = 0, \quad \text{albo} \quad f(u, v, w) = 0;$$

i punkt

$$(2) \qquad v = au + b.$$

Styczne poprowadzone do krzywej przez ten punkt będą wyznaczone przez równanie (2) i równanie następujące

$$(3) \qquad f(u, au + b) = 0;$$

ażeby punkt (2) był punktem zwrotu, trzeba aby to równanie miało trzy pierwiastki równe. Prowadząc dalej rachunki jak w numerach (384) i (385), wykaże się że

Spółrzędne stycznych w punktach zwrotu krzywej (1) *winny sprawdzać równania*

$$(1) \qquad f(u, v, w) = 0.$$

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} f''_{uu} & f''_{uv} & f''_{uw} \\ f''_{vu} & f''_{vv} & f''_{vw} \\ f''_{wu} & f''_{wv} & f''_{ww} \end{vmatrix} = 0.$$

Spółrzędne stycznych przegięcia i wogóle stycznych wielokrotnych czynią także zadosyć związkowi (4); gdyż jeśli przez punkt przegięcia poprowadzi się styczne do krzywej, będzie również trzy zlewające się ze styczną przegięcia. Ale pomiędzy stycznemi zwrotu i stycznemi przegięcia jest ta ważna różnica, że pierwsze są stycznemi pojedyńczemi a drugie podwójnemi. O tych własnościach będziemy mówić w Rozdziale III.

§ IV. — RÓWNANIA STYCZNECZKOWE. — SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE.

I° Punkt zetknięcia jakiejkolwiek stycznej.

419. Równanie jednorodne stopnia n^{tego}.

$$f(U, V, W) = 0, \tag{1}$$

przedstawia krzywą n^{tej} klassy, jeśli U, V, W są spółrzędnemi trzylinijnemi jakiejkolwiek prostej; krzywa jest obwijającą prostych, których spółrzędne sprawdzają równanie (1).

Przez jakikolwiek punkt

$$AU + BV + CW = 0, \tag{2}$$

można poprowadzić n stycznych do krzywej (1), gdyż liczba rozwiązań, rzeczywistych lub urojonych, równań jednorodnych (1) i (2) jest zawsze równą n; krzywa (1) jest więc n^{tej} klassy.

420. Niech będą teraz U_1, V_1, W_1 spółrzędne stycznej do krzywej

$$f(U, V, W) = 0; \tag{1}$$

równanie punktu zetknięcia tej stycznej będzie

$$Uf'_{U_1} + Vf'_{V_1} + Wf'_{W_1} = 0, \tag{2}$$

z warunkiem

$$f(U_1, V_1, W_1) = 0. \tag{2 bis}$$

Wystarczającem będzie dowieść w tym celu że punkt (2) jest przecięciem się dwóch stycznych nieskończenie siebie blizkich, czyli że równanie (2) sprawdza się przez spółrzędne stycznej (U_1, V_1, W_1) i przez spółrzędne $(U_1 + \delta U_1,\ V_1 + \delta V_1,\ W_1 + \delta W_1)$ stycznej nieskończenie blizkiej. Rachunki są też same co i w n^rze (404).

II° Przecięcie się prostej z krzywą.

421. Równanie styczneczkowe krzywej będąc

$$f(U, V, W) = 0, \tag{1}$$

niech będą U_0, V_0, W_0 spółrzędne prostej danej. Jeżeli (U_1, V_1, W_1) jest styczną do krzywej w jednym z punktów przecięcia z prostą (U_0, V_0, W_0), równanie tego punktu będzie

(2) $$\begin{cases} Uf'_{U_1} + Vf'_{V_1} + Wf_{W_1} = 0 \\ f(U_1, V_1, W_1) = 0. \end{cases}$$

Wyraźmy że punkt (2) jest na prostej danej, będziemy mieli równanie warunkowe

$$\begin{cases} U_0f'_{U_1} + V_0f'_{V_1} + W_0f'_{W_1} = 0, \\ f(U_1, V_1, W_1) = 0; \end{cases}$$

albo, znosząc wskaźniki 1

(3) $$\begin{cases} U_0f'_U + V_0f'_V + W_0f'_W = 0, \\ f(U, V, W) = 0. \end{cases}$$

Rozwiązania wspólne dwom równaniom (3), albo styczne wspólne krzywym przedstawionym przez te dwa równania będą *stycznemi w punktach w których prosta* (U_0, V_0, W_0) *spotyka krzywą* (1).

Drugie z równań (3) jest równaniem samej krzywej.

Widzimy jeszcze, że *rząd* krzywej jest wogóle $n(n-1)$, jeśli n jest klassą tej krzywej.

Uwaga. Wyrazi się że punkt jest na krzywej, identyfikując równanie tego punktu z równaniem punktu zetknięcia stycznej w tym punkcie; zobacz n[er] (414).

III° Zastosowanie do krzywych 2giej klassy.

422. Równanie ogólne krzywych 2giej klassy w spółrzędnych trzylinijnych jest

(1) $$f(U, V, W) = A_{11}U^2 + A_{22}V^2 + A_{33}W^2 + 2A_{12}UV + 2A_{13}UW + 2A_{23}VW = 0.$$

Dowiedzie się jak w n[rze] (415) że

Warunek aby punkt

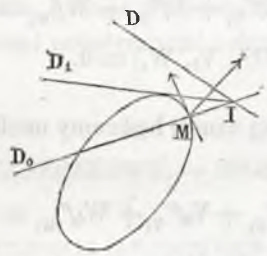
(2) $$aU + bV + cW = 0$$

był na krzywej (1) jest

(3) $$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & a \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

423. Równanie punktów przecięcia się prostej (U_0, V_0, W_0) z krzywą 2giej klassy (1).

Niech będzie I punkt jakikolwiek na prostej $D_0(U_0, V_0, W_0)$ i prosta $D(U, V, W)$ przechodząca



przez ten punkt; jeśli się założy

$$(4)\qquad \begin{cases} U_1 = \dfrac{m_1U + m_2U_0}{\rho}, \\ V_1 = \dfrac{m_1V + m_2V_0}{\rho}, \\ W_1 = \dfrac{m_1W + m_2W_0}{\rho}, \end{cases}$$

U_1, V_1, W_1, będą spółrzędnemi prostej D_1, przechodzącej przez przecięcie się I dwóch prostych $D_0(U_0, V_0, W_0)$ i $D(U, V, W)$; będzie według n^ru^ (142)

$$(4\ bis)\qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\text{wst}\,\widehat{DID_1}}{\text{wst}\,\widehat{D_1ID_0}}.$$

Przypuśćmy, że prosta D_1, jest styczną do krzywej (1); powinno się mieć wtedy

$$f(m_1U + m_2U_0, \quad m_1V + m_2V_0, \quad m_1W + m_2W_0) = 0.$$

albo rozwijając

$$(5)\qquad m_1^2 f(U, V, W) + m_1m_2[U_0f'_U + V_0f'_V + W_0f'_W] + m_2^2 f(U_0, V_0, W_0) = 0.$$

To równanie wyznacza stosunki wstaw kątów, jakie czynią z prostemi ID_0 i ID styczne poprowadzone do krzywej (1) przez punkt I; jest dwa stosunki, ponieważ przez punkt I można poprowadzić dwie styczne.

Otóż, jeśli punkt I jest jednym z punktów przecięcia prostej D_0 z krzywą, M na przykład, dwie styczne poprowadzone do krzywej przez punkt M zlewają się w jednę. Uwaga n^ru^ (375). Zatem dwa stosunki wyznaczone równaniem (5) są równe; i odwrotnie, jeśli te dwa stosunki są równe, dwie styczne łączą się z sobą; przeto punkt z którego one są wyprowadzone znajduje się na krzywej.

Wyraźmy zatem że dwa pierwiastki równania (5) są równe; ma się

$$(6)\qquad 4f(U_0, V_0, W_0).f(U, V, W) = (U_0f'_U + V_0f'_V + W_0f'_W)^2,$$

albo

$$(6\ bis)\qquad 4f(U_0, V_0, W_0).f(U, V, W) = (Uf'_{U_0} + Vf'_{V_0} + Wf'_{W_0})^2.$$

Warunek ten będąc zadowolonym, dwie proste D i D_0 przecinają się na krzywej; ale prosta D(U, V, W) jest dowolną; równanie (6) jest przeto związkiem między spółrzędnemi U, V, W jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez którykolwiek z punktów przecięcia prostej D_0 z krzywą; równanie (6) albo (6 *bis*) jest zatem równaniem dwóch punktów przecięcia się prostej (U_0, V_0, W_0) z krzywą (1).

424. Jeśli rozłożymy na kwadraty pierwszą stronę równania (6 *bis*), sprowadzi się ona do summy dwóch kwadratów, z których jeden będzie pomnożonym przez wyrażenie takie, jak ($AC - B^2$); ażeby dwa punkta (6 *bis*) były rzeczywistymi, trzeba ażeby ta ilość była odjemną; będzie się wtedy przywiedzionym do rachunku takiego samego jak ten, któryśmy w n[rze] (380) rozwinęli. Ztąd wnosimy że

Prosta (U_0, V_0, W_0) *spotka krzywą* (1) *w dwóch punktach rzeczywistych, jeśli się ma*

$$f(U_0, V_0, W_0)\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

IV° Punkta zwrotu.

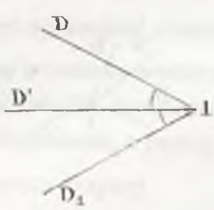
425. Gdy jakikolwiek punkt krzywej jest punktem zwrotu, pomiędzy stycznemi wyprowadzonemi z tego punktu do krzywej są trzy łączące się ze styczną zwrotu.

Niech będzie U_1, V_1, W_1, styczna do krzywej

$$(1) \qquad f(U, Y, W) = 0;$$

jeśli położymy

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} U' &= \frac{m_1U_1 + m_2U}{\rho}, \\ V' &= \frac{m_1V_1 + m_2V}{\rho}, \\ W' &= \frac{m_1W_1 + m_2W}{\rho}; \end{aligned}\right.$$



Wyrażenia te wyznaczą prostą D'(U', V', W') przechodzącą przez punkt przecięcia I prostych $D_1(U_1, V_1, W_1)$ i D(U, V, W); co więcej, ma się n[er] (142)

$$(2\ bis) \qquad \frac{m_2}{m_1} = k = \frac{\text{wst}\,\widehat{D_1ID'}}{\text{wst}\,\widehat{D'ID}}.$$

Przypuśćmy prostą D′ styczną do krzywej (1), będzie ztąd

$$f(m_1 U_1 + m_2 U, \quad m_1 V_1 + m_2 V, \quad m_1 W_1 + m_2 W) = 0,$$

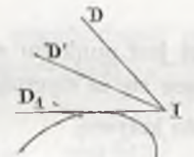
albo rozwijając i dzieląc przez m_1^n:

$$(3) \qquad f(U_1, V_1, W_1) + k[\overbrace{U f'_{U_1} + V f'_{V_1} + W f'_{W_1}}^{M}] +$$

$$+ \frac{k^2}{1.2}\overbrace{[U^2 f''_{U_1U_1} + V^2 f''_{V_1V_1} + W^2 f''_{W_1W_1} + 2UV f''_{U_1V_1} + 2UW f''_{U_1W_1} + 2VW f''_{V_1W_1}]}^{N} + \frac{k^3}{1.2.3} \dots = 0.$$

To równanie wyznacza stosunek wstaw kątów, jakie czyni z dwiema prostemi ID_1 i ID styczna do krzywej, poprowadzona przez punkt I; ponieważ jest n stycznych, jeśli krzywa jest n^{tej} klassy, będzie n stosunków wyznaczonych przez równanie (3).

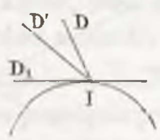
1° Przypuśćmy że prosta $D_1(U_1, V_1, W_1)$ jest styczną; równanie się uprości do



$$(3\,bis) \qquad kM + \frac{k^2}{1.2} N + \frac{k^3}{1.2.3} P + \dots 0;$$

to równanie ma jeden pierwiastek $k = \frac{m_2}{m_1} = 0$; w rzeczy samej jedna ze stycznych D′ złączy się z prostą D_1.

2° Przypuśćmy punkt I na krzywej, będzie wtedy dwie styczne D′, które muszą się złączyć ze



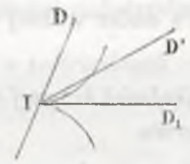
styczną D_1 [*Uwaga* n^ru (375)]; zatem równanie (3) winno przyjmować, według wzorów (2), dwie wartości na k albo na $\frac{m_2}{m_1}$ równe zeru; powinno się więc mieć jednocześnie

$$(4) \qquad \begin{cases} f(U_1, V_1, W_1) = 0, \\ U f'_{U_1} + V f'_{V_1} + W f'_{W_1} = 0; \end{cases}$$

ponieważ prosta (U, V, W) jest dowolną, drugie z równań (4) jest związkiem między spółrzędnemi jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez I, punkt zetknięcia prostej D_1.

Równania (4) *wyznaczają więc punkt zetknięcia stycznej* (U_1, V, W_1). Twierdzenie dowiedzione już w n^rze (420).

3° Przypuśćmy że punkt I jest punktem zwrotu i że D_1 jest styczną zwrotu; wtedy pomiędzy stycz-



nemi D', będzie trzy, które muszą złączyć się ze styczną D_1: równanie (3) musi więc przyjmować, według wzorów (2), trzy wartości na k albo $\frac{m_2}{m_1}$ równe zeru; otrzyma się zatem równania warunkowe

(1°) $f(U_1, V_1, W_1) = 0$; (2°) $M = 0$, (3°) $N = 0$,

litery M i N przedstawiają współczynniki k i k^2 w równaniu (2).

Prosta D_1 jest styczną stałą w punkcie zwrotu I, a prosta D(U, V, W) jest prostą jakąkolwiek przechodzącą przez punkt I.

Otóż równanie (2°) przedstawia punkt, będący punktem zetknięcia stycznej D_1, albo punktem zwrotu; równanie zaś (3°) powinno być sprawdzonem przez spółrzędne U, V, W, wszystkich prostych przechodzących przez punkt (2°).

Innemi słowy, równanie (3°) powinno przedstawiać dwa punkta z których jeden jest punktem (2°).

Aby równanie (3°) przedstawiało dwa punkta, trzeba i wystarczy żeby, n^er (364)

$$(4°)\qquad \begin{vmatrix} f''_{U_1U_1} & f''_{U_1V_1} & f''_{U_1W_1} \\ f''_{V_1U_1} & f''_{V_1V_1} & f''_{V_1W_1} \\ f''_{W_1U_1} & f''_{W_1V_1} & f''_{W_1W_1} \end{vmatrix} = 0;$$

styczne (U_1, V_1, W_1) zwrotu powinny więc sprawdzać równania (1°) i (4°),

Warunki te są koniecznymi; dowiedzie się że one są wystarczające, wykazując że skutkiem związków (1°) i (4°), punkt (2°) jest jednym z punktów (3°). Sprawdzenie może się łatwo uskutecznić, biorąc punkt I za jeden z wierzchołków trójkąta odniesienia, a prostą D_1I za jeden z boków trójkąta.

Zatem, *spółrzędne stycznych w punktach zwrotu krzywej*

$$(5)\qquad f(U, V, W) = 0$$

muszą jednocześnie sprawdzać równanie

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} f''_{UU} & f''_{UV} & f''_{UW} \\ f''_{VU} & f''_{VV} & f''_{VW} \\ f''_{WU} & f''_{WV} & f''_{WW} \end{vmatrix} = 0.$$

To równanie sprawdza się także przez spółrzędne stycznych wielokrotnych.

Jeśli krzywa jest n^{tej} klassy, czyli jeśli równanie (5) jest stopnia n, równanie (6) będzie stopnia $(n-2)$; równania jednorodne (5) i (6) będą więc miały $3n(n-2)$ rozwiązań wspólnych; przeto:

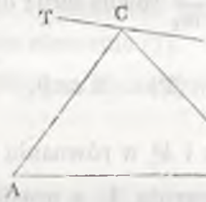
Krzywa n^{tej} *klassy ma wogóle* $3n(n-2)$ *punktów zwrotu.*

Liczba punktów zwrotu krzywej, przedstawionej za pomocą jej równania styczneczkowego jest zmniejszoną w razie istnienia stycznych wielokrotnych.

426. Dowiedziemy tutaj następującej a nader ważnej własności punktów zwrotu w krzywych trzeciej klassy.

Styczne w dwóch punktach zwrotu jakiejkolwiek krzywej trzeciej klassy przecinają się w jednym punkcie, przez który przechodzi trzecia styczna zwrotu.

Weźmy za wierzchołki trójkąta odniesienia dwa punkta zwrotu A i B, a styczne w A i B będą dwoma innymi bokami. Te proste utworzą trójkąt, gdyż jeśliby AC na przykład mogła się złączyć



z linią AB, z punktu B możnaby poprowadzić cztery styczne do krzywej; trzy dotykające krzywej w B (punkt zwrotu) i jedna dotykająca krzywej w A. To założywszy, równanie ogólne krzywych trzeciej klassy jest

$$(1)\quad mU^3 + n_1V^3 + p_2W^3 + m_1U^2V + m_2U^2W + nV^2U + n_2V^2W + pW^2U + p_1W^2V + hUVW = 0.$$

Punkt A jest punktem zwrotu, którego styczną jest AC; przeto trzy styczne poprowadzone przez punkt A powinny złączyć się z linią AC; czyli że jeśli się czyni $U = 0$ w równaniu (1), pierwsza strona winna być podzielną przez W^3; otrzyma się w ten sposób warunki

$$n_1 = 0, \qquad n_2 = 0, \qquad p_1 = 0.$$

Podobnież punkt B jest punktem zwrotu, którego styczną jest BC, to jest że gdy się uczyni $V = 0$ w równaniu (1) pierwsza strona powinna być podzielną przez W^3; znajduje się

$$m = 0, \qquad m_2 = 0, \qquad p = 0.$$

Tak, że równanie (1) sprowadza się do

$$p_2W^3 + m_1U^2V + nV^2U + hUVW = 0,$$

albo do

$$(2)\qquad W^3 = UVT,$$

zakładając

$$(2\ bis)\qquad T = -\frac{1}{p_2}(m_1U + nV + hW).$$

Z kształtu (2) widzimy że punkt $T=0$ jest punktem zwrotu, którego styczna przechodzi przez punkt $W=0$. Przeto....

V° Przejść z równania styczneczkowego do równania w spółrzędnych — punkt i odwrotnie.

427. Przedstawimy przez x, y, z, spółrzędne jakiegokolwiek punktu, a przez u, v, w spółrzędne jakiejkolwiek prostej; reguły i rozumowania które podamy stosować się będą tak do spółrzędnych kartezyańskich punktu lub prostej, jak i do spółrzędnych trzylinijnych punktu lub prostej.

Mając danem równanie jakiejkolwiek krzywej w spółrzędnych — punkt znaleźć równanie styczneczkowe tej krzywej.

Niech będzie równanie prostej

$$ux+vy+wz=0,$$

gdzie u, v, w są parametrami tej prostej, albo jej spółrzędnemi; szukajmy warunku aby ta prosta dotykała krzywej, której równanie dane jest

$$f(x, y, z)=0.$$

Jeśli x_0, y_0, z_0 są spółrzędnemi punktu zetknięcia, powinno się mieć identyfikując powyższe równanie prostej z równaniem stycznej w tym punkcie

$$(1^\circ) \qquad f(x_0, y_0, z_0)=0,$$

$$(2^\circ) \qquad \frac{f'_{x_0}}{u}=\frac{f'_{y_0}}{v}=\frac{f'_{z_0}}{w}.$$

Rugując x_0, y_0, z_0 między trzema równaniami jednorodnemi (1°) i (2°), otrzyma się związek kształtu

$$(3^\circ) \qquad F(u, v, w)=0;$$

jestto warunek aby prosta była styczną. Ale że równanie (3°) jest związkiem między spółrzędnemi u, v, w, jakiejkolwiek stycznej do krzywej, jest ono przeto równaniem styczneczkowem krzywej.

Równania (1°) i (2°) pociągają za sobą jako następstwo

$$(4^\circ) \qquad ux_0+vy_0+wz_0=0;$$

można zatem zamiast układu równań (1°) i (2°) postawić układ następny

$$(1) \qquad -\frac{w}{u}=\frac{x_0}{z_0}+\frac{v}{u}\cdot\frac{y_0}{z_0};$$

$$(2) \qquad \frac{v}{u}f'_{x_0}-f'_{y_0}=0,$$

$$(3^\circ) \qquad f(x_0, y_0, z_0)=0.$$

Przypuściwszy, że dajemy sobie stosunek $\frac{v}{u}$ i że m jest stopniem równania krzywej; równania (2) i (3) mają $m(m-1)$ rozwiązań wspólnych $\left(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}\right)$, a równanie (1) da $m(m-1)$ wartości odpowiednich dla $\frac{w}{u}$.

Ponieważ równanie (3°) jest następstwem trzech równań (1), (2), (3), przeto dla jednej wartości danej dla $\frac{v}{u}$, odpowiada w tem równaniu $m(m-1)$ wartości dla $\frac{w}{u}$. Zkąd

Równanie styczneczkowe (3°) *jest wogóle stopnia* $m(m-1)$.

N. B. Jeśli się zastosuje tę metodę do równania ogólnego krzywych drugiego rzędu

$$\text{(I)} \qquad f(x, y, z) = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}xz + 2\mathrm{E}yz + \mathrm{F}z^2 = 0,$$

znajduje się, na *równanie styczneczkowe*

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{D} & u \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{E} & v \\ \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

W przypadku spółrzędnych dwulinijnych (u, v) równanie prostej jest

$$ux + vy - wz = 0,$$

równanie styczneczkowe będzie

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{D} & u \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{E} & v \\ \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} & -w \\ u & v & -w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

428. Mając danem równanie styczneczkowe jakiejkolwiek krzywej, znaleźć jej równanie w spółrzędnych — punkt.

Niech będzie równanie jakiegokolwiek punktu

$$xu + yv + zw = 0,$$

x, y, z, będąc parametrami punktu, albo jego spółrzędnemi; szukajmy warunku, aby ten punkt był na krzywej, której równanie styczneczkowe dane jest

$$\mathrm{F}(u, v, w) = 0.$$

Jeśli u_0, v_0, w_0, są spółrzędnemi stycznej w tym punkcie, powinno się mieć identyfikując powyższe równanie punktu z równaniem punktu zetknięcia stycznej,

$$(1^\circ)\qquad F(u_0, v_0, w_0) = 0,$$

$$(2^\circ)\qquad \frac{F'_{u_0}}{x} = \frac{F'_{v_0}}{y} = \frac{F'_{w_0}}{z}.$$

Rugując u_0, v_0, w_0, między równaniami (1°) i (2°), otrzyma się związek kształtu

$$(3^\circ)\qquad f(x, y, z) = 0;$$

jestto warunek aby punkt był na krzywej. Ale że równanie (3°) jest związkiem między spółrzędnemi x, y, z, jakiegokolwiek punktu krzywej, jest ono zatem *równaniem krzywej w spółrzędnych-punkt.*

Rozumując jak w przypadku poprzednim, zobaczy się że :

Jeśli n *jest stopniem równania styczneczkowego,* n(n — 1) *będzie wogóle stopniem równania w spółrzędnych-punkt.*

N. B. zastosowanie do krzywych 2giej klassy przedstawionem było w nrze (402).

ROZDZIAŁ II.

BIEGUNOWE.

§ I.— SPÓŁRZĘDNE KARTEZYAŃSKIE.

I° Definicya. — Równania.

429. Definicya.

« Niech będzie krzywa rzędu m i jakikolwiek punkt stały P, na jej płaszczyznie; przez punkt P » poprowadźmy jakąkolwiek sieczną, której m punktami przecięcia się z krzywą niech będą » A_1, A_2,..... A_m; nazwijmy przez $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$ odległości PA_1, PA_2... PA_m i weźmy na siecznej punkt M » taki, aby się miało następujący związek, jeśli $MP = \rho$

$$\frac{m_1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_m}. \tag{1}$$

» Kiedy sieczna obraca się około punktu P, miejscem punktów M jest linia prosta, zwana *prostą* » *biegunową* punktu P. Punkt zaś P zowie się *biegunem* prostej.

Punkt M, którego odległość ρ od punktu P, zadawalnia związek (1) jest nazwany *środkiem harmonicznym* układu m punktów A_1, A_2,... A_m, względem punktu P; biegunowa jest przeto miejscem środków harmonicznych, względem P, punktów przecięcia siecznej z krzywą.

Twierdzenie o biegunowych punktu podanem zostało przez Côtes'a, w 1680 roku, a powtórzonem przez Maclaurin'a w jego dziele *Geometrica Organica*, 1719. Odległość MP albo ρ nazwaną została przez Maclaurin'a *średnią harmoniczną;* Poncelet nadał punktowi M miano *środka średnich harmonicznych.*

Uogólniono wiadomości o biegunowych :

» Jeśli P jest punktem stałym na płaszczyznie krzywej rzędu m; jeśli A_1, A_2,... A_m są przecięciami » krzywej z jakąkolwiek sieczną, przechodzącą przez punkt P; biorąc na siecznej punkt M taki, aby

$$\sum_p \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2}\right) \ldots\ldots \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_p}\right) = 0; \tag{II}$$

» ρ wyznacza odległość MP a ρ_i odległość PA_i; miejsce punktów M nazywa się *biegunową rzędu* p,
» albo $(m-p)$ biegunową punktu P.

Summa Σ rozciąga się do wszystkich iloczynów p do p różnic $\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_i}\right)$; co więcej, odległości PA_i powinny być uważane za dodatne lub odjemne według tego, czy począwszy od punktu P są zwrócone w pewną stronę lub w stronę przeciwną.

Związek (II) może się przedstawić pod innym kształtem, którego wykazanie w tem miejscu jest rzeczą nader ważną. Ma się w rzeczy samej

$$-\overset{P}{|}\text{———}\overset{A_i}{|}\text{———}\overset{M}{|}-$$

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_i}=\frac{1}{PM}-\frac{1}{PA_i}=\frac{PA_i-PM}{PM.PA_i};$$

otóż jakieby nie było położenie względne trzech punktów ma się nr° (11)

$$PA_i+A_iM+MP=0, \qquad \text{zkąd} \qquad PA_i-PM=MA_i,$$

mając wzgląd na umowy przyjęte w nrze (53); zkąd nareszcie

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_i}=\frac{MA_i}{PA_i}\cdot\frac{1}{PM}.$$

Jeśli się podstawi te wartości w związek (II), czynnik $\frac{1}{PM}$ znika i pozostaje

$$\text{(III)} \qquad \sum_p \frac{MA_1}{PA_1}\cdot\frac{MA_2}{PA_2}\cdots\cdots\frac{MA_p}{PA_p}=0;$$

albo też zmieniając znaki czynników:

$$\text{(III } bis) \qquad \sum_p \frac{MA_1}{A_1P}\cdot\frac{MA_2}{A_2P}\cdots\cdots\frac{MA_p}{A_pP}=0.$$

Teorya biegunowych jest nader ważną w nauce o krzywych.

430. Równanie prostej biegunowej.

Niech będzie równanie krzywej rzędu m

$$\text{(1)} \qquad f(x,y)=0, \qquad \text{albo} \qquad f(x,y,z)=0,$$

a x_0, y_0 spółrzędne punktu P; spółrzędne jakiegokolwiek punktu leżącego na prostej przechodzącej przez punkt P, będą ner (40)

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} x=x_0+\lambda\rho, \\ y=y_0+\mu\rho, \end{cases}$$

x, y są spółrzędne punktu M prostej, a ρ przedstawia odległość PM; stałe λ i μ zależą od położenia prostej.

Zastąpmy w równaniu (1) x i y przez ich wartości, otrzyma się

$$f(x_0+\lambda\rho, \quad y_0+\mu\rho)=0,$$

albo rozwijając według wzoru *Taylor'a*

$$(3) \qquad f(x_0, y_0)+\rho(\lambda f'_{x_0}+\mu f'_{y_0})+\rho^2(\ldots\ldots)+\ldots\ldots=0.$$

Równanie (3) wyznacza odległości $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$ punktu P od punktów przecięcia się siecznej z krzywą; otrzyma się więc

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{\rho_m}=-\frac{\lambda f'_{x_0}+\mu f'_{y_0}}{f(x_0, y_0)}.$$

Wypadnie na mocy związku (1)

$$(4) \qquad \frac{m}{\rho}+\frac{\lambda f'_{x_0}+\mu f'_{y_0}}{f(x_0, y_0)}=0.$$

Otrzymamy równanie miejsca, rugując $\lambda\rho$ i $\mu\rho$ między równaniami (2) i (4); co daje

$$(5) \qquad (x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}+mf(x_0, y_0)=0.$$

Łatwo poznać że to jest równanie linii prostej.

Można dać temu równaniu kształt symetryczniejszy, czyniąc równanie krzywej jednorodnem; ma się wtedy tożsamość

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=mf(x, y, z),$$

zkąd

$$x_0f'_{x_0}+y_0f'_{y_0}+z_0f'_z=mf(x_0, y_0, z_0).$$

Uczyńmy $z_0=1$, ma się na równanie biegunowej

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+f'_{z_0}=0.$$

Możemy teraz zastąpić x i y przez $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$, x_0 i y_0 przez $\frac{x_0}{z_0}$ i $\frac{y_0}{z_0}$, *zatem równanie prostej biegunowej punktu* (x_0, y_0) *jest*

$$(6) \qquad xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+f'_{z_0}=0;$$

nazywa się ona także $(m-1)^{a}$ *biegunową*.

Uwaga. Widocznem jest że to równanie ma ten sam kształt, co i równanie stycznej w punkcie (x_0, y_0) n^ro (371); tylko że w razie stycznej trzeba doń dołączyć związek $f(x_0, y_0, z_0)=0$.

Wynika wreszcie z definicyi (1) prostej biegunowej że jeśli punkt P jest na krzywej, $(m-1)^a$ biegunowa czyli prosta biegunowa tego punktu jest styczną do krzywej.

431. Równanie biegunowych różnych rzędów.

Przyjmiemy inną metodę do rozwiązania zadania ogólnego.

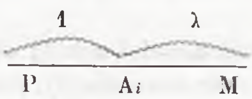
Uczyńmy równanie krzywej jednorodnem, ma się

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0;$$

niech będą x_0, y_0, spółrzędne kartezyańskie punktu P, a x_i, y_i, A_i przecięcia się siecznej z krzywą; x, y, spółrzędne kartezyańskie punktu M wziętego na siecznej; jeśli się założy

$$(2) \qquad \lambda = \frac{MA_i}{A_iP},$$

spółrzędne punktu A_i będą n° (52), (53)



$$(3) \qquad x_i = \frac{\lambda x_0 + x}{\lambda + 1}, \qquad y_i = \frac{\lambda y_0 + y}{\lambda + 1}.$$

Możemy zastąpić te wyrażenia przez następujące:

$$(3\ bis) \qquad \frac{x_i}{z_i} = \frac{\lambda x_0 + x}{\lambda z_0 + z}, \qquad \frac{y_i}{z_i} = \frac{\lambda y_0 + y}{\lambda z_0 + z}.$$

z warunkiem że w końcu rachunku uczyni się

$$z_i = 1, \qquad z_0 = 1, \qquad z = 1.$$

Punkt A_i znajdując się na krzywej, powinno się mieć

$$f\left(\frac{x_i}{z_i}, \ \frac{y_i}{z_i}, \ 1\right) = 0,$$

albo,

$$f(\lambda x_0 + x, \quad \lambda y_0 + y, \quad \lambda z_0 + z) = 0.$$

Rozwijając to równanie za pomocą wzoru *Taylor'a*, znajdujemy

$$(4) \qquad \lambda^m f(x_0, y_0, z_0) + \lambda^{m-1}(x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0}) + \ldots + \lambda[x_0 f'_x + y_0 f'_y + z f'_z] + f(x, y, z) = 0.$$

Pierwiastki równania (4) *są wartościami* m *stosunków, według których krzywa dzieli odcinek* MP.

Mając na uwadze znaczenie geometryczne λ, równanie (2) i definicyą (III *bis*) biegunowych, numer (429), widzi się że:

Równanie biegunowej rzędu p, *czyli* (m — p)^{ej} *biegunowej, otrzyma się przyrównawszy do zera współczynnik* λ^{m-p} *w równaniu* (4).

Nie chcąc rozwodzić się nad licznemi własnościami biegunowych, nie podamy tutaj ogólnego równania; zwrócimy tylko uwagę na kilka głównych wyników następujących.

432. 1° Równając z zerem współczynnik λ^{m-1}, ma się

$$(5)\qquad xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0;$$

jestto równanie odpowiadające związkowi

$$(5\ bis)\qquad \begin{cases} \sum\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_i}\right)=0, \quad \text{albo} \quad \frac{m}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\ldots+\frac{1}{\rho_m}, \\ \text{albo} \quad \frac{MA_1}{A_1P}+\frac{MA_2}{A_2P}+\ldots+\frac{MA_m}{A_mP}=0; \end{cases}$$

czyli *równanie prostej biegunowej.*

N. B. Trzebaby w równaniu (5) uczynić $z_0=1$ i $z=1$; ale jeśli się chce wrócić potem do spółrzędnych jednorodnych, znajduje się właśnie równanie (5); jestto więc równanie prostej biegunowej w spółrzędnych jednorodnych.

Ta uwaga stosuje się i do równań następujących.

433. 2° Przyrównawszy do zera spółczynnik λ^{m-2}, ma się

$$(6)\qquad x^2f''_{x_0x_0}+y^2f''_{y_0y_0}+z^2f''_{z_0z_0}+2xyf''_{x_0y_0}+2xzf''_{x_0z_0}+2yzf''_{y_0z_0}=0;$$

jestto $(m-2)^{a}$ *biegunowa* albo *koniczna biegunowa;* odpowiada ona związkowi

$$(6\ bis)\qquad \begin{cases} \frac{\Sigma}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_k}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_i}\right)=0, \quad i \gtrless k, \\ \text{albo} \\ \frac{\Sigma}{2}\frac{MA_k}{A_kP}\cdot\frac{MA_i}{A_iP}=0, \quad i \gtrless k. \end{cases}$$

Równając z zerem spółczynnik λ^{m-p}, będzie się miało równanie $(m-p)^{ej}$ biegunowej, czyli *biegunową rzędu* p.

434. 3° Równając z zerem spółczynnik λ, ma się

$$(7)\qquad x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z=0;$$

jestto krzywa rzędu $(m-1)$, albo *pierwsza biegunowa.*

Ona odpowiada związkowi

$$\sum_{m-1}\frac{MA_1}{A_1P}\cdot\frac{MA_2}{A_2P}\cdots\cdots\frac{MA_{m-1}}{A_{m-1}P}=0.$$

Krzywa ta nie jest czem innem jak *krzywą zetknięć linii stycznych* poprowadzonych przez punkt P n^{ro} (375). Tak więc:

Punkta zetknięć stycznych poprowadzonych przez punkt P, *są przecięciami krzywej z pierwszą biegunową punktu* P.

435. Jeśli się weźmie iloczyn pierwiastków równania (4), ma się na zasadzie wartości (2) na λ

$$\frac{MA_1}{A_1P}\cdot\frac{MA_2}{A_2P}\cdots\cdot\frac{MA_m}{A_mP}=\pm\frac{f(x,\,y,\,z)}{f(x_0,\,y_0,\,z_0)},\tag{8}$$

$+$ albo $-$, stosownie do tego czy m jest parzystem lub nieparzystem; ztąd zaś, jakiemby nie było m, zmieniając znaki w mianownikach otrzyma się

$$\frac{MA_1}{PA_1}\cdot\frac{MA_2}{PA_2}\cdots\cdot\frac{MA_m}{PA_m}=+\frac{f(x,\,y,\,z)}{f(x_0,\,y_0,\,z_0)}.\tag{8 bis}$$

Uwaga. Jeśli $(x,\,y,\,z)$ wyrażają jakikolwiek punkt płaszczyzny, wyrażenie $f(x,\,y,\,z)$ zwie się *potęgą punktu* $(x,\,y,\,z)$ względem krzywej

$$f(x,\,y,\,z)=0.$$

Jeśli $P(x_0,\,y_0,\,z_0)$ jest punktem stałym, dowolnie wziętym, potęga punktu M będzie mieć następujące znaczenie geometryczne (według związku (8))

$$f(x,\,y,\,z)=f(x_0,\,y_0,\,z_0).\frac{MA_1.MA_2\ldots\ldots MA_m}{PA_1.PA_2\ldots\ldots PA_m},\tag{9}$$

to jest, *że jeśli* P *jest punktem stałym, potęga jakiegokolwiek punktu* M *będzie proporcyonalną do ilorazu z iloczynu odległości od* M *do punktów przecięcia się siecznej* MP *z krzywą, przez iloczyn odległości punktu stałego* P *od tychże samych punktów przecięcia.*

II° Krzywe średnicowe (*diametrales*).

436. Nazywają się *krzywemi średnicowemi* biegunowe jakiegokolwiek punktu, leżącego w nieskończoności na kierunku oznaczonym.

Wyznaczymy krzywą średnicową pierwszego i $(m-1)$^{go} rzędu. Napiszmy najpierw równanie pod kształtem

$$f(x,\,y,\,z)=\varphi_m(x,\,y)+z\varphi_{m-1}(x,\,y)+z^2\varphi_{m-2}(x,\,y)+\ldots\ldots+z^m\varphi_0=0.\tag{1}$$

Przypuśćmy ze punkt $(x_0,\,y_0,\,z)$ oddala się do nieskończoności na prostej

$$y=ax+bz,\tag{2}$$

co pociąga za sobą warunki

$$y_0=ax_0,\qquad z_0=0.\tag{3}$$

Równanie prostej biegunowej punktu $(x_0, y_0\, z_0)$ jest

(4) $$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0;$$

otóż

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x = {}_x\varphi'_m(x, y) + z_x\varphi'_{m-1}(x, y) + \ldots\ldots; \\ f'_y = {}_y\varphi'_m(x, y) + z_y\varphi'_{m-1}(x, y) + \ldots\ldots; \\ f'_z = {}_z\varphi'_m(x, y) + 2z\varphi_{m-2}(x, y) + \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Wprowadźmy warunki (3) i zauważmy że funkcye φ_m etc. są jednorodnemi, będzie

$$f'_{x_0} = x_0^{m-1}{}_x\varphi'_m(1, a),$$

$$f'_{y_0} = x_0^{m-1}{}_y\varphi'_m(1, a),$$

$$f'_{z_0} = x_0^{m-1}\varphi'_{m-1}(1\ a).$$

Przeto, na zasadzie równania (4) będziemy mieli na :

Równanie średnicy odpowiedniej kierunkowi $y - ax = 0$:

(5) $$x{}_x\varphi'_m(1, a) + y{}_y\varphi'_m(1, a) + z\varphi_{m-1}(1, a) = 0.$$

437. Biorąc rownanie *pierwszej biegunowej*, znajduje się natychmiast, wziąwszy w uwagę warunki (3) numeru poprzedniego,

(1) $$f'_x + af'_y = 0,$$

jestto *równanie krzywej średnicowej rzędu* $(m - 1)$, *odpowiadającej kierunkowi* $y - ax = 0$; *albo równanie krzywej zetknięć stycznych równoległych do tego kierunku.*

438. Bieguny jakiejkolwiek prostej.

Niech będzie prosta

(1) $$Ax + By + Cz = 0;$$

a x_0, y_0, z_0, spółrzędne jednego z jej biegunów. Równanie prostej biegun owej tego punktu będzie

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0.$$

Identyfikując to równanie z równaniem prostej danej, otrzymuje się

(2) $$\frac{f'_{x_0}}{A} = \frac{f'_{y_0}}{B} = \frac{f'_{z_0}}{C}.$$

Równania te wyznaczają bieguny prostej danej; widzimy że :

Prosta jakakolwiek ma $(m-1)^2$ biegunów.

W szczególności, bieguny prostej w nieskończoności, dla której $A=0$, $B=0$, będą dane przez dwa równania

(3) $$f'_x=0, \qquad f'_y=0.$$

III° Biegunowe w krzywych drugiego rzędu.

439. RÓWNANIE BIEGUNOWEJ.

Równanie jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu będąc

(1) $$f(x, y, z)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0;$$

równanie prostej biegunowej punktu (x_0, y_0, z_0) będzie

(2) $$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0.$$

a równanie *pierwszej biegunowej* tegoż punktu będzie

(2 *bis*) $$x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z=0.$$

Te dwie krzywe są też same, w razie obecnym; jestto widocznem *a priori*, ponieważ tutaj $m=2$; sprawdza się to rozwijając pierwsze równanie. Znajduje się w rzeczy samej

$$x(Ax_0+By_0+Dz_0)+y(Bx_0+Cy_0+Ez_0)+z(Dx_0+Ey_0+Fz_0)=0,$$

co można napisać

$$x_0(Ax+By+Dz)+y_0(Bx+Cy+Ez)+z_0(Dx+Ey+Fz)=0.$$

440. ZNALEŹĆ BIEGUN PROSTEJ DANEJ.

Jeśli równanie prostej jest

(3) $$Mx+Ny+Pz=0,$$

a x_0, y_0, z_0, spółrzędne jej bieguna, równanie tej prostej będzie się mogło napisać

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0.$$

Wywodzi się z tego, identyfikując te dwa równania i znosząc wskaźnik zero,

(4) $$\frac{f'_x}{M}=\frac{f'_y}{N}=\frac{f'_z}{P}.$$

Te równania wyznaczają biegun prostej (3); w krzywych drugiego rzędu, *jakakolwiek prosta ma tylko jeden biegun.*

Uwaga I. *Biegun prostej w nieskończoności* wyznaczonym jest przez równania

(5) $$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0;$$

zobaczymy później że punkt ten jest *środkiem* krzywej.

Uwaga II. Prosta biegunowa jakiegokolwiek punktu w nieskończoności na kierunku $y - ax =$ jest n° (437)

(6) $$f'_x + af'_y = 0;$$

jestto równanie *średnicy sprzężonej* danego kierunku; przechodzi ona przez punkt (5).

441. Wykreślenie biegunowej.

1° *Biegunowa jakiegokolwiek punktu jest cięciwą zetknięć stycznych wychodzących z tego punktu* n° (344).

Własność ta daje wykreślenie biegunowej, kiedy punkt jest na zewnątrz krzywej.

2° *Jeśli przez jakikolwiek punkt* P *poprowadzi się jakąkolwiek sieczną i jeśli w punktach przecięcia tej siecznej z krzywą prowadzi się styczne, miejsce przecięć tych stycznych jest biegunową punktu* P.

Niech będą, w rzeczy samej, x_1 i y_1 spółrzędne punktu M tego miejsca, a x_0, i y_0 spółrzędne punktu stałego P. Sieczna będąc cięciwą zątknięć stycznych poprowadzonych przez punkt M, będzie miała na równanie

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0;$$

ponieważ ta sieczna ma przechodzić przez punkt P, będzie więc

$$x_0f'_{x_1} + y_0f'_{y_1} + z_0f'_{z_1} = 0.$$

Jestto związek między spółrzędnemi punktu M, a zatem równanie miejsca. Znosząc wskaźniki będzie

$$x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z = 0;$$

co przedstawia właśnie równanie biegunowej punktu P.

Ta własność pozwala zbudować biegunową kiedy punkt P jest punktem wewnętrznym krzywej.

3° *Przez punkt stały* P *poprowadźmy dwie jakiekolwiek sieczne i połączmy przekątniowo punkta przepięcia tych siecznych z krzywą; punkta spotkania się tych przekątni będą na biegunowej punktu* P.

Własność ta może się dowieść jak w n^rze^ (237); zobaczymy inne dowodzenie w n^rze^ (454).

442. Główne własności biegunowych.

Własności te wykazane przez *la Hire'a* (*sectiones conicæ*, *an* 1685), wynikają z podwójnego kształtu (2) i (2 *bis*) n^er^ (439), który można nadać równaniu biegunowej punktu.

1° *Gdy jakakolwiek prosta obraca się około punktu stałego, biegun jej zakreśla prostą stałą, która jest biegunową punktu.*

Niech będzie prosta ruchoma

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

przechodząca przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$; będzie więc

(1) $$\lambda x_0 + \mu y_0 + \nu z_0 = 0.$$

Biegun tej prostej będzie wyznaczony równaniami n^{ru} (440)

(2) $$\frac{f'_x}{\lambda} = \frac{f'_y}{\mu} = \frac{f'_z}{\nu}.$$

Otrzyma się te bieguny, rugując λ, μ, ν, między równaniami (1) i (2); co daje

(3) $$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0;$$

jestto równanie biegunowej punktu (x_0, y_0, z_0); przeto.....

2° *Gdy jakikolwiek punkt przebiega prostą stałą, jego biegunowa obraca się około punktu stałego, który jest biegunem prostej.*

Przypuśćmy że punkt (x_1, y_1, z_1) porusza się na prostej stałej

(1) $$Mx + Ny + Pz = 0,$$

będzie ztąd

(2) $$Mx_1 + Ny_1 + Pz_1 = 0.$$

Otóż biegunowa punktu x_1, y_1, z_1, jest

(3) $$x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0.$$

Równania (2) i (3) wyznaczają biegunową jakiegokolwiek punktu, czyniącego zadość założonym warunkom; za pomocą związku (2) wyrugujmy z_1, na przykład, z równania (3); otrzyma się

(4) $$x_1[Mf'_z - Pf'_x] + y_1[Nf'_z - Pf'_y] = 0;$$

takiem jest równanie biegunowej jakiegokolwiek punktu, znajdującego się na prostej stałej (1).

Widocznem jest, że jakiemiby nie były x_1 i y_1, ta prosta przechodzi przez punkt stały, wyznaczony równaniami

$$Mf'_z - Pf'_x = 0, \qquad Nf'_z - Pf'_y = 0,$$

albo

(5) $$\frac{f'_x}{M} = \frac{f'_y}{N} = \frac{f'_z}{P};$$

Otóż są to równania wyznaczające biegun prostej (1), n^{ro} (440); więc.....

443. PROSTE SPRZĘŻONE.

Nazywamy wogóle *prostemi sprzężonemi* dwie proste takie, że biegun jednej znajduje się na drugiej.

Niech będą równania dwóch prostych.

$$(1) \qquad mx + ny + pz = 0,$$

$$(2) \qquad m_1x + n_1y + p_1z = 0.$$

Biegun pierwszej będzie wyznaczony przez równania

$$\frac{f'_x}{m} = \frac{f'_y}{n} = \frac{f'_z}{p};$$

równania, które można napisać w sposób następny, czyniąc pochodne wyraźnemi

$$Ax + By + Dz - \lambda m = 0,$$

$$Bx + Cy + Ez - \lambda n = 0,$$

$$Dx + Ey + Fz - \lambda p = 0;$$

oprócz tego ma się

$$m_1x + n_1y + p_1z + 0 = 0,$$

ponieważ punkt (x, y, z) ma się znajdywać na prostej (2).

Jeśli się wyruguje x, y, z, λ między temi czterema ostatniemi równaniami, otrzyma się

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m_1 & n_1 & p_1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

ma się tym sposobem warunek ażeby biegun prostej (1) znajdywał się na prostej (2).

Ale ponieważ związek ten nie zmienia się, zmieniając m, n, p na m_1, n_1, p_1, wyraża on więc także, że biegun prostej (2) znajduje się na prostej (1).

Związek (3) *jest więc warunkiem aby dwie proste* (1) *i* (2) *były sprzężonemi.*

444. PRZYPADEK SZCZEGÓLNY.

Weźmy równanie dwóch prostych pod kształtem

$$(1) \qquad y = ax + bz,$$

$$(2) \qquad y = a_1x + b_1z.$$

i przypuśćmy że jedna z prostych, pierwsza na przykład, przechodzi przez *biegun prostej w nieskończoności*, to jest przez *środek krzywej* n^er (440).

Równanie pierwszej prostej może się napisać

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0,$$

x_0, y_0, z_0, będą spółrzędnemi jej bieguna. Ponieważ ta prosta ma przejść przez punkt

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0;$$

powinno się mieć $z_0 = 0$ i równanie pierwszej prostej przywiedzie się do kształtu

(3) $$x_0 f'_x + y_0 f'_y = 0;$$

jeśli biegun jej ma za spółrzędne $(x_0, y_0, z_0 = 0)$. Ale biegun ten ma się znajdywać na drugiej prostej (2), będzie więc

$$y_0 = a_1 x_0;$$

a ztąd, równanie pierwszej prostej przyjmie kształt ostateczny

(4) $$f'_x + a_1 f'_y = 0,$$

albo

(4 *bis*) $$Ax + By + Dz) + a_1(Bx + Cy + Ez) = 0.$$

Zidentyfikujmy to równanie (4 *bis*) z równaniem (1) pierwszej prostej; otrzyma się najprzód wartość na b w funkcyi a_1, a potem związek następny

(5) $$A + B(a + a_1) + Caa_1 = 0.$$

Takim jest związek między spółczynnikami kątowymi dwóch prostych sprzężonych, gdy jedna z tych prostych przechodzi przez środek krzywej.

N. B. Jeżeli w wartości na b, wyrażonej w funkcyi a_1 zastąpi się a_1 przez jego wartość wyciągniętą ze związku (5); otrzyma się właśnie warunek ażeby prosta (1) przechodziła przez środek krzywej.

445. Uwaga. Interesującem jest wykazanie, jakim sposobem ten szczególny związek (5) wyprowadza się ze związku ogólnego (3) n^ru (443).

Przedstawiwszy równania dwóch prostych pod kształtem

(1) $$y = ax + bz,$$

(2) $$y = a_1 x + b_1 z,$$

związek (3) jest wtedy

$$\begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & -1 \\ D & E & F & b \\ a_1 & -1 & b_1 & 0 \end{vmatrix} = ;$$

albo rozwijając

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} aa_1(CF - E^2) + (a + a_1)(BF - ED) + (AF - D^2) \\ + (ab_1 + a_1b)(BE - CD) + (b + b_1)(AE - BD) + bb_1(AC - B^2) \end{array} \right\} = 0.$$

Wyraźmy teraz że prosta (1) przechodzi przez środek; w tym celu zidentyfikujmy jej równanie z równaniem następującego kształtu (n[er] (440) uwaga)

$$f'_x + \lambda f'_y = 0,$$

i wyrugujmy nieoznaczoną λ; otrzyma się równanie warunkowe

$$(7) \qquad a(BE - CD) + b(AC - B^2) + AE - BD = 0.$$

Założywszy to, napiszemy równanie (6) pod następnym kształtem

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} aa_1(CF - E^2) + (a + a_1)(BF - ED) + AF - D^3 + b\{a_1(BE - CD) + AE - BD\} \\ \qquad + b_1\{a(BE - CD) + b(AC - B^2) + AE - BD\} \end{array} \right\} = 0;$$

ze względu na związek (7) współczynnik b_1 jest zerem; a zastępując b przez wartość wyprowadzoną z równania (7), równanie warunkowe (8) stanie się

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (B^2 - AC)[aa_1(CE - E^2) + (a + a_1)(BF - ED) + AF - D^2] \\ + [a_1(BE - CD) + (AE - BD)][a(BE - CD) + (AE - BD)] \end{array} \right\} = 0,$$

albo wreszcie

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} aa_1[(B^2 - AC)(CF - E^2) + (BE - CD)^2] + (a + a_1)[(B^2 - AC)(BF - ED) + (AE - BD)(BE - CD)] \\ \qquad + (B^2 - AC)(AF - D^2) + (AE - BD)^2. \end{array} \right\} = 0.$$

Otóż rozwijając każdy z nawiasów, znajduje się wyznacznik Δ jako czynnik wspólny, i pozostaje

$$(11) \qquad A + B(a + a_1) + Caa_1 = 0.$$

C. B. D. D.

IV° Biegunowe wzajemne.

446. « Niech będzie jakakolwiek krzywa kierująca D i pewna krzywa C; nazywa się krzywą bie-
» gunową krzywej C, wszelka krzywa C′ taka, że prosta biegunowa jakiegokolwiek punktu M na C′,
» wzięta względem krzywej kierującej D, jest styczną do krzywej C.

Nie trzeba mieszać nazwania krzywej biegunowej którego tu używamy, z nazwaniem które było już użytem na początku tego paragrafu; w przypadku obecnym krzywa biegunowa C′ jest przekształceniem krzywej pierwotnej.

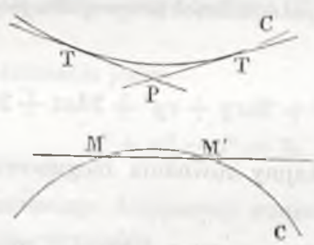
447. Weźmiemy jako krzywą kierującą D jakąkolwiek krzywą drugiego rzędu.

Ma się wtedy tę własność odwrotną :

Jeśli C′ jest krzywą biegunową krzywej C, krzywa C będzie również krzywą biegunową C′; krzywe C i C′ są nazwane biegunowemi wzajemnemi.

Aby dowieść tego twierdzenia dość jest sprawdzić, że biegun (względem kierującej D) jakiegokolwiek punktu krzywej C jest styczną do krzywej C′, lub że biegun jakiejkolwiek stycznej do krzywej C′ znajduje się na C.

Niech będzie M jakikolwiek punkt na C′, i M′ punkt sąsiedni punktu M; przez założenie biegunowa punktu M jest styczną do krzywej C, niech będzie TP tą styczną; podobnież, biegunowa punktu M′ jest styczną do krzywej C, niech będzie T′P tą styczną. Punkt przecięcia się P tych dwóch stycznych będzie biegunem prostej MM′, gdyż biegunowe różnych punktów jakiejkolwiek prostej przechodzą przez biegun tej prostej n^er (442). Przypuśćmy teraz, że punkt M pozostając stałym, prosta MM′ obraca się około tego punktu, tak aby punkt M′ zbliżał się nieograniczenie do M; sieczna MM′ stanie się w granicy styczną w M do krzywej C′. Szukajmy wtedy położenia granicy punktu P; punkt M pozostając stałym, biegunowa TP jest również stałą; i prosta MM′ obracając

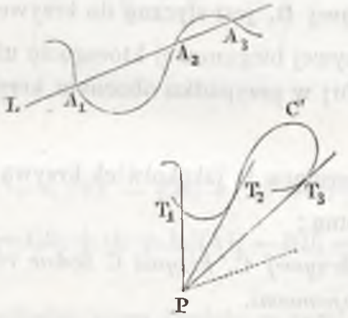


się około punktu M, jej biegun P opisuje biegunową TP punktu M. Punkt P pozostaje więc na linii TP i znajduje się jednocześnie na biegunowej T′P punktu M′; otóż, gdy punkt M′ dąży do zejścia się z punktem M, styczna T′P dąży do zlania się z TP, i położenie granicy ich punktu przecięcia się, to jest punkt P, jest punktem zetknięcia stycznej TP. Więc : « biegunowa jakiegokolwiek
» punktu M, krzywej C′ jest styczną do krzywej C, i jej punkt zetknięcia jest biegunem stycznej
» w M do krzywej C′; albo, biegunowa jakiegokolwiek punktu T, krzywej C jest styczną do krzy-
» wej C′, i jej punkt zetknięcia jest biegunem stycznej w T do krzywej c. »

Własności odwrotne n^er (442) biegunowych w krzywych drugiego rzędu pozwolą przekształcić jakikolwiek układ na inny, tak aby punktom pierwszego odpowiadały proste w drugim, i odwrotnie ; punkt odpowiedni jakiejkolwiek prostej jest biegunem prostej, i prosta odpowiednia jakiemukolwiek punktowi jest biegunową punktu.

448. *Jeżeli* m *jest rzędem jakiejkolwiek krzywej* C, m *będzie klassą jej biegunowej wzajemnej* C', *i odwrotnie.*

W rzeczy samej, m będąc rzędem krzywej C, jakakolwiek prosta L spotka tę krzywą w m punktach A_1, A_2,... A_m. Niech będzie P biegunem (względem krzywej D drugiego rzędu) prostej L;



punkt A_1 ma na biegunową jakąkolwiek styczną do krzywej C', i ta biegunowa przejdzie przez punkt P.

Więc m punktom A_1, A_2,... A_m, będą odpowiadały m stycznych do krzywej C' i przechodzących przez punkt P, i nie więcej jak m; gdyż jeśliby było więcej jak m stycznych do C', przechodzących przez punkt P, znalazłoby się na prostej L więcej jak m punktów należących do krzywej C, co nie może mieć miejsca.

Lecz prosta L będąc dowolną, punkt P jest jakimkolwiek punktem płaszczyzny; więc przez jakikolwiek punkt P można poprowadzić m stycznych do krzywej C' i m tylko; przeto, m jest klassą krzywej C'.

Odwrotnie, jeżeli n jest rzędem krzywej C', n będzie klassą krzywej C.

Dowodzenie jest tożsamo jak poprzedzające.

449. *Równanie biegunowej wzajemnej jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu.*

Niech będzie

$$(1) \qquad (D) \qquad f(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0,$$

równanie krzywej kierującej D; szukajmy równania biegunowej wzajemnej krzywej (C), której równanie jest

$$(2) \qquad (C) \qquad Ax^2 + 2Bxy + 2Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

Jeżeli x_0, y_0, z_0, są spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu M biegunowej wzajemnej C', biegunowa tego punktu, wzięta względem krzywej D, to jest

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0,$$

musi dotknąć krzywej (2); otrzyma się więc n^er^ (377), po zniesieniu wskaźników 0:

$$(3) \qquad (C') \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & f'_x \\ B & C & E & f'_y \\ D & E & F & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

jestto związek między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu krzywej szukanej C', jestto więc równanie biegunowej wzajemnej.

Widzimy że biegunowa wzajemna jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu jest także krzywą drugiego rzędu; co wreszcie wynika z twierdzenia poprzedzającego, ponieważ jakakolwiek krzywa drugiego rzędu jest 2giej klassy i odwrotnie.

450. Jeśli się bierze za krzywą kierującą koło

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

równanie biegunowej wzajemnej ma kształt prosty

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & x \\ B & C & E & y \\ D & E & F & -z \\ x & y & -z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli się porówna ten wynik z wynikiem otrzymanym w n^rze (427) równanie (III), widzimy że równanie biegunowej wzajemnej jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu (kierującą będąc koło promienia jeden) ma tenże sam kształt algebraiczny jak równanie styczneczkowe krzywej danej.

Wszelako te dwa równania nie przedstawiają tejże samej krzywej, gdyż zmienne przedstawiają w pierwszym przypadku spółrzędne jakiegokolwiek punktu, a w drugim spółrzędne jakiejkolwiek stycznej.

Równanie (4) jest równaniem spółrzędnych-punkt biegunowej wzajemnej krzywej drugiego rzędu

$$(C) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$

biorąc na krzywą kierującą koło promienia jeden

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

451. *Szukajmy równania styczneczkowego biegunowej wzajemnej krzywej* (C), *przypuszczając zawsze że się bierze na krzywą kierującą koło rzeczywiste*

$$(5) \qquad x^2 + y^2 - 1^2 = 0.$$

Jeżeli x_0, y_0, z_0, są spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu krzywej C, biegunową tego punktu, względem koła rzeczywistego (5) będzie

$$xx_0 + yy_0 - 1 = 0;$$

i spółrzędne tej prostej będą n^ru (110) x_0 i y_0 ($u = x_0$, $v = y_0$). Biegunową wzajemną jest obwijająca tej prostej; a ponieważ x_0 i y_0 powinny sprawdzać równanie krzywej (C), otrzyma się więc

$$(6) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

To dowodzenie widocznie daje się zastosować do krzywej jakiegokolwiek rzędu; ztąd wnosimy że: Kiedy się bierze na krzywą kierującą koło

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

równaniem styczneczkowem biegunowej wzajemnej krzywej

$$(1^\circ) \qquad f(x, y) = 0,$$

jest

$$(2^\circ) \qquad f(u, v) = 0;$$

to jest że dość jest wytłómaczyć równanie krzywej w układzie równań styczneczkowych, albo uważać zmienne x i y jako przedstawiające spółrzędne jakiejkolwiek prostej.

§ II. — SPÓŁRZĘDNE TRYLINIJNE.

II° Równanie biegunowych.

452. Zobaczyć określenie biegunowych n[er] [429].

Niech będzie danem równanie jakiejkolwiek krzywej w spółrzędnych trzylinijnych

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = 0;$$

jeśli X_0, Y_0, Z_0 są spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu stałego P; X, Y, Z spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu M, wziętego na siecznej; X_i Y_i Z_i spółrzędnemi punktu przecięcia się siecznej PM z krzywą; otrzyma się, według n[ru] (90)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_i &= \frac{\lambda X_0 + X}{\lambda + 1}, \\ Y_i &= \frac{\lambda Y_0 + Y}{\lambda + 1}, \\ Z_i &= \frac{\lambda Z_0 + Z}{\lambda + 1}, \end{aligned} \right. \qquad \text{gdzie} \qquad \lambda = \frac{\overline{MA_i}}{\overline{A_i P}}.$$

Spółrzędne X_i, Y_i, Z_i, musząc sprawdzać równanie krzywej, ma się

$$f(\lambda X_0 + X, \quad \lambda Y_0 + Y, \quad \lambda Z_0 + Z) = 0,$$

albo rozwijając

$$(3) \qquad \lambda^m f(X_0, Y_0, Z_0) + \lambda^{m-1}[X f'_{X_0} + Y f'_{Y_0} + Z f'_{Z_0}] + \ldots + \lambda[X_0 f'_X + Y_0 f'_Y + Z_0 f'_Z] + f(X, Y, Z) = 0;$$

to równanie wyznaczy wartości m stosunków w których krzywa, przypuszczona rzędu m, dzieli odcinek MP.

Według związku (III *bis*) n^{ru} [429] który określa biegunową i znaczenie (2) stałej λ.

Otrzyma się równanie (m — p)$^{\text{centej}}$ *biegunowej* albo *biegunowej rzędu* p *punktu* P, *równając z zerem spółczynnik podniesiony do potęgi* λ^{m-p} *w równaniu* (3).

Według tego otrzyma się :

1° *Na równanie prostej biegunowej punktu* $P(X_0, Y_0, Z_0)$

$$Xf'_{X_0}+Yf'_{Y_0}+Zf'_{Z_0}=0. \tag{4}$$

2° *Na równanie konicznej biegunowej punktu* $P(X_0, Y_0, Z_0)$

$$X^2f''_{X_0X_0}+Y^2f''_{Y_0Y_0}+Z^2f''_{Z_0Z_0}+2XYf''_{X_0Y_0}+2XZf''_{X_0Z_0}+2YZf''_{Y_0Z_0}=0. \tag{5}$$

I tak dalej.

3° *Na równanie* 1^{szej} *biegunowej* albo *krzywej zetknięć stycznych poprowadzonych przez punkt* $P(X_0, Y_0, Z_0)$: n^{er} (405)

$$X_0f'_X+Y_0f'_Y+Z_0f'_Z=0. \tag{6}$$

4° Ma się nakoniec związek zasługujący na uwagę

$$\frac{MA_1.MA_2\ldots MA_m}{PA_1.PA_2\ldots PA_m}=\frac{f(X, Y, Z)}{f(X_0, Y_0, Z_0)}. \tag{7}$$

Uwaga. Związek (5) n^{ru} (409), który muszą sprawdzać spółrzędne punktów przegięcia i punktów podwójnych, wyraża że koniczna tego punktu sprowadza się do dwóch prostych : Tak więc

Koniczna biegunowa punktu przegięcia albo punktu podwójnego sprowadza się do układu dwóch prostych.

II° Zastosowanie do krzywych drugiego rzędu.

453. Równanie prostej biegunowej jakiegokolwiek punktu (X_0, Y_0, Z_0), względne do jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu,

$$f(X, Y, Z)=0, \tag{1}$$

może się napisać pod jednym lub drugim z kształtów następujących

$$Xf'_{X_0}+Yf'_{Y_0}+Zf'_{Z_0}=0, \tag{2}$$

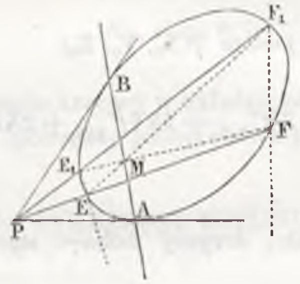
$$X_0f'_X+Y_0f'_Y+Z_0f'_Z=0, \tag{2 bis}$$

454. Jest łatwo dowieść, posługując się spółrzędnemi trzylinijnemi, własności (3°) wysłowionej w n^{rze} (441), to jest :

Jeżeli przez jakikolwiek punkt stały P *poprowadzi się dwie jakiekolwiek sieczne, i jeśli się złączy przekątnie punkta przecięcia się tych siecznych z krzywą, punkta spotkania przekątnych są na biegunowej punktu* P.

Weźmy za trójkąt odniesienia trójkąt utworzony przez styczne poprowadzone z punktu P i cięciwę zetknięcia AB; równanie krzywej drugiego rzędu będzie

$$XY = Z^2; \tag{1}$$



wynik który się wyprowadza z równania ogólnego, wyrażając że krzywa dotyka PA i PB w A i B względnie.

Niech będą

$$(2)\quad Y = \lambda X, \qquad (3)\quad Y = \lambda_1 X,$$

równania dwóch siecznych PE i PE_1.

Rozwiązując równania (1) i (2), znajduje się dla spółrzędnych punktów E i F;

$$E \begin{cases} Z = X\sqrt{\lambda}, \\ Y = \lambda X; \end{cases} \qquad F \begin{cases} Z = -X\sqrt{\lambda}, \\ Y = \lambda X. \end{cases}$$

Dla punktów E_1 i F_1, wystarczy zmienić λ na λ_1, co daje

$$E_1 \begin{cases} Z = X\sqrt{\lambda_1}, \\ Y = \lambda_1 X; \end{cases} \qquad F_1 \begin{cases} Z = -X\sqrt{\lambda_1}, \\ Y = \lambda_1 X. \end{cases}$$

Równanie prostej EE_1 będzie

$$(3) \qquad (EE_1) \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 1 & \lambda & \sqrt{\lambda} \\ 1 & \lambda_1 & \sqrt{\lambda_1} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{albo} \quad X\sqrt{\lambda}\,\sqrt{\lambda_1} + Y - Z(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_1}) = 0;$$

dla prostej EF_1, wystarczy zmienić znaki pierwiastków $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda_1}$; ma się wtedy

$$(4) \qquad (FF_1) \quad X\sqrt{\lambda}\,\sqrt{\lambda_1} + Y + Z(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_1}) = 0.$$

Spółrzędne punktu przecięcia się dwóch prostych EE_1, i FF_1 sprawdzają równanie otrzymane odejmując stronami równania (3) i (4), to jest

$$2Z(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda_1})=0, \qquad \text{albo} \qquad Z=0;$$

więc dwie proste EE_1, FF_1 przecinają się na biegunowej $Z=0$ punktu P.

Tenże sam wypadek sprawdzi się względem prostych EF_1 i E_1F; równanie prostej EF_1 wyprowadza się z równania prostej EE_1 zmieniając w nim $\sqrt{\lambda_1}$ na $-\sqrt{\lambda_1}$; co daje

$$(EF_1) \qquad -X\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_1}+Y-Z(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda_1})=0,$$

$$(E_1F) \qquad -X\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_1}+Y+Z(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda_1})=0;$$

zkąd wypada jeszcze, $Z=0$, odejmując ostatnie równania stronami.

455. *Trójkąty sprzężone względem jakiejkolwiek konicznej.*

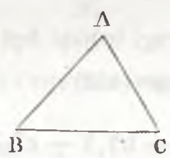
Trójkąt jest nazwany sprzężonym względem jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu, kiedy względem tej krzywej, jakikolwiek z jego wierzchołków jest biegunem boku przeciwnego.

Te trójkąty przedstawiają liczne własności, napotkamy z nich niektóre.

456. *Koniczne sprzężone względem jakiegokolwiek trójkąta.*

Krzywa drugiego rzędu jest nazwana sprzężoną względem jakiegokolwiek trójkąta stałego, kiedy trójkąt jest sprzężonym względem tej konicznej.

Szukajmy równania ogólnego krzywych drugiego rzędu sprzężonych względem jakiegokolwiek



trójkąta stałego, wybierając ten trójkąt za trójkąt odniesienia.

Równaniem ogólnem krzywych drugiego rzędu odniesionych do trójkąta ABC jest

$$(1) \qquad aX^2+bY^2+cZ^2+2dYZ+2eXZ+2fXY=0.$$

Biegunowa jakiegokolwiek punktu (X_0, Y_0, Z_0) ma na równanie

$$X_0f'_X+Y_0f'_Y+Z_0f'_Z=0.$$

Punkt $A(Y_0=0,\ Z_0=0)$, musi mieć za biegunową bok BC, to jest że równanie

$$f'_X=0 \qquad \text{albo} \qquad aX+fY+eZ=0,$$

musi przedstawiać bok BC lub $X=0$; otrzyma się więc

$$f=0, \qquad e=0.$$

Punkt $B(Z_0 = 0,\ X_0 = 0)$ musi mieć za biegunową bok AC, to jest że równanie

$$f'_Y = 0, \qquad \text{albo} \qquad fX + bY + dZ = 0,$$

musi przedstawiać bok AC albo $Y = 0$; otrzyma się więc

$$f = 0, \qquad d = 0.$$

Widzimy że te warunki będąc spełnione, punkt C będzie koniecznie biegunem boku AC.

Równaniem ogólnem krzywych drugiego rzędu sprzężonych względem trójkąta stałego (wziętego za trójkąt odniesienia) jest więc

$$(1) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0;$$

to równanie zamyka w sobie tylko dwa parametry dowolne.

457. Twierdzenie o trójkątach sprzężonych.

Jeżeli dwa trójkąty są sprzężone względem jakiejkolwiek konicznej, jeśli się przeprowadzi jakąkolwiek koniczną przez trzy wierzchołki jednego z trójkątów i przez dwa drugiego, 2ga koniczna przejdzie przez 3ci wierzchołek drugiego trojkąta.

Weźmy pierwszy z trójkątów za trójkąt odniesienia, równaniem konicznej stałej będzie

$$(1) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0,$$

a, b, c będąc stałemi danemi.

Niech będą: A_1, B_1, C_1, drugi trójkąt, i (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) spółrzędne odpowiednie wierzchołków A_1, B_1, C_1.

Szukajmy naprzód warunków aby ten drugi trójkąt był sprzężonym względem krzywej (1).

Biegunowa wierzchołka A_1 jest według nru (453):

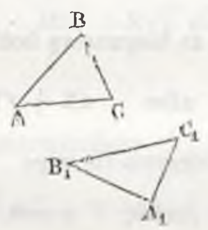
$$aX_1X + bY_1Y + cZ_1Z = 0;$$

trzeba wyrazić że wierzchołki B_1, C_1, znajdują się na tej biegunowej; trzeba będzie także wyrazić że wierzchołki A_1 i C_1 są na biegunowej punktu B_1; jak również i dla wierzchołka C_1. Wszystkie te warunki będą wypełnione, jeśli się ma trzy związki

$$(2) \qquad aX_2X_3 + bY_2Y_3 + cZ_2Z_3 = 0,$$

$$(3) \qquad aX_3X_1 + bY_3Y_1 + cZ_3Z_1 = 0,$$

$$(4) \qquad aX_1X_2 + bY_1Y_2 + cZ_1Z_2 = 0.$$



Otóż z równania ogólnego krzywych drugiego rzędu w spółrzędnych trzylinijnych, wypada że równanie ogólne konicznych przechodzących przez trzy wierzchołki trójkąta odniesienia ABC jest

$$\lambda YZ + \mu XZ + \nu XY = 0.$$

Wyraźmy że ta krzywa przechodzi przez dwa wierzchołki B_1 i C_1, otrzyma się warunki

$$\lambda Y_2Z_2 + \mu X_2Z_2 + \nu X_2Y_2 = 0,$$

$$\lambda Y_3Z_3 + \mu X_3Z_3 + \nu X_3Y_3 = 0.$$

Rugując λ, μ, ν między temi trzema ostatniemi równaniami, znajduje się

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} YZ & ZX & XY \\ Y_2Z_2 & Z_2X_2 & X_2Y_2 \\ Y_3Z_3 & Z_3X_3 & X_3Y_3 \end{vmatrix} = 0;$$

jest to równanie jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu, przechodzącej przez pięć punktów A, B, C, B_1, C_1.

Dowiedziemy że ta krzywa musi przechodzić przez wierzchołek A_1.

W tym celu wyciągnijmy naprzód X_1, Y_1, Z_1 z równań (3) i (4); ma się

$$(6)\qquad \frac{aX_1}{\underbrace{Y_2Z_3 - Y_3Z_2}_{M_1}} = \frac{bY_1}{\underbrace{Z_2X_3 - Z_3X_2}_{N_1}} = \frac{cZ_1}{\underbrace{X_2Y_3 - X_3Y_2}_{P_1}}.$$

Z drugiej strony, rozwijając równanie (5) i wprowadzając litery M_1, N_1, P_1, przedstawiające mianowniki ułamków (6), wypada

$$YZX_2X_3M_1 + ZXY_2Y_3N_1 + XYZ_2Z_3P_1 = 0.$$

Podstawmy w to równanie za X, Y, Z, wartości X_1, Y_1, Z_1, wynikające ze związków (6); otrzyma się znosząc czynnik $M_1N_1P_1$:

$$\frac{X_2X_3}{bc} + \frac{Y_2Y_3}{ac} + \frac{Z_2Z_3}{ab} = 0, \quad \text{albo} \quad aX_2X_3 + bY_2Y_3 + cZ_2Z_3 = 0;$$

co jest tożsamością według związku (2). Więc...

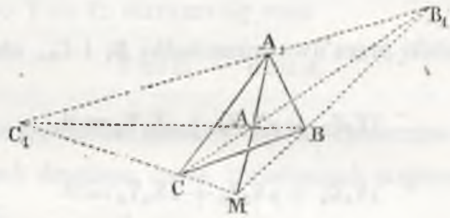
458. Twierdzenie o konicznych sprzężonych.

Jest nieskończona ilość konicznych sprzężonych względem jakiegokolwiek trójkąta i przechodzących przez jakikolwiek punkt $M(X_0, Y_0, Z_0)$ dowolnie wzięty; otrzyma się, w rzeczy samej, między nieoznaczonemi a, b, c, jeden tylko związek n^er (456)

$$(1)\qquad aX_0^2 + bY_0^2 + cZ_0^2 = 0.$$

Więc, mając wzgląd na związek (1), koniczne

(2) $$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0,$$



przechodzą wszystkie przez trzy inne punkta stałe

$$A_1 : -\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0},$$

$$B_1 : \frac{X}{X_0} = -\frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0},$$

$$C_1 : \frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} = -\frac{Z}{Z_0},$$

Te trzy punkta są łatwe do wykreślenia a ich położenie zasługuje na uwagę :

« Złączmy MA, MB, MC; sprzężone harmoniczne prostych MB i MC, względem kątów B i C, » przecinają się na AM, jest to punkt A_1; sprzężone harmoniczne prostych MC i MA, względem » kątów C i A przecinają się na MB; jest to punkt B_1; również, punkt C_1, jest przecięciem się » sprzężonych harmonicznych MA i MB, względem kątów A i B; punkt C_1 znajduje się na MC.

Te własności sprawdzają się łatwo :

I tak prosta MB ma na równanie $\frac{X}{X_0} - \frac{Z}{Z_0} = 0$;

jej sprzężona harmoniczna, względem kąta B, będzie $\frac{X}{X_0} + \frac{Z}{Z_0} = 0$, n^er [84].

Prosta MC ma na równanie $\frac{X}{X_0} - \frac{Y}{Y_0} = 0$; jej sprzężoną harmoniczną, względem kąta C, będzie $\frac{X}{X_0} + \frac{Y}{Y_0} = 0$. Otóż te dwie proste

$$\frac{X}{X_0} + \frac{Y}{Y_0} = 0, \quad \frac{X}{X_0} + \frac{Z}{Z_0} = 0$$

przecinają się na prostej, której równaniem jest

$$\frac{Y}{Y_0} - \frac{Z}{Z_0} = 0;$$

i spółrzędne punktu pazecięcia się tych trzech prostych są spółrzędnemi punktu A_1.

459. Trójkąty biegunowe wzajemne.

Dwa trójkąty ABC, $A_1B_1C_1$ są nazwane *biegunowe wzajemne* kiedy wierzchołki jednego są odpowiednio (względem jakiejkolwiek konicznej danej) biegunami boków drugiego. Tym sposobem

A będzie biegunem B_1C_1, B będzie biegunem C_1A_1, C będzie biegunem A_1B_1; i odwrotnie A_1 będzie biegunem BC, B_1 będzie biegunem CA, C_1 będzie biegunem AB.

Przytoczymy dwie własności następujące:

« Proste łączące wierzchołki odpowiednie, to jest proste AA_1, BB_1, CC_1, są zbiegającemi się.

« Przecięcia się boków przeciwnych, to jest (BC, B_1C_1), (CA, C_1A_1), (AB, A_1B_1) są trzy punkta w linii prostej. »

Dowodzenie tych twierdzeń wykona się bez trudności, biorąc jeden z trójkątów, ABC na przykład, za trójkąt odniesienia.

Równanie konicznej danej będzie wtedy kształtu

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dYZ + 2eXZ + 2fXY = 0.$$

Równania boków BC, CA, AB, są względnie

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

a równaniami boków B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 będą:

$$B_1C_1 : \frac{1}{2} f''_X = aX + fY + eZ = 0,$$

$$C_1A_1 : \frac{1}{2} f''_Y = fX + bY + dZ = 0,$$

$$A_1B_1 : \frac{1}{2} f''_Z = eX + dY + cZ = 0,$$

Za pomocą tych wzorów, sprawdzi się bezpośrednio własności wysłowione.

§ III. — RÓWNANIA STYCZNECZKOWE.

I° Określenie krzywych biegunowych jakiejkolwiek prostej.

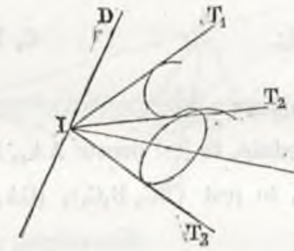
460. Oto określenie które damy względem krzywych biegunowych jakiejkolwiek prostej:

« Niech będzie krzywa klassy n, i prosta D, stała w swej płaszczyznie, przez jakikolwiek punkt I, » prostej D, poprowadźmy do krzywej n stycznych IT_1, IT_2,... IT_n; potem przez punkt I wystawmy » sobie prostą IL, taką żeby było

$$(1) \qquad \sum_p \left(\frac{1}{\widehat{\text{st}\,DIL}} - \frac{1}{\widehat{\text{st}\,DIT_1}}\right)\left(\frac{1}{\widehat{\text{st}\,DIL}} - \frac{1}{\widehat{\text{st}\,DIT_1}}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{\widehat{\text{st}\,DIL}} - \frac{1}{\widehat{\text{st}\,DIT_p}}\right) = 0;$$

» obwijająca prostej IL jest biegunową p^{entej} klassy albo $(n-p)^{entą}$ biegunową prostej D.

« Summa $\sum\limits_{p}$ rozciąga się do wszystkich iloczynów z p różnic $\left(\dfrac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIL}}-\dfrac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIT_i}}\right)$, nadto, kąty
» $\widehat{DIT_i}$ powinny być uważane jako dodatnie lub odjemne, według tego, jak począwszy od prostej D,



» one są przebieżone w pewnym kierunku lub w kierunku przeciwnym.

Można dać związkowi (I) inny kształt który należy zauważyć. Ma się

$$\frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIL}}-\frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIT_i}}=\frac{\mathrm{dos}\,\widehat{DIL}}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIL}}-\frac{\mathrm{dos}\,\widehat{DIT_i}}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIT_i}}=\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{DIT_i}\,\mathrm{dos}\,\widehat{DIL}-\mathrm{wst}\,\widehat{DIL}\,\mathrm{dos}\,\widehat{DIT_i}}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIL}\,.\,\mathrm{wst}\,\widehat{DIT_i}},$$

albo

$$\frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIL}}-\frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIT_i}}=\frac{\mathrm{wst}(\widehat{DIT_i}-\widehat{DIL})}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIL}\,.\,\mathrm{wst}\,\widehat{DIT_i}}.$$

Uwaga nru (11) daje się zastosować do kątów; ma się tym sposobem

$$\widehat{DIL}+\widehat{LIT_i}+\widehat{T_iID}=0,$$

zkąd

$$\widehat{DIT_i}-\widehat{DIL}=\widehat{DIT_i};$$

zkąd nakoniec

$$(1^\circ)\qquad \frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIL}}-\frac{1}{\mathrm{st}\,\widehat{DIT_i}}=\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{LIT_i}}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIT_i}}\cdot\frac{1}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIL}}.$$

Podstawiając te wartości w związku (I) czynnik $\dfrac{1}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIL}}$ zniknie, i pozostaje

$$(\mathrm{II})\qquad \sum_{p}\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{LIT_1}}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIT_1}}\cdot\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{LIT_2}}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIT_2}}\cdots\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{LIT_p}}{\mathrm{wst}\,\widehat{DIT_p}}=0.$$

albo zmieniwszy znaki wszystkich czynników:

$$(\mathrm{II}\ bis)\qquad \sum\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{LIT_1}}{\mathrm{wst}\,\widehat{T_1ID}}\cdot\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{LIT_2}}{\mathrm{wst}\,\widehat{T_2ID}}\cdots\frac{\mathrm{wst}\,\widehat{LIT_p}}{\mathrm{wst}\,\widehat{T_pID}}=0.$$

W szczególności, biegunowa 1^{szej} klassy albo punkt biegunowy prostej D, będzie określonym przez związek :

(III) $$\frac{n}{\widehat{\mathrm{st\,DIL}}}=\frac{1}{\widehat{\mathrm{st\,DIT_1}}}+\frac{1}{\widehat{\mathrm{st\,DIT_2}}}+\ldots+\frac{1}{\widehat{\mathrm{st\,DIT}_n}};$$

albo

(III *bis*) $$\frac{\widehat{\mathrm{wst\,LIT_1}}}{\widehat{\mathrm{wst\,T_1ID}}}+\frac{\widehat{\mathrm{wst\,LIT_2}}}{\widehat{\mathrm{wst\,T_2ID}}}+\ldots+\frac{\widehat{\mathrm{wst\,LIT}_n}}{\widehat{\mathrm{wst\,T}_n\mathrm{ID}}}=0.$$

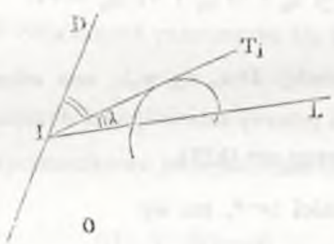
II° Spółrzędne u, v.

461. Wyznaczymy w układzie spółrzędnych u, v, równania biegunowych jakiejkolwiek prostej.

Niech będzie równanie krzywej n^{tej} klassy

(1) $$f(u,v)=0, \quad \text{albo} \quad f(u,v,w)=0.$$

Niech będą u_0, v_0, spółrzędne prostej danej D; u_i, v_i spółrzędne stycznej poprowadzonej do krzywej przez jakikolwiek punkt I prostej D; u, v, spółrzędne prostej IL poprowadzonej przez punkt I.



Jeśli się założy (O będąc początkiem spółrzędnych)

(2) $$\lambda=\frac{\widehat{\mathrm{wst\,LIT}_i}}{\widehat{\mathrm{wst\,T}_i\mathrm{ID}}}\,\frac{\widehat{\mathrm{wst\,OID}}}{\widehat{\mathrm{wst\,OIL}}};$$

spółrzędne u_i, v_i, stycznej IT$_i$ będą n^{er} (122)

(3) $$u_i=\frac{\lambda u_0+u}{\lambda+1}, \qquad v_i=\frac{\lambda v_0+v}{\lambda+1}.$$

Możemy podstawić za te wyrażenia następujące

$$\frac{u_i}{w_i}=\frac{\lambda u_0+u}{\lambda w_0+w}, \qquad \frac{v_i}{w_i}=\frac{\lambda v_0+v}{\lambda w_0+w}$$

z warunkiem zastąpienia w_i, w_0, w przez 1, na końcu rachunku.

Prosta IT_i dotykająca krzywej, musi mieć

$$f\left(\frac{u_i}{w_i},\ \frac{v_i}{w_i},\ 1\right)=0,$$

albo

$$f(\lambda u_0+u,\quad \lambda v_0+v,\quad \lambda w_0+w)=0;$$

albo nakoniec rozwijając

(4) $$\lambda^n f(u_0, v_0, w_0)+\lambda^{n-1}(u_0 f''_{u_0}+v_0 f''_{v_0}+w f'_{w_0})+\ldots+\lambda(u_0 f'_u+v_0 f'_v+w_0 f'_w)+f(u, v, w)=0.$$

Według wartości (2) na λ, widzimy że spółczynnik ilości λ^{n-p} będzie pierwszą stroną związku (II), n^ru (460), pomnożoną przez $\left[\dfrac{\text{wst}\,\widehat{OID}}{\text{wst}\,\widehat{OIL}}\right]^p$; więc

Równanie biegunowej p^entej klassy albo (n — p)^enta biegunowa prostej (u_0, v_0, w_0) *otrzyma się zrównając z zerem spółczynnik ilości* λ^{n-p} *w równaniu* (4).

462. 1° Równ. z zerem spółczynnik ilości λ^{n-1}, ma się

(5) $$uf'_{u_0}+vf'_{v_0}+wf'_{w_0}=0;$$

jestto równanie punktu biegunowego prostej $D(u_0, v_0, w_0)$; *ono odpowiada związkom* (III) albo (III *bis*) numeru (460).

Zobaczyć w przypadku obecnym uwagę n^ru (423).

2° Równając z zerem spółczynnik ilości λ^{n-2}, ma się

(6) $$u^2 f''_{u_0u_0}+v^2 f''_{v_0v_0}+w^2 f''_{w_0w_0}+2uvf''_{u_0v_0}+2uwf''_{u_0w_0}+2vwf''_{v_0w_0}=0;$$

jestto równanie biegunowej 2^giej klassy prostej (u_0, v_0, w_0).

I tak dalej.

3° Równając z zerem spółczynnik ilości λ, ma się

(7) $$u_0 f'_u+v_0 f'_v+w_0 f'_w=0$$

jestto równanie 1^szej biegunowej albo biegunowej (n — 1)^entej *klassy; styczne w punktach w których prosta przecina krzywą dotykają 1^szą biegunową tej prostej* n^er (413).

4° Jeśli się weźmie iloczyn pierwiastków równania (4), ma się, mając wzgląd na znaczenie (2) stosunku λ:

$$\frac{f(u, v, w)}{f(u_0, v_0, w_0)}=+\frac{\text{wst}\,\widehat{LIT_1}}{\text{wst}\,\widehat{DIT_1}}\cdot\frac{\text{wst}\,\widehat{LIT_2}}{\text{wst}\,\widehat{DIT_2}}\cdots\frac{\text{wst}\,\widehat{LIT_n}}{\text{wst}\,\widehat{DIT_n}}\cdot\left(\frac{\text{wst}\,\widehat{OID}}{\text{wst}\,\widehat{OIL}}\right)^n;$$

I jest punktem spotkania się dwóch prostych $L(u, v, w)$ i $D(u_0, v_0, w_0)$; $T_1, T_2, \ldots T_n$, są styczne poprowadzone do krzywej przez punkt I; O jest początkiem spółrzędnych.

Ten związek (8) daje znaczenie geometryczne wyrażenia $f(u, v, w)$, i może prowadzić do rozmaitych twierdzeń.

463. KRZYWE 2giej KLASSY.

Jeśli krzywa jest 2giej klassy, niech będzie jej równanie

$$(1) \qquad f(u, v, w) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0;$$

równanie punktu biegunowego prostej (u_0, v_0, w_0) może się położyć pod jednym lub drugim z kształtów następujących:

$$(2) \qquad uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = 0,$$

$$(2 \; bis) \qquad u_0f'_u + v_0f'_v + w_0f'_w = 0;$$

Styczne wyprowadzone z punktów, w których prosta (u_0, v_0, w_0) przecina krzywą (1), muszą przejść przez punkt (2), ner [462, 3°]; wypada ztąd że *punkt biegunowy* prostej nie jest niczem innem jak tylko *biegunem* prostej, słowo biegun będąc wzięte w znaczeniu określonem w § I, nrze (429); co jednakże nie ma miejsca jak tylko w przypadku krzywych 2giej klassy.

IIIº SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE U, V, W.

464. Zobaczyć określenie biegunowych jakiejkolwiek prostej ner (460).

Niech będzie danem równanie styczneczkowe jakiejkolwiek krzywej, w spółrzędnych trzylinijnych.

$$(1) \qquad f(U, V, W) = 0.$$

Jeśli U_0, V_0, W_0, są spółrzędne prostej stałej (D); U_i, V_i, W_i, spółrzędne stycznej T_i poprowadzonej do krzywej przez jakikolwiek punkt I prostej (D); U, V, W, spółrzędne jakiejkolwiek prostej przechodzącej przez punkt I; otrzyma się ner (142)

$$(2) \qquad U_i = \frac{\lambda U_0 + U}{\rho}, \quad V_i = \frac{\lambda V_0 + V}{\rho}, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \frac{\text{wst}\,\widehat{\text{LIT}_i}}{\text{wst}\,\widehat{\text{T}_i\text{ID}}}, \quad W_i = \frac{\lambda W_0 + W}{\rho},$$

Spółrzędne U_i, V_i, W_i muszą sprawdzać równanie krzywej; ma sie, podstawiwszy wartości (2) rozwinąwszy :

$$(3)\quad \lambda^n f(U_0, V_0, W_0) + \lambda^{n-1}(Uf'_{U_0} + Vf'_{V_0} + Wf'_{W_0}) + \ldots + \lambda(U_0 f'_U + V_0 f'_V + W_0 f'_W) + f(U, V, W) = 0.$$

Według związku (II *bis*) n^ru^ (460), widzimy że :

Otrzymałoby się równanie biegunowej p^entej^ *klassy albo* (n — p)^entą^ *biegunową prostej* (U_0, V_0, W_0), *równając z zerem spółczynnik ilości* λ^{n-p} *w równaniu* (3).

Według tego znajdzie się :

1° *Na równanie punktu biegunowego prostej* $D(U_0, V_0, W_0)$

$$(4)\quad Uf'_{U_0} + Vf'_{V_0} + Wf'_{W_0} = 0.$$

2° *Na równanie biegunowej* 2^giej^ *klassy prostej* D

$$(5)\quad U^2 f''_{U_0U_0} + V^2 f''_{V_0V_0} + W^2 f''_{W_0W_0} + 2UV f''_{U_0V_0}\ 2UW f''_{U_0W_0}\ 2VW f''_{V_0W_0} = 0.$$

I tak dalej.

3° Na równanie 1^szej^ biegunowej do której są stycznemi proste dotykające krzywej w punktach jej przecięcia z prostą D.

$$(6)\quad U_0 f'_U + V_0 f'_V + W_0 f'_W = 0.$$

4° Ma się nakoniec związek godzien uwagi :

$$(7)\quad \frac{\text{wst}\,\widehat{LIT_1}}{\text{wst}\,\widehat{DIT_1}} \cdot \frac{\text{wst}\,\widehat{LIT_2}}{\text{wst}\,\widehat{DIT_2}} \cdots \frac{\text{wst}\,\widehat{LIT_n}}{\text{wst}\,\widehat{DIT_n}} = \frac{f(U, V, W)}{f(U_0, V_0, W_0)}.$$

Uwaga. Związek (6) n^ru^ (425) który muszą sprawdzać spółrzędne stycznych w punktach zwrotu i stycznych wielokrotnych, wyraża że biegunowa (5) 2^giej^ klassy sprowadza się do dwóch punktów. Tym sposobem

Biegunowa 2^giej^ *klassy jakiejkolwiek stycznej zwrotu albo jakiejkolwiek stycznej podwójnej sprowadza się do jakiegokolwiek układu dwóch punktów.*

465. Krzywe 2^giej^ klassy.

Równanie punktu biegunowego jakiejkolwiek prostej (U_0, V_0, W_0), względem jakiejkolwiek krzywej 2^giej^ klassy

$$(1)\quad f(U, V, W) = 0,$$

może się napisać pod jednym lub drugim z dwóch kształtów

$$(2)\quad Uf'_{U_0} + Vf'_{V_0} + Wf'_{W_0} = 0,$$

$$(2\ bis)\quad U_0 f'_U + V_0 f'_V + W_0 f'_W = 0.$$

466. Wykreślenie punktu biegunowego jakiejkolwiek prostej.

Przez jakikolwiek punkt I prostej D danej, poprowadźmy dwie styczne IA i IB do krzywej; przez druki punkt I′, poprowadźmy również dwie styczne I′A′ i I′B′; proste łączące punkta przecięcia się IA z I′A′, i IB z I′B′; albo IA z I′B′ i IB z I′A′, przechodzą przez punkt stały P, który jest punktem biegunowym prostej D.

Weźmy za trójkąt odniesienia, trójkąt utworzony przez prostą D i styczne w punktach gdzie ta prosta spotyka krzywą; wyprowadzi się z równania ogólnego krzywych 2giej klassy, że równaniem krzywej zadość czyniącej tym warunkom jest

$$(1)\qquad UV = W^2;$$

oznaczymy przez M, N, P, wierzchołki $U=0$, $V=0$, $W=0$, trójkąta odniesienia. Według nru (465), równanie punktu biegunowego prostej MN gdzie ($U=0$, $V=0$) będzie $W=0$, albo punkt P.

Niech będą

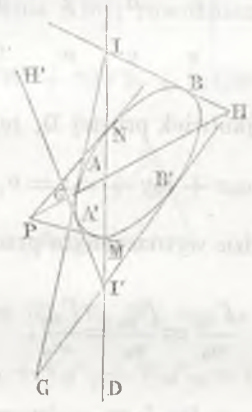
$$(2)\qquad V=\lambda U,\qquad (3)\qquad V=\lambda_1 U,$$

równania dwóch punktów I i I′, wziętych na prostej MN.

Rozwiązując równania (1) i (2), potem równania (1) i (3), otrzymamy na spółrzędne stycznych:

$$\text{IA}\begin{cases}V=\lambda U,\\ W=+\sqrt{\lambda}.U,\end{cases}\qquad \text{IB}\begin{cases}V=\lambda U,\\ W=-\sqrt{\lambda}.U;\end{cases}$$

$$\text{I′A′}\begin{cases}V=\lambda_1 U,\\ W=+\sqrt{\lambda_1}.U;\end{cases}\qquad \text{I′B′}\begin{cases}V=\lambda_1 U,\\ W=-\sqrt{\lambda_1}.U;\end{cases}$$



Równaniem punktu przecięcia się dwóch prostych IA i I′A′ będzie

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} U & V & W\\ 1 & \lambda & \sqrt{\lambda}\\ 1 & \lambda_1 & \sqrt{\lambda_1}\end{vmatrix}=0 \quad\text{albo}\quad (G)\quad U\sqrt{\lambda}\,\sqrt{\lambda_1}+V-W(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda_1})=0;$$

równanie punktu przecięcia się prostych IB i I'B' otrzyma się zmieniając znaki $\sqrt{\lambda}$ i $\sqrt{\lambda_1}$, znajduje się tym sposobem

(5) (H) $$U\sqrt{\lambda}\ \sqrt{\lambda_1} + V + W(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_1}) = 0.$$

Jeśli się odejmie stronami równania (4) i (5), otrzyma się równanie jakiegokolwiek punktu leżącego na prostej HG; otóż znajduje się tym sposobem

$$W = 0;$$

prosta HG przechodzi więc przez punkt P.

Zmieniając $\sqrt{\lambda}$ na $-\sqrt{\lambda_1}$ w równaniach (4) i (5), otrzyma się równania punktów H' i G'; przecięcia się względne IB z I'A i IA z IB'; widzimy jeszcze że prosta H'P' przechodzi przez punkt P. Więc.....

467. W krzywych 2giej klassy, punkt biegunowy n^er (460) jakiejkolwiek prostej zlewa się z biegunem numer (429) prostej.

Uzasadnimy tę własność, jako ćwiczenie, przez rachunek wprost zastosowany do równania ogólnego.

Równaniem w spółrzędnych-punkt jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu będąc

(1) $$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy = 0$$

równaniem styczneczkowem tejże samej krzywej będzie n^er (427)

(2) $$F(u, v, w) = \begin{vmatrix} a & f & e & u \\ f & b & d & v \\ e & d & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Niech będą u, v, w, spółrzędne jakiejkolwiek prostej D, jej równanie będzie

$$u_0x + v_0y + w_0z = 0,$$

a jej biegun, względem krzywej (1), będzie wyznaczonym przez równania

(3) $$\frac{f'_{x_0}}{u_0} = \frac{f'_{y_0}}{v_0} = \frac{f'_{z_0}}{w_0},$$

albo

(3 *bis*) $$\left\{\begin{array}{l} ax_1 + fy_1 + cz_1 - \lambda u_0 = 0, \\ fx_1 + by_1 + dz_1 - \lambda v_0 = 0, \\ ex_1 + by_1 + cz_1 - \lambda w_0 = 0. \end{array}\right.$$

Oznaczając przez x_1, y_1, z_1, spółrzędne tego bieguna, jego równaniem styczneczkowem będzie

$$ux_1 + vy_1 + wz_1, = 0;$$

zkąd się wyprowadza wyrugowawszy x_1, y_1, z_1, w tych czterech równaniach

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a & f & e & u_0 \\ f & b & d & v_0 \\ e & d & c & w_0 \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie (4) jest więc równaniem styczneczkowem bieguna prostej D, względem krzywej $f(x, y, z) = 0$.

Szukajmy teraz równania punktu biegunowego prostej $D(u_0, v_0, w_0)$ względem krzywej (2).

Otóż ma się, co jest łatwem do sprawdzenia

$$\frac{1}{2}F'_u = -\begin{vmatrix} f & e & u \\ b & d & v \\ d & c & w \end{vmatrix},\quad \frac{1}{2}F'_v = \begin{vmatrix} a & e & u \\ f & d & v \\ e & c & w \end{vmatrix},\quad \frac{1}{2}F'_w = -\begin{vmatrix} a & f & u \\ f & b & v \\ e & d & w \end{vmatrix};$$

a równaniem punktu biegunowego prostej (u_0, v_0, w_0) jest

$$u_0F'_u + v_0F'_v + w_0F' = 0$$

znajduje się widocznie równanie (4). Więc.....

468. Równanie ogólne krzywych 2giej klassy sprzężonych względem jakiegokolwiek trójkąta stałego numer (456).

Weźmy trójkąt stały za trójkąt odniesienia ABC; równaniem ogólnem krzywych 2giej klassy jest

$$(1)\qquad aU^2 + bV^2 + cW^2 + 2dVW + 2eUW + 2fUV = 0.$$

Punkt biegunowy jakiejkolwiek prostej (U_0, V_0, W_0) ma na równanie

$$U_0f'_U + V_0f'_V + W_0f'_W = 0.$$

Prosta $BC(V_0 = 0,\ W_0 = 0)$ musi mieć za punkt biegunowy punkt A, to jest że równanie

$$f'_U = 0, \qquad \text{albo} \qquad aU + fV + eW = 0$$

musi przedstawiać punkt A albo $U = 0$; ma się więc

$$f = 0, \qquad e = 0.$$

Prosta $CA(W_0 = 0,\ U_0 = 0)$ musi mieć na punkt biegunowy punkt B, to jest że równanie

$$f'_V = 0, \qquad \text{albo} \qquad fU + bV + dW = 0,$$

musi przedstawiać punkt B albo $V = 0$; ma się więc

$$f = 0, \qquad d = 0.$$

Widzimy że te warunki będąc spełnione, prosta AB ma koniecznie punkt C za punkt biegunowy.

Równaniem ogólnem krzywych 2giej klassy sprzężonych względem jakiegokolwiek trójkąta stałego jest, gdy się weźmie ten trójkąt za trójkąt odniesienia:

$$(1) \qquad aU^2 + bV^2 + cW^2 = 0.$$

To równanie zamyka w sobie tylko dwa parametry dowolne.

ROZDZIAŁ III

PUNKTA I STYCZNE WIELOKROTNE.

I. — PUNKTA WIELOKROTNE. (Równania w spółrzędnych-punkt.)

I° Określenie punktów wielokrotnych. — Styczne.

469. Mówi się że jakikolwiek punkt P, leżący na jakiejkolwiek krzywej rzędu m jest *punktem wielokrotnym* rzędu p, kiedy jakakolwiek sieczna, przechodząca przez ten punkt, tam spotyka krzywą w p punktach zlewających się z punktem P; przeto, ta sieczna nie spotyka krzywej w więcej jak $(m - p)$ punktach odrębnych od punktu P.

Punkt wielokrotny rzędu p jest zawsze przecięciem się p gałęzi rzeczywistych albo urojonych krzywej, każda z tych gałęzi posiada jakąkolwiek styczną właściwie nazwaną w punkcie P, to jest prostą przechodzącą przez punkt P i przez punkt nieskończenie sąsiedni, leżący na gałęzi uważanej; ta styczna spotyka wtedy krzywą w $(p + 1)$ w punktach zlewających się z punktem P.

Może się zdarzyć, że ta styczna spotyka krzywą w $(p + 2)$ punktach, albo w $(p + 3)$ punktach, etc... zlewających się z punktem P; mówi się wtedy, że ta styczna ma z krzywą zetknięcie 2giego, 3ciego rzędu.

Przypuśćmy że się weźmie za początek spółrzędnych jakikolwiek punkt krzywej; równanie tej krzywej przedstawi się pod kształtem

$$(1) \qquad f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_{p+1}(x, y) + \varphi_p(x, y) = 0,$$

funkcye $\varphi_i(x, y)$ są jednorodne w x i y, i stopnia i; funkcya φ_p jest przynajmniej stopnia pierwszego.

Jeśli p jest wyższem od 1, początek spółrzędnych będzie punktem wielokrotnym rzędu p: i p stycznych do p gałęzi krzywej, tak rzeczywistych jak urojonych, przechodzących przez punkt 0, będą dane równając z zerem ogół wyrazów stopnia najniższego, to jest przez równanie

$$(2) \qquad \varphi_p(x, y) = 0.$$

W rzeczy samej, niech będzie $y = \lambda x$ równanie jakiejkolwiek siecznej przechodzącej przez początek; odcięte punktów przecięcia się tej prostej z krzywą będą dane przez równanie

$$(3) \qquad x^m\varphi_m(1, \lambda) + x^{m-1}\varphi_{m-1}(1, \lambda) + \ldots\ldots + x^{p+1}\varphi_{p+1}(1, \lambda) + x^p\varphi_p(1, \lambda) = 0.$$

Otóż pierwsza strona tego równania jest podzielną przez x^p, jakiemkolwiek byłoby λ, to jest że ona przyjmie p razy pierwiastek $x = 0$ i tylko p razy; więc jakakolwiek sieczna, przechodząca przez początek O, spotyka krzywą w p punktach zlanych z punktem O, a tem samem nie spotyka ją w więcej jak $(m - p)$ punktach odrębnych od punktu O; punkt O *jest więc punktem wielokrotnym rzędu* p.

Aby otrzymać styczne do p gałęzi krzywej, które przechodzą przez punkt O, dość wyrazić że prosta

$$(4) \qquad y = \lambda x$$

spotyka krzywą w $(p + 1)$ punktach zbiegających się z punktem O; co wymaga, według równania (3), żeby było

$$(5) \qquad \varphi_p(1, \lambda) = 0;$$

równanie stopnia p w λ, i którego pierwiastki będą spółczynnikami kątowymi p stycznych, właściwie nazwanych do krzywej w punkcie O.

Jeśli się zastąpi λ przez $\frac{y}{x}$ w równaniu (5), i gdy się pomnoży potem przez x^p, otrzyma się równanie

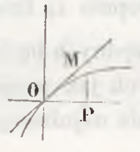
$$(6) \qquad \varphi_p(x, y) = 0;$$

jestto równanie między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu którejkolwiek ze stycznych, albo równanie p *stycznych w punkcie wielokrotnym rzędu* p.

Równanie (5) może przypuścić wartości nieskończone na λ; styczne odpowiednie tym wartościom nieskończonym znajdują się koniecznie w równaniu (6).

Uwaga. Jeśli krzywa przechodzi przez początek spółrzędnych, spółczynnik kątowy stycznych w tym punkcie otrzymuje się wyznaczając granicę stosunku $\frac{y}{x}$, kiedy x zdąża do zera.

W rzeczy samej, spółczynnik kątowy siecznej, przechodząc przez punkt O i przez punkt sąsiedni



(x, y), ma na wartość $\frac{y}{x}$; więc.....

II° Dyskussya punktów wielokrotnych.

470. Niech będą x_0, y_0, spółrzędne jakiegokolwiek punktu krzywej

$$f(x, y) = 0;$$

jeśli się weźmie ten punkt za początek spółrzędnych, równanie krzywej otrzyma kształt

$$f(x + x_0, \quad y + y_0) = 0;$$

albo rozwinąwszy :

$$(1) \quad f(x_0, y_0) + (xf'_{x_0} + yf'_{y_0}) + \frac{1}{1.2}[x^2f''_{x_0x_0} + 2xyf''_{x_0y_0} + y^2f''_{y_0y_0}] + \frac{1}{1.2.3}[\ldots] + \ldots = 0.$$

Jeśli się zauważy że $f(x_0, y_0) = 0$, i jeśli się założy

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y) = xf'_{x_0} + yf'_{y_0}, \\ 1.2.\varphi_2(x,y) = x^2f''_{x_0x_0} + 2xyf''_{x_0y_0} + y^2f''_{y_0y_0}; \\ 1.2.3\varphi_3(x, y) = x^3f'''_{x_0x_0x_0} + 3x^2yf'''_{x_0x_0y_0} + 3xy^2f'''_{x_0y_0y_0} + y^3f'''_{y_0y_0y_0}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

równanie krzywej otrzyma ten kształt ostateczny :

$$(3) \quad \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots = 0$$

$\varphi_p(x, y)$ będąc funkcyą jednorodną stopnia p.

471. Punkta pojedyńcze.

Jeśli równanie (3) *zamyka w sobie wyrazy pierwszego stopnia, to jest jeśli* x_0, y_0, *nie znoszą razem pochodnych* f'_{x_0}, f'_{y_0}, *początek albo punkt* (x_0, y_0) *jest punktem pojedyńczym krzywej.*

W rzeczy samej, jeśli szukamy przecięcia się krzywej z jakąkolwiek prostą

$$(4) \quad y = \lambda x,$$

przechodzącą przez początek, ma się równanie

$$(5) \quad x\varphi_1(1, \lambda) + x^2\varphi_2(1, \lambda) + \ldots\ldots x^m\varphi_m(1, \lambda) = 0.$$

Otóż to równanie przypuszcza jeden tylko pierwiastek zero, póki λ pozostaje dowolnem; więc jakakolwiek prosta, przechodząca przez punkt O, spotyka krzywą w jednym punkcie; punkt O jest punktem pojedyńczym.

Jeśli się weźmie za λ wartość jedyną, λ_0, znoszącą funkcyą $\varphi_1(1, \lambda)$, pierwsza strona równania (6) stanie się podzielną przez x^2, przeto prosta

$$y = \lambda_0 x$$

spotka krzywą w dwóch punktach zbiegających się z punktem O; ta prosta będzie styczną do krzywej w punkcie O. Nie znajduje się tam tylko jedna styczna, ponieważ $\varphi_1(1, \lambda)$ jest 1$^{\text{go}}$ stopnia względem λ; równanie tej stycznej będzie

$$\varphi_1(x, y) = 0, \qquad \text{albo według równości (2)}$$

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} = 0, \qquad \text{z warunkiem } f(x_0, y_0) = 0. \tag{7}$$

Uwaga. Może się zdarzyć że wartość λ_0 na λ znosi jednocześnie $\varphi_2(1, \lambda)$; pierwsza strona równania (6) będzie wtedy podzielną przez x^3; prosta $y - \lambda_0 x = 0$ spotyka krzywą w trzech punktach zawartych w punkcie O; *ona ma z krzywą zetknięcie* 2$^{\text{go}}$ *rzędu; punkt* O *jest punktem przegięcia.*

Jeśliby wartość λ_0 znosiła $\varphi_1(1, \lambda)$, $\varphi_2(1, \lambda)$, $\varphi_3(1, \lambda)$, pierwsza strona równania (6) byłaby wtedy podzielną przez x^4, i prosta $y - \lambda_0 x = 0$ spotkałaby krzywą w czterech punktach zbiegających się z punktem O; punkt O jest zawsze punktem pojedyńczym, lecz styczna ma wtedy z krzywą zetknięcie 3$^{\text{ciego}}$ rzędu. I tak dalej.

Jeśli styczna ma zetknięcie rzędu wyższego jak pierwszy, *jest ona wtedy*, jak zobaczymy to poniżej, *styczną wielokrotną.*

472. Punkta podwójne.

Jeśli równanie (3) *nie zawiera w sobie wyrazów* 1$^{\text{go}}$ *stopnia, to jest jeśli się ma*

$$f(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_{x_0} = 0, \qquad f'_{y_0} = 0, \tag{8}$$

punkt (x_0, y_0) *jest punktem podwójnym krzywej.*

Równaniem krzywej jest wtedy

$$\varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots\ldots + \varphi_m(x, y) = 0;$$

a gdy szukamy przecięcia się tej krzywej z jakąkolwiek prostą

$$y = \lambda x,$$

przechodzącą przez początek, ma się równanie

$$x^2\varphi_2(1, \lambda) + x^3\varphi_3(1, \lambda) + \ldots\ldots + x^m\varphi_m(1, \lambda) = 0. \tag{9}$$

Otóż to równanie przypuszcza dwa pierwiastki równe zeru, jakiemkolwiek byłoby λ; więc wszelka prosta przechodząca przez początek spotyka w nim krzywą w dwóch punktach zbiegających się, i nie spotyka tej krzywej jak tylko w $(m-2)$ punktach odrębnych od O; *punkt* O *jest punktem podwójnym.*

Jeśli się weźmie na λ jedną z dwóch wartości λ_1, λ_2, znoszących funkcyą drugiego stopnia $\varphi_2(1, \lambda)$, pierwsza strona równania (9) jest podzielną przez x^3; dwie proste

$$y = \lambda_1 x, \qquad y = \lambda_2 x,$$

spotykają więc krzywą w trzech punktach zbiegających się z punktem O; są to styczne do tej krzywej w punkcie podwójnym O.

Nie znajduje się tam tylko te dwie styczne, ponieważ funkcya $\varphi_2(1, \lambda)$ jest drugiego stopnia; równaniem stycznych w punkcie podwójnym (x_0, y_0) będzie

$$\varphi_2(x, y) = 0,$$

albo, według równości (2):

(10) $$x^2 f''_{x_0x_0} + 2xy f''_{x_0y_0} + y^2 f''_{y_0y_0} = 0.$$

Zetknięcie jakiejkolwiek z tych stycznych, $y - \lambda_1 x = 0$ na przykład, będzie drugiego, trzeciego, etc... rzędu, jeżeli λ_1 zniesie $\varphi_3(1, \lambda)$; $\varphi_3(1, \lambda)$ i $\varphi_4(1, \lambda)$ etc...; w tym przypadku, styczna staje się wielokrotną.

Dyskussya punktów podwójnych.

Natura punktu podwójnego zależy od natury pierwiastków równania (10).

1szy Przypadek : Dwa pierwiastki równania (10) są rzeczywiste, ma się punkt podwójny zwyczajny.

Krzywa przedstawia dwie gałęzie, które się przecinają w punkcie uważanym i tworzą węzeł.

2gi Przypadek : Dwa pierwiastki równania (10) są urojone; ma się punkt odosobniony.

Dwie styczne są urojone; punkt nie należy do żadnej gałęzi rzeczywistej krzywej; jest on przecięciem się dwóch gałęzi urojonych.

3ci Przypadek : Dwa pierwiastki równania (10) są równe; ma się jakikolwiek punkt zwrotu.

Dwie styczne zlewają się w jedną która się nazywa styczną zwrotu, i jest ogólnie styczną pojedynczą.

W tem ostatniem założeniu może się napotkać wiele przypadków :

1° Zwrot 1go rodzaju; dwie gałęzie krzywej są po obu stronach stycznej; jestto przypadek ogólny,

styczna zwrotu ma wtedy z krzywą zetknięcie 1go rzędu; jestto jakakolwiek styczna pojedyncza.

2° Zwrot 2$^{\text{o}}$ rodzaju; dwie gałęzie są z tejże samej strony stycznej.

3° Punkt zwrotu odosobniony; punkt jest odosobnionym, a przecież dwie styczne są rzeczywiste i zlewające się z sobą.

4° Dwie gałęzie krzywej stykające się; daje się jeszcze takiemu punktowi nazwisko punktu zwrotu.

Przypadki 2°, 3°, 4°, są przypadkami szczególnymi punktu zwrotu; styczna zwrotu ma wtedy z krzywą zetknięcie przynajmniej drugiego rzędu; jestto styczna wielokrotna.

Dowodzenie tych własności będzie danem poniżej.

473. Punkta potrójne.

Gdy równanie (3) *nie zamyka w sobie wyrazów* 1$^{\text{o}}$ *i* 2$^{\text{o}}$ *stopnia, to jest gdy się ma*

(11) $\quad f(x_0, y_0) = 0; \quad f'_{x_0} = 0, \quad f'_{y_0} = 0, \quad f''_{x_0 x_0} = 0, \quad f''_{x_0 y_0} = 0, \quad f''_{y_0 y_0} = 0;$

punkt (x_0, y_0) *jest punktem potrójnym krzywej.*

Równanie krzywej sprowadza się wtedy do

$$\varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \ldots\ldots + \varphi_m(x, y) = 0.$$

Zobaczymy, jak poprzednio, że jakakolwiek prosta

$$y = \lambda x$$

spotyka zawsze krzywą w trzech punktach zlanych z punktem O; punkt O jest punktem potrójnym.

Jednakże, jeśli się weźmie na λ jedną z trzech wartości λ_1, λ_2, λ_3, znoszących funkcyą 3$^{\text{o}}$ stopnia $\varphi_3(1, \lambda)$, równanie

(12) $$x^3\varphi_3(1, \lambda) + x^4\varphi_4(1, \lambda) + \ldots\ldots + x^m\varphi_m(1, \lambda) = 0,$$

przypuści cztery pierwiastki zero; a tem samem, trzy proste

$$y = \lambda_1 x, \qquad y = \lambda_2 x, \qquad y = \lambda_3 x,$$

spotykają krzywą w czterech punktach zlanych z punktem O; te trzy proste będą trzy styczne właściwie nazwane w O; równaniem ich będzie

$$\varphi_3(x, y) = 0.$$

albo według równości (2):

(13) $$x^3 f'''_{x_0x_0x_0} + 3x^2 y f'''_{x_0x_0y_0} + 3xy^2 f'''_{x_0y_0y_0} + y^3 f'''_{y_0y_0y_0} = 0.$$

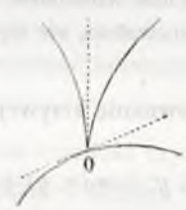
Natura punktu potrójnego zależy od natury pierwiastków równania (13).

1° Trzy pierwiastki są rzeczywiste; ma się punkt potrójny zwyczajny, krzywa przedstawia trzy

gałęzie rzeczywiste które się przecinają w punkcie uważanym.

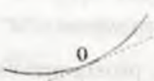
2° Jedyny pierwiastek jest rzeczywisty; ma się jedną gałęź rzeczywistą, i punkt O jest punktem odosobnionym na tej gałęzi. Wszelka prosta, przechodząca przez punkt O, nie spotyka krzywej jak tylko w $(m - 3)$ innych punktach.

2° Dwa pierwiastki równe; krzywa przedstawia wtedy zwrot odpowiedni do dwóch stycznych zle-



wających się z sobą, i gałęź pojedyńczą przechodzącą przez ten punkt zwrotu. Może się zdarzyć że punkt zwrotu jest odosobnionym, albo że jest utworzony przez dwie gałęzie dotykające się.

3° Trzy pierwiastki są równe; ma się trzy gałęzie krzywych stycznych do tejże samej prostej. Może



się zdarzyć że się ma zwrot odosobniony, krzywa przedstawia wtedy tylko jednę gałęź rzeczywistą.

474. Widzimy, z tego co poprzedza, jakim sposobem można rozpoznać i wyznaczyć punkt wielokrotny jakiegokolwiek rzędu.

Z równania (1) wyciąga się z łatwością wnioski następujące:

Aby punkt (x_0, y_0) był:

punktem prostym jakiejkolwiek krzywej, potrzeba 1^{go} warunku; $f(x_0, y_0) = 0$;

punktem podwójnym. . . . . $1 + 2$ warunków; $f(x_0, y_0) = 0$, $f'_{x_0} = 0$, $f'_{y_0} = 0$;

punktem potrójnym. . . . . . . $1 + 2 + 3$ warunków; związków (11);

. . . .

punktem wielokrotnym rzędu p . . . $1 + 2 + 3 + . . . + p = \dfrac{p(p+1)}{2}$ warunków.

« Tak więc : aby punkt był *punktem pojedyńczym* jakiejkolwiek krzywej, dosyć jest dać jeden warunek,
» to jest jeden związek między spółczynnikami równania krzywej.

« Aby punkt był *punktem wielokrotnym rzędu p* jakiejkolwiek krzywej, dosyć jest dać $\frac{p(p+1)}{2}$
» warunków, to jest $\frac{p(p+1)}{2}$ związków między spółczynnikami równania krzywej.

Można więc powiedzieć że :

Punkt wielokrotny rzędu p, *równoważy ogólnie, pół iloczynu* $\frac{p(p+1)}{2}$ *punktów pojedyńczych.*

III° Badanie jakiejkolwiek krzywej około któregokolwiek z jej punktów.

475. Będziemy w tym rozdziale badać szczegółowiej nachylenia krzywej około jakiegokolwiek punktu wielokrotnego. Idea pierwsza metody roztrząsania którą przedstawimy należy się *Sturmowi;* ona była rozwiniętą przez p. *Briot'a,* i znajduje się w pierwszych wydaniach jego analitycznej. Zastosujemy tę metodę do badania punktów pojedyńczych i punktów podwójnych, zmodyfikowawszy lekko jej kształt; wyprowadzimy ztąd wiele wniosków, względem zetknięcia stycznej w przypadku punktu zwrotu; te wnioski, chociaż bardzo ważne, nie były jeszcze dotąd wskazane w żadnym traktacie Analitycznej.

Weźmy za początek punkt uważany, równanie krzywej przedstawi się pod kształtem :

(1) $$\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots.. \varphi_m(x, y) = 0;$$

Szukajmy przecięć krzywej z prostą

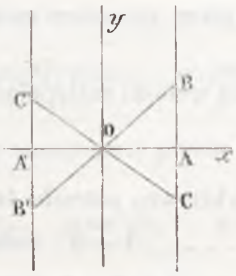
(2) $$y = tx,$$

przechodzącą przez początek O.

476. 1szy Przypadek : Równanie (1) zawiera wyrazy 1go stopnia.

Wybierzmy za oś odciętych, na przykład, prostą przedstawioną przez równanie

$$\varphi_1(x, y) = 0;$$



równanie krzywej przedstawi się wtedy pod kształtem

(3) $$y + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots.. = 0.$$

Zastąpmy w tem równaniu y przez tx, wypadnie podzieliwszy przez x

$$(4) \qquad f(t) = t + \overbrace{x\varphi_2(1,\, t) + x^2\varphi_3(1,\, t) + \ldots\ldots}^{X} = 0;$$

zkąd się wyciąga, biorąc pochodną względem t i uważając x za ilość stałą:

$$(5) \qquad f'(t) = 1 + \overbrace{x\varphi'_2(1,\, t) + x^2\varphi'_3(1,\, t) + \ldots\ldots}^{X'}$$

Litera t przedstawia spółczynnik kątowy prostej $y - tx = 0$ względem osi odciętych. Oznaczmy przez θ wartość dodatną na t bardzo blizką zera; wartościom $-\theta$ i $+\theta$ na t odpowiadają położenia OC i OB prostej (2), kąty $\widehat{COA}$ i $\widehat{AOB}$ są bardzo małe.

Przypuśćmy teraz że na x daje się wartość dość małą aby wielomiany X i X' miały, dla tej wartości i dla wszelkiej wartości mniejszej, tenże sam znak jak znak ich pierwszych wyrazów. Przypuśćmy nadto, co jest zawsze możebnem, że ta wartość na x jest dosyć małą aby wartość bezwzględna wielomianu X była mniejsza jak wartość bezwzględna θ na t; i aby wartość bezwzględna na X' była mniejszą od jedności.

Oznaczmy przez ε najmniejszą z wartości na x zadość czyniącej wszystkim tym warunkom, i niech będzie $OA \leqq \varepsilon$, $OA' \leqq \varepsilon$. Zostawiwszy x stałem i niższem lub co najwięcej równem ε, będziemy szukać punktów krzywej znajdujących się na prostych AB i A'B'.

Jeżeli t zmienia się od $-\infty$ do $-\theta$, wielomian $f(t)$ albo (4) nie zmienia znaku, jakąkolwiek byłaby wartość dodatna lub odjemna na x, byleby ona pozostała zawartą między $+\varepsilon$ i $-\varepsilon$; jeżeli t zmienia się od $+\theta$ do $+\infty$, wielomian $f(t)$ nie zmienia znaku i nie może się znosić, byleby wartość na x pozostała zawsze zawartą między ε i $-\varepsilon$. Więc krzywa nie może mieć punktów rzeczywistych tylko w kątach BOC i B'OC'; a tem samem, dla wartości wyznaczonej na x, nie można mieć punktów tylko na odcinkach odpowiednich BC i B'C'.

Otóż jeżeli t zmienia się od $-\theta$ do $+\theta$, x mając wartość stałą zawartą między granicami $-\varepsilon$ i $+\varepsilon$, pochodna $f'(t)$ albo (5) jest zawsze dodatną; więc funkcya $f(t)$ albo (4) może tylko raz w przedziale od $-\theta$ do $+\theta$ być równą zeru.

Niech będzie, ogólnie, $x^{p-1}\varphi_p(1,\, t)$ pierwszy z wyrazów równania (4), to jest

$$f(t) = t + x\varphi_2(1,\, t) + \ldots\ldots + x^{p-1}\varphi_p(1,\, t) + \ldots = 0,$$

który się nie znosi dla $t = 0$, i niech będzie $\varphi_p(1,\, 0) < 0$ na przykład,

1° Niech będzie x dodatnem; dla $: t = -\theta,$ ma się $f(-\theta) < 0,$

$: t = 0,$ ma się $f(0) < 0,$

$: t = +\theta,$ ...... $f(+\theta) > 0;$

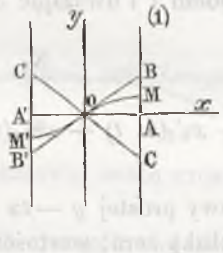
więc $f(t)$ znosi się raz i raz tylko między 0 i $+\theta$; krzywa ma punkt M, i jedyny między A i B.

2° Niech będzie x odjemnem; dla $: t = -\theta$, ma się $f(-\theta) < 0$,

$$: t = 0, \text{ ma się} \begin{cases} +, \text{ gdy } (p-1) \text{ jest nieparzystem, fig. (2),} \\ -, \text{ gdy } (p-1) \text{ jest parzystem, fig. (1),} \end{cases}$$

$: t = +\theta$, ma się $f(+\theta) > 0$:

(1)



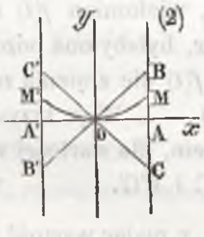
więc $f(t)$ znosi się raz tylko, bądź to między 0 i θ, bądź to między 0 i $-\theta$; krzywa ma punkt M' i jedyny albo między A' i B', albo między A' i C'.

Nie należy zapominać że wartościom na t zawartym między 0 i θ odpowiadają promienie wodzące leżące w kącie AOB albo w jego wierzchołkiem przeciwległym A'OB'; i, że wartościom na t zawartym między 0 i $-\theta$, odpowiadają promienie wodzące leżące w kącie AOC albo w jego wierzchołkiem przeciwległym A'OC'.

Wnioski pozostają też same, gdy $\varphi_p(1, t)$ jest dodatną dla $t = 0$, lecz krzywa jest położoną odwrotnie względem osi Ox.

Te następstwa mają miejsce, jakkolwiek małem byłoby x; więc zmniejszając x w sposób ciągły aż do zera, otrzyma się każdą razą jeden punkt z jednej i z drugiej strony Oy; ten szereg punktów

(2)



utworzy jedną gałęź krzywej, która dotknie się prostej Ox w O. Gdy $(p-1)$ jest nieparzystem, to położenie krzywej będzie zupełnie z tejże samej strony stycznej AA' fig. (2); gdy $(p-1)$ jest parzystem, gałęź krzywej przetnie styczną AA' fig. (1).

Otóż, przypuścić że $\varphi_2(1, t), \varphi_3(1, t), \ldots, \varphi_{p-1}(1, t)$ znoszą się dla $t = 0$; jestto przyjąć że równanie krzywej jest kształtu

$$y + y\psi_1(x, y) + y\psi_2(x, y) + \ldots + y\psi_{p-1}(x, y) + \varphi_p(x, y) + \ldots = 0,$$

to jest że styczna $y = 0$, spotyka krzywą w p punktach zbiegających się z punktem O; albo innemi słowy, że styczna ma z krzywą zetknięcie $(p-1)^{\text{entego}}$ rzędu.

Więc, przez jakikolwiek punkt pojedyńczy, przechodzi jakakolwiek gałęź krzywej i tylko jedna; krzywa pozostaje z tejże samej strony stycznej w blizkości punktu zetknięcia, gdy rzęd zetknięcia stycznej jest nieparzystym, krzywa przecina jej styczną, gdy rzęd zetknięcia tej stycznej jest parzystym.

477. 2^{gi} Przypadek : *Równanie* (1) *nie zamyka wyrazów* 1^{go} *stopnia, i zawiera wyrazy drugiego stopnia.* Równanie krzywej jest kształtu

(6) $$\varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \ldots = 0.$$

początek jest wtedy *punktem podwójnym.*

Dyskussya tego punktu zawiera trzy założenia następujące :

1° Dwie proste $\varphi_2(x, y) = 0$ są urojone;
2° Dwie proste $\varphi_2(x, y) = 0$ są rzeczywiste i odrębne;
3° Dwie proste $\varphi_2(x, y) = 0$ są zbiegające się.

I° Pierwsze założenie : *Dwie proste* $\varphi_2(x, y) = 0$ *są urojone.*

Jeśli założymy jeszcze

$$y = tx,$$

równanie (6) da, podzieliwszy przez x^2 :

$$f(t) = \varphi_2(1, t) + x\varphi_3(1, t) + x^2(1, t)\ldots.. = 0.$$

Jakiemkolwiek byłoby t, pierwszy wyraz $\varphi_2(1, t)$ nie znosi się, możemy go przypuścić dodatnym; można nadto przypuścić że x jest dość małem aby wartość bezwzględna summy wszystkich wyrazów następujących była mniejszą od najmniejszej z wartości na $\varphi_2(1, t)$, wartość różna od zera, skończona i dodatna. Więc, dla wartości na x dostatecznie małej $f(t)$ pozostanie zawsze dodatną, a tem samem, nie stanie się nigdy zerem.

Nie ma punktów rzeczywistych krzywej w blizkości punktu O; punkt O jest *punktem odosobnionym.*

478. II° Drugie założenie : *Dwie proste* $\varphi_2(x, y) = 0$ *są rzeczywiste i odrębne.*

Niech będą t_1, t_2, dwa pierwiastki równania $\varphi_2(1, t) = 0$; zastępując y przez tx i dzieląc przez x^2 równanie (6) da :

(7) $$f(t) = (t - t_1)(t - t_2) + \overbrace{x\varphi_3(1, t) + x^2\varphi_4(1, t) + \ldots..}^{X} = 0,$$

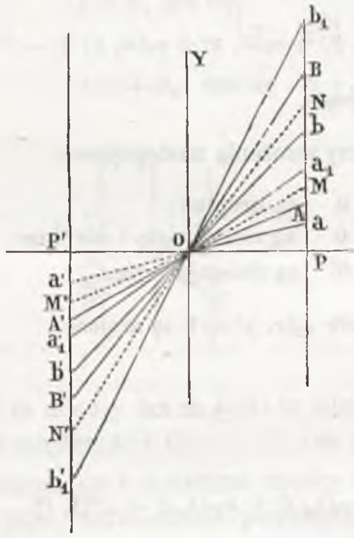
ztąd się wyciągnie, biorąc pochodne względem t, x zostawiwszy stałem :

(8) $$f'(t) = 2t - (t_1 + t_2) + \overbrace{x\varphi'_3(1, t) + x^2\varphi'_4(1, t) + \ldots..}^{X'};$$

(9) $$f''(t) = 2 + \overbrace{x\varphi''_3(1, t) + x^2\varphi''_4(1, t) + \ldots..}^{X''}$$

Oznaczywszy przez θ wartość bardzo małą i dodatną na t; przypuśćmy wartości t_1 i t_2 dodatne, $t_1 < t_2$; i niech będą OA i OB położenia siecznej $y = tx$ dla wartości t_1 i t_2 na t.

Przypuścimy teraz że była daną na x wartość dość mała aby wielomiany X, X', X'' miały, dla tej wartości i dla wszelkiej wartości mniejszej, tenże sam znak jak znak ich pierwszych wyrazów. Przypuśćmy nadto, co jest zawsze możebnem, że ta wartość na x była dość małą, aby wartość bezwzględna wielomianów X, X', X'', była względnie mniejszą jak wartość bezwzględna wyrazów je poprzedzających



w funkcyach $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, kiedy się robi w tych wyrazach $t = t_1 \pm \theta$ albo $t = t_2 \pm \theta$, θ będąc wartością bardzo małą lecz wyznaczoną.

Oznaczmy przez ε najmniejszą z wartości na x zadość czyniącej wszystkim tym warunkom; i niech będzie $OP = OP' = \varepsilon$. Zostawiwszy x stałem, niższem albo najwięcej równem ε, w wartości bezwzględnej, będzimy szukać punktów krzywej znajdujących się na prostych PA i P'A'.

Jeżeli t zmienia się od $-\infty$ do $(t_1 - \theta)$, wielomian $f(t)$ albo (6) nie zmienia znaku, byleby wartość dodatna albo odjemna na x pozostała zawartą między $-\varepsilon$ i $+\varepsilon$; jeżeli t zmienia się od $(t_2 + \theta)$ do $+\infty$, wielomian $f(t)$ albo (6) nie zmienia znaku i nie może się znosić, jakiemikolwiek byłyby wartości dodatne lub odjemne na x, byleby ich wartość bezwzględna nie przewyższała ε. Więc krzywa nie może mieć punktów rzeczywistych jak w kątach aOb_1, i $a'Ob'_1$; przypuśćmy że

$$aa', \qquad a_1a'_1; \qquad bb', \qquad b_1b'_1;$$

są położeniami siecznej $y = tx$ odpowiedniemi względnie wartościom

$$t = t_1 - \theta, \qquad t_1 + \theta, \qquad t_2 - \theta, \qquad t_2 + \theta.$$

Otóż jeżeli t zmienia się od $(t_1 - \theta)$ do $(t_2 + \theta)$, funkcya $f''(t)$ albo (9) pozostaje dodatną; pochodna $f'(t)$ albo (8) zmienia znak i znosi się raz tylko, wartość na x będąc zawsze zawartą między $-\varepsilon$ ε; w rzeczy samej,

dla $t = t_1 - \theta$, $f'(t)$ ma znak wyrażenia $[-2\theta + (t_2 - t)]$, ilość odjemna,

dla $t = t_2 + \theta$, $f'(t)$ ma znak wyrażenia $[2\theta + (t_2 - t)]$, ilość dodatna.

Funkcya $f(t)$ albo (7) nie może więc, w przedziale od $(t_1 - \theta)$ do $(t_2 + \theta)$ i, dla wartości wyznaczonej na x znosić się dwa razy.

Przypuśćmy że $\varphi_3(1, t)$ nie znosi się kiedy w niej się czyni $t = t_1$, albo $t = t_2$; i niech będzie, na przykład $\varphi_3(1, t_1) > 0$, $\varphi_3(1, t_2) >$

1° Jeśli się przypuści x dodatnem, i zawartem między 0 i $+\varepsilon$;

$$\text{dla}\begin{cases} t=t_1-\theta, & \text{ma się} \quad f(t_1-\theta)>0,\\ t=t_1, & \text{ma się} \; +,\\ t=t_1+\theta, & \text{ma się} \quad f(t_1+\theta)<0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} t=t_2-\theta, & \text{ma się} \quad f(t_2-\theta)<0,\\ t=t_2, & \text{ma się} \quad +,\\ t=t_2+\theta, & \text{ma się} \quad f(t_2+\theta)<0.\end{cases}$$

Więc funkcya $f(t)$ znosi się raz i raz tylko między $(t_1-\theta)$ i $(t_1+\theta)$; potem raz i raz tylko, między $(t_2-\theta)$ i $(t_2+\theta)$; krzywa ma więc jeden punkt M leżący między a i a_1, i drugi N leżący między b i b_1; położenie względne na M i N względem A i B zależy od znaków funkcyj $\varphi_3(1, t_1)$, $\varphi_3(1, t_2)$; tym sposobem, według założeń zrobionych, M znajduje się na odcinku Aa; N zaś na odcinku Bb.

2° Niech będzie x odjemnem i zawartem między 0 i $-\varepsilon$;

$$\text{dla}\begin{cases} t=t_1-\theta, & \text{ma się} \quad f(t_1-\theta)>0,\\ t=t_1, & \text{ma się} \quad -,\\ t=t_1+\theta, & \text{ma się} \quad f(t_1+\theta)<0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} t=t_2-\theta, & \text{ma się} \quad f(t_2-\theta)<0,\\ t=t_2, & \text{ma się} \quad -\\ t=t_2+\theta, & \text{ma się} \quad f(t_2+\theta)>0.\end{cases}$$

Krzywa ma dwa punkta i dwa tylko leżące na prostej P'B'; i według założeń zrobionych, jeden M', znajduje się na odcinku A'a'; drugi, N', znajduje się na odcinku B'b'_1.

Ma się więc dwie gałęzie rzeczywiste, i dwie tylko, przecinające się w O *i idące z jednej i z drugiej strony tego punktu; te dwie gałęzie dotykają się względnie prostych* AA' *i* BB'. *Gałęź będzie z tejże samej strony jej stycznej albo przetnie jej styczną, według tego jak zetknięcie ze styczną będzie rzędu nieparzystego albo parzystego. Punkt* O *jest punktem podwójnym zwyczajnym.*

Druga część tego podania uzasadni się jak w n^rze^ (476).

479. III° Trzecie założenie : *Dwie proste* $\varphi_2(x, y)=0$ *są zbiegające się.*

Weźmy tę prostą za oś odciętych, równanie krzywej będzie kształtu

$$y_2+\varphi_3(x, y)+_4(x, y)+\ldots\ldots=0. \tag{10}$$

Roztrząsanie to jest trudniejszem od poprzednich, lecz także najważniejszem. Jestto przypadek punktu zwrotu.

Badajmy przecięcia się krzywej z jakąkolwiek prostą przechodzącą przez początek

$$y=tx. \tag{11}$$

Zastąpmy w równaniu (10) y przez tx, wypadnie, podzieliwszy przez x^2:

X

$$f(t)=t^2+x\varphi_3(1, t)+x^2\varphi_4(1, t)+\ldots\ldots=0 \tag{12}$$

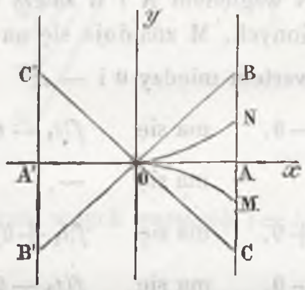
zkąd się wyciąga, biorąc pochodne względem t, x będąc uważaną jako stała:

$$(13) \qquad f'(t) = 2t + \overbrace{x\varphi'_3(1,\, t) + x^2\varphi'_4(1,\, t) + \ldots\ldots}^{X'};$$

$$(14) \qquad f''(t) = 2 + \overbrace{x\varphi''_3(1,\, t) + x^2\varphi''_4(1,\, t) + \ldots\ldots}^{X''};$$

Oznaczmy przez θ wartość dodatną bardzo małą na t; niech będą OC i OB położenia siecznej $y = tx$ odpowiednie wartościom $-\theta$ i $+\theta$, na t; kąty COA i AOB są bardzo małe.

Przypuśćmy teraz że była dana dla x wartość dość mała aby wielomiany X, X′, X″ miały dla tej wartości i dla wszelkiej wartości mniejszej, tenże sam znak jak znak ich pierwszych wyrazów. Przypuścimy



nadto że ta wartość jest dość małą aby wartość bezwzględna wielomianów X, X′, X″ była mniejszą jak wartość bezwzględna wyrazów je poprzedzających w funkcyach $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ kiedy się uczyni w tych wyrazach $t = \theta$, θ będąc wartością na t bardzo małą lecz wyznaczoną. Oznaczmy przez ε najmniejszą z wartości na x zadość czyniącej wszystkim tym warunkom, i niech będzie $\mathrm{OA} = \mathrm{OA}' \overline{\overline{<}}\, \varepsilon$. Zostawiwszy x stałą, niższą albo najwięcej równą ε, będziemy szukać punktów krzywej znajdujących się na prostych AB i A′B′.

Jeżelli t zmienia się od $-\infty$ do $-\theta$, i od $+\theta$ do do $+\infty$, wielomian $f(t)$ nie zmienia znaku i nie może znosić się, byleby wartości dodatne lub odjemne na x pozostały zawarte między $-\varepsilon$ i $+\varepsilon$; więc krzywa nie może mieć punktów rzeczywistych jak w kątach BOC i B′OC′; a tem samem, dla wartości wyznaczonej na x nie można mieć punktów jak na odcinkach BC i B′C′.

Otóż jeżeli t zmienia się od $-\theta$ do $+\theta$, pochodna $f''(t)$ albo (14) pozostaje zawsze dodatną; $f'(t)$ albo (13) nie może więc znosić się jak tylko raz; i to co rzeczywiście ma miejsce, gdyż ona jest odjemną dla $t = -\theta$, i dodatną dla $t = +\theta$.

Wynika ztąd ze funkcya $f(t)$ albo (12) nie może znosić się tylko dwa razy w przedziale od $-\theta$ do $+\theta$. Aby wykonać zupełnie to roztrząsanie będziemy mieli wiele przypadków do rozebrania.

1° $\varphi_3(1,\ t) \gtrless 0$ dla $t = 0$, niech będzie na przykład $\varphi_3(1,\, 0) < 0$.

Jeżeli x jest dodatnem i zawartem między 0 i ε:

$$\text{dla} \begin{cases} t = -\theta, & \text{ma się} \quad f(-\theta) > 0, \\ t = \quad 0, & \text{ma się} \quad f(0) \quad < 0, \\ t = +\theta, & \text{ma się} \quad (+\theta) > 0; \end{cases}$$

krzywa ma jeden punkt M między A i C, i drugi punkt N między A i B.

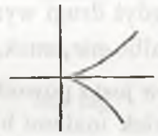
Niech będzie x odjemnem i zawartem między 0 i $-\varepsilon$:

Wielomian X, w funkcyi $f(t)$ albo (12), jest zawsze tegoż samego znaku jak jego pierwszy wyraz $x\varphi_3(1, t)$, który jest tu dodatnym; wyraz 1szy jest równie dodatny; więc jakkolwiek małemi byłyby x i t, funkcya $f(t)$ jest summą dwóch ilości stale dodatnych; przeto ona nie może się znosić; krzywa nie posiada więc żadnego punktu na odcinku B'C'.

Następstwa poprzednie mając miejsce, jakkolwiek małem byłoby x, wynika ztąd że jeżeli się zmniejsza x w sposób ciągły, otrzyma się dwie gałęzie rzeczywiste krzywej, leżące jedna w kącie AOC, druga w kącie AOB; one dotkną obie prostą OA w O i nie przedłużą się po za punkt O.

Przypuściliśmy ze funkcya $\varphi_3(1, t)$ nie znosiłaby się dla $t = 0$, to jest że prosta nie spotykałaby krzywej (10) tylko w dwóch punktach zbiegających się z początkiem, albo że styczna $y = 0$ miałaby, z krzywą zetknięcie 1go rzędu. Więc

Jeżeli styczna zwrotu ma z krzywą zetknięcie pierwszego rzędu, ma się dwie gałęzie krzywej leżące z obu stron stycznej i zatrzymujące się w punkcie podwójnym; ma się zwrot pierwszego rodzaju.



2° $\varphi_3(1, t) = 0$ dla $t = 0$ i $\varphi_4(1, t) < 0$ dla $t = 0$.

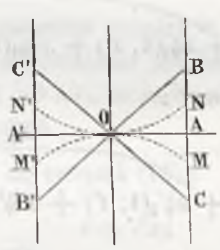
Jeżeli x jest dodatnem i zawartem między 0 i $+\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \text{dla} : t &= -\theta, & \text{ma się} \quad & f(-\theta) > 0, \\ : t &= 0, & \text{ma się} \quad & f(0) < 0, \\ : t &= +\theta, & \text{ma się} \quad & f(+\theta) > 0\,; \end{aligned}$$

krzywa ma więc punkt M na AC i punkt N na AB; ona nie może wreszcie posiadać jak dwa punkta na odcinku BC.

Jeśli x jest odjemnem i zawartem między 0 i $-\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \text{dla} : t &= -\theta, & \text{ma się} \quad & f(-\theta) > 0, \\ : t &= 0, & \text{ma się} \quad & f(0) < 0, \\ : t &= +\theta, & \text{ma się} \quad & f(+\theta) > 0; \end{aligned}$$



krzywa ma więc punkt N' na A'C', i punkt M' na A'B'; ona nie może wreszcie posiadać jak dwa punkta na odcinku B'C'.

Zmniejszając x aż do zera, wypada ztąd że:

Krzywa przedstawia dwie gałęzie dotykające się w punkcie podwójnym, które leżą z jednej i z drugiej strony stycznej, i przedłużają się z obu stron punktu podwójnego.

3° $\varphi_3(1, t) = 0$ dla $t = 0$, i $\varphi_4(1, t) > 0$, dla $t = 0$.

W przypadku obecnym, podstawienia poprzednie nie rozłączają pierwiastków; jest wątpliwość.

Wielomian $f(t)$ albo (12) jest wtedy

$$f(t) = t^2 + (B + Ct + DE^2)tx + \overbrace{x^2\varphi_4(1,\ t) + \ldots}^{Y} = 0;$$

można przypuścić x dosyć małem aby Y było tegoż samego znaku jak jego pierwszy wyraz, to jest stale dodatniem; lecz kiedy wybrawszy wartość dla x, zmienia się t od $+\theta$ do $-\theta$, ogół dwóch pierwszych wyrazów może zmieniać znak, gdyż drugi wyraz nie jest zerem jak tylko dla $\theta = 0$; nie widzimy więc czy wielomian $f(t)$ zmienia albo nie, znak.

Niepodobieństwo rozłączenia pierwiastków jest z powodu że dwa punkta krzywej mogą być położone stale na odcinku AB, na przykład, jakkolwiek małemi byłyby ilość OA albo ε i kąt AOB; albo co na jedno wychodzi, że nie można przeprowadzić jakiejkolwiek prostej przez punkt O i między dwiema gałęziami krzywej.

Dla zniesienia tej trudności załóżmy

(15) $t = t'x$, zkąd $y = t'x^2$ (15 *bis*),

i niech będą

$$\begin{cases} \varphi_3(1,\ t) = Bt + Ct^2 + Dt^3, \\ \varphi_4(1,\ t) = A_1 + B_1t + C_1t^2 + D_1t^3 + E_1t^4, \\ \varphi_5(1,\ t) = A_2 + B_2t + C_2t^2 + D_2t^3 + E_2t^4 + F_2t^5 \end{cases}$$

przez założenie $\varphi_4(1,\ t)$ jest dodatną dla $t = 0$, to jest że A_1 jest dodatnem.

Funkcya $f(t')$ albo (12) stanie się wtedy, po podzieleniu przez x^2:

$$\varphi(t') = t'^2 + Bt' + A_1 + x(A_2 + B_1t' + Ct'^2) + x^2(\ldots) = 0;$$

albo

(16) $$\varphi(t') = t'^2 + Bt' + A_1 + \overbrace{x\psi_3(1,\ t') + x^2\psi_4(1,\ t') + \ldots\ldots}^{X} = 0$$

zkąd się wyciąga, biorąc pochodne względem t':

(17) $$\varphi'(t') = 2t' + B + \overbrace{x\psi'_3(1,\ t') + x^2\psi'_4(1,\ t') + \ldots\ldots}^{X'};$$

18) $$\varphi''(t') = 2 + \overbrace{x\psi''_3(1,\ t') + x^2\psi''_4(1,\ t') + \ldots\ldots}^{X''}$$

Przypuśćmy jeszcze że θ jest wartością bardzo małą na t', i że ε jest wartością na x dość małą aby wielomiany X, X', X'' miały znaki ich pierwszych wyrazów, i aby ich wartość bezwzględna była mniejszą od wartości bezwzględnej wyrazów je poprzedzających w funkcyach $\varphi(t')$, $\varphi'(t')$, $\varphi''(t')$, kiedy się w nich uczyni $t' = \pm\theta$.

Jeśli $B^2 - A_1 < 0$, ilość $(t'^2 + Bt' + A_1)$ pozostaje dodatną i skończoną jakkolwiek małemi byłyby x i t; funkcya $\varphi(t')$ nie może więc znosić się; punkt O *jest punktem zwrotu odosobnionym.*

Jeśli $B^2 - A_1 > 0$, ma się wtedy $t'^2 + Bt' + A_1 = (t' - t_1)(t' - t_2)$; dwie ilości t_1 i t_2 są tegoż samego znaku, ponieważ $A_1 > 0$: przypuśćmy $\psi_3(1, t')$ różną od zera kiedy się w niej uczyni $t' = t_1$ albo $t' = t_2$; niech będzie, na przykład, $\psi_3(1, t_1) > 0$, $\psi_3(1, t_2) > 0$; i $t_1 < t_2$.

Niech będzie x dodatnem i zawartem między 0 i $+\varepsilon$:

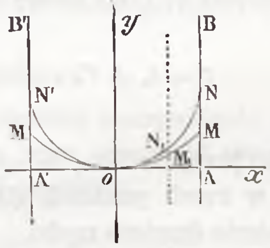
$$\text{dla}\ \begin{cases} t' = t_1 - \theta, & \text{ma się} \quad \varphi(t_1 - \theta) > 0, \\ t' = t_1, & \text{ma się} \quad +, \\ t' = t_1 + \theta, & \text{ma się} \quad \varphi(t_1 + \theta) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t' = t_2 - \theta, & \text{ma się} \quad \varphi(t_2 - \theta) < 0, \\ t' = t_2, & \text{ma się} \quad +; \\ t' = t_2 + \theta, & \text{ma się} \quad \varphi(t_2 + \theta) > 0. \end{cases}$$

Ma się więc dwa punkta M i N krzywej na równoległej AB do Oy i dwa tylko; rzędne tych punktów będą dane przez związek

(15 *bis*) $$y = t'x^2.$$

Jeśli przypuścimy t_1 dodatnem, będzie również ilość t_2 dodatną; wartości na t', którym odpowiadają te punkta, różnią się nieskończenie mało od t_1 i t_2, wartości na y będą dodatne i bardzo małe; dwa punkta M i N będą po nad osią odciętych.



Jeśli się przypuści x odjemnem i zawartem między 0 i ε, znajdzie się podobnież dwa punkta M' i N' leżące na równoległej A'B' i odpowiednie wartościom na t' różniącym się nieskończenie mało od t_1 i t_2; widzimy przez związek (15 *bis*), że rzędne tych punktów będą jeszcze dodatne; dwa punkta M' i N' będą po nad osią odciętych.

Zmniejszając teraz x aż do zera; ma się związek (15):

(15) $$t = t'x;$$

wartości na t' pozostając skończone i zawsze całkowite na t_1 i t_2, jeżeli x dąży do zera, wartości odpowiednie na t' dążą równie do zera, to jest że sieczne OM i ON, a tem samem punkta M i N dążą zlać się z osią odciętych, jeżeli x stanie się zerem.

Krzywa przedstawia więc dwie gałęzie dotykające się w punkcie podwójnym i leżące z tejże samej strony stycznej Ox.

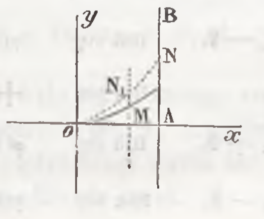
Jeśli $(B^2 - A_1) = 0$; ma się wtedy $t'^2 + Bt' + A_1 = (t' - t_0)^2$; przypuśćmy $\psi_3(1, t')$ różnem od zera gdy się uczyni $t' = t_0$, i niech będzie $\psi_3(1, t_0) < 0$.

Jeśli x jest dodatnem i zawartem między 0 i $+\varepsilon$:

$$\text{dla} \quad t' = t_0 - \theta, \quad \text{ma się} \quad \varphi(t_0 - \theta) > 0,$$

$$t' = t_0, \quad \text{ma się} \quad \varphi(t_0) < 0,$$

$$t' = t_0 + \theta, \quad \text{ma się} \quad \varphi(t_0 + \theta) > 0.$$



Ma się więc dwa punkta krzywej M i N leżące na AB, i po nad osią Ox, jeśli t_0 jest dodatnem.

Jeżeli x jest odjemnem, pierwszy wyraz na X jest zawsze dodatnym, będzie podobnież z wielomianem X; pierwsze wyrazy $\varphi(t')$ tworzą kwadrat dodatny, więc funkcya $\varphi(t')$ albo (16) pozostaje zawsze dodatną gdy t' zmienia się od $(t_0 - \theta)$ do $(t_0 + \theta)$, a tem samem nie może się znosić.

Jeśli zdąża x do zera, proste OM i ON przybliżą się nieograniczenie do Ox.

Krzywa nie ma punktów rzeczywistych po lewej stronie osi rzędnych.

Krzywa przedstawia więc dwie gałęzie położone z tejże samej strony prostej Ox, *dotykające się tej prostej w punkcie* O, *i zatrzymujące się na tym punkcie; ma się zwrot* 2*giego* *rodzaju.*

Jeśliby $\psi_3(1, t')$ znosiła się dla $t' = t_0$, możnaby było rozłączyć punkta krzywej jeżeliby się miało $\psi_4(1, t_0) < 0$; w przypadku w którym funkcya $\psi_4(1, t_0)$ byłaby dodatną przeciągnęłoby się roztrząsanie kładąc

$$t' = t_0 + t'x;$$

i tak dalej.

W tej ostatniej części roztrząsania (3°) przypuściliśmy że $\varphi_3(1, t)$ znosiłaby się dla $t = 0$, to jest że prosta $y = 0$ spotykałaby krzywą w trzech punktach zbiegających się z początkiem, albo że styczna $y = 0$ miałaby z krzywą zetknięcie drugiego rzędu.

480. Zakończenie.

Z analizy rozwiniętej w numerach (477), (478), (479) wyciągniemy wnioski następujące względne do punktów podwójnych.

I° *Dwie styczne w punkcie podwójnym są urojone; ma się punkt podwójny odosobniony.*

II° *Dwie styczne w punkcie podwójnym są rzeczywiste i odrębne; ma się punkt podwójny zwyczajny, to jest dwie gałęzie rzeczywiste krzywej które się przecinają w tym punkcie i przedłużają się z obu jego stron; może się zdarzyć że te styczne będą miały z ich gałęziami względnemi zetknięcie rzędu wyższego nad pierwszy.*

III° *Dwie styczne w punkcie podwójnym zbiegają się; punkt nosi nazwisko ogólne punktu zwrotu.*

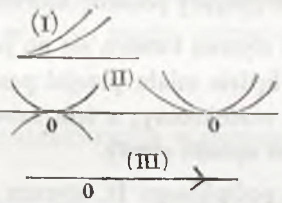
1° *Jeśli styczna zwrotu ma z krzywą zetknięcie 1° rzędu tylko, ma się dwie gałęzie kończące się w punkcie O i leżące z obu stron stycznej; jestto zwrot 1° rodzaju; jestto jedyny kształt który się przedstawia w tym przypadku.*

2° *Jeśli styczna zwrotu ma z krzywą zetknięcie drugiego rzędu, krzywa może przedstawiać szczególności następujące:*

(I) *Punkt zwrotu 2giego rodzaju;*

(II) *Dwie gałęzie dotykające się, bądź to z jednej i z drugiej strony stycznej, bądź to z tejże samej strony stycznej;*

(III) *Punkt zwrotu odosobniony.*



481. UWAGA I.

Analiza rozwinięta w numerach (476), (477), (478), (479) daje się zastosować, słowo w słowo, do przypadku w którym równanie krzywej przedstawia się pod kształtem

(1) $$\varphi_p(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \varphi_{p+2}(x, y) + \ldots\ldots + \varphi_m(x, y) = 0;$$

to równanie daje, zastępując y przez tx i dzieląc przez x^2:

(2) $$\varphi_p(1, t) + x\varphi_{p+1}(1, t) + x^2\varphi_{p+2}(x, y) + \ldots\ldots = 0.$$

Możemy zaraz wysłowić wnioski następujące:

I° Równanie $\varphi_p(1, t) = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych; punkt O albo początek jest punktem wielokrotnym rzędu p i odosobnionym; przez ten punkt nie przechodzi żadna gałęź rzeczywista krzywej; on jest przecięciem się p gałęzi urojonych.

II° Równanie $\varphi_p(1, t) = 0$ przypuszcza jeden pierwiastek rzeczywisty; punkt O jest punktem wielokrotnym rzędu p przez który przechodzi jedna gałęź rzeczywista krzywej, przedłużająca się z jednej i z drugiej strony punktu; punkt O może być uważany jako złożony z punktu pojedynczego i z punktu wielokrotnego odosobnionego rzędu $(p - 1)$.

III° Równanie $\varphi_p(1, t) = 0$ przypuszcza dwa pierwiastki rzeczywiste nierówne; punkt O jest punktem wielokrotnym rzędu p przez który przechodzą dwie gałęzie rzeczywiste krzywej, przedłużające się z jednej i z drugiej strony punktu; etc.

IV° Równanie $\varphi_p(1, t) = 0$ przypuszcza dwa pierwiastki równe; punkt O jest punktem wielokrotnym rzędu p, przedstawiającym zwrot, albo rozmaitości zwrotu, i punkt odsobniony rzędu $(p - 2)$. I tak dalej.

482. Uwaga II.

Jeżeli gałęź jedyna krzywej zatrzymuje się w jakimkolwiek punkcie, taki punkt nosi nazwisko *punktu zatrzymania.*

Jeżeli dwie gałęzie rzeczywiste, przecinają się pod kątem różnym od zera, nie przedłużając się po za ich punkt przecięcia się, one tworzą *punkt kątowy.*

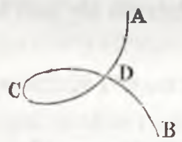
Wynika z roztrząsania numeru poprzedniego że :

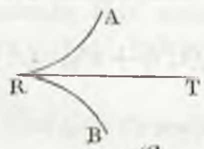
Krzywa algebraiczna nie może mieć ani punktu zatrzymania, ani punktu kątowego.

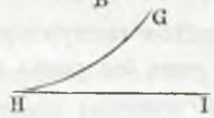
Można jeszcze dowieść w sposób następujący podanie któreśmy poprzednio wysłowili :

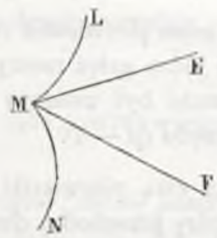
Jeśli sobie się wystawi jakąkolwiek styczną toczącą się po jakiejkolwiek krzywej, widzimy że ruch stycznej będzie ciągły nawet gdy ona będzie miała przejść przez punkt podwójny, albo przez punkt zwrotu, albo przez punkt jakikolwiek wielokrotny; a tem samem, kąt jaki czyni ta styczna z prostą stałą płaszczyzny, będzie się zmieniał w sposób ciągły.

Na przykład, w przypadku punktu podwójnego D, styczna będzie się mogła toczyć po łuku ADC, potem po łuku CDB; w przypadku jakiegokolwiek punktu zwrotu R, styczna tocząc się po łuku AR weźmie położenie RT, potem wyruszy z tego położenia aby się toczyć po łuku RB.









To nie będzie miało miejsca jeśli krzywa przedstawia jakikolwiek punkt zatrzymania, albo jakikolwiek punkt kątowy. I tak w przypadku jakiegokolwiek punktu zatrzymania H, styczna tocząc się po łuku GH weźmie położenie prostej HI, i począwszy ztąd jej ruch jest nieoznaczony. W przypadku jakiegokolwiek punktu kątowego M, styczna tocząc się naprzód po łuku LM, weźmie położenie prostej ME, potem jej ruch pozostanie nieograniczonym gdy ona weźmie położenie MF aby się toczyć po łuku MN.

Więc jeżeli się wyrazi spółczynnik kątowy stycznej, za pomocą jakiejkolwiek ilości wyznaczającej jej punkt zetknięcia, spółrzędne tego punktu na przykład, otrzyma się funkcyę nie ciągłą w przypadku punktów : zatrzymania albo kątowego; tym sposobem dla spółrzędnych jakiegokolwiek punktu zatrzymania ta funkcya przedstawia nieoznaczoność rzeczywistą a nie pozorną; dla wartości nieskończenie blizkich spółrzędnych jakiegokolwiek punktu kątowego, taż sama funkcya przechodziłaby z jakiejkolwiek wartości skończonej do jakiejkolwiek innej wartości skończonej.

Otóż, w krzywych algebraicznych, spółczynnik kątowy jest funkcyą algebraiczną spółrzędnych punktu zetknięcia; lecz taka funkcya nie może przedstawiać nieoznaczoności rzeczywistej, ona nie może także, dla przyrostku nieskończenie małego zmiennej, przechodzić z jakiejkolwiek wartości kończonej do jakiejkolwiek innej wartości skończonej, kiedy się zachowywa z tymże samym znakiem pierwiastki mogące się znosić podczas kiedy zmienna przybiera przyrostek.

Więc krzywa algebraiczna nie może mieć ani punktu zatrzymania, ani punktu kątowego.

IV° Własności pierwszych biegunowych w przypadku punktów wielokrotnych.

483. *Jeżeli jakikolwiek punkt* O *jest punktem wielokrotnym rzędu* p *dla krzywej, będzie on wielokrotnym stopnia* (p — 1) *dla pierwszej biegunowej jakiegokolwiek punktu* P_0; *będzie on wielokrotnym rzędu* p *dla pierwszej biegunowej samegoż punktu* O.

Jeżeli w jakimkolwiek punkcie wielokrotnym rzędu p, *jest* l *stycznych zbiegających się między sobą, otrzyma się* (l — 1) *stycznych zbiegających się między sobą i z pierwszemi dla punktu wielokrotnego* 1szej *biegunowej jakiegokolwiek punktu.*

Weźmy punkt wielokrotny za początek spółrzędnych, równanie krzywej będzie kształtu

$$(1)\qquad \varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + z^{m-p-1}\varphi_{p+1}(x, y) + z^{m-p}\varphi_p(x, y) = 0.$$

Pierwsza biegunowa jakiegokolwiek punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ma na równanie nru (434):

$$(1)\qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0.$$

Według kształtu równania (1), otrzyma się

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} & x_0[{}_x\varphi'_m(x, y) + z_x\varphi'_{m-1}(x, y) + \ldots + z^{m-p}{}_x\varphi'_p(x, y)] \\ & + y_0[{}_x\varphi'_m(x, y) + z_y\varphi'_{m-1}(x, y) + \ldots + z^{m-p}{}_y\varphi'_p(x, y)] \\ & + z_0[\varphi_{m-1}(x, y) + 2z\varphi_{m-2}(x, y) + \ldots + (m-p)z^{m-p-1}\varphi_p(x, y)] \end{aligned}\right\} = 0.$$

Otóż ogół wyrazów stopnia najmniej podniesionego jest

$$z^{m-p}[x_{0x}\varphi'_p(x, y) + y_{0y}\varphi'_p(x, y)];$$

te wyrazy są stopnia $(p-1)$; początek jest punktem wielokrotnym rzędu $(p-1)$ dla pierwszej biegunowej jakiegokolwiek punktu.

Jeśli punkt P_0 jest samymże punktem wielokrotnym, ma się $x=0$, $y=0$; i równaniem pierwszej biegunowej jest

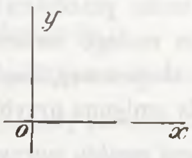
$$f'_z = \varphi_{m-1}(x, y) + \dots + (m-p)z^{m-p-1}\varphi_p(x, y) = 0;$$

to jest że punkt O jest punktem wielokrotnym rzędu p dla 1szej biegunowej tego punktu.

Przypuśćmy powtóre, że l stycznych punktu wielokrotnego O są zbiegającemi się; weźmy ten kierunek za oś odciętych, równanie krzywej otrzyma kształt nu (469)

$$\varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + \dots + z^{m-p}y^l\varphi(x, y) = 0, \tag{3}$$

funkcya $\varphi(x, y)$ jest stopnia $(p-l)$.



Pierwszą biegunową jakiegokolwiek punktu (x_0, y_0, z_0) będzie

$$\left.\begin{array}{l} x_0[{}_z\varphi'_m(x, y) + z_x\varphi'_{m-1}(x, y) + \dots + z^{m-p}y^l\varphi'_x(x, y)] \\ + y_0[{}_y\varphi'_m(x, y) + z_y\varphi'_{m-1}(x, y) + \dots + z^{m-p}\{y^l\varphi'_y(x, y) + ly^{l-1}\varphi(x, y)\} \\ + z_0[\varphi_{m-1}(x, y) + 2z\varphi_{m-2}(x, y) + \dots + (m-p)z^{m-p-1}y^l\varphi(x, y)] \end{array}\right\} = 0. \tag{4}$$

Ogół wyrazów stopnia najmniej podniesionego jest

$$z^{m-p}[x_0y\varphi'_x(x, y) + y_0y\varphi'_y(x, y) + ly_0\varphi(x, y)]y^{l-1};$$

to wyrażenie jest stopnia $(p-1)$, i przypuszcza czynnik y^{l-1}; to jest że punkt O jest wielokrotnym rzędu $(p-1)$ dla pierwszej biegunowej jakiegokolwiek punktu; i że $(l-1)$ stycznych tego punktu wielokrotnego zbiegają się ze styczną odpowiednią punktu wielokrotnego rzędu p krzywej.

Szczególnie :

Jeżeli jakikolwiek punkt jest punktem podwójnym jakiejkolwiek krzywej, 1sza biegunowa jakiegokolwiek punktu przejdzie przez punkt podwójny; będzie on punktem pojedyńczym dla tej pierwszej biegunowej.

Jeżeli jakakolwiek krzywa ma punkt zwrotu, pierwsza biegunowa jakiegokolwiek punktu przechodzi przez ten punkt zwrotu, i dotyka się stycznej zwrotu.

N. B. Przestaniemy na wysłowieniu podania następującego :

Biegunową rzędu p *względem jakiegokolwiek punktu wielokrotnego rzędu* p *stanowi układ* p *stycznych w tym punkcie wielokrotnym.*

Dowodzenie jest łatwe, jeśli się weźmie punkt wielokrotny za początek.

484. *Jeżeli jakakolwiek styczna ma z krzywą zetknięcie rzędu* (r — 1), *ta styczna jest wielokrotną rzędu* (r — 1).

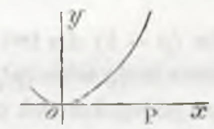
Przypuśćmy, na przykład, że punkt zetknięcia jest punktem prostym, i weźmy styczną za oś odciętych; równaniem krzywej będzie, według założeń przyjętych

$$f(x, y) = \left\{\begin{array}{l} (\varphi_m x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + \dots + z^{m-r}\varphi_r(x, y) + z^{m-r+1}y\varphi_{r-2}(x, y) + z^{m-r+2}y\varphi_{r-3}(x, y) \\ \quad + \dots\dots + \dots\dots + z^{m-2}y\varphi_1(x, y) + z^{m-1}y \end{array}\right\} = 0. \tag{1}$$

Dla rozpoznania stopnia mnogości stycznej Ox, należy szukać o ile jest zmniejszoną liczba stycznych które można poprowadzić do krzywej, kiedy się weźmie jakikolwiek punkt P na prostej Ox. Otóż punkta zetknięcia stycznych poprowadzonych z jakiegokolwiek punktu P do krzywej, są przecięciami tej krzywej z pierwszą biegunową punktu P n^er (434).

Spółrzędne jakiegokolwiek punktu P wziętego na Ox, są $(x_0, 0, z_0)$; i równanie jej pierwszej biegunowej będzie

$$x_0 f'_x + z_0 f'_z = 0,$$



albo

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x_0[x\varphi'_m(x, y) + \ldots + z^{m-r}x\varphi'_r(x, y) + z^{m-r+1}y_x\varphi'_{r-2}(x, y) + \ldots + z^{m-2}y_x\varphi'_1(x, y)] \\ + z_0[\varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + (m-r)z^{m-r+1}\varphi_r(x, y) + (m-r+1)z^{m-r}y\varphi_{r-2}(x, y) + \ldots + (m-1)z^{m-2}y] \end{array} \right\} = 0.$$

Punkt O jest punktem prostym dla krzywej (2); styczną jest jeszcze prosta $y = 0$. Prosta $y = 0$ spotyka krzywą (1) w r punktach zbiegających się z punktem O; ona spotyka krzywą (2) w $r - 1$ punktach zbiegających się z tymże samym punktem O; krzywe (1) i (2) mają więc $(r - 1)$ punktów wspólnych i zbiegających się z O; a tem samem, jeśli n jest w przypadku ogólnym liczbą przecięć się krzywej i jakiejkolwiek pierwszej biegunowej, krzywe (1) i (2) nie będą miały więcej jak $[n - (r - 1)]$ punktów wspólnych i odrębnych od punktu O. Przeto z jakiegokolwiek punktu prostej Ox nie można poprowadzić do krzywej jak $[n - (r - 1)]$ stycznych odrębnych od prostej Ox; więc na mocy n^ru (381), prosta Ox jest styczną wielokrotną rzędu $(r - 1)$.

Toż samo dowodzenie da się zastosować do przypadku jakiegokolwiek punktu wielokrotnego; więc *Jeżeli jakakolwiek ze stycznych w punkcie wielokrotnym ma z krzywą zetknięcie właściwe nazwane rzędu* (r — 1), *ta styczna jest wielokrotną rzędu* (r — 1).

485. *Styczna w jakimkolwiek punkcie pojedyńczym albo wielokrotnym, jest zawsze styczną prostą, jeżeli rzęd jej zetknięcia właściwie nazwany nie przewyższa pierwszego.*

Weźmy punkt zetknięcia za początek a styczną za oś odciętych, równaniem krzywej będzie na przykład :

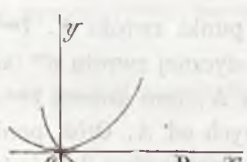
$$(1) \qquad \varphi_m(x, y) + \ldots + z^{m-p-1}\varphi_{p+1}(x, y) + z^{m-p}y\varphi(x, y) = 0,$$

funkcya $\varphi_{p+1}(x, y)$ nie znosi się dla $y = 0$.

Początek będąc punktem wielokrotnym rzędu p, liczba stycznych, które można poprowadzić z jakiegokolwiek punktu jest zmniejszoną iloczynem wyrażającym $p(p - 1)$ jedności n^er (487).

Niech będzie P jakikolwiek punkt na prostej Ox, 1^sza biegunową tego punktu będzie

$$x_0 f'_x + z_0 f'_z = 0,$$



albo, rozwinąwszy:

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} x_0[{}_x\varphi'_m(x, y) + \ldots + z^{m-p-1}{}_x\varphi'_{p+1}(x, y) + z^{m-p}y\varphi'_x(x, y)] \\ + z_0[\varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + (m-p)z^{m-p-1}y\varphi(x, y)] \end{array}\right\} = 0.$$

Ogół wyrazów stopnia najmniej podniesionego w 1szej biegunowej jest

$$z^{m-p}x_0y\varphi'_x(x, y);$$

początek jest punktem wielokrotnym rzędu $(p-1)$ dla 1szej biegunowej; a prosta $y=0$ jest styczną pojedyńczą; krzywa i ta pierwsza biegunowa mają więc $[p(p-1)+1]$ punktów wspólnych zbiegających się z początkiem i nie więcej; więc z jakiegokolwiek punktu P wziętego na stycznej nie można poprowadzić jak $[m(m-1)-p(p-1)-1]$ stycznych odrębnych od Ox.

Otóż jeśli n jest klassą krzywej, ma się ner (487)

$$n = m(m-1) - p(p-1);$$

więc z jakiegokolwiek punktu wziętego na Ox, można poprowadzić $(n-1)$ stycznych odrębnych od Ox; ta prosta jest tem samem styczną pojedyńczą.

V° Wpływ punktów wielokrotnych na klassę krzywej.

486. Wpływ punktów podwójnych.

Klassą krzywej rzędu m jest, ogólnie, $m(m-1)$ ner (375).

Lecz jeśli krzywa posiada punkt podwójny A; pierwsza biegunowa jakiegokolwieg punktu P przechodzi przez ten punkt ner (483); ta pierwsza biegunowa spotyka krzywą w dwóch punktach,

nie znajduje się więc więcej jak $[m(m-1)-2]$ innych punktów przecięć odrębnych od A. Ponieważ prosta PA, nie jest właściwie mówiąc styczną, lubo ona posiada też samą własność analityczną spotykania krzywej w dwóch punktach zbiegających się, wynika ztąd że nie ma tam więcej jak $[m(m-1)-2]$ stycznych właściwie nazwanych, wychodzących z punktu P; przeto punkt podwójny zmniejsza klassę o dwie jedności. Jeśli jest δ punktów podwójnych, klassa będzie zmniejszoną o 2δ jedności.

Przypuśćmy teraz że krzywa posiada punkt zwrotu A. 1sza biegunowa jakiegokolwiek punktu P przechodzi przez ten punkt i dotyka się stycznej zwrotu ner (483); krzywa i 1sza biegunowa mają trzy punkta wspólne zbiegające się z punktem A; tem samem 1sza biegunowa nie spotyka więcej krzywej jak w $[m(m-1)-3]$ punktach odrębnych od A. Otóż, ponieważ prosta PA nie jest styczną właściwie nazwaną, nie znajduje się więc rzeczywiście jak $[m(m-1)-3]$ stycznych wychodzących z punktu P; przeto punkt zwrotu zmniejsza klassę o trzy jedności. Jeśli jest χ punktów zwrotu klassa będzie zmniejszoną o 3χ jedności.

Więc, jeśli krzywa rzędu m posiada δ punktów podwójnych i χ punktów zwrotu, klassa $n^{\text{tą}}$ krzywej będzie określoną przez równość

$$\text{(I)} \qquad n = m(m-1) - 2\delta - 3\chi.$$

487. Wpływ punktów wielokrotnych.

Punkt wielokrotny rzędu p jest według n^ru (483) punktem wielokrotnym rzędu $(p-1)$ dla pierwszej biegunowej jakiegokolwiek punktu; przeto krzywa i pierwsza biegunowa mają wspólnie $p(p-1)$ punktów zbiegających się z punktem wielokrotnym; nie pozostanie więc więcej jak tylko $[m(m-1) - p(p-1)]$ innych punktów odrębnych od punktu wielokrotnego. Tym sposobem

Punkt wielokrotny rzędu p *zmniejsza klassę krzywej o*

$$p(p-1) \text{ jedności.}$$

Jeżeli l stycznych jakiegokolwiek punktu wielokrotnego zbiegają się, otrzyma się $(l-1)$ z pomiędzy nich, które będą styczne zbiegające się dla pierwszej biegunowej jakiegokolwiek punktu n^er (483); wtedy krzywa i pierwsza biegunowa mają wspólnie $[p(p-1) + (l-1)]$ punktów zbiegających się z punktem wielokrotnym. A tem samem

Gdy l *stycznych jakiegokolwiek punktu wielokrotnego rzędu* p *zbiegną się, klassa zmniejszy się o*

$$[p(p-1) + (l-1)] \text{ jedności.}$$

488. Uwaga.

Punkt podwójny zwyczajny zmniejsza klassę o dwie jedności i o dwie tylko.

Punkt zwrotu zmniejsza ogólnie klassę o trzy jedności; lecz może się zdarzyć że zmniejszenie się będzie znaczniejszem, jeśli zetknięcie stycznej zwrotu, z krzywą i pierwszą biegunową jakiegokolwiek punktu jest rzędu wyższego nad pierwszy. (Zob. *Nowe roczniki*, rok 1867, str. 113.)

To spostrzeżenie rozciąga się do punktów wielokrotnych rzędu wyższego.

VI° Wpływ punktów wielokrotnych na liczbę punktów przegięcia.

489. Widzieliśmy w numerze (385) że punkta przegięcia krzywej :

$$\text{(1)} \qquad f(x, y, z) = 0,$$

są przecięciami się tej krzywej z krzywą H :

$$(2) \qquad H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yz} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = 0,$$

Otóż

Punkt podwójny krzywej $f = 0$ *jest punktem podwójnym krzywej* $H = 0$; *i nadto te dwie krzywe mają w tym punkcie też same styczne.*

Jeśli krzywa $f = 0$ *ma punkt zwrotu, ten punkt będzie punktem potrójnym dla krzywej* $H = 0$; *i dwie styczne tego punktu potrójnego zbiegają się ze styczną zwrotu.*

Ogólnie, punkt wielokrotny rzędu p *na krzywej* $f = 0$, *będzie punktem wielokrotnym rzędu* $(3p - 4)$ *dla krzywej* $H = 0$; *i* p *stycznych dla krzywej* $f = 0$, *będą stycznemi w tymże samym punkcie dla krzywej* $H = 0$.

Wysłowimy tylko te podania, dowiedzie się je łatwo biorąc punkt wielokrotny za początek spółrzędnych.

Gdy dwie krzywe mają punkt podwójny wspólny i też same styczne, te dwie krzywe mają sześć punktów wspólnych zbiegających się z punktem podwójnym; więc punkt podwójny zmniejsza liczbę punktów przegięcia o sześć jedności.

Gdy dwie krzywe mają punkt wspólny, który jest punktem podwójnym na jednej i potrójnym na drugiej; te dwie krzywe mają w tym punkcie sześć punktów wspólnych; lecz gdy nadto dwie styczne w punkcie podwójnym są także stycznemi w punkcie potrójnym, krzywe będą miały, co większa, dwa punkta po sobie następujące wspólne. Więc punkt zwrotu zmniejsza liczbę punktów przegięcia o ośm jedności.

Krzywa rzędu m *ma ogólnie* $3m(m - 2)$ *punktów przegięcia* n^{er} (385).

Więc *gdy krzywa rzędu* m *posiada* δ *punktów podwójnych i* χ *punktów zwrotu; liczba jej punktów przegięcia będzie określoną przez równość*

$$(II) \qquad i = 3m(m - 2) - 6\delta - 8\chi.$$

Punkt wielokrotny rzędu p *zmniejsza ogólnie liczbę punktów przegięcia o*

$$p(3p - 4) + p \quad \text{albo} \quad 3p(p - 1) \quad \text{jedności.}$$

To podanie wynika bezpośrednio z twierdzenia któreśmy przytoczyli na początku tego numeru.

§ II. — STYCZNE WIELOKROTNE.

1° Określenie.

490. Jeżeli n jest klassą jakiejkolwiek krzywej, styczna T będzie wielokrotną rzędu p, kiedy z jakiegokolwiek punktu tej linii nie będzie się mogło poprowadzić do krzywej jak $(n - p)$ stycznych odrębnych od stycznej T.

Dla badania stycznych wielokrotnych, będzie korzystnie przypuścić zaraz równanie styczneczkowe krzywej danej w spółrzędnych trzylinijnych. Tym sposobem, przypuścimy że u, v, w przedstawiają tu spółrzędne trzylinijne jakiejkolwiek prostej, i że równanie krzywej

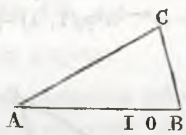
$$f(u, v, w) = 0,$$

jest n^{tego} stopnia, to jest że krzywa jest n^{tej} klassy.

Przypuśćmy że się bierze za prostą AB trójkąta odniesienia jakąkolwiek ze stycznych do krzywej, równanie krzywej przedstawi się pod kształtem

$$\varphi_n(u, v) + w\varphi_{n-1}(u, v) + \ldots + w^{n-p-1}\varphi_{p+1}(u, v) + w^{n-p}\varphi_p(u, v) = 0, \tag{1}$$

funkcye φ_i są jednorodne w u i v i stopnia i; funkcya $\varphi_p(u, v)$ jest przynajmniej pierwszego stopnia.



Jeśli p jest wyższem od 1, prosta AB będzie styczną wielokrotną rzędu p, i p punktów zetknięć tej stycznej są dane przez równanie otrzymane, równając z zerem ogół wyrazów stopnia najmniej podniesionego, to jest przez równanie

$$\varphi_p(u, v) = 0. \tag{2}$$

W rzeczy samej, niech będzie $v = \lambda u$ równanie jakiegokolwiek punktu leżącego na prostej AB, spółrzędne u stycznych poprowadzonych z tego punktu będą dane przez równanie

$$u^n\varphi_n(1, \lambda) + wu^{n-1}\varphi_{n-1}(1, \lambda) + \ldots + w^{n-p-1}u^{p+1}\varphi_{p+1}(1, \lambda) + w^{n-p}u^p\varphi_p(1, \lambda) = 0. \tag{3}$$

Otóż to równanie przypuszcza p razy pierwiastki $u = 0$ i p razy tylko; więc, przez jakikolwiek punkt prostej AB, można poprowadzić nie więcej jak $(n - p)$ stycznych odrębnych od AB; *styczna* AB *jest styczną wielokrotną rzędu* p.

Przypuśćmy teraz że punkt I albo $v = \lambda u$ jest jakimkolwiek z punktów danych przez równanie (2) to jest żeby było

$$\varphi_p(1, \lambda) = 0\,;$$

równanie (3) przypuści wtedy $(p + 1)$ pierwiastków zero; tym sposobem, przez każdy z punktów (2), nie można poprowadzić jak $(n - p - 1)$ stycznych odrębnych od AB; każdy z tych punktów jest więc pzzecięciem prostej AB przez jakąkolwiek styczną nieskończenie blizką, albo jednym z punktów zetknięcia tej stycznej; więc równaniem punktów zetknięcia jest

$$\varphi_p(u, v) = 0.$$

Roztrząśniemy szczegółowiej przypadki w których p jest równem 1, 2 albo 3 ;

II° Dyskussya.

491. Styczne proste.

Jeśli biorąc za prostą AB styczną uważaną, równanie krzywej sprowadza się do kształtu

(1) $$\varphi_n(u, v) + \ldots + w^{n-2}\varphi_2(u, v) + w^{n-1}\varphi_1(u, v) = 0,$$

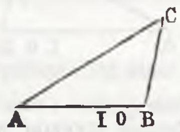
prosta AB, będzie *styczną prostą*.

Szukajmy stycznych poprowadzonych do krzywej przez jakikolwiek punkt

(2) $$v = \lambda u$$

prostej AB; spółrzędne u tych stycznych będą dane przez równanie

(3) $$u^n\varphi_n(1, \lambda) + \ldots + w^{n-2}u^2\varphi_2(1, \lambda) + w^{n-1}u\varphi_1(1, \lambda) = 0.$$



Otóż to równanie nie przypuszcza jak jeden pierwiastek zero póki λ jest dowolnem; więc z jakiegokolwiek punktu prostej AB można poprowadzić do krzywej $(n - 1)$ stycznych odrębnych od AB; AB jest styczną prostą.

Jeśli się weźmie na λ wartość jedyną λ_0 znoszącą funkcyą pierwszego stopnia $\varphi_1(1, \lambda)$, równanie (3) przypuszcza dwa pierwiastki zero; to jest że przez punkt

(0) $$v = \lambda u$$

przechodzą dwie styczne nieskończenie blizkie i zbiegające się z AB, ten punkt jest zetknięciem prostej AB.

Jeśliby wartość λ_0 znosiła razem $\varphi_1(1, \lambda)$ i $\varphi_2(1, \lambda)$, równanie (3) przypuściłoby trzy pierwiastki zero; przez punkt O przechodziłyby trzy styczne zlane z AB, to jest że punkt O byłby punktem przecięcia się trzech stycznych nieskończenie blizkich; ponieważ styczna AB jest styczną prostą, punkt O będzie ogólnie punktem zwrotu; może się zdarzyć szczególniej, że punkt O będzie punktem podwójnym, jeśli równanie (3) przypuści inną parę pierwiastków równych, zastąpiwszy λ przez λ_0.

Jeśliby wartość λ_0 znosiła razem $\varphi_1(1, \lambda)$, $\varphi_2(1, \lambda)$ i $\varphi_3(1, \lambda)$ równanie (3) przypuściłoby cztery pierwiastki zero; punkt O byłby wtedy przecięciem się czterech stycznych nieskończenie blizkich i zlanych z AB. Ponieważ styczna AB jest styczną prostą, punkt O będzie ogólnie punktem zwrotu pochodzącym z punktu potrójnego, byleby równanie nie przypuszczało jeszcze, zrobiwszy w niem $\lambda = \lambda_0$, jednej albo dwóch innych par pierwiastków równych.

492 Styczne podwójne.

Jeśli równanie krzywej sprowadza się do kształtu

(1) $$\varphi_n(u, v) + \ldots + w^{n-3}\varphi_3(u, v) + w^{n-2}\varphi_2(u, v) = 0,$$

prosta AB będzie *styczną podwójną;* dwoma punktami zetknięcia będą

(2) $$i,\ j \qquad \varphi_2(u, v) = 0;$$

przez jakikolwiek punkt prostej AB, nie można poprowadzić do krzywej jak $(n - 2)$ stycznych odrębnych od AB; przez jakikolwiek z punktów (2), nie można poprowadzić jak $(n - 3)$ stycznych do krzywej; każdy z punktów i albo j jest przecięciem stycznej podwójnej z jakąkolwiek styczną nieskończenie blizką.

Dyskussya stycznych podwójnych zależy od natury pierwiastków równania

(2) $$\varphi_2(u, v) = 0, \quad \text{albo} \quad Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0. \qquad i,\ j$$

1szy Przypadek : *Pierwiastki równania* (2) *są rzeczywiste.*

Ma się *styczną podwójną* zwyczajną, dotykającą się krzywej w dwóch punktach odrębnych, i i j. Te punkta przecięcia będą mogły być punktami wielokrotnymi, jeśli przez te punkta, przechodzą więcej jak trzy styczne zbiegające się z prostą AB.

2gi Przypadek : *Pierwiastki równania* (2) *są urojone.*

Styczna podwójna AB jest wtedy *styczną podwójną odosobnioną;* styczna AB jest styczną rzeczywistą, lecz jej punkta zetknięcia nie są rzeczywistymi; odznacza się ona tą własnością analityczną : Z jakiegokolwiek punktu prostej AB nie można poprowadzić jak $(n - 2)$ stycznych odrębnych od AB; przez jej punkta zetknięcia nie można poprowadzić jak tylko $(n - 3)$.

3ci Przypadek : *Pierwiastki równania* (2) *są równe.*

Dwa punkta zetknięcia stycznej podwójnej zbiegną się z sobą; przez ten punkt przechodzą trzy styczne nieskończenie blizkie i zbiegające się z prostą AB; punkt zetknięcia jest punktem *przegięcia,* ponieważ styczna jest styczną podwójną.

Jako przykłady dwóch ostatnich przypadków przytoczymy :

1° Krzywa

$$u^3 + (u^2 + v^2)w = 0,$$

której równanie w spółrzędnych-punkt trzylinijnych jest

$$(x^2 + y^2)^2 - (9y^2 + x^2)xz + \frac{27}{4}y^2z^2 = 0.$$

2° Krzywa

$$u^3 + v^2 = 0,$$

której równanie w spółrzędnych-punkt trzylinijnych jest

$$x^3 = \frac{27}{4}y^2z.$$

Roztrząśnie się tymże samym sposobem styczne wielokrotne rzędu wyższego.

493. Aby jakakolwiek prosta była styczną wielokrotną rzędu p, dość aby ta prosta będąc wziętą za bok trójkąta odniesienia, równanie krzywej sprowadzało się do kształtu

$$_n(u, v) + w\varphi_{n-1}(u, v) + \ldots + w^{n-p}\varphi_p(u, v) = 0,$$

to jest aby w wyrazie niezależnym od u i v wyrazy $1^{go}, 2^{go}, \ldots, (p-1)^{entego}$ stopnia w u i v koleją jedne po drugich z równania danego znikały, co wymaga

$$1+2+3+\ldots+p=\frac{p(p+1)}{2} \quad \text{związków.}$$

« Tak więc : aby jakakolwiek prosta była styczną do krzywej, dosyć jest dać na to *jeden warunek*, » to jest *jeden związek* między spółczynnikami równania krzywej. Aby jakakolwiek prosta była styczną » wielokrotną rzędu p dosyć jest dać na to $\frac{p(p+1)}{2}$ *warunków* to jest $\frac{p(p+1)}{2}$ *związków* między » spółczynnikami krzywej.

Można więc powiedzieć że :

Styczna wielokrotna rzędu p *wyrównywa wartością* czyli *wartuje tyleż ogólnie jak pół iloczynu* $\frac{p(p+1)}{2}$ *stycznych prostych.*

III° Własności pierwszych biegunowych jakiejkolwiek prostej w przypadku stycznych wielokrotnych.

494. *Jeśli jakakolwiek krzywa ma styczną wielokrotną rzędu* p, *ta prosta będzie styczna wielokrotna rzędu* (p — 1) *dla pierwszej biegunowej jakiejkolwiek prostej.*

Jeśli l *punktów zetknięcia stycznej wielokrotnej zbiegają się, otrzyma się* (l — 1) *punktów pierwszej biegunowej zbiegających się między sobą i z pierwszemi.*

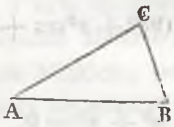
W rzeczy samej, jeśli się przypuści że prosta jest styczną wielokrotną rzędu p, równanie krzywej będzie kształtu

$$\varphi_n(u, v)+w\varphi_{n-1}(u, v)+\ldots+w^{n-p}\varphi_p(u, v)=0. \tag{1}$$

Otóż pierwsza biegunowa jakiejkolwiek prostej (u_0, v_0, w_0) będzie n^{er} (464)

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0;$$

albo



$$u_0[\ldots+w^{n-p}{}_u\varphi'_p(u, v)]+v_0[\ldots+w^{n-p}{}_u\varphi'_p(u, v)]+w_0[\ldots+(n-p)w^{n-p-1}\varphi_p(u, v)]=0; \tag{2}$$

widzimy że wyrazy stopnia najmniej podniesionego w u i v będą stopnia $(p-1)$; prosta AB jest więc dla tej pierwszej biegunowej styczną wielokrotną rzędu $(p-1)$.

Jeśli pomiędzy punktami zetknięcia stycznej AB, l zbiegają się między sobą, równanie krzywej będzie mogło się napisać

$$\varphi_n(u, v)+\ldots+w^{n-p-1}\varphi_{p+l}(u, v)+w^{n-p}u^l\varphi(u, v)=0, \tag{3}$$

przypuszcza się że te punkta zetknięcia zbiegają się z punktem A.

W pierwszej biegunowej jakiejkolwiek prostej, ogół wyrazów stopnia najmniej podniesionego będzie

$$u_0[u^l\varphi'_u(u, v) + lu^{l-1}\varphi(u, v)] + v_0u^l\varphi'_v(u, v);$$

widzimy że te wyrazy zawierają u^{l-1} w czynniku; więc punkt $u=0$, który był zgromadzeniem l punktów zetknięcia stycznej do krzywej danej, będzie zgromadzeniem $(l-1)$ punktów zetknięcia dla pierwszej biegunowej jakiejkolwiek prostej.

Szczególnie :

Kiedy jakakolwiek prosta T *jest styczną podwójną dla jakiejkolwiek krzywej, ona jest styczną prostą dla pierwszej biegunowej jakiejkolwiek prostej.*

Kiedy jakakolwiek prosta jest styczną podwójną przegięcia, pierwsza biegunowa jakiejkolwiek prostej dotyka się tej stycznej w punkcie przegięcia; ta styczna jest styczną prostą dla pierwszych biegunowych.

IV° Wpływ stycznych wielokrotnych na rzęd krzywej.

495. Rzęd krzywej, danej przez jej równanie styczneczkowe stopnia n, jest ogólnie równym iloczynowi $n(n-1)$ numer (413).

Styczne w punktach, w których jakakolwiek prosta spotyka krzywą, są razem styczne do pierwszej biegunowej tej prostej numera (413) i (462).

Kiedy jakakolwiek krzywa posiada styczną podwójną T, pierwsza biegunowa jakiejkolwiek prostej D dotyka się tej stycznej podwójnej; otóż ta styczna, która liczy się za dwie styczne do krzywej pierwotnej i która dotyka się biegunowej prostej D, musi liczyć się za dwie styczne wspólne do krzywej i biegunowej; pozostanie więc $[n(n-1)-2]$ stycznych wspólnych odrębnych od prostej T. Styczne w punktach gdzie prosta D spotyka krzywą daną są wspólnymi dla krzywej i dla pierwszej biegunowej tej krzywej. Lecz przez punkt w którym ona spotyka styczną T (punkt który nie należy, właściwie mówiąc do krzywej), przechodzą dwie styczne wspólne zbiegające się ze styczną T; a tem samem, liczba stycznych wspólnych odpowiednich innym punktom przecięcia będzie sprowadzoną do $[n(n-1)-2]$. Tak więc, styczna podwójna zmniejsza rzęd o dwie jedności; jeśli jest τ stycznych podwójnych, rzęd będzie zmniejszonym o 2τ jedności.

Przypuśćmy że styczna podwójna T jest styczną przegięcia albo I; przez punkt I nie można poprowadzić jak $(n-3)$ stycznych do krzywej. Otóż, pierwsza biegunowa jakiejkolwiek prostej D, dotyka

się stycznej T albo I; a tem samem, prosta T musi się liczyć za trzy styczne wspólne do krzywej i do pierwszej biegunowej; rzęd krzywej będzie więc zmniejszonym o trzy jedności.

Jeśli jest i stycznych przegięcia, rzęd będzie zmniejszonym o $3i$ jedności.

Więc, *jeżeli krzywa klassy* n *posiada* τ *stycznych podwójnych, zaś* i *stycznych przegięcia, rzęd* m *krzywej będzie określonym przez równość*

$$\text{(III)} \qquad m = n(n-1) - 2\tau - 3i.$$

Ogólnie, styczna wielokrotna rzędu p będzie zmniejszać o $p(p-1)$ jedności, jeśli punkta zetknięcia są odrębnymi; i o

$$[p(p-1)+(l-1)] \quad \text{jedności}$$

jeśli jest l punktów zetknięcia które się zbiegają.

V° Wpływ stycznych wielokrotnych na liczbę punktów zwrotu.

496. Widzieliśmy numer (425) że styczne w punktach zwrotu krzywej, której równanie styczneczkowe jest

$$(1) \qquad f(u, v, w)=0,$$

są razem stycznemi do krzywej

$$(2) \qquad \mathrm{H}=\begin{vmatrix} f''_{uu} & f''_{uv} & f''_{uw} \\ f''_{vu} & f''_{vv} & f''_{vw} \\ f''_{wu} & f''_{wv} & f''_{ww} \end{vmatrix}=0.$$

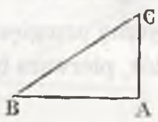
Wybrawszy styczną podwójną za prostą AB trójkąta odniesienia, dowiedzie się z łatwością podań następujących :

Styczna podwójna krzywej $\mathrm{f}=0$ *jest styczną podwójną krzywej* $\mathrm{H}=0$, *i punkta zetknięcia są też same dla obu krzywych.*

Kiedy krzywa $\mathrm{f}=0$ *ma styczną przegięcia, ta styczna będzie potrójną dla krzywej* $\mathrm{H}=0$; *i dwa punkta zetknięcia tej stycznej potrójnej zbiegną się z punktem przegięcia.*

Według tego, jeśli krzywa $f=0$ ma styczną podwójną, weźmy ją za prostą AB trójkąta odniesienia, i niech będą A i B dwoma punktami zetknięcia; dwa równania

$$f(u, v, w)=0, \qquad \mathrm{H}=0;$$



przypuszczą wtedy sześć razy rozwiązanie $u=0$, $v=0$, n^er^ (489); a tem samem, dwie krzywe $f=0$, $\mathrm{H}=0$ otrzymają nie więcej jak $[3n(n-2)-6]$ innych stycznych wspólnych i odrębnych od AB; ponieważ A i B nie są punktami zwrotu, liczba punktów zwrotu krzywej $f=0$ będzie więc zmniejszoną o sześć. W przypadku stycznej przegięcia, widzimy, rozumując tak samo, że zmniejszenie jest o ośm jedności.

Krzywa klassy n *ma ogólnie* $3n(n-2)$ *punktów zwrotu,* n^er^ (425); *więc, jeśli krzywa klassy* n *posiada* τ *stycznych podwójnych, zaś* i *stycznych przegięcia, liczba* χ *ich punktów zwrotu będzie określoną przez równość*

$$(\mathrm{IV}) \qquad \chi=3n(n-2)-6\tau-8i.$$

497. *N. B.* Związki (I) n^{er} (485), (II) n^{er} (489), (III) n^{er} (495), (IV) n^{er} (496), zasadnicze w badaniu krzywych algebraicznych, są należne PLÜCKEROWI.

Przypomnijmy sobie te wzory : Oznaczywszy przez

m, rzęd krzywej ;

n, klassę ;

δ, liczbę punktów podwójnych ;

χ, liczbę punktów zwrotu ;

τ, liczbę stycznych podwójnych ;

i, liczbę stycznych przegięcia ;

ma się związki :

$$\text{(I)} \qquad n = m(m-1) - 2\delta - 3\chi;$$

$$\text{(II)} \qquad i = 3m(m-2) - 6\delta - 8\chi;$$

$$\text{(III)} \qquad m = n(n-1) - 2\tau - 3i;$$

$$\text{(IV)} \qquad \chi = 3n(n-2) - 6\tau - 8i.$$

Jakikolwiek z tych związków jest następstwem trzech innych.

Te piękne i nadewszystko nader użyteczne związki znane są w analizie pod nazwiskiem *wzorów Plücker'a.*

VI° UWAGA O RÓWNANIACH W SPÓŁRZĘDNYCH-PUNKT I WZGLĘDEM RÓWNAŃ STYCZNECZKOWYCH.

498. Kiedy równanie w spółrzędnych-punkt jakiejkolwiek krzywej rzędu m

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

jest najogólniejszem w swoim rodzaju, to jest kiedy jego spółczynniki są zupełnie dowolne, ta krzywa nie posiada punktów podwójnych, punktów wielokrotnych ; lecz ona ma wtedy liczbę wyznaczoną stycznych podwójnych i stycznych przegięcia ; ona nie ma stycznych wielokrotnych rzędu wyższego nad drugi. Istnienie punktów wielokrotnych będzie zmniejszało klassę, tak jak liczba stycznych podwójnych i stycznych przegięcia ; lecz rzęd krzywej pozostanie niezmiennym.

Kiedy równanie styczneczkowe jakiejkolwiek krzywej klassy n

$$(2) \qquad F(u, v, w) = 0$$

jest najogólniejszem w swoim rodzaju, to jest kiedy jego spółczynniki są zupełnie dowolne, ta krzywa nie posiada stycznych podwójnych, stycznych wielokrotnych ; lecz ona ma liczbę wyznaczoną punktów podwójnych i punktów zwrotu ; ona nie ma punktów wielokrotnych rzędu wyższego nad drugi. Bytność stycznych podwójnych będzie zmniejszała rzęd, tak jak liczba punktów podwójnych i punktów zwrotu ; lecz klassa krzywej pozostaje niezmienną.

Wynika ztąd, że jeśli się daje równanie ogólne w spółrzędnych-punkt jakiejkolwiek krzywej rzędu wyznaczonego, równanie styczneczkowe tejże samej krzywej nie będzie najogólniejszym jego stopniem; gdyż pierwsze nie posiada punktów wielokrotnych, i ma styczne podwójne, będzie tak samo z drugiem; otóż istnienie stycznych podwójnych, w przypadku równania styczneczkowego, pociąga za sobą związki między spółczynnikami tego równania; więc... Odwrotnie, jeśli się daje równanie ogólne styczneczkowe jakiejkolwiek krzywej klassy wyznaczonej, równanie w spółrzędnych-punkt tejże samej krzywej nie będzie najogólniejszym jego stopniem; gdyż pierwsza krzywa mając punkta podwójne, będzie tak samo z drugą, co pociąga za sobą związki między spółczynnikami jej równania.

ROZDZIAŁ IV

ASSYMPTOTY. — PUNKTA W NIESKOŃCZONOŚCI.

---

§ I. — WYZNACZENIE ASSYMPTOT. (1sza METODA.)

I° OKREŚLENIE; SPÓŁCZYNNIK KĄTOWY, etc.

499. Ta pierwsza metoda, należna CAUCHY'EMU jest często pożyteczną w badaniu krzywych przestępnych, lecz ona daje się użyć z trudnością do poszukiwania punktów wielokrotnych w nieskończoności.

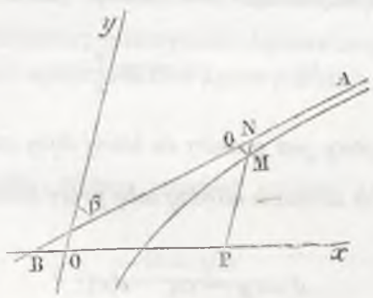
Określenie assymptot; własność charakterystyczna.

Nazywa się *assymptotą* (niemaltyczną) *gałęzi nieskończonej krzywej prostą taką, że odległość jakiegokolwiek punktu krzywej od tej prostej dąży do zera, kiedy punkt oddala się nieograniczenie na gałęzi krzywej.*

Jeżeli assymptota jest nierównoległą do osi rzędnych, różnica rzędnych assymptoty i krzywej odpowiadających tej samej odciętej, dąży do zera, kiedy punkt oddala się nieograniczenie na gałęzi krzywej.

W rzeczy samej, jeżeli M jest punktem krzywej, a MN różnicą rzędnych assymptoty i krzywej, odpowiadających tej samej odciętej; jeżeli 6 jest kątem assymptoty z osią rzędnych, a MQ odległość punktu M od assymptoty; ma się

$$MQ = MN \sin 6.$$



Ponieważ $\mathfrak{b}$ jest różnem od zera, widzimy że MN dąży do zera jednocześnie jak MQ i odwrotnie; to jest że jeżeli prosta jest assymptotą, różnica rzędnych dwóch punktów M i N dąży do zera, kiedy punkt oddala się nieograniczenie na gałęzi krzywej; i odwrotnie, jeżeli różnica między rzędną punktu krzywej i rzędną punktu prostej AB odpowiadających tej samej odciętej, dąży do zera kiedy punkt oddala się nieograniczenie na gałęzi krzywej, prosta AB jest assymptotą tej gałęzi.

To rozumowanie przypuszcza $\mathfrak{b}$ różnem od zera, to jest assymptotę nierównoległą do osi rzędnych; zrobimy badanie szczególne tego przypadku.

500. *Spółczynnik kątowy i rzędna od początku jakiejkolwiek assymptoty.*

Niech będzie równanie krzywej

$$f(x, y) = 0,$$

posiadającej gałęź nieskończoną, można przypuścić że

(1) $$y = \varphi(x),$$

jest równaniem tej gałęzi nieskończonej; wartość (1) na y musi sprawdzać równanie krzywej.

Niech będą c i d spółczynnik kątowy i rzędna od początku assymptoty odpowiadającej tej gałęzi nieskończonej; równanie może się napisać

$$y = cx + d + \underbrace{\varphi(x) - cx - d}_{\varepsilon(x)},$$

to jest

(2) $$y = cx + d + \varepsilon(x);$$

równanie (2) przedstawia również gałęź uważaną. Lecz y albo $\varphi(x)$ jest rzędną punktu krzywej odpowiadającą odciętej x, $(cx + d)$ jest rzędną assymptoty odpowiadającą tej samej odciętej; otóż widzieliśmy że ta różnica dąży do zera kiedy x i y zwiększają się nieograniczenie; więc

(3) $$\text{gr.}\,\varepsilon(x) = 0;$$

funkcya $\varepsilon(x)$ dąży do zera kiedy x zwiększa się nieograniczenie.

To założywszy, równanie (2) nam daje

$$\frac{y}{x} = c + \frac{d + \varepsilon(x)}{x};$$

kiedy punkt (x, y) oddala się nieograniczenie na gałęzi krzywej, x i y zwiększają się nieograniczenie; wtedy $\dfrac{d + \varepsilon(x)}{x}$ ma w granicy zero; a tem samem:

(I) $$c = \text{gr.}\frac{y}{x};$$

to jest że *spółczynnik kątowy assymptoty jest granicą do której dąży stosunek* $\dfrac{y}{x}$, *kiedy* x *i* y *zwiększają się nieograniczenie; zmienne* x *i* y *są związane między sobą przez równanie krzywej.*

Równanie (2) nam daje jeszcze

$$d = y - cx - \varepsilon(x);$$

kiedy x i y zwiększają się nieograniczenie, pozostaje

$$\text{(II)} \qquad d = \text{gr.}(y - cx);$$

to jest że *rzędna od początku assymptoty jest granicą wyrażenia* (y — cx), *kiedy* x *i* y *zwiększają się nieograniczenie;* c *ma wartość poprzednio znalezioną,* y *jest związanem z* x *przez równanie krzywej.*

II° Zastosowanie do krzywych drugiego rzędu.

501. Niech będzie równanie ogólne krzywych drugiego rzędu

$$\text{(1)} \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

jeśli równanie jakiejkolwiek assymptoty tej krzywej jest

$$\text{(2)} \qquad y = cx + d,$$

będzie musiało się mieć, według numeru poprzedzającego:

$$c = \text{gr.}\frac{y}{x}, \qquad d = \text{gr.}(y - cx).$$

Otóż, z równania (1) krzywej, wyciąga się

$$\text{(3)} \qquad y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{mx^2 + 2nx + p},$$

założywszy:

$$\text{(3 \textit{bis})} \qquad m = B^2 - AC, \qquad n = BE - CD, \qquad p = F - CF.$$

Równanie (3) nam daje

$$\frac{y}{x} = -\frac{B + \frac{E}{x}}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{m + \frac{2n}{x} + \frac{p}{x^2}};$$

zkąd wypada zwiększając x nieograniczenie

$$c = \text{gr.}\frac{y}{x} = -\frac{B}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{m};$$

w równaniach (3) i (4) znaki wyższe i niższe $\pm$ powinny sobie odpowiadać.

W przypadku elipsy, m jest odjemnem; spółczynniki kątowe assymptot są wtedy urojone.

W przypadku hyperboli, m jest dodatnem; spółczynniki kątowe assymptot są rzeczywiste. W przypadku paraboli, m jest zerem; wartości spółczynników kątowych stają się równe między sobą i równe ilości $\left(-\frac{B}{C}\right)$.

Wyznaczmy teraz rzędne od początku; weźmy naprzód wartość na C (4) odpowiadającą znakom wyższym, to jest

$$C = \frac{-B + \sqrt{m}}{C}.$$

Ma się odtąd

$$y - cx = -\frac{Bx + E}{C} + \frac{1}{C}\sqrt{mx^2 + 2nx + p} - x\,\frac{(-B + \sqrt{m})}{C}$$

albo

$$y - cx = \frac{\sqrt{mx^2 + 2nx + p} - (x\sqrt{m} + E)}{C};$$

albo nakoniec, mnożąc dwa wyrazy ułamku przez ilość sprzężoną licznika, to jest

$$\sqrt{mx^2 + 2nx + p} + (x\sqrt{m} + E):$$

$$y - cx = \frac{2x[n - E\sqrt{m}] + p - E^2}{C\sqrt{mx^2 + 2nx + p} + C(x\sqrt{m} - E)}.$$

Teraz dzieląc dwa wyrazy tego ostatniego ułamku przez x, wypadnie

$$y - cx = \frac{2(n - E\sqrt{m}) + \dfrac{p - E^2}{x}}{C\sqrt{m + \dfrac{2n}{x} + \dfrac{p}{x^2}} + C\left[\sqrt{m} + \dfrac{E}{x}\right]};$$

zwiększając wtedy x nieograniczenie, znajduje się

$$(5) \qquad d = \text{gr.}(y - cx) = \frac{n - E\sqrt{m}}{C\sqrt{m}} = -\frac{E}{C} + \frac{n}{C\sqrt{m}}.$$

Gdyby się było wzięło w równościach (3) i (4) znaki niższe, znalazłoby się

$$(5\ bis) \qquad d = -\frac{E}{C} - \frac{n}{C\sqrt{m}}; \qquad \text{gdzie} \qquad n = BE - CD.$$

Zastępując w równaniu (2), c i d przez ich wartości (4) i (5), otrzymuje się na równanie assymptot krzywej (1)

$$(6) \qquad y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{1}{C}\left(x\sqrt{m} + \frac{n}{\sqrt{m}}\right);$$

znaki wyższe i niższe powinny być wzięte razem w równaniach (3) i (6).

W przypadku elipsy, $m < 0$; dwie wartości na d (5) są urojone. W przypadku hyperboli, $m > 0$; wartości na d są rzeczywiste. W przypadku paraboli, $m = 0$; d jest nieskończonem; spółczynnik kątowy nie będąc nieskończonym, assymptota jest nieskończoną.

N. B. Równanie (3) może się napisać, rozkładając na kwadraty ilość położoną pod znakiem pierwiastkowym

$$(7) \qquad y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{\left(x\sqrt{m} + \frac{n}{\sqrt{m}}\right)^2 + p - \frac{n^2}{m}};$$

porównawszy to ostatnie równanie z równaniem (6) assymptot, wynika prawidło dość proste aby wyprowadzić równanie (6) z równania (7).

502. Równanie assymptot.

Równaniem ogólnem krzywych drugiego rzędu będąc

(1) $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

otrzymamy spółczynniki kątowe assymptot podzieliwszy przez x^2, co daje

$$A + 2B\frac{y}{x} + C\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{D}{x} + 2\frac{E}{x}.\frac{y}{x} + \frac{F}{x^2} = 0;$$

potem zwiększając x nieograniczenie, i zauważywszy że $C = \text{gr}.\frac{y}{x}$, wypadnie

(2) $$Cc^2 + 2Bc + A = 0;$$

takiem jest równanie (2) wyznaczające spółczynniki kątowe assymptot krzywej (1).

Jeżeli $B^2 - AC < 0$, to jest w przypadku ellipsy, dwa pierwiastki są urojone;
Jeżeli $B^2 - AC > 0$, to jest w przypadku hyperboli, dwa pierwiastki są rzeczywiste;
Jeżeli $B^2 - AC = 0$, to jest w przypadku paraboli, dwa pierwiastki są rzeczywiste.

Kiedy się odnosi krzywą do jej środka, to jest kiedy się założy

$$x = x' + x_0,$$
$$y = y' + y_0.$$

i gdy się zniesie wyrazy pierwszego stopnia, n^er (316), równanie krzywej staje się

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = H;$$

spółczynniki kątowe assymptot są jeszcze dane przez równanie

$$Cc^2 + 2Bc + A = 0.$$

Lecz widzimy wtedy, przez wartości (5) n^ru (501), w których musi się przypuścić E i D zero, że assymptoty przechodzą przez nowy początek, albo środek krzywej, jak to sprawdzimy jeszcze poniżej.

Wtedy, jeżeli c jest spółczynnikiem kątowym jednej z nich, otrzyma się

$$c = \frac{y'}{x'},$$

x' i y' przedstawiają nam spółrzędne jakiegokolwiek punktu tej assymptoty. Ponieważ wartość na c musi sprawdzać równanie (2), widocznie będzie

(3) $$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = 0;$$

jestto równanie kwadratowe assymptot odniesione do nowych osi.

Wypada ztąd że: *wyrazy drugiego stopnia, w równaniu* (1), *przedstawiają dwie proste przechodzące przez początek i równoległe do assymptot.*

Równanie kwadratowe assymptot względem osi pierwotnych będzie więc

$$A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2 = 0.$$

Rozwinąwszy i mając wzgląd na związki (3) n^ru (316), to równanie staje się

$$(4) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 = 0;$$

tak więc *równanie dwóch assymptot ma też same wyrazy drugiego stopnia i też same wyrazy pierwszego stopnia jak równanie samejże krzywej.*

Aby wyznaczyć wyraz niezależny równania (4), uważmy że

$$Ax_0 + By_0 + D = 0,$$
$$Bx_0 + Cy_0 + E = 0,$$

zkąd się wyciąga dodając pomnożywszy przez x_0 i y_0:

$$Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 = -(Dx_0 + Ey_0);$$

zastąpiwszy wtedy x_0 i y_0 przez wartości wyciągnięte z równości poprzedzających, ma się

$$Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 2BDE}{AC - B^2} = -\frac{\Delta}{AC - B^2} + F.$$

Równaniem dwóch assymptot jest więc

$$(5) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F + \frac{\Delta}{B^2 - AC} = 0,$$

gdzie się założyło, według zwyczaju:

$$(6) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

503. Warunek aby hyperbola była równoramienną.

Nazywa się *hyperbolą równoramienną hyperbola, której assymptoty są prostokątnemi.*

Otóż widzieliśmy przed chwilą, że spółczynniki kątowe assymptot są wyznaczone przez równanie:

$$Cc^2 + 2Bc + A = 0;$$

jeżeli c_1 i c_2 są pierwiastkami tego równania i jeżeli θ jest kątem osi, warunkiem prostopadłości tych dwóch prostych będzie

$$1 + (c_1 + c_2)\mathrm{dos}\,\theta + c_1c_2 = 0.$$

Otóż, według równania określającego pierwiastki c_1 i c_2, ma się

$$c_1 + c_2 = -\frac{B}{C}, \qquad c_1c_2 = \frac{A}{C};$$

Warunkiem aby hyperbola była równoramienną jest więc

(7) $$A + C - 2B\operatorname{dos}\theta = 0;$$

ten związek staje się w przypadku osi prostokątnych

(7 *bis*) $$A + C = 0,$$

to jest że spółczynniki kwadratów zmiennych są równe i znaków przeciwnych.

N. B. W przypadku ellipsy, ten związek (7) nie może być sprawdzonym przez wartości rzeczywiste na A, B, C; ma się, w rzeczy samej, w założeniu obecnem

$$B^2 - AC = -m^2, \qquad \text{zkąd} \qquad C = \frac{B^2 + m^2}{A};$$

i związek (7) staje się

$$A^2 + B^2 + m^2 - 2AB\operatorname{dos}\theta = 0;$$

albo rozkładając na kwadraty:

$$(A - B\operatorname{dos}\theta)^2 + B^2\operatorname{wst}^2\theta + m^2 = 0;$$

summa kwadratów, która nie może być zerem dla wartości rzeczywistych na A, B, C.

III° Zastosowanie do krzywych algebraicznych.

Assymptoty równoległe do osi spółrzędnych.

504. Wyznaczmy assymptoty równoległe do osi rzędnych.

W tym celu, uporządkujemy równanie krzywej względem potęg zmniejszających się niewiadomej y; niech będzie m stopniem krzywej, zaś $(m - p)$ najwyższą potęgą na y wchodzącą w jej równanie, to równanie będzie mogło się odtąd napisać

(1) $$A_p y^{m-p} + A_{p+1} y^{m-p-1} + A_{p+2} y^{m-p-2} + \ldots + A_{m-1} y + A_m = 0;$$

litera A_i oznaczająca funkcyę całkowitą na x, która jest ogólnie stopnia i, lecz nigdy stopnia wyższego.

Podzieliwszy przez y^{m-p}, równanie (1) stanie się

(2) $$A_p + A_{p+1}\cdot\frac{1}{y} + A_{p+2}\cdot\frac{1}{y_2} + \ldots + A_m\cdot\frac{1}{y^{m-p}} = 0.$$

Jeśli istnieje assymptota równoległa do osi rzędnych i gdy a jest odciętą tej assymptoty, wartość na y musi zwiększać się coraz bardziej, kiedy da się dla x wartości coraz bliższe ilości skończonej a; więc kiedy x zdąża do a, wartość odpowiadająca na y zwiększa się nieograniczenie, funkcye $A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots A_m$ pozostają skończone; równanie (2) sprowadza się wtedy do

(3) $$A_p = 0;$$

tym sposobem związek (3) jest warunkiem koniecznym aby jakiejkolwiek wartości skończonej na x odpowiadała wartość nieskończona na y; więc wartości na x odpowiadające dla assymptot równoległych do osi rzędnych znoszą spółczynnik najwyższej potęgi na y; zobaczymy że są wtedy ogólnie assymptoty równoległe do osi rzędnych, to jest że ten warunek jest dostatecznym; tak więc

Assymptoty równoległe do osi rzędnych otrzymują się równając z zerem spółczynnik najwyższej potęgi na y.

Kiedy spółczynnik najwyższej potęgi na y jest stałym, i gdy ta potęga nie jest y^m nie znajdujemy assymptot w odległości skończonej; te assymptoty są przeniesione do nieskończoności. Jeżeli najwyższej potęgi na y i y^m, spółczynnik jest stałym; nie znajduje się wtedy assymptot równoległych do osi rzędnych, ani w odległości skończonej, ani w nieskończoności.

505. Oznaczywszy przez $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funkcye A_p, A_{p+1}, A_{p+2}, tak że równanie (2) napisze się:

$$(4) \qquad F(x) = \varphi(x) + \overbrace{\varphi_1(x).\frac{1}{y} + \varphi_2(x).\frac{1}{y^2} + \ldots + \frac{A_m}{y^{m-p}}}^{X} = 0.$$

Niech będzie a pierwiastek równania

$$(5) \qquad \varphi(x) = 0;$$

sprawdzimy że tej wartości odpowiada ogólnie gałęź nieskończona krzywej mającej za assymptotę prostą $x - a = 0$, i zbadamy położenie tej gałęzi względem assymptoty.

1° *Pierwiastek* a *jest prostym, albo ogólniej, jest on pierwiastkiem wielokrotnym rzędu nieparzystego.*

Jeżeli h jest ilością dodatną dostatecznie małą, otrzyma się, na przykład, według założenia przyjętego.

$$\varphi(a - h) < 0, \qquad \varphi(a + h) > 0;$$

i $\varphi(x)$ nie zniesie się jak dla $x = a$ w przedziale od $(a - h)$ do $(a + h)$. Przypuśćmy nadto że $\varphi_1(x)$ nie znosi się dla $x = a$, niech będzie $\varphi_1(a) > 0$, na przykład; będzie mogło się przypuścić że h jest dość małem, żeby było razem

$$\varphi_1(a - h) > 0, \qquad \varphi_1(a) > 0, \qquad \varphi_1(a + h) > 0.$$

To założywszy, dajmy dla $\frac{1}{y}$ wartość dość małą, aby wielomian X pozostał dla tej wartości i dla wszelkiej wartości mniejszej, tegoż samego znaku jak jego pierwszy wyraz, i nadto, dość małą aby wartość bezwzględna na X była mniejszą jak wartość bezwzględna na $\varphi(a \pm h)$.

Niech będą $OA = a$, $OA' = a - h$, $OA'' = a + h$; zaś AB, A'B', A''B'', proste równoległe do osi Oy.

Przypuśćmy naprzód $\frac{1}{y} > 0$, $\frac{1}{y}$ mając wartość wyznaczoną i dostatecznie małą:

dla:	$x = a - h$,	ma się	$F(a - h) < 0$,
	$x = a$,	ma się	$F(a) > 0$,
	$x = a + h$,	ma się	$F(a + h) < 0$;

ma się więc punkt M, zawarty między A'B' i AB, na wierzchu osi Ox i bardzo odległy.

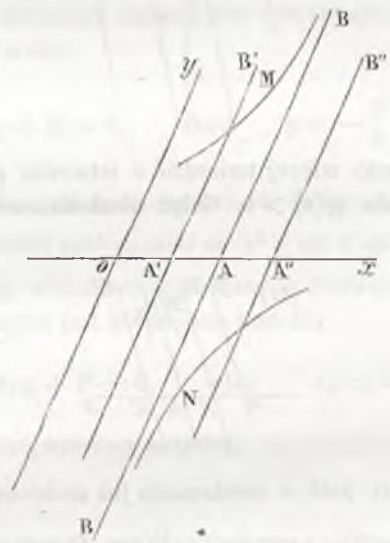
Przypuśćmy, powtóre $\frac{1}{y} < 0$, $\frac{1}{y}$ mając wartość wyznaczoną i dostatecznie małą w wartości bezwzględnej

$$\text{dla: } x = \mathrm{a} - h, \quad \text{ma się} \quad \mathrm{F}(\mathrm{a} - h) < 0,$$

$$x = \mathrm{a}, \quad \text{ma się} \quad \mathrm{F}(\mathrm{a}) < 0,$$

$$x = \mathrm{a} + h, \quad \text{ma się} \quad \mathrm{F}(\mathrm{a} + h) > 0;$$

ma się drugi punkt N, zawarty między AB i A″B″, pod spodem osi Ox i bardzo odległy.



Jeżeli teraz, zwiększa się y coraz bardziej, otrzyma się zawsze wartość rzeczywistą odpowiadającą dla x, wartość która zbliża się do a, ponieważ pierwsza strona równania (4) dąży do wyrazu $\varphi(x)$ znoszącego się tylko dla $x = \mathrm{a}$, w przedziale od $(\mathrm{a} - h)$ do $(\mathrm{a} + h)$. Otrzyma się więc dla $y > 0$, szereg punktów tworzących krzywą zbliżającą się coraz bardziej do części wyższej prostej AB i po lewej stronie tej linii; dla $y < 0$, otrzyma się szereg punktów tworzących krzywą zbliżającą się coraz bardziej do części niższej prostej AB i po prawej stronie tej linii.

Gdyby się miało $\varphi_1(\mathrm{a}) = 0$ i $\varphi_2(\mathrm{a}) > 0$, gałęź nieskończona przedstawiłaby kształt na stronnicy obok (fig. 1).

2° *Pierwiastek* a *jest podwójnym, albo ogólniej, jest on wielokrotnym stopnia parzystego.*

Można wtedy przypuścić h dość małem tak żeby było, na przykład,

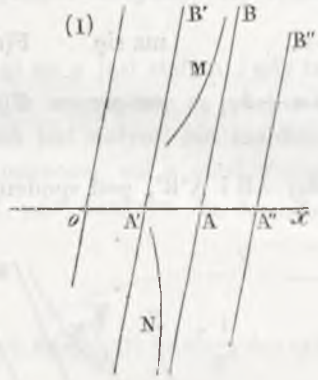
$$\varphi(\mathrm{a} - h) > 0, \qquad \varphi(\mathrm{a} + h) > 0.$$

Niech będzie naprzód $\varphi_1(\mathrm{a})$ różnem od zera, przypuśćmy $\varphi_1(\mathrm{a}) < 0$.

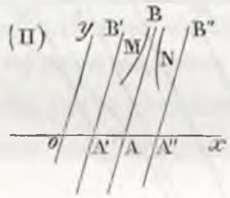
Jeżeli $y > 0$, dla: $x = a - h$, ma się $F(a - h) > 0$,

$x = a$, ma się $F(a) < 0$,

$x = a + h$, ma się $F(a + h) > 0$.



Dla $y < 0$, nie będzie się mogło więcej twierdzić o istnieniu pierwiastków. Wnioski byłyby odwrotnymi, jeżeliby się było miało $\varphi_1(a) > 0$. Gałęź nieskończona przedstawi kształt na stronnicy obok (fig. II).



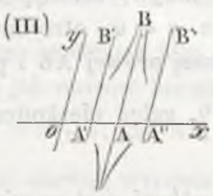
Niech będzie nakoniec $\varphi_1(a) = 0$. Jeśli w założeniach już zrobionych, przypuszcza się $\varphi_2(a) < 0$,

dla: $x = a - h$, ma się $F(a - h) < 0$,

$x = a$, ma się $F(a) < 0$, jakimkolwiek bądź jest znak na y,

$x = a + h$, ma się $F(a) + h) > 0$;

ma się wtedy kształt na stronnicy obok (fig. III).



Jeżeli ma się razem $\varphi_1(a) = 0$ i $\varphi_2(a) > 0$, ta metoda nie rozłączy pierwiastków, i nie będzie mogło się wnosić o istnieniu gałęzi nieskończonych rzeczywistych.

Uwaga. Assymptoty równoległe do osi odciętych, wyznaczą się zupełnie tymże samym sposobem i otrzymamy prawidło następujące:

Assymptoty równoległe do osi odciętych otrzymują się, równając z zerem spółczynnik najwyższej potęgi na x.

506. Zastosujemy do krzywych drugiego rzędu

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Kiedy spółczynniki A i C są różnemi od zera, nie znajduje się assymtot równoległych do osi spółrzędnych. Jeżeli ma się $C = 0$, równanie assymptoty równoległej do osi Oy otrzyma się równając z zerem spółczynnik na y, co daje

$$Bx + E = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad x = -\frac{E}{B};$$

ta assymptota zbiegnie się z osią rzędnych, jeżeli ma się $E = 0$. Więc

Oś rzędnych będzie assymptotą, jeżeli spółczynniki na y^2 *i na* y *są zerami.*

Kiedy przypuszcza się $A = 0$, równanie assymptoty równoległej do osi Ox otrzymuje się, równając z zerem spółczynnik na x, co daje

$$By + D = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad y = -\frac{D}{B};$$

ta assymptota zbiegnie się z osią Ox, jeżeli ma się $D = 0$. Więc

Oś odciętych będzie assymptotą, jeżeli spółczynniki na x^2 *i* na x *są zerami.*

Warunki któreśmy wysłowili są widocznie konieczne i dostateczne; wynika ztąd że równanie hyperboli odniesionej do jej assymptot jest koniecznie kształtu

$$2Bxy + F = 0, \qquad \text{albo} \qquad xy = k;$$

dwie osie spółrzędnych są wtedy *assymptotami* krzywej.

IV° Zastosowanie do krzywych algebraicznych.

Assymptoty nierównoległe do osi spółrzędnych.

507. Przypomnijmy sobie, że jeżeli c i d są spółczynnik kątowy i rzędna od początku jakiejkolwiek assymptoty, równanie krzywej może się położyć pod kształtem n^er^ (500)

$$(1)\qquad y = cx + d + \varepsilon(x).$$

ε jest funkcyą na x która dąży do zera kiedy x zwiększa się nieograniczenie; a wtedy

$$(2)\qquad c = \text{gr.}\frac{y}{x}, \qquad d = \text{gr.}(y - cx)$$

Niech będzie teraz równanie ogólne krzywej algebraicznej:

$$(3)\qquad f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0,$$

funkcye φ są jednorodne i stopnia i w x i y.

Równanie (3) będzie mogło się napisać

$$x^m\varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1}\varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

albo podzieliwszy przez x^m

(4) $$\varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\cdot\varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Jeżeli zwiększa się x nieograniczenie, y ogólnie będzie zwiększać się nieograniczenie, lecz otrzyma się gr.$\frac{y}{x} = c$, c jest ilość skończona ponieważ przypuszcza się assymptota nierównoległa do osi rzędnych. Otóż, kiedy zwiększa się x nieograniczenie, wszystkie wyrazy począwszy od drugiego, dążą do zera, gdyż funkcye φ_i są funkcyami całkowitemi ilości $\frac{y}{x}$, która ma granicę skończoną; więc wartości granic stosunku $\frac{y}{x}$, albo spółczynniki kątowe assymptot powinny sprawdzać równanie

(5) (I) $$\varphi_m(1, c) = 0;$$

tak więc *spółczynniki kątowe assymptot są pierwiastkami równania otrzymanego, równając z zerem ogół wyrazów stopnia najwięcej podniesionego, w którym się zastępuje* x *przez* 1 *i* y *przez* c.

Pierwiastki równe zerom równania (5) dają assymptoty równoległe do osi odciętych.

Równanie (5) będąc, ogólnie, stopnia m, wnosi się ztąd że

Jest najwięcej m *assymptot nierównoległych do osi rzędnych.*

Uwaga. Dowiedliśmy że jeśli są assymptoty, ich spółczynniki kątowe powinny koniecznie sprawdzać równanie (5). Przez analizę zupełnie podobną do tej która była przedstawioną w n[rze] (505), sprawdzimy, że ogólnie dla jakiegokolwiek pierwiastku rzeczywistego c równania (5), odpowiada jedna gałęź nieskończona rzeczywista krzywej; albo lepiej, wniesiemy z tej analizy, że :

Jakiemukolwiek pierwiastkowi stopnia mnogości nieparzystej równania $\varphi_m(1, c) = 0$ *odpowiada zawsze przynajmniej jedna gałęź rzeczywista nieskończona krzywej.* Ten wniosek niekoniecznie ma miejsce kiedy pierwiastek jest stopnia mnogości parzystej.

508. Wyznaczmy teraz rzędną od początku tych assymptot.

Niech będzie c jakikolwiek z pierwiastków rzeczywistych równania (5), i załóżmy

$$d + \varepsilon(x) = \delta;$$

otrzyma się, dla $x = \infty$

(6) $$\text{gr.}\,\delta = \text{gr.}(d + \varepsilon) = d.$$

Równanie (1), które jest także równaniem krzywej, napisze się

$$\frac{y}{x} = c + \frac{\delta}{x};$$

lecz spółrzędne x i y powinny sprawdzać równanie (3), albo co wychodzi na jedno, równanie (4) musi się więc mieć

$$\varphi_m\left(1, c + \frac{\delta}{x}\right) + \frac{1}{x}\varphi_{m-1}\left(1, c + \frac{\delta}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\varphi_{m-2}\left(1, c + \frac{\delta}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Rozwińmy każdą z tych funkcyj przez wzór Taylor'a, i przypomnijmy sobie że znakowania $\varphi'_i(1, c)$, $\varphi''_i(1, c)$,... oznaczą pochodne pierwsze, drugie,... funkcyi $\varphi_i(x, y)$ względem y w której zastąpiło się, po różniczkowaniu x przez 1 i y przez c, znajduje się

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_m(1, c) + \frac{\delta}{x}\varphi'_m(1, c) + \frac{\delta^2}{1.2x^2}\varphi''_m(1, c) + \frac{\delta^3}{1.2.3x^3}\varphi'''_m(1, c) + \ldots\ldots \\ &\quad + \frac{1}{x}\varphi_{m-1}(1, c) + \frac{\delta}{x^2}\varphi'_{m-1}(1, c) + \frac{\delta^2}{1.2.x^3}\varphi''_{m-1}(1, c) + \ldots\ldots \\ &\qquad + \frac{1}{x^2}\varphi_{m-2}(1, c) + \frac{\delta}{x^3}\varphi'_{m-2}(1, c) + \ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\quad + \frac{1}{x^3}\varphi_{m-3}(1, c) + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} = 0.$$

Według związku (5) pierwszy wyraz tego równania jest zerem, i pozostaje pomnożywszy przez x

$$(8)\quad [\delta\varphi'_m(1, c) + \varphi_{m-1}(1, c)] + \text{H}.\frac{1}{x} + \text{G}.\frac{1}{x^2} + \ldots = 0.$$

Otóż kiedy zwiększa się x niegraniczenie, δ staje się w granicy ilością skończoną d; wyrazy idące po pierwszym, które są funkcyami całkowitemi ilości skończonej δ, dążą do zera, równanie (8) sprowadza się do

$$d\varphi'_m(1, c) + \varphi_{m-1}(1, c) = 0.$$

Ztąd wypada

$$(9)\qquad (\text{II})\qquad d = -\frac{\varphi_{m-1}(1, c)}{\varphi'_m(1, c)};$$

to jest że *rzędna od początku, odpowiadająca jakiemukolwiek spółczynnikowi kątowemu* c, *jest równą przynajmniej ogółowi wyrazów stopnia* (m — 1), *w którym zastąpiło się* x *przez* 1 *i* y *przez* c, *podzielonemu przez pochodną, względem* c, *pierwszej strony równania* (I).

Uwaga I. Dowiedliśmy, że jeśli jest wartość rzeczywista na d, ona musi sprawdzać równanie (9); otóż rozumując na równaniu (8) jak to było zrobionem w n[rze] (505), sprawdzimy że równanie (8) przypuszcza jakąkolwiek wartość rzeczywistą na δ, kiedy przypisze się dla x wartości bardzo wielkie; i że ta wartość na δ zbliża się nieograniczenie do wartości d, gdy wartości na x stają się coraz większemi. Assymptota jest więc ogólnie zupełnie wyznaczoną.

Uwaga II. Powiedzieliśmy że równanie krzywej mogło było być przedstawionem przez

$$(10)\qquad y = cx + d + \varepsilon(x), \qquad \text{albo} \qquad y = cx + \delta,$$

otóż, dla otrzymania równania (7), podstawiliśmy tę wartość w równaniu (4) samejże krzywej; zdaje się więc że równanie (7) musiałoby być tożsamością. To w rzeczy samej miałoby miejsce, jeśliby wartość na d, i funkcya δ które wchodzą w wyrażenie (10) na y i odpowiadają wartości znanej c, były sameż znanemi. Lecz d i δ będąc nieznane, równanie (7) nie jest tożsamością, i ono może posłużyć, jak to było wskazanem, do wyznaczenia ilości nieznanej d, robiąc $x = \infty$, co znosi ilość nieznaną $\varepsilon(x)$.

509. *Dyskussya wartości na* d :

$$d = -\frac{\varphi_{m-1}(1, c)}{\varphi'_m(1, c)}.$$

1° $\varphi_{m-1}(1, c) = 0, \quad \varphi'_m(1, c) \gtrless 0;$

ma się wtedy jakąkolwiek assymptotę przechodzącą przez początek spółrzędnych. Kiedy równanie krzywej nie zamyka w sobie wyrazów $(m-1)^{\text{entego}}$ stopnia, wszystkie assymptoty, dla których nie znajduje się $\varphi'_m(1, c) = 0$, przechodzą przez początek spółrzędnych.

2° $\varphi_{m-1}(1, c) \gtrless 0, \quad \varphi'_m(1, c) = 0;$

nie ma assymptoty, albo lepiej assymptota znajduje się przeniesioną w nieskończoność.

Badanie tych przypadków szczególnych nie będzie mogło być wykonanem należycie jak tylko za pomocą drugiej metody.

3° $\varphi_{m-1}(1, c) = 0, \quad \varphi'_m(1, c) = 0;$

wartość rzędnej przedstawia się pod kształtem $\frac{0}{0}$. Aby otrzymać, w tym przypadku, wartości rzędnej, potrzeba powrócić do równania (7). Wprowadziwszy te założenia i pomnożywszy przez x^2, znajduje się zwiększając x nieograniczenie

$$\frac{d^2}{2}\varphi''_m(1, c) + d\varphi'_{m-1}(1, c) + \varphi_{m-2}(1, c) = 0. \tag{11}$$

Wartości na d są wtedy dane przez równanie drugiego stopnia; wszelako liczba assymptot nie jest powiększoną; gdyż dla tej wartości na c ma się razem

$$\varphi_m(1, c) = 0, \qquad \varphi'_m(1, c) = 0;$$

to jest że równanie (5), dające spółczynniki kątowe, ma dwa pierwiastki równe; assymptotami odpowiadającemi są dwie proste równoległe.

Gdyby się miało jednocześnie związki poprzedzające :

$$\varphi''_m(1, c) = 0, \qquad \varphi'_{m-1}(1, c) = 0, \qquad \varphi_{m-2}(1, c) = 0;$$

równanie (11) sprowadzałoby się do tożsamości, i wartości rzędnych zależałyby wtedy od równania trzeciego stopnia; lecz zauważymy że w tym przypadku równanie (5) ma trzy pierwiastki równe.

Uwaga I. Z tej dyskussyi wnosimy, że jeżeli m jest stopień równania (5) w c, znajduje się najwięcej m assymptot nierównoległych do osi rzędnych.

Jeśli nie ma assymptot równoległych do osi rzędnych, równanie $\varphi_m(1, c) = 0$ jest, najwięcej, stopnia m względem c.

Jeśli są assymptoty równoległe do osi rzędnych, i jeśli p jest liczbą tych assymptot, najwyższa potęga na y wchodząca w równanie krzywej jest y^{m-p} n^er^ (504); gdyż jestto spółczynnik najwyższej potęgi na y który musi dać, równając go z zerem, te p assymptot. A tem samem, równanie $\varphi_m(1, c) = 0$, które otrzymuje się równając z zerem ogół wyrazów stopnia najwięcej podniesionego i robiąc w nim $y = c$, będzie najwięcej stopnia $(m - p)$; i tem samem otrzyma się najwięcej $(m - p)$ assymptot nierównoległych do osi rzędnych, to jest że znajduje się najwięcej m assymptot całkowicie. Więc

Krzywa m^tego^ *stopnia ma najwięcej* m *assymptot, tak równoległych jak nierównoległych do osi rzędnych.*

Uwaga II. Kiedy punkt (x, y) jest punktem podwójnym krzywej, ma się $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, i spółczynnik kątowy stycznej $-\frac{f'_x}{f'_y}$ przedstawia się pod kształtem $\frac{0}{0}$. Lecz jeżeli uważy się punkt nieskończenie blizki, odpowiadający dla $(x + h)$, nowa wartość ułamku poprzedzającego przedstawi jeszcze spółczynnik kątowy stycznej w tym punkcie nieskończenie blizkim. Będzie można zastosować do tego przypadku prawidło wyznaczenia wartości granic $\frac{0}{0}$; uważając x jako zmienną i biorąc iloraz pochodnych względem x, wypadnie

$$-\frac{f''_{xx} + y'_x f''_{xy}}{f''_{yx} + y'_x f''_{yy}};$$

oznaczmy przez m wartość granicy na y'_x gdy x i y wezmą wartości odpowiadające w punkcie podwójnym, ma się

$$m = -\frac{f''_{xx} + m f''_{xy}}{f''_{xy} + m f''_{yy}} \quad \text{zkąd} \quad m^2 f''_{yy} + 2m f''_{xy} + f''_{xx} = 0;$$

jestto równanie wyznaczające spółczynniki kątowe stycznych w punkcie podwójnym n^er^ (472).

To prawidło czy da się zastosować dla wartości (9) na d n^ru^ (508), kiedy ten ułamek przedstawia się pod kształtem $\frac{0}{0}$ dla wartości na c takiej jak c_0? Nie, gdyż druga strona ułamku szukanego nie przedstawia wtedy rzędnej od początku assymptoty gdy się nada na c wartość $c_0 + h$, h będzie tak małem jak się tylko podoba, lecz różnem od zera, ponieważ równanie $\varphi_m(1, c) = 0$ nie jest więcej sprawdzonem dla $c = c_0 + h$. Tym sposobem ułamek $-\frac{\varphi_{m-1}(1, c_0 + h)}{\varphi_m(1, c_0 + h)}$ nie przedstawia więcej rzędnej od początku assymptoty; przeto kiedy podda się ten ułamek rozumowaniu znanemu aby otrzymać wartość granicy, znajdzie się wprawdzie wartość granicy, lecz nie mającej żadnego stosunku z ilością d szukaną. Rzecz jest wreszcie widoczną *a priori*; ponieważ równanie (11) n^ru^ (509) które daje wartości na d zależy od wyrazów stopnia $(m - 2)$ równania danego, i że ułamek $\frac{\varphi_{m-1}(1, c)}{\varphi'_m(1, c)}$ zupełnie niezależnym od tych wyrazów.

510. *Położenie krzywej względem assymptot.*

W krzywych algebraicznych, krzywa począwszy od pewnego punktu pozostaje zawsze z tej samej strony assymptoty.

Niech będzie Y rzędna assymptoty odpowiadająca pewnej wartości na x, i y rzędna krzywej odpowiadająca tejże samej odciętej; ma się n^er^ (500)

$$(12) \qquad y = cx + d + \varepsilon, \qquad \text{albo} \qquad y - Y = \varepsilon;$$

jeżeli ε jest dodatnem, rzędna krzywej jest większa od rzędnej assymptoty; to będzie odwrotnem, jeżeli ε jest odjemnem. Można więc wnosić ze znaku na ε o położeniu krzywej względem jej assymptoty. Otóż równanie (7) nru (508) daje :

$$\left.\begin{aligned}&(d+\varepsilon)\varphi'_m(1, c)+\varphi_{m-1}(1, c)+\frac{1}{x}\left[\frac{\delta^2}{2}\varphi''_m(1, c)+\delta\varphi'_{m-1}(1, c)+\varphi_{m-2}(1, c)\right]\\&+\frac{1}{x^2}\left[\frac{\delta^3}{1.2.3}\varphi'''_m(1, c)+\frac{\delta^2}{1.2}\varphi''_{m-1}(1, c)+\frac{\delta}{1}\varphi'_{m-2}(1, c)+\varphi_{m-3}(1, c)\right]+\frac{1}{x^3}(\ldots)+\ldots\end{aligned}\right\}=0,$$

równanie, w którem ma się

$$\delta = d+\varepsilon.$$

Biorąc pod rozwagę wartość na d nru (508), pierwsze wyrazy tej wartości sprowadzają się do $\varepsilon\varphi'_m(1, c)$; ztąd wyprowadzimy, przypuściwszy funkcyę $\varphi'_m(1, c)$ różną od zera

$$(13)\qquad \varepsilon=-\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{\delta^2}{1.2}\varphi''_m(1, c)+\delta\varphi'_{m-1}(1, c)+\varphi_{m-2}(1, c)}{\varphi'_m(1, c)}-\frac{1}{x^2}.\mathrm{H}_1-\frac{1}{x^3}.\mathrm{C}_1+\ldots$$

Druga strona jest wielomianem uporządkowanym względem potęg zmniejszających się na x; liczniki są skończone, gdyż to są funkcye całkowite na c które jest skończonem, i na δ które składa się z ilości skończonej d i z ilości ε nieograniczenie zmniejszającej się kiedy x się zwiększa. Otóż można dać dla x wartość dość wielką, tak aby, dla tej wartości i dla wszelkiej wartości większej, znak drugiej strony był tenże sam jak znak pierwszego wyrazu

$$-\frac{1}{x}\,\frac{\varphi_{m-2}(1, c)+\delta\varphi'_{m-1}(1, c)+\frac{\delta^2}{1.2}\varphi''_m(1, c)}{\varphi'_m(1, c)}.$$

W to wyrażenie wchodzi δ, które zależy od d i od nieznanej ε· lecz kiedy x zwiększa się nieograniczenie, ε dąży do zera; można więc wziąć x dość wielkiem ażeby znak licznika był tenże sam jak znak ilości niezależnej od ε; tak że znak drugiej strony (13) będzie tenże sam jak znak ułamku

$$(14)\qquad -\frac{1}{x}\cdot\frac{\varphi_{m-2}(1, c)+d.\varphi'_{m-1}(1, c)+\frac{d^2}{2}\varphi''_m(1, c)}{\varphi'_m(1, c)}$$

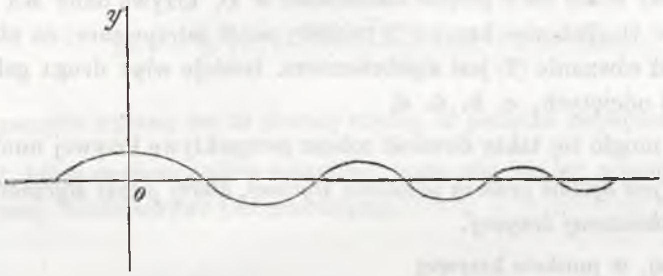
Więc, począwszy od wartości na x dostatecznie wielkiej, x zwiększając się nieograniczenie, znak na ε pozostanie zawsze tymże samym i będzie znakiem wyrażenia, to jest że :

Począwszy od punktu dostatecznie odległego, krzywa znajduje się z pewnej strony assymptoty, i pozostaje zawsze z tejże samej strony kiedy punkt oddala się nieograniczenie na gałęzi krzywej.

Uwaga. Własność którą dopiero cośmy udowodnili jest charakterystyczną dla krzywych algebraicznych, gdyż ona nie ma zawsze miejsca dla krzywych przestępnych. I tak krzywa

$$y=\frac{\operatorname{wst} x}{x},$$

ma za assymptotę oś odciętych; ona przecina tęż samą oś w liczbie nieskończonej punktów oddzielonych przez przedział stały i równy π; wysokość położeń łuków, odpowiadających tym przedziałom,



zmniejsza się coraz bardziej; widzimy że krzywa waha się około swej assymptoty, zbliżając się do niej nieograniczenie.

V° Uwagi ogólne.

511. 1° *Assymptota w krzywych algebraicznych jest zawsze assymptotą krzywej o dwóch gałęziach.*

To podanie wynika z roztrząsania wykonanego w n^rze (505); można jeszcze je dowieść w sposób następujący.

Przypuśćmy że krzywa ma jakąkolwiek assymptotę i weźmy tę assymptotę za oś odciętych, niech będzie wtedy

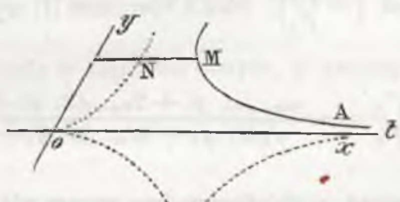
(1) $$f(x, y) = 0,$$

równanie krzywej; tak że dla $x = \infty$; ma się $y = 0$; niech będzie AM gałęź nieskończona assymptoty Ox.

Założywszy $x = \frac{1}{t}$, równanie (1) stanie się

(2) $$f\left(\frac{1}{t}, y\right) = \varphi(t, y) = 0;$$

będzie to równanie krzywej algebraicznej, przekształcenie równania danego; będziemy uważać t jako przedstawiające odcięte które będą liczone na prostej Ox.



Kiedy x zwiększa się nieograniczenie, jedna z wartości na y równania (1) dąży do zera, ma się gałęź nieskończoną MA assymptoty Ox; kiedy x zwiększa się nieograniczenie, zmienna t dąży do zera, i równanie (2) dostarczając dla x tychże samych wartości jak równanie (1) jedna wartość na y będzie dążyć wtedy do zera; otrzymamy więc, w krzywej przekształconej, gałęź NO zakończoną w początku. Przeto, jeśliby krzywa (1) miała tylko jedyną gałęź nieskończoną assymptoty prostej Ox, krzywa (2) posiadałaby jedyną gałęź przechodzącą przez początek i zatrzymującą się w tym punkcie; gdyż jeśliby krzywa NO miała dwie gałęzie zakończone w O, krzywa dana MA miałaby dwie gałęzie dotykające się osi x w O. Tak więc krzywa (2) miałaby *punkt zatrzymania;* co nie może mieć miejsca, numer (482), ponieważ równanie (2) jest algebraicznem. Istnieje więc druga gałęź nieskończona mająca za assymptotę oś odciętych, c. b. d. d.

To podanie będzie mogło się także dowieść robiąc perspektywę krzywej numer (43), etc.

512. 2° *Assymptota jest ogólnie granicą położenia stycznej, ktorej punkt styczności oddala się nieograniczenie na gałęzi nieskończonej krzywej.*

Równaniem stycznej, w punkcie krzywej

$$f(x, y) = \varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + z^2\varphi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0, \tag{1}$$

jest, oznaczywszy przez X, Y, spółrzędne bieżące:

$$Xf'_x + Yf'_y + f'_z = 0, \tag{2}$$

z warunkiem

$$f(x, y) = 0, \qquad \text{albo} \qquad xf'_x + yf'_y + f'_z = 0. \tag{3}$$

Spółczynnikiem kątowym stycznej jest $\left(-\frac{f'_x}{f'_y}\right)$; wyciąga się ze związku (3)

$$-\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{y}{x} + \left(\frac{f'_z}{f'_y}\right) \cdot \frac{1}{x};$$

otóż, jeżeli zwiększa się χ nieograniczenie, i jeżeli się przypuści że stosunek $\left(-\frac{f'_z}{f'_y}\right)$ pozostaje skończonym, wypadnie

$$\text{gr.}\left(-\frac{f'_x}{f'_y}\right) = \text{gr.}\frac{y}{x} = c; \tag{4}$$

to jest że *spółczynnik kątowy stycznej ma za granicę spółczynnik kątowy assymptoty; styczna jest więc równoległą do assymptoty.*

Rzędna od początku stycznej jest $\left(-\frac{f'_z}{f'_y}\right)$; otóż z równania (1) wyciągnie się (zrobiwszy $z = 1$ po zróżniczkowaniu)

$$-\frac{-f'_z}{f'_y} = -\frac{\varphi_{m-1}(x, y) + 2\varphi_{m-2}(x, y) + \ldots}{\varphi'_m(x, y) + y\varphi'_{m-1}(x, y) + \ldots},$$

wyrażenie, mogące się jeszcze napisać, podzieliwszy dwa wyrazy ułamku przez x^{m-1}:

$$-\frac{f'_z}{f'_y} = -\frac{\varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{2}{x}\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{3}{x^2}\varphi_{m-3}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots}{y\varphi'_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}y\varphi'_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}y\varphi''_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

Teraz jeżeli zwiększa się x nieograniczenie, ponieważ gr.$\frac{y}{x} = c$; według tego jak było dowiedzionem, wypada

$$(5) \qquad \text{gr.}\left(-\frac{f'_x}{f'_y}\right) = -\frac{\varphi_{m-1}(1, c)}{\varphi'_m(1, c)} = d, \qquad \text{n}^{\text{r}}\ (508)$$

to jest *że rzędna od początku stycznej ma za granicę rzędną od początku assymptoty.*

Uwaga. Własność, którą dopiero cośmy sprawdzili może nie istnieć więcej nawet dla assymptot w odległości skończonej, kiedy krzywa jest przestępną.

I tak krzywa

$$(1°) \qquad y = \frac{\text{wst}\,x}{x}, \qquad (2°) \quad y = \frac{\text{wst}\,x^2}{x},$$

mają za assymptotę oś odciętych.

Dla pierwszej spółczynnikiem kątowym stycznej jest:

$$y'_x = \frac{x\,\text{dos}\,x - \text{wst}\,x}{x^2} = \frac{\text{dos}\,x}{x} - \frac{\text{wst}\,x}{x^2};$$

jej wartość jest zerem dla $x = \infty$, znajduje się wprawdzie kierunek assymptoty.

Lecz rzędna od początku stycznej, to jest

$$y - xy'_x, \qquad \text{albo} \qquad \left(\frac{\text{wst}\,x}{x} - \frac{x\,\text{dos}\,x - \text{wst}\,x}{x}\right) \qquad \text{albo} \qquad \left(2\,\frac{\text{wst}\,x}{x} - \text{dos}\,x\right),$$

jest nieoznaczoną dla $x = \infty$, gdyż dost ∞ jest ilością nieoznaczoną.

Dla drugiej krzywej, spółczynnikiem kątowym stycznej jest

$$y'_x = \frac{2x^2\text{dos}\,x^2 - \text{wst}\,x^2}{x^2} = 2\,\text{dos}\,x^2 - \frac{\text{wst}\,x^2}{x^2},$$

ilość która pozostaje nieoznaczoną kiedy przypuści się $x = \infty$.

Będzie mogło się sprawdzić w drugim przypadku, że ilość $-\frac{f'_x}{f'_y}$ jest nieskończona dla $x = \infty$.

513. *Znaleźć równanie ogólne krzywych rzędu* m, *mających* p *assymptot równoległych w kierunku danym.*

Weźmy oś rzędnych równoległą w kierunku danym, p assymptot będą miały na równanie

$$x - a_1 = 0, \qquad x - a_2 = 0, \ldots, \qquad x - a_p = 0.$$

Założmy

$$(1) \qquad \varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_p).$$

Ponieważ jest p assymptot równoległych do osi rzędnych, najwyższą potęgą na y która powinna wchodzić w równanie krzywej jest $(m - p)$; równanie krzywej będzie więc kształtu

$$A_p y^{m-p} + A_{p+1} y^{m-p-1} + \ldots + A_{m-1} y + A_m = 0;$$

i ponieważ assymptoty równoległe do osi rzędnych otrzymują się równając z zerem spółczynnik na y^{m-p},

$$A_p = \varphi(x),$$

gdyż A_p jest p^{entego} stopnia. Równaniem szukanem jest więc

$$(2) \qquad \varphi(x)y^{m-p} + A_{p+1}y^{m-p-1} + \ldots + A_{m-1}y + A_m = 0;$$

$A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots, A_\varphi$ są funkcyami całkowitemi na x i dowolnemi, stopni względnych $(p+1), (p+2) \ldots m$.

Wynika ztąd że liczbą spółczynników dowolnych zawartych w równaniu (2) jest

$$(p+2) + (p+3) + \ldots + (m+1), \quad \text{albo} \quad \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(p+1)(p+2)}{2}\right].$$

Jeżeli przypuści się $p = m - 1$, równanie szukane jest wtedy

$$(3) \qquad (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{m-1}).y + A_m = 0,$$

równanie kształtu

$$(3 \textit{ bis}) \qquad y = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

wielomian $\psi(x)$ jest stopnia m, wielomian $\varphi(x)$ jest stopnia $(m-1)$.

Uwaga. Jeżeliby się żądało żeby było m assymptot równoległych, równanie krzywej sprowadzałoby się do

$$(4) \qquad (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m) = 0,$$

to jest że krzywa składałaby się z m prostych równoległych.

Tak więc : *Krzywa algebraiczna rzędu* m *nie może mieć* m *assymptot równoległych chyba gdyby ona składała się z* m *prostych równoległych.*

To jest przypadek szczególny następującego podania :

Krzywa algebraiczna rzędu m *nie może mieć punktu wielokrotnego rzędu* m, *w odległości skończonej, chyba gdyby ona składała się z* m *prostych zbiegających się z sobą.*

W rzeczy samej, równanie krzywej będąc położone pod kształtem

$$(5) \qquad \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0 = 0,$$

wybierzmy punkt wielokrotny za początek; jakakolwiek prosta, przechodząca przez ten punkt

$$y = \lambda x,$$

musi spotykać krzywą w m punktach zbiegających się z sobą, to jest że pierwsza strona równania (5) kiedy się w niej uczyni $y = \lambda x$, powinna być podzielną przez x^m, jakiemkolwiek bądź jest λ; otóż to wymaga aby funkcye $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{m-1}$ były tożsamościowo zerami; równanie krzywej sprowadzi się wtedy do

$$\varphi_m(x, y) = 0,$$

równanie przedstawiające m prostych przechodzących przez początek.

Zobaczymy poniżej że, jeżeli krzywa ma m assymptot równoległych, ta krzywa posiada w nieskończoności punkt wielokrotny rzędu m; podanie wysłowione poprzednio jest więc przypadkiem szczególnym podania którego dopiero cośmy dowiedli.

514. *Równanie ogólne krzywych* m^tego *rzędu mających* m *assymptot danych nierównoległych.*

Niech będą

$$(1) \qquad y - a_1x - b_1 = 0, \qquad y - a_2x - b_2 = 0, \ldots \quad y - a_mx - b_m = 0,$$

równaniami m prostych danych, równanie ogólne krzywych m^{tego} rzędu, mających za assymptoty te m prostych, będzie

$$(2) \qquad (y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2)\ldots(y - a_m x - b_m) + \varphi(x, y) = 0,$$

$\varphi(x, y)$ będąc funkcyą stopnia $(m - 2)$ w x i y, której spółczynniki są zupełnie dowolne.

Sprawdźmy naprzód że krzywa przedstawiona przez to równanie, ma za assymptoty m prostych danych.

Wiadomo że spółczynniki kątowe assymptot krzywej są dane n^er (507) przez równanie

$$\varphi_m(1, c) = 0;$$

tu ogółem wyrazów stopnia m jest

$$(y - a_1x)(y - a_2x)\ldots(y - a_mx);$$

spółczynniki kątowe assymptot będą więc danemi przez równanie

$$(3) \qquad (c - a_1)(c - a_2)\ldots(c - a_m) = 0;$$

przeto assymptoty będą równoległe do prostych danych.

Dla otrzymania rzędnej od początku przypomnijmy sobie wzór n^ru (508)

$$d = -\frac{\varphi_{m-1}(1, c)}{\varphi'_m(1, c)},$$

który staje się w przypadku obecnym

$$d = -\frac{-b_1(c - a_2)\ldots(c - a_m) - b_2(c - a_1)(c - a_3)\ldots(c - a_m) - \ldots}{(c - a_2)(c - a_3)\ldots(c - a_m) + (c - a_1)(c - a_3)\ldots(c - a_m) + \ldots}$$

Dla kierunku $c = a_1$, znajduje się $d = b_1$; więc prosta

$$y - a_1x - b_1 = 0;$$

jest istotnie assymptotą krzywej. Toż samo dowodzenie stosuje się do $(m - 1)$ innych prostych.

Można jeszcze dowieść tego podania wychodząc z określenia samychże assymptot. Niech będzie odległość jakiegokolwiek punktu (x, y) krzywej od prostej, na przykład,

$$y - a_1 x - b_1 = 0;$$

sprawdźmy że ta prosta dąży do zera kiedy punkt (x, y) oddala się do nieskończoności w kierunku prostej, to jest kiedy ma się

$$\text{gr.}\frac{y}{x} = a_1.$$

Podług wzoru znanego, wiadomo że

$$\delta = \frac{y - a_1 x - b_1}{\sqrt{1 + a_1^2}}, \quad \text{zkąd} \quad y - a_1 x - b_1 = \delta\sqrt{a_1^2 + 1}.$$

Lecz x, y, będąc spółrzędnemi punktu krzywej, musi się mieć, podstawiając tę wartości w równaniu (2)

$$\delta\sqrt{a_1^2 + 1}\,.(y - a_2 x - b_2)\ldots(y - a_m x - b_m) + \varphi(x, y) = 0;$$

zkąd wyciąga się rozwiązując względem δ i podzieliwszy dwa wyrazy ułamku przez x^{m-1}:

$$\delta = -\frac{\frac{1}{x^{m-1}}.\varphi(x, y)}{\sqrt{a_1^2 + 1}\left(\frac{y}{x} - a_2 - \frac{b_2}{x}\right)\left(\frac{y}{x} - a_3 - \frac{b_3}{x}\right)\ldots\left(\frac{y}{x} - a_m - \frac{b_m}{x}\right)}.$$

Otóż jeżeli przypuścimy że punkt oddala się do nieskończoności na krzywej, tak że $\text{gr.}\frac{y}{x} = a_1$, mianownik jest w granicy skończonym; licznik ma za granicę zero, gdyż funkcya $\varphi(x, y)$ jest stopnia $(m - 2)$ najwięcej.

Nakoniec, możemy dojść zarówno do tegoż samego wypadku, dowodząc że proste dane są stycznemi do krzywej w punktach, w których ta krzywa jest spotkaną przez proste w nieskończoności. W rzeczy samej, zrobiwszy równanie jednorodnem, wypadnie

$$(4) \qquad (y - a_1 x - b_1 z)(y - a_2 x - b_2 z)\ldots(y - a_m x - b_m z) + z^2\varphi(x, y, z) = 0.$$

Otóż, jeżeli się odszuka przecięcia krzywej z prostą

$$y - a_1 x - b_1 z = 0,$$

na przykład, znajduje się

$$z^2\varphi(x, y, z) = 0;$$

równanie którego pierwsza strona jest podzielną przez z^2; prosta szukana dotyka się więc krzywej w nieskończoności; ona jest tem samem assymptotą.

Pozostaje nam teraz dowieść że *równanie* (2) *jest równaniem najogólniejszem krzywych* m^{tego} *rzędu, mających za assymptoty* m *prostych danych*. W tym celu, zauważymy że dać sobie jakąkolwiek assymptotę, wychodzi na jedno co uzasadnić dwa związki między spółczynnikami równania krzywej; w rzeczy samej, assymptota będąc styczną do krzywej w punkcie uważanym w nieskończoności, wyrazi się że jakakolwiek prosta jest assymptotą, szukając jej przecięcia z krzywą, i pisząc że równanie otrzymane ma dwa pierwiastki nieskończone; co prowadzi do dwóch związków między spółczynnikami. Więc, ponieważ daje się m assymptot, ma się przez to samo $2m$ warunków. Lecz równanie krzywej stopnia m zawiera w sobie n^er^ (36)

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} \text{ wyrazów, albo } \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1\right] \text{ spółczynników dowolnych,}$$

to jest że krzywa jest wyznaczoną przez $\left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1\right]$ warunków prostych.

Otóż krzywa będąc już podległą posiadaniu m assymptot danych, dość jest aby ją wyznaczyć zupełnie, dać sobie

$$\left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1-2m\right] \text{ albo } \frac{(m-1)m}{2}$$

punktów; przeto jej równanie nie będzie więcej zawierać w sobie jak $\frac{(m-1)m}{2}$ parametrów zupełnie dowolnych. Otóż funkcya $\varphi(x, y)$, stopnia $(m-2)$, zawiera w sobie dokładnie tę liczbę wyrazów; a ponieważ pierwsza strona równania (2) była podzieloną przez spółczynnik y^m, spółczynniki wszystkich wyrazów na $\varphi(x, y)$ pozostają dowolne; równanie (2) zamyka w sobie tym sposobem $\frac{(m-1)m}{2}$ stałych dowolnych.

Zastosowanie.

Równanie najogólniejsze krzywych drugiego rzędu mających za assymptoty dwie proste

$$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ A_1x+B_1y+C_1=0; \end{cases}$$

jest

(5) $$(Ax+By+C)(A_1x+B_1y+C_1)=k$$

k będąc stałą dowolną.

§ II. — BADANIE PUNKTÓW W NIESKOŃCZONONOŚCI. (2^ga^ Metoda.)

I° Wyznaczenie ogólne. — Kierunki assymptotyczne.

515. Patrz w n^er^ (42), (43), (44), (45), (46) rozwinięć danych o pojęciu prostej w nieskończoności.

Połóżmy równanie krzywej pod kształtem następującym

(1) $$\varphi_m(x, y)+z\varphi_{m-1}(x, y)+z^2\varphi_{m-2}(x, y)+\ldots+z_m\varphi_0=0,$$

w którem φ_i przedstawia funkcyą jednorodną i stopnia i względem zmiennych x i y.

Punkta w których ta krzywa jest spotkana przez prostą w nieskończoności $(z=0)$ są danemi p zez równania

(2) $$\begin{cases} z=0, \\ \varphi_m(x, y)=0. \end{cases}$$

Niech będzie

(3) $$\varphi_m(x, y) = (y - \mathrm{a}x)(y - \mathrm{a}_1 x)\ldots(y - \mathrm{a}_{m-1}x);$$

otrzymamy tym sposobem m punktów położonych na prostej w nieskończoności i wyznaczonych przez m prostych, które dostarczy drugie z równań (2). Nazwiemy kierunkami assymptotycznymi m prostych przechodzących przez początek i danych przez równanie

(3 *bis*) $$\varphi_m(x, y) = (y - \mathrm{a}x)(y - \mathrm{a}_1 x)\ldots(y - \mathrm{a}_{m-1}x) = 0.$$

Kierunki assymptotyczne są więc proste łączące punkt płaszczyzny z punktami w których krzywa jest spotkaną przez prostą w nieskończoności.

516. Uważmy jeden z punktów w nieskończoności, punkt

$$i\begin{cases} z = 0, \\ y - \mathrm{a}x = 0, \end{cases}$$

i szukajmy stycznej w punkcie i, to jest assymptoty odpowiadającej temu punktowi. W tym celu weźmy jakąkolwiek prostą przechodzącą przez punkt i,

(4) $$y - \mathrm{a}x = \lambda z;$$

i wyznaczmy przecięcia tej prostej z krzywą. Podstawienie wartości (4) na y, w równaniu (i) daje rozwinąwszy podług wzoru Taylor'a:

$$\left.\begin{aligned} & x^m\varphi_m(1, \mathrm{a}) + x^{m-1}z[\lambda\varphi'_m(1, \mathrm{a}) + \varphi_{m-1}(1, \mathrm{a})] \\ & + x^{m-2}z^2\left[\frac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_m(1, \mathrm{a}) + \frac{\lambda}{1}\varphi'_{m-1}(1, \mathrm{a}) + \varphi_{m-2}(1, \mathrm{a})\right] \\ & + x^{m-3}z^3\left[\frac{\lambda^3}{1.2.3}\varphi'''_m(1, \mathrm{a}) + \frac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_{m-1}(1, \mathrm{a}) + \frac{\lambda}{1}\varphi'_{m-2}(1, \mathrm{a}) + \varphi_{m-3}(1, \mathrm{a})\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} = 0;$$

znakowanie $\varphi^p_i(1, \mathrm{a})$ wskazuje że wzięło się pochodną $p^{\text{tą}}$, względem y, funkcyi $\varphi_i(x, y)$, i że w tej pochodnej zastąpiło się x przez 1, i y przez a.

Ponieważ wyraz $\varphi_m(1, \mathrm{a})$ jest zerem, wnosimy z równania (5) że

Jakakolwiek prosta, równoległa w kierunku assymptotycznym, spotyka krzywą w jednym punkcie odniesionym do nieskończoności i w (m — 1) *innych punktach znajdujących się ogólnie w odległości skończonej.*

II° Punkta proste w nieskończoności.

516 *bis*. Przypuśćmy że punkt i w nieskończoności, jest punktem prostym, to jest że funkcye

$$\varphi'_m(x, y), \qquad \varphi_{m-1}(x, y)$$

nie znoszą się dla $x = 1$, $y = \mathrm{a}$, albo co wychodzi na jedno, nie przypuszczają czynnika $(y - \mathrm{a}x)$; zobaczymy poniżej że jeżeli to ma miejsce, punkt i jest punktem wielokrotnym.

Aby otrzymać styczną w i, wyrazimy że prosta (4) spotyka krzywą w dwóch punktach zlanych z punktem i, to jest że wyznaczymy λ przez warunek aby pierwsza strona równania (3) była podzielną przez z^2. Otóż $\varphi_m(1, a)$ jest zerem, pierwsza strona równania (5) będzie więc podzielną przez z^2, albo prosta (4) będzie assymptotą, jeżeli weźmiemy za λ wartość

$$\lambda = -\frac{\varphi_{m-1}(1, a)}{\varphi'_m(1, a)}. \tag{6}$$

Assymptoty są równoległe w kierunkach assymptotycznych; może się zdarzyć że assymptota znajduje się przeniesioną w nieskończoność, lecz będąc zawsze równoległą w kierunku assymptotycznym odpowiadającym.

517. Dyskussya wartości na λ.

1° $\varphi_{m-1}(1, a) = 0, \quad \varphi'_m(1, a) \gtrless 0;$

wtedy $\lambda = 0$, to jest że assymptota zbiega się z prostą $(y - ax) = 0$; w tym przypadku równanie krzywej przedstawia się pod kształtem

$$(y - ax)u_{m-1} + (y - ax)u_{m-2}z + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \ldots = 0,$$

u_i oznaczając, jak φ_i, funkcye jednorodne i stopnia i względem zmiennych x i y.

2° $\varphi'_m(1, a) = 0, \quad \varphi_{m-1}(1, a) \gtrless 0;$

wtedy $\lambda = \infty$; to jest że assymptota znajduje się przeniesiona w nieskończoność równolegle do kierunku assymptotycznego odpowiadającego, gdyż równanie (4) daje $z = 0$. W tym przypadku równanie krzywej jest kształtu

$$(y - ax)^2u_{m-2} + z\varphi_{m-1} + z^2\varphi_{m-2} + \ldots = 0.$$

Parabola przedstawia przykład tego przypadku szczególnego.

Jeśliby dwa wyrazy wartości na λ były zerami razem, miałoby się punkt podwójny, jak to sprawdzimy zaraz.

518. Uwagi.

I. Może się zdarzyć że za wartość odpowiadającą na λ, spółczynnik na z^2 [równanie (5)] znosi się, punkt w nieskończoności byłby wtedy punktem przegięcia. Nie jest to w rzeczy samej punkt podwójny, gdyż jakakolwiek prosta, przechodząca przez punkt i, nie spotyka krzywej w dwóch punktach zbiegających się z sobą, ponieważ przypuszcza się że $\varphi'_m(1, a)$ i $\varphi_{m-1}(1, a)$ nie są zerami razem.

Styczność assymptoty, przypuściwszy zawsze punkt pojedyńczym, byłaby (p^{entego} rzędu), jeśliby wartości na a i λ znosiły jednocześnie spółczynniki na $z, z^2, z^3, \ldots z^{p-1}, z^p$; gdyż pierwsza strona równania (5) byłaby wtedy podzielną przez z^{p+1}.

II. Kiedy równanie krzywej przedstawia się pod kształtem

$$(y - ax)^p u_{m-p} + z\varphi_{m-1} + z^2\varphi_{m-2} + \ldots = 0, \tag{7}$$

$\varphi_{m-1}(x, y)$ nie przypuszczając czynnika $(y - ax)$; prosta w nieskończoności ma styczność $(p-1)^{\text{entego}}$ rzędu w punkcie do nieskończoności

$$i \begin{cases} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{cases}$$

W rzeczy samej, jeśli z równania (4) wyciągniemy wartość na y dla podstawienia jej w równaniu (7), wypadnie

$$(8) \qquad \lambda^p z^p u_{m-p}(x,\ \mathrm{a}x+\lambda z)+zx^{m-1}\varphi_{m-1}(1,\ \mathrm{a})+z^2x^{m-2}[\lambda\varphi''_{m-1}(1,\ \mathrm{a})+\varphi_{m-2}(1,\ \mathrm{a})]+\ldots=0.$$

Widzimy naprzód że punkt i nie jest punktem wielokrotnym, gdyż jakakolwiek prosta, przechodząca przez ten punkt, spotyka krzywą tylko w jednym punkcie, ponieważ $\varphi_{m-1}(1,\ \mathrm{a})$ nie jest zerem według naszego założenia.

Powtóre, prosta (4) nie może być styczną, to jest że wyraz w z [równanie (8)] nie może znieść się chyba gdyby λ było nieskończonem; więc assymptota znajduje się przeniesioną w nieskończoność równolegle do kierunku assymptotycznego $y-\mathrm{a}x=0$.

Nakoniec, ta prosta w nieskończoności ma z krzywą w punkcie i styczność $(p-1)^{\text{szego}}$ rzędu; gdyż jeżeli w równaniu (7) zrobi się $z=0$, znajduje się

$$(y-\mathrm{a}x)^p u_{m-p}=0;$$

ta prosta spotyka więc krzywą w p punktach zlanych z punktem i.

N. B. To badanie wykona się prędzej i jaśniej, założywszy

$$(4\ bis) \qquad z=\mu(y-\mathrm{a}x),$$

i zastąpiwszy, w równaniu (7), z przez tę wartość, wypadnie wtedy

$$(8\ bis) \qquad (y-\mathrm{a}x)^p u_{m-p}+\mu(y-\mathrm{a}x)\varphi_{m-1}+\mu^2(y-\mathrm{a}x)^2\varphi_{m-2}+\ldots=0.$$

To równanie przedstawia proste przechodzące przez początek i przez punkta w których prosta (4) spotyka krzywą daną.

Jeżeli chcemy wyrazić że prosta (4 *bis*) jest styczną, potrzeba aby pierwsza strona równania (8 *bis*) przypuszczała jako czynnik $(y-\mathrm{a}x)^2$ w potędze wyższej; co wymaga żeby było $\mu=0$ zkąd $z=0$; i pierwsza strona jest, w tym przypadku, podzielną przez $(y-\mathrm{a}x)^p$.

Szczególnie, jeżeli równanie krzywej jest kształtu

$$(y-\mathrm{a}x)^3u_{m-3}+z^2\varphi_{m-2}+z\varphi_{m-2}+\ldots=0,$$

punkt w nieskończoności $(z=0,\ y-\mathrm{a}x=0)$ będzie punktem przegięcia, mającym za styczną prostą w nieskończoności równoległą w kierunku assymptotycznym.

Jeśli równanie krzywej jest kształtu

$$(y-\mathrm{a}x)^2(y-\mathrm{a}_1x)^2(y-\mathrm{a}_2x)^2u_{m-6}+z\varphi_{m-1}+z^2\varphi_{m-2}+\ldots=0,$$

$\varphi_{m-1}(x,\ y)$ nie zawierając w sobie żadnego z czynników dwumianów wchodzących do kwadratu w funkcyi $\varphi_m(x,\ y)$; prosta w nieskończoności będzie *styczną potrójną*.

III. Kiedy spółczynniki kątowe dwóch kierunków assymptotycznych są $\pm\sqrt{-1}$, równanie krzywej jest kształtu

$$(x^2+y^2)u_{m-2}+z\varphi_{m-1}+z^2\varphi_{m-2}+\ldots=0;$$

krzywa przechodzi przez *punkta kołowe w nieskończoności*.

IV. Sposób poszukiwania który dopiero cośmy wyłożyli jest zupełnie niezależny od kształtu szczególnego $(y - ax)$ który był wybranym dla sprawdzenia kierunku assymptotycznego. Kiedy kierunek assymptotyczny jest osią odciętych albo osią rzędnych, prosta przechodząca przez punkt odpowiadający w nieskończoności otrzyma na równanie $y - \lambda z = 0$, albo $x - \lambda z = 0$, i rachunek wskazany w numerach (515) staje się wtedy daleko prostszym.

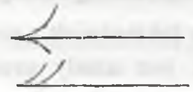
Punkta podwójne w nieskończoności.

519. Przypomnijmy naprzód sobie klassyfikacyą punktów podwójnych. W punkcie podwójnym jest dwie styczne; i trzy przypadki mogą się przedstawić:

1° Dwie styczne są rzeczywiste, *punkt podwójny zwyczajny*,

2° Dwie styczne są urojone, *punkt podwójny odosobniony*.

3° Dwie styczne zlewają się:
- I. Punkt zwrotu: 1^{go} rodzaju; 2^{go} rodzaju
- II. Punkt zwrotu odosobniony,
- III. Styczność dwóch gałęzi krzywej;



w zwrocie 2^{go} rodzaju i w styczności dwóch gałęzi, styczna ma styczność rzędu wyższego jak w zwrocie 1^{go} rodzaju, numer (479).

Uważmy zawsze kierunek assymptotyczny $y - ax = 0$, i punkt i w nieskończoności odpowiadający

$$i \begin{cases} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{cases}$$

Przypuśćmy żeby było [równanie (5)]

$$\varphi_m(1, a) = 0,$$
$$\varphi'_m(1, a) = 0,$$
$$\varphi_{m-1}(1, a) = 0,$$

to jest żeby równanie krzywej przedstawiało się pod kształtem

$$(9) \qquad (y - ax)^2 u_{m-2} + z(y - ax)v_{m-2} + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \ldots = 0;$$

wartość (6) na λ jest wtedy nieoznaczoną.

Jakakolwiek prosta przechodząca przez punkt i, to jest

$$y - ax = \lambda z,$$

spotyka krzywą w dwóch punktach zbiegających się z sobą, gdyż pierwsza strona równania (9) jest podzielną przez z^2 jakimkolwiek bądź jest λ; punkt i jest więc *punktem podwójnym*.

Dwie styczne właściwie nazwane w tym punkcie podwójnym otrzymają się wyznaczając λ w sposób taki, aby pierwsza strona równania była podzielną przez z^3.

Według równania (5) otrzymamy, dla wyznaczenia λ, równanie

$$(10) \qquad \frac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_m(1, a) + \frac{\lambda}{1}\varphi'_{m-1}(1, a) + \varphi_{m-2}(1, a) = 0.$$

Ma się tym sposobem dwie wartości dla λ; dwie styczne w punkcie podwójnym w nieskończoności są więc dwiema assymptotami równoległemi, co jest widocznem *a priori*.

520. Dyskussya równania (10).

1° Dwa pierwiastki równania (10) są rzeczywiste i nierówne, ma się punkt podwójny w nieskończoności, którego dwie styczne są dwiema assymptotami równoległemi do prostej $y - ax = 0$.

2° Dwa pierwiastki są urojone; ma się punkt podwójny odosobniony w nieskończoności.

3° Dwa pierwiastki są równe: ma się w nieskończoności punkt zwrotu właściwie nazwany albo punkt zwrotu odosobniony, według tego jak gałęzie krzywej odpowiadające temu kierunkowi assymptotycznemu są rzeczywiste albo urojone.

4° Jakikolwiek z pierwiastków jest nieskończonym: jakakolwiek ze stycznych w punkcie podwójnym jest wtedy prostą w nieskończoności równoległą w kierunku assymptotycznym. Równanie krzywej jest kształtu

$$(y - ax)^3 u_{m-3} + z(y - ax)u_{m-2} + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \ldots = 0.$$

5° Dwa pierwiastki są nieskończone: dwie styczne w punkcie podwójnym zlewają się z prostą w nieskończoności, ma się zwrot w nieskończoności i styczna zwrotu jest prostą w nieskończoności równoległą w kierunku assymptotycznym. Równanie krzywej jest kształtu

$$(y - ax)^3 u_{m-3} + z(y - ax)^2\varphi_{m-3} + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \ldots = 0.$$

6° Kiedy spółczynnik kątowy a ma wartość szczególną $\sqrt{-1}$, równanie krzywej, jeżeli przypuszcza się jej spółczynniki rzeczywiste, przedstawi się wtedy pod kształtem [według równania (9)]

$$(x^2 + y^2)^2 u_{m-4} + z(x^2 + y^2)u_{m-3} + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \ldots = 0,$$

te dwa punkta kołowe w nieskończoności są dwoma punktami podwójnymi krzywej. Te punkta są wprawdzie urojone i nie zdarzą się w przedstawieniu rzeczywistem krzywej. Lecz one mają na klassę krzywej tenże sam wpływ jak punkta podwójne rzeczywiste; i należy wykonać poszukiwanie punktów wielokrotnych urojonych tak jak punktów rzeczywistych, jeżeli żąda się poznać wszystkie powody zmniejszenia klassy w krzywej danej.

Uwaga. Styczne właściwie nazwane mogą, jak w przypadku punktów prostych, posiadać z krzywą styczność jakiegokolwiek rzędu wyższego jak pierwszy.

IV° Punkta wielokrotne w nieskończoności.

521. Niech będzie kierunek assymptotyczny $(y - ax = 0)$; równaniem jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez odpowiadający punkt i w nieskończoności, będzie

$$y - ax = \lambda z.$$

Jeżeli zastąpiwszy y przez wartość którą dostarcza to równanie pierwsza strona równania krzywej jest podzielną przez z^p, jakiemkolwiek bądź jest λ, punkt i będzie punktem wielokrotnym rzędu p, gdyż jakakolwiek prosta spotyka tam krzywą w p punktach zlanych z punktem i.

Aby otrzymać styczne właściwie nazwane w tym punkcie, dość wyznaczyć λ w sposób taki, aby pierwsza strona równania była podzielną przez z^{p+1}, otrzyma się tym sposobem p assymptot równoległych w kierunku assymptotycznym uważanym. Wartości na x będą dane przez równanie otrzymane, równając z zerem spółczynnik z^p [równanie (5)].

Dyskussya przedstawi rozmaitości tegoż samego rodzaju jak te które dopiero cośmy spotkali w punktach podwójnych; nie ma tam żadnej trudności teoretycznej.

Zakończymy rozbiorem różnych szczególności mogących się przedstawić kiedy wiele kierunków assymptotycznych zbiegną się razem.

522. Niech będzie na przykład

$$\varphi_m(x, y) = (y - ax)^p u_{m-p};$$

szukajmy szczególności które będzie się mogło spotkać w punkcie uważanym w nieskończoności :

$$\begin{cases} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{cases}$$

1szy Przypadek. Równanie krzywej jest kształtu

$$\text{(I)} \qquad (y - ax)^p u_{m-p} + z\varphi_{m-1} + z^2\varphi_{m-1} + z^3\varphi_{m-3} + \ldots = 0,$$

φ_{m-1} nie przypuszcza czynnika $y - ax$.

Punkt i jest wtedy punktem prostym, assymptotą jest prosta w nieskończoności ktora ma z krzywą styczność $(p-1)$szego rzędu. Ten przypadek był już roztrząśniętym, *Uwaga* II numer (518).

2gi Przypadek. Równanie krzywej jest kształtu

$$\text{II)} \qquad \left.\begin{aligned} &(y - ax)^p u_{m-p} + z(y - ax)^{p-1} v_{m-p} + z^2 (y - ax)^{p-2} w_{m-p} + \ldots + z^{p-1}(y - ax) t_{m-p} \\ &+ z^p \varphi_{m-p} + z^{p+1}\varphi_{m-p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z^{m-1}\varphi_0 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Punkt i jest wtedy punktem wielokrotnym rzędu p, gdyż jakakolwiek prosta, przechodząca przez punkt i, spotyka tam krzywą w p punktach zbiegających się z sobą.

3ci Przypadek. Stopień jakiegokolwiek z wyrazów poprzedzających z^p jest względem z i $(y - ax)$ razem, niższym od p.

Tym sposobem równanie byłoby kształtu

$$\text{(III)} \qquad (y - ax)^p u_{m-p} + \ldots + z^k (y - ax)^{p-k-i} u_{m-p+i} + \ldots + z^p \varphi_{m-p} + z^{p+1}\varphi_{m-p-1} + \ldots = 0,$$

stopień wyrazów które poprzedzają z^k będąc względem z i $(y - ax)$ razem przynajmniej równym p.

W tym przypadku punkt $(z = 0,\ y - ax = 0)$ jest punktem wielokrotnym rzędu $(p - 1)$, gdyż jakakolwiek prosta przechodząca przez ten punkt spotyka krzywą w $(p - 1)$ punktach zbiegających się jakiemkolwiek bądź jest λ.

Nadto prosta w nieskończoności dotyka się krzywej w punkcie i; gdyż szukając przecięcia krzywej z prostą w nieskończoności $z=0$, znajduje się

$$(y-\mathrm{a}x)^p u_{m-p}=0;$$

więc ta prosta spotyka krzywą w p punktach zlanych z punktem i. Otóż prosta przechodząca przez punkt wielokrotny rzędu $(p-i)$, otrzyma z krzywą styczność 1go, 2go, 3go .... rzędu, według tego jak ona spotyka krzywą w $p-i+1$, $p-i+2$, $p-i+3$, ... punktach. Lecz prosta o którą idzie spotyka krzywą w $(p-i)+i$ punktach; wypada ztąd że ona ma z gałęzią do której jest styczną właściwie nazwaną, styczność rzędu i. Więc *prosta w nieskończoności ma z krzywą styczność rzędu* i.

4ty Przypadek. Równanie krzywej jest kształtu

$$\text{(IV)}\qquad (y-\mathrm{a}x)^p u_{m-p}+z^p\varphi_{m-p}+z^{p+1}\varphi_{m-p-1}+\ldots=0,$$

to jest równanie nie zawiera w sobie żadnej z potęg na z niższych od p.

Punkt i jest jeszcze punktem wielokrotnym rzędu p; p stycznych w tym punkcie będą danemi przez równanie

$$\lambda^p u_{m-p}(1,\,\mathrm{a})+\varphi_{m-p}(1,\,\mathrm{a})=0.$$

To równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty jeżeli p jest nieparzystem; i ono nie ma jak dwa pierwiastki rzeczywiste, albo żadnego pierwiastku rzeczywistego jeżeli p jest parzystem; więc przez punkt i $(z=0,\ y-\mathrm{a}x=0)$ może nie przechodzić żadna gałęź rzeczywista krzywej, może przezeń nie przechodzić jak tylko jedna; może przezeń przechodzić dwie rzeczywiste najwięcej.

Należy tu zauważyć, że assymptoty odpowiadające innym punktom w nieskończoności, zbiegają się z kierunkami assymptotycznymi i mają z krzywą styczność $(p-1)$entego rzędu.

Niech będzie w rzeczy samej

$$u_{m-p}=(y-\mathrm{a}_1x)u_{m-p-1}$$

szukajmy przecięcia z krzywą prostej

$$y-\mathrm{a}_1x=\lambda z$$

przechodzącej przez punkt i w nieskończoności $(z=0,\ y-\mathrm{a}_1x=0)$.

Ma się według równania (IV)

$$\left.\begin{array}{r}[(\mathrm{a}_1-\mathrm{a})x+\lambda z]^p\lambda z[u_{m-p-1}(1,\,\mathrm{a}_1)x^{m-p-1}+zx^{m-p-1}u'_{m-p-1}(1,\,\mathrm{a})+\ldots]\\ +z^p\varphi_{m-p}(x,\,\mathrm{a}_1x+\lambda z)+z^{p+1}\varphi_{m-p-1}(x,\,\mathrm{a}_1x+\lambda z)+\ldots\end{array}\right\}=0.$$

Wiemy że aby otrzymać styczną w punkcie i $(z=0,\ y-\mathrm{a}_1x=0)$ będzie potrzeba zrobić $\lambda=0$, byle tylko $\varphi_m(x,\,y)$ albo u_{m-p} nie zawierało w sobie $(y-\mathrm{a}_1x)$ w potędze równej p; pierwsza strona równania jest wtedy podzielną przez z^p, to jest że prosta $y-\mathrm{a}_1x=0$ ma z krzywą styczność $(p-1)$entego rzędu.

Vo Przykłady.

523. Wskażemy teraz wiele krzywych łatwych do wykreślenia w zupełności i przedstawiających różne szczególności które niedawnośmy przytoczyli.

Zastosujemy do dwóch pierwszych przykładów metodę ogólną którą dopiero cośmy wyłożyli.

1szy Przykład. Niech będzie krzywa

$$2yx^3 - y^2 - x = 0,$$

albo robiąc równanie jednorodnem

(1) $$2yx^3 - y^2z^2 - xz^3 = 0.$$

Kierunki assymptotyczne są danemi przez równanie

$$yx^3 = 0.$$

Badajmy naprzód punkt w nieskończoności i ($y = 0,\ z = 0$); oś odciętych jest kierunkiem assymptotycznym. W tym celu szukajmy przecięcia krzywej (1) przez jakąkolwiek prostę przechodzącą przez ten punkt

(2) $$y = \lambda z;$$

ma się

(3) $$2\lambda x^3 z - xz^3 - \lambda^2 z^4 = 0;$$

więc jakakolwiek prosta przechodząca przez punkt ($y = 0,\ z = 0$) nie spotyka krzywej jak tylko w jednym punkcie, gdyż pierwsza strona równania nie przypuszcza jak tylko czynnik z, więc punkt i jest *punktem prostym.*

Wyraźmy że prosta (2) jest styczną, potrzeba zrobić $\lambda = 0$; i pierwsza strona równania (3) jest podzielną przez z^3; więc prosta ($y = 0$) spotyka krzywą w punkcie pojedyńczym i we trzech punktach zbiegających się z sobą; punkt i w nieskończoności jest więc punktem przegięcia, prosta $y = 0$ jest styczną przegięcia.

Badajmy punkt $j (x = 0,\ z = 0)$; oś rzędnych jest kierunkiem assymptotycznym.

W tym celu, szukajmy przecięcia krzywej (1) przez jakąkolwiek prostą przechodzącą przez punkt j

(4) $$\lambda x - z = 0,$$

ma się, zastąpiwszy z przez λx

(5) $$\lambda^2 y^2 x^2 - 2yx^3 - \lambda^3 x^4 = 0;$$

pierwsza strona równania (5) jest podzielną przez x^2 jakiemkolwiek bądź jest λ, punkt j jest więc punktem podwójnym.

Aby prosta (4) była styczną potrzeba znieść spółczynnik na x^2, co daje $\lambda^2 = 0$; tym sposobem w punkcie podwójnym j dwie styczne właściwie nazwane zlewają się z prostą $z = 0$; więc punkt j jest punktem zwrotu; styczną zwrotu jest prosta w nieskończoności równoległa w kierunku assymptotycznym. Kiedy się zrobi $\lambda = 0$, pierwsza strona równania (5) staje się podzielną przez x^3, i tylko przez x^3; jestto więc *zwrot 1go rodzaju.*

2gi Przykład. Niech będzie krzywa

$$y^3 - y^2 - x = 0,$$

albo robiąc równanie jednorodnem

(1) $$y^3 - y^2z - xz^2 = 0.$$

Kierunki assymptotyczne są danymi przez równanie

$$y^3 = 0.$$

Ma się więc jeden kierunek assymptotyczny $y=0$, to jest oś odciętych; punkt w nieskończoności odpowiadający jest ($y=0$, $z=0$). Szukajmy przecięcia krzywej (1) przez jakąkolwiek prostą przechodzącą przez ten punkt

$$\lambda y - z = 0; \tag{2}$$

« (weźmy tutaj, jak w ostatnim przypadku krzywej poprzedzającej, $\lambda y - z = 0$ zamiast $y - \lambda z = 0$; » biorąc ten drugi kształt zostaje się przywiedzionym do wartości nieskończonej na λ; pierwszy kształt » jest wtedy dogodniejszym w roztrząsaniu i będzie mogło się sprawdzić w badaniu innych krzy- » wych korzyść tej uwagi).

Szukajmy przecięcia prostej (2) z krzywą (1), ma się

$$-\lambda^2 xy^2 - \lambda y^3 + y^3 = 0; \tag{3}$$

pierwsza strona równania (3) jest podzielną przez y^2, jakimkolwiek bądź jest λ; punkt i jest więc *punktem podwójnym.*

Aby prosta (2) była styczną, potrzeba znieść spółczynnik na y^2; co sprowadza do $\lambda^2=0$; tym sposobem w punkcie podwójnym i dwie styczne właściwie nazwane zlewają się z prostą $z=0$; punkt i jest więc punktem zwrotu, styczną zwrotu jest prosta w nieskończoności równoległa w kierunku assymptotycznym. Kiedy się robi $\lambda=0$; pierwsza strona równania (3) jest i nie może być podzielną jak przez y^3; jestto *zwrot 1*go *rodzaju.*

PRZYKŁADY.

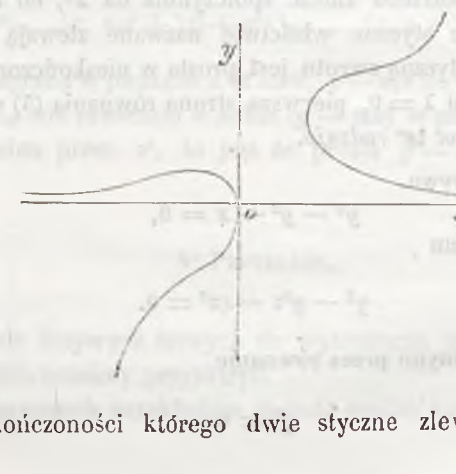
Punkt przegięcia w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest oś odciętych, styczną przegięcia jest oś odciętych.

Punkt podwójny w nieskończoności, którego dwie styczne zlewają się z prostą w nieskończoności, to jest punkt zwrotu którego styczną jest prosta w nieskończoności równoległa w kierunku assymptotycznym.

Kierunkiem assymptotycznym jest oś rzędnych.

Krzywa dziewiątej klassy.

$$2yx^3 - y^2 - x = 0 \tag{1}$$



Punkt podwójny w nieskończoności którego dwie styczne zlewają się z prostą w nieskoń czoności, to jest punkt zwrotu którego styczną jest prosta w nieskończoności równoległa w kierunku assymptotycznym, kierunkiem assymptotycznym jest oś odciętych.

Krzywa trzeciej klassy.

(II) $y^3 - y^2 - x = 0$

Punkt przegięcia w nieskończoności, styczną przegięcia jest prosta w nieskończoności, równoległa w kierunku assymptotycznym którym jest oś rzędnych, punkt podwójny w początku.

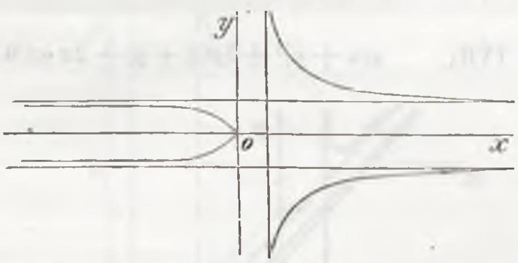
Krzywa czwartej klassy.

(III) $x^3 - 2xy + y^2 = 0$

Punkt przegięcia w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest oś rzędnych, — punkt podwójny w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest oś odciętych.

Krzywa czwartej klassy.

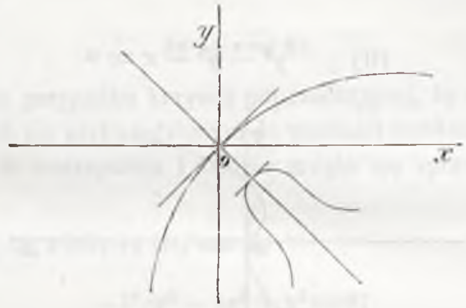
(IV) $xy^2 - y^2 - x = 0$



Prosta w nieskończoności jest styczną podwójną, kierunkami assymptotycznymi są oś odciętych i oś rzędnych; — punkt potrójny w początku którego trzy styczne zlewają się w jedną, jedyna gałęź jest rzeczywistą.

Krzywa czwartej klassy.

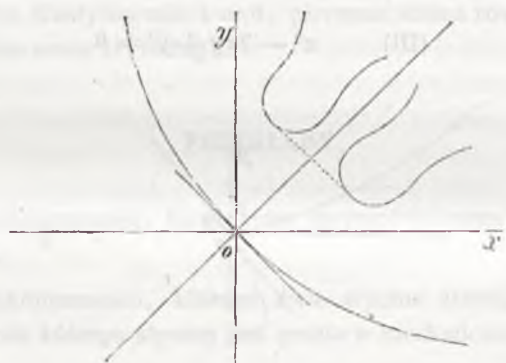
$$x^2y^2 + (y - x)^3 = 0 \qquad \text{(V)}$$



Prosta w nieskończoności jest styczną potrójną, kierunkami assymptotycznymi jest oś odciętych, oś rzędnych i dwójsieczna osi; — początek jest punktem pięćkrotnym którego pięć stycznych zlewają się ze sobą, jedyna gałęź jest rzeczywistą.

Krzywa szóstej klassy.

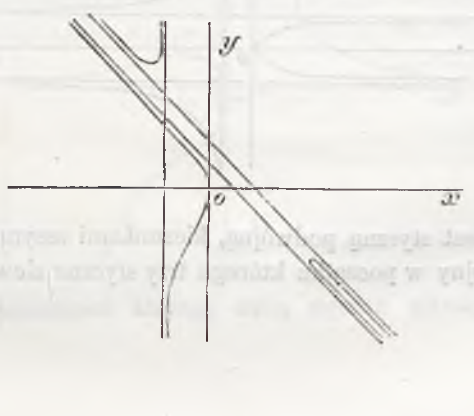
$$x^2y^2(y - x)^2 - (x + y)^5 = 0 \qquad \text{(VI)}$$



Punkt podwójny w nieskończoności którego assymptoty są w odległościach skończonych i rzeczywistych, kierunkiem assymptotycznym jest druga dwójsieczna osi, — punkt prosty w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest oś rzędnych.

Krzywa czwartej klassy.

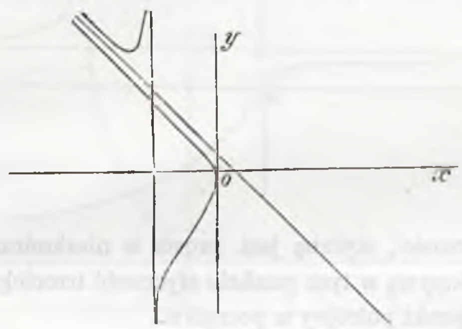
$$x(x + y)^2 + 3y(x + y) + 2x = 0 \qquad \text{(VII)}$$



Punkt zwrotu w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest druga dwójsieczna osi, — punkt prosty w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest oś rzędnych.

Krzywa trzeciej klassy.

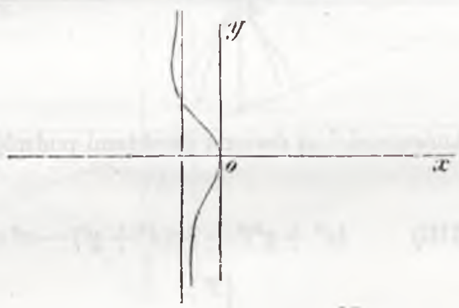
$$\text{(VIII)} \qquad x(x+y)^2 + 4y(x+y) + 4x = 0$$



Punkt podwójny odosobniony w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest druga dwójsieczna; punkt prosty w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest oś rzędnych.

Krzywa czwartej klassy.

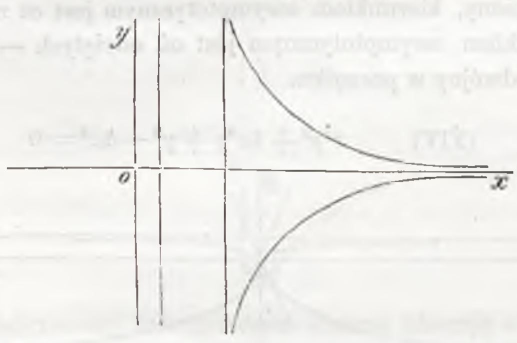
$$\text{(IX)} \qquad x(x+y)^2 + y(x+y) + x = 0$$



Punkt potrójny w nieskończoności w który wchodzi punkt zwrotu odosobniony, kierunkiem assymptotycznym jest oś rzędnych — punkt zwrotu rzeczywisty w nieskończoności, kierunkiem assyptotycznym jest oś odciętych.

Krzywa dziesiątej klassy.

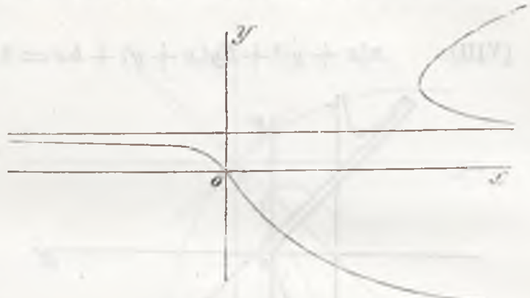
$$\text{(X)} \qquad y^2(x-1)^2(x-3) = 1$$



Punkt podwójny w nieskończoności, którego jedną ze stycznych jest prosta w nieskończoności, równoległa w kierunku assymptotycznym którym jest oś odciętych.

Krzywa czwartej klassy.

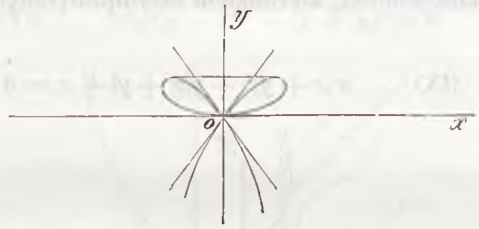
$$\text{(XI)} \qquad y^3 - xy + x = 0$$



Punkt prosty w nieskończoności, styczną jest prosta w nieskończoności równoległa w kierunku assymptotycznym, ona ma z krzywą w tym punkcie styczność trzeciego rzędu, kierunkiem assymptotycznym jest oś rzędnych, punkt potrójny w początku.

Krzywa szóstej klassy.

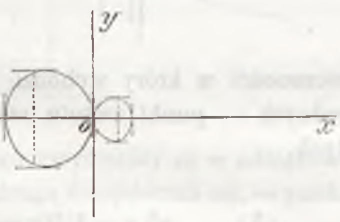
$$\text{(XII)} \qquad x^4 - 2x^2y + y^3 = 0$$



Dwa punkta kołowe w nieskończoności są dwoma punktami podwójnymi. Początek jest punktem zwrotu.

Krzywa piątej klassy.

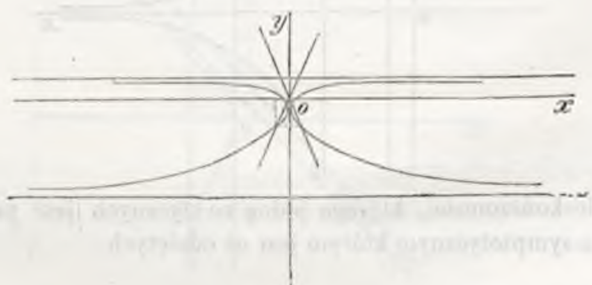
$$\text{(XIII)} \qquad (x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) - x^2 = 0$$



Punkt podwójny odosobniony, kierunkiem assymptotycznym jest oś rzędnych — punkt podwójny w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest oś odciętych — assymptoty mają styczność drugiego rzędu — punkt podwójny w początku.

Krzywa szóstej klassy.

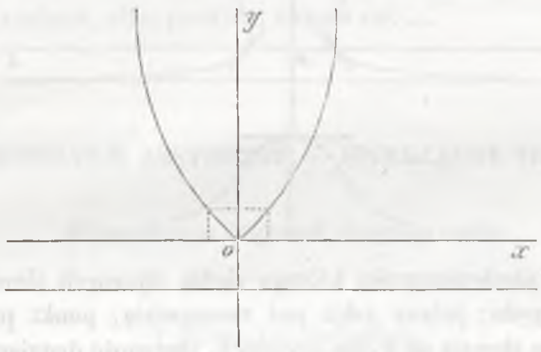
$$\text{(XIV)} \qquad x^2y^2 + 3x^2y + y^2 - 4x^2 = 0$$



Punkt prosty w nieskończoności którego styczną jest prosta w nieskończoności równoległa w kierunku assymptotycznym którym jest oś rzędnych — punkt zwrotu odosobniony w nieskończoności, kierunkiem assymptotycznym jest oś odciętych — punkt zwrotu w początku.

Krzywa szóstej klassy.

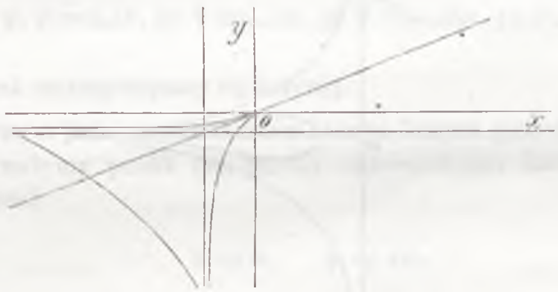
$$\text{(XV)} \qquad x^2y^2 + 2y(x^2 - y^2) + x^2 = 0$$



Dwa punkta zwrotu w nieskończoności, kierunkami assymptotycznymi są oś odciętych i oś rzędnych — punkt zwrotu w początku — prosta w nieskończoności jest jedyną styczną podwójną.

Krzywa trzeciej klassy.

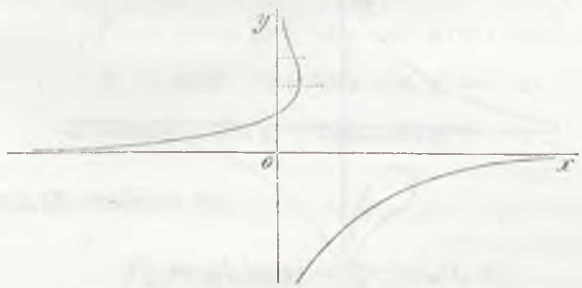
$$\text{(XVI)} \qquad x^2y^2 + 2xy(x + 2y) + (x - 2y)^2 = 0$$



Punkt potrójny w nieskończoności którego trzy styczne zlewają się ze sobą, jedyna gałęź jest rzeczywistą, kierunkiem assymptotycznym jest oś odciętych; punkt przegięcia w nieskończoności mający za styczną oś rzędnych.

Krzywa czwartej klassy.

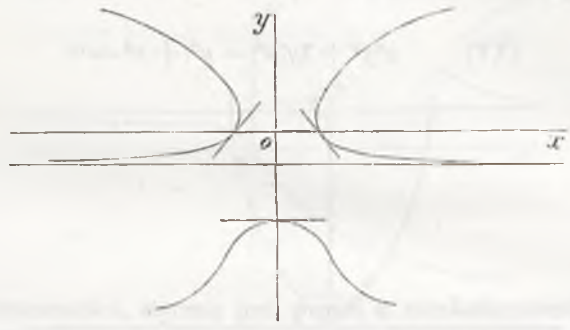
$$\text{(XVII)} \qquad xy^3 - y + 1 = 0$$



Punkt potrójny w nieskończoności którego dwie styczne zlewają z prostą w nieskończoności równoległą w kierunku assymptotycznym którym jest oś odciętych; styczne w punkcie potrójnym mają z krzywą styczność drugiego rzędu.

Krzywa trzynastej klassy.

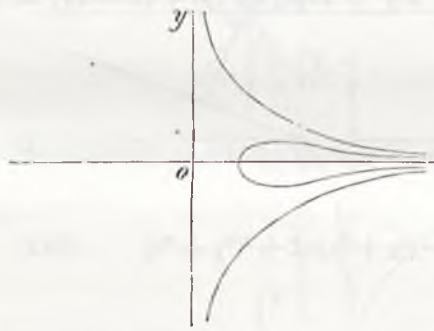
$$\text{(XVIII)} \qquad y^5 + 3y^4 - 2yx^2 - x^2 + 1 = 0$$



Punkt siedmiokrotny w nieskończoności którego siedm stycznych zlewają się z osią rzędnych, styczność jest czwartego rzędu; jedyna gałęź jest rzeczywistą; punkt poczwórny w nieskończoności, którego cztery styczne zlewają się z osią odciętych, styczność drugiego rzędu.

Klassa krzywej jest najwięcej równą $(110 - 63) = 47$.

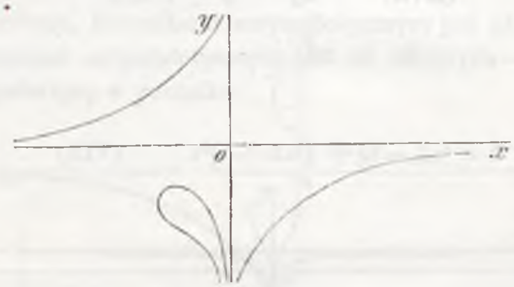
$$\text{(XIX)} \qquad x^7y^4 - 2x^6y^2 + x^5 - 1 = 0$$



Dwa punkta potrójne których trzy styczne zlewają się z sobą, kierunkami assymptotycznymi są oś odciętych i oś rzędnych.

Krzywa czternastej klassy.

$$\text{(XX)} \qquad x^3y^3 + xy^2 + 1 = 0$$



524. Ważność poszukiwania punktów wielokrotnych w nieskończoności jest niezaprzeczalną.

To badanie pozwoli nam, w rzeczy samej, widzieć jaśniej jak krzywa kieruje się do nieskończoności: ono jest nadewszystko nieodzownem aby rozpoznać zmniejszenia klassy w krzywej danej, gdyż to zmniejszenie zależy od istnienia punktów wielokrotnych tak w nieskończoności jak i w granicach skończonych. Metoda którą dopiero cośmy wskazali jest nadto nader pożyteczną do należytego kierowania wykreśleń *gałęzi parabolicznych.*

Widzimy także, przez przykłady przytoczone, położenie gałęzi krzywej względem assymptoty, według tego jak punkt w nieskończoności odpowiadający jest albo punktem prostym zwyczajnym albo punktem prostym przegięcia, albo punktem zwrotu etc.....

§ III. — RÓWNANIE ASSYMPTOT. — SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE.

Klassyfikacya krzywych drugiego rzędu.

1° Równanie assymptot.

525. Równanie assymptoty odpowiadającej kierunkowi assymptotycznemu.

Niech będzie równanie krzywej

$$(1)\qquad f(x, y, z) = \varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + z^2\varphi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0;$$

zaś $y - ax = 0$ kierunek assymptotyczny tej krzywej.

Assymptota jest styczną w jednym z punktów w którym krzywa jest spotkana przez prostą w nieskończoności; jeżeli uważymy punkt (x_1, y_1, z_1) odpowiadający kierunkowi assymptotycznemu wybranemu, musi się mieć

$$(2)\qquad z_1 = 0, \qquad y_1 = ax_1.$$

Lecz równanie stycznej w punkcie (x_1, y_1, z_1) jest

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0, \qquad \text{z warunkiem } f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Ma się, według równania (1):

$$f'_x = {}_x\varphi'_m(x, y) + z_x\varphi'_{m-1}(x, y) + \ldots;$$

$$f'_y = {}_y\varphi'_m(x, y) + z_y\varphi'_{m-1}(x, y) + \ldots;$$

$$f'_z = \varphi'_{m-1}(x, y) + 2z\varphi_{m-2}(x, y) + \ldots;$$

wprowadziwszy założenia (2), znajduje się

$$f'_{x_1} = {}_x\varphi'_m(x, y) = x_1^{m-1}{}_x\varphi'_m(1, a);$$

$$f'_{y_1} = {}_y\varphi'_m(x, y) = x_1^{m-1}{}_y\varphi'_m(1, a);$$

$$f'_{z_1} = \varphi_{m-1}(x, y) = x_1^{m-1}\varphi_{m-1}(1, a).$$

Więc równanie stycznej w punkcie (2), albo równanie assymptoty odpowiadającej kierunkowi assymptotycznemu $y - ax = 0$, jest

$$(3) \qquad x_x\varphi'_m(1, a) + y_y\varphi'_m(1, a) + z\varphi_{m-1}(1, a) = 0.$$

Można zauważyć że to równanie jest toż samo jak równanie biegunowej punktu w nieskończoności na prostej $y - ax = 0$ n^er^ (436), to jest jak równanie *średnicy sprzężonej z cięciwami równoległemi do prostej* $y - ax = 0$.

W tym przypadku szczególnym, *średnica jest równoległą do cięciw;* ma się, w rzeczy samej, tożsamość

$$x_x\varphi'_m(x, y) + y_y\varphi'_m(x, y) = m\varphi_m(x, y);$$

albo, robiąc $x = 1$ i $y = a$ i zauważywszy że $\varphi_m(1, a)$ jest zerem, wypadnie

$$(4) \qquad {}_x\varphi'_m(1, a) + a_y\varphi'_m(1, a) = 0;$$

co dowodzi podania wysłowionego.

526. Równanie krzywej i równanie assymptot mają też same wyrazy stopnia m i stopnia $(m - 1)$.

Gdy m kierunków assymptotycznych są dane przez m czynników linijnych funkcyi $\varphi_m(x, y)$; tak że, jeżeli ma się

$$(5) \qquad \varphi_m(x, y) = (y - a_1x)(y - a_2x)\ldots(y - a_mx),$$

m assymptot krzywej otrzymają równania kształtu

$$y - a_1x - \lambda_1z = 0,$$
$$y - a_2x - \lambda_2z = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y - a_mx - \lambda_mz = 0.$$

Otóż równanie następujące

$$(6) \qquad (y - a_1x - \lambda_1z)\ldots(y - a_mx - \lambda_mz) + z^2\psi_{m-2}(x, y) + z^3\psi_{m-3}(x, y) + \ldots = 0,$$

jest równaniem krzywej mającej za assymptoty n^er^ (514) m prostych $y - a_ix - \lambda_iz = 0$.

W rzeczy samej, jeżeli szuka się jej przecięcia z prostą $y - a_ix - \lambda_iz = 0$, rezultat otrzymany jest podzielnym przez z^2; ta prosta jest więc styczną do krzywej i jej punkt styczności jest w nieskończoności; przeto ona jest assymptotą krzywej.

Krzywa dana (1)

$$f(x, y, z) = 0,$$

i krzywa przedstawiona przez równanie (6) mają też same assymptoty; a tem samem, wyrażając że równania (1) i (6) przedstawiają tęż samą krzywą, będziemy mogli wyznaczyć zupełnie m ilości $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, przypuszczonych nieznanemi.

Otóż wyraz stopnia najwięcej podniesionego, w równaniu (6) jest

$$(y - a_1x)(y - a_2x)\ldots(y - a_mx);$$

jestto wyraźnie $\varphi_m(x, y)$ (5); więc wyrazy m^{tego} stopnia są też same w równaniach (1) i (6).

Równajmy z sobą teraz wyrazy stopnia $(m-1)$; ponieważ liczba tych wyrazów jest m, otrzymamy pomiędzy m ilościami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, m związków dozwalających je wyznaczyć. Tak że położenie assymptot krzywej nie zależy ogólnie jak od spółczynników wyrazów stopnia m i stopnia $(m-1)$ jej równania. Tym sposobem, wziąwszy za $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ wartości znalezione przez metodę która dopiero co była wskazaną; równanie assymptot będzie

$$(y - a_1x - \lambda_1 z)(y - a_2x - \lambda_2 z)\ldots(y - a_mx - \lambda_m z) = 0,$$

równanie które, według sposobu wyznaczenia stałych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, otrzyma też same wyrazy stopnia m i stopnia $(m-1)$ jak równanie dane. c. b. d. d.

Powiedzieliśmy że wartości stałe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, nie zależą ogólnie jak od spółczynników wyrazów $(m-1)^{\text{entego}}$ stopnia równania krzywej; ten wniosek przypuszcza że krzywa nie ma punktów wielokrotnych w nieskończoności. Widzieliśmy, w rzeczy samej, że kiedy krzywa ma punkta podwójne w nieskończoności, wartość stałej λ n[er] (519) zależy od spółczynników wyrazów stopnia $(m-2)$.

Sposób dowodzenia który dopiero cośmy przedstawili, dostarczy nam drugiej metody dla wyznaczenia rzędnych od początku assymptot.

Drugie dowodzenie.

Podanie wysłowione n[ei] (526) może dowieść się prościej w sposób następujący.

Niech będzie równanie krzywej

$$(1) \qquad f(x, y, z) = \varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + z^2\varphi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0;$$

oznaczywszy przez (α, β) rozwiązanie równania $\varphi_m(x, y) = 0$, tak że $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y}{x}$; otrzyma się

$$(2) \qquad \varphi_m(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y)\ldots(\alpha_m x + \beta_m y);$$

i równanie m assymptot będzie

$$(3) \qquad (\alpha_1 x + \beta_1 y + \lambda_1 z)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \lambda_2 z)\ldots(\alpha_m x + \beta_m y + \lambda_m z) = 0.$$

Jest widocznem, podług związku (2), że wyrazy stopnia m w równaniu (3), są też same jak wyrazy równania (1); a tem samem równanie (3) assymptot będzie mogło się napisać

$$(4) \qquad \varphi_m(x, y) + z\psi(x, y) + z^2\psi(x, y) + \ldots = 0.$$

Równanie stycznej w jednym z punktów

$$z = 0, \qquad \alpha x + \beta = 0,$$

w którym prosta w nieskończoności spotyka krzywą (4), jest n[er] (525)

$$x\varphi'_{x\,m}(\alpha, \beta) + y\varphi'_{y\,m}(\alpha, \beta) + z\psi(\alpha, \beta) = 0;$$

styczna w tym samym punkcie krzywej danej (1) jest n[er] (525)

$$x\varphi'_{x\,m}(\alpha, \beta) + y\varphi'_{y\,m}(\alpha, \beta) + z\varphi_{m-1}(\alpha, \beta) = 0.$$

Te dwa równania powinny przedstawiać tęż samą prostą, otrzyma się więc

(5) $$\psi(\alpha, \beta) = \varphi_{m-1}(\alpha, \beta),$$

i ten związek musi mieć miejsce dla m rozwiązań równania

$$\varphi_m(\alpha, \beta) = 0.$$

Innemi słowy, wielomian $(m-1)^{\text{entego}}$ stopnia względem $\frac{y}{x}$,

(6) $$\left[\psi\left(1, \frac{y}{x}\right) + \varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right)\right],$$

powinien znosić się dla m wartości sprawdzających równanie

$$\varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0;$$

wielomian (6) jest więc tożsamościowo zerem, to jest że

(7) $$\psi(x, y) = \varphi_{m-1}(x, y);$$

jestto podanie które należało się dowieść.

527. Gdy m assymptot krzywej spotykają tę krzywą w $m(m-2)$ punktach, te $m(m-2)$ punkta są położone na krzywej $(m-2)^{\text{entego}}$ rzędu.

Assymptota, dotykając się krzywej w nieskończoności, nie może spotykać krzywej w więcej jak w $(m-2)$ innych punktach; a tem samem, m assymptot spotkają krzywą w $m(m-2)$ punktach będących w odległości skończonej.

To założywszy, jeżeli równanie krzywej jest

(1) $$\varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + z^2\varphi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0,$$

równanie m assymptot będzie kształtu n^er (526)

(2) $$\varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + z^2\psi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0.$$

Odejmując te dwa równania stronami, otrzyma się krzywą następującą

(3) $$z^2[\varphi_{m-2}(x, y) - \psi_{m-2}(x, y)] + z^3[\varphi_{m-3}(x, y) - \psi_{m-3}(x, y)] + \ldots = 0,$$

na której znajdą się wszystkie punkta wspólne dwóch krzywych (1) i (2).

Jeżeli zniesie się czynnik z^2, który daje punkta styczności w nieskończoności, otrzyma się równanie krzywej przechodzącej przez punkta przecięcia inne jak punkta styczności assymptot; to równanie jest widocznie stopnia $(m-2)$; co dowodzi twierdzenia.

To podanie mogłoby także wyprowadzić się z równania (2) n^er (514).

Trzy assymptoty krzywej trzeciego rzędu spotykają krzywą w trzech innych punktach; te trzy punkta są w linii prostej.

II° Spółrzędne trzylinijne.

528. Wyznaczenie assymptot.

Dla wyznaczenia assymptot krzywej danej przez równanie w spółrzędnych trzylinijnych

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = 0,$$

szuka się punktów w których ta krzywa jest spotkana przez prostą w nieskończoności; assymptoty będą stycznemi w tych punktach.

529. Równanie dwóch assymptot krzywej drugiego rzędu.

Niech będzie równanie krzywej

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0$$

niech będzie równanie prostej w nieskończoności n^{er} (96)

$$(2) \qquad mX + nY + pZ = 0.$$

Podług równania danego w n^{rze} (407). otrzyma się bezpośrednio na równanie dwóch assymptot

$$(3) \qquad f(X, Y, Z) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & m \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & n \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} + (mX + nY + pZ)^2.\Delta = 0.$$

III° Klassyfikacya krzywych drugiego rzędu. (Spółrzędne kartezyańskie.)

530. Szukając przecięcia krzywej

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$

z prostą w nieskończoności $z = 0$, znajduje się że kierunki assymptotyczne krzywych drugiego rzędu, są dane przez równanie

$$(2) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

1° Jeżeli $B^2 - AC < 0$, dwie proste przedstawione przez to równanie są urojone; prosta w nieskończoności spotyka krzywą w dwóch punktach urojonych; krzywa należy do *rodzaju ellipsy*.

2° Jeżeli $B^2 - AC > 0$, prosta w nieskończoności spotyka krzywą w dwóch punktach rzeczywistych; krzywa należy do *rodzaju hyperboli*.

3° Jeżeli $B^2 - AC = 0$, kierunki assymptotyczne zbiegają się z sobą, i ponieważ nie znajduje się punkt podwójny w krzywych właściwie nazwanych drugiego rzędu, *prosta w nieskończoności jest styczną do krzywej*; ma się *parabolę*.

Można sprawdzić w sposób następujący, w tym ostatnim przypadku, że prosta w nieskończoności dotyka się krzywej; w rzeczy samej, równanie może napisać się

$$(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)^2 + 2\mathrm{A}z(\mathrm{D}x + \mathrm{E}y) + \mathrm{AF}z^2 = 0.$$

Kierunek assymptotyczny jest

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y = 0;$$

przecięcia krzywej przez prostą

$$z = \lambda(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y),$$

będą dane przez równanie

$$(3)\qquad (\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)^2 + 2\lambda\mathrm{A}(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)(\mathrm{D}x + \mathrm{E}y) + \mathrm{AF}\lambda^2(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)^2 = 0.$$

Prosta będzie styczną do krzywej, jeżeli $\lambda = 0$, gdyż wtedy tylko pierwsza strona jest podzielną przez $(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)^2$; lecz jeżeli $\lambda = 0$, prosta uważana staje się $z = 0$; więc PARABOLA JEST STYCZNĄ WZGLĘDEM PROSTEJ W NIESKOŃCZONOŚCI RÓWNOLEGŁEJ DO KIERUNKU

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y = 0;$$

to jest DO KIERUNKU STAŁEGO ŚREDNIC (jak zobaczymy to poniżej).

Jeżeliby dwie proste

$$(4)\qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y = 0, \qquad \mathrm{D}x + \mathrm{E}y = 0,$$

zbiegały się z sobą, pierwsza strona równania (3) stałaby się podzielną przez $(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)^2$, jakiemkolwiek bądź jest wartość na λ; tak że wszelka prosta przechodząca przez punkt w nieskończoności

$$z = 0, \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y = 0,$$

spotykałaby krzywą w dwóch punktach zbiegających się z sobą; krzywa miałaby więc punkt podwójny w nieskończoności.

Otóż, dwie proste zlewają się w jednę, i podług związku $\mathrm{B}^2 = \mathrm{AC}$, wynika wtedy

$$(5)\qquad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}};$$

to jest że *równanie* (1) *przedstawia dwie proste równoległe;* sprawdza się to *przez rozłożenie na kwadraty*. Dwie proste równoległe są dwiema prostemi spotykającemi się w nieskończoności; lecz punkt przecięcia dwóch prostych jest punktem podwójnym w układzie tych dwóch prostych; powinniśmy więc znaleźć, w przypadku danym, *punkt podwójny w nieskończoności.*

531. KRZYWE DRUGIEGO RZĘDU PRZECHODZĄCE PRZEZ PUNKTA KOŁOWE W NIESKOŃCZONOŚCI SĄ KOŁAMI.

Punkta kołowe w nieskończoności są dane przez równanie

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = 0,$$

jeżeli przypuści się osie prostokątne. Aby krzywa (1) przechodziła przez dwa punkta, potrzeba aby równanie

$$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = 0,$$

sprowadzało się do

$$x^2 + y^2 = 0;$$

co pociąga za sobą związki

$$B = 0, \qquad A = C;$$

to jest że krzywa (1) jest kołem.

IV° Klassyfikacya krzywych drugiego rzędu. (Spółrzędne trzylinijne.)

532. Niech będzie równanie krzywej w spółrzędnych trzylinijnych:

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0;$$

jeżeli szuka się przecięcia tej krzywej z prostą

$$(2) \qquad mX + nY + pZ = 0,$$

znajduje się bez trudności, że punkta przecięcia będą rzeczywiste jeżeli się ma

$$(3) \qquad h = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & m \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & n \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

Przypuśćmy że prosta jest w nieskończoności n^er (96), wtedy

1° Jeżeli $h < 0$, krzywa należy do *rodzaju elipsy*,

2° Jeżeli $h > 0$, krzywa należy do *rodzaju hyperboli;*

3° Jeżeli $h = 0$, krzywa należy do *rodzaju paraboli.*

§ IV. — RÓWNANIA STYCZNECZKOWE.

I° Wyznaczenie assymptot.

533. Widzieliśmy n^er (462), (464), że styczne w punktach w których prosta dana spotyka krzywą wyznaczoną przez jej równanie styczneczkowe, są stycznemi wspólnemi do krzywej i do pierwszej biegunowej prostej danej.

Według tego wyznaczy się assymptoty, szukając stycznych wspólnych krzywej i pierwszej biegunowej prostej w nieskończoności n^er (116) albo n^er (151).

W układzie spółrzędnych (dwulinijnych) u, v, spółrzędne prostej w nieskończoności są zerami ($u_0 = 0$, $v_0 = 0$).

W układzie spółrzędnych trzylinijnych (U, V, W), spółrzędne prostej w nieskończoności są proporcyonalne do parametrów odniesienia; tym sposobem ma się

$$\frac{U_0}{\lambda} = \frac{V_0}{\mu} = \frac{W_0}{\nu},$$

λ, μ, ν będąc parametrami odniesienia.

Uwaga. Własności pierwszych biegunowych wysłowione w numerze (494), pozwolą nam rozpoznać czy assymptoty są stycznemi wielokrotnemi.

II° Krzywa drugiej klassy. (Spółrzędne dwulinijne.)

534. Klassyfikacya krzywych drugiej klassy była wykonaną, podług tych zasad, w numerach (361), (362), (363); nie wrócimy więcej do tego przedmiotu.

Wyznaczenie assymptot.

Równanie styczneczkowe krzywych drugiej klassy jest

$$f(u, v, w) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0; \tag{1}$$

Pierwsza biegunowa prostej (u_0, v_0, w_0) ma na równanie n^er (462)

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0;$$

Pierwsza biegunowa (albo punkt biegunowy) prostej w nieskończoności $(u_0 = 0,\ v_0 = 0)$ będzie

$$Du + Ev + Fw = 0. \tag{2}$$

Assymptoty będą styczne wspólne do dwóch krzywych (1) i (2); równanie (2) przedstawia punkt, jestto punkt zbiegania się assymptot.

Assymptoty będą rzeczywiste albo urojone według tego jak rozwiązania wspólne w równaniach (1) i (2) będą rzeczywiste albo urojone.

III° Krzywe durgiej klassy. (Spółrzędne trzylinijne.)

535. Klassyfikacya krzywych drugiej klassy. (Spółrzędne trzylinijne.)

Równanie styczneczkowe w spółrzędnych trzylinijnych krzywych drugiej klassy jest

$$f(U, V, W) = A_{11}U^2 + A_{22}V^2 + A_{33}W^2 + 2A_{12}UV + 2A_{13}UW + 2A_{23}VW = 0. \tag{1}$$

Jeżeli λ, μ, ν są parametry odniesienia, spółrzędnemi prostej w nieskończoności będą n^er (151)

$$\frac{U}{\lambda} = \frac{V}{\mu} = \frac{W}{\nu};$$

pierwsza biegunowa (albo punkt biegunowy) tej prostej ma na równanie

$$\lambda f'_U + \mu f'_V + \nu f'_W = 0, \tag{2}$$

albo

$$U f'_\lambda + V f'_\mu + W f'_\nu = 0; \tag{2 bis}$$

assymptoty krzywej będą styczne wspólne do krzywych (1) i (2); rozwiązania wspólne tym dwom równaniom będą spółrzędne tych assymptot.

Warunek aby równania (1) i (2) miały ich rozwiązania rzeczywiste, jest

$$(3)\qquad h_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & f'_\lambda \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & f'_\mu \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & f'_\nu \\ f'_\lambda & f'_\mu & f'_\nu & 0 \end{vmatrix} > 0$$

dochodzi się do niego, wyrugowawszy w, na przykład, między równaniami (1) i (2 *bis*), i pisząc że pierwiastki równania otrzymanego są rzeczywiste.

Odejmując od ostatniej kolumny wyznacznika h_1, trzy pierwsze względnie pomnożone przez 2λ, 2μ, 2ν, wypadnie

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ f'_\lambda & f'_\mu & f'_\nu & -2f(\lambda, \mu, \nu) \end{vmatrix} > 0;$$

i warunek rzeczywistości pierwiastków staje się

$$(4)\qquad f(\lambda, \mu, \nu) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} < 0;$$

związek już dowiedziony n^{er} (424) przez inną metodę.

To nam daje *criteria* bardzo proste dla klassyfikacyi krzywych drugiej klassy.

Położywszy:

$$(5)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix};$$

i oznaczając przez λ, μ, ν, parametrzy odniesienia, otrzymamy wnioski następujące:

I° $f(\lambda, \mu, \nu).\Delta > 0$, *rodzaj ellipsy*

II° $f(\lambda, \mu, \nu).\Delta < 0$, *rodzaj hyperboli;*

III° $f(\lambda, \mu, \nu).\Delta = 0$, *parabola;*

IV° $\Delta = 0$, *układ dwóch punktów.*

W przypadku III° prosta w nieskończoności dotyka się krzywej; dwie assymptoty zlewają się z prostą w nieskończoności.

W przypadku IV° dwie assymptoty zlewają się nie będąc w nieskończoności; one przechodzą przez dwa punkta stanowiące układ.

ROZDZIAŁ V

TEORYA ŚRODKÓW

§ I. — OKREŚLENIE. — TWIERDZENIA OGÓLNE.

I° Określenie. — Poszukiwanie ogólne.

536. Nazywa się *środkiem* krzywej punkt taki, że wszelka cięciwa która przechodzi przez ten punkt jest przezeń podzieloną na dwie części równe.

Warunek aby początek spółrzędnych był środkiem.

1° Jeżeli początek jest środkiem krzywej $f(x, y) = 0$, dwa równania $f(x, y) = 0$ i $f(-x, -y) = 0$ mają wszystkie ich rozwiązania wspólne; albo inaczej, równanie krzywej nie zmienia się kiedy zmieni się x i y na $-x$ i $-y$.

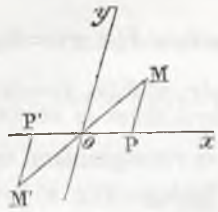
Niech będzie, w rzeczy samej, $M_1(x_1, y_1)$ punkt (rzeczywisty albo urojony) krzywej; złączmy punkt M_1 z początkiem O (przez prostą rzeczywistą albo urojoną); ponieważ O jest środkiem, prosta M_1O spotka koniecznie krzywą w pewnym punkcie $M_2(x_2, y_2)$ takim, że O będzie środkiem odcinka M_1, M_2.

Lecz spółrzędne punktu środka odcinka (rzeczywistego albo urojonego) mają na wartości $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$; otóż te spółrzędne powinny być spółrzędnemi początku O; ma się więc

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = -y_1.$$

Przeto jakiemukolwiek rozwiązaniu (x_1, y_1) (rzeczywistemu albo urojonemu) równania krzywej odpowiada zawsze rozwiązanie $(-x_1, -y_1)$.

Mając wzgląd jedynie na punkta rzeczywiste, można dać dowodzenie geometryczne następujące: Niech będzie M punkt rzeczywisty krzywej; jeżeli początek jest środkiem, łącząc OM, potem biorąc OM' = OM, otrzyma się drugi punkt krzywej; otóż spółrzędne dwóch punktów M i M' są równe, gdyż dwa trójkąty OMP i OM'P' są równe; co większa jest widocznem, że one są znaków przeciwnych. Więc jeżeli x i y są spółrzędnemi punktu M krzywej, $-x$; $-y$ będą spółrzędnemi drugiego punktu M'; to jest że równanie krzywej będzie sprawdzonem kiedy się w niem zastąpi x i y przez $-x$ i $-y$, i to jakimkolwiek bądź jest punkt rzeczywisty (x, y) krzywej.



Więc wszystkie rozwiązania, rzeczywiste i urojone, równania

$$f(x, y) = 0,$$

sprawdzą równanie

$$f(-x, -y) = 0.$$

2° *Odwrotnie:* Jeżeli dwa równania $f(x, y) = 0$ i $f(-x, -y) = 0$ mają wszystkie ich rozwiązania wspólne, to jest jeżeli równanie krzywej nie zmienia się kiedy się zmieni x i y na $-x$ i $-y$, początek będzie środkiem krzywej.

Niech będzie, w rzeczy samej, $M_1(x_1, y_1)$ jakikolwiek punkt (rzeczywisty albo urojony) krzywej; otrzyma się według założenia, drugi punkt M_2 (rzeczywisty albo urojony) którego spółrzędne będą $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$; otóż spółrzędnemi punktu środka odcinka (rzeczywistego albo urojonego) M_1M_2 są

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad \text{albo} \quad \frac{x_1 - x_1}{2} = 0, \quad \frac{y_1 - y_1}{2} = 0;$$

więc początek jest środkiem odcinka M_1M_2.

Jeżeli uważy się punkta rzeczywiste, można dać dowodzenie geometryczne w sposób następujący:

Niech będzie, $M(x, y)$ punkt rzeczywisty krzywej, istnieje wtedy na krzywej drugi punkt M', którego spółrzędnemi będą $-x$ i $-y$. Otrzyma się więc w dwóch trójkątach OMP, OM'P' (dwa punkta M i M' będą w kątach przeciwnych)

$$OP = OP', \qquad MP = M'P';$$

otóż kąt $\widehat{MPO} = \widehat{M'P'O}$; dwa trójkąty są tem samem równe; z równości tych trójkątów wypada że kąt $\widehat{POM} = \widehat{P'OM'}$, więc trzy punkta M, O, M', są w linii prostej; i $OM = OM'$. Ten związek ma miejsce dla wszystkich punktów rzeczywistych krzywej.

Więc *aby początek był środkiem, potrzeba i dość jest aby dwa równania* $f(x, y) = 0$ i $f(-x, -y) = 0$ *miały wszystkie ich rozwiązania wspólne; albo potrzeba i dość jest aby równanie krzywej nie zmieniało się kiedy się w niem zastąpi* x *i* y *przez* $-x$ *i* $-y$.

Kiedy krzywa jest algebraiczna, warunek konieczny i dostateczny aby początek był środkiem jest aby wszystkie wyrazy były tej samej parzystości.

Uwaga I. Powiedzieliśmy że równania

$$f(x, y) = 0, \qquad f(-x, -y) = 0;$$

powinny mieć *wszystkie ich rozwiązania wspólne.* W rzeczy samej dwa równania mogą mieć mnóstwo rozwiązań wspólnych, nie mając przecież wszystkich ich rozwiązań wspólnych.

Na przykład dwa równania

$$\varphi(x, y).F(x, y) = 0,$$

$$\varphi(x, y).F_1(x, y) = 0;$$

mają wiele rozwiązań wspólnych, które są rozwiązaniami na $\varphi(x, y) = 0$, lecz one nie mają wszystkich ich rozwiązań wspólnych, ponieważ funkcye $F(x, y)$ i $F_1(x, y)$ są przypuszczone różne.

Wypada ztąd że jeżeli funkcye $f(x, y)$ i $f(-x, -y)$, mają dzielnik wspólny $\varphi(x, y)$, nie będą one miały wszystkich ich rozwiązań wspólnych; początek nie będzie środkiem.

To wreszcie nie może mieć miejsca jak tylko jeżeli pierwsza strona równania krzywej jest rozkładalną, na przykład :

$$f(x, y) = \varphi(x, y).F(x, y);$$

może zdarzyć się wtedy że jedna z krzywych częściowych mogłaby mieć za środek początek, podczas gdy to nie miałoby miejsca dla drugiej; w tym przypadku początek nie jest środkiem układu albo krzywej złożonej.

Uwaga II. Przypuśćmy krzywą algebraiczną :

Kiedy krzywa jest rzędu nieparzystego, środek jest koniecznie na krzywej; ten punkt będzie punktem pojedyńczym albo *punktem wielokrotnym rzędu nieparzystego;* styczne w tym punkcie s zawsze stycznemi przegięcia. Wszystkie te wnioski są widoczne, biorąc środek za początek spó rzędnych.

537. Niech będą x_0, y_0, spółrzędne środka krzywej

$$f(x, y) = 0;$$

jeżeli się przeniesie osie w ten punkt, równanie staje się

$$f(x' + x_0, y' + y_0) = 0. \tag{1}$$

Otóż nowy początek będąc środkiem, równanie (1) i równanie następujące

$$f(-x' + x_0, -y' + y_0) = 0, \tag{2}$$

mają wszystkie ich rozwiązania wspólne. Przeto, wyrugowawszy jedną ze zmiennych, y' na przykład, między równaniami (1) i (2), dojdzie się do związku, takiego jak

$$\varphi(x', x_0, y_0) = 0, \tag{3}$$

który musiałby sprowadzić się do tożsamości, kładąc w nim za x_0 i y_0 wartości spółrzędnych środka. Związek (3) posłuży więc, wyrażając że tożsamość ma miejsce, do wyznaczenia ilości x_0 i y_0, jeżeli one są nieznane.

Jeżeli krzywa jest algebraiczną, ta metoda rachunku uprości się; gdyż dość wtedy szukać, czyby nie można było korzystając z nieoznaczoności na x_0 i y_0, w ten sposób uprościć równanie (1) aby ono nie zawierało w sobie jak tylko wyrazy tej samej parzystości.

Widzimy przez to że jakakolwiek krzywa nie ma ogólnie środka, ponieważ nie można rozporządzać jak tylko dwiema nieoznaczonemi, i że liczba wyrazów które musi się znieść jest ogólnie wyższą od dwóch.

Ten wniosek nie ma miejsca dla krzywych drugiego rzędu; krzywe drugiego rzędu mają ogólnie środek.

Uwaga. Liczba warunków, aby krzywa rzędu m miała środek, jest równa

$$\left[\frac{m(m+2)}{4}-2\right], \quad \text{jeżeli } m \text{ jest parzystem,}$$

albo

$$\left[\frac{(m+1)^2}{4}-2\right], \quad \text{jeżeli } m \text{ jest nieparzystem,}$$

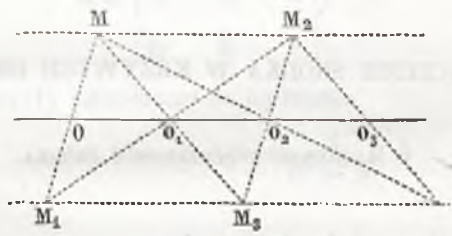
II° Twierdzenie o środkach.

538. Jeżeli krzywa ma dwa środki, ona ma ich niezliczone mnóstwo w linii prostej i równooddalonych.

Niech będą O i O_1 dwa środki, i M jakikolwiek punkt krzywej; złączmy MO, potem weźmy $OM_1 = OM$; złączmy M_1O_1, potem weźmy $O_1M_2 = O_1M_1$; złączmy nakoniec MO_1, i weźmy $O_1M_3 = O_1M$; trzy punkta M_1, M_2, M_3 należą do krzywej. Prosta M_2M_3 spotyka linią OO_1 w punkcie O_2; dowiedziemy, że jakimkolwiek bądź jest punkt M, punkt O_2 pozostaje stałym, i że ma się zawsze $O_2M_2 = O_2M_3$.

Ponieważ dwa trójkąty $M_2O_1M_3$ i MO_1M_1 są równe, wynika zląd że linia (łącząca wierzchołek ze środkiem boku) OO_1 przechodzi przez środek M_2M_3, i że $OO_1 = O_1O_2$; więc

$$O_1O_2 = OO_1, \qquad O_2M_2 = O_2M_3.$$



Tak więc punkt O_2 dzieli na dwie części równe cięciwy przezeń przechodzące, punkt O_2 jest środkiem krzywej.

Z istnienia dwóch środków O_1, O_2 wyprowadzi się tak samo istnienie trzeciego środka O_3; i t. d.

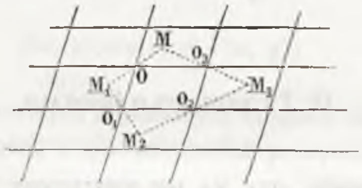
Widzimy że jakiemukolwiek punktowi M krzywej odpowiada niezliczone mnóstwo punktów leżących na równoległych do linii środków i w przedziałach równych; krzywa jest przestępną, ponieważ ona jezt przeciętą w niezliczonem mnóstwie punktów przez równoległą do linii środków. Wszakże może się zdarzyć że prosta algebraiczna ma niezliczone mnóstwo środków w linii prostej, kiedy pierwsza strona jej równania rozkłada się na czynniki linijne, które zrównane z zerem dają proste równoległe równooddalone parami od drugiej prostej; wszystkie punkta tej ostatniej prostej będą wtedy środkami względem krzywej utworzonej przez układ prostych równoległych. Ztąd:

Kiedy krzywa algebraiczna ma niezliczone mnóstwo środków w linii prostej, ta krzywa składa się z układu prostych równoległych równooddalonych od tejże samej prostej.

To ostatnie podanie może się dowieść łatwo, biorąc za oś prostą przechodzącą przez dwa środki.

539. *Kiedy krzywa ma trzy środki nie w linii prostej, ona przypuszcza niezliczone ich mnóstwo leżących w przecięciach dwóch układów równoległych i równooddalonych.*

Niech będą O, O_1, O_2, trzy środki krzywej, i M jakikolwiek z jej punktów. Złączmy MO i $OM_1 = OM$; potem M_1O_1, i niech będzie $O_1M_2 = O_1M_1$; potem M_2O_2, i niech będzie $O_2M_3 = O_2M_2$; trzy punkta M_1, M_2, M_3, należą do krzywej.



Złączmy MM_3, i niech będzie O_3 środek tej prostej; figura $OO_1O_2O_3$ jest równoległobokiem, ponieważ punkta O, O_1, O_2, O_3 są środkami boków czworoboku $MM_1M_2M_3$. Gdyby się wzięło inny punkt M′ krzywej, doszłoby się do tegoż samego wniosku, punkt O_3 jest więc środkiem krzywej.

To założywszy, biorąc za punkt wyjścia środek O_1 zamiast O, znajdzie się drugi równoległobok; środki tym sposobem otrzymane prowadzą również do nowych równoległoboków, i t. d. Więc.....

Przykład:

$$\text{wst}\, y = \frac{1}{2}\,\text{wst}\, x;$$

wykreślić krzywą, wyznaczyć wszystkie środki.

§ II. — WYZNACZENIE ŚRODKA W KRZYWYCH DRUGIEGO RZĘDU,

I° Rachunek spółrzędnych środka.

540. Niech będzie równanie krzywej drugiego rzędu

$$(1) \qquad f(x,\ y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

jeżeli x_0 i y_0 są spółrzędnemi środka krzywej i gdy się przeniesie początek w ten punkt, równanie krzywej stanie się

$$(2) \qquad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + x'f'_{x_0} + y'f'_{y_0} + f(x_0,\ y_0) = 0.$$

Otóż, początek będąc środkiem tej krzywej, równanie (2) nie będzie mogło zawierać w sobie jak tylko wyrazy tej samej parzystości; przeto powinno się módz tak rozporządzić x_0 i y_0 aby się znosiły wyrazy pierwszego stopnia; jest się tym sposobem przywiedzionym do równań warunkowych

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} f'_{x_0} = Ax_0 + By_0 + D = 0; \\ \frac{1}{2} f'_{y_0} = Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases}$$

Widzimy więc że ogólnie krzywa drugiego rzędu ma środek.

Kiedy się odniesie krzywą do jej środka, to jest kiedy się weźmie środek za początek, równanie krzywej bierze kształt

$$(4)\qquad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0,$$

gdzie się założyło

$$(4\ bis)\qquad F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

Mając wzgląd na związki (3), wartość na F' uprości się; dodając związki (2) względnie pomnożone przez x_0 i y_0, wypadnie

$$(5)\qquad F' = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{1}{2} f'_{z_0};$$

wartość która mogłaby się jeszcze napisać, wychodząc z tożsamości

$$x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} = 2f(x_0, y_0, z_0) = 2F'.$$

Tak więc, *kiedy się odniesie krzywą drugiego rzędu do jej środka :*

1° *Spółczynniki wyrazów drugiego stopnia nie zmieniają się ;*

2° *Wyrazy pierwszego stopnia znoszą się ;*

3° *Wyraz niezależny jest połową pochodnej względem z pierwszej strony równania zrobionego jednorodnem, pochodnej w której x i y powinny być zastąpionemi przez spółrzędne środka względne do dawnych osi.*

Wykonywając rachunek wyrazu stałego, i oznaczywszy przez Δ wyznacznik

$$(8)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

znajduje się na równanie krzywej (1) odniesionej do jej środka

$$(6)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \frac{\Delta}{B^2 - A}$$

II° Dyskussya.

541. Jeżeli w równaniach (3) zastąpi się x_0 i y_0 przez x i y, ma się dwa równania

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} f'_x = Ax + By + D = 0, \\ \frac{1}{2} f'_y = Bx + Cy + E = 0; \end{cases}$$

przedstawiające dwie proste, których przecięcie wyznaczy środek krzywej.

To założywszy, trzy przypadki mogą się przedstawić :

Pierwszy przypadek. *Dwie proste* (7) *przecinają się*. Aby to miało miejsce, potrzeba aby ich spółczynniki kątowe były różne, to jest żeby było $-\frac{A}{B} \gtrless -\frac{B}{C}$, albo $B^2 - AC \gtrless 0$; wtedy jest środek jedyny, jestto przypadek elipsy i hyperboli.

Drugi przypadek. *Dwie proste są równoległe.* Ich spółczynniki kątowe powinny być równe, co daje $B^2 - AC = 0$; jestto przypadek paraboli. Ten drugi przypadek wynika z pierwszego, przypuściwszy że funkcya $(B^2 - AC)$ dąży w sposób ciągły do zera; więc w paraboli środek znajduje się przeniesionym w nieskończoność równolegle do kierunku wspólnego dwóch prostych $f'_x = 0$, $f'_y = 0$.

Trzeci Przypadek. *Dwie proste* (17) *zlewają się w jedną*. Spółczynniki dwóch równań są wtedy proporcyonalnymi, i ma się warunki

(8) $$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}.$$

W tym przypadku jest niezliczone mnóstwo środków w linii prostej; krzywa składa się więc z prostych równoległych n^{er} (538); i ponieważ krzywa jest drugiego stopnia liczba tych prostych jest równą dwom.

Wynika z tej dyskussyi że można podzielić krzywe drugiego rzędu na trzy klassy :

1°	*Środek jedyny*............	Rodzaj ellipsy, Rodzaj hyperboli,
2°	*Środek w nieskończoności*....	Parabola,
3°	*Niezliczone mnóstwo środków.*	Dwie proste równoległe.

Uwaga I. Powiedzieliśmy że w paraboli środek był w nieskończoności na kierunku osi. Winniśmy znaleźć w tym przypadku szczególnym ślad własności ogólnej środków, i oto w jaki sposób można go pojmować : prosta przechodząca przez środek (w nieskończoności) paraboli jest albo w nieskończoności, albo równoległą do osi. W pierwszym przypadku ona dotyka się paraboli, dwa punkta zlewają z sobą; w drugim przypadku ona spotyka krzywą w jednym punkcie w odległości skończonej i w drugim punkcie w nieskończoności, co wyznaczy odcinek nieskończony którego środek jest koniecznie w nieskończoności.

Uwaga II. Można sprawdzić przez rachunek że w trzecim przypadku krzywa sprowadza się do dwóch prostych równoległych. Rozłóżmy na kwadraty równanie (1); znajduje się zawsze jeden ze spółczynników kwadratów który nie jest zerem; gdyż w przeciwnym razie, dwie proste nie mogłyby zlać się z sobą chyba gdyby A, B, C, były zerami razem; otrzymałoby się wtedy dwie proste z których jedna w nieskończoności. Niech będzie $A \gtrless 0$; otrzyma się, tworząc kwadrat względem wyrazów na x.

$$(Ax + By + D)^2 + (AC - B^2)y^2 + 2(AE - BD)y + AF - D^2 = 0.$$

Otóż, jeżeli ma się wzgląd na związki (8), to ostatnie równanie sprowadza się do wyrażenia

$$(Ax + By + D)^2 + AE - D^2 = 0;$$

równanie przedstawiające widocznie dwie proste równoległe.

UWAGA III. WARUNEK ABY RÓWNANIE OGÓLNE DRUGIEGO STOPNIA PRZEDSTAWIAŁO DWIE PROSTE.

Otrzymaliśmy już przez różne metody ten warunek [zobacz n^ra (315), (351). Zauważymy tu jedynie że ten warunek wyraża aby środek był na krzywej.

Wróćmy do rachunków: Jeżeli x_0, y_0 są spółrzędnemi punktu spotkania dwóch prostych, przeniosłszy osie w ten punkt, równanie (1) stanie się

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+x'f'_{x_0}+y'f'_{y_0}+f(x_0,\ y_0)=0;$$

ponieważ to równanie przedstawia dwie proste które przechodzą przez początek, więc ono powinno być jednorodnem; twierdzenie odwrotne jest widocznie prawdziwem. Więc aby równanie ogólne drugiego stopnia przedstawiało dwie proste, potrzeba i dość jest żeby było

$$(9)\qquad f'_{x_0}=0,\qquad f'_{y_0}=0,\qquad f(x_0,\ y_0)=0.$$

Lecz według związku tożsamościowego

$$x_0f'_{x_0}+y_0f'_{y_0}+z_0f'_{z_0}=2f(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

trzy związki poprzedzające stają się

$$f'_{x_0}=0,\qquad f'_{y_0}=0,\qquad f'_{z_0}=0;$$

albo uwyraźniając

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+Dz_0=0,\\ Bx_0+Cy_0+Ez_0=0,\\ Dx_0+Ey_0+Fz_0=0. \end{cases}$$

Warunek szukany otrzyma się rugując x_0, y_0, z_0, między temi trzema ostatniemi równaniami, co daje

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F \end{vmatrix} \quad \text{albo} \quad \Delta=0.$$

Ten warunek mógłby się wyprowadzić z równania (6) n^ru (540).

Otóż jeżeli zauważy się równania (9), dwa pierwsze wyznaczą środek, a ostatnie wyraża że środek jest na krzywej.

WIĘC ABY KRZYWA DRUGIEGO RZĘDU SPROWADZAŁA SIĘ DO DWÓCH PROSTYCH, POTRZEBA I DOŚĆ JEST ABY ŚRODEK BYŁ NA KRZYWEJ.

Można uzasadnić to podanie bezpośrednio uważywszy, że jeżeli środek jest na krzywej, otrzyma się trzy punkta krzywej w linii prostej; a tem samem, prosta będzie tworzyć część krzywej, ponieważ krzywa drugiego stopnia właściwie nazwana nie może być spotkaną przez prostą w więcej jak dwóch punktach.

Kiedy krzywa drugiego rzędu sprowadza się do układu dwóch prostych, punkt spotkania jest punktem podwójnym krzywej; i odwrotnie.

Biegunowe jakiegokolwiek punktu przechodzą wtedy przez ten punkt podwójny.

542. Środek jest biegunem prostej w nieskończoności, i odwrotnie.

Biegun jakiejkolwiek prostej

$$mx + ny + pz = 0,$$

jest wyznaczony przez równania

$$\frac{f'_{x_0}}{m} = \frac{f'_{y_0}}{n} = \frac{f'_{z_0}}{p};$$

otóż jeżeli prosta jest w nieskończoności, ma się $m = 0$, $n = 0$, zkąd wypada

$$f'_{x_0} = 0, \quad f'_{y_0} = 0,$$

równania wyznaczające środek. Tym sposobem środek jest biegunem prostej w nieskończoności.

Biegunową środka jest prosta w nieskończoności. W rzeczy samej, biegunową punktu (x_0, y_0, z_0) jest

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0;$$

otóż, jeżeli ten punkt jest środkiem, ma się $xf'_{x_0} = 0$, $yf'_{y_0} = 0$, $f'_{z_0} \gtrless 0$; zkąd wypada

$$z = 0;$$

jestto prosta w nieskończoności.

III° Spółrzędne trzylinijne.

543. Możnaby dać teoryą ogólną poszukiwania środków w układzie spółrzędnych trzylinijnych; zajmiemy się tylko wskazaniem jej punktu wyjścia. Szukajmy na przykład w jaki sposób mogłoby się dojść do warunków aby wierzchołek A trójkąta odniesienia był środkiem krzywej danej przez jej równanie w spółrzędnych trzylinijnych

(1) $$f(X, Y, Z) = 0.$$

Niech będzie naprzód

(2) $$mX + nY + pZ = 2S,$$

związek który powinny sprawdzać spółrzędne trzylinijne jakiegokolwiek punktu.

Jeżeli wierzchołek A jest środkiem krzywej, jakiemukolwiek punktowi M_0 tej krzywej, którego Y i Z są równe na przykład Y_0 i Z_0, musi zawsze odpowiadać drugi punkt M'_0, którego Y i Z są $-Y_0$ i $-Z_0$; i odwrotnie.

Dowodzenie jest toż samo jak w numerze (536).

Lecz aby to miało miejsce, warunki analityczne są wcale inne od tych które były wysłowione w numerze przytoczonym; nie należałoby się z tego zgoła wnosić że równanie (1) nie powinno się zmieniać kiedy się w niem zastąpi Y i Z przez $-Y$ i $-Z$. Pochodzi to ztąd że równanie (1) wyznaczy tylko stosunki $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$, i że X jest spojonem z Y i Z przez związek (2).

Oto w jaki sposób możnaby poszukiwać warunków aby wierzchołek A był śodkiem krzywej.

Ze związku (2) wyciągamy

$$X = K + T,$$

położywszy

(3) $$K = \frac{2S}{m}, \quad \text{i} \quad T = -\frac{n}{m}Y - \frac{p}{m}Z,$$

T jest funkcya linijna i jednorodna względem Y i Z. Równanie krzywej staje się wtedy

$$f(T + K, Y, Z) = 0;$$

albo rozwijając przez wzór *Taylora:*

(4) $$f(T, Y, Z) + Kf'_x(T, Y, Z) + \frac{K^2}{1.2}f''_{xx}(T, Y, Z) + \frac{K^3}{1.2.3}f'''_{xxx}(T, Y, Z) + \ldots = 0.$$

Ponieważ równanie (4) zawiera tylko w sobie Y i Z; potrzeba i dość jest, aby punkt A był środkiem, żeby to równanie nie zmieniało się kiedy się w niem zastąpi Y i Z przez — Y i — Z, to jest żeby wszystkie wyrazy były tej samej parzystości.

Otóż pochodne f', f'',... są jednorodnemi w Y i Z; ponieważ T jest funkcyą linijną i jednorodną na Y i Z, koniecznem i wystarczającem jest aby pochodne rzędu nieparzystego f'_x, f'''_{xxx}, f^{v}_{xxxxx},... etc. były tożsamościowo zerami, zastąpiwszy w nich X przez T.

ZASTOSOWANIE.

Niech będzie krzywa drugiego rzędu

$$A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0.$$

Aby wierzchołek A był środkiem, potrzeba aby pochodna

$$f'_x(T, Y, Z) \quad \text{to jest} \quad A_{11}T + A_{12}Y + A_{13}Z,$$

była tożsamościowo zerem; otóż zastąpiwszy T wypadnie

$$m(A_{12}Y + A_{13}Z) - A_{11}(nY + pZ);$$

zkąd wynika

$$\frac{A_{11}}{m} = \frac{A_{12}}{n} = \frac{A_{13}}{p};$$

takimi są warunki szukane.

544. W przypadku krzywych drugiego rzędu wyznaczymy środek według tej własności n^ru (542): *że jest on biegunem prostej w nieskończoności.*

Niech będzie krzywa drugiego stopnia

(1) $$f(X, Y, Z) = 0,$$

i

(2) $$mX + nY + pZ = 2S,$$

związek który powinny spzawdzać spółrzędne trzylinijne jakiegokolwiek punktu; równaniem prostej w nieskończoności jest n^er (96)

(3) $$mX + nY + pZ = 0.$$

Biegun (X_0, Y_0, Z_0) tej prostej albo *środek* krzywej (1) będzie wyznaczonym przez równania następujące n^er (453)

$$(4) \qquad \frac{f'_{X_0}}{m} = \frac{f'_{Y_0}}{n} = \frac{f'_{Z_0}}{p}.$$

§ III. — RÓWNANIA STYCZNECZKOWE.

Zajmiemy się tu wyznaczeniem środka tylko dla krzywych drugiej klassy.

I° Spółrzędne (dwulinijne) u, v.

545. Mogłoby się uważać że kiedy początek spółrzędnych jest środkiem, jakiejkolwiek stycznej (u, v) odpowiada zawsze druga styczna $(-u, -v)$, i odwrotnie; to wynika z określenia środka. Wzory przekształcenia n^ru (356) pozwolą nam wyznaczyć środek w przypadku równania ogólnego. Ta uwaga da się zastosować do krzywej jakiejkolwiek klassy, i prowadzi bez trudności do ogólnego wyznaczenia środka, w układzie spółrzędnych (u, v).

546. Dla krzywych drugiej klassy ograniczymy się na zastosowaniu własności następującej, która z powodu uwag n^ru (467), wypływa z podania n^ru (542), to jest: *Środek krzywej drugiej klassy jest punktem biegunowym prostej w nieskończoności.*

Równanie krzywej będąc

$$(1) \qquad f(u, v, w) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0,$$

punkt biegunowej prostej (u_0, v_0, w_0) ma na równanie

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0.$$

Prosta w nieskończoności ma za spółrzędne $u_0 = 0$, $v_0 = 0$; więc równaniem środka krzywej (1) będzie

$$(2) \qquad f'_w = 0, \qquad \text{albo} \qquad Du + Ev + F = 0.$$

To będzie początek spółrzędnych jeżeli E i D są zerami.

Więc, *aby początek spółrzędnych był środkiem, potrzeba i dość jest aby równanie nie zmieniało się kiedy się w niem zmieni* w *na* — w.

II° Spółrzędne trzylinijne.

547. Zastosujmy jeszcze zasadę poprzedzającą. Niech będzie

$$(1) \qquad f(U, V, W) = 0,$$

równanie ogólne krzywej drugiej klassy. Jeżeli λ, μ, ν; są *parametrami odniesienia*, spółrzędnemi prostej w nieskończoności będą λ, μ, ν; punkt biegunowy tej prostej, to jest *środek* krzywej (1) otrzyma na równanie n^er (465)

$$(2) \qquad \lambda f'_U + \mu f'_V + \nu f'_W = 0,$$

albo

$$(2\ bis) \qquad Uf' + Vf' + Wf'_\nu = 0.$$

ROZDZIAŁ VI.

TEORYA ŚREDNIC.

---

§ I. — OKREŚLENIE I WIADOMOŚCI OGÓLNE.

I° Określenie i równanie średnic.

548. Nazywa się średnicą krzywej miejsce środków średnich odległości punktów przecięcia z krzywą jakiejkolwiek siecznej równoległej do kierunku danego.

W przypadku krzywych drugiego rzędu, można wyrzec że:

Średnica jest miejscem środków cięciw równoległych w kierunku stałym.

To określenie ogólne średnic było danem przez Newtona (*Enumeratio linearum, tertii ordinis, anno* 1706), który wysłowił podanie następujące:

W krzywej jakiegokolwiek rzędu średnice są liniami prostemi.

Aby dowieść tego podania, weźmiemy równanie krzywej pod kształtem

$$(1)\qquad \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0.$$

Jeżeli a jest spółczynnikiem kątowym kierunku danego, jakakolwiek sieczna otrzyma na równanie

$$(2)\qquad y = ax + \lambda,$$

λ będąc *ilością nieoznaczoną*.

Oznaczywszy przez x_1, y_1; x_2, y_2;... spółrzędne m punktów przecięcia tej siecznej z krzywą, środek średnich odległości tego układu otrzyma za spółrzędne

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots x_m}{m}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots y_m}{m}; \end{cases}$$

x i y muszą nadto sprawdzać związek (2).

Dla wyznaczenia x punktów przecięcia, napiszemy równanie (1) w sposób następujący

$$(4)\qquad x^m\varphi_m\left(1,\,\frac{y}{x}\right)+x^{m-1}\varphi_{m-1}\left(1,\,\frac{y}{x}\right)+\ldots=0;$$

potem z równania (2) wyciągniemy

$$\frac{y}{x}=\mathrm{a}+\frac{\lambda}{x};$$

podstawiając tę wartość na $\frac{y}{x}$ w równaniu (4), rozwinąwszy każdy wyraz przez wzór Taylor'a, potem uporządkowawszy, znajduje się :

$$(5)\qquad x^m\varphi_m(1,\,\mathrm{a})+x^{m-1}[\varphi_{m-1}(1,\,\mathrm{a})+\lambda\varphi'_m(1,\,\mathrm{a})]+x^{m-2}[\ldots]+\ldots=0.$$

Biorąc summę pierwiastków tego równania, ma się

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=-\frac{\varphi_{m-1}(1,\,\mathrm{a})+\lambda\varphi'_m(1,\,\mathrm{a})}{\varphi_m(1,\,\mathrm{a})};$$

zkąd wnosimy dla odciętej x jakiegokolwiek punktu miejsca

$$(6)\qquad x=-\frac{\varphi_{m-1}(1,\,\mathrm{a})+\lambda\varphi'_m(1,\,\mathrm{a})}{m\varphi_m(1,\,\mathrm{a})};$$

φ'_m oznacza pochodną funkcyi φ_m względem y.

Wyrugowawszy λ między równaniami (2) i (6), znajduje się na *równanie miejsca prostą*

$$(7)\qquad x[m\varphi_m(1,\,\mathrm{a})-\mathrm{a}_y\varphi'_m(1,\,\mathrm{a})]+y_y\varphi'_m(1,\,\mathrm{a})+\varphi_{m-1}(1-\mathrm{a})=0;$$

podanie jest więc dowiedzionem.

Można dać temu ostatniemu równaniu kształt symetryczniejszy.

Funkcya $\varphi_m(x,\,y)$ będąc jednorodną, ma się tożsamość

$$x_x\varphi'_m(x,\,y)+y_y\varphi'_m(x,\,y)=m\varphi_m(x,\,y);$$

zkąd wypada, robiąc $x=1,\ y=a,$

$$_x\varphi'_m(1,\,\mathrm{a})+\mathrm{a}_y\varphi'_m(1,\,\mathrm{a})=m\varphi_m(1,\,\mathrm{a}).$$

Równanie średnicy odpowiadającej kierunkowi cięciw $y-ax=0$, będzie więc

$$(8)\qquad x_x\varphi'_m(1,\,\mathrm{a})+y_y\varphi'_m(1,\,\mathrm{a})+\varphi_{m-1}(1,\,\mathrm{a})=0.$$

Porównawszy to równanie z równaniem (5) n^ru (436), wnosimy że :

Średnica jest biegunową punktu w nieskończoności na kierunku cięciw, któremu odpowiada ta średnica.

Ten wniosek wynika także bezpośrednio z określenia biegunowej jakiegokolwiek punktu; określenia przedstawionego przez równość

$$\frac{\mathrm{MA}_1}{\mathrm{PA}_1}+\frac{\mathrm{MA}_2}{\mathrm{PA}_2}+\ldots+\frac{\mathrm{MA}_m}{\mathrm{PA}_m}=0.$$

Uwaga. Widzimy przez równanie (8) że jeżeli równanie krzywej nie zawiera w sobie wyrazu stopnia $(m-1)$, $\varphi_{m-1}(1, a)$ jest zerem; wtedy wszystkie średnice przechodzą przez początek, jakimkolwiek bądź jest kierunek cięciw.

549. Jest ogólnie $(m-1)$ średnic równoległych w kierunku danym.

Niech będzie, w rzeczy samej, k spółczynnik kątowy kierunku danego, i a spółczynnik kątowy cięciw którym odpowiadają średnice szukane, musi się mieć według równania (8):

$$(9) \qquad -\frac{{}_x\varphi'_m(1, a)}{{}_y\varphi'_m(1, a)} = k;$$

równanie stopnia $(m-1)$ względem nieznanej a; ono da $(m-1)$ wartości na kierunek a cięciw; a ponieważ każdej wartości na a odpowiada jedyna średnica, jest więc $(m-1)$ średnic równoległych do kierunku danego.

550. Jest ogólnie m średnic prostopadłych do ich cięciw.

W rzeczy samej aby to miało miejsce potrzeba żeby było

$$a\left(-\frac{{}_x\varphi'_m(1, a)}{{}_y\varphi'_m(1, a)}\right) = -1,$$

albo

$$(10) \qquad a\,{}_x\varphi'_m(1, a) - {}_y\varphi'_m(1, a) = 0;$$

równanie stopnia m względem nieznanej a; jest więc m średnic prostopadłych do ich cięciw. Jest więc ich *dwie*, w krzywych drugiego rzędu.

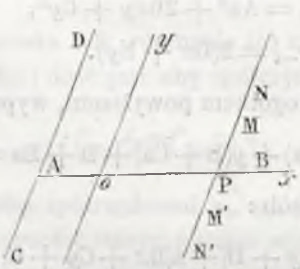
II° Wiadomość szczegółowsza o średnicach.

551. Oznacza się często nazwiskiem średnic proste dzielące na dwie części równe cięciwy równoległe w pewnym kierunku. Te średnice noszą nazwisko osi gdy są prostopadłemi do cięciw, które dzielą na dwie części równe. Jest widocznem że to nie zdarza się jak tylko bardzo przypadkowo że krzywe posiadają te linie; w krzywych drugiego rzędu przeciwnie one się przedstawiają koniecznie.

Wskażmy kierunek poszukiwań służących do rozpoznania czy krzywa ma średnice prostolinijne i czy ona ma osie.

Przypuśćmy że prosta AB jest średnicą krzywej i że cięciwy odpowiadające są równoległemi do CD.

Weźmy średnicę za oś odciętych, i równoległą do CD za oś rzędnych; zobaczmy jakie są własności charakterystyczne które winno przedstawiać równanie krzywej.



Według założenia przyjętego oś odciętych dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do osi rzędnych, to jest że jakiejkolwiek wartości na x winny odpowiadać dla y wartości tworzące wszystkie pary równe i znaków przeciwnych.

Równanie krzywej nie powinno więc zawierać w sobie jak tylko potęgi parzyste na y.

Odwrotnie: Jeżeli równanie nie zawiera w sobie jak tylko potęgi parzyste na y, oś odciętych winna dzielić na dwie części równe wszystkie cięciwy równoległe do osi rzędnych; innemi słowy, oś odciętych będzie średnicą prostolinijną cięciw równoległych do osi Oy. W rzeczy samej, jeżeli da się na x pewną wartość, otrzyma się równanie zawierające w sobie tylko potęgi parzyste na y, i których pierwiastki będą parami równe i znaków przeciwnych.

Aby Ox było osią krzywej, potrzeba i dość jest aby osie spółrzędnych będąc prostokątnemi, równanie krzywej zawierało w sobie tylko potęgi parzyste na y.

Wtedy dla rozpoznania czy krzywa ma średnice prostolinijne, odniesie się ją do nowych osi; będzie można przypuścić że nowa oś O$'x'$ jest średnicą cięciw równoległych do O$'y'$; to jest że będzie można rozporządzić stałemi wprowadzonemi przez wzory przekształcenia spółrzędnych w ten sposób, aby nowe równanie nie zawierało w sobie jak tylko potęgi parzyste na y.

Dla rozpoznania czy krzywa ma osie, użyje się tej samej metody; dość tylko na to przypuścić nowe osie prostokątnemi.

Uprości się nieco te poszukiwania zostawiając nowy początek na jednej z dawnych osi.

§ II. — POSZUKIWANIE ŚREDNIC W KRZYWYCH DRUGIEGO RZĘDU.

I° Równanie średnic.

552. Równanie ogólne krzywych drugiego rzędu jest

$$(1) \qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Pierwsza metoda.

W krzywych drugiego rzędu średnica jest miejscem środków cięciw równoległych w kierunku danym.

To określenie jest przypadkiem szczególnym określenia ogólnego danego w numerze (548); równanie średnicy w krzywych drugiego rzędu, wyciągnie się więc z równania ogólnego średnic numeru (548):

$$x_x\varphi_m(1, a) + y_y\varphi'_m(1, a) + \varphi_{m-1}(1, a) = 0.$$

W przypadku danym ma się

$$\varphi_m = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2;$$
$$\varphi^m_{-1} = 2(Dx + Ey).$$

Podstawiając te wartości w równaniu ogólnem powyższem, wypadnie

$$x(A + Ba) + y(B + Ca) + D + Ea = 0,$$

równanie mogące się napisać w ten sposób:

$$(Ax + By + D) + a(Bx + Cy + E) = 0;$$

albo

$$(2) \qquad f'_x + af'_y = 0.$$

553. Druga metoda.

Metoda którą wyłożymy da się zastosować do kwestyi następującej:

« Znaleźć dla krzywej jakiegokolwiek rzędu, miejsce środków cięciw równoległych w kierunku » danym.

Niech będzie AB cięciwa równoległa w kierunku danym

$$y - mx = 0,$$

m jest spółczynnikiem kątowym; niech będą x_0, y_0, spółrzędne punktu środka M.

Przenieśmy osie równolegle do ich pierwotnego położenia w punkcie (x_0, y_0), wzorami przekształcenia będą

$$x = x_0 + x';$$

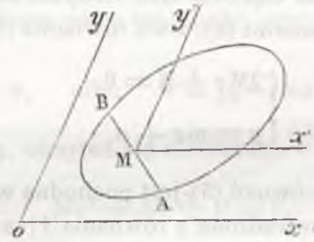
$$y = y_0 + y'.$$

Równanie (1) krzywej drugiego rzędu stanie się

$$f(x' + x_0, y' + y_0) = 0,$$

albo rozwijając

$$(3) \qquad f(x_0, y_0) + x'f'_{x_0} + y'f'_{y_0} + (Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2) = 0.$$



Względem nowego układu osi, równanie cięciwy AB będzie

$$y' = mx'.$$

Otrzymamy odcięte punktów przecięcia A i B tej prostej z krzywą, zastąpiwszy y' przez mx' w równaniu (3), co daje

$$(4) \qquad f(x_0, y_0) + x'[f'_{x_0} + mf'_{y_0}] + (A + 2Bm + Cm^2)x'^2 = 0.$$

Otóż punkt M będąc środkiem odcinka AB, równanie (4) musi przypuścić dwa pierwiastki równe i znaków przeciwnych. Na to potrzeba i dość jest aby spółczynnik na x był zerem; co prowadzi do

$$f'_{x_0} + mf'_{y_0} = 0.$$

Mamy tym sposobem związek między spółrzędnemi x_0, y_0, jakiegokolwiek punktu środka jakiejkolwiek z cięciw równoległych w kierunku danym; jestto więc równanie miejsca. Zniosłszy wskazówki otrzymamy na równanie średnicy odpowiadającej cięciwom spółczynnika kątowego m,

$$(5) \qquad f'_x + mf'_y = 0.$$

554. Trzecia metoda.

Niech będzie równanie drugiego stopnia

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,;$$

i m spółczynnik kątowy cięciw których szuka się miejsca środków; jakakolwiek z tych cięciw otrzyma na równanie

(2) $$y = mx + n,$$

gdzie m jest ilością daną, a n nieoznaczoną. Szukajmy przecięcia tej prostej z krzywą, to jest zastąpmy y przez $(mx + n)$ w równaniu (1), otrzyma się równanie kształtu

(3) $$Mx^2 + Nx + P = 0.$$

Niech będą A i B przecięciami cięciwy z krzywą, x i y spółrzędnemi punktu środka odcinka AB. Odcięta x punktu środka musi być równą połowie summy odciętych punktów A i B, danych przez równanie (2); otrzyma się więc pierwsze z równań następujących

(4) $$\begin{cases} x = -\dfrac{N}{2M}, \\ y = mx + n; \end{cases}$$

drugie wyraża że punkt środka jest na cięciwie AB. Otrzyma się równanie miejsca wyrugowawszy nieoznaczoną n między dwoma równaniami (4). Dwa równania (4) mogą napisać się

(5) $$\begin{cases} 2Mx + N = 0, \\ y = mx + n. \end{cases}$$

Otóż pierwsza strona pierwszego z równań (5) jest pochodną względem x, pierwszej strony równania (3); lecz równanie (3) było wyprowadzone z równania (1) zastąpiwszy w niem y przez $(mx+n)$; otrzymamy więc pierwsze równanie grupy (5), biorąc pochodną względem x pierwszej strony równania (1), bylebyśmy tylko uważali y jako równe $(mx + n)$, otrzyma się tym sposobem

$$f'_x(x, y) + mf'_y(x, y) = 0,$$

przypuszczając zawsze y zastąpionem pzzez $(mx + n)$. Otóż, aby mieć równanie miejsca potrzeba wyrugować n to jest zastąpić $(mx + n)$ przez y; równanie miejsca nie jest więc innem jak tylko ostatniem równaniem.

Tak więc równanie średnicy odpowiadającej cięciwom spółczynnika kątowego m jest

(6) $$f'_x + mf'_y = 0,$$

albo zastąpiwszy pochodne przez ich wartość wyraźną :

(7) $$x(A + Bm) + y(B + Cm) + D + Em = 0.$$

II° Średnice szczególne.

555. W rachunkach i rozumowaniach które poprzedzają przypuściliśmy że cięciwy spotykały krzywą w dwóch punktach w odległości kończonej. Może się zdarzyć że jeden z punktów przecięcia jest

w nieskończoności, równanie (3) musi przypuścić wtedy pierwiastek nieskończony; na to potrzeba i dość aby M było zerem, ma się więc

$$(8) \qquad M \quad \text{albo} \quad Cm^2 + 2Bm + A = 0;$$

znajduje się tę wartość na M obrachowując wyraz na x^2 w równaniu (3).

Uważmy że wartość na M nie zależy jak tylko od spółczynnika kątowego m; a tem samem, jeżeli cięciwa spotyka krzywą w jakimkolwiek punkcie w nieskończoności, będzie również tak samo się działo z wszelkiemi cięciwami równoległemi (cięciwy są wtedy równoległe w jakimkolwiek z kierunków assymptotycznych numeru (530)].

Nazwiemy ŚREDNICAMI SZCZEGÓLNEMI średnice odpowiadające temu kierunkowi cięciw. Szukajmy ich znaczenia.

Równanie średnic jest danem przez pierwsze z równań (5), gdzie się przypuści n zastąpionem przez $(y - mx)$; otóż, jeżeli M jest zerem, pierwsze z równań (5) sprowadza się do

$$(9) \qquad N = 0, \quad \text{N jest funkcya na } (m, n), \text{ niech będzie } \quad N = \varphi(m, n)$$

n musi tu być zastąpionem przez $(y - mx)$.

1° OTÓŻ WSZELKA CIĘCIWA, RÓWNOLEGŁA W KIERUNKU OBECNYM, MAJĄC ZE ŚREDNICĄ (9) PUNKT WSPÓLNY (x_0, y_0) W ODLEGŁOŚCI SKOŃCZONEJ, SPOTKA KRZYWĄ W DWÓCH PUNKTACH W NIESKOŃCZONOŚCI.

W rzeczy samej, cięciwa przechodząca przez ten punkt, otrzyma na równanie

$$(10) \qquad y = mx + n, \qquad \text{albo} \qquad n = y_0 - mx_0; \qquad (10\ bis)$$

jeżeli się szuka jej przecięć z krzywą, otrzyma się równanie

$$(11) \qquad Mx^2 + Nx + P = 0,$$

równanie w którem

$$M = Cm^2 + 2Bm + A, \qquad i \qquad N = \varphi(m, n).$$

Lecz M jest zerem według założenia; N jest także zerem, gdyż punkt (x_0, y_0) będąc w odległości skończonej na średnicy (9), ma się

$$\varphi(m, y_0 - mx_0) = 0, \qquad \text{albo} \qquad \varphi(m, n) = 0,$$

według wartości (10 *bis*) na n. Równanie (11) ma więc dwa pierwiastki nieskończone.

2° LECZ TUTAJ CIĘCIWY SĄ RÓWNOLEGŁE DO ŚREDNICY ODPOWIADAJĄCEJ (9).

W rzeczy samej, według równania (9) albo (7), spółczynnikiem kątowym średnicy jest

$$-\frac{A + Bm}{B + Cm},$$

i ta wartość jest równą m, mając wzgląd na związek (8).

Przeto cięciwa, którą ma ze średnicą (9) punkt wspólny w odległości skończonej, zlewa się z tą średnicą.

WIĘC ŚREDNICA SZCZEGÓLNA (9) SPOTYKA KRZYWĄ W DWÓCH PUNKTACH W NIESKOŃCZONOŚCI; TA ŚREDNICA JEST ASSYMPTOTĄ.

556. Kierunki cięciw odpowiadających średnicom szczególnym są danemi przez równanie

$$(12) \qquad Cm^2 + 2Bm + A = 0.$$

W przypadku elipsy, $B^2 - AC < 0$; średnice szczególne są urojone;

W przypadku hiperboli, $B^2 - AC > 0$; średnice szczególne są rzeczywiste, są to assymptoty;

W przypadku paraboli, $B^2 - AC = 0$, średnica szczególna jest w nieskończoności.

W rzeczy samej, równanie (7) tej średnicy jest robiąc je jednorodnem:

$$x(A + Bm) + y(B + Cm) + z(D + Em) = 0.$$

Otóż ma się według równania (12) i związku charakterystycznego paraboli

$$\frac{B}{C} = \frac{A}{B}, \qquad m = -\frac{B}{C} = -\frac{A}{B},$$

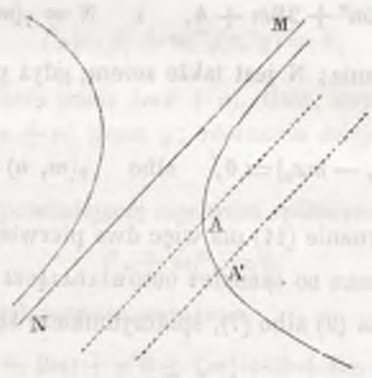
i równanie średnicy sprowadza się widocznie do

$$z = 0.$$

557. Możemy wytłumaczyć tym sposobem istnienie tej podwójnej własności assymptoty, aby była razem assymptotą i średnicą.

Weźmy hiperbolę, i niech będzie MN assymptota albo średnica szczególna.

Jeżeli się zauważy jakąkolwiek cięciwę, ona będzie równoległą do tej średnicy; nadto, ona spotyka krzywą w jakimkolwiek punkcie w odległości skończonej A, i w drugim w nieskończoności; punkt środka odpowiadający jest w nieskończoności. Będzie tak samo się działo dla wszelkich cięciw równoległych do MN, póki one spotykają MN w jakimkolwiek punkcie w odległości skończonej;



wszystkie punkta środków, odpowiadających odcinkom wyznaczonym przez te cięciwy, są w nieskończoności na średnicy MN. Lecz kiedy cięciwa spotyka średnicę w jakimkolwiek punkcie w odległości skończonej, ona zlewa się z nią ponieważ do niej jest równoległą; w tym przypadku cięciwa spotyka krzywą w dwóch punktach w nieskończoności; a tem samem jakikolwiek punkt średnicy MN może być uważany jako środek odcinka wyznaczonego przez tę cięciwę.

Uwaga. Te średnice szczególne dają się napotykać w krzywych jakiegokolwiek rzędu. Gdyż, jeżel spółczynnik kątowy a cięciwy, któremu odpowiada średnica, sprawdza związek

$$\varphi_m(1, a) = 0,$$

równanie (8) tej średnicy n^ru (548) nie jest innem jak równaniem (3) n^ru (525) assymptoty odpowiadającej kierunkowi assymptotycznemu

$$y - ax = 0.$$

III° Dyskussya równania średnic.

558. Znaleźliśmy na równanie średnicy odpowiadającej cięciwom, których spółczynnikiem kątowym jest m

(1) $$f'_x + mf'_y = 0;$$

przypomnijmy sobie także, że spółrzędne środka są wyznaczonemi n^er (540) przez równania

(2) $$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

Więc wszystkie średnice przechodzą przez środek.

Przytoczymy szczegółowiej ten wniosek.

Jeśli znajduje się środek jedyny, równanie jakiejkolwiek prostej przechodzącej przez środek będzie

(3) $$f'_x + \lambda f'_y = 0;$$

równanie które można zawsze zidentyfikować z równaniem (1) średnic, kładąc $\lambda = m$.

Więc w elipsie albo hiperboli wszystkie średnice przechodzą przez środek; i odwrotnie, wszelka prosta przechodząca przez środek jest średnicą.

Kiedy środek jest w nieskończoności, dwie proste $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ są równoległemi; można wtedy rozporządzić stałemi λ i μ tak żeby było tożsamościowo

$$f'_y = \lambda f'_x + \mu;$$

równanie (1) średnic staje się wtedy

$$(1 + \lambda m) f'_x + m\mu = 0;$$

to jest że w paraboli wszystkie średnice są równoległemi w kierunku wspólnym prostych, które wyznaczają środek.

Jeśli znajduje się niezliczone mnóstwo środków, dwie proste $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ zlewają się z sobą; można wtedy rozporządzić stałą λ tak żeby było tożsamościowo

$$f'_y = \lambda f'_x;$$

równanie (1) staje się w tym przypadku

$$(1 + \lambda m) f'_x = 0, \qquad \text{albo} \qquad f'_x = 0.$$

Więc, kiedy krzywa sprowadza się do dwóch prostych równoległych, wszystkie średnice zlewają się z linią środków.

559. Rozwinąwszy równanie (1) średnic, znajduje się

$$(1) \qquad x(\mathrm{A} + \mathrm{B}m) + y(\mathrm{B} + \mathrm{C}m) + z(\mathrm{D} + \mathrm{E}m) = 0;$$

wartość m' spółczynnika kątowego tej średnicy będzie

$$(2) \qquad m' = -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}m}{\mathrm{B} + \mathrm{C}m}.$$

1° Wartość na m' będzie niezależną od m kiedy się otrzyma

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \quad \text{zkąd} \quad \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = 0;$$

więc w paraboli wszystkie średnice są równoległe; ich spółczynnikiem kątowym jest

$$(3) \qquad m' = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}.$$

2° Przypuśćmy żeby było razem : $\mathrm{A} + \mathrm{B}m = 0$, $\mathrm{B} + \mathrm{C}m = 0$;

równanie średnicy sprowadza się wtedy

$z = 0$, albo *prosta w nieskończoności*.

Według założeń przyjętych, ma się

$$m = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}, \quad \text{i} \quad \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = 0.$$

Znajdujemy tym sposobem ŚREDNICĘ SZCZEGÓLNĄ PARABOLI. Uważymy że cięciwy odpowiadające średnicy szczególnej, które spotykają krzywą w jednym punkcie w odległości skończonej, są równoległe w kierunku wspólnym średnicom paraboli.

3° Przypuśćmy żeby było razem : $\mathrm{A} + \mathrm{B}m = 0$, $\mathrm{B} + \mathrm{C}m = 0$, $\mathrm{D} + \mathrm{E}m = 0$.

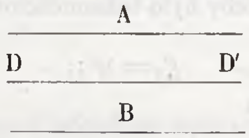
Równanie średnic sprowadza się wtedy do tożsamości; jest nieoznaczoność.

Trzy związki przypuszczone dają przez wyrugowanie m.

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}, \quad m = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}};$$

to jest że prosta sprowadza się do dwóch prostych równoległych n^er^ (541).

Zkąd pochodzi nieoznaczoność? Według tego cośmy dopiero widzieli, krzywa składa się z dwóch



prostych równoległych A i B, i co większa równoległych do linii środków DD′. Nadto, cięciwy odpowiadające przypadkowi szczególnemu o który idzie mają za spółczynnik kątowy $-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, to jest są równoległemi do linii środków. Te cięciwy spotykają więc krzywą w dwóch punktach w nieskończoności, gdyż układ dwóch prostych równoległych posiada punkt podwójny w nieskończoności n^{er} (530). Środek jakiejkolwiek z tych cięciw jest tem samem nieoznaczonym; miejsce środków, albo średnica jest zupełnie nieoznaczoną.

To tłumaczy zupełnie nieoznaczoność którą przedstawia rachunek.

Kiedy cięciwy nie są równoległemi do prostych A i B, jest dostatecznie widocznem, że miejscem środków jest prosta DD′.

IV° Podania tyczące się średnic.

560. Przypomnimy tę własność już dowiedzioną wiele razy:

Biegunowa jakiegokolwiek punktu w nieskończoności jest średnicą; odwrotnie, średnica jest biegunową jakiegokolwiek punktu w nieskończoności.

Biegunowa jakiegokolwiek punktu (x_0, y_0, z_0) jest

(1) $$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0;$$

jeżeli punkt jest w nieskończoności na prostej $y - mx = 0$, ma się

$$z_0 = 0, \qquad y_0 = mx_0;$$

zkąd wypada

(2) $$f'_x + mf'_y = 0;$$

co jest równaniem średnic.

Aby otrzymać biegun jakiejkolwiek średnicy, potrzeba zidentyfikować równania (1) i (2), co prowadzi do związków

$$\frac{x_0}{1} = \frac{y_0}{m} = \frac{z_0}{0}; \qquad \text{zkąd} \qquad z_0 = 0, \qquad y_0 = mx_0.$$

To podanie może się także wysłowić:

Cięciwą styczności dwóch stycznych równoległych jest średnica.

Rachunek jest tenże sam jak poprzedzający, ponieważ równanie (1) jest cięciwą styczności dwóch stycznych poprowadzonych przez punkt (x_0, y_0, z_0).

Albo też jeszcze, cięciwą styczności dwóch stycznych równoległych jest biegunowa jakiegokolwiek punktu w nieskończoności na kierunku tych assymptot; więc...

561. Miejsce środków cięciw przechodzących przez punkt stały.

Niech będą a i b spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu stałego P, i

(1) $$f(x, y) = 0,$$

równanie krzywej drugiego rzędu. Równanie jakiejkolwiek siecznej przechodzącej przez punkt P jest

(2) $$y - b = \lambda(x - a).$$

Punkta przecięcia siecznej z krzywą otrzymają się, zastępując y przez tę wartość w równaniu (1); otrzyma się tym sposobem równanie kształtu

(3) $$Mx^2 + Nx + P = 0.$$

Odcięta x punktu środka będzie równą połowie summy pierwiastków tego równania, otrzyma się więc

$$\begin{cases} x = -\dfrac{N}{2M}, \\ y - b = \lambda(x - a); \end{cases}$$

drugie z tych równań wyraża że punkt środka jest na siecznej.

Dla otrzymania równania miejsca, potrzeba wyrugować λ między dwoma związkami które poprzedzają. Uważmy naprzód że można je napisać

$$(4) \qquad \begin{cases} 2Mx + N = 0, \\ y - b = \lambda(x - a). \end{cases}$$

Otóż pierwsze z równań (4) jest pochodną względem x, pierwszej strony równania (3), albo pierwszej strony równania (1), kiedy się w niem przypuści y zastąpionem przez $[\lambda(x-a)+b]$.

Weźmy więc pochodną pierwszej strony równania (1) względem x, uważając tu y jako określone przez związek (2); wypadnie, równając tę pochodną z zerem

$$(5) \qquad f'_x(x, y) + \lambda f'_y(x, y) = 0.$$

otrzyma się równanie miejsca rugując λ między równaniami (5) i (2), co daje

$$(6) \qquad (x-a)f'_x + (y-b)f'_y = 0.$$

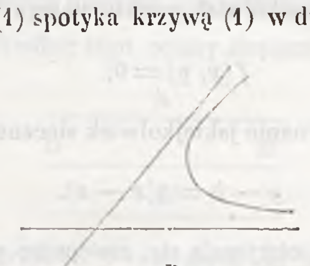
TAKIEM JEST RÓWNANIE MIEJSCA ŚRODKÓW CIĘCIW PRZECHODZĄCYCH PRZEZ PUNKT STAŁY P, JESSTO KRZYWA DRUGIEGO RZĘDU.

1° Krzywa (6) przechodzi przez środek krzywej danej, ponieważ spółrzędne środka znoszą f'_x i f'_y; ta własność jest widoczną *a priori*.

2° Krzywa (6) przechodzi przez punkt stały (a, b). Przyczyną tego jest, że prosta przechodząca przez punkt P i równoległa do biegunowej tegoż samego punktu, spotyka krzywą w dwóch punktach A i B rzeczywistych albo urojonych sprzężonych, i że punkt P jest środkiem odcinka AB.

3° Równanie krzywej (6) ma też same wyrazy drugiego stopnia jak równanie (1) krzywej danej: dwie krzywe są więc jednokładnemi, jak to zobaczymy poniżej; albo jeszcze, dwie krzywe (1) i (6) mają też same kierunki assymptotyczne.

Da się łatwo wytłumaczyć ten rezultat; gdyż prosta poprowadzona przez punkt P równoległe do jakiejkolwiek z assymptot krzywej (1) spotyka krzywą (1) w dwóch punktach, z których jeden jest



P

w nieskończoności; punkt środka jest wtedy w nieskończoności. Kierunki assymptotyczne krzywej(6) są więc równoległemi do assymptot krzywej (1). Dwie krzywe (1) i (6) przechodzą przez też same punkta w nieskończoności.

4° Krzywa (6) przechodzi przez punkta styczności stycznych poprowadzonych do krzywej (1) przez punkt stały (a, b); ten rezultat jest widocznym *a priori*.

Aby go wywieść z równania (6), uważmy że to równanie może się napisać

$$xf'_x + yf'_y - (af'_x + bf'_y) = 0,$$

albo jeszcze

$$xf'_x + yf'_y + f'_z - (af'_x + bf'_y + f'_z) = 0;$$

i nakoniec

$$(6\ bis) \qquad 2f(x, y) = af'_x + bf'_y + f'_z.$$

Krzywa (6) albo (6 *bis*) przechodzi przez punkta przecięcia krzywej danej $f(x, y) = 0$ z biegunową $af'_x + bf'_y + f'_z = 0$ punktu stałego (a, b). c. b. d. d.

562. Równanie średnic wyciąga się z równania (6) przypuszczając że punkt P oddala się w nieskończoność w kierunku stałym

$$(7) \qquad y = mx + n.$$

Według tego założenia uczyni się a i b nieskończonemi i otrzyma się

$$(8) \qquad \mathrm{gr.}\frac{b}{a} = m.$$

Podzieliwszy przez a dwie strony równania (6), zwiększając a i b nieograniczenie, wypadnie, mając wzgląd na związek (8):

$$f'_x + mf'_y = 0;$$

co jest równaniem średnic.

Wszelako należy uważać że równanie (6) daje nietylko dla tego przypadku ograniczonego średnicę, ale jeszcze jakąkolwiek prostą w nieskończoności. Aby ten rezultat uwidocznić, wprowadźmy w równanie (6) spółrzędne jednorodne; niech będą x, y, z spółrzędnemi jednorodnemi jakiegokolwiek punktu krzywej, i a, b, c spółrzędnemi punktu P; równanie (6) staje się

$$\left(\frac{x}{z} - \frac{a}{c}\right)f'_x + \left(\frac{y}{z} - \frac{b}{c}\right)f'_y = 0, \qquad \text{albo} \qquad (cx - az)f'_x + (cy - bz)f'_y = 0.$$

Robiąc wtedy $c = 0$, $b = ma$, pozostaje

$$(9) \qquad z[f'_x + mf'_y] = 0;$$

to jest że krzywa składa się ze średnicy i z jakiejkolwiek prostej w nieskończoności.

Można zdać sobie prawę *a priori* z tego rezultatu, według uwagi 3ciej dyskussyi poprzedzającej.

Uwaga. Hiperbole sprzężone.

Miejscem końców średnic urojonych jakiejkolwiek hyperboli jest druga hiperbola która nazywa się hiperbolą sprzężoną pierwszej.

Niech będzie równanie jakiejkolwiek hiperboli

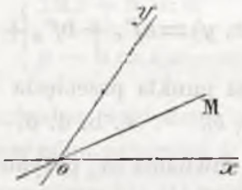
$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

środek będąc w początku. Spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu położonego na siecznej przechodzącej przez początek, będą

$$\begin{cases} x = \lambda p, \\ y = \mu p, \end{cases}$$

p będąc odległością punktu (x, y) od początku. Jeżeli punkt jest na krzywej, otrzyma się

$$p^2 = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}\lambda^2 + 2\mathrm{B}\lambda\mu + \mathrm{C}\mu^2}.$$



Kiedy się przypuści średnicę urojoną, p^2 jest odjemnem, i długość rzeczywista, p', średnicy urojonej jest, przez określenie, spółczynnikiem na $\sqrt{-1}$; jeżeli odnosi się na prostej OM, długość OM równą długości geometrycznej p', punkt rzeczywisty M nazywa się końcem odpowiadającym średnicy urojonej, albo po prostu *końcem* średnicy urojonej. Otrzyma się

$$p' = \sqrt{\frac{-\mathrm{H}}{\mathrm{A}\lambda^2 + 2\mathrm{B}\lambda\mu + \mathrm{C}\mu^2}} \quad \text{i} \quad x = \lambda p', \quad y = \mu p'.$$

Wyrugowawszy λ i μ między temi dwoma równaniami, znajduje się

$$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = -\mathrm{H}; \tag{2}$$

jestto równanie HYPERBOLI SPRZĘŻONEJ.

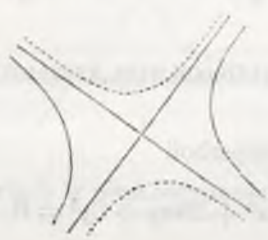
Jeśli się daje równania dwóch hiperbol odniesionych do środka wspólnego, to jest

$$\begin{cases} \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = \mathrm{H}, \\ \mathrm{A}_1x^2 + 2\mathrm{B}_1xy + \mathrm{C}_1y^2 = \mathrm{H}_1, \end{cases} \tag{3}$$

WYRAZI SIĘ ŻE TE DWIE HIPERBOLE SĄ SPRZĘŻONEMI, PISZĄC ŻE NA JAKIEJKOLWIEK ŚREDNICY, SUMMA KWADRATÓW WARTOŚCI ALGEBRAICZNYCH Z DŁUGOŚCI ŚREDNIC JEST ZEREM.

Niech będą, w rzeczy samej,

$$x = \lambda p, \qquad y = \mu p,$$



równania jakiejkolwiek średnicy; kwadratami z długości średnic dla jednej i drugiej krzywej są :

$$\frac{1}{p^2} = \frac{A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2}{H}, \quad \frac{1}{p_1^2} = \frac{A_1\lambda^2 + 2B_1\lambda\mu + C_1\mu^2}{H_1}.$$

Wyraźmy że $\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p_1^2}\right)$ jest zerem, jakiemikolwiekby nie były λ i μ, znajduje się

$$(4) \qquad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = -\frac{H}{H_1};$$

związki prowadzące do równań (1) i (2) dwóch hiperbol sprzężonych.

Dwie hiperbole sprzężone mają też same assymptoty; one są położone względnie w kątach spełniających.

§ III. — ŚREDNICE SPRZĘŻONE.

I° Określenie.

563. Kierunki sprzężone.

Równanie średnicy odpowiadającej cięciwom, których spółczynnikiem kątowym jest m, jest

$$(1) \qquad x(A + Bm) + y(B + Cm) + (D + Em) = 0;$$

jeżeli oznaczymy przez m' spółczynnik kątowy tej średnicy, otrzyma się

$$m' = -\frac{A + Bm}{B + Cm},$$

zkąd wypada

$$(2) \qquad A + B(m + m') + Cm.m' = 0.$$

Zowie się *kierunkami sprzężonymi* dwa kierunki, których spółczynniki kątowe m i m' zadość uczynia związkowi (2).

Wyrażenie sprzężone już było wziętem w znaczeniu ogólniejszem w przypadku prostych sprzężonych n$^{\text{er}}$ (443), (444). Te dwa przypadki różnią się przez nazwania użyte; nazwisko prostych sprzężonych służy przypadkowi ogólnemu przytoczonemu, a nazwisko kierunków sprzężonych należy do znaczenia szczegółowszego które dajemy tutaj.

Między kierunkami sprzężonymi oznaczymy następujące :

1° Średnica i jego cięciwy;

2° Styczna i średnica która przechodzi przez punkt styczności;

3° Biegunowa i średnica która przechodzi przez biegun.

Sprawdzimy tę ostatnią własność, druga jest przypadkiem szczególnym.

Niech będą (x_0, y_0, z_0) spółrzędne jakiegokolwiek punktu, równanie biegunowej będzie

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0;$$

spółczynnik kątowy m tej biegunowej otrzyma na wartość

$$m = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}.$$

Średnica odpowiadająca cięciwom których spółczynnikiem kątowym jest m, otrzyma na równanie

$$f'_x + mf'_y = 0, \quad \text{albo} \quad \frac{f'_x}{f'_{x_0}} = \frac{f'_y}{f'_{y_0}}.$$

Ta średnica przechodzi widocznie przez biegun (x_0, y_0); tym sposobem średnica sprzężona z cięciwami równoległemi do biegunowej jakiegokolwiek punktu, przechodzi przez ten punkt; więc spółczynniki kątowe biegunowej i średnicy przechodząc przez biegun sprawdzają związek (2).

564. Dwie średnice nazywają się sprzężonemi kiedy ich spółczynniki kątowe sprawdzają związek (2).

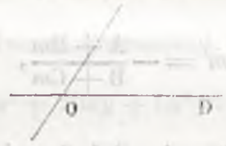
Dwie średnice sprzężone są takiemi, gdy jakakolwiek z nich dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do drugiej.

Niech będą OD i OD' dwie średnice których spółczynniki kątowe sprawdzają związek

$$A + B(m + m') + Cm.m' = 0.$$

Niech będzie m_1 kierunek cięciw które OD dzieli na dwie części równe, otrzyma się według związku (2):

$$A + B(m + m_1) + Cm.m_1 = 0;$$



porównanie tych dwóch związków nam daje $m_1 = m'$; to jest że cięciwy sprzężone średnicy OD są równoległemi do średnicy OD'. Wniosek odwrotny wynika z symetryi związku przypuszczonego.

Uwaga. Kiedy osie spółrzędnych są dwiema średnicami jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu, równanie nie powinno zamykać w sobie jak tylko kwadraty ze zmiennych i odwrotnie. Gdyż, jakiejkolwiek wartości na x powinny odpowiadać dla y dwie wartości równe i znaków przeciwnych; i, jakiejkolwiek wartości na y, powinny odpowiadać dla x dwie wartości równe i znaków przeciwnych.

565. W paraboli wszystkie średnice są równoległe, nie potrzeba uważać średnic sprzężonych. Wszelako są w paraboli jak w ellipsie i hiperboli kierunki sprzężone; tak więc: średnica i jej cięciwy, styczna i średnica która przechodzi przez jej punkt styczności, biegunowa i średnica która przechodzi przez biegun są kierunkami sprzężonymi. Należy uważać że między kierunkami sprzężonymi znajdzie się zawsze równoległa do kierunku wspólnego średnic.

W rzeczy samej, w przypadku paraboli, gdzie $B^2 - AC = 0$, związek (2) staje się zastępując C przez $\frac{B^2}{A}$:

$$A^2 + ABmm' + B^2mm' = 0, \quad \text{albo} \quad (A + Bm)(A + Bm') = 0; \tag{3}$$

otóż aby to rozwiązanie było sprawdzonem, potrzeba i dość jestaby spółczynnik kątowy jakiegokolwiek z kierunków był równym $-\frac{B}{A}$, to jest żeby ten kierunek był równoległym do średnic. Kierunkiem sprzężonym jakiejkolwiek prostej równoległej do średnic będzie styczna na końcu tej prostej.

II° Twierdzenia Apolloniusa.

566. Uważmy krzywą drugiego rzędu odniesioną do jej środka i do dwóch osi Ox i Oy, czyniących kąt θ; niech będzie

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H \tag{1}$$

równanie tej krzywej. Odnieśmy też samą krzywą do nowych osi Ox', i Oy', mających tenże sam początek i czyniących kąt θ'; równanie (1) weźmie kształt

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = H, \tag{2}$$

kiedy się w niem zastąpi x i y przez ich wartości w funkcyi x' i y', które dostarczą wzory przekształcenia spółrzędnych; stała H nie zmieni się ponieważ te wartości są linijne i jednorodne względem x' i y'.

Idzie o znalezienie związków istniejących między dawnymi spółczynnikami A, B, C, i nowymi spółczynnikami A', B', C'.

Uważmy że mając wzgląd na wzory przekształcenia, funkcya

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

zamienia się tożsamościowo w funkcyą

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2.$$

Lecz kwadrat odległości jakiegokolwiek punktu $M(x, y)$ od początku spółrzędnych ma na wyrażenie w dawnym układzie

$$x^2 + 2\cos\theta . xy + y^2;$$

ta funkcya zamienia się więc tożsamościowo w następującą

$$x'^2 + 2\cos\theta' x'y' + y'^2,$$

która przedstawia w nowym układzie kwadrat odległości tegoż samego punktu $M(x', y')$ z tymże samym znakiem.

Wypada ztąd że funkcya

$$F = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \lambda(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2)$$

zmienia się tożsamościowo jakąkolwiekby nie było λ w funkcyę następującą

$$F' = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + \lambda(x'^2 + 2x'y'\cos\theta' + y'^2).$$

Otóż, jeżeli funkcya F jednorodna w x i y, staje się kwadratem zupełnym dla pewnej wartości na λ, będzie tak samo się działo z funkcyą F' dla tejże samej wartości na λ. Gdyż wtedy F będzie kształtu $(Mx + Ny)^2$, i zastępując x i y przez ich wartości w funkcyi x' i y', to wyrażenie pozostanie kwadratem zupełnym; wartość na λ nie zmieni się ponieważ wzory przekształcenia nie zawierają w sobie tej dowolnej.

Nadto, jeżeli funkcya F staje się kwadratem zupełnym dla jakiejkolwiek wartości λ_0 na λ, funkcya F′ nie będzie mogla być kwadratem zupełnym dla jakiejkolwiek wartości na λ_1 różnej od λ_0; gdyż niech będzie $\lambda_1 = \lambda_0 + k$, funkcya stanie się

$$[A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + \lambda_0(x'^2 + y'^2 + 2x'y'\operatorname{dos}\theta')] + k[x'^2 + y'^2 + 2x'y'\operatorname{dos}\theta'];$$

otóż ilość między nawiasami jest kwadratem zupełnym; widzimy tym sposobem że funkcya F′ nie będzie kwadratem zupełnym jeżeli k nie jest zerem. Więc, jeśli się wyrazi że funkcye F i F′ stają się kwadratami zupełnymi, otrzyma się dwa równania na λ które muszą przypuścić też same pierwiastki; ponieważ, jeżeli jedna z funkcyi staje się kwadratem, druga nie może stać się kwadratem chyba że się przypisze stałej λ też samą wartość w dwóch funkcyach.

Wykonajmy rachunek który dopiero co był wskazanym; funkcye F i F′ rozwinięte, piszą się

$$\begin{cases} F = (A + \lambda)x^2 + 2(B + \lambda\operatorname{dos}\theta)xy + (C + \lambda)y^2, \\ F' = (A' + \lambda)x'^2 + 2(B' + \lambda\operatorname{dos}\theta')x'y' + (C' + \lambda)y'^2. \end{cases}$$

Aby funkcye F i F′ były kwadratami zupełnymi, potrzeba aby

$$(A + \lambda)(C + \lambda) = (B + \lambda\operatorname{dos}\theta)^2,$$

$$(A' + \lambda)(C' + \lambda) = (B' + \lambda\operatorname{dos}\theta')^2;$$

albo porządkując :

$$\lambda^2 + \frac{A + C - 2B\operatorname{dos}\theta}{\operatorname{wst}^2\theta}\lambda + \frac{AC - B^2}{\operatorname{wst}^2\theta} = 0;$$

$$\lambda^2 + \frac{A' + C' - 2B'\operatorname{dos}\theta'}{\operatorname{wst}^2\theta'}\lambda + \frac{A'C' - B'^2}{\operatorname{wst}^2\theta'} = 0.$$

Te równania muszą mieć, według tego cośmy powiedzieli, też same pierwiastki; wyprowadza się ztąd te dwa związki zasadnicze :

$$\text{(I)} \qquad \frac{A' + C' - 2B'\operatorname{dos}\theta'}{\operatorname{wst}^2\theta'} = \frac{A + C - 2B\operatorname{dos}\theta}{\operatorname{wst}^2\theta},$$

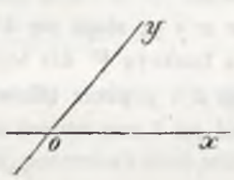
$$\text{(II)} \qquad \frac{A'C' - B'^2}{\operatorname{wst}^2\theta'} = \frac{AC - B^2}{\operatorname{wst}^2\theta}.$$

Otrzymaliśmy już te związki n^er (322), lecz przez metodę dłuższą.

N. B. Wyrażenie $(AC - B^2)$ jest *niezmiennikiem* funkcyi $(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$; wyrażenie $(A + C - 2B\operatorname{dos}\theta)$ jest *niezmiennikiem* dwóch funkcyj jednoczesnych $(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$ i $(x^2 + 2xy\operatorname{dos}\theta + y^2)$.

567. Twierdzenia Apolloniusa są tłumaczeniem geometrycznem związków poprzedzających.

Przypuśćmy że nowe osie Ox' i Oy' są dwiema średnicami sprzężonemi; równanie krzywej nie



może zawierać w sobie jak tylko kwadraty ze zmiennych, i równanie (2) sprowadza się do

$$A'x'^2 + C'y'^2 = H, \quad \text{to jest że} \quad B' = 0.$$

Szukajmy przecięć krzywej z osiami Ox' i Oy'; niech będzie a' wartość algebraiczna długości średnicy skierowanej według Ox' i b' wartość średnicy skierowanej według Oy'; otrzyma się

$$a'^2 = \frac{H}{A'}, \qquad b'^2 = \frac{H}{C'},$$

zkąd

$$(4) \qquad A' = \frac{H}{a'^2}, \qquad C' = \frac{H}{b'^2}.$$

Ilość a'^2, na przykład, będzie dodatną jeżeli średnica jest rzeczywistą, i odjemną jeżeli średnica jest urojoną; podobnież dla b'^2.

Zastępując A' i C' przez wartości (4) w związku II i zauważywszy że B' jest zerem, wypadnie

$$\frac{H^2}{a'^2b'^2 \mathrm{wst}^2\theta'} = \frac{AC - B^2}{\mathrm{wst}^2\theta};$$

albo

$$(5) \qquad a'^2b'^2\mathrm{wst}^2\theta' = \frac{H^2\mathrm{wst}^2\theta}{AC - B^2}.$$

Otóż pierwsza strona przedstawia kwadrat równoległoboku wystawionego na dwóch średnicach sprzężonych a' i b'; druga strona jest ilością stałą, więc

Powierzchnia równoległoboku wystawionego na dwóch średnicach sprzężonych jest stała.

Podstawiając wartość (4) w związku (I), uczyniwszy $B' = 0$, znajduje się

$$H.\frac{\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}}{\mathrm{wst}^2\theta'} = \frac{A + C - 2B\,\mathrm{dos}\theta}{\mathrm{wst}^2\theta},$$

albo upraszczając i mając wzgląd na związek (5)

$$(6) \qquad a'^2 + b'^2 = \frac{H(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\theta)}{AC - B^2}.$$

Druga strona jest jeszcze ilością stałą; więc

Summa algebraiczna kwadratów z dwóch średnic sprzężonych jest stała.

Te dwa twierdzenia które dopiero cośmy dowiedli są przedstawione przez równości:

$$(7) \qquad \begin{cases} a'^2 + b'^2 = \dfrac{H(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\theta)}{AC - B^2}; \\[2ex] a'^2b'^2\mathrm{wst}^2\theta' = \dfrac{H^2\mathrm{wst}^2\theta}{AC - B^2}. \end{cases}$$

One były danemi przez *Apolloniusa* (na 247 lat przed nar. Chr.) w jego traktacie sekcyi konicznych.

Zastępując H przez wartość znalezioną w numerze (540), to jest

$$H = \frac{\Delta}{B^2 - AC},$$

ma się wzory ważne :

$$(7\ bis)\quad \begin{cases} a'^2 + b'^2 = -\dfrac{\Delta(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta)}{(AC - B^2)^2}, \\ a'^2 b'^2 \mathrm{wst}^2\theta' = \dfrac{\Delta^2 \mathrm{wst}^2\theta}{(AC - B^2)^3}; \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

568. Wyciąga się jeszcze ze związku (I) twierdzenie zasługujące na uwagę o średnicach prostokątnych.

Przypuśćmy nowe osie Ox' i Oy' prostokątne, to jest $\theta' = 90°$; związek (I) staje się wtedy

$$A'H' = \frac{A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta}{\mathrm{wst}^2\theta}.$$

Oznaczywszy przez m i n wartości algebraiczne długości średnic skierowanych według Ox' i Oy', otrzyma się

$$m^2 = \frac{H}{A'}, \quad n^2 = \frac{H}{C'}; \quad \text{zkąd} \quad A' = \frac{H}{m^2}, \quad C' = \frac{H}{n^2}.$$

Podstawiając te wartości w związku poprzedzającym, wypadnie

$$(8)\qquad \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta}{H\,\mathrm{wst}^2\theta}.$$

Więc SUMMA ALGEBRAICZNA ODWROTNYCH KWADRATÓW Z DWÓCH ŚREDNIC PROSTOKĄTNYCH JEST STAŁA.

Wypada ztąd że :

CIĘCIWA KTÓRA ŁĄCZY PRZECIĘCIA DWÓCH ŚREDNIC PROSTOKĄTNYCH Z KRZYWĄ OBWIJA KOŁO.

Niech będzie w rzeczy samej OP długość prostopadłej spuszczonej ze środka na jakąkolwiek z tych cięciw, MN; ma się

$$2\,\text{powierz.}OMN = OM.ON = OP.MN;$$

zkąd

$$\overline{OP}^2 = \frac{\overline{OM}^2.\overline{ON}^2}{\overline{MN}^2} = \frac{\overline{OM}^2.\overline{ON}^2}{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2},$$

a tem samem

$$\frac{1}{\overline{OP}^2} = \frac{1}{\overline{OM}^2} + \frac{1}{\overline{ON}^2} = \text{stałej};$$ (na mocy twierdzenia powyższego.)

Cięciwa MN jest więc w odległości stałej od środka O; więc...

III° Ogólne znaczenie geometryczne związków (I) i (II).

569. Związki (I) i (II) n[ru] (366) mogą dać się użyć do wielkiej liczby tłumaczeń geometrycznych; przytoczymy następujące które nam się zdają dostatecznie ogólne i zawierają w sobie, jako przypadek szczególny, te które dopiero cośmy wskazali.

Twierdzenie I. Niech będą dwie jakiekolwiek średnice rzeczywiste OA i OB; poprowadźmy styczne przez końce B i B_1 średnicy OB, które spotykają w P i P_1 styczną w A; niech będą k i k_1 przecięcia średnic OP i OP_1 z cięciwami AB i AB_1 : ma się

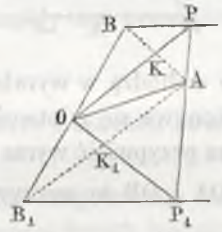
$$(1) \qquad \text{powierz. AOB.} \sqrt{\frac{OP.OP_1}{OK.OK_1}} = \text{stałej} = ab,$$

a i b będąc długościami pół osi krzywej.

Jeżeli jakakolwiek ze średnic jest urojoną, OB na przykład, poprowadzi się przez punkt B styczną do hiperboli sprzężonej, i otrzyma się

$$(1\ bis) \qquad \text{powierz. AOB.} \sqrt{\frac{OP}{OK}} = \text{stałej} = ab;$$

a i b będąc pół osiami krzywej.



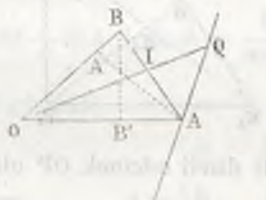
Twierdzenie II. Niech będą jakiekolwiek dwie średnice OA i OB, jedna z nich przynajmniej będąc rzeczywistą, OA na przykład. Poprowadźmy styczną w A i złączmy punkt O ze środkiem I cięciwy AB; niech będzie Q punkt spotkania OI ze styczną w A, i AA′, BB′, odległości względne końców A i B od średnic OA i OB; ma się

$$(2) \qquad \frac{1}{AA'^2} \pm \frac{1}{BB'^2} - \frac{OI - IQ}{OQ} \cdot \frac{\text{dot}\theta}{\text{powierz. AOB}} = \text{stałej} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2};$$

θ jest kątem dwóch średnic uważanych, a i b są osiami krzywej.

Znak przed drugimi wyrazami każdej strony odpowiada przypadkowi gdzie średnica OB jest urojoną. Odległość OQ będąc uważana za dodatną, musi się uważać odcinki

$$OI, \quad IQ, \quad (OI - IQ),$$



jako dodatne albo odjemne według tego jak one będą skierowane w kierunku OQ, albo w kierunku przeciwnym.

Kiedy dwie średnice OA i OB są rzeczywiste, prosta BQ jest styczną do krzywej w punkcie B. Jeżeli dwie średnice OA i OB są urojone, prowadzi się styczne do hiperboli sprzężonej.

Te dwa twierdzenia są przedstawieniami geometrycznemi dwóch związków

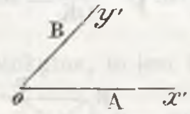
$$\text{(II)}\qquad \frac{A'C' - B'^2}{\mathrm{wst}^2\theta'} = \frac{AC - B^2}{\mathrm{wst}^2\theta},$$

$$\text{(I)}\qquad \frac{A' + C' - 2B'\,\mathrm{dos}\,\theta'}{\mathrm{wst}^2\theta'} = \frac{A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta}{\mathrm{wst}^2\theta}.$$

Aby je dowieść odnosi się krzywą do do dwóch średnic uważanych, jej równanie będzie kształtu

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = H;$$

H nie zmienia się z położeniem osi Ox' i Oy'.



Rachunek linii OP, OK, etc...; które wchodzą w wyrażenia (1) i (2) twierdzeń przytoczonych, w funkcyi spółczynników A', B', C', wykonywa się z łatwością; i sprawdzenie równości wysłowionych jest wnioskiem bezpośrednim. Można przypuścić wyraz niezależny H równym jedności.

Przypuśćmy, na przykład, że średnice OA i OB są rzeczywistemi, ma się:

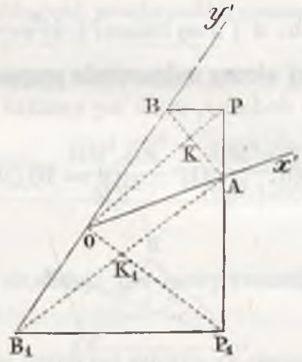
$$OA = \frac{1}{\sqrt{A'}}, \qquad OB = \frac{1}{\sqrt{C'}}; \qquad \text{powierz.}AOB = \frac{\mathrm{wst}\,\theta'}{2\sqrt{A'C'}}.$$

Prosta AB ma na równanie

$$\text{(AB)}\qquad x'\sqrt{A'} + y'\sqrt{C'} = 1;$$

punkt P, biegun prostej AB, ma za spółrzędne

$$x'_0 = \frac{\sqrt{C'}}{\sqrt{A'C'} + B'}, \qquad y'_0 = \frac{\sqrt{A'}}{\sqrt{A'C'} + B'}.$$



Stosunek $\frac{OK}{KP}$ w którym prosta AB dzieli odcinek OP otrzyma na wartość n^er (55)

$$\frac{OK}{KP} = -\frac{1}{x'_0\sqrt{A'} + y'_0\sqrt{C'} - 1} = \frac{\sqrt{A'C'} + B'}{\sqrt{A'C'} - B'};$$

zkąd się wyciąga

$$\frac{OP}{OK} = \frac{OK + KP}{OK} = \frac{2\sqrt{A'C'}}{B' + \sqrt{A'C'}} = \frac{\mathrm{wst}\,\theta'}{\text{powierz.}AOB(B' + \sqrt{A'C'})}.$$

Znajdzie się, zastąpiwszy $\sqrt{C'}$ przez $-\sqrt{C'}$,

$$\frac{OP_1}{OK_1} = -\frac{\text{wst}\theta'}{\text{powierz.AOB.}(B' - \sqrt{A'C'})}.$$

Mnożąc te dwa stosunki stronami, wypadnie

$$(\text{powierz.AOB})^2 \frac{OP}{OK}\cdot\frac{OP_1}{OK_1} = \frac{\text{wst}^2\theta'}{B'^2 - A'C'}.$$

Więc, według związku (II)

$$\text{powierz.AOB.}\sqrt{\frac{OP}{OK}\cdot\frac{OP_1}{OK_1}} = \text{stałej}.$$

Widzimy z tego w jaki sposób będzie można skierować rachunek dla dowodzenia innych twierdzeń. Nie wejdziemy w obszerniejsze szczegóły tego przedmiotu.

IV° Równanie na kwadraty z długości dwóch średnic sprzężonych.

570. Związki (7) n^ru (367) dostarczą nam bezpośrednio rozwiązanie tej kwestyi. Znamy, w rzeczy samej, summę i iloczyn kwadratów z długości dwóch średnic sprzężonych a' i b', czyniących między sobą kąt θ'; a'^2 i b'^2 będą pierwiastkami równania drugiego stopnia.

$$R^2 - (a'^2 + b'^2)R + a'^2b'^2 = 0.$$

To równanie staje się zastępując $(a'^2 + b'^2)$ i $a'^2b'^2$ przez wartości (7):

$$(1) \qquad (AC - B^2).R^2 - H.(A + C - 2B\,\text{dos}\theta).R + \frac{H^2\text{wst}^2\theta}{\text{wst}^2\theta'} = 0.$$

Takiem jest równanie, które daje kwadraty z długości dwóch średnic sprzężonych czyniących kąt θ', równanie krzywej będąc

$$(2) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H;$$

ono jest odniesionem do jej środka i do dwóch osi Ox i Oy czyniących kąt θ.

Jeśli kąt osi Ox i Oy jest prostym, równanie (1) weźmie kształt

$$(1\ bis) \qquad (AC - B^2).R^2 - H(A + C).R + \frac{H^2}{\text{wst}^2\theta'} = 0.$$

Jeżeli się zastąpi H przez jego wartość n^er (540)

$$(3) \qquad H = \frac{\Delta}{B^2 - AC} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

kwadraty z długości dwóch średnic sprzężonych pod kątem θ' należące do krzywej

$$(4) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

odniesione do osi Ox i Oy pod kątem θ, będą pierwiastkami równania

$$(5)\qquad R^2 + \frac{\Delta(A+C) - 2B\,\mathrm{dos}\theta)}{(AC - B^2)^2}.R + \frac{\Delta^2 \mathrm{wst}^2\theta}{(AC - B^2)^3.\mathrm{wst}^2.\theta'} = 0.$$

571. Dyskussya równania na kwadraty ze średnic.

1° W przypadku elipsy, $B^2 - AC < 0$; pierwiastki równania (5) są oba dodatne albo odjemne: dodatne jeżeli elipsa jest rzeczywistą; odjemne, jeżeli elipsa jest urojoną.

Szukajmy warunku aby dwie średnice były równemi; wyrażając że równanie (5) ma dwa pierwiastki równe, znajduje się

$$(6)\qquad \mathrm{wst}^2\theta' = \frac{4(AC - B^2)\mathrm{wst}^2\theta}{(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\theta)^2}.$$

Ten związek wyznaczy kąt θ' dwóch średnic sprzężonych równych; sprawdzi się bez trudności, że ta równość jest mniejszą od jedności.

2° W przypadku hiperboli, $B^2 - AC > 0$; wynika ztąd że wartości algebraiczne kwadratów z długości dwóch średnic sprzężonych są znaków przeciwnych.

Przypuśćmy że pierwiastek dodatny jest $(+a'^2)$, i że pierwiastek odjemny jest $(-b'^2)$; pierwiastki kwadratowe tych ilości są a' i $b'\sqrt{-1}$; a' jest długość średnicy rzeczywistej; b', albo spółczynnik na $\sqrt{-1}$ jest przez określenie, długość średnicy urojonej.

Szukajmy warunku aby długości geometryczne dwóch średnic sprzężonych były równe; to jest żeby:

$$a'^2 = b'^2, \quad \text{albo} \quad a'^2 - b'^2 = 0.$$

Lecz a'^2 i $(-b'^2)$ są pierwiastkami równania (5); summa tych pierwiastków musi więc być zerem, ma się tym sposobem warunek

$$(7)\qquad A + C - 2B\,\mathrm{dos}\theta = 0;$$

jestto także warunek znaleziony n^er^ (503), aby hiperbola była równoramienną.

Związek (7) jest niezależnym od kąta θ' średnic sprzężonych.

Więc, KIEDY DWIE ŚREDNICE SPRZĘŻONE, SKOŃCZONE HIPERBOLI SĄ RÓWNE, WSZYSTKIE ŚREDNICE SPRZĘŻONE SĄ RÓWNE. ALBO JESZCZE, W HIPERBOLI RÓWNORAMIENNEJ, WSZYSTKIE ŚREDNICE SPRZĘŻONE SĄ RÓWNE.

N. B. Różnica między tym wnioskiem i wnioskiem do którego byliśmy przywiedzeni w przypadku elipsy, pochodzi ztąd, że określenie geometryczne długości nie jest temże samem w obu razach.

V° RÓWNANIE DWÓCH ŚREDNIC SPRZĘŻONYCH CZYNIĄCYCH KĄT DANY.

572. Niech będą m i m' spółczynniki kątowe dwóch średnic sprzężonych; one muszą n^er^ (564) sprawdzać związek

$$(1)\qquad A + B(m + m') + Cm.m' = 0.$$

Niech będzie ω kąt dwóch średnic sprzężonych i θ kąt osi spółrzędnych, otrzyma się

$$(2)\qquad \mathrm{st}\,\omega = \frac{(m' - m)\mathrm{wst}\,\theta}{1 + (m + m')\mathrm{dos}\theta + mm'}.$$

Wyciągnijmy ze związku (2) wartość na m', i podstawmy tę wartość w związku (1), znajduje się uporządkowawszy względem m:

$$(3)\quad m^2[C(\text{wst}\theta + \text{dos}\theta\,\text{st}\omega) - B\,\text{st}\omega] + m[(C - A)\text{st}\omega + 2B\,\text{wst}\theta] + A(\text{wst}\theta - \text{dos}\theta\,\text{st}\omega) + B\,\text{st}\omega = 0;$$

równanie które może się napisać jeszcze:

$$(3\ bis)\quad \text{wst}[A + 2Bm + Cm^2] + \text{st}\omega[m^2(C\,\text{dos}\theta - B) + m(C - A) + B - A\,\text{dos}\theta] = 0;$$

TAKIM JEST ZWIĄZEK, KTÓRY DAJE SPÓŁCZYNNIKI KĄTOWE DWÓCH ŚREDNIC SPRZĘŻONYCH, CZYNIĄCYCH KĄT ω; θ JEST KĄTEM OSI SPÓŁRZĘDNYCH DO KTÓRYCH JEST ODNIESIONĄ KRZYWA.

Aby otrzymać równanie dwóch średnic, oznaczmy przez x, y, spółrzędne jakiegokolwiek punktu położonego na średnicy odpowiadającej cięciwom, których spółczynnikiem kątowym jest m, równanie tej średnicy będzie

$$f'_x + mf'_y = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad m = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Lecz związek (3) daje także, jeśli chcemy, spółczynniki cięciw względnie sprzężonych dwóch średnic czyniących kąt ω, ponieważ cięciwy sprzężone jednej z tych średnic są równoległemi do drugiej.

Zastępując m przez wartość powyższą w równaniu (3) albo (3 *bis*), otrzyma się związek między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu położonego na którejkolwiek ze średnic, to jest równanie dwóch średnic. Ma się tym sposobem

$$(4)\quad f'^2_x[C(\text{wst}\theta + \text{dos}\theta\,\text{st}\omega) - B\,\text{st}\omega] - f'_x f'_y[(C - A)\text{st}\omega + 2B\,\text{wst}\theta] + f'^2_y[A(\text{wst}\theta - \text{dos}\theta\,\text{st}\omega) + B\,\text{st}\omega] = 0.$$

Jeżeli przypuści się że środek krzywej jest w początku dość będzie zastąpić wtedy m przez $\frac{y}{x}$, w równaniu (3 *bis*), znajduje się w tym przypadku:

$$(4\ bis)\quad \text{wst}\theta[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2] + \text{st}\omega[(B - A\,\text{dos}\theta)x^2 + (C - A)xy + (C\,\text{dos}\theta - B)y^2] = 0;$$

TAKIEM JEST RÓWNANIE DWÓCH ŚREDNIC SPRZĘŻONYCH CZYNIĄCYCH KĄT ω, JEŻELI SIĘ PRZYPUŚCI ŚRODEK W POCZĄTKU SPÓŁRZĘDNYCH.

Uważymy że spółczynnik na wstθ jest pierwszą stroną równania kwadratowego assymptot; spółczynnik na stω jest pierwszą stroną, jak to zobaczymy poniżej, równania kwadratowego osi.

N. B. Kiedy przypuści się środek w początku, to jest D i E zerami, wyrażenie $-\frac{f'_x}{f'_y}$ nie jest równem $\frac{y}{x}$; lecz zastępując m przez $-\frac{f'_x}{f'_y}$ w związku (1), znajduje się dla m' wartość $\frac{y}{x}$. To spostrzeżenie dowodzi nam zgody równań (4) i (4 *bis*), chociaż do nich przybyliśmy różnemi drogami.

§ IV. OSIE.

1° Określenie. Twierdzenia.

573. OSIAMI JAKIEJKOLWIEK KRZYWEJ SĄ ŚREDNICE PROSTOLINIJNE PROSTOPADŁE DO CIĘCIW, KTÓRE DZIELĄ NA DWIE CZĘŚCI RÓWNE.

Poszukiwanie osi będzie można wykonać jak to było wskazanem w numerze (551).

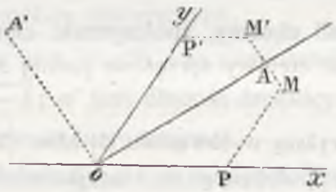
To poszukiwanie opiera się na jednem lub drugiem z twierdzeń następujących:

1° Jeżeli osie spółrzędnych są prostokątnemi i gdy równanie nie zawiera w sobie jak tylko potęgi parzyste na y, oś odciętych jest osią krzywej; jeżeli ono nie zawiera w sobie jak tylko potęgi na x, oś rzędnych jest osią krzywej. Mówi się jeszcze, że krzywa jest symetryczną względem osi odciętych, w pierwszym przypadku; względem osi rzędnych, w drugim.

2° Jeżeli równanie jakiejkolwiek krzywej jest symetrycznem względem x i y, dwójsieczna kąta spółrzędnych jest osią krzywej.

Równanie zowie się symetrycznem względem zmiennych x i y, kiedy ono nie zmienia się przemianą tych dwóch liter, to jest że jeżeli $(x=\alpha,\ y=\beta)$ jest rozwiązaniem tego równania $(x=\beta,\ y=\alpha)$ będzie jego drugiem rozwiązaniem. To założywszy, niech będzie M punkt krzywej przedstawione przez równanie dane, i $x=\mathrm{OP}=\alpha$, $y=\mathrm{MP}=\beta$, jej spółrzędne; weźmy punkt M′, symetryczny co do M względem dwójsiecznej OA; tak że M′A = AM; spółrzędnemi punktu M′ będą

$$x'=\mathrm{M'P'}=\beta;\qquad y'=\mathrm{OP}=\alpha.$$

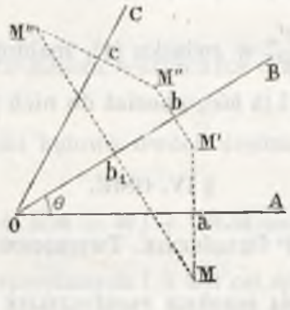


Widzimy to bezpośrednio przez przystawanie dwóch figur OPMA i OP′M′A, obracając pierwszą około OA aby ją odbić na drugiej. Spółrzędne punktu M′ sprawdzają więc równanie krzywej; a tem samem krzywa jest symetryczną względem dwójsiecznej OA.

Jeżeli, zmieniwszy x na $-x$, równanie krzywej stałoby się symetrycznem względem x i y, dwójsieczna OA′ kąta $y\mathrm{O}x'$ spółzędnych byłaby osią krzywej.

574. *Jeśli jakakolwiek krzywa ma dwie osie czyniące kąt θ różny od kąta prostego, ta krzywa będzie miała liczbę ograniczoną osi, gdy θ i cztery proste mają miarę wspólną; ona otrzyma niezliczoną liczbę osi gdy θ i cztery proste nie mają miary wspólnej.*

Niech będą OA i OB dwie osie krzywej, i M jakikolwiek z jej punktów; wtedy, ponieważ OA i OB są dwiema osiami, punkta M′, M″, M‴, symetryczne co do M względem tych osi, należą także do krzywej. Otóż, niech będzie c środek odcinka M″M‴, sprawdzimy że OC jest prostopadłą



do M″M‴, i że kąt BOC jest równym kątowi θ. W rzeczy samej, obróćmy figurę $b\mathrm{M''M'''}b_1$ około OB, i odbijmy ją na figurze $b\mathrm{M'M}b_1$, te dwie figury zbiegną się z sobą we wszystkich ich częściach, punkt M'' padnie na M', punkt M''' na M, i środek c odcinka M''M''' zejdzie się ze środkiem a odcinka MM'; a tem samem, prosta OC zbiegnie się z prostą OA.

Widzimy więc że OC jest osią krzywej. Powtarzając toż samo rozumowanie, otrzyma się szereg osi po sobie następujących czyniących kąt θ.

Niech będzie wtedy θ miarą kąta AOB, na kole promienia jeden; cztery proste otrzymają za miarę 2π. Jeśli stosunek $\frac{\theta}{2\pi}$ jest liczbą wymierną $\frac{p}{q}$, powtórzywszy θ liczbę razy oznaczoną przez q, wykona się p razy obrot okręgu koła, ponieważ

$$q\theta = p.2\pi,$$

i powróci się do punktu wyjścia; krzywa otrzyma więc liczbę ograniczoną osi która jest równą q. Przypuszcza się ułamek $\frac{p}{q}$ *nieprzywiedlnym* (*irreductible*) (*).

Przykład : Krzywa, $p = 4 + \cos 5\omega$; ma pięć osi.

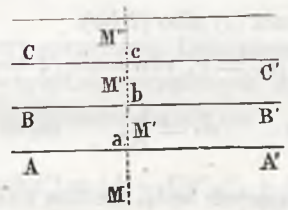
Jeżeli stosunek $\frac{\theta}{2\pi}$ jest niewymiernym, krzywa przypuszcza niezliczone mnóstwo osi, ponieważ, powtarzając kąt θ, nie znajdzie się nigdy liczby dokładnej okręgów koła, a tem samem nie natrafi się nigdy na jednę z osi już otrzymanych.

W tym ostatnim przypadku krzywa jest kołem. Gdyż kreśląc kolejno osie kąta θ i obracając je nieograniczenie około bieguna, otrzyma się szereg nieograniczony prostych tworzących promienie coraz bardziej do siebie zbliżone lecz nigdy z sobą zlać się nie mogące, ponieważ żadna z osi tym sposobem wykreślonych nie może przystać z jedną z tych, które już przedtem figurowały. Otóż koło jest jedyną krzywą którą można pojąć jako symetryczną jednocześnie względem wszystkich tych prostych w liczbie nieskończonej i nieskończenie do siebie zbliżonych.

585. *Jeżeli jakakalwiek krzywa ma dwie osie równoległe, ma ona niezliczone mnóstwo osi równoległych i równooddalonych.*

Można uważać to twierdzenie jako przypadek szczególny poprzedzającego. Dowiedźmy je wprost: niech będą AA' i BB' dwie osie jakiejkolwiek krzywej i M jakikolwiek z jej punktów; punkta M', M'', M''', symetryczne co do M względem dwóch osi AA' i BB', należą także do krzywej. Wzięło się

$$aM' = aM, \qquad bM''' = bM, \qquad bM'' = bM'.$$



Przez punkt c, środek odcinka M''M''', poprowadźmy CC' równoległą do AA'; otrzyma się $cb = ba$. W rzeczy samej, jeśli się odbije część wyższą figury na część niższą, obracając ją około BB', punkt M'' padnie na M', punkt M''' na M, i punkt c na a; a tem samem $bc = ba$.

Krzywa posiada więc trzecią oś CC' równoległą do dwóch innych i w tejże samej odległości.

Przedłużając to rozumowanie, wykazałoby się że krzywa przypuszcza niezliczone mnóstwo osi równoległych i równooddalonych.

(*) G. A. Hreczyna, znakomity nauczyciel Matematyki w Lyceum Wołyńskiem, pierwszy trafnie nazwał i do *początków swej Algebry* szczęśliwie wprowadził wyrażenie ułamku *nieprzywiedlnego* (irreductible).

Przykład. Krzywa $y = \text{wst}\,x$ przypuszcza niezliczone mnóstwo osi równoległych.

Krzywa która przypuszcza niezliczone mnóstwo osi równoległych jest widocznie krzywą przestępną. Gdyż krzywa otrzyma liczbę nieskończoną punktów na prostopadłej w kierunku osi. Więc...

II° Wyznaczenie osi w krzywych drugiego rzędu.

576. Widzieliśmy n^er (564) że jeżeli m jest spółczynnikiem kątowym jakiejkolwiek średnicy, i m' spółczynnik cięciw które ona dzieli na dwie części równe, ma się związek

$$\text{A} + \text{B}(m + m') + \text{C}mm' = 0. \tag{1}$$

Otóż osie krzywej są średnicami prostopadłemi do ich cięciw; ma się więc, oznaczywszy przez θ kąt osi spółrzędnych

$$1 + (m + m')\text{dos}\,\theta + mm' = 0.$$

Wyciągając ztąd wartość na m' i podstawiając w związku (1), znajduje się że spółczynniki kątowe osi jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu są danymi przez równanie

$$(\text{B} - \text{C}\,\text{dos}\,\theta)m^2 + (\text{A} - \text{C})m + (\text{A}\,\text{dos}\,\theta - \text{B}) = 0\,; \tag{2}$$

albo, jeżeli się przypuści $\theta = 90°$

$$\text{B}m^2 + (\text{A} - \text{C})m - \text{B} = 0. \tag{2 bis}$$

Są więc dwie osie w krzywych drugiego rzędu; te dwie osie są prostopadłe między sobą; gdyż iloczyn ich spółczynników kątowych (2 *bis*) jest równym -1.

Dwie osie jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu są dwiema średnicami sprzężonemi prostokątnemi, gdyż ich spółczynniki kątowe sprawdzają związek (1) istniejący między dwoma kierunkami sprzężonymi.

577. W ellipsie i hiperboli, te dwie osie znajdują się w odległości skończonej; otrzyma się ich równania, zastępując w równaniu ogólnem średnic

$$x(\text{A} + \text{B}m) + y(\text{B} + \text{C}m) + (\text{D} + \text{E}m)z = 0, \tag{3}$$

m przez wartości wyciągnięte z równania (2) albo (2 *bis*).

W przypadku paraboli, gdzie $\text{B}^2 - \text{AC} = 0$, równanie (2 *bis*) daje

$$(\text{osie}) \qquad m_1 = \frac{\text{C}}{\text{B}}, \qquad m_2 = -\frac{\text{A}}{\text{B}}; \tag{4}$$

spółczynniki kątowe cięciw odpowiadających będą, według związku $mm' = -1$:

$$(\text{cięciwy}) \qquad m'_1 = -\frac{\text{B}}{\text{C}}, \qquad m'_2 = +\frac{\text{B}}{\text{A}}. \tag{5}$$

Zastępując w równaniu (3) m przez wartości m'_1 i m'_2, otrzyma się na równania dwóch osi w paraboli:

oś $m_2 = -\dfrac{\text{A}}{\text{B}}$: $x(\text{A}^2 + \text{B}^2) + \text{B}(\text{A} + \text{C})y + (\text{AD} + \text{BE})z = 0$, albo $\text{A}x + \text{B}y + \dfrac{\text{AD} + \text{EB}}{\text{A} + \text{C}}z = 0$;

oś $m_1 = \dfrac{\text{C}}{\text{B}}$: $z(\text{CD} - \text{BE}) = 0$.

Tym sposobem jedna z osi jest w odległości skończonej, jej spółczynnik kątowy jest $\left(-\frac{A}{B}\right)$ albo $\left(-\frac{B}{A}\right)$; druga jest w nieskończoności, jej spółczynnikiem kątowym jest $\left(+\frac{C}{B}\right)$.

III° Równanie dwóch osi.

578. Można wyciągnąć równanie szukane z równania średnic sprzężonych n^er (572), ponieważ osie jakiejkolwiek krzywej drugiego stopnia są dwiema średnicami sprzężonemi prostokątnemi.

Można także traktować wprost tę kwestyą.

Spółczynniki kątowe dwóch osi sprawdzają n^er (576) związek

$$(2) \qquad (B - C\operatorname{dos}\theta)m^2 + (A - C)m + (A\operatorname{dos}\theta - B) = 0.$$

Jeśli się przypuści krzywą odniesioną do jej środka, i gdy x, y, będą spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu jednej z osi, otrzyma się

$$m = \frac{y}{x};$$

równanie dwóch osi będzie więc

$$(6) \qquad (A\operatorname{dos}\theta - B)x^2 + (A - C)xy + (B - C\operatorname{dos}\theta)y^2 = 0,$$

albo, jeśli osie spółrzędnych są prostokątnemi $\theta = 90°$:

$$(6\ bis) \qquad -Bx^2 + (A - C)xy + By^2 = 0;$$

przypuszcza się że początek jest środkiem krzywej.

Kiedy środek krzywej nie jest w początku spółrzędnych, uważymy że równaniem jakiejkolwiek średnicy albo jakiejkolwiek osi jest

$$f'_x + mf'_y = 0, \quad \text{zkąd} \quad m = -\frac{f'_x}{f'_y},$$

m jest spółczynnikiem kątowym cięciwy sprzężonej. Lecz równanie (2) może być uważane także jako dające spółczynniki kątowe cięciw względnie sprzężonych dwóch osi; więc zastępując w niem m przez wartość powyższą, otrzymamy na równanie dwóch osi

$$(6\ ter) \qquad (B - C\operatorname{dos}\theta)f'^2_x = (A - C)f'_x f'_y + Bf'^2_y = 0;$$

θ będąc kątem osi spółrzędnych; albo jeśli $\theta = 90°$,

$$(6\ quater) \qquad Bf'^2_x = (A - C)f'_x f'_y + Bf'^2_y = 0;$$

początek spółrzędnych nie jest więcej środkiem krzywej.

579. Równanie (6 *bis*) pozwoli napisać bezpośrednio równanie dwóch dwójsiecznych kątów utworzonych przez dwie proste

$$(7) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Możemy, w rzeczy samej, uważać układ tych dwóch prostych jako tworzący jakąkolwiek krzywą drugiego stopnia; dwójsieczne są właśnie osiami tej krzywej; równanie (6) albo (6 *bis*) będzie równaniem tych dwóch dwójsiecznych.

N. B. Przestaniemy na wysłowieniu własności następującej, której dowodzenie jest niezmiernie łatwem.

Biegunowa jakiegokolwiek punktu położonego na osi jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu jest prostopadła do tej osi; i odwrotnie, wszelka średnica posiadająca tę własność jest osią.

Można skorzystać z tego podania dla wyznaczenia osi.

IV° Równanie na kwadraty z długości osi.

580. To równanie wyciąga się z równania (5) na kwadraty z długości dwóch średnic sprzężonych numer (570), przypuszczając dwie średnice sprzężone prostokątnemi; znajduje się tym sposobem

$$(8) \qquad R^2 + \frac{\Delta(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta)}{(AC - B^2)^2}.R + \frac{\Delta^2 \mathrm{wst}^2\theta}{(AC - B^2)^3} = 0,$$

θ jest kątem osi spółrzędnych; jeśli $\theta = 90°$, ma się

$$(8\ bis) \qquad R^2 + \frac{\Delta(A + C)}{(AC - B^2)^2}.R + \frac{\Delta^2}{(AC - B^2)^3} = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są wartości algebraiczne kwadratów z osi krzywej:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Jeśli równanie krzywej jest dane pod kształtem

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

równanie na kwadrat z długości osi będzie n^er^ (570) (1)

$$(9) \qquad R^2 - \frac{H(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta)}{AC - B^2}.R + \frac{H^2 \mathrm{wst}^2\theta}{(AC - B^2)} = 0,$$

albo jeśli $\theta = 90°$

$$(9\ bis) \qquad R^2 - \frac{H(A + C)}{AC - B^2}.R + \frac{H^2}{AC - B^2} = 0.$$

W elipsie, $B^2 - AC < 0$; dwa pierwiastki tego równania są oba dodatne, lub oba odjemne. Dwie osie są rzeczywiste, jeśli elipsa jest rzeczywistą; dwie osie są urojone, jeśli elipsa jest urojoną.

W hiperboli, $B^2 - AC > 0$; pierwiastki są zawsze znaków przeciwnych, jedna z osi krzywej jest rzeczywistą, druga urojoną.

W paraboli, dwie osie są nieskończone.

581. Liczba warunków które pociąga za sobą równość osi.

Elipsa.

Aby dwie osie były równe, potrzeba aby równanie (8) zawierało w sobie dwa jego pierwiastki równe, co daje

(10) $$(A + C - 2B\operatorname{dos}\theta)^2 = 4(AC - B^2)\operatorname{wst}^2\theta.$$

Jeżeli się przypuści $\theta = 90^\circ$, związek (9) staje się

$$(A + C)^2 = 4(AC - B^2), \qquad \text{albo} \qquad (A - C)^2 + 4B^2 = 0;$$

związek który nie może mieć miejsca, dla wartości rzeczywistych na A, B, C, chyba żeby było razem

(11) $$A = C, \qquad B = 0.$$

Jeśli się przypuści θ różnem od 90°, związek (9) będzie można napisać

$$[A - C + 2(B - A\operatorname{dos}\theta)\operatorname{dos}\theta]^2 + 4(B - A\operatorname{dos}\theta)^2\operatorname{wst}^2\theta = 0;$$

związek który pociąga za sobą następujące:

(10 *bis*) $$A = C \qquad \frac{B}{A} = \operatorname{dos}\theta.$$

Tym sposobem równość osi w elipsie pociąga za sobą dwa warunki; krzywa sprowadza się wtedy do koła.

Te wnioski wynikają bezpośrednio z równania uproszczonego

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

gdzie a i b są wyraźnie długościami osi.

Hiperbola.

Kiedy się przypuści długości geometryczne osi równe, to wychodzi na jedno powiedzieć $a^2 - b^2 = 0$, albo że summa pierwiastków równania (8) jest zerem; ma się więc jedyny warunek

(12) $$A + C - 2B\operatorname{dos}\theta = 0, \qquad \text{albo} \qquad A + C = 0, \qquad \text{jeżeli} \qquad \theta = 90^\circ.$$

Tym sposobem równość osi w hiperboli wymaga jedynego warunku; hiperbola jest wtedy równoramienną.

582. Osie jakiejkolwiek krzywej drugiego stopnia są promieniami kół spółśrodkowych do krzywej i podwójnie stycznemi do tej krzywej.

W rzeczy samej, przypuśćmy krzywą odniesioną do jej środka, i niech będzie

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

jej równanie; równanie jakiegokolwiek koła spółśrodkowego będzie

$$x^2 + 2xy\operatorname{dos}\theta + y^2 = p^2.$$

To koło przetnie pierwszą krzywą w czterech punktach położonych na dwóch prostych które otrzymuje się odejmując stronami równania poprzedzające, względnie pomnożone przez p^2 i H, to jest

$$(Ap^2 - H)x^2 + 2(Bp^2 - H\operatorname{dos}\theta)xy + (Cp^2 - H) = 0.$$

Wyraziwszy że te dwie proste zbiegają się z sobą, koło przetnie wtedy krzywą we czterech punktach, tworzących dwie pary punktów zbiegających się z sobą, to jest że ono będzie podwójnie stycznem do krzywej. Otóż, aby te dwie proste zbiegały się z sobą, potrzeba żeby było

$$(\mathrm{B}p^2 - \mathrm{H}\operatorname{dos}\theta)^2 = (\mathrm{A}p^2 - \mathrm{H})(\mathrm{C}p^2 - \mathrm{H});$$

zkąd wnosimy, rozwinąwszy :

$$(13) \qquad p^4(\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2) - \mathrm{H}(\mathrm{A} + \mathrm{C} - 2\mathrm{B}\operatorname{dos}\theta).p^2 + \mathrm{H}^2\operatorname{wst}^2\theta = 0.$$

Otóż, porównawszy to równanie z równaniem (9) n$^{\text{ru}}$ (580), widzimy że ono daje kwadraty z długości osi. Więc...

Podanie, które dopiero cośmy dowiedli przez rachunek, wynika także z uwag następujących :

Jeżeli koło, spółśrodkowe do jakiejkolwiek konicznej, jest stycznem do tej konicznej, styczna wspólna będzie prostopadłą do średnicy konicznej; a tem samem, ta średnica będzie osią n$^{\text{er}}$ (579).

V° Uwaga nad kierunkiem osi.

583. *Trójkąt utworzony przez środek jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu i przez punkta w nieskończoności na jej osiach jest sprzężonym* n$^{\text{er}}$ (455) *razem względem konicznej i względem jakiegokolwiek koła spółśrodkowego z koniczną; i odwrotnie.*

Podanie to jest widocznem, gdyż biegunową środka jest prosta w nieskończoności; biegunowa względem konicznej punktu w nieskończoności na jakiejkolwiek osi przechodzi przez środek i jest prostopadłą do tej osi, ponieważ ona z nią jest sprzężoną; lecz to ma również miejsce dla koła, gdyż biegunowa jakiegokolwiek punktu koła jest prostopadłą do średnicy która przechodzi przez ten punkt.

Odwrotnie : jeżeli trójkąt, którego jednym z boków jest prosta w nieskończoności, jest sprzężonym razem względem jakiejkolwiek krzywej drugiego stopnia i jakiegokolwiek koła, dwa boki trójkąta są osiami konicznej.

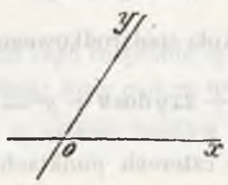
Biegun prostej w nieskończoności jest środkiem krzywej; więc koniczna i koło mają za środek wspólny wierzchołek trójkąta w odległości skończonej.

Niechbędą

$$(1) \qquad \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = \mathrm{H}z^2,$$

$$(2) \qquad x^2 + 2xy\operatorname{dos}\theta + y^2 = p^2z^2,$$

równania konicznej i koła, odniesione do dwóch boków trójkąta.



Punkt w nieskończoności na Ox ma za biegunową w konicznej Oy, więc Oy jest sprzężoną z Ox; równanie (1) nie będzie zawierać w sobie iloczynu xy, więc $\mathrm{B} = 0$. Punkt w nieskończoności na Ox, ma za biegunową w kole Oy; więc Oy jest prostopadłą do Ox; a tem samem $\theta = 90^\circ$. Dwa boki trójkąta w odległości skończonej będą więc osiami krzywej.

584. *Ślady dwóch osi jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu na prostej w nieskończoności tworzą układ harmoniczny, już to z dwoma punktami przecięcia prostej w nieskończoności z krzywą, już to z dwoma punktami przecięcia z kołem.*

Albo jeszcze; jeżeli ω i ω_1 oznaczają punkta bieżące po kole w nieskończoności; jeżeli γ i γ_1 są przecięciami prostej w nieskończoności z krzywą drugiego rzędu; jeżeli nakoniec PA i PA_1 są kierunkami osi; dwa pęki

$$(P,\ \overline{AA_1}\,\overline{\omega\omega_1}),\qquad (P,\ \overline{AA_1}\,\overline{\gamma\gamma_1});$$

będą harmonicznymi (P jest jakikolwiek punkt płaszczyzny); to jest że się otrzyma n^er^ (167) i (169)

$$(1)\qquad \frac{\omega A}{\omega A_1}:\frac{\omega_1 A}{\omega_1 A_1} = -1,\qquad \frac{\gamma A}{\gamma A_1}:\frac{\gamma_1 A}{\gamma_1 A_1} = -1.$$

Związki (1) pozwolą wyznaczyć dwa kierunki PA i PA_1.

Aby dowieść tego podania, niech będą

$$(2)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = Hz^2,$$

$$(3)\qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = p^2z^2;$$

równania krzywej drugiego rzędu odniesionej do jej środka i do jakiegokolwiek koła, które można przypuścić spółśrodkowem z koniczną. Oznaczywszy przez P początek spółrzędnych, proste P_γ, P_{γ_1} otrzymają się szukając przecięć prostej w nieskończoności z krzywą drugiego rzędu (2), ma się tym sposobem

$$(4)\qquad P_\gamma,\ P_{\gamma_1}:\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Proste $P\omega$, $P\omega_1$, otrzymują się szukając przecięć prostej w nieskończoności z kołem, ma się

$$(5)\qquad P\omega,\ P\omega_1:\ x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = 0.$$

Szukajmy teraz układu prostych PA, PA_1, który tworzy parę sprzężoną harmonicznie bądź to względem pary (4), bądź to względem pary (5); przedstawimy przez

$$(6)\qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0,$$

ogół dwóch prostych szukanych. Jeżeli za pomocą wzoru n^ru^ (177), wyrazimy że para (6) tworzy z parą (4), potem z parą (5), układ harmoniczny; otrzymuje się dwa związki

$$(7)\qquad \begin{cases} AC' + A'C = 2BB' \\ C' + A' = 2B'\cos\theta. \end{cases}$$

Jeśli z równań (7) wyciągniemy wartości na $\frac{A'}{B'}$, $\frac{C'}{B'}$, i gdy je wstawimy w równanie (6), znajduje się

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ C & -B & A \\ 1 & -\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

albo rozwijając

$$(8) \qquad x^2(\mathrm{A}\operatorname{dos}\theta - \mathrm{H}) + xy(\mathrm{A} - \mathrm{C}) + y^2(\mathrm{B} - \mathrm{C}\operatorname{dos}\theta) = 0;$$

takiem jest równanie dwóch prostych zadość czyniących warunkom położonym.

Rozpoznaje się w niem równanie kwadratowe osi n[er] (378).

§ V. — SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE.

I° Średnice. Osie. (Krzywa drugiego rzędu.)

585. Równanie średnicy sprzężonej jakiejkolwiek prostej danej otrzyma się szukając biegunową punktu przecięcia tej prostej z prostą w nieskończoności.

Kierunki osi otrzymają się przez zastosowanie własności wysłowionych w numerze (584). Umie się wyznaczyć środek; wierzchołkami będą przecięcia krzywej z prostemi poprowadzonemi, równolegle do osi, przez środek tej krzywej.

Tym sposobem, można więc, pozostając w układzie spółrzędnych trzylinijnych wyznaczyć w ten sposób osie i wierzchołki.

Jak to juześmy zauważyli użycie spółrzędnych trzylinijnych jest nadewszystko korzystnem w badaniu własności opisowych, one dają się użyć daleko mniej w poszukiwaniu własności metrycznych.

Wszelako, damy wyrażenie z długości osi jakiejkolwiek konicznej w układzie spółrzędnych trzylinijnych; te wzory raz uzasadnione prowadzą do dowodzeń prostych i eleganckich wielu własności ważnych.

II° Długości osi jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu.

586. Niech będzie równanie ogólne w spółrzędnych trzylinijnych jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu

$$(1) \qquad f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \mathrm{A}_{11}\mathrm{X}^2 + \mathrm{A}_{22}\mathrm{Y}^2 + \mathrm{A}_{33}\mathrm{Z}^2 + 2\mathrm{A}_{12}\mathrm{XY} + 2\mathrm{A}_{13}\mathrm{XZ} + 2\mathrm{A}_{23}\mathrm{YZ} = 0;$$

jeśli się przypuści krzywą odniesioną do dwóch osi prostokątnych, jej równanie będzie kształtu

$$(2) \qquad \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}xz + 2\mathrm{E}yz + \mathrm{F}z^2 = 0;$$

tak że otrzyma się tożsamość, mając wzgląd na wzory przekształcenia:

$$(3) \quad \mathrm{A}_{11}\mathrm{X}^2 + \mathrm{A}_{22}\mathrm{Y}^2 + \mathrm{A}_{33}\mathrm{Z}^2 + 2\mathrm{A}_{12}\mathrm{XY} + 2\mathrm{A}_{13}\mathrm{XZ} + 2\mathrm{A}_{23}\mathrm{YZ} = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}xz + 2\mathrm{E}yz + \mathrm{F}z^2;$$

wzorami przekształcenia są tu n[er] (91), (93):

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= a_1x + a_2y + a_3z, \\ \mathrm{Y} &= b_1x + b_2y + b_3z, \\ \mathrm{Z} &= c_1x + c_2y + c_3z, \end{aligned}\right. \quad \begin{gathered}\text{albo}\\ \text{uwidaczniając}\\ \text{parametry odniesienia}\\ \lambda,\ \mu,\ \nu\end{gathered} \quad (4\ bis) \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \lambda(p - x\operatorname{dos}\alpha - y\operatorname{wst}\alpha), \\ \mathrm{Y} &= \mu(q - x\operatorname{dos}\beta - y\operatorname{wst}\beta), \\ \mathrm{Z} &= \nu(r - x\operatorname{dos}\gamma - y\operatorname{wst}\gamma). \end{aligned}\right.$$

Otóż, jeżeli a^2 i b^2 są wartościami algebraicznemi kwadratów z długości osi krzywej, ma się numer (180)

$$a^2 + b^2 = -\frac{A - C}{(AC - B^2)^2}\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}; \tag{5}$$

$$a^2 b^2 = \frac{1}{(AC + B^2)^3}\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}^2. \tag{6}$$

Potrzeba więc obliczyć w funkcyi A_{rs}, ilości

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \ (A + C), \ (AC - B^2).$$

Oznaczmy przez Δ dyskryminant równania (1) tak aby

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

587. Różniczkując tożsamość (3) względem x, y, z; uważając X, Y, Z jako funkcye x, y, z, określone przez związki (4), otrzyma się

$$Ax + By + Dz = (A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z)a_1 + (A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}Z)b_1 + (A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}Z)c_1;$$

$$Bx + Cy + Ez = (A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z)a_2 + (A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}Z)b_2 + (A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}Z)c_2;$$

$$Dx + Ey + Fz = (A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z)a_3 + (A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}Z)b_3 + (A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}Z)c_3;$$

albo, jeżeli się założy

$$\left\{\begin{array}{lll} M_{11} = A_{11}a_1 + A_{21}b_1 + A_{31}c_1, & M_{21} = A_{11}a_2 + A_{21}b_2 + A_{31}c_2, & M_{31} = A_{11}a_3 + A_{21}b_1 + A_{31}c_3, \\ M_{12} = A_{12}a_1 + A_{22}b_1 + A_{32}c_1, & M_{22} = A_{12}a_2 + A_{22}b_2 + A_{32}c_2, & M_{32} = A_{12}a_3 + A_{22}b_3 + A_{32}c_3, \\ M_{13} = A_{13}a_1 + A_{23}b_1 + A_{33}c_1; & M_{23} = A_{13}a_2 + A_{23}b_2 + A_{33}c_2; & M_{33} = A_{13}a_3 + A_{23}b_3 + A_{33}c_3; \end{array}\right. \tag{8}$$

związki powyższe napiszą się:

$$Ax + By + Dz = M_{11}X + M_{12}Y + M_{13}Z,$$

$$Bx + Cy + Ez = M_{21}X + M_{22}Y + M_{23}Z,$$

$$Dx + Ey + Fz = M_{31}X + M_{32}Y + M_{33}Z.$$

Różniczkując jeszcze te ostatnie związki względem x, y i z, znajduje się

$$(9)\quad \begin{cases} A = a_1M_{11} + b_1M_{12} + c_1M_{13}, & B = a_1M_{21} + b_1M_{22} + c_1M_{23}, & D = a_1M_{31} + b_1M_{32} + c_1M_{33}, \\ B = a_2M_{11} + b_2M_{12} + c_2M_{13}, & C = a_2M_{21} + b_2M_{22} + c_2M_{23}, & E = a_2M_{31} + b_2M_{32} + c_2M_{33}, \\ D = a_3M_{11} + b_3M_{12} + c_3M_{13}; & E = a_3M_{21} + b_3M_{22} + c_3M_{23}; & F = a_3M_{31} + b_3M_{32} + c_3M_{33}; \end{cases}$$

$$M_{rs} \gtrless M_{sr}.$$

Otóż, według twierdzenia na mnożenie wyznaczników, wyciąga się ze związków (9)

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix};$$

związki (8) dają, według tegoż samego twierdzenia:

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix};$$

ztąd wypada:

$$(10)\quad \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2.$$

Lecz jeśli się wprowadzi parametry odniesienia, biorąc wzory przekształcenia pod kształtem (4 *bis*), znajduje się bez trudności, mając wzgląd na związki (4) i (6) numeru (94)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu \begin{vmatrix} \text{dos}\,\alpha & \text{dos}\,\beta & \text{dos}\,\gamma \\ \text{wst}\,\alpha & \text{wst}\,\beta & \text{wst}\,\lambda \\ p & q & r \end{vmatrix},$$

zkąd, mając wzgląd na związki przytoczone:

$$(11)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm\lambda\mu\nu.\frac{S}{R}.$$

Ma się więc ostatecznie

$$(12)\quad \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \lambda^2\mu^2\nu^2\frac{S^2}{R^2} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

588. Związki (8) nam dają naprzód

$$A = a_1M_{11} + b_1M_{12} + c_1M_{13};\quad C = a_2M_{21} + b_2M_{22} + c_2M_{23},$$
$$B = a_1M_{21} + b_1M_{22} + c_1M_{23} = a_2M_{11} + b_2M_{12} + c_2M_{13};$$

zkąd się wyprowadza

$$AC - B^2 = (a_1M_{11}+b_1M_{12}+c_1M_{13})(a_2M_{21}+b_2M_{22}+c_2M_{23}) - (a_1M_{21}+b_1M_{22}+c_1M_{23})(a_2M_{11}+b_2M_{12}+c_2M_{13}).$$

Rozwinąwszy i uprościwszy, wypadnie :

$$AC - B^2 = (b_2c_1 - b_1c_2)[M_{22}M_{13} - M_{12}M_{23}] + (c_2a_1 - c_1a_2)[M_{11}M_{23} - M_{21}M_{13}] + (a_2b_1 - a_1b_2)[M_{12}M_{21} - M_{11}M_{22}].$$

Jeśli teraz zastąpi się M_{rs} przez wartości (8), i gdy się założy :

$$b_2c_1 - b_1c_2 = a',$$
$$c_2a_1 - c_1a_2 = b'$$
$$a_2b_1 - a_1b_2 = c';$$

znajduje się :

$$AC - B^2 = \left\{\begin{array}{l} +a'[a'(A_{12}A_{33} - A_{23}^2) + b'(A_{13}A_{32} - A_{13}A_{33}) + c'A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22})] \\ +b'[a'(A_{23}A_{31} - A_{21}A_{33}) + b'(A_{11}A_{33} - A_{13}^2) + c'(A_{13}A_{21} - A_{11}A_{23})] \\ +c'[a'(A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}) + b'(A_{12}A_{31} - A_{32}A_{11}) + c'(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)] \end{array}\right\}.$$

Pod tym ostatnim kształtem, widzimy bezpośrednio że

$$(14)\qquad B^2 - AC = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & a' \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b' \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & c' \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix}.$$

Otóż jeśli się zauważy że

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{lll} a_1 = -\lambda\,\mathrm{dos}\,\alpha, & b_1 = -\mu\,\mathrm{dos}\,\beta, & c_1 = -\nu\,\mathrm{dos}\,\gamma, \\ a_2 = -\lambda\,\mathrm{wst}\,\alpha; & b_2 = -\mu\,\mathrm{wst}\,\beta; & c_2 = -\nu\,\mathrm{wst}\,\gamma; \end{array}\right.$$

mając wzgląd na związki (5) numeru (94), wartościami (13) na a', b, c', będą

$$a' = k.\mu\nu\,\mathrm{wst}\,A,\qquad b = k.\lambda\nu\,\mathrm{wst}\,B,\qquad c' = k.\lambda\mu\,\mathrm{wst}\,C.$$

Podstawiwszy te wartości w wyrażeniu (14), podzieliwszy przez k^2 który jest równym jedności numer (94), i kładąc $\lambda^2\mu^2\nu^2$ na czynnik, znajduje się ostatecznie

$$(16)\qquad B^2 - AC = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \frac{\mathrm{wst}\,A}{\lambda} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \frac{\mathrm{wst}\,B}{\mu} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \frac{\mathrm{wst}\,C}{\nu} \\ \frac{\mathrm{wst}\,A}{\lambda} & \frac{\mathrm{wst}\,B}{\mu} & \frac{\mathrm{wst}\,C}{\nu} & 0 \end{vmatrix} \lambda^2\mu^2\nu^2.$$

589. Związki (8) i (9) nam dają łatwo :

$$(17)\qquad \begin{cases} A = A_{11}a_1^2 + A_{22}b_1^2 + A_{33}c_1^2 + 2A_{12}a_1b_1 + 2A_{13}a_1c_1 + 2A_{23}b_1c_1, \\ C = A_{11}a_2^2 + A_{22}b_2^2 + A_{33}c_2^2 + 2A_{12}a_2b_2 + 2A_{13}a_2c_2 + 2A_{23}b_2c_2. \end{cases}$$

Dodając i mając wzgląd na związki (15) i związki (4) numeru (94) otrzyma się :

$$(18)\qquad A + C = \lambda^2A_{11} + \mu^2A_{22} + \nu^2A_{33} - 2\mu\nu A_{23}\operatorname{dos}A - 2\lambda\nu A_{13}\operatorname{dos}B - 2\lambda\mu A_{12}\operatorname{dos}C.$$

590. Podstawiwszy we wzorach (5) i (6), wartości dostarczone przez związki (12), (16) i (18) dojdzie się do związków zasadniczych, służących do wyznaczenia osi a i b krzywej (1), to jest

$$(\mathrm{I})\qquad a^2+b^2 = -\frac{S^2}{R^2\lambda^2\mu^2\nu^2}\cdot\frac{(\lambda^2A_{11}+\mu^2A_{22}+\nu^2A_{33}-2\mu\nu A_{23}\operatorname{dos}A-2\lambda\nu A_{13}\operatorname{dos}B-2\lambda\mu A_{12}\operatorname{dos}C)\cdot\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \frac{\operatorname{wst}A}{\lambda} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \frac{\operatorname{wst}B}{\mu} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \frac{\operatorname{wst}C}{\nu} \\ \frac{\operatorname{wst}A}{\lambda} & \frac{\operatorname{wst}B}{\mu} & \frac{\operatorname{wst}C}{\nu} & 0 \end{vmatrix}^2}$$

$$(\mathrm{II})\qquad a^2b^2 = -\frac{S^4}{R^4\lambda^2\mu^2\nu^2}\cdot\frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \frac{\operatorname{wst}A}{\lambda} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \frac{\operatorname{wst}B}{\mu} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \frac{\operatorname{wst}C}{\nu} \\ \frac{\operatorname{wst}A}{\lambda} & \frac{\operatorname{wst}B}{\mu} & \frac{\operatorname{wst}C}{\nu} & 0 \end{vmatrix}^3}.$$

Parametrami odniesienia są λ, μ, ν; i równaniem krzywej jest

$$(\mathrm{III})\qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0;$$

A, B, C, R, S oznaczają kąty, powierzchnię i promień koła opisanego we właściwym trójkącie odniesienia.

DYSKUSSYA WZORÓW (I) i (II) n^{ru} (590).

591. Krzywa sprowadza się do dwóch prostych rzeczywistych albo urojonych jeżeli

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

gdyż dwie osie krzywej są wtedy zerami.

Krzywa jest *hiperbolą równoramienną*, jeżeli

(2) $$\lambda^2 A_{11} + \mu^2 A_{22} + \nu^2 A_{33} - 2\mu\nu A_{23} \operatorname{dos} A - 2\lambda\nu A_{13} \operatorname{dos} B - 2\lambda\mu A_{12} \operatorname{dos} C = 0,$$

gdyż wtedy summa algebraiczna kwadratów z osi jest zerem.

Krzywa jest *parabolą* jeżeli

(3) $$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \frac{\operatorname{wst} A}{\lambda} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \frac{\operatorname{wst} B}{\mu} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \frac{\operatorname{wst} C}{\nu} \\ \frac{\operatorname{wst} A}{\lambda} & \frac{\operatorname{wst} B}{\mu} & \frac{\operatorname{wst} C}{\nu} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

osie są w rzeczy samej nieskończonemi; ten związek wyraża jeszcze że krzywa jest styczną do prostej w nieskończoności

$$\frac{\operatorname{wst} A}{\lambda}.X + \frac{\operatorname{wst} B}{\mu}.Y + \frac{\operatorname{wst} C}{\nu}.Z = 0.$$

Możnaby było wyciągnąć z tychże samych wzorów dwa warunki, aby krzywa sprowadzała się do jakiegokolwiek koła. Rachunek przedstawia trudności, jeśli chcemy uwidocznić dwa warunki; nie zajmiemy się tym przedmiotem.

IV° ZASTOSOWANIE DO KONICZNYCH SPRZĘŻONYCH WZGLĘDEM JAKIEGOKOLWIEK TRÓJKĄTA.

592. Równanie ogólne konicznych względem jakiegokolwiek trójkąta jest numer (456)

(1) $$mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0;$$

jeśli się wybierze trójkąt za trójkąt odniesienia. Przypuścimy, we wszystkiem co następuje, parametry odniesienia λ, μ, ν, równymi jedności.

Oznaczmy przez a i b długości osi krzywej (1), otrzymamy według wzorów numeru (590):

(2) $$a^2 + b^2 = -\frac{S^2}{R^2 mnp}\cdot\frac{(m+n+p)}{\left(\frac{\operatorname{wst}^2 A}{m} + \frac{\operatorname{wst}^2 B}{n} + \frac{\operatorname{wst}^2 C}{p}\right)^2}$$

(3) $$a^2 b^2 = \frac{S^4}{R^4}\cdot\frac{1}{mnp\left[\frac{\operatorname{wst}^2 A}{m} + \frac{\operatorname{wst}^2 B}{n} + \frac{\operatorname{wst}^2 C}{p}\right]^3}.$$

Spółrzędne środka (X_0, Y_0, Z_0) mają za wartości numerów (544), (96), (93):

$$(4)\qquad \frac{mX_0}{\mathrm{wst\,A}} = \frac{nY_0}{\mathrm{wst\,B}} = \frac{pZ_0}{\mathrm{wst\,C}} = \frac{S}{R}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{wst}^2A}{m} + \frac{\mathrm{wst}^2B}{n} + \frac{\mathrm{wst}^2C}{p}\right)}.$$

Równanie (1) przedstawi:

Hiperbolę równoramienną, jeżeli

$$(5)\qquad m + n + p = 0;$$

parabolę, jeżeli

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{wst}^2A}{m} + \frac{\mathrm{wst}^2B}{n} + \frac{\mathrm{wst}^2C}{p} = 0.$$

Jeśli się wyrazi że osie a i b są równe, znajduje się że równanie warunkowe może się położyć pod kształtem

$$(m + n\,\mathrm{dos}\,2C + p\,\mathrm{dos}\,2B)^2 + (n\,\mathrm{wst}\,2C + p\,\mathrm{wst}\,2B)^2 = 0;$$

zkąd wypada że równanie (1) przedstawi jakiekolwiek koło, jeżeli

$$(7)\qquad \frac{m}{\mathrm{wst}^2A} = \frac{n}{\mathrm{wst}^2B} = \frac{p}{\mathrm{wst}^2C};$$

związki już znane numer (275).

593. Potęga P_0^2 środka (X_0, Y_0, Z_0) (4), względem koła opisanego na trójkącie odniesienia

$$YZ\,\mathrm{wst\,A} + XZ\,\mathrm{wst\,B} + XY\,\mathrm{wst\,C} = 0,$$

jest numer (259)

$$-\frac{2R^2}{S}(Y_0Z_0\,\mathrm{wst\,A} + Z_0X_0\,\mathrm{wst\,B} + X_0Y_0\,\mathrm{wst\,C}).$$

Wprowadzając wartości (4), to wyrażenie daje

$$(8)\qquad P_0^2 = -\frac{S^2}{R^2}\cdot\frac{(m+n+p)}{mnp\left(\frac{\mathrm{wst}^2A}{m} + \frac{\mathrm{wst}^2B}{n} + \frac{\mathrm{wst}^2C}{p}\right)^2}.$$

Porównywając związki (8) i (2), ztąd łatwo się wyprowadza:

$$(\mathrm{I})\qquad p_0^2 = a^2 + b^2,$$

to jest *że potęga środka jakiejkolwiek konicznej, względem koła opisanego na jakimkolwiek trójkącie sprzężonym, jest równa summie kwadratów z osi.* (*Twierdzenie dane przez* p. FAURE, *Nowe Roczniki*, rok 1861.)

594. Mając wzgląd na wartości (4) i na związek (3), otrzymuje się

$$(\mathrm{II})\qquad RX_0Y_0Z_0 = a^2b^2,$$

to jest *że iloczyn z odległości środka od boków jakiegokolwiek trójkąta spzężonego przez promień koła opisanego na tym trójkącie jest równy kwadratowi iloczynu z osi.* (*Twierdzenie dane przez* p. FAURE, *Nowe Roczniki* 1861, str. 55.)

595. Jeśli się przypuści że koniczne (1) są hiperbolami równoramiennemi, znajduje się wyrugowawszy m, n, p między związkami (4) i (5):

$$\text{(III)} \qquad \frac{\text{wst A}}{\text{X}} + \frac{\text{wst B}}{\text{Y}} + \frac{\text{wst C}}{\text{Z}} = 0, \quad \text{albo} \quad \text{YZ wst A} + \text{XZ wst B} + \text{XY wst C} = 0;$$

to jest *kiedy hiperbole równoramienne są sprzężonemi względem trójkąta stałego, ich środki kreślą koło opisane na trójkącie.*

To podanie jest wnioskiem bezpośrednim numeru (593).

§ VI. — RÓWNANIA STYCZNECZKOWE.

I° Obwinięcia średnic.

596. Zwiemy obwinięciem średnicy klassy p biegunową klassy p prostej w nieskończoności.

Dało się n[er] (462) i (464) równania biegunowych jakiejkolwiek prostej; łatwo jest z tego wyprowadzić równania obwinięć średnic różnych klass.

Obwinięciem średnicy pierwszej klassy jest punkt, jestto punkt biegunowy prostej w nieskończoności. W przypadku krzywych drugiej klassy, ten punkt jest *środkiem* krzywej, gdyż jestto biegun prostej w nieskończoności.

II° Średnice w krzywych drugiej klassy.

597. W krzywych drugiej klassy, otrzymamy spółrzędne średnicy sprzężonej w kierunku danym, szukając spółrzędnych prostej której punkt biegunowy jest w nieskończoności w kierunku danym numer (462), (463), (467), (560).

Niech będzie na przykład, m spółczynnik kątowy w kierunku cięciw, spółrzędne punktu w nieskończoności w tym kierunku będą

$$z_0 = 0, \qquad y_0 = mx_0,$$

i równaniem styczneczkowem tego punktu będzie

$$\text{(1)} \qquad x_0 u + y_0 v = 0, \qquad \text{albo} \qquad u + mv = 0.$$

Spółrzędne prostej, mające (1) za punkt biegunowy względem krzywej

$$\text{(2)} \qquad f(u, v, w) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duv + 2Evw + Fw^2 = 0,$$

będą określone przez równania

$$\frac{f'_u}{1} = \frac{f'_v}{1} = \frac{f'_w}{0};$$

albo

$$\text{(3)} \qquad mf'_u - f'_v = 0, \qquad f'_w = 0;$$

takiemi są równania średnicy sprzężonej cięciw, których spółczynnikiem kątowym jest m.

W przypadku *spółrzędnych trzylinijnych*, punkt w nieskończoności będzie określonym przez spółrzędne λ, μ, ν prostej w nieskończoności i przez spółrzędne U_0, V_0, W_0 prostej równoległej w kierunku cięciw; otrzyma się więc na równanie punktu w nieskończoności

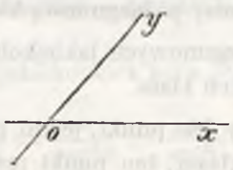
$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ U_0 & V_0 & W_0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

A tem samem, spółrzędne średnicy będą wyznaczone przez związki

$$\frac{f'_u}{V_0\nu - W_0\mu} = \frac{f'_v}{W_0\lambda - U_0\nu} = \frac{f'_w}{U_0\mu - V_0\lambda}.$$

598. Warunki aby jedna z osi spółrzędnych była średnicą sprzężoną cięciw równoległych do drugiej osi.

Szukajmy, na przykład, warunków aby oś odciętych była sprzężoną cięciw równoległych do osi Oy.



Punkt w nieskończoności na $Oy (x_0 = 0,\ z_0 = 0)$ ma na równanie n^er^ (116)

$$v = 0;$$

równaniami średnicy odpowiadającej będą:

$$f'_u = 0, \quad f'_w = 0, \quad \text{albo} \quad Au + Bv + Dw = 0, \quad Du + Ev + Fw = 0.$$

Aby ta średnica zbiegała się z Ox, potrzeba aby spółrzędne osi odciętych, to jest $u = 0$, $w = 0$ numer (116), sprawdzały równania poprzedzające, zkąd się wnosi

$$B = 0, \qquad E = 0;$$

i równanie (2) krzywej sprowadza się do

(4) $$Au^2 + Cv^2 + 2Du + F = 0.$$

Więc *aby oś odciętych była średnicą sprzężoną środków cięciw równoległych do osi rzędnych, potrzeba aby równanie krzywej nie zawierało w sobie jak tylko potęgi parzyste zmiennej* v.

Zobaczymy tak samo że aby oś rzędnych była średnicą sprzężoną cięciw równoległych do Ox, potrzeba aby równanie nie zawierało w sobie jak tylko potęgi parzyste zmiennej u.

Równanie styczneczkowe jakiejkolwiek krzywej drugiej klassy, dla której osie spółrzędnych są dwie średnice sprzężone, jest więc kształtu

(5) $$Au^2 + Cv^2 = H.$$

Odwrotne podania które dopiero cośmy wysłowili są łatwe do dowodzenia, bądź to przez rachunek, bądź to przez rozumowanie wprost, opierające się na własnościach średnic.

599. Warunek aby kierunki dwóch prostych (u_0, v_0, w_0), (u_1, v_1, w_1) były sprzężonymi.

Na dowodzenie tego potrzeba i dość jest aby jedna z nich była równoległą do średnicy sprzężonej drugiej.

Punkt w nieskończoności, położony na pierwszej prostej, otrzyma na równanie

$$\frac{u}{u_0} = \frac{v}{v_0}, \quad \text{albo} \quad uv_0 - vu_0 = 0.$$

Średnica, odpowiadająca temu punktowi, jest określoną przez

$$\frac{f'_u}{v_0} = \frac{f'_v}{-u_0} = \frac{f'_w}{0}; \quad \text{albo} \quad f'_w = 0, \quad u_0 f'_u + v_0 f'_v = 0,$$

to jest według równania (2):

(6) $$[\mathrm{D}u + \mathrm{E}v + \mathrm{F}w = 0, \quad (\mathrm{A}u_0 \mathrm{B}v_0)u + (\mathrm{B}u_0 + \mathrm{C}v_0)v + (\mathrm{D}u_0 + \mathrm{E}v_0)w = 0].$$

Potrzeba aby prosta (6) była równoległą do prostej (u_1, v_1, w_1), to jest aby równania (6) były sprawdzone przez wartości na $\frac{u}{w}$ i $\frac{v}{w}$ proporcyonalne do $\frac{u_1}{w_1}$, $\frac{v_1}{w_1}$ numer (116), czyli takie jak $\lambda\frac{u_1}{w_1}$, $\frac{v_1}{w_1}$. Podstawiwszy te wartości i wyrugowawszy λ, znajduje się

(7) $$(\mathrm{AF} - \mathrm{D}^2)u_0v_1 + (\mathrm{EF} - \mathrm{ED})(u_0v_1 + u_1v_0) + (\mathrm{CF} - \mathrm{E}^2)v_0v_1 = 0;$$

takim jest związek, który muszą sprawdzać spółrzędne dwóch prostych (u_0, v_0) (u_1, v_1), których kierunki są sprzężonymi numer (563).

III° Osie w krzywych drugiej klassy.

600. Jeśli się przypuści osie spółrzędnych prostokątne, dowodzi się jak w numerze (598), że aby oś odciętych była osią krzywej, potrzeba i dość aby równanie nie zawierało w sobie jak tylko potęgi parzyste zmiennej v; i oś rzędnych będzie osią krzywej, jeżeli równanie nie zawiera w sobie jak tylko potęgi parzyste zmiennej u.

Wyznaczymy przez różne metody kierunek osi.

Pierwsza metoda. Można wyrazić w związku (7) że dwie proste (u_0, v_0), (u_1, v_1) są prostokątne, to jest że według numeru (131)

(8) $$u_0u_1 + v_0v_1 = 0.$$

Związki (7) i (8) wyznaczą dwie proste równoległe do osi.

Lub jeszcze, zastępując w związku (7), $\frac{u_1}{v_1}$ przez $-\frac{v_0}{u_0}$, i znosząc wskaźnik 0, znajduje się

(9) $$(u^2 - v^2)(\mathrm{BF} - \mathrm{ED}) + uv[(\mathrm{C} - \mathrm{A})\mathrm{E} + \mathrm{D}^2 - \mathrm{E}^2] = 0;$$

jestto równanie dwóch punktów w nieskończoności w kierunku osi.

Druga metoda. Można użyć wzorów przekształcenia numeru (356), i wyznaczyć stałe, przypuszczając nowe osie prostokątne w ten sposób aby nowe równanie nie zawierało w sobie jak tylko kwadraty z nowych zmiennych.

Nie rozwiniemy tych rachunków.

Trzecia metoda. Oprzemy się na własności wysłowionej w numerze (584).

Niech będą ω, ω_1, punktami bieżącymi po kole w nieskończoności; γ i γ_1 punkta w nieskończoności na krzywej; A i A_1 punkta w nieskończoności w kierunku osi; musi się mieć jednocześnie

$$(10)\qquad \begin{cases} (\omega\omega_1 A A_1) = -1, \\ (\gamma\gamma_1 A A_1) = -1. \end{cases}$$

Równaniem punktów bieżących po kole w nieskończoności jest, przypuszczając osie prostokątnemi, numer (284)

$$(1^\circ)\qquad (\omega,\ \omega_1) : u^2 + v^2 = 0.$$

Równanie punktów γ, γ_1, w nieskończoności na krzywej, będzie danem przez równanie (7) numeru (416), robiąc w niem $\alpha = 0$, $\beta = 0$ (spółrzędne prostej w nieskończoności); ma się

$$(2^\circ)\qquad (\gamma, \gamma_1) : (AF - D^2)u^2 + 2(BF - ED)uv + (CF - E^2)v^2 = 0.$$

Niech będzie nakoniec równanie punktów w nieskończoności w kierunkach osi.

$$(3^\circ)\qquad (A,\ A_1) : A'u^2 + 2B'uv + C'v^2 = 0.$$

Przez zastosowania prawidła numeru (117), związki (10), mając wzgląd na równania poprzedzające, nam dają

$$A' + C' = 0,$$

$$A'(CF - E^2) + C'(AF - D^2) = 2B'(BF - ED).$$

Podstawiwszy, w równaniu (3°) wartości na $\frac{A'}{B'}$, $\frac{C'}{B'}$, dostarczone przez równania znajduje się

$$(11)\qquad u^2 + \frac{(C - A)F + D^2 - E^2}{BF - ED}\, uv - v^2 = 0.$$

Znajdziemy tym sposobem równanie (9). Stosunek $\frac{u}{v}$ wyznaczy kierunek osi.

601. Długość osi w krzywych drugiej klassy.

Przypuśćmy krzywą odniesioną do jej środka, co będzie można zawsze wykonać za pomocą wzorów przekształcenia numeru (356); niech będzie wtedy

$$(12)\qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 = G,$$

równanie krzywej. Oprzemy się, dla wyznaczenia długości, na własności numeru (582).

Jeżeli θ jest kątem osi spółrzędnych, równanie styczneczkowe jakiegokolwiek koła mającego za środek początek jest numer (279)

$$(13)\qquad u^2 - 2\mathrm{dos}\theta.uv + v^2 = \frac{\mathrm{wst}^2\theta}{p^2},$$

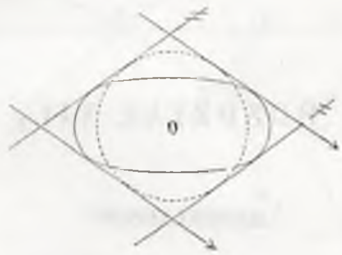
p będąc promieniem tego koła.

Gdy się odejmie równania (12) i (13), pomnożywszy pierwsze przez $\frac{\mathrm{wst}^2\theta}{p^2}$, drugie przez G, wypadnie

$$(14)\qquad \left(A\frac{\mathrm{wst}^2\theta}{p^2} - G\right)u^2 + 2uv\left(B\frac{\mathrm{wst}^2\theta}{p^2} + G\,\mathrm{dos}\theta\right) + \left(C\frac{\mathrm{wst}^2\theta}{p^2} - G\right)v^2 = 0.$$

To równanie wyznaczy dwa punkta w nieskończoności, przez które przechodzą dwie pary stycznych wspólnych do dwóch krzywych spółśrodkowych (12) i (13). Jeżeli dwie krzywe o których mowa, są styczne podwójne, dwa kierunki stycznych wspólnych zbiegają się z sobą, albo dwa w nieskończoności zlewają się. Wyraźmy więc że równanie (4) ma swe dwa pierwiastki równe, otrzymuje się równanie następujące:

(15) $$p^4 G^2 - G(A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta).p^2 + (AC - B^2)\mathrm{wst}^2\theta = 0.$$



Pierwiastki tego równania będą kwadratami z osi krzywej

(16) $$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = G.$$

Jeżeli $AC - B^2 > 0$, ma się elipsę rzeczywistą albo urojoną;

Jeżeli $AC - B^2 < 0$, ma się hiperbolę;

Jeżeli $A + C - 2B\,\mathrm{dos}\,\theta = 0$, ma się hiperbolę równoramienną;

Jeżeli $A = C$ i $\frac{B}{A} = \mathrm{dos}\,\theta$ ma się jakiekolwiek koło [przypuszczając równanie pod kształtem szczególnym (16)].

Te rezultaty chociaż przedstawiające się pod kształtem różnym, są wszelako zgodne z wypadkami, które były otrzymane w numerze (363).

Według metody wskazanej znajdzie się w przypadku równania ogólnego

(17) $$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0;$$

że kwadraty z długości osi są dane przez równania następujące:

(18) $$F^3.p^4 - F\{D^2 + E^2 - (A + C)F + 2(ED + BF)\mathrm{dos}\,\theta\}p^2 + \Delta\,\mathrm{wst}^2\theta = 0,$$

$$\text{gdzie } \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

ROZDZIAŁ VII.

JEDNOKŁADNOŚĆ.

---

§ I. — WIADOMOŚCI OGÓLNE.

I° Określenia.

602. « Niech będzie układ punktów A, B, C,... położonych na płaszczyznie, weźmy punkt O płasz-
» czyzny i złączmy go z różnymi punktami układu; potem weźmy na tych promieniach wodzących,
» punkta A', B', C', tak żeby było

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \quad = k:$$

» dwa układy ABCD... i A'B'C'D'... są nazwane podobnymi i podobnie ustawionymi, albo jeszcze
» jednokładnymi. »

Punkt O jest *środkiem wspólnym jednokładności* albo *środkiem podobieństwa;* stała k jest *stosunkiem podobieństwa.*

Punkta, takie jak A i A_1, położone na tymże samym promieniu wodzącym są nazwane punktami *odpawiadającymi* albo *odpowiednymi;* długości takie jak AB i A'B', są nazwane *wymiarami odpowiednymi.*

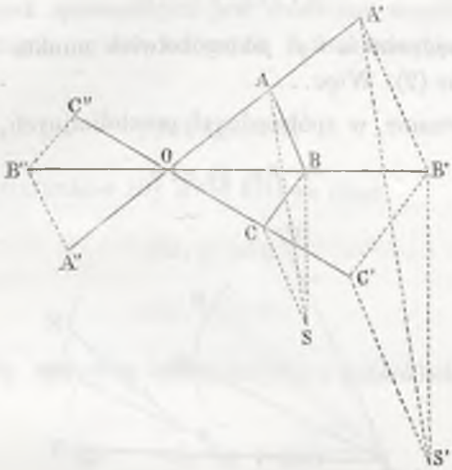
« Zamiast wziąć punkta A', B', C', . . . na promieniach OA, OB, OC, . . . możnaby wziąć na
» przedłużeniach promieni w A'', B'', C'', . . . na przykład, tak żeby było

$$\frac{OA''}{OA} = \frac{OB''}{OB} = \frac{OC''}{OC} = \ldots = k,$$

» dwie figury ABCD... i A''B''C''D''... są nazwane *podobnemi* i *odwrotnie ustawionemi,* albo jeszcze
» *jednokładnemi odwrotnemi;* punkt O jest *środkiem jednokładności odwrotnej.* »

Można sprowadzić przez obrot na 180°, figurę jednokładną płaską odwrotną do przystawania z jedną z figur jednokładnych odwrotnych.

Jednokładność jest przypadkiem szczególnym odpowiedności; jestto przypadek w którym oś odpowiedności znajduje się przeniesioną w nieskończoność.



603. Przypuśćmy że się weźmie jakikolwiek punkt S na płaszczyznie i że się go łączy z punktami A, B, C, D,...; potem, że przez punkta odpowiednie A′, B′, C′, D′,... prowadzi się równoległe do prostych SA, SB, SC,...; te równoległe zbiegną się w jednym punkcie S′. Dwa punkta S i S′ są nazwane punktami odpowiadającymi. Dwa punkta S i S′ są w linii prostej z punktem O. Można będzie przypuścić że jedna z figur, S′A′B′C′... na przykład, była przeniesioną równolegle do siebie samej, punkt S′ ślizgając się po prostej S′O, aż się zbiegnie z punktem S; dwie figury będą jeszcze jednokładne, i punkt S będzie wtedy *środkiem wspólnym jednokładności.*

Tym sposobem, *mając dane dwie figury jednokładne, można zawsze przenieść jedną z nich równolegle do niejże samej, tak aby jakikolwiek punkt, dowolnie wzięty był środkiem wspólnym podobieństwa.*

Dwie figury są nazwane podobne, kiedy można sprowadzić jedną z nich aby przystawała względem jednej z figur jednokładnych drugiej.

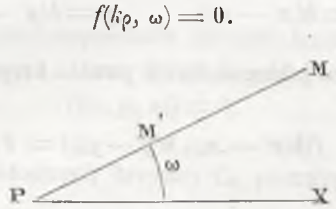
II° Równanie ogólne krzywych jednokładnych jakiejkolwiek krzywej danej.

604. Jeżeli równanie krzywej jest danem w spółrzędnych biegunowych, będzie

(1) $$f(\rho, \omega) = 0,$$

i jeśli się przypuści że biegun jest *środkiem wspólnym podobieństwa,* równaniem ogólnem *krzywych jednokładnych* krzywej danej będzie

(2) $$f(k\rho, \omega) = 0.$$



W rzeczy samej, jeśli weźmiemy jakikolwiek punkt M′ na promieniu wodzącym odpowiednym kątowi ω, i jeśli się oznaczy przez ρ i ρ' odległości PM i PM′, ma się

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{k}, \qquad \text{albo} \qquad \rho = k\rho';$$

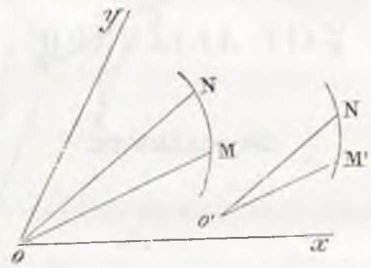
ponieważ kąt ω zachowuje też samą wartość, równanie (1) stanie się

$$f(k\rho', \omega) = 0;$$

jestto związek między spółrzędnemi ω i ρ' jakiegokolwiek punktu krzywej jednokładnej. Znosząc wskaźnik znajduje się równanie (2). Więc...

605. Niech będzie teraz równanie, w spółrzędnych prostolinijnych, jakiejkolwiek krzywej

(1) $$f(x, y) = 0.$$



Uważmy początek O jako stanowiący część układu utworzonego przez krzywą daną, i oznaczmy przez x_0 i y_0 spółrzędne przez O' odpowiedniego punktowi O i stanowiącego część układu, utworzonego przez jedną z krzywych jednokładnych krzywej (1).

Niech będzie M(x, y) jakikolwiek punkt krzywej danej i M'(x' y') punkt odpowiedny krzywej jednokładnej uważanej; jeżeli się złączy OM i O'M', proste OM i O'M' muszą być równoległe, i musi się mieć, jakimkolwiek by nie były punkt M i jego odpowiedny M',

(2) $$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M'}} = k.$$

Jeśli się odbije linie OM i O'M' na oś Ox, rzuty są w tymże samym stosunku jak długości tych prostych, ma się więc

$$\frac{x}{x' - x_0} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M}} = k.$$

Otrzyma się tak samo, rzucając na oś Oy

$$\frac{y}{y' - y_0} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M'}} = k.$$

Wyciąga się z tych równości

$$x = k(x' - x_0) \qquad y = k(y' - y_0).$$

Otóż x i y, które są spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu krzywej danej, powinny sprawdzać równanie tej krzywej; ma się więc

$$f\big(k(x' - x_0), k(y' - y_0)\big) = 0,$$

albo znosząc wskaźniki :

(3) $$f\big(k(x - x_0), k(y - y_0)\big) = 0.$$

Równanie (3) jest związkiem między spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu jakiejkolwiek krzywej jednokładnej krzywej danej; jestto więc równanie ogólne krzywych jednokładnych krzywej (1).

Dla otrzymania *środka wspólnego jednokładności* krzywych (1) i (3), dość poszukać punkt zbiegu dwóch promieni wodzących, takich jak MM′ i NN′, przechodzących przez dwie pary punktów odpowiednych.

Kiedy się przypuści, że początek spółrzędnych jest środkiem wspólnym jednokładności, potrzeba zrobić $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, i równanie ogólne krzywych jednokładnych krzywej (1) weźmie kształt prostszy

$$(4) \qquad f(kx, ky) = 0.$$

Uwaga. Jeśli chcemy szukać warunków aby dwie krzywe dane

$$(1°) \qquad f(x, y) = 0,$$

$$(2°) \qquad F(x, y) = 0;$$

były jednokładnemi, weźmie się równanie ogólne krzywych jednokładnych krzywej (2°) na przykład, która będzie

$$(3°) \qquad F(k(x - x_0), k(y - y_0)) = 0,$$

i wyrazi się że krzywa (3°) zbiega się z krzywą (1°).

Wnosi się że krzywe f i F powinny być tegoż samego rzędu, i mieć też same kierunki assymptotyczne.

Te warunki są konieczne, lecz ogólnie nie są wcale dostateczne, kiedy rząd krzywej jest wyższym od dwóch.

606. *Przypadek w którym równanie nie zawiera w sobie jak tylko jeden parametr linijny.*

« Kiedy równanie jakiejkolwiek krzywej nie zawiera w sobie jak tylko jeden parametr linijny, i
» gdy żadna z linii figury nie była wziętą za jedność; wszelkie krzywe przedstawione przez to
» równanie są jednokładnemi, i początek jest środkiem wspólnym podobieństwa.

Niech będzie równanie tych krzywych

$$(C) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

gdzie a przedstawia miarę, odniesioną do jakiejkolwiek jedności dowolnej, pewnej linii A. Ponieważ żadna linia figury nie była wziętą za jedność, funkcya f jest jednorodną względem x, y, i a; tak że

$$(1) \qquad f(\lambda x, \lambda y, \lambda a) = \lambda^m f(x, y, a).$$

Uważmy jedną z tych krzywych, która odpowiada wartości szczególnej a_0 parametru a; jej równanie będzie

$$(C_0) \qquad f(x, y, a_0) = 0.$$

Równanie ogólne krzywych jednokładnych krzywej C_0, początek będąc środkiem wspólnym podobieństwa, jest

$$(C') \qquad f(kx, ky, a_0) = 0.$$

Otóż a_0 będąc wybranym, można zawsze założyć

$$a_0 = ka_1;$$

a, będzie wyznaczonem jeżeli się daje k, albo odwrotnie k będzie wyznaczonem jeżeli się daje a_1. Równanie krzywej (C′) staje się wtedy

$$f(kx, ky, ka_1) = 0,$$

albo, według tożsamości (1) :

$$(C) \qquad f(x, y, a_1) = 0.$$

Otóż to równanie jest dokładnie równaniem jakiejkolwiek z krzywych C, otrzymanej przypisując dla a wartość szczególną a_1. Jeśli k jest dowolnem, a_1 będzie dowolnem; to jest że krzywe są jednokładnemi jednej z nich; albo co wychodzi na jedno, one są jednokładnemi.

607. Ogólnie, przypuśćmy że potrzeba n parametrów linijnych dla określenia wszelkich krzywych tegoż samego rodzaju, usunąwszy ich położenie na płaszczyźnie; oznaczmy przez $a, b, c, \ldots$ miary tych parametrów za pomocą jakiejkolwiek jedności dowolnej. Przypuśćmy że się przywiedło równanie tych krzywych aby więcej nie zależało jak tylko od tych parametrów, tak że to równanie jest kształtu

$$(C) \qquad f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0;$$

ono będzie jednorodnem względem $x, y, a, b, c, \ldots$; to jest że

$$(1) \qquad f(\lambda x, \lambda y, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \ldots) = \lambda^m(x, y, a, b, c, \ldots).$$

Uważmy jedną z tych krzywych odpowiadającą wartościom szczególnym $a_0, b_0, c_0, \ldots$ parametrów, jej równanie będzie

$$(C_0) \qquad f(x, y, a_0, b_0, c_0, \ldots) = 0.$$

Równaniem ogólnem krzywych jednokładnych krzywej C_0, początek będąc środkiem podobieństwa, jest

$$(C') \qquad f(kx, ky, a_0, b_0, c_0, \ldots) = 0.$$

Otóż, $a_0, b_0, c_0, \ldots$ będąc wybrane, można założyć

$$(2) \qquad a_0 = ka_1, \qquad b_0 = kb_1, \qquad c_0 = kc_1, \ldots;$$

równanie krzywych C′ stanie się, mając wzgląd na tożsamość (1) :

$$(C') \qquad f(x, y, a_1, b_1, c_1, \ldots) = 0.$$

Otóż jest to wyraźnie równanie jakiejkolwiek z krzywych (C′), otrzymanej przypisując dla $a, b, c, .$ wartości szczególne $a_1, b_1, c_1, \ldots$.

« Więc kiedy równanie jakiejkolwiek krzywej jest przywiedzione aby więcej nie zależało jak tylko » od parametrów linijnych, które określają zupełnie rodzaj krzywej, wszelkie krzywe przedstawione » przez to równanie są jednokładnemi i mają za środek wspólny podobieństwa początek, jeśli się » zmieni proporcyonalnie wszystkie parametry linijne. »

608. *Kiedy dwie krzywe są jednokładne, styczne w punktach odpowiednych są równoległe.*

« W rzeczy samej, jeżeli M i M′, N i N′, są dwie pary punktów odpowiednych, proste MN i M′N′ » są równoległe. Otóż jeżeli punkt N zbliża się nieograniczenie do M, punkt odpowiedny N′ zbliży » się także nieograniczenie do M′; ponieważ promienie wodzące są stale równoległymi; proste MN » i M′N′ pozostaną również równoległemi; więc kiedy MN stanie się styczną, M′N′ stanie się także » styczną w M′; i równoległość będzie jeszcze miała miejsce w granicy. »

III° Równanie ogólne krzywych podobnych do jakiejkolwiek krzywej danej.

609. Dwie krzywe są podobne kiedy jedna z nich może być przywiedziona do przystawania z jedną z jednokładnych drugiej.

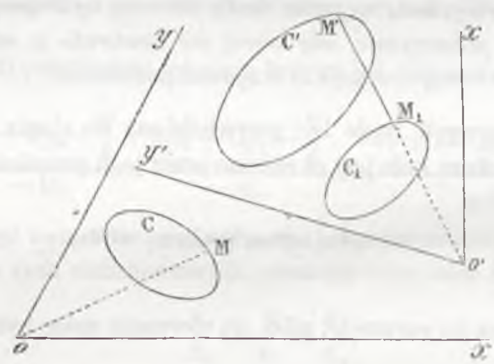
Niech będzie krzywa C, której równanie jest

$$(1) \qquad (C) \qquad f(x, y) = 0,$$

a C′ krzywa podobna. Według określenia krzywych podobnych, krzywa C′ może być przywiedzioną do złączenia się z jedną z krzywych jednokładnych krzywej C i odwrotnie krzywą C można przywieść do zlania się z jedną z jednokładnych C′. Można zawsze przypuścić że nierozłącznie z krzywą C przenosi się osie Ox i Oy równolegle do ich pierwotnego położenia aż punkt O znajdzie się w pewnym punkcie O′; i że wtedy obraca się osie około O′ aż krzywa C przyjmie położenie C_1, na jednej z krzywych jednokładnych krzywej C′; tak że C_1 jest jednokładną C′ równą C i że O′ jest wspólnym środkiem podobieństwa dwóch krzywych C_1 i C′.

Przypuściliśmy że nierozłącznie z osiami przeniesiono krzywą C, równanie krzywej C_1 względem nowych osi będzie więc jeszcze

$$(C_1) \qquad f(x', y') = 0,$$



cecha f zostając tąż samą, x' i y' przedstawiają spółrzędne punktu M_1 względem nowych osi $O'x'$, $O'y'$; osie są względnie równe spółrzędnym x i y punktu M względem osi Ox, Oy.

Możemy teraz uważać krzywą C′ jako jedną z krzywych jednokładnych C_1, nowy początek będąc środkiem wspólnym podobieństwa; tak że równanie C′, względem nowych osi, będzie numer (605).

$$(2) \qquad (C) \qquad f(kx', ky') = 0,$$

x' i y' oznaczając spółrzędne punktu M′, odpowiednego M_1. To równanie przedstawia więc krzywą C′ odniesioną do nowych osi $O'x'$, $O'y'$, czyniących kąt θ równy kątowi osi pierwotnych Ox, Oy.

Dla odniesienia tej krzywej do osi pierwotnych, oznaczmy przez α i β kąty $O'x'$, $O'y'$, z Ox, i przez x_0, y_0, spółrzędne θ' względem Ox i Oy, wzorami przekształcenia są

$$(3) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{x' \operatorname{wst}(\theta - \alpha) + y' \operatorname{wst}(\theta - \beta)}{\operatorname{wst}\theta}, \\[2ex] y = y_0 + \dfrac{x' \operatorname{wst}\alpha + y' \operatorname{wst}\beta}{\operatorname{wst}\theta}, \end{cases}$$

ze związkiem $\qquad \beta - \alpha = \theta.$

Otóż krzywa (2) będąc odniesioną do nowych osi, winniśmy przejść z nowych osi do dawnych, to jest zastąpić x' i y' przez ich wartości w funkcyi x i y. Ze wzorów (3) wyciąga się

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{(x-x_0)\,\mathrm{wst}\,\varepsilon-(y-y_0)\,\mathrm{wst}(\theta-\varepsilon)}{\mathrm{wst}\,\theta},\\ y' &= \frac{-(x-x_0)\,\mathrm{wst}\,\alpha+(y-y_0)\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha)}{\mathrm{wst}\,\theta},\end{aligned}\right.$$

$$\text{z warunkiem}\qquad \varepsilon-\alpha=\theta.$$

Podstawiwszy te wartości w równaniu (2), wnosimy że równaniem ogólnem krzywych podobnych do krzywej danej (1) jest

$$(5)\qquad f\left[k\,\frac{(x-x_0)\,\mathrm{wst}(\theta+\alpha)+y-y_0)\,\mathrm{wst}\,\alpha}{\mathrm{wst}\,\theta},\quad k\,\frac{-(x-x_0)\,\mathrm{wst}\,\alpha+(y-y_0)\,\mathrm{wst}(\theta-\alpha}{\mathrm{wst}\,\theta}\right]=0.$$

W tem równaniu wchodzą cztery nieoznaczone, k, x_0, y_0, α.

610. *Kiedy krzywa jest określoną geometrycznie (nie zważając na jej położenie na płaszczyznie) przez jeden parametr linijny; albo, co wychodzi na jedno, kiedy równanie tej krzywej może być przywiedzonem, niezależnie od jej położenia na płaszczyznie, aby więcej nie zawierało w sobie jak tylko jeden parametr linijny, wszystkie krzywe tegoż samego rodzaju są krzywemi podobnemi*

Gdyż jakakolwiek z tych krzywych może być przywiedzioną do zlania się z jedną z jej jednokładnych, numer (606). Tym sposobem koło jest określone przez jego promień; albo jego równanie może być przywiedzionem do kształtu

$$x^2+y^2-\mathrm{R}^2=0;$$

wszystkie koła są podobne.

Parabola jest określoną przez jej parametr; albo, jej równanie może być przywiedzionem do kształtu

$$y^2-2px=0;$$

wszystkie parabole są podobne.

Kiedy krzywa jest określoną geometrycznie (nie zważając na jej położenie na płaszczyznie) przez n parametrów linijnych; albo co wychodzi na jedno, kiedy równanie tej krzywej może być przywiedzionem, niezależnie od jej położenia na płaszczyznie, aby nie zawierało w sobie jak tylko n parametrów linijnych; wszystkie krzywe tegoż samego rodzaju będą podobne, kiedy się przypisze dla n parametrów wartości proporcyonalne.

Tym sposobem, elipsa jest określoną co do wielkości przez długości jej osi; albo jej równanie może być przywiedzionem do kształtu

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}+\frac{y^2}{\mathrm{b}^2}=1;$$

więc wszystkie elipsy są podobne, kiedy ich osie są proporcyonalne.

Wniosłoby się podobnież że hiperbole są podobne kiedy ich osie są proporcyonalne.

§ II. — ZASTOSOWANIE DO KRZYWYCH DRUGIEGO RZĘDU.

Warunki jednokładności.

611. Niech będą równania dwóch krzywych drugiego rzędu

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$(2)\qquad A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0.$$

Dla otrzymania warunków jednokładności tych dwóch krzywych, weźmiemy równanie ogólne krzywych jednokładnych jednej z nich, i wyrazimy że ona przedstawia też samą krzywę jak druga.

Uważmy początek O jako należący do układu utworzonego przez krzywą (1), i niech będą $O'(x_0, y_0)$ punkt odpowiedny w układzie utworzonym przez jedną z jej jednokładnych, równanie ogólne krzywych jednokładnych (1) będzie wtedy numer (605):

$$k^2A(x-x_0) + 2k^2B(x-x_0)(y-y_0) + k^2C(y-y_0)^2 + 2Dk(x-x_0) + 2Ek(y-y_0) + F = 0,$$

albo

$$(3)\ Ax^2+2Bxy+Cy^2-2x\left(Ax_0+By_0-\frac{D}{k}\right)-2y\left(Bx_0+Cy_0-\frac{E}{k}\right)+Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2-2\frac{Dx_0+Fy_0}{k}+\frac{F}{k^2}=0.$$

Wyrazimy że równanie (3) przedstawia też samą krzywą jak równanie (2), otrzyma się

$$(4)\quad \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}=\frac{Ax_0+By_0-\frac{D}{k}}{-D_1}=\frac{Bx_0+Cy_0-\frac{E}{k}}{-E_1}=\frac{Ax_0+2Bx_0y_0+Cy_0^2-2\frac{Dx_0+By_0}{k}+\frac{F}{k^2}}{F_1}.$$

Ma się tym sposobem pięć związków między trzema nieoznaczonemi x_0, y_0, k; trzy pierwsze stosunki nie zawierają żadnej z tych nieoznaczonych; musi się więc mieć naprzód

$$(5)\qquad \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}.$$

Te warunki są konieczne; one są także dostateczne, gdyż przypuszczając je spełnionymi, pozostaje trzy związki między trzema nieoznaczonemi x_0, y_0, k; będzie można zawsze je wyznaczyć w ten sposób aby związki były sprawdzone. Więc

Aby dwie krzywe drugiego stopnia były jednokładnemi, potrzeba i dość jest aby spółczynniki wyrazów drugiego stopnia były proporcyonalne.

Można powiedzieć jeszcze: *potrzeba i dość aby kierunki assymptotyczne były też same*, numer (530).

Uwaga I. — *Kiedy dwie krzywe* (1) i (2) *są dwa koła, związki* (5) *są zawsze sprawdzone; więc dwa jakiekolwiek koła są zawsze jednokładnemi.*

Uwaga II. — *Dwie krzywe jednokładne są zawsze tegoż samego rodzaju,* to jest *albo dwie elipsy, albo dwie hiperbole albo dwie parabole; lecz, chociaż należące do tegoz samego rodzaju, one mogą być różnemi.*

Ma się, w rzeczy samej,

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}=\lambda;$$

zkąd wypada

$$B^2-AC=\lambda^2(B_1^2-A_1C_1);$$

to jest że ilości (B^2-AC) i $(B_1^2-A_1C_1)$ są jednocześnie dodatnemi, odjemnemi, albo zerami.

Uwaga III. *Aby dwie parabole były jednokładne, potrzeba i dość jest aby ich osie były równoległe.*
W rzeczy samej, krzywe (1) i (2) będąc parabolami, ma się

$$B^2 - AC = 0, \quad B_1^2 - A_1C_1 = 0; \quad \text{zkąd} \quad \frac{B}{A} = \frac{C}{B}, \quad \frac{B_1}{A_1} = \frac{C_1}{B_1}, \quad (1^\circ).$$

Otóż jeśli się przypuści osie równoległe, to jest numer (577)

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1}, \quad \text{albo} \quad \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} \quad (2^\circ),$$

związki (5) będą sprawdzone. Gdyż mając wzgląd na równość (2), związki (1°) dają

$$\frac{C}{B} = \frac{C_1}{B_1}; \quad \text{zkąd} \quad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1};$$

c. b. d. d.

612. Powróćmy teraz do rachunku nieoznaczonych x_0, y_0 i k. Przypuśćmy że się otrzymało związki

$$(6) \qquad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \lambda;$$

równania (4) które służą do wyznaczenia x_0, y_0 i k będą mogły się napisać

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & Ax_0 + By_0 - \frac{D}{k} + \lambda D_1 = 0, \\ & Bx_0 + Cy_0 - \frac{E}{k} + \lambda E_1 = 0, \\ & Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy = 2\,\frac{Dx_0 + Ey_0}{k} + \frac{F}{k^2} - \lambda F_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Drugie z tych równań może się uprościć obrachowując dwa pierwsze; odejmijmy od trzeciego summę dwóch pierwszych względnie pomnożonych przez x_0 i y_0, zastąpimy układ (7) przez następujący:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & Ax_0 + By_0 - \frac{D}{k} + \lambda D_1 = 0, \\ & Bx_0 + Cy_0 - \frac{E}{k} + \lambda E_1 = 0, \\ & \left(\frac{D}{k} + \lambda D_1\right)x_0 + \left(\frac{E}{k} + \lambda E_1\right)y_0 - \frac{F}{k^2} + \lambda F_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Przestaniemy na wyznaczeniu *stosunku podobieństwa* k; w tym celu wystarczy wyrugować x_0 i y_0 między trzema równaniami (8); wypadkiem z rugowania będzie

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} A & B & -\frac{D}{k} + \lambda D_1 \\ B & C & -\frac{E}{k} + \lambda E_1 \\ \frac{D}{k} + \lambda D_1 & \frac{E}{k} + \lambda E_1 & -\frac{F}{k^2} + \lambda F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ten wyznacznik może się rozłożyć w ten sposób na summę dwóch wyznaczników:

$$\lambda \begin{vmatrix} A & B & D_1 \\ B & C & E_1 \\ \frac{D}{k}+\lambda D_1 & \frac{E}{k}+\lambda E_1 & F_1 \end{vmatrix} - \frac{1}{k} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ \frac{D}{k}+\lambda D_1 & \frac{E}{k}+\lambda E_1 & \frac{F}{k} \end{vmatrix} = 0;$$

rozkładając jeszcze każdy z tych wyznaczników, wypadnie

$$\lambda \begin{vmatrix} A & B & D_1 \\ B & C & E_1 \\ \lambda D_1 & \lambda E_1 & F_1 \end{vmatrix} + \frac{\lambda}{k} \begin{vmatrix} A & B & D_1 \\ B & C & E_1 \\ D & E & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{k} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} - \frac{\lambda}{k} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D_1 & E_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Drugi i czwarty wyznaczniki znoszą się i pozostaje

$$\lambda \begin{vmatrix} A & B & D_1 \\ B & C & E_1 \\ \lambda D_1 & \lambda E_1 & F_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{k^2} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

albo nakoniec zastępując w pierwszej stronie A, B, C, przez λA, λB, λC, ma się ostatecznie

$$\frac{1}{k^2} = \lambda^3 .. \frac{\Delta_1}{\Delta} = \lambda^3 \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}; \tag{10}$$

taka jest wartość stosunku podobieństwa; można zawsze uczynić tak aby λ było dodatnem.

613. Już zauważyliśmy że dwie krzywe jednokładne drugiego stopnia, należą do tegoż samego rodzaju numer (315); wartość (10) nam pokazuje że jeżeli krzywe należą do jednakiego rodzaju stosunek podobieństwa k jest zawsze rzeczywistym; jeśli krzywe należą do rodzajów różnych, stosunek podobieństwa może być zerem albo urojonym, gdyż wtedy dyskryminanty Δ i Δ_1 są znaków przeciwnych numer (315).

W przypadku paraboli, wartość (10) k bierze kształt prostszy.

Ma się, w rzeczy samej,

$$A.\Delta = (AC - B^2)(AF - D^2) - (AE - BD)^2,$$

$$A_1.\Delta_1 = (A_1C_1 - B_1^2)(A_1F_1 - D_1^2) - (A_1E_1 - B_1D_1)^2;$$

otóż $AC - B^2 = 0$, $A_1C_1 - B_1^2 = 0$; ma się więc

$$\frac{1}{k^2} = \lambda^3 . \frac{A}{A_1} . \frac{(A_1E_1 - B_1D_1)^2}{(AE - BD)^2};$$

albo mając wzgląd na związki (6)

(11) $$\frac{1}{k} = \pm\lambda^2 \frac{A_1E_1 - B_1D_1}{AE - BD};$$

stosunek jednokładności jest wtedy rzeczywistym.

II° Przypadki szczególne.

614. Rozbierzmy różne przypadki gdzie stosunek podobieństwa może być zerem albo urojonym. Uważmy dwie krzywe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Te dwa równania, mając też same wyrazy drugiego stopnia, przedstawiają dwie krzywe jednokładne, początek jest środkiem wspólnym podobieństwa; lecz stosunek podobieństwa jest urojonym. Te dwa równania przedstawiają, w rzeczy samej, dwie *hiperbole sprzężone;* one mają też same assymptoty; lecz krzywe nie są położone w tym samym kącie assymptot. Jeśli OM jest promień wodzący odpowiedny jakiemukolwiek punktowi rzeczywistemu pierwszej hiperboli, ten promień spotka drugą hiperbolę w jakimkolwiek punkcie urojonym M', tak że stosunek $\frac{OM}{OM'}$ jest zawsze urojonym.

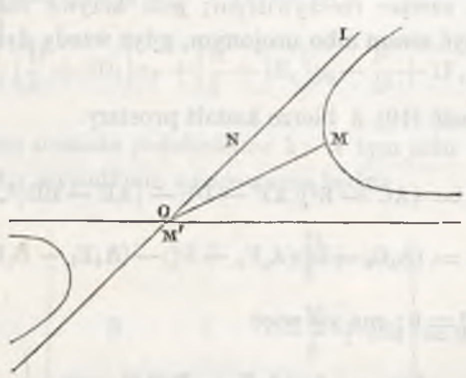
615. Uważmy dwa równania

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Te dwa równania, mając też same wyrazy drugiego stopnia przedstawiają dwie krzywe jednokładne; początek jest środkiem wspólnym podobieństwa, lecz stosunek podobieństwa jest nieskończonym.

Dla wytłumaczenia tego wypadku, uważmy że pierwsze równanie przedstawia hiperbolę, a drugie, dwie proste które są assymptotami tej hiperboli. Jeśli się uważa promień wodzący OM, on przecina assymptoty w jakimkolwiek punkcie M' zlewającym się z punktem O, tak że stosunek $\frac{OM}{OM'}$ jest nieskończonym; początek O jest więc punktem odpowiednym wszystkich punktów hiperboli poło-



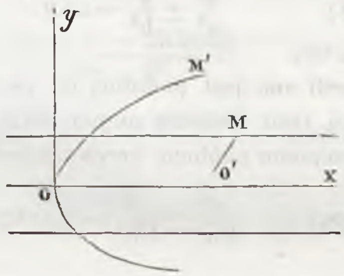
żonych w odległości skończonej. Kiedy punkt hiperboli jest w nieskończoności, niech będzie ten punkt, jakikolwiek punkt N assymptoty odpowiadającej da $\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{ON}} = \frac{\infty}{\mathrm{ON}} = \infty$; to jest że wszystkie punkta jakiejkolwiek assymptoty są wtedy punktami odpowiednymi punktu hiperboli położonego w nieskończoności na tej assymptocie.

616. Uważmy dwa równania

(1) $$y^2 = 2px,$$

(2) $$y^2 = a^2;$$

te dwa równania, mając też same wyrazy drugiego stopnia, przedstawiają dwie krzywe jednokładne. Widzimy że pierwsza jest parabolą, a druga układem dwóch prostych równoległych do osi paraboli.



Uważmy punkt O jako należący do układu utworzonego przez parabolę, i niech będzie $O'(x_0, y_0)$ punkt odpowiedny w układzie utworzonym przez dwie proste równoległe. Niech będzie M punkt paraboli, M' punkt odpowiedny na układzie dwóch prostych, i niech będzie nakoniec

(3) $$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M'}} = k;$$

wyznaczmy wartości stałe x_0, y_0, k.

Ma się $\frac{x}{x' - x_0} = k$; $\frac{y}{y' - y_0} = k$, tak że równanie krzywych jednokładnych krzywej (1) jest, znosząc wskaźniki

$$(y - y_0)^2 = \frac{2p}{k}(x - x_0), \quad y^2 - \frac{2p}{k}x - 2y_0 y + y_0^2 + \frac{2p}{k}x_0 = 0.$$

Aby to równanie przedstawiało krzywą (2) potrzeba żeby było

(4) $$y_0 = 0, \quad k = \infty, \quad \text{gr.}\frac{2p}{k}x_0 = -a^2, \quad \text{a tem samem} \quad x_0 = \infty.$$

Punkt O' jest więc w nieskończoności na Ox, i stosunek podobieństwa jest nieskończonym.

Dla sprawdzenia tego wypadku, oceńmy wprost stosunek $\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M'}}$. Punkt O' jest wyznaczonym przez równania $y = 0$, $z = 0$; równanie jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez punkt będzie więc

$$y = \lambda z;$$

tóż jeśli się szuka przecięcia tej prostej z krzywą (2), znajduje się

$$(\lambda^2 - a^2)z^2 = 0.$$

Punkt O′ w nieskończoności jest więc punktem podwójnym krzywej (2), to jest że wszelka prosta przechodząca przez ten punkt, spotyka krzywą w dwóch punktach zbiegających się z sobą; a tem samem O′M′ jest zerem; widzimy tym sposobem dla czego stosunek $\frac{OM}{O'M'}$ jest nieskończonym.

III° Warunki podobieństwa.

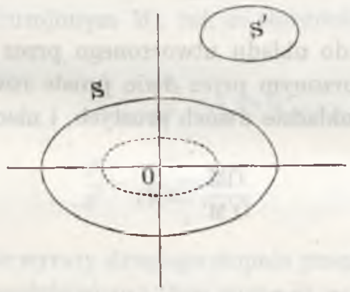
617. Ponieważ wszystkie parabole są podobne, przeto zajmiemy się wyłącznie krzywemi mającemi środki. Wrócimy tu do tej kwestyi już traktowanej w numerze (610).

Możemy przypuścić jedną z krzywych odniesioną do jej osi, tak że jej równanie jest

$$(S) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - \; = 0.$$

Niech będzie S′ druga krzywa; jeśli ona jest podobną do pierwszej, powinno się módz ją zlać z jedną z jednokładnych tej pierwszej. Otóż możemy numer (603) wziąć, za środek wspólny podobieństwa, środek O krzywej S; równaniem ogólnem krzywych jednokładnych S będzie wtedy

$$(S_1) \qquad \frac{x^2}{k^2a^2} \pm \frac{y^2}{k^2b^2} - 1 = 0;$$



takiem będzie także równanie krzywej S′, kiedy się ją przywiedzie do zlania się z jedną z jednokładnych krzywej S, wziąwszy środek O za środek wspólny jednokładności. Lecz przez to przeniesienie kształt krzywej S′ nie zmieni się, i jej osie są wtedy.

$$a_1^2 = k^2a^2, \qquad b_1^2 = k^2b^2;$$

zkąd wypada

$$(1) \qquad \frac{a_1^2}{a^2} = \frac{b_1^2}{b^2}.$$

Więc *aby dwie krzywe drugiego stopnia, tegoż samego rodzaju, były podobne, potrzeba i dość jest aby osie były proporcyonalne.*

618. Możemy wyciągnąć ztąd związek, który musi istnieć między spółczynnikami równań ogólnych dwóch krzywych drugiego rzędu, aby dwie krzywe były podobne.

Przypuśćmy, co jest zawsze pozwolonem, dwie krzywe odniesione do środka wspólnego, i niech będą równania

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

$$(2) \qquad A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 = H_1.$$

Aby te dwie krzywe były podobne, potrzeba i dość żeby było

$$\text{(3)} \qquad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1}{k},$$

a, b; a_1, b_1, będąc długościami ich osi.

Lecz równania kwadratów z osi krzywych (1) i (2) są numer (580) :

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} (AC - B^2).R^2 - H(A + C - 2B\,\text{dos}\theta).R + H^2\text{wst}^2\theta = 0, \\ (A_1C_1 - B_1^2).R^2 - H_1(A_1 + C_1 - 2B_1\text{dos}\theta).R + H_1^2\text{wst}^2\theta = 0, \end{cases}$$

θ będąc kątem osi. Z tych równań wyciąga się, mając wzgląd na związki (3) :

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{H(A + C - 2B\,\text{dos}\theta)}{AC - B^2}, \quad a^2b^2 = \dfrac{H^2\text{wst}^2\theta}{AC - B^2}; \\ a_1^2 + b_1^2 = k^2(a^2 + b^2) = \dfrac{H_1(A_1 + C_1 - 2B_1\text{dos}\theta)}{A_1C_1 - B_1^2}; \quad a_1^2b_1^2 = k^4a^2b^2 = \dfrac{H_1^2\text{wst}^2\theta}{A_1C_1 - B_1^2}; \end{cases}$$

$$\text{(6)} \qquad \frac{(A + C - 2B\,\text{dos}\theta)^2}{AC - B^2} = \frac{(A_1 + C_1 - 2B_1\text{dos}\theta)^2}{A_1C_1 - B_1^2};$$

takim jest warunek aby dwie proste drugiego rzędu były podobne.

Sprawdza się natychmiast że związek (6) sprowadza się do tożsamości w przypadkach następujących, gdzie dwie krzywe są :

1° Dwie parabole : więc wszystkie parabole są podobne;

2° Dwie hiperbole równoramienne : wszystkie hiperbole równoramienne są podobne;

3° Dwie hiperbole których kąt assymptot jest tenże sam.

Wreszcie związek (6) wyraża istotnie że styczna trygonometryczna kąta dwóch kierunków assymptotycznych ma tęż samą wartość dla dwóch krzywych (1) i (2).

§ III. — RÓWNANIE STYCZNECZKOWE.

619. Uważmy naprzód że, jeśli się daje równania styczneczkowe dwóch krzywych, można będzie rozpoznać przez uwagi następujące czy te krzywe są jednokładne.

» Dla jakiejkolwiek stycznej pierwszej krzywej, musi odpowiadać dla drugiej krzywej styczna « równoległa; i nadto proste przechodzące przez punkta styczności odpowiedne, muszą wszystkie » zbiegać się w jednym punkcie; ten punkt będzie środkiem wspólnym jednokładności numer (608). »

Możemy, według tego, znaleźć równanie ogólne styczneczkowe krzywych jednokładnych jakiejkolwiek krzywej danej

$$\text{(1)} \qquad f(u, v) = 0.$$

Niech będą x_0, y_0, spółrzędne kartezyańskie środka wspólnego O' podobieństwa krzywej (1) z jedną z jej jednokładnych, przenieśmy osie równolegle do ich pierwotnego położenia w ten punkt.

Według wzorów numeru (356), ma się

$$(2)\qquad \begin{cases} u' = -\dfrac{u}{ux_0 + vy_0 - 1}, \\ v' = -\dfrac{v}{ux_0 + vy_0 - 1}, \end{cases} \quad \text{zkąd} \quad \begin{cases} u = \dfrac{u'}{u'x_0 + v'y_0 - 1}, \\ v = \dfrac{v'}{u'x_0 + v'y_0 - 1}, \end{cases}$$

u, v, będąc spółrzędnemi pierwotnemi, a u', v', będąc nowemi spółrzędnemi tejże samej prostej.

Równanie krzywej (1), względem nowych osi, będzie

$$(3)\qquad f\left(\frac{u'}{u'x_0 + v'y_0 + 1}, \quad \frac{v'}{u'x_0 + v'y_0 + 1}\right) = 0.$$

Otóż jeśli u', v', są spółrzędnemi jakiejkolwiek stycznej do krzywej (3), spółrzędnemi stycznej odpowiedniej dla jednej z jej jednokładnych będą

$$ku', \quad kv',$$

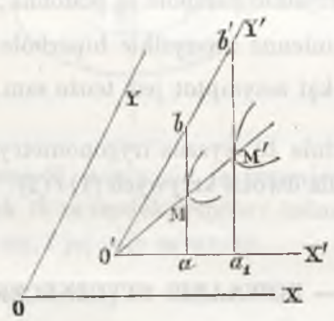
k będąc stosunkiem podobieństwa; gdyż jeśli M i M' są punktami styczności, ma się

$$\frac{\text{Ob}}{\text{Ob}_1} = \frac{\text{Oa}}{\text{Oa}_1} = \frac{\text{O'M}}{\text{O'M'}} = k \quad \text{etc.}\,.\,.$$

Więc równaniem ogólnem krzywych jednokładnych krzywej (3), będzie

$$(4)\qquad f\left(\frac{ku'}{k(u'x_0 + v'y_0) + 1}, \quad \frac{kv'}{k(u'x_0 + v'y_0) + 1}\right) = 0;$$

ta krzywa znajduje się odniesioną do nowych osi.



Jeśli, za pomocą wzorów (2), odniesiemy do dawnych osi, sprawdzimy że:

Równaniem ogólnem krzywych jednokładnych krzywej (1) *jest*

$$(5)\qquad f\left(\frac{ku}{(k-1)(ux_0 + vy_0) + 1}, \quad \frac{kv}{(k-1)(ux_0 + vy_0) + 1}\right) = 0,$$

k jest stosunkiem *podobieństwa; x_0, y_0, są spółrzędnemi kartezyańskiemi środka wspólnego podobieństwa.*

620. Zastosujmy tę metodę do poszukiwania warunków aby dwie krzywe drugiej klassy

$$(1)\qquad Au^2 + Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

$$(2)\qquad A_1u^2 + B_1uv + C_1v^2 + 2D_1u + 2E_1v + F_1 = 0,$$

były jednokładne.

Według tego co poprzedza, równanie ogólne krzywych jednokładnych krzywej (1) jest

$$k^2[Au^2 + 2Buv + Cv^2] + 2k[Du + Ev][(k-1)(ux_0 + vy_0) + 1] + F[(k-1)(ux_0 + vy_0) + 1]^2 = 0.$$

To równanie rozwinięte staje się

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{ll} + [Ak^2 + 2k(k-1)Dx_0 + (k-1)^2Fx_0^2]u^2 & + 2[kD + (k-1)Fx_0]u \\ + 2[Bk^2 + k(k-1)(Dy_0 + Ex_0) + (k-1)^2Fx_0y_0)uv & + 2[kE + (k-1)Fy_0]v \\ + [Ck^2 + 2k(k-1)Ey_0 + (k-1)^2Fy_0^2]v^2 & + F \end{array}\right\} = 0.$$

Wyraźmy że równania (2) i (3) przedstawiają też samą krzywą, ma się

$$(4) \qquad \frac{F}{F_1} = \frac{kE + (k-1)Fy_0}{E_1} = \frac{kD + (k-1)Fx_0}{D_1} = \frac{Ck^2 + 2k(k-1)Ey_0 + (k-1)^2Ey_0}{C_1}$$

$$= \frac{Bk^2 + k(k-1)(Dy_0 + Ex_0) + (k-1)^2Fx_0y_0}{B_1} = \frac{Ak^2 + 2k(k-1)Dx_0 + (k-1)^2Fx_0}{A_1}.$$

Przez wyrugowanie ilości x_0 i y_0, wyciąga się pięć związków (4):

$$(5) \qquad \frac{F_1^2}{F^2}k^2 = \frac{A_1F_1 - D_1^2}{AF - D^2} = \frac{C_1F_1 - E_1^2}{CF - E^2} = \frac{B_1F_1 - D_1E_1}{BF - DE}:$$

to są *dwa warunki konieczne i dostateczne aby dwie krzyme* (1) i (2) *były jednokładne*.

Kiedy dwie krzywe odniesione są do ich środka, te warunki przywiodą się do

$$(6) \qquad \frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C}.$$

ROZDZIAŁ VIII

DOWODZENIE NIEKTÓRYCH TWIERDZEŃ OGÓLNYCH O KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH

1° Liczba punktów koniecznych dla wyznaczenia jakiejkolwiek krzywej.

621. Przez $\frac{m(m+3)}{2}$ punktów można ogólnie przeprowadzić jakąkolwiek krzywą algebraiczną rzędu m. i jednę tylko.

Widzieliśmy w rzeczy samej numer (36) że równanie ogólne stopnia m zawiera w sobie $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ wyrazów, a tem samem też samą liczbę spółczynników A, B, C,... Otóż to równanie przedstawia tę samą krzywą, jeśli się je pomnoży lub podzieli przez stałą A′, na przykład; przeto krzywa będzie wyznaczoną, jeśli się zna stosunki $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$,.....; liczba tych stosunków jest równą $\left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1\right]$ albo $\frac{m(m+3)}{2}$. Lecz wyrazić że krzywa przechodzi przez jakikolwiek punkt, jestto napisać że jej równanie jest sprawdzonem przez spółrzędne tego punktu; dać jakikolwiek punkt równoważy więc dać jakikolwiek związek 1go stopnia między stosunkami $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$,...

Więc jeśli się wyrazi że krzywa przechodzi przez $\frac{m(m+3)}{2}$ punktów, otrzyma się $\frac{m(m+3)}{2}$ równań 1go stopnia między tąż samą liczbą ilości nieznanych $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$. Przeto, zagadnienie otrzyma ogólnie jedno tylko rozwiązanie.

Uwaga. Przypuściliśmy że układ linijny, który wyznaczy spółczynniki równania jakiejkolwiek krzywej przechodzącej przez $\frac{m(m+3)}{2}$ punktów dowolnie wybranych miał ogólnie jedno tylko rozwiązanie. Ten wniosek byłby słusznym jeśliby spółczynniki układu były zupełnie dowolnymi; lecz rzecz się ma inaczej, gdy spółczynniki jakiegokolwiek z tych równań będą

$$x_0^m, \qquad x_0^{m-1}y_0, \qquad x_0^{m-2}, \qquad x_0^{m-2}y_0, \qquad \text{etc}\ldots;$$

Otóż, ponieważ ilości x_0, y_0, są dowolne, spółczynniki równania mają między sobą stosunki widoczne. Jest więc koniecznem uzasadnić w sposób ścisły to ważne podanie. Oto dowodzenie które przedstawimy.

Dowiedziemy że jeśli podanie jest prawdziwem dla jakiejkolwiek krzywej rzędu $(m-1)$, ono jest koniecznie prawdziwem dla jakiejkolwiek krzywej rzędu m.

Równanie ogólne jakiejkolwiek krzywej rzędu m może się napisać

$$(1) \qquad F = \varphi_m(x, y) + \overbrace{\varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_{m-2}(x, y) + \ldots + \varphi_1(x, y) + 1} = 0,$$

przypuszczając ostatni wyraz równy jedności, to jest przypuszczając że krzywa przechodzi przez początek. Ogół wyrazów następujących po funkcyi $\varphi_m(x, y)$ jest pierwszą stroną równania ogólnego jakiejkolwiek krzywej rzędu $(m-1)$.

Niech będzie $M = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2} - 1 = \frac{m(m+3)}{2}$; wyraźmy że krzywa F przechodzi przez M punktów danych, otrzymamy M równań kształtu :

$$(2) \qquad \varphi_m(x_i, y_i) + G_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Funkcye G_i zawierają w sobie

$$M_1 \quad \text{albo} \quad \frac{(m-1)(m+2)}{2}$$

stałych które należy wyznaczyć; stałe pozostałe, których liczba jest

$$M_2 \quad \text{albo} \quad \left[\frac{m(m+3)}{2} - \frac{(m-1)(m+2)}{2}\right], \quad \text{albo} \quad (m+1),$$

będą stałe które wchodzą w funkcyę $\varphi_m(x, y)$. To założywszy, weźmy M_1 pierwszych równań (2), otrzyma się układ

$$(3) \qquad G_1 + \varphi_m(x_1, y_1) = 0, \qquad G_2 + \varphi_m(x_2, y_2) = 0, \ldots, \qquad G_{M_1} + \varphi_m(x_{M_1}, y_{M_1}) = 0;$$

otóż ten układ przypuści jedno rozwiązanie skończone i wyznaczone. W rzeczy samej, wyznacznik układu

$$G_1 = 0, \qquad G_2, \ldots, \qquad G_{M_1} = 0,$$

nie jest zerem; gdyż to są równania służące do wyznaczenia krzywej G_1 rzędu $m-1$, przechodzącej przez M_1 punktów danych, i według założenia przyjętego, ten układ ma jedno rozwiązanie skończone i wyznaczone.

Więc wyznacznik układu (3) jest różnym od zera.

Tym sposobem wartości na M_1 pierwszych stałych będą wyznaczone i skończone.

Podstawiwszy teraz wartości tym sposobem otrzymane w $(m+1)$ ostatnich równaniach (2), przypuściwszy

$$\varphi_m(x, y) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + A_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + A_m y^m,$$

otrzyma się $(m+1)$ równań kształtu następującego:

$$(4)\qquad A_0(x_i^m+\alpha_i)+A_1(x_i^{m-1}y_i+\beta_i)+A_2(x_i^{m-2}y_i^2+\gamma_i)+\ldots+A_m(y_i^m+\lambda_i)+k_i=0,$$

$$i=M_1+1,\quad M_1+2,\ldots,\quad M;$$

$A_0, A_1,\ldots A_m$ są $(m+1)$ stałych, które pozostają do wyznaczenia; $\alpha_i, \beta_i,\ldots \lambda_i, k_i$, są ilości znane, skończone, które zależą od spółrzędnych na M_1 pierwszych punktów, lecz które są zupełnie niezależne od spółrzędnych na $(m+1)$ ostatnich punktów, które to spółrzędne są jedynemi wchodzącemi wyraźnie w układ $(m+1)$ równań (4). Otóż wyznacznik układu (4), to jest

$$\begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i^m+\alpha_i \quad x_i^m y_i+\beta_i,\ldots \quad y_i^m+\lambda_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

nie jest zerem; gdyż ten wyznacznik rozkłada się na summę wielu wyznaczników, takich jak

$$\begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i^m \quad x_i^{m-1}y_i\ldots \quad y_i^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_i \quad x_i^{m-1}y_i\ldots \quad y_i^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} + \ldots\ldots$$

Pierwszy wyznacznik nie jest zerem, ponieważ on jest równym, według wzoru Vandermonda iloczynowi z różnic $(x_iy_k-x_ky_i)$; co się tyczy innych, dających zera albo nie zera, one niedają się przywieść do pierwszego ponieważ ilości $\alpha_1, \beta_1,\ldots$ nie zależą bynajmniej od spółrzędnych, które figurują w pierwszym wyznaczniku.

Więc podanie wysłowione jest dowiedzionem.

Dowiedziemy że układ o którym mowa przyjmuje ogólnie jedno rozwiązanie skończone i wyznaczone, jeśli znajdziemy jeden przypadek dla którego to ma miejsce.

Otóż, dajmy sobie $(m+1)$ innych punktów na trzeciej prostej D_3; i tak następnie; i nakoniec dwa punkta na m^{tej} prostej D_m. Damy sobie tym sposobem

$$\left[(m+1)+m+(m-1)+\ldots+2\right] \quad \text{albo} \quad \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1\right],$$

punktów; wreszcie układ m prostych $D_1, D_2,\ldots, D_m$, stanowi układ m^{tego} rzędu (albo krzywą złożoną m^{tego} rzędu) przechodzący przez wszystkie punkta dane których liczba jest $\frac{m(m+3)}{2}$. Lecz układ tych m prostych jest przedstawiony przez jakiekolwiek równanie m^{tego} stopnia, którego wszystkie spółczynniki są skończone i wyznaczone, gdyż można napisać bezpośrednio to równanie. Otóż równanie ogólne m^{tego} rzędu będzie można widocznie zidentyfikować z tym równaniem szczególnem, i ztąd się wyprowadza dla spółczynników wartości skończone i wyznaczone. Więc układ ogólny o którym mowa przyjmie, dla $\frac{m(m+3)}{2}$ punktów które dopierośmy wybrali, jedno rozwiązanie skończone i wyznaczone.

A *fortiori*, będzie toż samo miało miejsce gdy te $\frac{m(m+3)}{2}$ punktów pozostaną zupełnie dowolne.

622. Kwestya może przedstawiać *niepododieństwo*, w razie kiedy nie można przeprowadzić krzywej właściwie zwanej m^{tego} rzędu przez $\frac{m(m+3)}{2}$ punktów danych. Nazwiemy *krzywą właściwie nazwaną* m^{tego} rzędu, krzywą którejr ównanie nie jest rozkładalnem na czynnikiwymierne.

Przypuszczamy twierdzenie następujące które jest wnioskiem bezprośrednim podań uzasadnionych w teoryi rugowania :

Dwie krzywe stopni względnych m *i* n *przecinają się w* mn *punktach, rzeczywistych albo urojonych, w odległości skończonej albo w nieskończoności.*

To założywszy wysłowimy podania następujące :

Pomiędzy $\frac{m(m+3)}{2}$ *punktami danymi aby wyznaczyć krzywą rzędu* m, *nie powinno się mieć więcej od* mp *na krzywej rzędu* p.

Aby można było przeprowadzić krzywą m^{tego} *rzędu przez* $\frac{m(m+3)}{2}$ *punktów danych, potrzeba żeby było więcej jak*

$$\left[mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2}\right],$$

na krzywej p^{tego} *rzędu* $(p < m)$.

Pierwsze podanie jest widocznem, gdyż jest rzecz niepodobna aby dwie krzywe m^{tego} i p^{entego} stopnia miały więcej jak mp punktów wspólnych. Jeśli, pomiędzy $\frac{m(m+3)}{2}$ punktami danymi, jest więcej od mp na krzywej rzędu p, jedyny układ m^{tego} stopnia, który będzie można przeprowadzić przez wszystkie punkta dane, składa się z krzywej p^{tego} stopnia o której mowa, i z jakiejkolwiek krzywej $(m-p)^{tego}$ stopnia przechodzącej przez punkta pozostałe. Ta ostatnia krzywa będzie mogła być nieoznaczoną, jeśli liczba punktów pozostałych jest niższą od liczby punktów którą potrzeba mieć, aby wyznaczyć krzywą $(m-p)^{entego}$ rzędu; co właśnie ma miejsce, kiedy p jest równem albo wyższem od 3.

Aby dowieść drugiego podania, przypuśćmy że na krzywej rzędu p, jest jeden punkt więcej jak $\left[mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2}\right]$ t. j. $\left(mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1\right)$ punktów.

Liczba puntów pozostałych będzie

$$\left[\frac{m(m+3)}{2} - mp + \frac{(p-1)(p-2)}{2} - 1\right] \quad \text{albo} \quad \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}.$$

Otóż, przez te ostatnie punkta, będzie można przeprowadzić krzywą albo układ $(m-p)^{tego}$ rzędu, ponieważ jestto wyraźnie liczba punktów wyznaczająca krzywą tego rzędu.

Ta krzywa $(m-p)^{tego}$ rzędu tworzy z krzywą p^{tego} rzędu o której mowa, układ m^{tego} rzędu, przechodzący przez wszystkie punkta dane. A ponieważ $\frac{m(m+3)}{2}$ punktów wyznaczają ogólnie jedyny układ m^{tego} rzędu, widzimy, że jeśli nie jest nieoznaczoność, będzie można przeprowadzić krzywą właściwie zwaną m^{tego} rzędu przez $\frac{m(m+3)}{2}$ punktów danych.

623. Nakoniec, kwestya dana może przedstawiać *nieoznaczoność ;* gdyż równania pierwszego stopnia które ma się do rozwiązania mogą tworzyć układ nieoznaczony. Twierdzenie następujące daje znaczenie geometryczne tego wypadku.

Przez $\left[\frac{m(m+3)}{2}-1\right]$ punktów danych można przeprowadzić niezliczone mnóstwo krzywych m^{tego} rzędu; wszystkie krzywe m^{tego} rzędu, przechodzące przez te $\left[\frac{m(m+3)}{2}-1\right]$ punktów stałych, przechodzą także przez $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ innych punktów stałych.

Przypuśćmy że się daje liczba punktów mniejsza o jedność jak liczba którą potrzeba mieć dla wyznaczenia krzywej rzędu m, to jest

$$N=\frac{m(m+3)}{2}-1.$$

Przez N punktów danych przechodzi niezliczone mnóstwo krzywych m^{tego} rzędu; niech będą

$$f=0, \qquad \varphi=0,$$

równania dwóch tych krzywych szczególnych; równanie

$$(1) \qquad F=f+\lambda\varphi=0,$$

gdzie λ jest stałą dowolną, będzie równaniem ogólnem krzywych m^{tego} rzędu przechodzących przez N punktów danych. W rzeczy samej, jakakolwiek krzywa m^{tego} rzędu, przechodząca przez te N punktów będzie zupełnie wyznaczoną kiedy się ją przeprowadzi przez punkt dowolnie wybrany; otóż będzie można rozporządzić stałą λ, w sposób aby krzywa przedstawiona przez równanie (1) przechodziła przez punkt wybrany; więc równanie (1) może przedstawiać wszystkie krzywe m^{tego} rzędu, przechodzące przez N punktów danych. Otóż, kształt równania (1) nam pokazuje że jakąkolwiek by nie była wartość na λ, krzywa F przechodzi przez m^2 punktów przecięć stałych $f=0$, $\varphi=0$. Ta krzywa przechodzi więc naprzód przez N punktów danych i nadto przez

$$m^2-\left[\frac{m(m+3)}{2}-1\right] \quad \text{albo} \quad \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

innych punktów stałych, wspólnych także dla krzywych f i φ.

Szereg krzywych przechodzących przez N punktów danych tworzy co się zowie pękiem; m^2 punktów wspólnych dla wszystkich tych krzywych stanowią *podstawę pęku.*

Uwaga I. Widzimy przez to jakim sposobem *nieoznaczoność* będzie mogła się przedstawić gdy się da $\frac{m(m+3)}{2}$ punktów dla wyznaczenia krzywej m^{tego} rzędu.

Wystawmy sobie, w rzeczy samej, że przez $\left[\frac{m(m+3)}{2}-1\right]$ tych punktów, przeprowadza się dwie krzywe m^{tego} rzędu, f i φ; te dwie krzywe przetną się w $\frac{(m-1)(m-2)}{1}$ innych punktach; otóż, otrzyma się nieoznaczoność, jeśli ostatni z punktów danych jest jakimkolwiek z tych $\frac{(m-1)(m-2}{2}$ punktów.

Uwaga II. Dwie krzywe m^{tego} rzędu przecinają się w m^2 punktach; lecz m^2 punktów dowolnie wybranych, nie będą przecięciami dwóch krzywych m^{tego} rzędu. Gdyż jeśli weźmiemy $\left[\frac{m(m+3)}{2}-1\right]$ punktów, pomiędzy punktami danymi, wszystkie krzywe m^{tego} rzędu przechodzące przez punkta wybrane, otrzymają wspólnie $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ punktów zupełnie wyznaczonych; te $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ punkta nie zbiegną się więc wcale z punktami pozostałymi i wziętymi dowolnie.

624. Z twierdzenia poprzedzającego, wyciągniemy to inne podanie:

Jeśli pomiędzy m^2 *punktami przecięć dwóch krzywych* m^{tego} *rzędu,* mp *z tych punktów są na krzywej* p^{entego} *rzędu* (p będąc mniejszem jak m), $m(m-p)$ *pozostałych będą na krzywej* $(m-p)^{\text{entego}}$ *rzędu.*

W rzeczy samej, $m(m-p) > \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}$; więc, pomiędzy punktami pozostałymi, możemy ich wziąć $\frac{(m-p)(m-p+3)}{2}$, i przeprowadzić krzywą $(m-p)^{\text{entego}}$ rzędu przez te punkta wybrane; ta ostatnia krzywa, łącznie z krzywą p^{entego} rzędu o której mowa, tworzy układ m^{tego} rzędu; ten układ przechodzi przez

$$\left[mp + \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}\right] \quad \text{albo} \quad \left[\frac{m(m+3)}{2} - 1 + \frac{(p-1)(p-2)}{2}\right]$$

punktów; otóż ta ostatnia liczba jest wyższą albo przynajmniej równą $\left(\frac{m(m+3)}{2} - 1\right)$; więc układ utworzony przejdzie przez wszystkie inne punkta, to jest że on zawrze w sobie m^2 punktów przecięć. I ponieważ krzywa p nie może przecinać krzywej rzędu m w więcej od mp punktów, $m(m-p)$ innych przecięć układu z jedną z krzywych rzędu m znajdą się na krzywej rzędu $(m-p)$.

N. B. Podanie numerów (623), (624) dadzą się zastosować do przypadków w których krzywe m^{tego} rzędu nie są krzywemi właściwie zwanemi; gdyż dowodzenie nie przypuszcza nic o kształcie funkcyi f i φ.

625. Jako zastosowanie twierdzenia poprzedzającego, damy podanie następujące:

Jeśli wielokąt o $2m$ *bokach jest wpisany w koniczną,* $m(m-2)$ *punktów, w których każdy bok nieparzysty przecina boki parzyste nieprzyległe, będą na jakiejkolwiek krzywej* $(m-2)^{\text{iego}}$ *rzędu.*

Boki nieparzyste, z jednej strony, i boki parzyste z drugiej, mogą być uważane jako tworzące dwa układy m^{tego} rzędu, każdy układ jest złożony z m prostych. Te dwa układy przecinają się w m^2 punktach, gdyż każdy bok nieparzysty ma dwa boki parzyste przyległe i $(m-2)$ nieprzyległych. Te m^2 punktów zawierają w sobie, naprzód wierzchołki wielokąta, potem $m(m-1)$ punktów, które są przedmiotem twierdzenia. Lecz, ponieważ $2m$ wierzchołków są na jakiejkolwiek konicznej, $m(m-2)$ innych punktów będą, według twierdzenia poprzedzającego, na jakiejkolwiek krzywej $(m-2)^{\text{iego}}$ rzędu.

Tym sposobem, kiedy się uważa sześciokąt wpisany w jakąkolwiek koniczną, punkta przecięcia się boków przeciwległych są w linii prostej (*Twierdzenie* PASCALA).

II° LICZBA STYCZNYCH KONIECZNYCH DLA WYZNACZENIA JAKIEJKOLWIEK KRZYWEJ.

626. Uwagi rozwinięte w numerach poprzednich dają się zastosować do przypadku w którym się wyznaczy jakąkolwiek krzywą przez jej równanie styczneczkowe, to jest związek między spółrzędnymi jakiejkolwiek z jej stycznych. Przypuśćmy że równanie jest stopnia n, to jest że krzywa jest n^{tej} klassy; rozumowania powyższe mogą się powtórzyć słowo w słowo podstawiając proste za punkta; co pominiemy, wysławiając tylko twierdzenia do których zostaje się przywiedzionym.

1° Mając dane $\frac{n(n+3)}{2}$ prostych, można wykreślić ogólnie krzywą n^{tej} klassy i jedną tylko, dotykającą się tych $\frac{n(n+3)}{2}$ prostych.

2° Dwie krzywe, których klassami względnemi są m i n, mają mn stycznych wspólnych.

3° Pomiędzy $\frac{n(n+3)}{2}$ stycznemi danemi dla wyznaczenia krzywej n^{tej} klassy, nie powinno się mieć więcej jak nq dotykających się krzywej klassy q.

4° Aby można było wykreślić krzywą n^{tej} klassy dotykającą $\frac{n(n+3)}{2}$ prostych danych, nie potrzeba żeby było więcej jak

$$\left[nq - \frac{(q-1)(q-2)}{2}\right],$$

dotykających się krzywej q^{tej} klassy ($q < n$).

5° Mając danych $\left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right]$ prostych, można wykreślić niezliczone mnóstwo krzywych n^{tej} klassy, dotykających się wszystkich prostych danych; wszystkie krzywe n^{tej} klassy, dotykające się $\left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right]$ prostych danych, dotykają się jednocześnie $\frac{(n-1)(n-1)}{2}$ innych prostych stałyc

6° Jeśli, pomiędzy n^2 stycznemi wspólnemi dwóch krzywych n^{tej} klassy, jest nq dotykających się krzywej q^{tej} klassy (q będąc mniejszem jak n); $n(n-q)$ stycznych pozostałych dotkną się krzywej klassy nq.

7° Jeśli wielokąt o $2n$ wierzchołkach jest opisanym na krzywej drugiej klassy (albo konicznej); $n(n-2)$ prostych, łączących każdy wierzchołek nieparzysty z wierzchołkami parzystymi nie przyległemi, dotykają się krzywej $(n-2)^{giej}$ klassy.

Tym sposobem, kiedy sześciokąt jest opisanym na jakiejkolwiek konicznej, trzy przekątnie łączące wierzchołki przeciwległe (1, 2), (2, 4), (3, 6), spotykają się w jednym punkcie. (*Twierdzenie* Brianchona.)

III° Twierdzenie Newtona.

627. *Jeśli, przez jakikolwiek punkt* O, *poprowadzi się dwie cięciwy przecinające krzywą* m$^{\text{lego}}$ *rzędu w punktach* $R_1, R_2, \ldots R_m$; $S_1, S_2, \ldots S_m$; *stosunek*

$$\frac{OR_1 \,.\, OR_2 \ldots OR_m}{OS_1 \,.\, OS_2 \ldots OS_m},$$

pozostanie stałym, jakiemby nie było położenie punktu O, *byleby kierunki linii* OR, OS, *pozostały też same.*

(Newton: *Enumeratio linearum tertii ordinis, anno* 1706.)

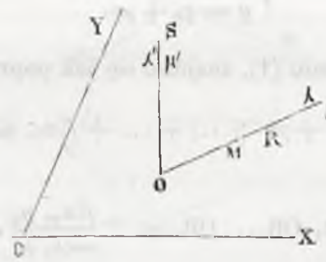
Niech będzie równanie krzywej

$$(1) \qquad f(x, y) + \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots = 0;$$

oznaczmy przez x i y spółrzędne jakiegokolwiek punktu M na OR; przez ρ odległość OM; przez x_0, y_0, spółrzędne punktu O; otrzyma się wtedy numer (40), 5°:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda\rho, \\ y = y_0 + \mu\rho; \end{cases}$$

λ i μ zależą jedynie od kierunku OR; tym sposobem w przypadku osi prostokątnych otrzyma się $\lambda = \cos\omega$, $\mu = \sin\omega$, ω będąc kątem OR z Ox.



Zastąpiwszy x i y przez wartości (2) w równaniu (1), ma się

$$(3)\qquad f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho) = \varphi_m(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho) + \varphi_{m-1}(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho) + \ldots = 0;$$

albo rozwinąwszy przez wzór *Taylora*

$$(4)\qquad \rho^m\varphi_m(\lambda, \mu) + \rho^{m-1}[x_0\, {}_x\varphi'_m(\lambda, \mu) + y_0\, {}_y\varphi'_m(\lambda, \mu)] + \ldots + f(x_0, y_0) = 0;$$

gdyż widzimy, przez pierwszą stronę równania (3), że wyrazem niezależnym od ρ jest $f(x_0, y_0)$.

Wypada ztąd

$$(1^\circ)\qquad OR_1 . OR_2 \ldots . OR_m = \pm \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi_m(\lambda, \mu)}.$$

Oznaczywszy przez λ', μ', wartości stałych λ, μ, dla kierunku OS, otrzyma się podobnież

$$(2^\circ)\qquad OS_1 . OS_2 \ldots . OS_m = \pm \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi_m(\lambda', \mu')}.$$

Dzieląc stronami te równości, wypadnie

$$(5)\qquad \frac{OR_1 . OR_2 \ldots . OR_m}{OS_1 . OS_2 \ldots . OS_m} = \frac{\varphi_m(\lambda', \mu')}{\varphi_m(\lambda, \mu)}.$$

Otóż druga strona jest stałą, ponieważ ona jest niezależną od x_0 i y_0, które są ilościami zmiennemi. Jeśli się przedstawia przez $f(x, y, z)$ pierwszą stronę równania, związek poprzedzający będzie mógł się napisać

$$(5\,bis)\qquad \frac{OR_1 . OR_2 \ldots . OR}{OS_1 . OS_2 \ldots . OS_m} = \frac{f(\lambda', \mu', 0)}{f(\lambda, \mu, 0)}.$$

628. *Jeśli przez dwa punkta* O *i* O' *poprowadzi się dwie jakiekolwiek linie równoległe, przecinające krzywą* m^{tego} *rzędu w punktach* $R_1, R_2, \ldots R_m$; $R'_1, R'_2, \ldots, R'_m$; *stosunek iloczynów to jest*

$$\frac{OR_1 . OR_2 \ldots . OR_m}{O'R'_1 . O'R'_2 \ldots . O'R'_m},$$

pozostanie stałym, jakimkolwiekby nie był kierunek wspólny dwóch cięciw.

(Newton, *idem*).

Niech będzie zawsze

(1) $$f(x,\ y) = \varphi_m(x,\ y) + \varphi_{m-1}(x,\ y) + \ldots = 0,$$

równanie krzywej. Oznaczywszy przez x_0, y_0; x'_0, y'_0 spółrzędne punktów O i O'; λ i μ wartości stałych które wyznaczają kierunek prostych OR i O'R'; jeśli x i y są spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu M na OR, i jeśli $OM = \rho$, otrzyma się numer (40), 5°:

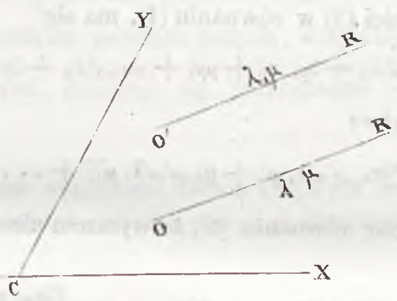
(2) $$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\rho, \\ y = y_0 + \mu\rho. \end{cases}$$

Podstawiwszy te wartości w równaniu (1), znajdzie się jak poprzednio

(3) $$\rho^m\varphi_m(\lambda,\ \mu) + \rho^{m-1}[\ldots] + \ldots + f(x_0,\ y_0) = 0.$$

Wypada z tego równania

(1°) $$OR_1 . OR_2 \ldots OR_m = \pm \frac{f(x_0,\ y_0)}{\varphi_m(\lambda,\ \mu)}.$$



Wykonywając tenże sam rachunek dla prostej O'R', znajdzie się

(2°) $$O'R'_1 . O'R'_2 \ldots O'R'_m = \pm \frac{f(x_0,\ y_0)}{\varphi_m(\lambda,\ \mu)}.$$

Dzieląc stronami te dwie równości, wypadnie

(4) $$\frac{OR_1 . OR_2 \ldots OR_m}{O'R_1 . O'R'_2 \ldots O'R'_m} = \frac{f(x_0,\ y_0)}{f(x'_0,\ y'_0)}.$$

Otóż druga strona jest stałą, ponieważ punkta O i O' są stałe i że kiernnek (λ, μ) dwóch prostych OR, O'R' jest sam zmienny.

Więc....

W tem twierdzeniu i poprzedzającem, odcinki OR_1, OR_2,... są przedstawione co do wielkości i znaku przez pierwiastki równania (3); powinno się tem samem uważać je za dodatne lub odjemne według tego jak poczynając od punktu O, one są przebieżone w pewnym kierunku alko w kierunku przeciwnym.

IV° Twierdzenie o poprzecznych.

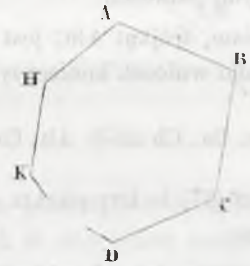
629. *Przecina się krzywą algebraiczną przez wielokąt* ABC.... *Jeśli przebiegając ten wielokąt w pewnym kierunku, wykona się iloczyn odcinków zawartych między wierzchołkami po sobie następu-*

jącymi i krzywą; potem, jeśli się wykona ten sam iloczyn, przebiegając wielokąt w kierunku przeciwnym, iloczyny tym sposobem otrzymane są równe.

(Carnot, *Geometrya położenia.*)

Niech będą A_1, B_1, C_1..., K, H, wierzchołki wielokąta; a_1, a_2,.. a_m m punktów przecięcia się boku AB z krzywą; b_1, b_2,..... b_m, przecięcia się boku BC; c_1, c_2,..... c_m, przecięcia boku CD; k_1, k_2,..... k_m, przecięcia się boku KH i nakoniec h_1, h_2,..... h_m, przecięcia się boku HA.

Oznaczywszy przez x_a, y_a; x_b, y_b...; x_h, y_h; spółrzędne wierzchołków wielokąta, zastosujmy



kolejno związek (8 *bis*) numeru (435), związek wreszcie będący wnioskiem bezpośrednim twierdzenia *Newtona* numer (628). Ma się

$$\frac{Aa_1.Aa_2...\ Aa_m}{Ba_1.Ba_2...\ Ba_m} = \frac{f(x_a,\ y_a)}{f(x_b,\ y_b)};$$

$$\frac{Bb_1.Bb_2...\ Bb_m}{Cb_1.Cb_2...\ Cb_m} = \frac{f(x_b,\ y_b)}{f(x_c,\ y_c)};$$

. . . .

$$\frac{Hh_1.Hh_2...\ Hh_m}{Ah_1.Ah_2...\ Ah_m} = \frac{f(x_h,\ y_h)}{f(x_a,\ y_a)}.$$

Mnóżmy te równości stronami, wyprowadza się ztąd twierdzenie wysłowione:

$$1)\qquad \frac{Aa_1.Aa_2...\ Aa_m \times Bb_1.Bb_2...\ Bb_m \times Hh_1.Hh_2...\ Hh_m}{Ah_1.Ah_2...\ Ah_m \times Hk_1.Hk_2.Hk_m \times ...\ Ba_1.Ba_2...\ Ba_m} = +1;$$

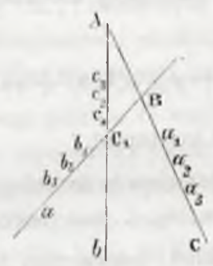
musi się zawsze mieć wzgląd na umowę przyjętą względem znaku odcinków, znak musząc zmieniać się z kierunkiem przebiegu; punkta wyjścia albo początki są zawsze wierzchołkami wielokąta.

(1) Jako zastosowanie tego twierdzenia, dowiedźmy podanie następujące.

Jeśli krzywa trzeciego rzędu ma trzy punkta rzeczywiste przegięcia, te trzy punkta są w linii prostej.

Niech będą a, b, c; te trzy punkta, i BC, CA, AB, styczne; zastosowawszy do trójkąta ABC twierdzenie *Carnota*, ma się

$$\frac{Aa_1 . Aa_2 . Aa_3 . Bb_1 . Bb_2 . Bb_3 . Cc_1 . Cc_2 . Cc_3}{Ac_1 . Ac_2 . Ac_3 . Cb_1 . Cb_2 . Cb_3 . Ba_1 . Ba_2 . Ba_3} = +1.$$



Otóż trzy punkta a_1, a_2, a_3, zlewają się z c, na przykład; b_1, b_2, b_3, zlewają się z a; c_1, c_2, c_3, zlewają się z b; wypadnie więc

$$(1)\qquad (\mathrm{Ac}\,.\,\mathrm{Ba}\,.\,\mathrm{Cb})^3 = (\mathrm{Ab}\,.\,\mathrm{Ca}\,.\,\mathrm{Bc})^3,$$

zkąd wypada

$$(2)\qquad \mathrm{Ac}\,.\,\mathrm{Ba}\,.\,\mathrm{Cb} = (\mathrm{Ab}\,.\,\mathrm{Ca}\,.\,\mathrm{Bc}) \times (1,\ \varepsilon,\ \text{albo}\ \ \varepsilon^2)$$

1, ε, ε^2 będąc pierwiastkami sześciennymi jedności.

Jeśli trzy punkta a, b, c, są rzeczywiste, trójkąt ABC jest rzeczywisty jak odcinki Ac, Ba,....., i potrójny związek (2) pociąga za sobą, jako wniosek konieczny i jedyny, następujący:

$$(3)\qquad \mathrm{Ac}\,.\,\mathrm{Ba}\,.\,\mathrm{Cb} = +\,\mathrm{Ab}\,.\,\mathrm{Ca}\,.\,\mathrm{Bc}.$$

Otóż ten ostatni związek wyraża numer (57) że trzy punkta a, b, c są w linii prostej, gdyż umowy względem znaków odcinków są też same.

Lecz jeśli punkta a, b, c, są urojone, nie można więcej twierdzić że związek (3) wynika koniecznie z równości (1), ani wnosić przeto, że trzy punkta a, b, c, są w linii prostej.

Wszelako zastosowanie twierdzenia o poprzecznych nas przywodzi tu do tego wniosku ważnego, to jest że: *Krzywa trzeciego rzędu nie ma więcej jak trzy punkta przegięcia rzeczywiste.*

Gdyż jeśliby się miało czwarty punkt rzeczywisty d, dowiodłoby się, jak to już było wskazanem, że trzy punkta b, c, d, są w linii prostej; prosta a, b, c, d, spotykałaby wtedy krzywą trzeciego rzędu w czterech punktach, co jest niepodobnem.

Uwaga. P. *Mannheim* wyciągnął z twierdzenia *Carnota* własność następującą, tyczącą się krzywych trzeciego rzędu.

Kiedy krzywa trzeciego rzędu jest razem wpisaną i opisaną na trójkącie ABC, *iloczyn z promieni krzywości odpowiadających wierzchołkom* A, B, C, *jest równym sześcianowi promienia koła opisanego na trójkącie* ABC.

(*Zastosowanie Analizy i Geometryi, przez P.* Poncelet'a, *stronnica* 165.)

V°

631. *Jeśli się przecina krzywą rzędu* m *przez jakąkolwiek poprzeczną, która ją spotyka w* A_1, A_2,...A_m; *ta poprzeczna przecina* m *assymptot w* m *innych punktach* a_1, a_2, ... a_m; *te dwa układy punktów mają tenże sam środek średnich odległości.*

(Newton, *Enumeratio......anno* 1706.)

Równanie krzywej i równanie m assymptot mają też same wyrazy m^{tego} rzędu i $(m-1)^{entego}$ stopnia numer (526), równanie średnicy, odpowiadającej kierunkowi a, będzie dla krzywej i układu m assymptot numer (548)

$$x\ {}_x\varphi'_m(1,\mathrm{a}) + y\ {}_y\varphi'_m(1,\mathrm{a}) + \varphi_{m-1}(1,\mathrm{a}) = 0,$$

średnica jest więc tąż samą dla krzywej i assymptot.

Otóż punkt M, w którym poprzeczna przecina tę średnicę, jest środkiem średnich odległości punktów A_1, A_2, ... A_m, i środkiem punktów a_1, a_2, ... a_m; więc....

W krzywych drugiego rzędu, na przykład, poprzeczna MN przecina krzywą w dwóch punktach

M i N których środkiem średnich odległości jest środek I, i assymptoty w P i Q; I będzie środkiem PQ; ztąd wypada

$$MP = NQ.$$

VI°

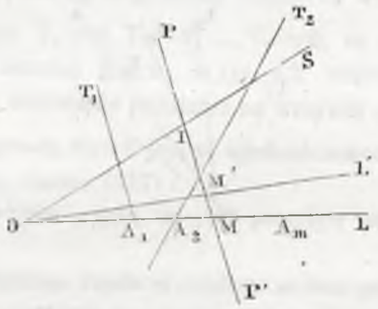
632. *Jeśli przez punkt stały, wzięty na płaszczyznie jakiejkolwiek krzywej rzędu* m, *prowadzi się poprzeczną; i styczne w punktach w których ta poprzeczna spotyka krzywą; jakakolwiek sieczna poprowadzona przez punkt stały, spotka krzywą w* m *punktach i układ stycznych w* m *innych punktach; środek harmoniczny tych dwóch układów punktów, będzie tenże sam.*

(Maclaurin, 1719.)

Znajduje się, jako przypadek szczególny, twierdzenie poprzedzające dane przez *Newtona*, przypuszczając że poprzeczna jest prostą w nieskończoności.

Niech będzie O punkt spotkania poprzecznej OL z sieczną OS; niech będą A_1T_1, A_2T_2, ... styczne w punktach A_1, A_2, ... A_m, w których poprzeczna spotyka krzywą; szukajmy biegunowej PP′ punktu O względem krzywej, potem względem układu stycznych. Punkt M tej biegunowej na prostej OL będzie określonym przez związek numer (429)

$$\frac{m}{M} = \sum \frac{1}{OA_i}.$$



Wystawmy sobie przez punkt O sieczną OL′, i niech będą A'_1, A'_2, ... A'_m jej punkta przecięcia się z krzywą; otrzyma się drugi punkt M′, biegunowej punktu O względem krzywej, zadość czyniąc związkowi podobnemu; prosta MM′ jest więc biegunową punktu O względem krzywej.

Wyznaczmy teraz biegunową tegoż samego punktu O względem układu stycznych.

Punkta A_1, A_2, ... A_m, należą do tych stycznych, punkt M należeć będzie także do biegunowej szukanej; kiedy sieczna OL′ obracać się będzie około punktu O w sposób aby przyszła zlać się z OL, punkt M′ opisze biegunową względną dla krzywej; lecz kiedy ta sieczna przejdzie przez punkta nieskończenie sąsiednie A_1, A_2, ... A_m, te punkta będą na krzywej i na stycznych; wtedy punkt M′ należeć będzie do biegunowej względnej co do stycznych. Więc punkt O ma tęż samą biegunową, bądź to względem krzywej, bądź to względem układu stycznych.

Teraz niech będą $a_1, a_2, \dots a_m$ punkta w których sieczna OS spotyka krzywą; i $t_1, t_2, \dots t_m$, punkta w których ona spotyka styczne; środki harmoniczne względem punktu O tych dwóch układów punktów numer (429) muszą się znaleźć na biegunowych punktu O; otóż te dwie biegunowe zlewają się, dzieje się więc podobnież ze środkami harmonicznymi; i ma się związek

$$(1)\qquad \frac{1}{Oa_1}+\frac{1}{Oa_2}+\dots+\frac{1}{Oa_m}=\frac{1}{Ot_1}+\frac{1}{Ot_2}+\dots+\frac{1}{Ot_m}.$$

« Tym sposobem dwa układy punktów, wyznaczone na krzywej i na układzie stycznych, mają » tenże sam środek harmoniczny względem przecięcia się siecznej OS z poprzeczną stałą OL. »

633. Przydamy podanie następujące :

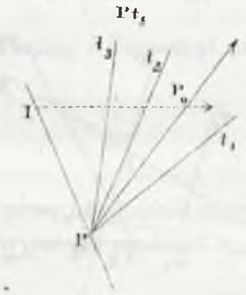
Przez punkt stały P *poprowadźmy styczne do jakiejkolwiek krzywej klassy* n*; niech będą* $t_1, t_2, \dots t_n$ *punkta styczności; punkt biegunowy jakiejkolwiek prostej* PI, *przechodzącej przez punkt* P, *będzie tenże sam, bądź to względem krzywej, bądź to względem układu* n *punktów* $t_1, t_2, \dots t_n$.

Niech będzie P_0 punkt biegunowy prostej PI względem krzywej danej (C), $Pt_1, Pt_2, \dots Pt_n$ będąc stycznemi poprowadzonemi do krzywej przez punkt P, prosta PP_0 zadość uczyni związkowi numer (460)

$$(1)\qquad \frac{n}{\mathrm{sty}\,\widehat{P_0PI}}=\frac{1}{\mathrm{sty}\,\widehat{t_1PI}}+\frac{1}{\mathrm{sty}\,\widehat{t_2PI}}+\dots;$$

podobnież, jeśli $It'_1, It'_2 \dots It'_n$, są styczne poprowadzone do krzywej (C) przez punkt I, musi się mieć numer (460)

$$(2)\qquad \frac{n}{\mathrm{sty}\,\widehat{P_0IP}}=\frac{1}{\mathrm{sty}\,\widehat{t'_1IP}}+\frac{1}{\mathrm{sty}\,\widehat{t'_2IP}}+\dots$$



Wyznaczmy teraz punkt biegunowy tejże samej prostej IP względem układu (C') n punktów $(t_1, t_2, \dots t_n)$. Proste $Pt_1, Pt_2, \dots$ są styczne poprowadzone z punktu P do tego układu, i prosta łącząca punkt P z punktem biegunowym szukanym P'_0 musi zadość uczynić związkowi (1); a tem samem, punkt P'_0 jest położony na prostej PP_0. Proste $It_1, It_2, \dots$ są również styczne poprowadzone z punktu I do układu (C'), i prosta IP'_0 musi sprawdzać związek

$$(3)\qquad \frac{n}{\mathrm{sty}\,\widehat{P'_0IP}}=\frac{1}{\mathrm{sty}\,\widehat{t_1IP}}+\frac{1}{\mathrm{sty}\,\widehat{t_2IP}}+\dots$$

Otóż jeśli przypuścimy że punkt I zbliża się nieograniczenie do punktu P, pozostając na prostej PI, styczne w układzie (C') przyjdą zlać się ze stycznemi krzywej pierwotnej (C), to jest że punkta t'_1, t'_2, ... dążą złączyć się z t_1, t_2...

Wynika wtedy z porównywania związków (2) i (3) że proste, przechodzące względnie przez P_0 i P'_0 i nieskończenie sąsiednie prostej PP_0, zlewają się z sobą. Więc punkt P'^0 zbiega się z P_0 Więc...

VII°

634. *Gdy przecina się krzywą rzędu* m *przez jakąkolwiek prostą i gdy się z* m *punktów przecięcia poprowadzi styczne do krzywej, inne punkta przecięcia się tych stycznych z krzywą są na krzywej rzędu* (m — 2).

Niech będzie $S=0$ równanie siecznej danej, równanie krzywej będzie się mogło położyć pod kształtem

$$(1) \qquad f(x, y) = \lambda . T_1 . T_2 ... T_m + S^2 \varphi(x, y) = 0,$$

$T_1, T_2, ... T_m$ będąc funkcyami linijnemi; λ jest stałą i $\varphi(x, y)$ jakąkolwiek funkcyą stopnia $(m-2)$. Jakoż to równanie zawiera w sobie

$$\left[2m+1+\frac{(m-2)(m+1)}{2}\right] \quad \text{albo} \quad \frac{m(m+3)}{2}$$

stałych dowolnych liczbę dostateczną aby módz zidentyfikowć równanie (1) z równaniem krzywej danej.

Dla sprawdzenia że się ma rzeczywiście tę liczbę stałych uważmy, że się będzie mogło podzielić przez jakikolwiek ze spółczynników $\varphi(x, y)$, i $\varphi(x, y)$ zawrze w sobie wtedy $\dfrac{(m-2)(m-2+3)}{2}$ stałych dowolnych; w iloczynie funkcyi linijnych, będzie się mogło rozłożyć na czynniki spółczynniki jednej ze zmiennych, y na przykład; każda funkcya linijna będzie wtedy kształtu $(y+ax+b)$ i zawrze w sobie dwie stałe dowolne; ma się więc liczbę całkowitą wskazaną.

To założywszy widzimy że proste $T_1=0, T_2=0, ..., T_m=0$, są styczne do krzywej w punktach w których one są przecięte przez sieczną $S=0$; $m(m-2)$ innych punktów przecięcia się tych krzywych z krzywą $F(x, y)=0$ są widocznie położone na krzywej $\varphi(x, y)=0$; więc

Wniosek. Jeśli się przypuści że prosta $S=0$ jest w nieskończoności, wyprowadza się ztąd twierdzenie następujące już dowiedzione, numer (527) :

m(m—2) *punktów w których krzywa rzędu* m *jest przecięta przez* m *assymptot są na krzywej rzędu* (m — 2).

635. *Punkta przegięcia krzywej trzeciego rzędu są trójkami w linii prostej.*

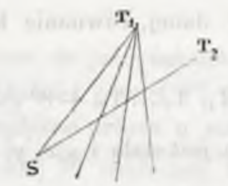
Niech będą A i B dwa punkta przegięcia krzywej, i C trzeci punkt w którym ta prosta spotyka krzywą; poprowadźmy styczne w A, B i C; trzy inne punkta w których te styczne spotykają krzywą

są w linii prostej według twierdzenia poprzedzającego. Otóż styczne w A i B będąc stycznemi przegięcia, punkta w których one przecinają jeszcze krzywą są względnie w A i B; więc trzeci punkt w którym styczna w C przecina krzywą musi się znajdować na AB; on zbiega się więc z punktem C; to jest że styczna w C przecina krzywą w trzech punktach zlanych z punktem C; punkt C jest przeto punktem przegięcia.

636. *Jeśli przez punkt stały* S, *poprowadzi się styczne do krzywej* n^{tej} *klassy, i gdy* $T_1, T_2, \ldots T_n$ *będą punktami styczności tych* n *stycznych;* n(n — 2) *innych stycznych które będzie się mogło poprowadzić do krzywej przez te* n *punktów, dotkną się krzywej klassy* (n — 2).

W rzeczy samej, oznaczywszy przez S, $T_1, T_2 \ldots T_n$ funkcye linijne na u i v, równanie ogólne krzywej n^{tej} klassy będzie mogło się położyć pod kształtem

$$(1)\qquad f(u, v,) = \lambda . T_1 T_2 \ldots T_n + S^2 \varphi(u, v) = 0;$$



dowodzenie jest toż samo jak w numerze (623). Otóż prosta łącząca punkta $S = 0$, $T_1 = 0$, dotyka się krzywej w punkcie $T_1 = 0$; gdyż ona jest styczną, ponieważ spółrzędne prostej przechodzącej przez te dwa punkta sprawdzają równanie krzywej. Wreszcie równanie punktu styczności jest

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = 0,$$

oznaczając przez u_0, v_0, w_0 wartości na u, v, w, znoszące funkcye S i T_1. Otoż, jeśli się przypuści

$$T_1 = au + bv + cw,$$

znajduje się, podstawiając, że równaniem punktu styczności jest

$$au + bv + cw = 0.$$

Tym sposobem proste $ST_1, ST_2, \ldots ST_n$ dotykają się krzywej w punktach T_1, T_2, T_n.

Lecz przez punkt T_1, można poprowadzić $(n-2)$ stycznych różnych od T_1S; ich spółrzędne musz sprawdzać równania

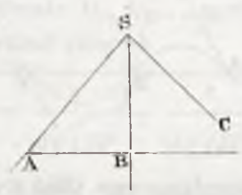
$$T_1 = 0, \quad \varphi(u, v) = 0;$$

będzie tak samo dla innych punktów. Więc, $n(n-2)$ stycznych które można poprowadzić do krzywej $f(u, v) = 0$ przez punkta $T_1, T_2, \ldots T_n$, dotykają się $\varphi(u, v) = 0$, która jest klassy $(n-2)$.

Kiedy punkt S jest w nieskończoności, styczne T_1S, T_2S, ... stają się równoległemi.

(636 *bis*). *Styczne zwrotu krzywej trzeciej klassy przechodzą trójkami przez tenże sam punkt.*

Niech będą A i B dwa punkta zwrotu, SA i SB styczne zwrotu. Styczne zwrotu będąc numer (485)



stycznemi prostemi, można przeprowadzić przez S, który jest różnym od punktu zwrotu, trzecią styczną SC; SC będzie wtedy styczną prostą, ponieważ przez jeden punkt nie można poprowadzić jak trzy styczne. Trzy styczne poprowadzone w A, B, C, i różne od AS, BS, CS, powinny przejść przez tenże sam punkt, według twierdzenia poprzedzającego.

Otóż punkt A będąc punktem zwrotu, trzy styczne poprowadzone do krzywej przez punkt A zlewają się z AS numer (491); podobnież styczne poprowadzone przez punkt B zlewają się z BS; przeto, trzecia styczna poprowadzona przez punkt C, która musi przechodzić przez tenże sam punkt, zlewa się z CS. Więc, trzy styczne, poprowadzone przez punkt C, zlewają się z sobą; wreszcie styczna CS jest styczną prostą; przeto punkt C jest punktem zwrotu.

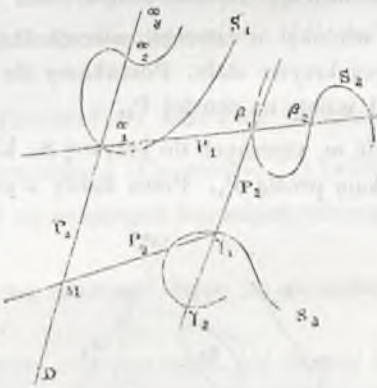
VIII°

637. *Kiedy* $(n+1)$ *boków jakiegokolwiek wielokąta formy zmiennej obracają się około* $(n+1)$ *punktów stałych, pod czas gdy* n *wierzchołków opisują* n *krzywych rzędów :* $m_1, m_2, \ldots m_n$, $(n+1)^{\text{szy}}$ *wierzchołek opisuje krzywą rzędu* $2m_1, m_2, \ldots m_n$.

Newton dał przypadek nader szczególny tego twierdzenia; a *Maclaurinowi* zawdzięcza się wysłowienie ogólne (*Transactions philosophiques,* 1725).

Aby wyznaczyć rzęd krzywej opisanej, poszukajmy ile jest punktów tej krzywej na tejże samej prostej, mając wzgląd na rzęd mnogości punktów.

Weźmy, dla wyjaśnienia rzeczy, wielokąt o czterech bokach; niech będą P_1, P_2, P_3, P_4 cztery punkta stałe; i S_1, S_2, S_3, trzy krzywe stałe. Poszukamy w ilu punktach krzywa jest spotkaną przez prostą przechodzącą przez punkt P_4. Ta prosta spotyka krzywą S_1, rzędu m_1, w m_1 punktach $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m_1})$; łącząc te punkta z punktem P_1 otrzyma się pęk m_1 prostych. Każda z tych prostych spotyka krzywą S_2, rzędu m_2, w m_2 punktach $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m_2})$; łącząc wszystkie te punkta z punktem P_2, otrzyma się pęk



z iloczynu m_1m_2 prostych. Każda z prostych tego drugiego pęku spotyka krzywą S_2, rzędu m_3, w m_3 punktach $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m_3})$; łącząc wszystkie te punkta z punktem stałym P_3, otrzyma się trzeci pęk złożony z $m_1m_2m_3$ prostych. Każda z prostych tego ostatniego pęku spotka prostą wybraną, w jednym punkcie; te punkta są czwarte wierzchołki tyluż wielokątów zadość czyniących kwestyi. Otóż pęk z $m_1m_2m_3$ prostych spotka prostą P_4D w $m_1m_2m_3$ punktach; mamy więc już na tej prostej $m_1m_2m_3$ punktów miejsca.

To będą widocznie jedyne punkta różne od P_4; pozostaje wiedzieć czy punkt P_4 stanowi część miejsca, i jakim jest jego rzęd mnogości. Zróbmy wykreślenie w kierunku odwrotnym, to jest złączmy P_4P_3; ta prosta spotka krzywą S_3 w m_3 punktach; łącząc te punkta z punktem P_2, otrzyma się pęk o m_3 prostych. Ten pęk spotka krzywą S_2 w m_2m_3 punktach; łącząc te punkta z punktem P_1, otrzyma się pęk z m_2m_3 prostych; który spotka krzywą S_1 w $m_1m_2m_3$ punktach. Łącząc te ostatnie punkta z punktem P_4, otrzyma się wszystkie wielokąty zadość czyniące kwestyi i których wierzchołek jest P_4. $m_1m_2m_3$ ostatnie proste spotkają więc prostą P_4D w $m_1m_2m_3$ punktach zlanych z P_4; tak więc punkt P_4 jest punktem wielokrotnym rzędu $m_1m_2m_3$.

Przeto, jest ostatecznie na prostej P_4D, $2m_1m_2m_3$ punktów miejsca; rzęd krzywej, miejsce czwartego wierzchołka, jest więc $2m_1m_2m_3$.

Ogólnie, miejsce $(n+1)^{entego}$ wierzchołka będzie rzędu $2m_1m_2m_3 \ldots m_n$.

Uwaga I. Kiedy punkta stałe albo *bieguny* są w linii prostej, krzywa, miejsce wierzchołka wolnego, jest stopnia $m_1m_2, \ldots m_n$.

Gdyż, w tym przypadku, pęk dany przez drugie wykreślenie sprowadza się do samejże prostej P_4D, i nie dostarczy więcej wielokątów zadość czyniących kwestyi.

Uwaga II. Kiedy krzywe kierownice są linie proste ma się wtedy twierdzenie następujące:

Jeśli $(n+1)$ *boków jakiegokolwiek wielokąta, formy zmiennej, obracają się około* $(n+1)$ *punktów stałych, podczas gdy* n *wierzchołków ślizgają się po* n *prostych stałych; wierzchołek wolny opisuje krzywą drugiego rzędu.*

Kiedy $(n+1)$ *punktów stałych są w linii prostej, wierzchołek wolny opisuje linię prostą.*

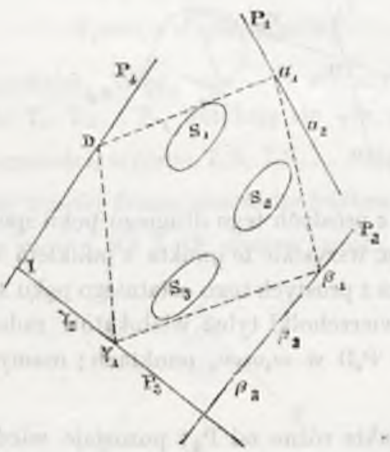
638. Zastosujemy rozumowanie podobne do dowodzenia twierdzenia następującego:

Kiedy $(n+1)$ *wierzchołków wielokąta formy zmiennej opisują* $(n+1)$ *prostych stałych, i gdy* n *boków dotykają się* n *krzywych stałych których klassami względnemi są* $m_1, m_2, \ldots m_n$; *bok wolny obwija krzywą klassy* $2m_1m_2 \ldots m_n$.

Dla wyznaczenia klassy krzywej obwiniętej, poszukamy ile można do niej poprowadzić stycznych przez punkt dowolnie wybrany, obrachowując styczne wielokrotne.

Weźmy, dla wyjaśnienia rzeczy, wielokąt o czterech wierzchołkach; niech będą P_1, P_2, P_3, P_4, cztery proste stałe; i S_1, S_2, S_3, trzy krzywe stałe. Poszukamy ile można poprowadzić stycznych do krzywej uważanej, przez punkt D wzięty na prostej P_4.

Przez punkt D, można poprowadzić m_1 stycznych do krzywej S_1 klassy m_1; niech będą $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m_1}$, punkta w których te styczne spotykają prostą P_1. Przez każdy z punktów α, można poprowadzić



do krzywej S_2, klassy m_2, m_2 stycznych; otrzyma się całkiem m_1m_2 stycznych; niech będą $\beta_1, \beta_2, \ldots$

punkta w których one spotykają prostą P_2. Przez każdy z punktów 6_i, będzie się mogło poprowadzić m_3 stycznych do krzywej S_3, klassy m_3; otrzyma się całkiem $m_1m_2m_3$ stycznych; niech będą $\gamma_1, \gamma_2,...$ punkta w których te styczne spotykają prostą P_3. Łącząc te $m_1m_2m_3$ punktów z punktem D, otrzyma się tyleż boków wielokąta zadość czyniących kwestyi; wszystkie te boki dotykają się krzywej szukanej; one przechodzą nadto przez punkt D. Więc z punktu D można już poprowadzić $m_1m_2m_3$ stycznych do krzywej obwinięcia.

To będą widocznie jedyne styczne różne od prostej P_4; pozostaje wiedzieć czy ta prosta P_4 należy do stycznych i jakim jest jej rzęd mnogości. Zróbmy wykreślenie w kierunku odwrotnym; to jest weźmy przecięcie się I, prostej P_4 z prostą P_3; przez punkt I poprowadźmy styczne do S_3; otrzyma się m_3 stycznych które przetną prostą P_2 w m_3 punktach. Przez każdy z tych punktów, poprowadźmy styczne do krzywej S_2; otrzyma się m_3m_2 stycznych które przetną prostą P_1 w m_3m_2 punktach. Przez każdy z tych punktów poprowadźmy styczne do krzywej S_1; otrzyma się $m_3m_2m_1$ stycznych przecinających prostą P_4 w $m_3m_2m_1$ punktach; te punkta złączone z punktem I, dadzą ostatnie boki tyluż wielokątów zadość czyniących kwestyi. Otóż wszystkie te boki zlewają się z DI i przechodzą przez punkt D; więc przez punkt D przechodzą $m_1m_2m_3$ stycznych zlanych z P_4; prosta P_4 jest styczną wielokrotną rzędu $m_1m_2m_3$. Przeto jest ostatecznie $2m_1m_2m_3$ stycznych przechodzących przez punkt D; klassa krzywej, obwinięcie czwartego boku jest więc równą $2m_1m_2m_3$.

Ogólnie, obwinięcie $(n+1)^{go}$ boku wolnego będzie klassy $2m_1m_2m_3... m_n$.

Uwaga I. Kiedy proste stałe są zbiegającemi się, obwinięcie boku wolnego jest klassy $m_1m_2m_3$

Gdyż w tym przypadku wierzchołki dane przez drugie wykreślenie zlewają się wszystkie z punktem I, i to wykreślenie nie dostarcza więcej wielokątów zadość czyniących wysłowieniu.

Uwaga II. Kiedy krzywe kierownice sprowadzą się do punktów, ma się twierdzenie następujące :

Jeśli $(n+1)$ *wierzchołków jakiegokolwiek wielokąta formy zmiennej opisują* $(n+1)$ *prostych stałych, w czasie gdy* n *boków obracają się około* n *punktów stałych, bok wolny obwija krzywą drugiej klassy.*

Kiedy $(n+1)$ *prostych stałych są zbiegającemi się, bok wolny obraca się około jakiegokolwiek punktu stałego.*

IX° Perspektywa krzywych trzeciego rzędu.

639. Newton wysłowił bez dowodzenia (*Enumeratio...*) twierdzenie następujące :

1° *Pięć parabol rozchodzących się w różnych kierunkach* (divergentes) *dają przez ich cień wszystkie krzywe trzeciego rzędu.*

P. Chasles wskazał początek tej własności dając jej dowodzenie i przydał to inne podanie (*Rys historyczny*, stronica 146) :

2° *Pomiędzy wszystkiemi krzywemi trzeciego rzędu, jest ich pięć które mają środek, i te pięć krzywych przez ich cień rzucony na płaszczyznę, dają początek wszystkim innym.*

Przytoczymy dowodzenie P. Chasles'a.

640. Sprawdzimy naprzód własność następującą :

Jeśli przez punkt przegięcia O *jakiejkolwiek krzywej trzeciego rzędu, poprowadzi się promienie wodzące, te promienie wodzące spotykają krzywą w dwóch punktach* A *i* B; *miejsce środków harmonicznych na* A *i* B *względem* O, to jest *miejsce punktów* M *takich że*

$$\frac{2}{OM}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB},$$

iest jakakolwiek prosta; ta prosta jest zwana biegunową harmoniczną punktu przegięcia. (Maclaurin.)

Weźmy punkt przegięcia za początek i styczną przegięcia za oś odciętych; równanie krzywej trzeciego rzędu będzie wtedy kształtu

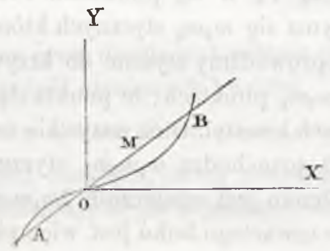
$$(1) \qquad \mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2y + \mathrm{c}xy^2 + \mathrm{d}y^3 + \mathrm{a}_1y^2 + \mathrm{b}_1xy + y = 0.$$

Spółrzędne jakiegokolwiek punktu położonego na siecznej OA będą

$$(2) \qquad x = \rho \,\mathrm{dos}\,\omega, \qquad y = \rho \,\mathrm{wst}\,\omega;$$

odległości od początku punktów przecięcia się z krzywą będą dane przez równanie

$$\rho^2(\mathrm{a}\,\mathrm{dos}^3\omega + \mathrm{b}\,\mathrm{dos}^2\omega\,\mathrm{wst}\,\omega + \mathrm{c}\,\mathrm{dos}\,\omega\,\mathrm{wst}^2\omega + \mathrm{d}\,\mathrm{wst}^3\omega) + \rho\,\mathrm{wst}\,\omega(\mathrm{a}_1\mathrm{wst}\,\omega + \mathrm{b}_1\mathrm{dos}\,\omega) + \mathrm{wst}\,\omega = 0.$$



Oznaczywszy przez ρ_1 i ρ_2 pierwiastki tego równania, przez ρ odległość punktu M zadość czyniącego związkowi danemu, ma się

$$(3) \qquad \frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -(\mathrm{a}_1\mathrm{wst}\,\omega + \mathrm{b}_1\mathrm{dos}\,\omega).$$

Rugując $\mathrm{dos}\,\omega$ i $\mathrm{wst}\,\omega$ między równaniami (2) i (3), znajduje się na równanie miejsca:

$$(4) \qquad \mathrm{a}_1y + \mathrm{b}_1x + 2 = 0;$$

taką jest *biegunowa harmoniczna* punktu przegięcia O.

Uwaga I. Proste łączące końce dwóch promieni poprowadzonych przez punkt przegięcia, przecinają się na biegunowej harmonicznej.

Uwaga II. Styczne poprowadzone z końców jakiegokolwiek promienia wodzącego, przechodząc przez punkt przegięcia, przecinają się na biegunowej harmonicznej.

641. Jakakolwiek krzywa trzeciego rzędu ma przynajmniej jeden punkt przegięcia rzeczywisty; niech będzie I ten punkt, IT styczna przegięcia i PP′ biegunowa harmoniczna punktu przegięcia I.

Biegunowa harmoniczna przecina każdy promień wodzący w punkcie M, takim że (A i B będąc przecięcia się krzywej z tym promieniem wodzącym)

$$\frac{2}{\mathrm{IM}} = \frac{1}{\mathrm{IA}} + \frac{1}{\mathrm{IB}};$$

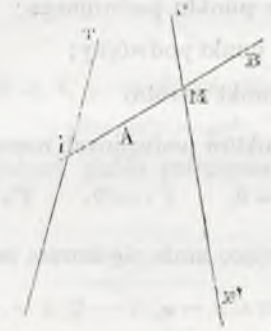
ten związek może się napisać

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{IA}} + \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{IB}} = 0.$$

Jeśli punkt I oddala się w nieskończoność, ma się $\mathrm{gr.}\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IB}} = \mathrm{gr.}\frac{\mathrm{IA}-\mathrm{AB}}{\mathrm{IB}} = 1$; więc $\mathrm{MA} = -\mathrm{MB}$; to jest że punkt M jest wtedy środkiem odcinka AB.

To założywszy, zróbmy perspektywę krzywej, rzucając w nieskończoność punkt przegięcia I i styczną przegięcia; wystarczy jeśli S jest punkt widoku, rzucić na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny SIT.

Punkt I będąc rzuconym w nieskończoność w i, wszystkie promienie wodzące rzucone będą równoległe, i perspektywa prostej biegunowej dzieli odcinki ab na dwie części równe. Tak że jeśli się



weźmie na płaszczyznie rzutu perspektywę biegunowej harmonicznej za oś odciętych i za oś rzędnych równoległą do cięciw $i\ ab$; oś odciętych dzieli na dwie części równe cięciwy równoległe do osi rzędnych.

Równanie rzutu musi więc zawierać w sobie tylko potęgi parzyste na y i będzie kształtu

$$\mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}xy^2 + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}y^2 + \mathrm{E}x + \mathrm{F} = 0.$$

Lecz styczna przegięcia była także rzuconą w nieskończoność, to jest że prosta w nieskończoności jest styczną przegięcia; przeto, zrobiwszy równanie jednorodnem, jeśli się uczyni $z = 0$, wyrazy pozostałe winny tworzyć sześcian zupełny; co wymaga żeby było $\mathrm{B} = 0$.

Równanie rzutu ma więc kształt ostateczny

$$(\mathrm{I}) \qquad y^2 = \mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2 + \mathrm{c}x + \mathrm{d};$$

co dowodzi pierwsze podanie numeru (639); gdyż sprawdzimy zaraz że równanie O zawiera w sobie pięć krzywych różnych.

642. Zamiast rzucać punkt przegięcia I w nieskończoność, rzućmy jego biegunową harmoniczną P; wystarczy na to wziąć płaszczyznę SPP′ za płaszczyznę perspektywy. Punkt M będąc w nieskończoności, związek

$$\frac{2}{\mathrm{IM}} = \frac{1}{\mathrm{IA}} + \frac{1}{\mathrm{IB}},$$

da $\mathrm{IA} = -\mathrm{IB}$; to jest że punkt I stanie się środkiem odcinków AB.

Tak więc rzut i punktu przegięcia dzieli na dwie części równe cięciwy przechodzące przez ten punkt, to jest że ten punkt będzie środkiem rzutu krzywej. Przeto, jeśli się weźmie za początek środek rzutu i za oś odciętych styczną przegięcia, równanie rzutu będzie kształtu

$$(\mathrm{II}) \qquad \mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2y + \mathrm{c}xy^2 + \mathrm{d}y^3 + y = 0;$$

co dowodzi drugie podanie numeru (639), gdyż zobaczymy że to równanie zawiera w sobie pięć rozmaitości krzywej.

643. Dyskussya równania.

$$(\mathrm{I}) \qquad y^2 = \mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2 + \mathrm{c}x + \mathrm{d}.$$

Te krzywe nie mają assymptot w odległości skończonej; prosta w nieskończoności jest styczną przegięcia; oś odciętych jest średnicą cięciw równoległych do osi rzędnych. Ta krzywa będąc trzeciego rzędu, będzie ogólnie szóstej klassy,

Otrzymamy więc do rozróżnienia trzy przypadki następujące numer (486):

Krzywe szóstej klassy, nie mające punktu podwójnego;

Krzywe czwartej klassy, mające punkt podwójny;

Krzywe trzeciej klassy, mające punkt zwrotu.

Przypomnijmy sobie że spółrzędne punktów podwójnych muszą sprawdzać związki

$$f(x, y) = 0, \qquad f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

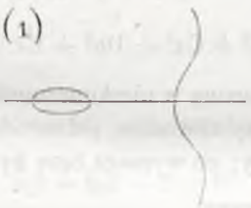
To przypuściwszy, równanie poprzedzające może się zawsze napisać

$$(1) \qquad y^2 = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

1° *Krzywe szóstej klassy*, ilości α, β, γ, są różne.

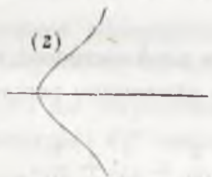
Pierwszy rodzaj : α, β, γ, są ilości rzeczywiste; krzywa ma kształt (1); jest trzy punkta rzeczywiste przegięcia, z których jeden w nieskończoności.

(1)



Drugi rodzaj : α, β, urojone; krzywa ma kształt (2); jest tam jeszcze trzy punkta rzeczywiste przegięcia, z których jeden w nieskończoności.

(2)



2° *Krzywe czwartej klassy*, dwie z ilości α, β, γ są równe; równanie jest

$$y^2 = a(x-\alpha)^2(x-\beta);$$

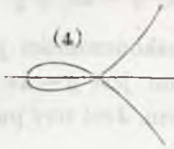
krzywa ma punkt podwójny.

Pierwszy rodzaj : jeśli $\alpha < \beta$; punkt podwójny jest odosobniony; jest tam jeszcze trzy punkta przegięcia rzeczywiste; ma kształt (3).

(3)

Drugi rodzaj : jeśli $\alpha > \beta$, ma się punkt podwójny; istnieje jedyny punkt przegięcia rzeczywisty, który jest w nieskończoności, krzywa przedstawia kształt (4).

(4)

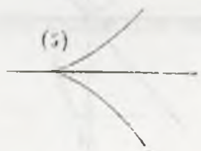


3° *Krzywe trzeciej klassy*, trzy ilości α, β, γ, są równe; równanie jest

$$y^2 = a(x-\alpha)^3;$$

krzywa posiada punkt zwrotu; jest jedyny punkt przegięcia rzeczywisty będący w nieskończoności; krzywa ma kształt (5).

(5)



Równanie (I) *przedstawia więc pięć rodzajów krzywych.*

644. Dyskussya równania

$$\text{(II)} \qquad ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + y = 0.$$

Rozmaitości tej krzywej odróżniają się przez naturę punktów w nieskończoności, i jeszcze przez klassę. Nie ma punktu podwójnego w odległości skończonej; lecz może się on przedstawić w nieskończoności.

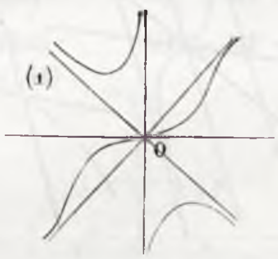
Równanie (II) może się napisać

$$\text{(2)} \qquad a(y-\alpha x)(y-\beta x)(y-\gamma x) + y = 0.$$

1° *Krzywe szóstej klassy*, ilości α, β, γ, są różne, nie ma punktu podwójnego.

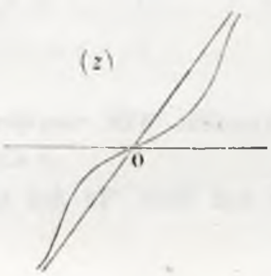
Pierwszy rodzaj. Jeśli α, β, γ, są rzeczywiste; jest trzy assymptoty rzeczywiste, które przechodzą przez środek; one mają z krzywą styczność pierwszego rzędu; środek jest punktem przegięcia; są dwa inne punkta przegięcia rzeczywiste także w odległości skończonej; krzywa ma kształt (1).

(1)



Drugi rodzaj. Ilości α i β są urojone; jest tam jedyna assymptota rzeczywista; znajduje się jeszcze trzy punkta przegięcia w odległości skończonej; krzywa ma kształt (2).

(2)

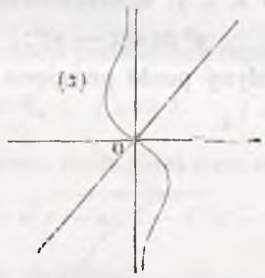


2° *Krzywe czwartej klassy,* dwie ilości α i β są równe; jest punkt podwójny w nieskończoności; równanie jest kształtu

$$a(y-\alpha x)^2(y-\beta x)+y=0.$$

Pierwszy rodzaj. Punkt podwójny w nieskończoności jest odosobnionym; kierunek assymptotyczny odpowiadający punktowi podwójnemu jest $y-\alpha x=0$; punkt podwójny jest odosobniony jeśli $\alpha > \beta$, przypuszczając że α jest dodatnem. Jest trzy punkta rzeczywiste przegięcia w odległośc skończonej. Krzywa ma kształt (3).

(3)



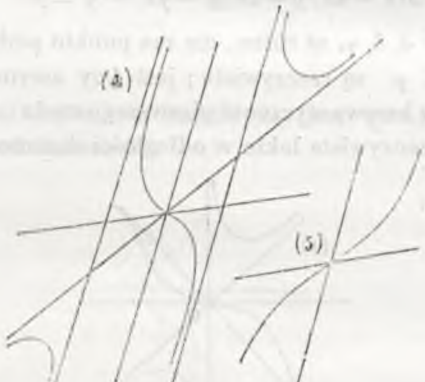
Drugi rodzaj Ma się w nieskończonoś i punkt podwójny zwyczajny; znajduje się tam jedyny punkt przegięcia rzeczywisty, będący środkiem. Krzywa ma kształt (4).

3° *Krzywe trzeciej klassy,* trzy ilości α β, γ, są równe; jest punkt zwrotu w nieskończoności; równanie jest kształtu

$$a(y-\alpha x)^3+y=0.$$

Krzywa posiada tylko jedyny punkt rzeczywisty przegięcia; ona jest kształtu (5).

(4)



(5)

Styczna zwrotu jest prosta w nieskończoności.

Równanie (II) *przedstawia więc także pięć rodzajów krzywych.*

ROZDZIAŁ IX

POSZUKIWANIE RÓWNAŃ WIELU KRZYWYCH OKREŚLONYCH GEOMETRYCZNIE

I° Elipsa; Hyperbola; Parabola.

645. *Elipsa jest miejsce punktów takich że summa ich odległości od dwóch punktów stałych jest stałą.*

Hyperbola jest miejsce punktów takich że różnica ich odległości od dwóch punktów stałych jest stałą.

Niech będą F i F′ dwa punkta stałe i M(x, y) jakikolwiek punkt miejsca; weźmy FF′ za oś odciętych; za początek środek O odległości FF′; i za oś rzędnych prostopadłą do FF′ przez punkt O przeprowadzoną.

Widzimy, *a priori*, że krzywa jest symetryczną względem tych dwóch prostych.

Niech będzie $OF = c$; według określeń danych, ma się

$$\text{dla elipsy:} \qquad MF + MF' = 2a,$$

$$\text{dla hyperboli:} \qquad MF' - MF = 2a.$$

W elipsie ma się $a > c$; gdyż w trójkącie MFF′ summa dwóch boków jest większą od trzeciego boku; to jest $MF + MF' > 2c$; albo $a > c$.

W hyperboli ma się $a < c$; gdyż bok FF′ musi być większym jak różnica dwóch innych MF′ i MF.

To założywszy, x i y będąc spółrzędnemi punktu M, ma się

$$MF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad MF' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2};$$

równaniami dwóch krzywych będą więc

$$(1) \qquad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \begin{cases} -, \text{ dla hyperboli,} \\ +, \text{ dla elipsy,} \end{cases}$$

Dla uczynienia równania (1) wymiernem, założymy

$$\begin{cases} \sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + t, \\ \pm \sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - t; \end{cases}$$

dodając i odejmując kwadraty z tych dwóch związków, wypadnie

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + t^2, \\ cx = at; \end{cases}$$

otrzymamy równanie miejsca wyrugowawszy t między temi równaniami.

Znajduje się tym sposobem, porządkując i dzieląc przez $a^2(a^2 - c^2)$:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

To równanie jest wspólnem dla elipsy i dla hyperboli; z tem odróżnieniem że w elipsie $a > c$; a w hyperboli $a < c$.

W pierwszym przypadku będziemy mogli założyć

$$(3) \qquad a^2 - c^2 = b^2,$$

i równanie elipsy będzie

$$(3\ bis) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

w drugim przypadku założymy

$$(4) \qquad c^2 - a^2 = b^2.$$

i równanie hyperboli będzie

$$(4\ bis) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

646. *Parabola jest miejscem punktów równo oddalonych od jakiegokolwiek punktu stałego i od jakiejkolwiek prostej stałej.*

Niech będą F punkt stały i DH prosta stała; z punktu F spuśćmy prostopadłą na DH; i weźmy ją za oś odciętych; prostopadła wyniesiona ze środka O do DF, będzie osią rzędnych; załóżmy DF $= p$.

Jeśli M jest jakimkolwiek punktem miejsca, ma się według określenia geometrycznego krzywej

$$MF = MP;$$

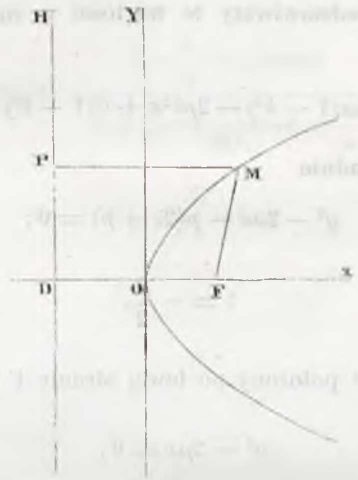
otóż

$$MP = x + \frac{p}{2}, \quad MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

znajdzie się, równając te wartości i uczyniwszy je wymiernemi

(5) $$y^2 = 2px;$$

akiem jest równanie *paraboli.*



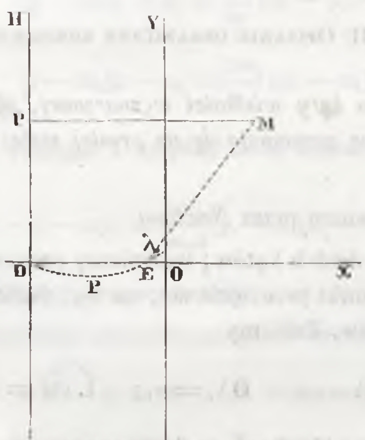
647. Trzy krzywe dopiero co znalezione, którym daje się nazwisko konicznych, mogą być zawarte w określeniu wspólnem :

Jakakolwiekkoniczna jest miejscem punktów, których stosunek odległości od jakiegokolwiek punktu stałego i od jakiejkolwiek prostej stałej jest stałym.

Niech będą F punkt stały i DH prosta stała; z punktu F spuśćmy na tę prostą prostopadłą FD, którą wybierzemy za oś odciętych; za oś rzędnych weźmiemy prostopadłą w pewnym punkcie O, zostawiając nieoznaczonem położenie tego punktu O; oznaczymy przez λ odległość FO, λ będąc uważanem za dodatne lub odjemne według tego jak O jest po prawej albo po lewej stronie punktu F.

Jeśli M jest jakikolwiek punkt miejsca, złączmy MF i spuśćmy MP prostopadłą na prostą, otrzyma się według określenia

(1) $$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MP}} = k;$$



k będąc stałą dodatną. Lecz jeśli x i y są spółrzędnemi punktu M, ma się

$$MF = \sqrt{(x+\lambda)^2 + y^2}; \qquad MP = x + \lambda + p;$$

równanie miejsca będzie więc, podstawiwszy te wartości w równości (1), potem podnosząc do kwadratu i porządkując:

$$(2) \qquad y^2 + x^2(1-k^2) + 2\lambda x(1-k^2) - 2pk^2x + \lambda^2(1-k^2) - 2p\lambda k^2 - p^2k^2 = 0.$$

Kiedy się przypuści $k = 1$, wypadnie

$$y^2 - 2px - p(2\lambda + p) = 0;$$

wziąwszy na λ wartość

$$\lambda = -\frac{p}{2},$$

to jest wziąwszy za początek punkt położony po lewej stronie F i równo oddalony od D i od F, równanie sprowadza się do

$$y^2 - 2px = 0;$$

znajduje się tym sposobem równanie paraboli.

Przypuśćmy teraz k różnem od jedności; skorzystamy z nieoznaczoności λ aby zrównać z zerem spółczynnik na x, to jest że założymy

$$(3) \qquad \lambda(1-k^2) - pk^2 = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad \lambda = \frac{pk^2}{1-k^2}.$$

Jeśli się zastąpi λ przez tę wartość, równanie (2) staje się

$$(4) \qquad x^2(1-k^2) + y^2 = \frac{p^2k^2}{1-k^2}.$$

Jeśli $k < 1$, otrzymujemy równanie elipsy, i będziemy mogli wybrać ilości p i k w sposób taki aby się dało uwidocznić osie a i b tej elipsy.

Jeśli $k > 1$, ma się równanie hyperboli; będzie się mogło także wybrać p i k w sposób taki aby się dało uwidocznić osie a i b tej hyperboli.

II° Opisanie organiczne konicznych.

648. *Jeśli wystawimy sobie dwa kąty wielkości wyznaczonej, obracające się około ich wierzchołków względnych i jeśli dwa z ich boków przecinają się na prostej stałej; przecięcie się dwóch innych boków opisze jakąkolwiek koniczną.*

To opisanie konicznych było danem przez *Newtona*.

Niech będą A i A_1 wierzchołki dwóch kątów; weźmiemy prostą stałą za oś rzędnych i prostą AA_1 za oś odciętych; niech będą L punkt przecięcia się, na Oy, dwóch boków kątów danych, i M punkt przecięcia się dwóch innych boków. Załóżmy

$$OL = \lambda; \quad OA = a, \quad OA_1 = a_1; \quad \widehat{LAM} = A, \quad \widehat{LA_1M} = A_1;$$

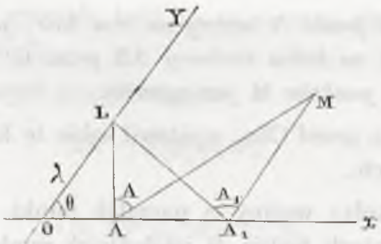
λ jest nieoznaczoną; a, a_1, A, A_1, i kąt θ osi, są ilości znane.

Wyznaczmy równanie prostej AM przez warunek aby czyniła z prostą AL kąt równy A. Niech będzie

$$y = \mu(x - a),$$

równanie prostej AM; jej spółczynnik kątowy jest μ, spółczynnik prostej AL jest $-\frac{\lambda}{a}$; musi się więc mieć

$$\operatorname{sty} A = \frac{\left(-\frac{\lambda}{a} - \mu\right)\operatorname{wst}\theta}{1 + \left(\mu - \frac{\lambda}{a}\right)\operatorname{dos}\theta - \frac{\lambda\mu}{a}}.$$



Zastąpmy w tej równości μ przez $\frac{y}{x-a}$ otrzyma się równanie szukane prostej AM; znajduje się odosobniając wyrazy w λ:

$$y\operatorname{wst}(\theta + A) + (x - a)\operatorname{wst}A = \frac{\lambda}{a}[y\operatorname{wst}A + (x - a)\operatorname{wst}(A - \theta)].$$

Wypada z tegoż samego rachunku równanie prostej A_1M:

$$y\operatorname{wst}(\theta + A_1) + (x - a_1)\operatorname{wst}A_1 = \frac{\lambda}{a_1}[y\operatorname{wst}A_1 + (x - a)\operatorname{wst}(A_1 - \theta)].$$

Założymy:

$$(1) \quad \begin{cases} m = \dfrac{\operatorname{wst}(\pi - A)}{\operatorname{wst}[\theta - (\pi - A)]}, & m_1 = \dfrac{\operatorname{wst}(\pi - A_1)}{\operatorname{wst}[\theta - (\pi - A_1)]}, \\[2ex] n = \dfrac{\operatorname{wst}A}{\operatorname{wst}(\theta - A)}; & n_1 = \dfrac{\operatorname{wst}A_1}{\operatorname{wst}(\theta - A_1)}. \end{cases}$$

Równania dwóch prostych AM i A_1M napiszą się wtedy

$$(AM) \qquad y - m(x - a) = \frac{\lambda m}{a}[(x - a) - ny],$$

$$(A_1M) \qquad y - m_1(x - a_1) = \frac{\lambda m_1}{a_1}[(x - a_1) - n_1 y].$$

Równanie miejsca otrzyma się rugując λ między temi dwoma równaniami; znajduje się tym sposobem

$$(2) \qquad [y - m(x - a)][(x - a) - n_1 y] = \frac{m a_1}{m_1 a}[y - m_1(x - a_1)][(x - a) - ny];$$

takiem jest równanie jakiejkolwiek krzywej drugiego rzędu.

Ta krzywa jest opisaną na czworoboku utworzonym przez cztery proste

$$(3) \quad \begin{cases} M = y - m(x - a) = 0, & N = (x - a) - ny = 0, \\ M_1 = y - m_1(x - a_1) = 0, & N_1 = (x - a_1) - n_1 y = 0; \end{cases}$$

proste M i M_1 przechodzą względnie przez punkta A i A_1; i czynią z osią Ox, pierwsza kąt $(\pi - A)$, druga kąt $(\pi - A_1)$. Proste N i N_1 przechodzą także przez punkta A i A_1; i czynią z osią Oy pierwsza kąt A; druga kąt A_1.

Krzywa (2) przechodzi przez punkta A i A_1; potem przez przecięcia się M z N, i M_1 z N_1.

Czworobok staje się równoległobokiem jeśli $A_1 = A + k\pi$.

III° Cyssoida Diokles'a.

649. *Mając danem koło stałe i punkt* A *wzięty na tem kole; przez punkt* A, *prowadzi się sieczną przecinającą koło w* H, *i styczną na końcu średnicy* AB *przez* G; *począwszy od punktu* A, bierze się długość AM *równą* HG; *miejsce punktów* M *jest cyssoidą.*

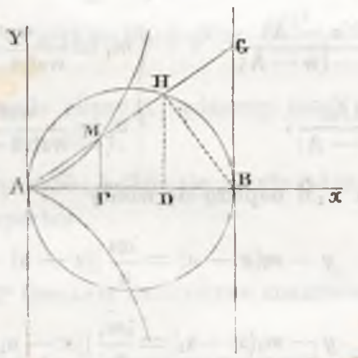
(*Diokles*, żyjący około 500 roku przed Chr., wystawił sobie tę krzywą dla rozwiązania zagadnienia dwóch średnich proporcyonalnych).

Oznaczmy przez R promień koła; weźmy za początek punkt A, i za oś odciętych średnicę AB przechodzącą przez ten punkt; niech będzie M jakikolwiek punkt miejsca, AP i PM jego odcinek i jego rzędna. Ma się przez założenie AM = HG; zkąd wynika AP = DB. W trójkącie prostokątnym AHB, ma się

$$\overline{HD}^2 = AD.DB = x(2R - x).$$

Trójkąty podobne AMP i AHD dają nadto:

$$\frac{HD}{MP} = \frac{AD}{AP}, \quad \text{albo} \quad \frac{HD}{y} = \frac{2R - x}{x}.$$



Zastępując HD przez tę wartość w równości poprzedzającej wypadnie

(1) $$(2R - x)y^2 = x^3;$$

takiem jest równanie cyssoidy.

Równanie cyssoidy w spółrzędnych biegunowych.

Weźmy punkt A za biegun, i prostą AB za oś biegunową; oznaczmy przsz ρ odległość AM; przez ω kąt MAP; ρ i ω są spółrzędnemi biegunowemi punktu M.

Trójkąt prostokątny AMP daje

$$AP = \rho \cos\omega;$$

lecz ma się w trójkącie ABH :

$$\overline{HB}^2 = 2R.\overline{DB} = 2R.\overline{AP}, \quad \text{ponieważ} \quad AP = BD;$$

ma się także

$$HB = 2R \operatorname{wst}\omega; \quad AP = 2R \operatorname{wst}^2\omega;$$

równanie krzywej w spółrzędnych biegunowych będzie więc

(2) $$\rho = \frac{2R \operatorname{wst}^2\omega}{\operatorname{dos}\omega}$$

650. Będzie mogła się wykreślić cyssoida bądź to za pomocą równania (1) rozwiązanego względem y, bądź to za pomocą równania (2).

Wróćmy do równania w spółrzędnych prostolinijnych

(1) $$(2R - x)y^2 = x^3,$$

albo

(2) $$x^3 + xy^2 - 2Ry^2 = 0.$$

Krzywa jest symetryczną względem osi odciętych. Początek jest punktem zwrotu pierwszego rodzaju; cyssoida jest więc krzywą trzeciego rzędu i trzeciej klassy.

Kierunkami assymptotycznymi są

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad x = 0;$$

jest więc jedyna gałęź nieskończona rzeczywista, której assymptotą jest prosta $x - 2R = 0$. Krzywa przechodzi przez punkta kołowe w nieskończoności; ona jest nadto podwójnie styczną w tych punktach do koła

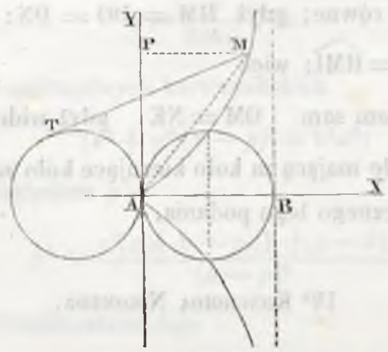
$$x^2 + y^2 + 2Rx = 0;$$

co widzimy jeszcze, zauważywszy że równanie może się napisać

(3) $$(x^2 + y^2 + 2Rx)x - 2R(x^2 + y^2) = 0.$$

Ten ostatni związek może się tłumaczyć geometrycznie i daje nam własność następującą cyssoidy:

(4) $$2R.\overline{MA}^2 = \overline{MT}^2.MP;$$

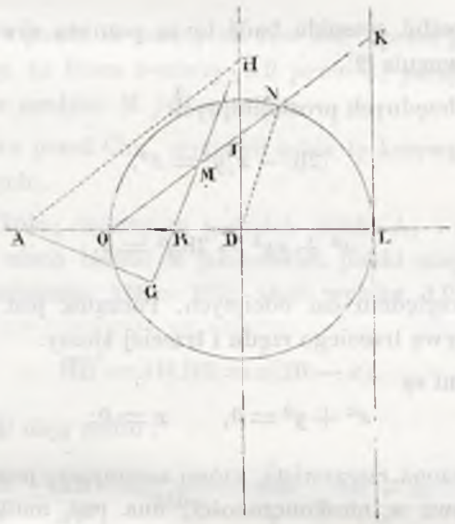


M jest jakikolwiek punkt cyssoidy; MT jest styczną do koła $x^2 + y^2 + 2Rx = 0$; MP jest odległość od stycznej wspólnej do dwóch kół; MA jest odległość od punktu zwrotu.

651. Newton dał następne opisanie mechaniczne cyssoidy :

Niech będzie punkt stały A i prosta stała DD'; z punktu A spuśćmy prostopadłą AD na prostą stałą; potem wystawmy sobie kąt prosty którego jeden z boków przechodzi przez punkt A i którego koniec drugiego boku, przypuszczonego równym AD, opiera się na prostej stałej; jeśli G jest wierzchołkiem kąta prostego i H końcem tego boku, punkt środkowy M boku GH opisze cyssoidę.

W rzeczy samej, weźmy środek O odcinka AD i z punktu D jako środka z DO za promień opiszmy koło; potem złączmy AH i OM, M będąc środkiem HG. Proste AH i OM są równoległe; gdyż dwa



trójkąty prostokątne AGH i ADH są równe, ponieważ AH jest bokiem wspólnym i że $GH = AD$, według wysłowienia. A tem samem $AG = HD$; i ponieważ dwa kąty ARG i HRD są równe, wynika ztąd że dwa trójkąty prostokątne ARG i HRD są równe. Więc

$$GR = RD; \quad \text{zkąd} \quad OR = RM, \quad \text{ponieważ} \quad OD = GM.$$

Wreszcie $OA = HM$; przeto proste OM i AH są równoległe.

Ponieważ punkt O jest środkiem AD, wypływa z równoległości tych prostych że OM przecina HD w punkcie I środku HD.

Dwa trójkąty HIM i DIN są równe; gdyż $HM = DO = DN$; kąty w I są równe; co więcej kąt $\widehat{DNI} = \widehat{MOR} = \widehat{HAD} = \widehat{AHG} = \widehat{HMI}$; więc

$$IM = IN; \quad \text{a tem sam} \quad OM = NK \quad \text{gdyż widocznie } OI = IK;$$

to jest że punkt M tworzy cyssoidę mającą za koło kierujące koło zakreślone na figurze.

Zostawimy dowodzenie analitycznego tego podania.

IV° Konchoida Nikomeda.

652. *Niech będzie punkt stały F i prosta stała DD'; prowadźmy przez punkt stały jakąkolwiek sieczną, która przecina prostą stałą w H, poczynszy od punktu H, weźmy na tej siecznej długość stałą $HM = b$; miejsce punktów M tym sposobem otrzymanych jest konchoidą.*

« *Nikomed* (żyjący około 150 roku przed Chr.) wystawił sobie tę krzywą dla rozwiązania sposobem » mechanicznym zagadnienia dwóch średnich proporcyonalnych i zagadnienia podziału kąta na trzy » kąty równe. *Newton* używał tej krzywej do wykreślania równań trzeciego stopnia. »

Weźmy za oś odciętych prostopadłą spuszczoną z punktu F na prostą D; za początek punkt F; i za oś rzędnych prostopadłą do Fx.

Równoległość prostych MP i HD daje

$$\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HM'}} = \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{DP'}};$$

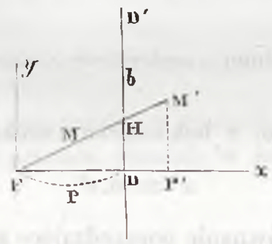
zkąd oznaczając przez p długość FD

$$(1°) \qquad \frac{\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{b}}{\mathrm{b}} = \frac{p}{x-p};$$

albo czyniąc to równanie wymiernem :

$$(1) \qquad (x^2+y^2)(x-p)^2 = \mathrm{b}^2x^2$$

takiem jest równanie konchoidy.



Stała b wchodzi jedynie do kwadratu; widzimy wtedy według równości podobnej do (1°), że równanie (1) przedstawi miejsce punktów otrzymanych, odnosząc po prawej i po lewej stronie punktu H długość równą b.

Równanie konchoidy w spółrzędnych biegunowych otrzyma się nader łatwo.

Punkt F będąc biegunem i Fx osią biegunową; ρ i ω będąc spółrzędnemi punktu M, ma się

$$\mathrm{FP'} = \rho \operatorname{dos}\omega; \qquad \mathrm{FP'} = p + \mathrm{DP'}; \qquad \mathrm{DP'} = \mathrm{b} \operatorname{dos}\omega;$$

zkąd wypada *równanie w spółrzędnych biegunowych*

$$(2) \qquad \rho = \frac{p}{\operatorname{dos}\omega} + \mathrm{b}.$$

653. Wróćmy do równania w spółrzędnych kartezyańskich

$$(1) \qquad (x^2+y^2)(x-p)^2 = \mathrm{b}^2x^2;$$

zkąd się wyciąga, rozwiązując względem y :

$$(1\ bis) \qquad y^2 = \frac{x^2[x+\mathrm{b}-p][\mathrm{b}+p-x]}{(x-p)^2}.$$

Równanie (1) rozwinięte i uporządkowane daje

$$(1\ ter) \qquad (x^2+y^2)x^2 - 2px(x^2+y^2) + p^2y^2 + (p^2-\mathrm{b}^2)x^2 = 0.$$

Krzywa jest czwartego rzędu; początek jest punktem podwójnym : odosobnionym jeśli $b < p$

zwyczajnym, jeśli $b > p$; zwrotu, jeśli $b = p$. Krzywa przechodzi przez punkta kołowe w nieskończoności; prosta w nieskończoności jest styczną podwójną, jej punkta styczności są punktami kołowymi w nieskończoności. Inne kierunki assymptotyczne zlewają się z osią rzędnych; punkt w nieskończoności na osi rzędnych jest punktem podwójnym zwrotu, styczność jest drugiego rzędu; albo raczej ma się dwie gałęzie krzywej dotykające się w nieskończoności.

Stosując tu wzory numeru (497), znajduje się dla konchoidy:

Rzęd 4; klassa 7; liczba punktów przegięcia 10; liczba stycznych podwójnych 4; gdyż sprawdziliśmy istnienie jakiegokolwiek punktu podwójnego i jakiegokolwiek punktu zwrotu; to są jedyne punkta podwójne. Pierwsza biegunowa jakiegokolwiek punktu dotyka się krzywej w jej punkcie zwrotu i ma z krzywą styczność pierwszego rzędu; punkt zwrotu nie zmniejsza więc klassy jak o 3 jedności.

W przypadku, w którym $b = p$, krzywa jest szóstej klassy; liczba punktów przegięcia jest 8; liczba stycznych podwójnych jest 1.

654. Powiedzmy słowo o zagadnieniu, które przywiodło geometrów starożytnych do wynalezienia cyssoidy i konchoidy.

Szło o podwojenie sześcianu, lub ogólniej *o wykreślenie sześcianu, któryby był do drugiego sześcianu w stosunku danym.*

Niech będzie a bok sześcianu danego, x bok sześcianu szukanego i m stosunek dany; otrzyma się

$$x^3 = m.a^3. \tag{1}$$

Jeśli b jest linią taką że $b = ma$; równanie poprzedzające stanie się

$$x^3 = a^2b, \qquad \text{albo} \qquad x^4 = a^2bx. \tag{2}$$

Otóż jeśli się założy

$$x^2 = a^2y, \qquad \text{otrzyma się} \qquad y^2 = bx.$$

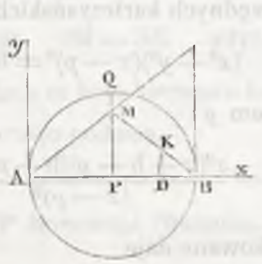
Kwestya jest więc przywiedzioną do kwestyi, którą tłumaczą równości następujące:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}, \tag{3}$$

to jest *znaleźć dwie średnie proporcyonalne między dwiema liniami danemi* a i b.

Oto w jaki sposób cyssoida numer (649)

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x(2R - x)}}; \tag{4}$$



pozwoli rozwiązać kwestyą. Nazwawszy z rzędną jakiegokolwiek punktu koła którego odcięta jest x, ma się

$$z^2 = x(2R - x). \tag{5}$$

Porównywając ten związek z poprzedzającym wypada $yz = x^2$; zkąd

(6)
$$\frac{2R - x}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y}.$$

Przeto jeśliby $(2R - x)$ było równem a, a y ilości b, z i x rozwiązałyby zagadnienie.

Mnóżmy przez $\frac{b}{y}$ wszystkie wyrazy tych stosunków, wypadnie

(7)
$$\frac{\frac{(2R - x)b}{y}}{\frac{bz}{y}} = \frac{\frac{bz}{y}}{\frac{bx}{y}} = \frac{\frac{bx}{y}}{b}.$$

Więc jeśli teraz weźmiemy punkt na cyssoidzie taki że

(8)
$$\frac{(2R - x)b}{y} = a, \quad \text{(równanie jakiejkolwiek prostej)}$$

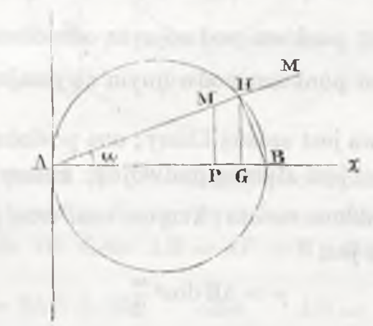
ilości $\frac{bz}{y}$, $\frac{bx}{y}$ będą znane, mając wzgląd na wartość (5); będzie mogło się je wykreślić, i to będą *dwie średnie proporcyonalne szukane między* a *i* b.

Dla wyznaczenia punktu szukanego, przypuściwszy cyssoidę wykreśloną, weźmy $BD = a$; potem na prostopadłej $DK = b$; prosta BK przetnie cyssoidę w punkcie szukanym M. Wtedy $AP = x$, $MP = y$, $QP = z$.

V° Ślimak Pascal'a albo konchoida kołowa.

655. *Przypuśćmy okrąg koła stały i punkt* A *wzięty na tym okręgu koła; przez punkt* A *poprowadźmy jakąkolwiek sieczną, która przecina okrąg koła w* H; *począwszy od tego punktu* H *weźmy długość stałą* $HM = b$; *miejsce punktów* M *jest ślimak Pascal'a albo konchoida kołowa.*

Weźmy za początek punkt A; za oś odciętych średnicę przechodzącą przez pnnkt A; za oś rzędnych styczną w A. Spółrzędnemi punktu M są $AP = x$, $MP = y$; oznaczymy przez R promień koła kierującego.



W trójkącie AMP, ma się

(1°)
$$(AH - b)^2 = x^2 + y^2;$$

otóż jeśli HG jest prostopadłą spuszczoną z punktu H na Ox, ma się kolejno

$$\overline{AH}^2 = 2R.AG; \qquad \frac{AH}{AG} = \frac{AH - b}{x}$$

zkąd wypada

(2°) $$AH(AH - b) = 2Rx.$$

Rugowanie AH między (1°) i (2°) przywiedzie nas do równania konchoidy kołowej, to jest

(1) $$(x^2 + y^2)^2 - 4Rx(x^2 + y^2) + x^2(4R^2 - b^2) - b^2y^2 = 0.$$

Równanie w spółrzędnych biegunowych otrzyma się nader łatwo. Niech będą A biegun, Ax oś biegunowa, ρ i ω spółrzędnemi punktu M; ma się

$$AH = b = \rho, \qquad AH = 2R\,\mathrm{dos}\,\omega;$$

zkąd wypada równanie w spółrzędnych biegunowych

(2) $$\rho = 2R\,\mathrm{dos}\,\omega - b.$$

Gdyby się miało punkt M odniesionym po prawej stronie H, znalazłoby się na równanie w spółrzędnych biegunowych

(2 *bis*) $$\rho = 2R\,\mathrm{dos}\,\omega + b.$$

Można wykreślić krzywą bądź to za pomocą równania (1), bądź to za pomocą równania (2).

Uwaga I. — Równanie (1) nie zawiera w sobie stałej b jak tylko w kwadracie; ono daje miejsce punktów otrzymanych odnosząc długość b bądź to po lewej, bądź to po prawej stronie punktu H.

Uwaga II. Równanie (2) i (2 *bis*) przedstawiają tęż samą krzywą, jeśli się ma wzgląd na umowę zrobioną o promieniach wodzących odjemnych numer (5).

W rzeczy samej, niech będą ρ i ω spółrzędne jakiegokolwiek punktu należącego do krzywej (2); zastąpmy w równaniu (2) ω przez $(\pi + \omega)$, wypadnie

$$-\rho = 2R\,\mathrm{dos}\,\omega + b;$$

jeśli się przypuści że (ω, ρ) dają punkt M; $(\pi + \omega, -\rho)$ dadzą punkt M′, to jest punkt należący do krzywej (2 *bis*).

656. Według równania (1), widzimy że konchoida kołowa jest krzywą czwartego rzędu; punkta kołowe w nieskończoności są punktami podwójnymi; początek jest również punktem podwójnym.

Jeśli $b > 2R$, początek jest punktem podwójnym odosobnionym;

Jeśli $b < 2R$, początek jest punktem podwójnym zwyczajnym.

W tych dwóch przypadkach krzywa jest szóstej klassy; ona posiada 6 punktów przegięcia i 4 styczne podwójne; prosta w nieskończoności jest styczną podwójną; numer (497).

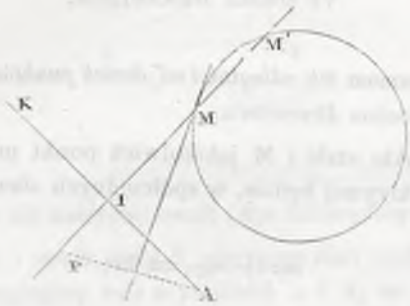
Jeżeli $b = 2R$, początek jest punktem zwrotu; krzywa nosi wtedy nazwisko konchoidy; jej równanie w spółrzędnych biegunowych jest

(3) $$\rho = 4R\,\mathrm{dos}^5\,\frac{\omega}{2}.$$

Konchoida jest piątej klassy; ona posiada cztery punkta przegięcia i dwie styczne podwójne numer (497).

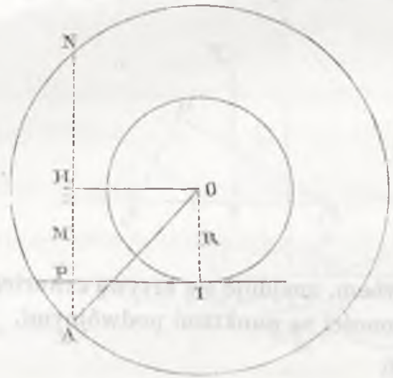
657. *Konchoida kołowa jest obwinięciem kół przechodzących przez punkt stały i której środek porusza się na kole stałem.*

Niech będzie A punkt stały, M i M′ dwa punkta sąsiednie wzięte na kole stałem; dwa okręgi kół mających ich środki w M i M' i przechodzących przez punkt A przetną się w jakimkolwiek drugim punkcie, który się otrzyma spuszczając prostopadłą z punktu A na MM' i przedłużając ją o jakąkolwiek ilość IK = IA, to jest biorąc punkt symetryczny punktu A względem MM'. To wykreślenie będzie zawsze mieć miejsce, kiedy punkt M' przybliża się nieograniczenie do punktu M; kiedy punkt M'



przybliży się nieograniczenie do punktu M, sieczna staje się styczną w M; i położenie granicy punktu przecięcia się dwóch okręgów kół nieskończenie sąsiednich otrzyma się jeszcze biorąc punkt symetryczny punktu A względem stycznej w M. Niech będzie P ten punkt symetryczny; miejsce punktów P będzie miejscem przecięć po sobie następujących okręgów kół; otóż tem miejscem jest *konchoida kołowa*.

Aby dowieść podanie, mając dane koło stałe OI i punkt stały A, nakreślimy kolo spółśrodkowe pierwszemu promieniem OA; w jakimkolwiek punkcie I pierwszego koła prowadźmy styczną; potem z punktu A spuśćmy prostopadłą AP na tę styczną i przedłużmy ją na długość PM = AP, miejsce punktów M będzie miejscem przecięć po sobie następujących okręgów kół, mających ich środek na



kole OI i przechodzących przez punkt A. Przedłużmy prostopadłą AP aż do jej spotkania się w N z kołem OA; i niech będzie OH prostopadła spuszczona z punktu O na AN: otrzyma się HN = HA, i PH = R, R jest promieniem koła OI. Lecz AH = AP + R; zkąd

$$2AH = 2AP + 2R, \qquad \text{albo} \qquad AN = AM + 2R;$$

albo nakoniec

$$AM = AN - 2R.$$

A tem samem punkt M otrzymuje się odnosząc począwszy od N, długość równą 2R; punkt M tworzy więc konchoidę kołową; koło kierujące jest OA, i ma się tu $b = 2R$.

Ta konchoida posiada punkt podwójny zwyczajny, kiedy punkt A jest zewnętrzny kołu OI. Znalazłoby się punkt podwójny odosobniony, przypuszczając punkt A wewnętrzny kołu OI. Otrzymałoby się nakoniec konchoidę, kładąc punkt A na kole OI.

VI° Owale Descartes'a.

658 *Miejsce punktów takich że summa ich odległości od dwóch punktów stałych względnie pomnożonych przez liczby stałe jest stałą, jest owalem Descartes'a.*

Niech będą F i F_1 dwa punkta stałe i M jakikolwiek punkt miejsca; oznaczywszy przez ρ i ρ_1 odległości MF i MF_1, równanie krzywej będzie, w spółrzędnych *dwubiegunowych*, według określenia samegoż

$$m\rho + m_1\rho_1 = 2a; \tag{1}$$

m, m_1, i a będąc stałemi.

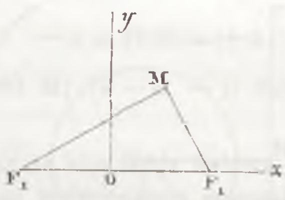
Ta krzywa staje się elipsą albo hyperbolą kiedy się przypuści $\frac{m}{m_1} = \pm 1$.

Jeśli się weźmie prostą FF_1 za oś odciętych, środek FF_1 za początek; ma się, oznaczywszy przez $2c$ odległość FF_1, przez x i y spółrzędne jakiegokolwiek punktu M miejsca,

$$\rho = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad \rho_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

równanie krzywej będzie więc

$$m\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + m_1\sqrt{(x+c)^2 + y} = 2a. \tag{2}$$



Uczyniwszy to równanie wymiernem, znajduje się krzywą czwartego rzędu i najwięcej ósmej klassy, gdyż pudkta kołowe w nieskończoności są punktami podwójnymi.

659. Zobaczymy poniżej że jeśli

$$F(\rho, \rho_1) = 0, \tag{1°}$$

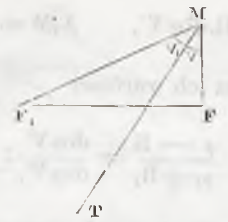
jest równaniem jakiejkolwiek krzywej w spółrzędnych dwubiegunowych; jeśli V i V_1 są kątami stycznej w jakimkolwiek punkcie M, z dwoma promieniami wodzącymi MF i MF_1, ma się

$$\frac{\operatorname{dos} V}{\operatorname{dos} V_1} = -\frac{F'_{\rho_1}}{F'_{\rho}}. \tag{2°}$$

Zastosujmy ten wzór do owalów (1), ma się

$$\frac{\operatorname{dos} V}{\operatorname{dos} V_1} = -\frac{m_1}{m}, \tag{3}$$

to jest *że styczna w jakimkolwiek punkcie dzieli kąt dwóch promieni wodzących na dwie części których dostawy są w stosunku* $-\frac{m_1}{m}$.



660. P. CHASLES dał tworzenie się następne owali (*Rys historyczny*, strona 351).

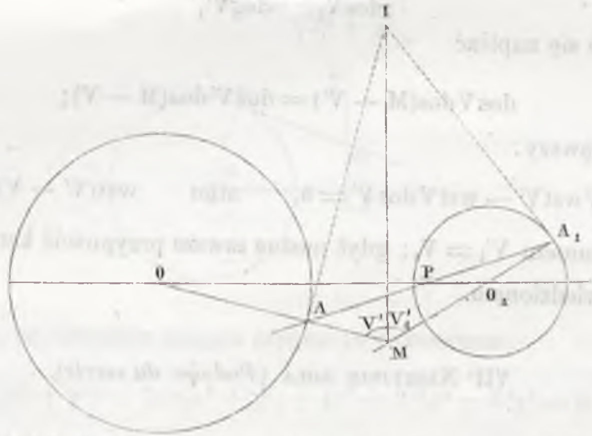
Uważmy dwa koła stałe O i O_1 *i punkt stały* P *wzięty na linii środków; jeśli przez punkt* P *poprowadzi się jakąkolwiek sieczną spotykającą koła w punktach* A *i* A_1 *na przykład; gdy się złączy środki* O *i* O_1 *z punktami względnie położonymi na tych kołach; przecięcie się prostych takich jak* OA *i* O_1A_1 *opisze owal Descartes'a.*

Oznaczmy przez R i R' promienie dwóch kół, załóżmy

(1) $\qquad OP = c, \quad OP_1 = c_1, \quad c + c_1 = OO_1 = d; \quad OM = \rho, \quad O_1M = \rho_1$

Prosta AA_1 jest poprzeczną względem OMO_1; zastosujmy do tego przypadku twierdzenie poprzecznych, ma się

$$\overset{+}{OA}.\overset{+}{MA_1}.\overset{+}{O_1P} = \overset{+}{OP}.\overset{+}{O_1A_1}.\overset{+}{MA};$$



albo, zastępując te linie przez ich wartości (1):

$$R(\rho_1 + R_1).c = cR_1(\rho - R);$$

zkąd się wyciąga podzieliwszy przez RR_1:

(2) $$\frac{c}{R}\rho - \frac{c_1}{R_1}\rho_1 = d;$$

co jest samemże określeniem owalu.

P. CHASLES jeszcze oznaczył własność następującą:

Styczna w M *przechodzi przez punkt spotkania stycznych kół w* A *i* A_1.

Niech będą, w rzeczy samej, I punkt spotkania stycznych w A i A_1, oznaczmy przez V' i V' kąty $\widehat{AMI}$ i $\widehat{A_1MI}$; trójkąty prostokątne MAI i MA_1I dają

$$AM' = MI.\mathrm{dos}\,V', \qquad A_1M = MI.\mathrm{dos}\,V'_1;$$

zkąd wypada, zastępując AM i A_1M przez ich wartości

$$\frac{\rho - R}{\rho_1 + R_1} = \frac{\mathrm{dos}\,V'}{\mathrm{dos}\,V'_1};$$

równanie (2) krzywej nam daje także, zastąpiwszy d przez $(c + c_1)$.

$$\frac{\rho - R}{\rho_1 + R_1} = \frac{c_1 R}{c R_1};$$

zkąd wypada

(3) $$\frac{\mathrm{dos}\,V'}{\mathrm{dos}\,V'_1} = \frac{c_1 R}{c R_1}; \qquad V' + V'_1 = OMO_1 = M.$$

Lecz jeśli V i V_1 są kątami stycznej w M, z promieniami MO i MO_1, i jeśli się zastosuje do równania (2) wzór (2°) numeru (659), ma się

(4) $$\frac{\mathrm{dos}\,V}{\mathrm{dos}\,V_1} = \frac{c_1 R}{c R_1}; \qquad V + V_1 = \widehat{OMO_1} = M.$$

Porównanie wartości (3) i (4) prowadzi do równości

(5) $$\frac{\mathrm{dos}\,V}{\mathrm{dos}\,V_1} = \frac{\mathrm{dos}\,V'}{\mathrm{dos}\,V'_1}.$$

Otóż ta równość może się napisać

$$\mathrm{dos}\,V\,\mathrm{dos}(M - V') = \mathrm{dos}\,V'\,\mathrm{dos}(M - V);$$

zkąd się wyciąga rozwinąwszy:

$$\mathrm{dos}\,V\,\mathrm{wst}\,V' - \mathrm{wst}\,V\,\mathrm{dos}\,V' = 0, \qquad \text{albo} \qquad \mathrm{wst}(V' - V) = 0;$$

to jest $V' = V$, a tem samem $V'_1 = V_1$; gdyż można zawsze przypuścić kąty V niższe od π.

Podanie jest więc dowiedzionem.

VII° Naszyjnik koła (*Podaire du cercle*).

661. Nazywa się naszyjnikiem punktu stałego A, względem jakiejkolwiek krzywej, miejsce rzutów tego punktu na styczne do krzywej.

Naszyjnik punktu odnoszący się do koła jest jakąkolwiek konchoidą kołową.

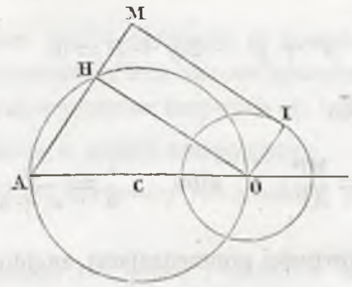
Niech będzie, w rzeczy samej, koło O i punkt stały A, i AM prostopadła spuszczona z punktu A na styczną IM. Na OA nakreślmy koło przecinające AM w H; OH będzie prostopadłą do AM; OI i HM są zarówno równoległe; a tem samem HM = OI = R; więc

$$AM = AH + R;$$

to jest że miejsce punktu M jest konchodą.

Szukajmy wprost równania miejsca określonego.

Weźmiemy prostą OA za oś odciętych i punkt A za początek; niech będzie M jakikolwiek punkt miejsca; x i y jego spółrzędne.



Rzućmy na OI obwód OAMI; oznaczając przez α kąt IOx, zauważywszy że $AM = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest równoległą do OI i że MI jest prostopadłą do OI, ma się

(1) $$R = a \operatorname{dos} \alpha + \sqrt{x^2 + y^2};$$

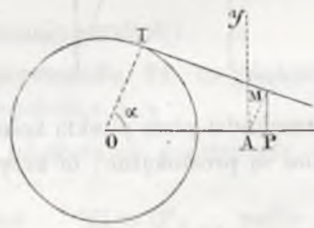
R jest promieniem koła, a oznacza odległość OA.

Z drugiej strony ma się

(2) $$\operatorname{sty} \alpha = \operatorname{sty} \widehat{MAx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x}.$$

Otrzymamy równanie miejsca wyrugowawszy α między związkami (1) i (2). Wyciąga się naprzód z ostatniej równości

$$\operatorname{dos} \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$



otrzyma się, tem samem, na równanie miejsca czyniąc je wymiernem

(3) $$(x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) + (a^2 - R^2)x^2 - R^2y^2 = 0.$$

Punkt A będzie punktem podwójnym odosobnionym, jeśli się znajduje na wewnątrz koła; podwójnym zwyczajnym, kiedy jest na zewnątrz; a kiedy on będzie na kole, otrzyma się punkt zwrotu i krzywa będzie wtedy *kardyoidą.*

VIII° Strofoida albo logocyklika.

662. *Mając dane prostą stałą* Oy *i punkt stały* A, *prowadzi się prostopadłą* AD *do* Dy; *przez punkt* A *prowadzi się jakąkolwiek sieczną* AH, *i z każdej strony punktu* H, *weźmie się* $HM = HN = HD$; *miejsce punktów* M *i* N *jest logocykliką albo strofoidą.*

Niech będą $AD = a$, $DH = \lambda$, a będąc stałą, λ nieoznaczoną; ma się x i y będąc spółrzędnemi punktu M:

$$HM = HD = \lambda, \qquad HM = \sqrt{x^2 + (y-\lambda)^2};$$

wypadnie więc

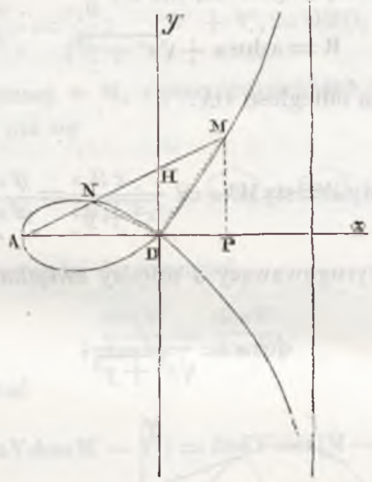
$$x^2 + y^2 - 2\lambda y + \lambda^2 = 0.$$

Trójkąty podobne AHD i AMP dają

$$\frac{HD}{AD} = \frac{MP}{AP}, \quad \text{albo} \quad \frac{\lambda}{a} = \frac{y}{x+a}.$$

Zastępując λ przez tę wartość w równości poprzedzającej, znajduje się na równanie strofoidy

$$(1) \qquad xy^2 + x^3 + a(x^2 - y^2) = 0.$$



Ta krzywa jest trzeciego rzędu; ona przechodzi przez punkta kołowe w nieskończoności; początek jest punktem podwójnym, którego styczne są prostokątne; ta krzywa jest czwartej klassy; ona ma punkt przegięcia w nieskończoności.

Przytoczymy własności następujące łatwe do dowodzenia:

«Jeśli przez wierzchołek A prowadzi się jakąkolwiek sieczną, spotykającą krzywą w M i N; kąt MDN » jest prosty i iloczyn AM.AN jest stałym i równym a^2. A tem samem, jeśli się nakreśli jakiekolwiek » koło styczne w D na osi AD, dwa punkta przecięcia się (różne od punktu D i od punktów w nie- » skończoności) tego koła z krzywą, będą w linii prostej z punktem A.»

UWAGA. Zowie się LIŚCIEM DESCARTES'A krzywa przedstawiona przez równanie

$$(3) \qquad x^3 + y^3 - 3bxy = 0.$$

Ta krzywa ma wiele podobieństwa z poprzedzającą, przecież ona nie jest identyczną ze strofoidą. Aby je porównać, odnieśmy tę ostatnią krzywą do dwóch dwójsiecznych, to jest założmy

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}};$$

równanie (2) staje się po zniesieniu znaków

$$(3) \qquad x^3 + 3xy^2 - \frac{3b}{2}(x^2 - y^2) = 0.$$

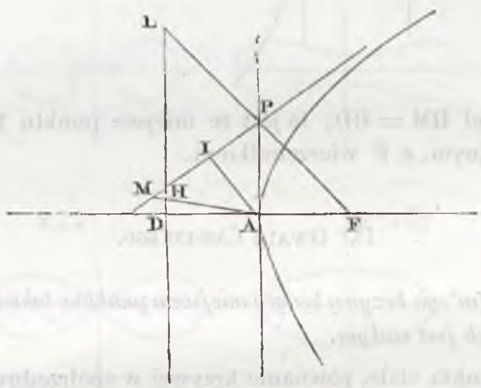
Ta ostatnia krzywa ma zarówno punkt podwójny w początku, którego styczne są prostokątne; jeden punkt przegięcia w nieskończoności; lecz ona nie przechodzi przez punkta kołowe w nieskończoności, co stanowi różnice charakterystyczne krzywych (1) i (2).

663. Strofoida może być określoną w sposób następujący :

Strofoida jest miejsce rzutów spodka kierownicy jakiejkolwiek paraboli na styczne do paraboli; jestto naszyjnik spodka kierownicy.

Niech będzie D spodek kierownicy i M jeden z punktów miejsca; H będąc przecięciem się AM z kierownicą, dowiedźmy że

$$HM = DH.$$



Przypuśćmy jako znaną tę własność paraboli :

« Jeśli z ogniska spuści się prostopadłą FP na jakąkolwiek styczną, spodek P tej prostopadłej » znajduje się na stycznej w wierzchołku A. »

Według tego, jeśli AI jest jakąkolwiek prostopadłą na styczną, dwa trójkąty MAI i IAP są równe; gdyż

$$DA = AF \quad \text{zkąd} \quad MI = IP; \quad \text{nadto AI jest bokiem wspólnym.}$$

Wynika ztąd

$$\widehat{PAI} = \widehat{IAM}; \quad \text{otóż} \quad \widehat{PAI} = \widehat{HMD} \quad \text{i} \quad \widehat{IAM} = \widehat{HMD},$$

trójkąt MHD jest więc równoramiennym; a tem samem $HM = HD$.

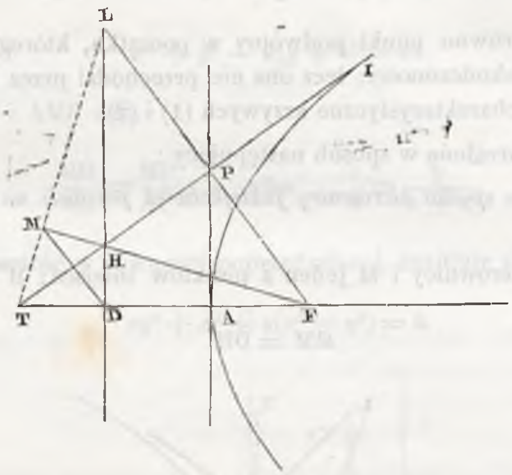
Strofoida jest także obwinięciem kół przechodzących przez spodek kierownicy, mających ich środki na paraboli.

Punkt przecięcia się dwóch kół nieskończenie sąsiednich będzie symetrycznym punktu D względem stycznej w punkcie, w którym zlewają się z sobą środki dwóch kół numer (657).

Niech będzie F ognisko, TI jakakolwiek styczna, D spodek kierownicy i L symetryczny punktu F względem stycznej TI; punkt L znajduje się na kierownicy, ponieważ spodek P prostej znajduje się na stycznej w wierzchołku i że $AD = AF$.

Złączmy LT, trójkąt LTF jest równoramiennym, ponieważ $PF = PL$; więc $TF = TL$; przeto symetryczny M punktu D, względem stycznej TI znajdzie się na LT.

Trapez MDFL jest równoramienny i przekątnie MF i DL przecinają się na prostej TP łączącej środki boków równoległych, niech będzie H punkt zbiegu tych trzech prostych. Trapez MDFL będąc



równoramiennym, wynika ztąd HM = HD; to jest że miejsce punktu M jest strofoida. Spodek kierownicy jest punktem podwójnym, a F wierzchołkiem.

IX° Owale Cassini'ego.

664. *Zowie się Owalem Cassini'ego krzywą będącą miejscem punktów takich że iloczyn z odległosci każdego z nich od dwóch punktów stałych jest stałym.*

Niech będą F i F_1 dwa punkta stałe, równanie krzywej w spółrzędnych dwubiegunowych będzie

(1) $$\rho\rho_1 = k^2.$$

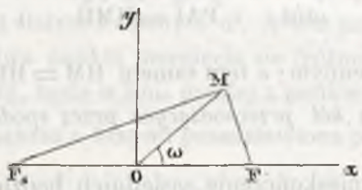
Szukajmy równania *w spółrzędnych biegunowych*, biorąc prostą FF_1 za oś biegunową i środek O za biegun.

Niech będą wtedy

$$FF_1 = 2c, \qquad MO = \rho, \qquad MOF = \omega,$$

otrzyma się

$$\overline{MF}^2 = \rho^2 + c^2 - 2c\rho\cos\omega, \qquad \overline{F_1M}^2 = \rho^2 + c^2 + 2c\rho\cos\omega;$$



według określenia równanie krzywej będzie

$$(\rho^2 + c\rho^2\cos\omega)(\rho^2 + c^2 + 2c\rho\cos\omega) = k^4,$$

albo rozwinąwszy:

(2) $$\rho^4 - 2c\rho^2\cos 2\omega + c^4 - k^4 = 0;$$

takiem jest równanie owalu Cassini'ego w spółrzędnych biegunowych.

Otrzymamy łatwo równanie w spółrzędnych prostolinijnych, biorąc O za początek, OP za oś odciętych, ma się

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega;$$

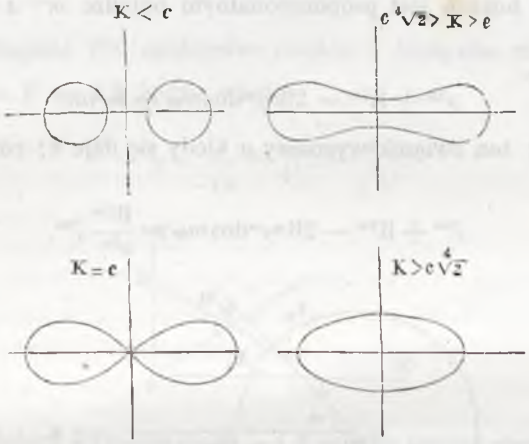
znajduje się wtedy *w spółrzędnych prostolinijnych,*

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) + c^4 - k^4 = 0.$$

Ta krzywa może się wykreślić bądź to za pomocą równania (2), bądź to za pomocą równania (3) rozwiązalnego względem jednej ze zmiennych.

Przestaniemy na streszczeniu dyskussyi.

Naprzód punkta kołowe w nieskończoności są punktami podwójnymi krzywej i styczne mają styczność drugiego rzędu; krzywa jest najwięcej ósmej klassy.



Otrzymamy do rozróżnienia przypadki następujące:

I° $k < c$, krzywa składa się z dwóch owali odosobnionych;

II° $k > c \begin{cases} k < c\sqrt[4]{2} \\ = c\sqrt[4]{2} \\ k > c\sqrt[4]{2} \end{cases}$ krzywa przedstawia jedyny owal którego kształt zmienia się według jednego albo drugiego z tych trzech założeń;

III° $k = c$. Krzywa przedstawia w początku punkt podwójny zwyczajny.

W tym trzecim przypadku krzywa nosi nazwisko *Lemniskaty Bernolli'ego* albo *Bernouill'ego.*

Lemniskata jest krzywą szóstej klassy; jej równanie jest w spółrzędnych prostolinijnych:

$$(4) \qquad (x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = 0;$$

w spółrzędnych biegunowych:

$$(5) \qquad \rho^2 = 2c^2 \cos 2\omega.$$

I° Uogólnienie krzywych poprzedzających.

665. *Znaleźć miejsce punktów których iloczyn z odległości od wierzchołków jakiegokolwiek wielokąta foremnego o* m *bokach jest stałym.*

Niech będą $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ m wierzchołków jakiegokolwiek wielokąta foremnego, weźmy OA_0 za oś biegunową; niech będzie M jakikolwiek punkt miejsca: $OM = \rho$, $\widehat{M_0OA_0} = \omega$.

Widziało się w trygonometryi że

$$\overline{MA_0}^2\,\overline{MA_1}^2.\overline{MA_2}^2\ldots\overline{MA_{m-1}}^2 = \rho^{2m} + R^{2m} - 2R^m\rho^m \mathrm{dos}\, m\omega.$$

Dochodzi się do tego związku rozkładając na czynniki drugiego stopnia równanie dostarczające drugą stronę równą zeru i uważając w niej ρ jako nieznaną; sprawdza się wtedy że te czynniki drugiego stopnia są dokładnie kwadratami z odległości MA_0, MA_1, etc.

Jeśli się wyrazi że iloczyn z odległości jest stałym i równym a^m, otrzyma się bezpośrednio na równanie miejsca

(1) $$\rho^{2m} - 2R^m\rho^m \mathrm{dos}\, m\omega + R^{2m} - a^{2m} = 0.$$

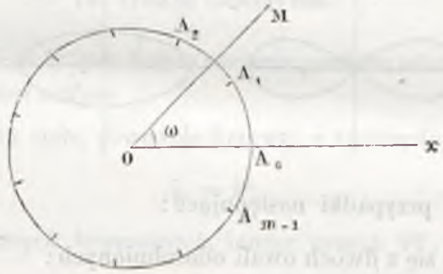
Szukajmy teraz miejsca punktów których iloczyn z odległości od wierzchołków jakiegokolwiek wielokąta foremnego o m bokach jest proporcyonalnym potędze m^{tej} z odległości tego punktu od środka wielokąta.

Równanie miejsca będzie

$$\rho^{2m} + R^{2m} - 2R^m\rho^m \mathrm{dos}\, m\omega = k\rho^{2m}.$$

Można założyć $k = \frac{R^{2m}}{a^{2m}}$; ten związek wyznaczy a kiedy się daje k; równanie poprzedzające staje się wtedy

(2) $$\rho^{2m} + R^{2m} - 2R^m\rho^m \mathrm{dos}\, m\omega = \frac{R^{2m}}{a^{2m}}\rho^{2m}.$$



Otóż to równanie (2) wyciąga się z równości (1) przypuszczając m odjemnem; w rzeczy samej, uwidoczniając to założenie, równanie (1) staje się

$$\frac{1}{\rho^{2m}} - \frac{2}{R^m\rho^m}\mathrm{dos}\, m\omega + \frac{1}{R^{2m}} - \frac{1}{a^{2m}} = 0;$$

znajduje się równanie (2) mnożąc dwie strony przez $R^{2m}\rho^{2m}$.

666. Przytoczymy przypadki szczególne następujące dostarczone przez równanie (1).

1° $m = 2$, ma się elipsę albo owal Cassini'ego;

2° $a = R$, $m = 1$, ma się jakikolwiek okręg koła;

3° $a = R$, $m = -1$, ma się jakąkolwiek prostą;

4° $a = R$, $m = 2$, ma się jakąkolwiek lemniskatę Bernouill'ego;

5° $a = R$, $m = -2$, ma się jakąkolwiek hiperbolę równoramienną;

6° $a = R$, $m = \frac{1}{2}$, ma się jakąkolwiek kardyoidę;

7° $a = R$, $m = -\frac{1}{2}$, ma się jakąkolwiek parabolę

IX° Chrabąszcz (*Scarabée*).

667. *Prosta* AB *długości stałej* 2l *porusza się na dwóch prostych prostokątnych* OX *i* OY; *z jakiegokolwiek punktu* P *wziętego na dwójsiecznej kąta* XOY *spuści się prostopadłą na prostą* AB; *miejsce spodka* M *tej prostopadłej jest chrabąszczem.*

Niech będą α i β spółrzędne od początku prostej AB, ma się

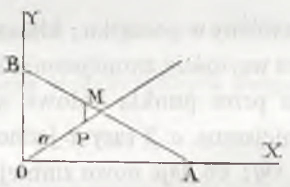
$$(1^\circ)\qquad \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1=0$$

na równanie tej prostej; nadto ma się związek

$$(2^\circ)\qquad \alpha^2+\beta^2=4l^2.$$

Oznaczywszy przez a odległość PO, spółrzędne punktu P będą obie równe $\frac{a}{\sqrt{2}}$; równanie prostopadłej spuszczonej z punktu P na AB będzie wtedy

$$(3^\circ)\qquad y-\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{\alpha}{\beta}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$



Otrzyma się równanie miejsca wyrugowawszy α i β między trzema równaniami (1°), (2°), (3°).

Odnieśmy osie do punktu P, to jest załóżmy

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}+x',\qquad y=\frac{a}{\sqrt{2}}+y';$$

trzy równania stają się po zniesieniu znaków:

$$\alpha^2+\beta^2=4l^2,$$

$$\frac{x+\frac{a}{\sqrt{2}}}{\alpha}+\frac{y+\frac{a}{\sqrt{2}}}{\beta}=1;$$

$$\alpha x=\beta y.$$

Rugowanie α i β wykona się bez trudności, znajduje się na równanie krzywej

$$(1)\qquad \left[x^2+y^2+\frac{a}{\sqrt{2}}(x+y)\right]^2(x^2+y^2)=4l^2x^2y^2.$$

Będzie lepiej dla wykreślenia odnieść krzywą do dwóch dwójsiecznych, wzorami przekształcenia są

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\qquad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

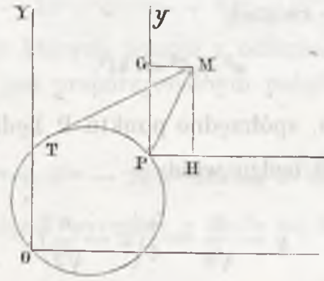
Równanie krzywej weźmie po tem podstawieniu kształt następujący

$$(2) \qquad (x'^2 + y'^2 a x')^2 (x'^2 + y'^2) = l^2 (x'^2 - y'^2)^2.$$

Z kształtu równania (1) można łatwo zauważyć że :

Jeśli M jest jakimkolwiek punktem krzywej; MP jej odległość od punktu P; MT długość stycznej poprowadzonej do koła nakreślonego na OP jako średnicy; MH i MG jej odległości od prostych Px i Py względnie równoległych do OX i OY; ma się

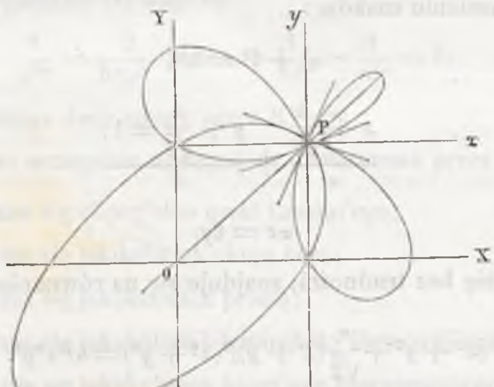
$$\frac{\overline{MT}^2.MP}{MH.MG} = 2l.$$



668. Krzywa (2) posiada punkt poczwórny w początku; klassa będzie więc zmniejszoną o 12 jedności numer (467); zmniejszenie wyrównywa wartością zmniejszeniu które byłoby sprawionem przez 6 punktów podwójnych. Krzywa przechodzi przez punkta kołowe w nieskończoności, które są punktami podwójnymi; klassa jest jeszcze zmniejszoną o 2 razy 2 jedności; krzywa posiada dwa inne punkta podwójne położone na prostych Ox i Oy; co daje nowe zmniejszenie o 4 jedności. Te ostatnie punkta podwójne mają za spółrzędne w układzie równania (1)

$$\left(x = 0, \quad y = -\frac{a}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = 0\right).$$

Krzywa będąc szóstego rzędu klassa jest ogólnie 30; zmniejszenie będąc tutaj o 20 jedności; chrabąszcz jest jakąkolwiek krzywą szóstego rzędu i dziesiątej klassy.



Zmniejszenie zrządzone przez punkta wielokrotne jest równej wartości ze zmniejszeniem które wynikłoby z istnienia dziesięciu punktów podwójnych

Według tego sprawdzi się za pomocą wzorów numeru (497), że krzywa ma dwanaście punktów przegięcia i 24 stycznych podwójnych. Prosta w nieskończoności jest styczną podwójną.

Krzywa przedstawia kształt tu załączony.

Dla wykreślenia tej krzywej można zrobić użytek z jakiejkolwiek zmiennej pomocniczej i założyć na przykład:

$$y' = tx';$$

i za pomocą równania (2) wyrazi się bezpośrednio x' i y' w funkcyi t.

Można jeszcze użyć równania w spółrzędnych biegunowych.

Jeśli założymy

$$x' = \rho \operatorname{dos}\omega, \qquad y' = \rho \operatorname{wsl}\omega,$$

równanie (2) daje

$$\rho = -\, a \operatorname{dos}\omega \pm l \operatorname{dos} 2\omega.$$

Będziemy mogli wybrać jedno albo drugie z tych równań dla przedstawienia krzywej. W rzeczy samej, jeśli ρ i ω są spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu M należącego do krzywej

$$\rho = -\, a \operatorname{dos}\omega + l \operatorname{dos} 2\omega,$$

spółrzędne $(-\rho$ i $(\pi + \omega))$ wyznaczą tenże sam punkt M; otóż podstawiając te wartości w pierwszem równaniu, znajdujemy drugie

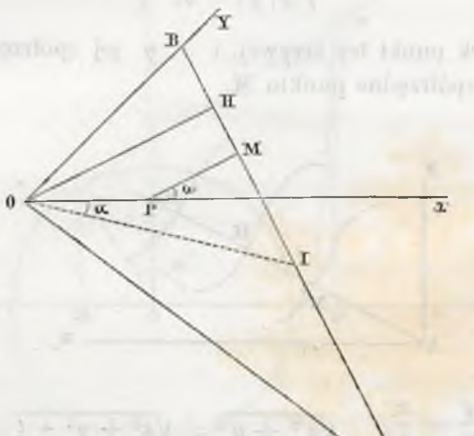
$$\rho = -\, a \operatorname{dos}\omega - l \operatorname{dos} 2\omega.$$

Tym sposobem równanie chrabąszcza w spółrzędnych biegunowych, będzie

(3) $$\rho = l \operatorname{dos} 2\omega - a \operatorname{dos}\omega;$$

dwójsieczna jest osią biegunową; punkt P jest biegunem.

Można otrzymać, w prost to równanie. Niech będą OA i OB dwie proste prostokątne; OP dwójsieczna, wzięta za oś biegunową; P punkt stały, wzięty za biegun; AB jakiekolwiek położenie



prostej ruchomej; PM prostopadła, spuszczona z punktu P i M punkt miejsca; tak że

$$\mathrm{PM} = \rho, \qquad \widehat{\mathrm{MP}x} = \omega \qquad \mathrm{OP} = a, \qquad \mathrm{AB} = 2l.$$

Jeśli I jest środek AB, ma się

$$OI = IA = IB = l. \quad (1^\circ)$$

Niech będzie OH prostopadłą do AB, ma się

$$\widehat{HOx} = \omega; \quad \widehat{IOA} = \widehat{IAO}; \quad \widehat{IAO} = \frac{\pi}{2} - B = BOH;$$

otóż prosta Ox jest dwójsieczną kąta BOA; więc

$$\widehat{HOx} = \widehat{IOx}; \quad \text{zkąd} \quad \widehat{HOI} = 2\omega. \quad (2^\circ)$$

zkąd wynika bezpośrednio równanie w spółrzędnych biegunowych krzywej

$$\rho = l \operatorname{dos} 2\omega - a \operatorname{dos} \omega.$$

XII° Konchoidy w ogólności.

669. *Mając daną krzywą stałą i punkt stały* A ; *jeśli się złączy punkt* A *z różnymi punktami krzywej i gdy się przedłuży promienie wodzące, począwszy od krzywej, o jakąkolwiek długość stałą* l ; *miejsce punktów tym sposobem otrzymanych jest konchoidą względem krzywej danej.*

Weźmy punkt stały za początek albo biegun; jeśli równanie krzywej danej w spółrzędnych biegunowych jest

$$(1) \qquad \varphi(\rho, \omega) = 0,$$

równanie konchoidy szukanej będzie widocznie

$$(2) \qquad \varphi(\rho + l, \omega) = 0,$$

dajmy równanie krzywej w spółrzędnych prostolinijnych :

$$(3) \qquad f(x, y) = 0.$$

Niech będzie H jakikolwiek punkt tej krzywej, i x, y jej spółrzędne, przedłużmy AH o ilość HM $= l$, i niech będą x', y', spółrzędne punktu M.

Ma się oczywiście

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}, \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + l:$$

zkąd się wyciąga

$$(4) \qquad \begin{cases} x = x' - \dfrac{lx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ y = y' - \dfrac{ly'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{cases}$$

Równanie konchoidy będzie więc po zniesieniu znaków :

(5) $$f\left(x - \frac{lx}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad y - \frac{ly}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0.$$

Uważmy że jeśli się uczyni to równanie wymiernem, będzie ono zawierać w sobie tylko kwadrat na l, ponieważ l weń wchodzi jako jego stosunek z pierwiastkiem $\sqrt{x^2+y^2}$; a tem samem, równanie określi punkta M i M′ otrzymane odnosząc począwszy od H, w jednym i drugim kierunku, długości HM i HM′ równe l.

Równanie (5) rozwiązuje więc tę kwestyą :

Znaleźć równanie jakiejkolwiek krzywej takiej, aby wszystkie cięciwy, przechodzące przez punkt dany A, *były równe ilości danej.*

Wszystkie cięciwy, zawarte między gałęziami krzywej (5) i przechodzące przez punkt A, będą w rzeczy samej równe $2l$.

Jeśli równanie krzywej (3) jest

$$y - kx = 0,$$

równanie konchoidy będzie

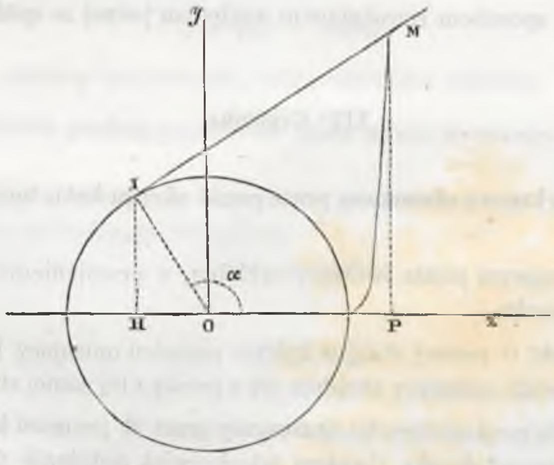
$$(y - kx)(\sqrt{x^2+y^2} - l) = 0;$$

to jest prosta dana jest jakimkolwiek kołem. Jest łatwo zdać sobie rachunek, *a priori*, z tego podwójnego rezultatu.

XIII° Rozwinięte.

670. *Jeżeli się przypuści nić okręconą około jakiejkolwiek krzywej, kiedy się ją przetnie w pewnym punkcie, i gdy począwszy od tego punktu ją się rozwinie mając na baczeniu aby była stale skierowaną podług stycznej do krzywej; koniec wolny nici opisze rozwiniętą krzywej danej.*

Szukajmy rozwiniętej koła. Weźmiemy za oś odciętych średnicę przechodzącą przez punkt w którym się przypuści nić przeciętą; niech będzie IM jakiekolwiek położenie stycznej; M będzie punktem



rozwiniętej, i otrzyma się IM = łuk $\widehat{AI}$. Niech będą MP i OP spółrzędne x i y punktu M; rzućmy obwod OPMI na wypadkową OI, otrzyma się

(1) $$R = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$

oznaczywszy przez α kąt IOx, i przez R promień koła.

Otóż

$$\mathrm{IA} = \mathrm{R}\alpha, \quad \text{zkąd} \quad \mathrm{IM} = \mathrm{R}\alpha.$$

Spółrzędne punktu I są

$$\mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\alpha, \qquad \mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\alpha;$$

otrzyma się więc

$$(2) \qquad \overline{\mathrm{IM}}^2 \quad \text{albo} \quad \mathrm{R}^2\alpha^2 = (\mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\alpha - x)^2 + (\mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\alpha - y)^2.$$

Otrzyma się równanie miejsca rugując α między dwoma równaniami (1) i (2). Zwracając uwagę na związek (1), równanie (2) stanie się

$$\mathrm{R}^2\alpha^2 = \mathrm{R}^2 + y^2 + x^2 - 2\mathrm{R}^2 = x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2.$$

Napiszemy więc na równanie miejsca, wyciągnąwszy ztąd α i podstawiwszy w równanie (1)

$$(3) \qquad \mathrm{R} = x\,\mathrm{dos}\frac{\sqrt{x^2+y^2-\mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}} + y\,\mathrm{wst}\frac{\sqrt{x^2+y^2-\mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}};$$

takiem jest równanie rozwiniętej koła.

Będzie prościej wprowadzić spółrzędne biegunowe; załóżmy

$$x = \rho\,\mathrm{dos}\,\omega, \qquad y = \rho\,\mathrm{wst}\,\omega;$$

równanie (3) staje się

$$\frac{\mathrm{R}}{\rho} = \mathrm{dos}\,\omega\,\mathrm{dos}\sqrt{\left(\frac{\rho}{\mathrm{R}}\right)^2 - 1} + \mathrm{wst}\,\omega\,\mathrm{wst}\sqrt{\left(\frac{\rho}{\mathrm{R}}\right)^2 - 1};$$

albo

$$\frac{\mathrm{R}}{\rho} = \mathrm{dos}\left(\omega - \sqrt{\left(\frac{\rho}{\mathrm{R}}\right)^2 - 1}\right)$$

albo nakoniec

$$(1) \qquad \omega = \text{łuk}\,\mathrm{dos}\frac{\mathrm{R}}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{\mathrm{R}}\right)^2 - 1};$$

równanie znajduje się tym sposobem roowiązanem względem jednej ze spółrzędnych.

XIV° Cykloida.

670. *Cykloidą* nazywamy krzywą utworzoną przez punkt okręgu koła, toczącego się bez ślizgania po prostej stałej.

Nazwiemy punktem opisującym punkt tworzący cykloidę, a promieniem opisującym promień koła przechodzącego przez ten punkt.

Weźmy za początek punkt O prostej stałej w którym promień opisujący jest prostopadłym do tej prostej, jednocześnie jak punkt opisujący znajduje się z prostą z tej samej strony względem środka.

Wybierzmy tę prostą stałą za oś odciętych; oznaczymy przez R promień koła ruchomego, i przez d odległość punktu opisującego od środka. Uważmy jakiekolwiek położenie CI koła ruchomego; promień opisujący padnie na CB, tak że

$$\mathrm{OI} = \text{łuk}\,\widehat{\mathrm{IGB}};$$

punkt A padnie wtedy na M. Niech będą OP i MP spółrzędne x i y punktu M; i oznaczmy przez α kąt BCI promienia opisującego z promieniem przechodzącym przez punkt styczności koła z prostą stałą, ten kąt będąc policzonym w kierunku strzały, to jest idąc od lewej ku prawej stronie począwszy od CI, ma się

$$x = \mathrm{OI} - \mathrm{CH}, \qquad y = \mathrm{CI} + \mathrm{HM};$$

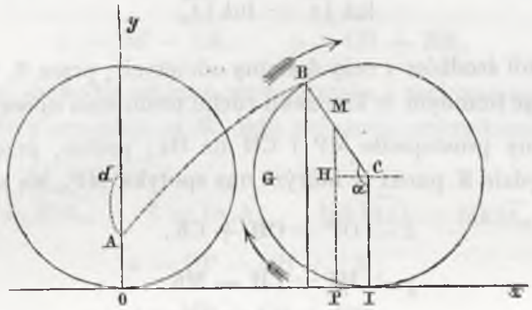
otóż

$$\mathrm{OI} = \text{łuk } \widehat{\mathrm{BI}} = \mathrm{R}\alpha; \qquad \mathrm{CI} = \mathrm{R}; \qquad \widehat{\mathrm{MCH}} = \alpha - \frac{\pi}{2};$$

$$\mathrm{CH} = \mathrm{CH}.\mathrm{dos}\widehat{\mathrm{MCH}} = d\,\mathrm{dos}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right); \qquad \mathrm{MH} = \mathrm{CM}\,\mathrm{wst}\,\widehat{\mathrm{MCH}} = d\,\mathrm{wst}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right);$$

zkąd wypada

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{R}\alpha - d\sin\alpha, \\ y = \mathrm{R} - d\,\mathrm{dos}\,\alpha. \end{cases}$$



Otrzyma się równanie miejsca wyrugowawszy α między dwoma równaniami (1) lecz lepiej jest określić krzywą za pomocą tych dwóch równań; równania (1) będą równaniami krzywej szukanej.

Kiedy $d \gtrless \mathrm{R}$, krzywa nosi nazwisko *trochoidy*, albo cykloidy podłużnej albo skróconej.

Kiedy $d = \mathrm{R}$, ma się cykloidę właściwie nazwaną; równania cykloidy są więc

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{R}(\alpha - \mathrm{wst}\,\alpha) \\ y = \mathrm{R}(1 - \mathrm{dos}\,\alpha). \end{cases}$$

Dowiedzie się łatwo, za pomocą tych równań, różne własności cykloidy.

1° Normalna w jakimkolwiek punkcie przechodzi przez punkt styczności koła tworzącego z prostą stałą.

2° Powierzchnia cykloidy jest równa trzy razy wziętej powierzchni koła tworzącego.

3° Promień krzywości jest podwójnym normalnej.

4° Rozwinięta cykloidy jest jakąkolwiek cykloidą jej równą.

XV° Epicykloidy.

671. *Jeśli krzywa ruchoma toczy się bez ślizgania po krzywej stałej; jakikolwiek punkt krzywej ruchomej opisuje krzywą noszącą nazwisko epicykloidy.*

Pierwsze odkrycie epicykloid odnosi się do Desargues'a (około 1600).

Szukajmy równania epicykloid w przypadku w którym krzywe są kołami.

Weźmiemy za oś odciętych położenie linii środków dwóch kół, kiedy punkt opisujący jest na linii środków; wybierzemy za początek środek koła stałego albo koła kierującego. Niech będą R promień koła stałego; r promień koła ruchomego; d odległość punktu opisującego od środka koła ruchomego. Może się zdarzyć że na osi odcinków punkt opisujący jest po lewej albo prawej stronie środka koła ruchomego; powiemy że położenie początkowe punktu opisującego jest po lewej albo po prawej stronie środka koła ruchomego. Będziemy szukać w tych dwóch przypadkach równań epicykloidy.

Przypuśćmy naprzód koło ruchome styczne zewnętrznie do koła kierującego.

Uważmy jakiekolwiek położenie koła ruchomego; niech będzie I punkt styczności, C środek, i M położenie punktu opisującego, przypuściwszy położenie początkowe M_0 po lewej stronie środka koła ruchomego. Ponieważ koło C toczy się bez ślizgania, długości łuków położonych jedne na drugich muszą być równe; punkt styczności początkowej A_0 padnie na A, tak że

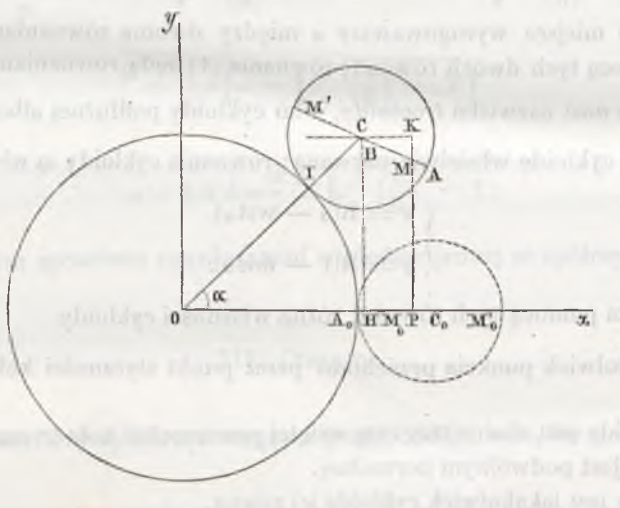
$$\text{łuk}\,\widehat{IA} = \text{łuk}\,\widehat{IA_0}.$$

Oznaczymy przez α kąt linii środków z osią dodatną odciętych; przez $\mathfrak{C}$, kąt promienia opisującego z linią środków, ten kąt będąc liczonym w kierunku ruchu promienia opisującego.

Z punktów M i C spuśćmy prostopadłe MP i CH na Ox; potem, przez punkt C poprowadźmy równoległą do Ox, niech będzie K punkt w którym ona spotyka MP. Ma się

$$x = \mathrm{OP} = \mathrm{OH} + \mathrm{CK},$$

$$y = \mathrm{MP} = \mathrm{CH} - \mathrm{MK};$$



lecz jest widocznem że

$$\widehat{\mathrm{KCM}} = \pi - \alpha - \mathfrak{C};$$

$$\mathrm{OH} = (\mathrm{R} + r)\mathrm{dos}\,\alpha, \qquad \mathrm{CK} = d\,\mathrm{dos}(\pi - \alpha - \mathfrak{C}),$$

$$\mathrm{CH} = (\mathrm{R} + r)\mathrm{wst}\,\alpha; \qquad \mathrm{MK} = \mathrm{wst}(\pi - \alpha - \mathfrak{C});$$

z drugiej strony równość łuków IA i IA_0 daje

$$\mathrm{R}\alpha = r\mathfrak{C}.$$

Kiedy punkt opisujący nie jest na kole ruchomem, i gdy koło ruchome jest styczne zewnętrznie, daje się dla krzywej nazwisko epitrochoidy. Według rachunków które poprzedzają, widzimy że :

Równania epitrochoidy, kiedy położenie początkowe punktu opisującego jest po lewej stronie środka koła ruchomego są

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x = (\mathrm{R} + r)\mathrm{dos}\,\alpha - d\,\mathrm{dos}(\alpha + \beta), \\ y = (\mathrm{R} + r)\mathrm{wst}\,\alpha - d\,\mathrm{wst}(\alpha + \beta); \end{cases} \qquad \mathrm{R}\alpha = r\beta.$$

Równania epitrochoidy, kiedy położenie początkowe punktu opisującego jest po prawej stronie środka koła ruchomego są

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x = (\mathrm{R} + r)\mathrm{dos}\,\alpha + d\,\mathrm{dos}(\alpha + \beta), \\ y = (\mathrm{R} + r)\mathrm{wst}\,\alpha + d\,\mathrm{wst}(\alpha + \beta); \end{cases} \qquad \mathrm{R}\alpha = r\beta.$$

Gdyż w tym drugim przypadku, punkt opisujący znajdzie się w M′ (figura poprzedzająca); jest wtedy widocznem że

$$x = \mathrm{OH} - \mathrm{CK}, \qquad y = \mathrm{CH} + \mathrm{MK}.$$

Przypuśćmy powtóre koło ruchome styczne wewnętrznie, i zachowajmy wykreślenia i znakowania poprzedzające. Punkt opisujący przyjdzie w M, jeśli położenie początkowe $\mathrm{M_0}$ jest po lewej stronie środka ruchomego. Ma się

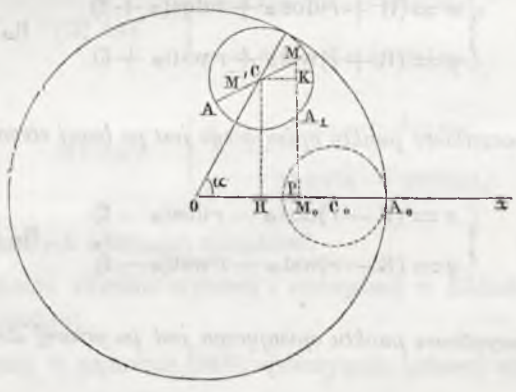
$$\alpha = \widehat{\mathrm{IOA_0}}, \qquad \beta = \widehat{\mathrm{IA_1A}}; \qquad \text{łuk}\,\widehat{\mathrm{IA_1A}} = \text{łuk}\,\widehat{\mathrm{IA_0}};$$

$$x = \mathrm{OP} = \mathrm{OH} + \mathrm{CK};$$

$$y = \mathrm{MP} = \mathrm{CH} + \mathrm{MK};$$

$$\widehat{\mathrm{MCK}} = \widehat{\mathrm{ICK}} - \widehat{\mathrm{ICM}} = \alpha - \beta + \pi.$$

$$\mathrm{OH} = (\mathrm{R} - r)\mathrm{dos}\alpha; \qquad \mathrm{CK} = d\,\mathrm{dos}(\pi + \alpha - \beta),$$
$$\mathrm{CH} = (\mathrm{R} - r)\mathrm{wst}\alpha; \qquad \mathrm{MK} = d\,\mathrm{wst}(\pi + \alpha - \beta).$$



Kiedy punkt opisujący jest na kole ruchomem, i gdy koło ruchome jest styczne wewnętrznie krzywa nosi nazwisko hypotrochoidy.

Z rachunków poprzedzających wnosimy więc że

Równania hypotrochoidy, kiedy położenie początkowe punktu opisującego jest po lewej stronie środka koła ruchomego, są

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} x = (\mathrm{R} - r)\mathrm{dos}\,\alpha - d\,\mathrm{dos}(\alpha - \beta), \\ y = (\mathrm{R} - r)\mathrm{wst}\,\alpha - d\,\mathrm{wst}(\alpha - \beta) \end{cases} \qquad \mathrm{R}\alpha = r\beta.$$

Równanie hypotrochoidy, kiedy położenie początkowe punktu opisującego jest po prawej stronie środka koła ruchomego, są

$$(\mathrm{IV}) \quad \begin{cases} x = (\mathrm{R} - r)\mathrm{dos}\,\alpha + d\,\mathrm{dos}(\alpha - \beta), \\ y = (\mathrm{R} - r)\mathrm{wst}\,\alpha + d\,\mathrm{wst}(\alpha - \beta); \end{cases} \qquad \mathrm{R}\alpha = r\beta.$$

Gdyż, w tym drugim przypadku punkt opisujący znajduje się w M′; ilości CK i MK muszą być odjęte, to jest że drugie wyrazy zmienią znak.

W poszukiwaniu które poprzedza, przypuściło się $r \overset{?}{<} \mathrm{R}$; przekona się bez trudności że równania (III) i (IV) dają zię zastosować do przypadku w którym $r > \mathrm{R}$. Stała d jest dodatną.

Uwaga. Równania hypotrochoidy wyciągają się z równań epitrochoidy przez zmianę r na $-r$ i β na $-\beta$.

672. Kiedy punkt opisujący jest na kole ruchomem, krzywa jest zwaną epicykloidą albo hypocykloidą, według tego jak koło ruchome jest styczne zewnętrznie albo wewnętrznie.

Równania tych ostatnich krzywych wyciągną się z poprzedzających robiąc w nich $d = r$; według tego otrzymamy :

Epicykloida, położenie początkowe punktu opisującego jest po lewej stronie środka koła kierującego.

$$(\mathrm{I}\ bis) \quad \begin{cases} x = (\mathrm{R} + r)\mathrm{dos}\,\alpha - r\,\mathrm{dos}(\alpha + \beta) \\ y = (\mathrm{R} + r)\mathrm{wst}\,\alpha - r\,\mathrm{wst}(\alpha + \beta) \end{cases}, \qquad \mathrm{R}\alpha = r\beta.$$

Epicykloida, położenie początkowe punktu opisującego jest po prawej stronie środka koła kierującego.

$$(\mathrm{II}\ bis) \quad \begin{cases} x = (\mathrm{R} + r)\mathrm{dos}\,\alpha + r\,\mathrm{dos}(\alpha + \beta) \\ y = (\mathrm{R} + r)\mathrm{wst}\,\alpha + r\,\mathrm{wst}(\alpha + \beta) \end{cases}, \qquad \mathrm{R}\alpha = r\beta.$$

Hypocykloida, położenie początkowe punktu opisującego jest po lewej stronie środka koła kierującego.

$$(\mathrm{III}\ bis) \quad \begin{cases} x = (\mathrm{R} - r)\mathrm{dos}\,\alpha - r\,\mathrm{dos}(\alpha - \beta) \\ y = (\mathrm{R} - r)\mathrm{wst}\,\alpha - r\,\mathrm{wst}(\alpha - \beta) \end{cases}, \qquad \mathrm{R}\alpha = r\beta.$$

Hypocykloida, położenie początkowe punktu opisującego jest po prawej stronie środka koła kierującego.

$$(\mathrm{IV}\ bis) \quad \begin{cases} y = (\mathrm{R} - r)\mathrm{dos}\,\alpha + r\,\mathrm{dos}(\alpha - \beta) \\ y = (\mathrm{R} - r)\mathrm{wst}\,\alpha + r\,\mathrm{wst}(\alpha - \beta) \end{cases}. \qquad \mathrm{R}\alpha = r\beta.$$

Uwaga. Równanie hypocykloidy wyciąga się z równania epicykloidy zmieniając r na $-r$ i β na $-\beta$; lecz wtedy położenia początkowe są odwrotne.

Założmy

$$\mathrm{R} + r = mr, \qquad \text{gdzie} \quad \mathrm{R} = (m - 1)r; \qquad \text{zkąd} \quad \beta = (m - 1)\alpha;$$

równania epitrochoid wezmą wtedy kształt :

$$\text{Epitrochoidy}\left\{\begin{array}{ll}(\mathrm{I}') & \left\{\begin{array}{l}x = mr\,\mathrm{dos}\,\alpha - d\,\mathrm{dos}\,m\alpha,\\ y = mr\,\mathrm{wst}\,\alpha - d\,\mathrm{wst}\,m\alpha;\end{array}\right.\\ (\mathrm{II}') & \left\{\begin{array}{l}x = mr\,\mathrm{dos}\,\alpha + d\,\mathrm{dos}\,m\alpha,\\ y = mr\,\mathrm{wst}\,\alpha + d\,\mathrm{wst}\,m\alpha;\end{array}\right.\end{array}\right\}\mathrm{R} + r = mr.$$

$$\text{Hypotrochoidy}\left\{\begin{array}{ll}(\mathrm{III}') & \left\{\begin{array}{l}x = mr\,\mathrm{dos}\,\alpha - d\,\mathrm{dos}\,m\alpha,\\ y = mr\,\mathrm{wst}\,\alpha + d\,\mathrm{wst}\,m\alpha;\end{array}\right.\\ (\mathrm{IV}') & \left\{\begin{array}{l}x = mr\,\mathrm{dos}\,\alpha + d\,\mathrm{dos}\,m\alpha,\\ y = mr\,\mathrm{wst}\,\alpha - d\,\mathrm{wst}\,m\alpha;\end{array}\right.\end{array}\right\}\mathrm{R} - r = mr.$$

Dla Epicykloid i hypocykloid otrzymamy równania :

Epicykloidy $\mathrm{R} + r = mr$.

$$(\mathrm{I}\ bis)'\quad\left\{\begin{array}{l}x = r[m\,\mathrm{dos}\,\alpha - \mathrm{dos}\,m\alpha],\\ y = r[m\,\mathrm{wst}\,\alpha - \mathrm{wst}\,m\alpha].\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{II}\ bis)'\quad\left\{\begin{array}{l}x = r[m\,\mathrm{dos}\,\alpha + \mathrm{dos}\,m\alpha],\\ y = r[m\,\mathrm{wst}\,\alpha + \mathrm{wst}\,m\alpha.\end{array}\right.$$

Hypocykloidy $\mathrm{R} - r = mr$.

$$(\mathrm{III}\ bis)'\quad\left\{\begin{array}{l}x = r[m\,\mathrm{dos}\,\alpha - \mathrm{dos}\,m\alpha],\\ y = r[m\,\mathrm{wst}\,\alpha + \mathrm{wst}\,m\alpha].\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{IV}\ bis)'\quad\left\{\begin{array}{l}x = r[m\,\mathrm{dos}\,\alpha + \mathrm{dos}\,m\alpha],\\ y = r[m\,\mathrm{wst}\,\alpha - \mathrm{wst}\,m\alpha],\end{array}\right.$$

674. Dowiedziemy niektórych własności *epicykloid*.

Rozpoczniemy od szukania równań stycznej i normalnej w jakimkolwiek punkcie (α będzie *parametrem kątowym* tego punktu).

Według uwagi zrobionej w numerze (368), spółczynnik kątowy stycznej dla krzywej (I *bis*)', na przykład, będzie

$$c = \frac{y'_\alpha}{x'_\alpha} = \frac{\mathrm{dos}\,\alpha - \mathrm{dos}\,m\alpha}{-\mathrm{wst}\,\alpha + \mathrm{wst}\,m\alpha} = + \frac{\mathrm{wst}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,\frac{m-1}{2}\,\alpha}{\mathrm{wst}\,\frac{m-1}{2}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha};$$

tym sposobem ma się na spółczynnik kątowy stycznej

$$c = \mathrm{sty}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha.$$

Równanie stycznej w punkcie uważanym będzie więc

$$y - r(m\,\text{wst}\,\alpha - \text{wst}\,m\alpha) = \frac{\text{wst}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha}{\text{dos}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha}\,[x - r(m\,\text{dos}\,\alpha - \text{dos}\,m\alpha)];$$

i otrzyma się na równanie normalnej

$$y - r(m\,\text{wst}\,\alpha - \text{wst}\,m\alpha) = -\frac{\text{dos}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha}{\text{wst}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha}\,[x - r(m\,\text{dos}\,\alpha - \text{dos}\,m\alpha)].$$

Znosząc mianowniki i upraszczając znajduje się na :

Styczną i normalną w jakimkolwiek punkcie krzywej (I *bis*)' :

(1) styczna $x\,\text{wst}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha - y\,\text{dos}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha = r(m+1)\,\text{wst}\,\frac{m-1}{2}\,\alpha,$

(1 *bis*) normalna $x\,\text{dos}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha + y\,\text{wst}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha = r(m-1)\,\text{wst}\,\frac{m-1}{2}\,\alpha.$

Znajdzie się przez rachunek podobny na :

Styczną i normalną w jakimkolwiek punkcie krzywej (II *bis*)' :

(2) styczna $x\,\text{dos}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha + y\,\text{wst}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha = r(m+1)\,\text{dos}\,\frac{m-1}{2}\,\alpha,$

(2 *bis*) normalna $x\,\text{wst}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha - y\,\text{dos}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha = r(m-1)\,\text{wst}\,\frac{m-1}{2}\,\alpha.$

Nie wskażemy tych wzorów jak tylko dla *epicykloid*, wnioski jakie z nich wyciągniemy dadzą się widocznie zastosować dla *hypocykloid*.

675. *Normalna w jakimkolwiek punkcie przechodzi przez punkt styczności odpowiedni koła kierującego.*

W rzeczy samej, dla punktu odpowiedniego parametrowi α, spółrzędne punktu styczności koła kierującego są

$$x_0 = \text{R}\,\text{dos}\,\alpha, \qquad y_0 = \text{R}\,\text{wst}\,\alpha,$$

albo, ponieważ $\text{R} + r = mr$, albo $\text{R} = (m-1)r$:

$$x_0 = (m-1)r\,\text{dos}\,\alpha \qquad x = (n-1)r\,\text{wst}\,\alpha.$$

Otóż równanie normalnej, (1 *bis*) na przykład, jest sprawdzonem przez spółrzędne tego punktu, gdyż wypadnie po podstawieniu

$$\text{dos}\,\alpha\,\text{dos}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha + \text{wst}\,\alpha\,\text{wst}\,\frac{m+1}{2}\,\alpha = \text{dos}\,\frac{m-1}{2}\,\alpha;$$

co jest tożsamością.

676. *Rozwinięta jakiejkolwiek krzywej* jest obwinięciem normalnych do tej krzywej. *Rozwinięta epicykloidy jest epicykloida.*

Uważmy, na przykład, epicykloidę (I *bis*)', jej normalna (I *bis*) ma za równanie

$$(1^\circ)\qquad x\,\mathrm{dos}\frac{m+1}{2}\alpha + y\,\mathrm{wst}\frac{m+1}{2}\alpha = r(m-1)\mathrm{dos}\frac{m-1}{2}\alpha,\qquad \text{gdzie}\qquad R+r=mr.$$

Otóż wystawmy sobie epicykloidę której r' jest promień koła kierującego, i R' promień koła stałego, i dla której położenie początkowe punktu opisującego jest po prawej stronie środka koła kierującego; równanie stycznej do tej krzywej będzie, według wzoru (2) numer (674):

$$(2^\circ)\qquad x\,\mathrm{dos}\frac{m'+1}{2}\alpha + y\,\mathrm{wst}\frac{m'+1}{2}\alpha = r'(m'+1)\mathrm{dos}\frac{m'-1}{2}\alpha,$$

gdzie się założyło

$$(3^\circ)\qquad R'+r'=m'r'.$$

Otóż normalna (1°) zbiegnie się ze styczną (2°), jeśli ma się razem

$$(4^\circ)\qquad m'=m,\qquad r'(m+1)=r(m-1).$$

Związki (3°) i (4°) wyznaczą R' i r' i ma się

$$(3)\qquad R'=\frac{R^2}{R+2r},\quad r'=\frac{Rr}{R+2r},\qquad \text{zkąd}\qquad \frac{R'}{r'}=\frac{R}{r}.$$

« Tym sposobem rozwinięta epicykloidy, dla której R i r są promieniami koła stałego i koła » ruchomego, będzie inną epicykloidą dla której promienie R' i r' koła stałego i koła ruchomego » otrzymają wartości (3).

» Położenie początkowe punktu opisującego będzie na tejże samej średnicy dla dwóch krzywych; » lecz dla jednej on się znajdzie po lewej stronie środka koła ruchomego, dla drugiej po prawej » stronie. »

677. *Średnica koła ruchomego obwija epicykloidę.*

Średnica ciągnięta przez koło będzie wyznaczoną przez punkt który będziemy mogli uważać za punkt opisujący; niech będzie CM ta średnica. Równanie średnicy CM, przechodzącej przez dwa punkta

$$C\begin{cases} x_1=(R+r)\mathrm{dos}\,\alpha = mr\,\mathrm{dos}\,\alpha,\\ y_1=(R+r)\mathrm{wst}\,\alpha = mr\,\mathrm{wst}\,\alpha,\end{cases}\quad \text{i}\quad M\begin{cases} x_2=r(m\,\mathrm{dos}\,\alpha-\mathrm{dos}\,m\alpha)\\ y_2=r(m\,\mathrm{wst}\,\alpha-\mathrm{wst}\,m\alpha)\end{cases}\quad \text{wzory (1 } bis)';$$

będzie

$$(4)\qquad x\,\mathrm{wst}\,m\alpha - y\,\mathrm{dos}\,m\alpha = mr\,\mathrm{wst}(m-1)\alpha.$$

Należy znaleźć obwinięcie prostej (4). Oznaczywszy przez R' i r' promienie kół wyznaczających pewną epicykloidę, styczną do tej krzywej będzie [równanie (1) numer (674)]

$$(5)\qquad x\,\mathrm{wst}\frac{m'+1}{2}\alpha - y\,\mathrm{dos}\frac{m'+1}{2}\alpha = r(m'+1)\mathrm{wst}\frac{m'-1}{2}\alpha;\quad \text{gdzie}\quad R'+r'=m'r'.$$

Otóż prosta (4) zbiegnie się z prostą (5), we wszystkich jej położeniach, jeśli się założy

$$(1^\circ)\qquad \frac{m'+1}{2}=m,\qquad \text{zkąd}\qquad \frac{m'-1}{2}=m-1;$$

$$(2^\circ)\qquad r'(m'+1)=mr.$$

Z równości (1°) i (2°) wyciąga się, wiedząc że $m = \frac{R + r}{2}$

(7) $$r' = \frac{r}{2}, \qquad R' = R.$$

« Średnica obwija więc epicykloidę, której koło kierujące ma za promień R, i której koło » ruchome ma za promień $\frac{r}{2}$.

678. *Miejsce wierzchołków kątów wielkości stałej, opisanych na epicykloidzie, jest epitrochoida.*

Niech będą dwie styczne do epicykloidy [równanie (1) numer (674)]

(1) $$x \operatorname{wst} \frac{m+1}{2}\alpha - y \operatorname{dos} \frac{m+1}{2}\alpha = r(m+1) \operatorname{wst} \frac{m-1}{2}\alpha,$$

(2) $$x \operatorname{wst} \frac{m+1}{2}\alpha' - y \operatorname{dos} \frac{m+1}{2}\alpha' = r(m+1) \operatorname{wst} \frac{m-1}{2}\alpha'.$$

Kąty tych stycznych z osią odciętych są względnie

$$\frac{m+1}{2}\alpha, \qquad \frac{m+1}{2}\alpha';$$

tak że jeśli θ jest kątem stałym danym, musi się mieć

$$\theta = \frac{m+1}{2}\alpha' - \frac{m+1}{2}\alpha;$$

zkąd

(3) $$\alpha' = \alpha + \frac{2\theta}{m+1}.$$

Zastąpmy α' przez tę wartość w równaniu (2), i załóżmy

(4) $$\frac{m+1}{2}\alpha = \lambda, \qquad \frac{m-1}{m+1} = n,$$

równania dwóch stycznych napiszą się

(5) $$\begin{cases} x \operatorname{wst}\lambda - y \operatorname{dos}\lambda = r(m+1)\operatorname{wst} n\lambda, \\ x \operatorname{wst}(\lambda+\theta) - y \operatorname{dos}(\lambda+\theta) = r(m+1)\operatorname{wst}(n\lambda + n\theta). \end{cases}$$

Równania (5) rozwiązane względem x i y dają

(6) $$\begin{cases} x = \frac{r(m+1)}{\operatorname{wst}\theta}[\operatorname{dos}\lambda \operatorname{wst}(n\lambda + n\theta) - \operatorname{dos}(\lambda+\theta)\operatorname{wst} n\lambda], \\ y = \frac{r(m+1)}{\operatorname{wst}\theta}[\operatorname{wst}\lambda \operatorname{wst}(n\lambda + n\theta) - \operatorname{wst}(\lambda+\theta)\operatorname{wst} n\lambda]. \end{cases}$$

Związki (6) wyznaczą spółrzędne x i y jakiegokolwiek punktu miejsca wierzchołków kąta stałego θ opisanego na epicykloidzie; λ jest nieoznaczoną.

Dla rozpoznania w tych równaniach, równań jakiejkolwiek epitrochoidy, przekształcimy ilości między nawiasami.

Zastąpmy naprzód iloczyny linii trygonometrycznych przez summy; potem weźmy wyrazy zawierające tenże sam wielokrotnik na λ, i zastąpimy różnice linii trygonometrycznych przez iloczyny, znajduje się tym sposobem że wartości (6) mogą się napisać

$$(7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{r(m+1)}{\mathrm{wst}\,\theta}\left[\mathrm{wst}\dfrac{n+1}{2}\theta\,\mathrm{dos}\left((n-1)\lambda+\dfrac{n-1}{2}\theta\right)+\mathrm{wst}\dfrac{n-1}{2}\theta\,\mathrm{dos}\left((n+1)\lambda+\dfrac{n+1}{2}\theta\right)\right], \\ y = \dfrac{r(m+1)}{\mathrm{wst}\,\theta}\left[-\mathrm{wst}\dfrac{n+1}{2}\theta\,\mathrm{wst}\left((n-1)\lambda+\dfrac{n-1}{2}\theta\right)+\mathrm{wst}\dfrac{n-1}{2}\theta\,\mathrm{wst}\left((n+1)\lambda+\dfrac{n+1}{2}\theta\right)\right]. \end{cases}$$

Otóż załóżmy

$$(1-n)\left(\lambda+\frac{\theta}{2}\right)=\varphi;\quad \text{zkąd}\quad (\lambda+n)\left(\lambda+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1+n}{1-n}\varphi;$$

otrzyma się, mając wzgląd na wartość (4) tyczącą się n:

$$(1-n)\left(\lambda+\frac{\theta}{2}\right)=\varphi;\qquad (1+n)\left(\lambda+\frac{\theta}{2}\right)=m\varphi;$$

$$\frac{n+1}{2}\theta=\frac{m}{m+1}\theta;\qquad \frac{n-1}{2}\theta=-\frac{\theta}{m+1}.$$

Spółrzędne jakiegokolwiek miejsca punktu będą więc

$$(8)\quad \begin{cases} x = \dfrac{r(m+1)}{\mathrm{wst}\,\theta}\left[\mathrm{wst}\dfrac{m\theta}{m+1}.\mathrm{dos}\,\varphi-\mathrm{wst}\dfrac{\theta}{m+1}.\mathrm{dos}\,m\varphi\right], \\ y = \dfrac{r(m+1)}{\mathrm{wst}\,\theta}\left[\mathrm{wst}\dfrac{m\theta}{m+1}.\mathrm{wst}\,\varphi-\mathrm{wst}\dfrac{\theta}{m+1}.\mathrm{wst}\,m\varphi\right]. \end{cases}$$

Otóż te równania przedstawiają epitrochoidę; w rzeczy samej, jeśli R', r', d', są elementami jakiejkolwiek epitrochoidy, jej równania będą (I)' numer (673):

$$(9)\quad \begin{cases} x = m'r'\,\mathrm{dos}\,\varphi - d'\,\mathrm{dos}\,m'\varphi, \\ y = m'r'\,\mathrm{wst}\,\varphi - d'\,\mathrm{wst}\,m'\varphi; \end{cases}\qquad \text{gdzie}\quad \mathrm{R}+r=m'r'.$$

φ będąc nieoznaczoną. Równania (8) i (9) przedstawiają tąż samą krzywą, jeśli się ma

$$m'=m,\qquad m'r'=\frac{r(m+1)}{\mathrm{wst}\,\theta}.\mathrm{wst}\frac{m\theta}{m+1};\qquad d'=\frac{r(m+1)}{\mathrm{wst}\,\theta}.\mathrm{wst}\frac{\theta}{m+1}.$$

Te ostatnie związki mogą być sprawdzone, i z nich się wyciąga

$$(10)\quad \begin{cases} r' = \dfrac{r(\mathrm{R}+2r)}{(\mathrm{R}+r)\mathrm{ws}\;\theta}.\mathrm{wst}\dfrac{(\mathrm{R}+r)\theta}{\mathrm{R}+2r}; \\ \mathrm{R}' = \dfrac{\mathrm{R}(\mathrm{R}+2r)}{(\mathrm{R}+r)\mathrm{wst}\,\theta}.\mathrm{wst}\dfrac{(\mathrm{R}+r)\theta}{\mathrm{R}+2r}; \\ d' = \dfrac{\mathrm{R}+2r}{\mathrm{wst}\,\theta}.\mathrm{wst}\dfrac{r\mathrm{R}}{\mathrm{R}+2r} \end{cases}$$

«Tym sposobem miejsce wierzchołków kątów opisanych jest jakakolwiek epitrochoida, które » elementa R', r', d', są wyznaczone przez równości (10).»

N. B. To podanie było wysłowionem przez P. *Chasles'a* (Rys historyczny); lecz dowodzenie tego twierdzenia przez rachunek wprost zawdzięczamy P. *Painvin'owi.*

679. *Epicykloidy kołowe są krzywe algebraiczne, kiedy stosunek* $\frac{R}{r}$ *jest spółmierny; krzywe przestępne, jeśli stosunek* $\frac{R}{r}$ *jest niespółmierny.*

Pomiędzy krzywemi, w liczbie nieskończonej, tworzącemi się za pomocą kół przez ruch epicykloidalny, przytoczymy następujące.

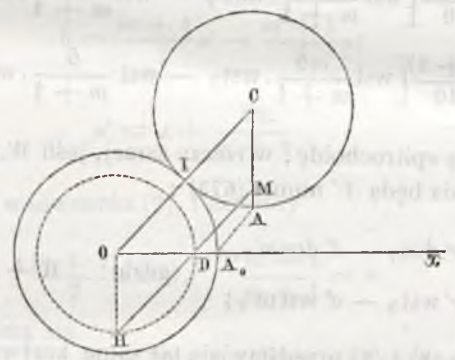
1° *Epicykloida o trzech zwrotach;* ona jest utwórzona przez punkt jakiegokolwiek koła ruchomego toczącego się wewnętrznie po kole stałem, którego promień jest potrójnym promienia koła ruchomego. Jestto krzywa czwartego rzędu i trzeciej klassy; ona posiada wielką liczbę własności ważnych. (Zobacz badanie znakomite o tej krzywej przez P. Cremona'a *Journal de Crelle,* tome LXIV.)

2° *Kiedy dwa koła są równe, krzywa utworzona jest konchoidą kołową, albo kardyoidą, według tego jak promień opisujący nie jest albo jest na okręgu koła ruchomego.*

Niech będzie, w rzeczy samej, CI położenie koła ruchomego, i CA średnica przechodząca przez punkt opisujący, ma się naprzód

$$\text{łuk}\, IA_0 = \text{łuk}\, IA\,;$$

prosta A_0A będzie równoległą do linii środków OC. Poprowadźmy przez punkt opisujący M, równoległą do CO; ta równoległa spotka średnicę stałą AO_0 w punkcie D który pozostanie stałym podczas ruchu, ponieważ $OD = CM = d$.



Jeśli się nakreśli OH równoległą do CM aż do jej spotkania z MD, otrzyma się $OH = CM = OD$. Więc prosta MD spotyka koło stałe promienia OD w drugim punkcie H; i ma się

$$DH + DM = 2R\,;$$

albo

$$DM = DH - 2R\,;$$

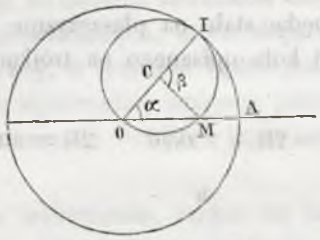
to jest że miejsce punktu jest konchoida której kołem kierującem jest koło OD promienia d, numer (655). Otrzyma się widocznie kardyoidę kiedy punkt opisujący będzie na okręgu koła ruchomego.

3° *Kiedy okręg ruchomy, wewnętrzny względem koła stałego, ma za promień połowę promiena koła stałego, jakikolwiek punkt okręgu koła ruchomego opisze średnicę koła stałego.*

Przypuśćmy że punkt A jest punktem styczności dwóch kół, kiedy punkt opisujący zbiega się z punktem styczności.

Niech będzie CI położenie koła ruchomego, i M przecięcie się jego okręgu z średnicą OA; punkt M będzie położeniem punktu opisującego, to jest że się ma

$$\text{łuk}\,\widehat{\text{IM}} = \text{łuk}\,\widehat{\text{IA}}.$$



W rzeczy samej, C będąc środkiem koła ruchomego, złączmy CM i uważmy dwa kąty

$$\text{COM} = \alpha, \qquad \text{ICM} = \beta;$$

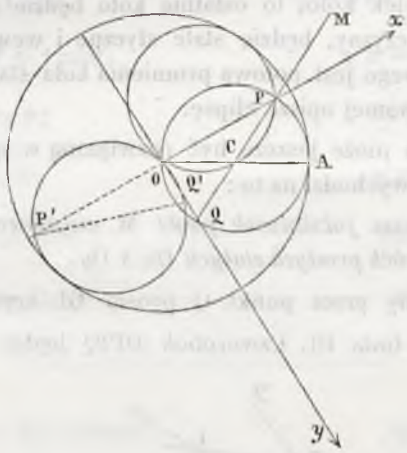
ma się $\beta = 2\alpha$, ponieważ β jest kątem zewnętrznym trójkąta równoramiennego COM. Otóż,

$$\text{łuk}\,\text{IA} = \text{R}\alpha, \qquad \text{łuk}\,\widehat{\text{IM}} = r\beta = \frac{\text{R}}{2}\beta = \text{R}\alpha;$$

Więc etc.....

4° Kiedy okręg ruchomy, wewnętrzny kołu stałemu, ma za promień połowę promienia koła stałego, jakikolwiek punkt płaszczyzny koła ruchomego opisze elipsę.

Niech będzie OA położenie początkowe koła ruchomego C i M jakikolwiek punkt płaszczyzny koła; złączmy MC, i niech będą P i Q punkta w których prosta MC spotyka koło ruchome w jego położeniu początkowem. Kiedy koło ruchome wprawi się w ruch, punkta P i Q pozostaną względnie (3°) na prostych stałych Ox i Oy, odległość PQ będzie stałą, gdyż koło ruchome obejmie



zawsze tenże sam kąt prostych Ox i Oy; cięciwa P′Q′ podpasująca łuk który mierzy ten kąt zachowa długość nieodmienną. Tym sposobem, jeśli się przypuści prosta PQ nierozłącznie zespoloną z kołem ruchomem i wciągniętą w jego ruch, punkta P i Q, stałe na tej prostej, opiszą względnie proste Ox i Oy; więc punkt M opisze elipsę numer (357).

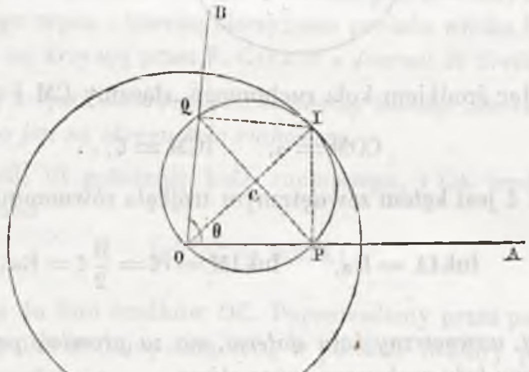
680. Podania które poprzedzają pozwolą rozwiązać kwestyę następującą:

Gdy dwa punkta P *i* Q *jakiejkolwiek płaszczyzny ruchomej ślizgają się na dwóch prostych* OA *i* OB *położonych na płaszczyznie stałej, jakikolwiek punkt płaszczyzny ruchomej opisze elipsę.*

Z punktów P i Q wynieśmy prostopadłe do prostych OA i OB, niech będzie I punkt spotkania tych prostopadłych, i θ kąt dwóch stałych OA i OB. Czworobok OPIQ jest wpisany. Otóż koło opisane na tym czworoboku będzie miało zawsze tenże sam promień jakiemkolwiekby było położenie punktów P i Q.

W rzeczy samej, punkta P i Q będąc stałe na płaszczyznie ruchomej, odległość PQ jest nieodmienną; lecz, jeśli R jest promień koła opisanego na trójkącie OPQ a tem samem na czworoboku OPIQ, ma się

$$\frac{\overline{PQ}}{\text{wst}\,\theta} = 2R, \quad \text{zkąd} \quad 2R = \text{stałej}.$$

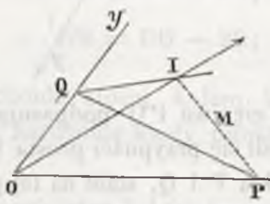


Tym sposobem, kiedy się przeprowadzi jakiekolwiek koło przez punkt O i przez dwa punkta ruchome P i Q, promień tego koła, również ruchomy, zachowa też samą wielkość. Teraz, OI jest średnicą tego koła, ponieważ kąty P i Q są proste; więc jeśli z punktu O, jako środka, z 2R za promień zakreśli się jakiekolwiek koło, to ostatnie koło będzie stałem; koło ruchome wciągnięte w ruch posuwaniem się płaszczyzny, będzie stale styczne i wewnętrzne względem koła stałego; wreszcie promień koła ruchomego jest połową promienia koła stałego; więc [4° numer (679)], jakikolwiek punkt płaszczyzny ruchomej opisze elipsę.

Uwaga. Ta ostatnia kwestya może jeszcze być rozwiązaną w sposób następujący, niezależnie od teoryi epicykloid. Zagadnienie wychodzi na to :

Znaleźć miejsce zakreślone przez jakikolwiek punkt M *nieodmiennie przywiązany do jakiejkolwiek prostej* PQ *ślizgającej się na dwóch prostych stałych* Ox *i* Oy.

Złączmy PM i poprowadźmy przez punkt Q prostą QI czyniącą z PM kąt $\widehat{QIP}$ spełniający kąta xOy, potem nakreślmy linią OI. Czworobok OPIQ będąc wpisany, kąt $\widehat{QOI} = \widehat{QPI}$; więc



kąt $\widehat{QOI}$ jest nieodmiennym, ponieważ prosta MP jest nieodmiennie przywiązaną do linii ruchomej PQ. Lecz trójkąt PQI jest wtedy kształtu nieodmiennego; przeto linia IP ma długość stałą; a ponieważ jej końce zakreślają dwie proste stałe Ox i Oy, wypada ztąd numer (337) że punkt M zakreśli elipsę.

ĆWICZENIA.

I° Krzywe do wykreślenia.

681. W ogóle dobrze jest rozpocząć od badania kierunków assymptotycznych; wyznaczy się następnie assymptoty i położenie gałęzi parabolicznych, które mają ich assymptoty w nieskończoności. Zajmie się potem nakreśleniem krzywej; w tym celu będzie potrzeba albo rozwiązać jej równanie względem jednej ze zmiennych, albo wprowadzić zmienną pomocniczą; najczęściej w przykładach wskazanych wystarczy wprowadzić zmienną określoną przez związek $y = tx$; lecz to są przypadki nader szczególne.

Kiedy wykreślenie krzywej będzie wykonanem, zajmie się badaniem właściwości krzywej jako: punkta wielokrotne, punkta przegięcia, klassa, styczne podwójne, i t. d....

Krzywe algebraiczne.

$$x^3 - xy + y + 1 = 0:$$

$$x^2y - x^3 + y - 1 = 0;$$

$$(y-x)^2 + (x - \mathrm{a})^3 = 0;$$

$$xy^2 - x^2 - 1 = 0;$$

$$x^3 + y^3 - 6xy + 1 = 0;$$

$$y^2(x+2) - (x-1)(x^2+1) = 0;$$

$$x^2y + y^3 - 2xy + 1 = 0;$$

$$(3x^2 - 2x + 3)y - x^2 + 1 = 0;$$

$$2x^2y - x^3 + y = 0;$$

$$xy^2 - x - y = 0;$$

$$y(\mathrm{a} - x) - x^2(\mathrm{a} + x) = 0;$$

$$y^2x - x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0;$$

$$(y - 2x - 1)^2(x - 1) - x^3 = 0;$$

$$y(x-1)(x-2) - x^2 = 0;$$

$$y(x-1)^2 - x^3 = 0;$$

$$yx^2 + x^3 - 2 = 0;$$

$$(x+1)(y - 2x + 1)^2 - x + 1 = 0;$$

$$3x^2y - x^3 + y + x = 0;$$

$$(x+y)(x^2 + y^2 + \mathrm{a}x + \mathrm{a}y) - \mathrm{a}xy = 0;$$

$$y^2x - x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0;$$

$$3x^2y - x^3 + 3x - y = 0;$$

$$y(x^2 - 2x) - x^2 - 1 = 0;$$

$$y(x^2 - 2x) - x^3 - 1 = 0;$$

$$y^2 - x^3 + 3x - 2 = 0.$$

$$(y - x - 1)^2(x-1)(x-2) - x^4 = 0;$$

$$y^2 - x^4 + 4x^2 - 5 = 0;$$

$$(\mathrm{a}y - x^2)^2 - \mathrm{c}(x - \mathrm{b})^3 = 0;$$

$$900y^2 - 30x^3 + x^4 = 0;$$

$$y^2 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 = 0;$$

$$(y^2 - x)^2 - x^4 - 1 = 0;$$

$$x^4 - y^4 - x^2 - y^2 = 0;$$

$$x^4 + y^4 - 4\mathrm{a}xy = 0;$$

$$y^3 + x^4 - \mathrm{a}yx^3 = 0;$$

$$y^4 - x^4 + 2\mathrm{a}x^2y = 0;$$

$$(y^2-1)^2-x^4+2ax^2-a=0;$$

$$y^4+x^4-2ay^3-2bx^2y=0;$$

$$(y^2-x^2)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)-2[y^2+x(x-2)]^2\pm a=0;$$

$$y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0;$$

$$8x^2y^2-(x+y)^3=0;$$

$$(x^2+y^2)x^2-4x^2+1=0;$$

$$x^2y^4-2xy^2-x^2+2=0;$$

$$y^4+6x^2y^2-2y^2+x^4+2x^2=0;$$

$$2xy^3-y^2-x=0;$$

$$(x^2-y^2)^2+2xy-1=0;$$

$$xy^3-y^4-x^2-y^2-1=0;$$

$$x^4+y^4-2ay^3-2bx^2y=0.$$

$$(y^2+x^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=0;$$

$$(y^2+x^2)^2-6axy^2-2ax^3+2a^2=0;$$

$$y^4-16x^4+x^2y=0;$$

$$y^4-x^4+(y-2x)xy=0;$$

$$y^4=4p^2x^2+h^4;$$

$$(x^2-y^2)^2-x^2-y^2=0;$$

$$x^2y^3+x^3-y^2=0;$$

$$x^2y^2-x^2+xy-y^2=0;$$

$$(x^2-y^2)^2-x=0;$$

$$x^4-y^2+x=0;$$

$$4x^2y^2-4x^2+1=0;$$

$$y^2(x^2-1)-x=0.$$

$$y^5+4x^5+3x^4y-3a^2x^2y=0;$$

$$x^5+y^5-x^2-y^2=0;$$

$$y=x^5-20x^3+96x;$$

$$x^3(y-x)^2=x^2-2x+2;$$

$$x^3y^2+x^4-y^4=0;$$

$$y^5+4x^5+3x^4y-3a^2x^2y=0.$$

$$(y^2-x)^2(x-1)-x^5=0;$$

$$a^2y^2-2x^2y+x^5=0;$$

$$x^4(x+b)=a^3y^2;$$

$$x^5-ax^2y+y^3=0;$$

$$y^5-x^5+x^2y^2=0;$$

$$x^5+y^4+x^3+y^2+x=0.$$

$$y^3-x^7=0;$$

$$x^4y^4+(x^2-4)(y-x)^4=0;$$

$$y^2(1+x^4)=x;$$

$$y^6-x^6+(y-ax)^2(y-bx)^2=0;$$

$$y^7-x^7+(y-ax)^2(y-bx)^2=0;$$

$$x^2-\frac{1}{x^2}+y^2-\frac{1}{y^2}+2\left(xy-\frac{1}{xy}\right)=0.$$

$$y^{2p+1}x^{2q+1}=0;$$

$$(y^2-x^3)^2-x^4=0;$$

$$y^2(1+x^2)^3=1;$$

$$y^6-x^6+(y-ax)^3(y-bx)=0;$$

$$[y^2(x-2)-x]^2=x^3+2;$$

$$y^8+x^7+y^6=0.$$

$$y = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 \pm \sqrt{x}};\qquad y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x^4}{(x-1)(x-2)}};$$

$$y = \pm\sqrt{x \pm \sqrt{x^4 + 1}}\qquad y^2 = x^2 \pm \sqrt{\frac{x^3}{x+1}};$$

$$y = \sqrt{x \pm \sqrt{\frac{x^5}{x-1}}};\qquad y = \sqrt{x \pm \sqrt{\frac{x^4}{x^2-1}}};$$

$$y = x^3 \pm (x-1)^{\frac{7}{2}}.\qquad y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

Wykreślić i porównać:

$$y^2 - x^3 = 0;\qquad Y^2Z - X^3 = 0;$$

$$x^3 + y^3 + 1 = 0;\qquad X^3 + Y^3 + Z^3 = 0;$$

$$x^3 + y^3 + 3xy = 0;\qquad X^3 + Y^3 + 3XYZ = 0;$$

$$xy^2 + x^2 + y = 0.\qquad X^2Z + Y^2X + Z^2Y = 0$$

Wykreślić krzywe podane przez ich równania styczneczkowe:

$$v^2 - u^3 = 0;\qquad uv^2 - u - v = 0;$$

$$v^3 + u^3 + 1 = 0;\qquad u^5 - v^5 + u^2v^2 = 0;$$

$$v^3 + u^3 + 3uv = 0.\qquad (\mathrm{a} - u)v^2 - u^3 = 0.$$

Krzywe przestępne.

$$y = e^{\frac{1}{x}};\qquad y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

$$y = e^x - e^{-x};\qquad y = x^x;$$

$$y = \frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log(\mathrm{a} - x)};\qquad y = x^{\frac{1}{x}};$$

$$y = x - \mathrm{a}^x;\qquad y = \log\frac{1}{x}:$$

$$y = \mathrm{a}^x - \mathrm{b}^x.\qquad x^2 + y^2 = \mathrm{a}^2 e^{2\,\text{łuk.sty}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

$$y = \text{wst}\,\frac{1}{x}\,; \qquad y = x\,\text{wst}\,x\,;$$

$$y = \frac{x}{\text{wst}\,x}\,; \qquad y = \frac{\text{wst}\,x}{x}\,;$$

$$y = \frac{x}{\text{sty}\,x}\,; \qquad y = \frac{\text{sty}\,x}{x}\,;$$

$$y = x\,\text{wst}\,\frac{1}{x}\,; \qquad y = x\,\text{łuk}\,\text{sty}\,\frac{1}{x}\,;$$

$$y = \frac{\text{l}x}{1 + \text{l}x}\,; \qquad y = \frac{1}{1 + e^{\text{sty}\,x}}\,;$$

$$y^x = x^y\,; \qquad y^2 = x\,\text{wst}^2\,x\,;$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{\text{wst}\,x}{x}\,; \qquad y = x - \text{dos}\,x\,;$$

$$y = x - \text{sty}\,x\,; \qquad \text{wst}\,x + \text{wst}\,y = m\,;$$

$$\text{b} = \text{łuk.}\,\text{sty}\,\frac{y}{x - \text{c}} - \text{łuk}\,\text{sty}\,\frac{y}{x + \text{c}}\,; \qquad \text{a} = \log\sqrt{\frac{(x + \text{c})^2 + y^2}{(x - \text{c})^2 + y^2}}\,;$$

$$y = \text{l}\,.\,x - \frac{1}{3}\,x + 1\,; \qquad y = x - \log x\,;$$

$$y = \frac{1}{\text{a} + e^{\text{sty}\,x}}\,; \qquad y = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}\,;$$

$$\text{wst}\,y = \text{a}\,\text{wst}\,x. \qquad y = \text{wst}\,x - \text{a}^2.$$

N. B. Największa część krzywych, które podajemy do wykreślenia jako ćwiczenie, są wzięte z kwestyj examinów.

II° Twierdzenia.

682. — 1° Jeśli z jakiegokolwiek punktu prowadzi się *sześć* stycznych do jakiejkolwiek krzywej trzeciego rzędu, sześć punktów styczności są na jednej konicznej; a sześć punktów pozostałych w których te styczne spotykają krzywą są na drugiej konicznej. Te dwie koniczne są podwójnie stycznemi.

2° Wszelka krzywa czwartego rzędu, mająca dwa punkta kołowe w nieskończoności za punkta zwrotu, jest owalem *Descartes'a*.

3° Jeśli przez cztery punkta wzięte na krzywej trzeciego rzędu, przeprowadza się jakąkolwiek koniczną; prosta, łącząca dwa inne punkta w których koniczna przecina krzywą, przechodzi przez punkt stały położony na krzywej trzeciego rzędu.

4° Iloczyn z odległości jakiegokolwiek punktu krzywej trzeciego rzędu od jej trzech assymptot jest w stosunku stałym z jej odległością od prostej przechodzącej przez trzy punkta, w których assymptoty spotykają krzywą.

5° Przez punkt wzięty na krzywej trzeciego rzędu i trzeciej klassy, prowadzi się sieczne; miejsce przecięć się stycznych, w punktach w których te sieczne spotykają krzywą, jest jakąkolwiek koniczną.

6° Niech będzie krzywa rzędu m i punkt stały O; jeśli prosta, przechodząca przez punkt stały O, przecina krzywą w A_1, $A_2, \ldots A_m$, miejsce punktów M takich że

$$\frac{1}{\overline{OM}^2} = \frac{1}{\overline{OA_1}^2} + \frac{1}{\overline{OA_2}^2} + \ldots + \frac{1}{\overline{OA_m}^2},$$

jest jakąkolwiek koniczną.

7° Krzywa taka, że długość jakiejkolwiek jej stycznej zawartej między dwiema prostemi prostokątnemi jest stałą, jest epicykloidą której koło ruchome jest wewnętrzne kołu stałemu i której promień jest ćwierć promienia koła stałego; jestto także obwinięcie elips spółśrodkowych których osie mają tenże sam kierunek i dla których summa długości osi jest stałą.

8° Jeśli przez punkt M poprowadzi się trzy proste, i jeśli się weźmie dwa punkta na każdej prostej, będzie można przeprowadzić przez te siedm punktów niezliczone mnóstwo krzywych trzeciego rzędu; jeśli M jest punktem przegięcia dla jednej z nich, on nim będzie dla wszystkich.

9° Jeśli z jakiegokolwiek punktu A, wziętego na krzywej trzeciego rzędu, prowadzi się styczne do tej krzywej; przez cztery punkta styczności a_1, a_2, a_3, a_4, przechodzą trzy pary prostych których środki c_1, c_2, c_3 są na krzywej a styczne w tych trzech punktach przechodzą przez punkt c w którym styczna A spotyka krzywą.

10° Jeśli się rzuca punkt stały A na styczne do krzywej danej, jeśli P jest jeden z tych punktów a M punkt zetknięcia stycznej z krzywą pierwotną; styczna w P do miejsca punktów P będzie również styczną do okręgu zakreślonego na AM jako średnicy.

11° Miejsce punktów takich, że summa kwadratów z długości normalnych poprowadzonych do krzywej danej jest stałą, jest krzywą mającą za normalną w każdym punkcie linią skierowaną do środka średnich odległości od spodków normalnych.

12° Niech będzie $f(x, y) = 0$ równanie jakiejkolwiek krzywej; z jakiegokolwiek punktu $M(x_0, y_0)$, wziętego na płaszczyznie krzywej, zakreśli się jakiekolwiek koło; iloczyn z odległości tego punktu od $2m$ punktów przecięć koła i krzywej jest równym $f(x_0, y_0)$. R^m, R będąc promieniem koła.

13° Jeśli koło jest nakreślone na płaszczyznie jakiejkolwiek krzywej płaskiej, połowa summy kątów jakie czynią, z kierunkiem stałym, $2m$ promieni koła stykających się z punktami przecięć, jest równą, w przybliżeniu na wielokrotność π, summie kątów jakie czynią m assymptot z tymże samym kierunkiem.

14° Obwinięcie krzywej $A \operatorname{dos}^m\theta + B \operatorname{wst}^m\theta = C$, gdzie θ jest parametrem zmiennym, i A, B, C funkcyami linijnemi na x i y, jest

$$A^{\frac{2}{2-m}} + B^{\frac{2}{2-m}} = C^{\frac{2}{2-m}}.$$

15° Jeśli przez cztery punkta stałe położone na krzywej trzeciego rzędu przeprowadza się jakąkolwiek koniczną, linia łącząca dwa inne punkta przecięcia się konicznej z krzywą, przechodzi przez punkt stały.

16° Obwinięcie wszystkich średnic krzywej trzeciego rzędu jest także miejscem środków konicznych srednicowych (to jest pierwszych biegunowych punktów w nieskończoności).

17° Kiedy kilka krzywych rzędu m przechodzi przez też same m^2 punktów, biegunowe jakiegokolwiek punktu względem wszystkich krzywych układu, przechodzą przez punkt stały.

18° Jeśli jakakolwiek linia spotyka owal kartezyański w czterech punktach, summa ich odległości od jakiegokolwiek ogniska jest stałą.

19° Układ kassinoid spółogniskowych jest przęcięty prostokątnie przez układ hyperbol równoramiennych spółśrodkowych, przechodzących przez ogniska wspólne.

20° Równanie $l\rho_1 + m\rho_2 = c$, gdzie l i m są stałe i c parametrem dowolnym, przedstawia szereg owali kartezyańskich mających też same ogniska. Te owale są przecięte prostokątnie przez krzywe $\left(\text{sty}\ \frac{1}{2}\omega_1\right)^l = c'\left(\text{sty}\ \frac{1}{2}\omega_2\right)^m$, c' będąc stałą dowolną; ω_1 i ω_2 oznaczają kąty przy podstawie trójkąta którego bokami są ρ_1 i ρ_2.

21° Znaleźć najmniejszość odległości jakiegokolwiek punktu danego od jakiejkolwiek krzywej, której zna się równanie.

22° Czworobok zupełny będąc wpisany w jakąkolwiek linią płaską trzeciego rzędu. 1) Trzy punkta zbiegu par stycznych wychodzących z wierzchołków względnie przeciwległych tego czworoboku, są położone w linii prostej i na krzywej. 2) Każda z tych par stycznych tworzy przez jej przecięcia się z jedną jakąkolwiek z dwóch innych par, nowy czworobok opisany na krzywej danej, i którego trzy przekątnie zawierają w sobie, bądź to jeden z punktów styczności ostatniej pary stycznych, bądź to ich punkt zbiegu położony na krzywej.

23° Wszystkie średnice krzywej rzędu m, obwijają krzywą rzędu $(m-1)(m-2)$ i klassy $(m-1)$.

24° Wszystkie koniczne ściśle styczne trzeciego rzędu w jakimkolwiek punkcie danym jakiejkolwiek krzywej geometrycznej mają tąż samą średnicę sprzężoną stycznej w tym punkcie, i parametr względny do tej średnicy jest tenże sam.

25° W krzywej trzeciego rzędu, trzy wierzchołki trójkąta assymptot i trzy wierzchołki trójkąta stycznych z trzema punktami przegięcia w linii prostej są na tejże samej konicznej.

26° Miejsce wierzchołków kątów prostych opisanych na jakiejkolwiek krzywej klassy n jest ogólnie krzywą rzędu $(n^2 - n)$.

27° Niech będą F i F′ ogniska elipsy Cassini'ego, C jej środek, i P jakikolwiek punkt krzywej. Normalna w P czyni z FP kąt równy kątowi jakie czyni prosta CP z F′P.

28° Kiedy krzywa trzeciego rzędu jest zarazem wpisaną i opisaną na trójkącie ABC; iloczyn z promieni krzywości odpowiednich wierzchołkom A, B, C, jest równy sześcianowi z promienia koła opisanego na trójkącie ABC (*Mannheim*).

29° Kiedy krzywa trzeciej klassy jest razem wpisaną i opisaną na trójkącie iloczyn z promieni krzywości, odpowiednich trzem wierzchołkom jest równy 64 razy wziętemu sześcianowi z promienia koła opisanego na trójkącie (*Mannheim*).

30. Liczba największa punktów podwójnych krzywej rzędu m jest $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

31. Znaleźć równanie ogólne krzywych takich, aby w każdym punkcie rzut rzędnej na normalną w tym punkcie był ilością stałą. Wykreślić krzywą.

32° Znaleźć równanie ogólne krzywych takich, aby w każdym punkcie rzut rzędnej na styczną w tym punkcie był ilością stałą, Wykreślić krzywą.

KONIEC TOMU PIERWSZEGO.

SPIS RZECZY

TOMU PIERWSZEGO.

ROZDZIAŁ II.

SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE JAKIEGOKOLWIEK PUNKTU.

ROZDZIAŁ III.

PUNKT.

ROZDZIAŁ IV.

SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE JAKIEJKOLWIEK PROSTEJ.

ROZDZIAŁ V.

ZASADY ZMIANY FIGUR.

KSIĘGA DRUGA

KOŁO.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

KOŁO (SPÓŁRZĘDNE KARTEZYAŃSKIE).

ROZDZIAŁ II.

KOŁO (SPÓŁRZĘDNE TRZYLINIJNE).

ROZDZIAŁ III.

RÓWNANIE STYCZNECZKOWE KOŁA.

KSIĘGA TRZECIA

ROZTRZĄSANIE I UPROSZCZENIE RÓWNANIA OGÓLNEGO DRUGIEGO STOPNIA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

KLASSYFIKACYA KRZYWYCH DRUGIEGO RZĘDU.

ROZDZIAŁ II.

KLASSYFIKACYA KRZYWYCH DRUGIEJ KLASSY.

KSIĘGA CZWARTA

WIADOMOŚCI OGÓLNE O KRZYWYCH.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

STYCZNE.

ROZDZIAŁ II.

BIEGUNOWE.

ROZDZIAŁ III.

PUNKTA I STYCZNE WIELOKROTNE.

ROZDZIAŁ IV.

NIEANALITYCZNE (assymptoty); PUNKTA W NIESKOŃCZONOŚCI.

ROZDZIAŁ V.

TEORYA ŚRODKÓW.

ROZDZIAŁ VI.

TEORYA ŚREDNIC.

ROZDZIAŁ VII.

JEDNOKŁADNOŚĆ.

ROZDZIAŁ VIII.

DOWODZENIE NIEKTÓRYCH OGÓLNYCH TWIERDZEŃ O KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH.

ROZDZIAŁ IX.

BADANIA RÓWNAŃ WIELU KRZYWYCH OKREŚLONYCH GEOMETRYCZNIE

KONIEC SPISU RZECZY TOMU PIERWSZEGO.

OMYŁKI DRUKARSKIE

Str.	*Wiersz.*	*Napisano.*	*Powinno być.*
6	2 od dołu	przdstawiać	przedstawiać
8	7 »	fdącymi	idącymi
9	2 »	na dowód tego	W tym celu
10	6 »	tposobem	sposobem
11	5 od góry	tosamościowo	tożsamościowo
12	9 od góry	yf_{1y}	yf'_y
13	4 »	$f'_x, f'_y f'_z$;	f'_x, f'_y, f'_z;
14	16 »	przsgląd	przegląd
17	3 od dołu	równy na x	równy x
18	10 od góry	O_2T_1	z OT_1
19	6 od dołu	nakoiec	nakoniec
20	3 od góry	$BM = \rho$	$BM_1 = \rho$
21	4 »	Kartežyańskiemi	Kartezyańskiemi
21	6 »	związek.	związek :
25	3 »	są	są (III)
25	4 »	y wst β	y' wst β
25	12 »	układo	układu
26	8 »	$(y' + y)$ dos 0	$(y' - y)$ dos 0
26	1 od dołu	$\overline{MM'}$	$\overline{MM'}^2$
27	5 »	$(y' + y)$ dos 0	$(y' - y)$ dos 0
34	10 od góry	*linijne*	*linii*
36	4 »	$- x_1)$ dos 0	$(x - x_1)$ dos 0
36	5 »	$\frac{- x + y - y_1) \text{dos } 0}{\text{s } \alpha}$	$\frac{(x - x_1) + (y - y_1) \text{dos } 0}{\text{dos } \alpha}$
36	6 »	estto *równanie*	jestto *równanie*
36	7 »	Jezeli	Jeżeli
38	2 »	$\frac{}{z}$,	$\frac{x}{z}$,
41	7 »	MP'	MP

Str.	*Wiersz.*		*Napisano.*	*Powinno być.*
42	7 od góry		osobami	sposobami
42	1 od dołu		i	;
42	1 »		krzyw	krzywa
47	7 »		$\frac{M_1M_1}{M_1M_2}$	$\frac{M_1M}{M_1M_2}$
48	7 »		$\frac{M_1P}{M_1P_1}$	$\frac{M_1P}{M_1P_2}$
57	12 »		niezmiennych	nieznanych]
57	15 »		(1) i (2)	(2) i (3)
67	1 »		OM	OM_2
73	8 od góry		$y - y_0 =$	$y - y_0 = -$
83	2 od dołu	(w liczniku)	B_1	B
86	3 od góry		jakiegokolwiek	jakiekolwiek
86	7 »		jakiegokolwiek	jakiekolwiek
107	3 »		$a_2\ b_2\ c_3$	$a_2\ b_2\ c_2$
108	9 od dołu	(w liczniku)	Z'	Z
110	2 »		$= +$	$= + 1$
112	7 od góry		otrzyma i	otrzyma się :
124	1 »		224	124
127	7 »		$+ \frac{m_2}{C_2}(A_1u + \dots$	$+ \frac{m_2}{C_2}(A_2u + \dots$
128	3 od dołu		o tego	do tego
130	7 od góry		$u + a^m v = 0$	$u + a_m v = 0$
130	11 »		*przedstawiają*	*przedstawia*
150	2 od dołu		, a tem samem,	przeto
155	10 od góry		$+ \frac{b_2}{\mu^2} V^2_0$	$+ \frac{b^2}{\mu^2} V^2_0$
159	9 od dołu		$(dV + \dots$	$(dU + \dots$
163	4 od góry		$AB : \frac{U}{U_0} - \frac{V}{V_0}$	$AB : \frac{U}{U_0} - \frac{V}{V_0} = 0$
169	4 od dołu	(w mianowniku)	$\widehat{\text{dos DC}}$	$\widehat{\text{wst DC}}$
170	12 »		protsych.	prostych.
172	5 »	(w mianowniku)	$v_2 - v_2$	$v_1 - v_2$
172	3 »		W	W'
177	2 od góry		$M_0 + CN_0 = 0$	$M_0 - CN_0 = 0$
177	8 od dołu	(w liczniku)	$M_0 - aN_0$	$M_1 - aN_1$
178	5 od góry		$D = M - ,$	$D = M - kN$
179	11 »		równani	równania
179	5 od dołu		$\frac{C_1}{A}$	$\frac{C_1}{A_1}$

Str.	*Wiersz.*		*Napisano.*	*Powinno być.*
186	11 od góry		$\left.\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\vert$	$\left.\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\vert = 0$
193	7 od dołu		ksztatl	kształt
197	6 od góry	(w mianowniku)	$b_1 y_1$	$b_1 v_1$
197	10 od dołu		$a_- z_0$	$a'_2 z_0$
200	4 »		$\frac{1}{AO_n}$	$\frac{1}{OA_n}$
211	8 od góry		$x^2(x_0 + y^2_0)$	$x^2(x^2_0 + y^2_0)$
213	8 »		$-2\beta^2 R^2 y$	$-2\beta R^2 y$
214	9 »		byle tylko można było otrzymać sprowadzonemi do jedności	sprowadziwszy do jedności
216	2 »		$+ m_2 x)^2 +$	$+ m_2 x_2)^2 +$
216	4 »		$+ m_2($	$+ m_2^2($
222	2 »		$+ (c_1 - c)$	$+ (c - c_1)$
222	6 »		$+ (b - b)^r$	$+ (b - b_1)^2$
225	1 od dołu		$x C'_x +$	$x C'_{x_0} +$
228	6 »		$A_1 B$	$A_1 B_1$
229	4 od góry		$+ \frac{y}{\beta}$	$+ \frac{y}{\beta_1}$
236	8 »		*punktam*	*punktami*
240	6 »		$+ c$	$+ c_1$
240	4 od dołu		*Miejscem*	*Miejsce*
241	13 od góry		$+ c$	$+ c_1$
242	7 od dołu		Równanie (7 bis) pokazuje	Równania (7 bis) pokazują
250	13 od góry		$+ (a^2 - R^2) R^2$	$+ (a^2 - R^2) B^2$
252	4 »	(w liczniku)	$R + R_1$	$R + R'$
252	6 »	(w liczniku)	$R - kR'$	$R - kR$
253	3 od góry		$- b_3 R)$	$- b_3 R_2)$
269	5 od dołu		$- P$ wst A	$- P$ wst B
288	4 od góry		$u\varphi'_{u_0} + v\varphi'_{v_0} + w\varphi_{w_0} = 0$	$u\varphi'_{u_1} + v\varphi'_{v_1} + w\varphi'_{w_1} = 0$
291	3 od dołu	(w liczniku)	$\lambda\mu$	$\mu\nu$
291	2 »	(w mianowniku)	$(\lambda X_0 + \mu Y_0 + \nu Z_0)$	$(\lambda X_0 + \mu Y_0 + \nu Z_0)^2$
292	8 od góry	(w liczniku)	Y_0	Y_0^2
295	4 »		*punkta*	*punktu*
297	4 od dołu		$V = 0$	$V = 0$
316	9 od góry		$+ y'$ wst α	$- y'$ wst α
325	12 od dołu		$x'y' +$	$x'y' =$
54	7 od góry	(w mianowniku)	B^2	B
4	9 »		$\left(\frac{M+N}{2}\right)$	$\left(\frac{M+N}{2}\right)^2$

Str.	*Wiersz.*		*Napisano.*	*Powinno być.*
355	4 od góry		$M^2 - N = 1$	$M^2 - N^2 = 1$
373	4 »		(2)	(3)
376	5 od dołu		yf_y	yf'_y
394	15 od góry		$\frac{h_3}{1.2.3}$	$\frac{h^3}{1.2.3}$
413	8 od dołu		$m_2^2(\alpha, \beta, \gamma)$	$m^2{}_2 f(\alpha, \beta, \gamma)$
415	4 od góry		$+ [Xf'x_1 +$	$+ k[Xf'x_1$
415	13 od dołu		$X^2 f'' x_{11}$	$X^2 f'' x_1 x_1$
416	14 od góry		Pzregięcia	Przegięcia
423	2 »		W/w_1	$Wf'w_1$
425	8 od dołu		Y	V
434	9 od dołu		$+ z_0 f_z'$	$+ z_0 f'_{z_0} =$
435	7 od góry		, A_i	, punktu A_i
448	9 »		TRYLINIJNE	TRZYLINIJNE
455	2 od dołu	(w mianowniku)	st $\widehat{DIT_1}$	st $\widehat{DIT_2}$
457	5 »		$\frac{\text{wst } \widehat{OD}}{\text{wst } \widehat{OL}}$	$\frac{\text{wss } \widehat{OID}}{\text{wst } \widehat{OIL}}$
457	1 »			(3 bis)
480	7 od góry		$+ DE^2$	$+ Dt^2$
483	15 od dołu		(x, y)	$(1, t)$
485	9 »		(1)	(1 bis)
492	16 »		$v = \lambda u$	$v = \lambda_0 u$
493	1 »		$_u(u, v) +$	$\varphi_n(u, v) +$
501	9 »			(4)
513	12 od góry	(w mianowniku)	f'_{yx}	f''_{yx}
514	9 »		C_1	G_1
518	5 »		(x)	$\varphi(x)$
521	10 od dołu		W NIESKOŃCZONONOŚCI	W NIESKOŃCZONOŚCI
526	15 »		φ_{m-3}	v_{m-3}
527	18 od góry		$z^2\varphi_{m-1}$	$z^2\varphi_{m-2}$
527	19 »		φ_{m-}	φ_{m-1}
527	5 od dołu		$u_{m-p}l$	u_{m-p}
539	5 »		$\beta =$	$\beta y =$
551	6 »	(w mianowniku)	A	AC
556	1 »		$Uf' + Vf'$	$Uf'_{\lambda} + Vf'_{\mu}$
576	9 od góry		$A'B'$	$A' + C'$
585	2 »		$-\frac{B}{A}$	$-\frac{B}{C}$
585	7 od dołu		Bf'^2_y	$(A \operatorname{dos} \theta - B) f'^2_y$

Str.	*Wiersz.*		*Napisano.*	*Powinno być.*
602	5 od dołu		k	k_1
609	1 od góry		DRUGIEOO	DRUGIEGO
609	11 »		$k^2\mathrm{A}(x - x_0)$	$k^2\mathrm{A}(x - x_0)^0$
609	13 »	(w liczniku)	$\mathrm{F}y_0$	$\mathrm{E}y_0$
609	15 »		$\mathrm{B}y_0$	$\mathrm{E}y_0.$
611	13 »		$\lambda\mathrm{A}, \lambda\mathrm{B}, \lambda\mathrm{C}$	$\lambda\mathrm{A}_1, \lambda\mathrm{B}_1, \lambda\mathrm{C}_1,$
611	16 od dołu		$\mathrm{B}_1 \quad \mathrm{C}_{11}$	$\mathrm{B}_1 \quad \mathrm{C}_1 \quad \mathrm{E}_1$
614	8 od góry		$- =$	$-1 =$
615	9 »		$-2\mathrm{B}\ \mathrm{dos}\,\theta$	$-2\mathrm{B}_1\ \mathrm{dos}\,\theta$
616	6 od dołu		(5) (	(5) $f($
619	7 od góry		φ_{-1}	φ_{m-1}
625	5 od dołu	(w liczniku)	OR	OR_m
654	10 »		$+y$	$+y^2$
660	2 »		$-2c\rho^2\ \mathrm{dos}\ 2\omega$	$-2c^2\rho^2\ \mathrm{dos}\ 2\omega$
660	4 »		$+c\rho^2\ \mathrm{do}\ \omega$	$+c^2 - 2c\rho\ \mathrm{dos}\,\omega$
670	5 »		$= \mathrm{wst}$	$= d\ \mathrm{wst}$
674	7 »		$=(m -$	$y=(m -$
677	7 od góry		$(\lambda + n)$	$(1 + n)$
677	3 od dołu	(w liczniku)	$r\mathrm{R}$	$r0$

KONIEC.

Nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej a przewodniczącego w Towarzystwach Naukowej Pomocy i Nauk Ścisłych w Paryżu, wyszły następujące dzieła matematyczne :

1. **Norzewski Roch.** *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géométrie.* Paris, 1852, in-8°, 60 pages de texte et deux planches lithographiées (wyczerpane).

G.-H. Niewęgłowski, b. profesor analizy w Szkole Wyższéj Polskiéj Montparnasse, examinator matematyki w liceum Świętego Ludwika w Paryżu :

2. — *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych* i t. d. (Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, błędy samoistne i względne; noty dotyczące własności liczb, wiele rozwiązanych zagadnień, ćwiczenia). Paryż, 1866, in-8°, stron 352. Cena 1 tal. 10 sgr.

3. — *Geometrya. Część I Geometrya płaska* (wydanie drugie), w Paryżu, 1868 roku, stron 436 in-8°, figury w tekscie. Cena 1 tal. 10 sgr.

4. — *Geometrya. Część I i II*, kurs zupełny, drugie wydanie zupełnie przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometryi nowoczesnej (pierwsze wydanie z 1852 roku). Paryż, 1868, in-8° stron VIII i 778. Cena 2 tal. 20 sgr.

5. — *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami.* Paryż, 1870 roku, in-8° stron XV i 407. Cena 1 tal. 15 sgr.

6. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami* wyłożył W. Folkierski, inżynier cywilny, b. uczeń szkoły politechnicznej w Karlsruhe, licencyat nauk matematycznych P. F. Sorbony, profesor Mechaniki w szkole Wyższej przygotowawczej w Paryżu, tom I zawierający *Rachunek różniczkowy* oraz dodatek Władysława Trzaski o *Wyznacznikach.* Paryż, 1870, in-8° stron XLIII i 1087, figur w tekscie 136. Cena 3 tal. 10 sgr.

7. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom I. Główne artykuły przez pp. Franke, Gosiewskiego, Sągajłę, Trzaskę, Żmurkę. Paryż, 1871, in 4° stron 186, figur 5. Cena 2 talary.

8. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom II. Artykuły pp. Gosiewskiego, Kucharzewskiego Sągajły, Trzaski i Zalińskiego. Paryż, 1872, in-4° stron 245, figur 8. Cena 2 talary. (Obydwa tomy razem oprawne 3 tal. 22 sgr. 6 fen).

9. *Wykład Hydrauliki wraz z teoryą machin wodnych*, poprzedzony wiadomościami wstępnemi z Hydrostatyki i Hydrodynamiki, przez pp. Feliksa Kucharzewskiego i Władysława Klugera (inżynierów dyplomowanych szkoły Dróg i Mostów w Paryżu). Paryż, 1873, in-8° stron LVI i 1018. Figur w tekscie 110, oprawa angielska. Cena 20 franków.

10. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, przez Władysława Folkierskiego, stałego Sekretarza i Wice-prezesa Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, tom II *Rachunek Całkowy.* Część pierwsza : *całkowanie różniczek* i t. d. Paryż, 1873, in-4° stron XVI i 752, figur 76, oprawa angielska. Cena 12 franków.

11. *Wykład Mechaniki cząsteczkowej (molekularnej)*, przez Władysława Gosiewskiego, prof. Fizyki matematycznej. Tomu 1go części różniczkowej zeszyt pierwszy. Paryż, 1873, in-8°, stron 176. Cena fr. 4

12. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom III, zawierający wypracowania pp. W. Folkierskiego, Klugera, Kucharzewskiego, Dolińskiego, Gosiewskiego i Martynowskiego. Paryż, 1873, stron VIII i 354, figur 96. Cena fr. 12.

13. *Mechanika rozumowa*, przez G.-H. Niewęgłowskiego, dwa tomy. Tom I, *Statyka i Dynamika punktu*. Paryż, in-8° stron 544, z figurami; cena fr. 10.

14. *Wykład zupełny Algebry* przez Adolfa Sągajłę, w czterech tomach. Tom pierwszy : *Początki Algebry*. Paryż, 1873, in-8° stron 632, z figurami. Cena 5 fr. 50 cent.

15. *Bibliografia pismiennictwa polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań*, przez Dra Teofila Żebrawskiego, członka Akademii Krakowskiej. Kraków, 1873, in-8° stron 617, z 4 tablicami. Cena 3 talary.

16. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych*, tom IV, zawierający wypracowania pp. A. Martynowskiego, K. Brandta, J.-N. Frankego, W. Klugera, W. Puchewicza, S. Baranowskiego i Cayley'a (tłomaczenie z angielskiego). Paryż, 1874, in-4° czterdzieści dwa arkusze druku, figur w tekscie 100. Cena 12 franków.

17. *Wykład zupełny Algebry* przez Adolfa Sągajłę w czterech tomach. Tom II : *Teorya wyznaczników i ich przedniejsze zastosowania*. Paryż, 1874, in-8°, stron 400. Cena 5 fr. 50 cent.

18. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych*, tom V, zawierający prace pp. K. Maszkowskiego, Wł. Gosiewskiego, Ł. Wojciechowskiego, J. Rostafińskiego i S. Baranowskiego. Paryż, 1874, in-4° czterdzieści cztery arkusze druku, figur w tekscie 24, tablic 20. Cena fr. 16.

19. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VI zawierający prace pp. J. Rostafińskiego, A. Martynowskiego, S. Elzanowskiego, W. Zajączkowskiego i M. Girdwoynia. Paryż, 1875, in-4° czterdzieści cztery arkusze druku, figur w tekscie 10, tablic litografowanych 12, stalorytów 8. Cena franków 20.

20. G. H. Niewęgłowski. *Mechanika Rozumowa*, tom II, *Dynamika układów materyalnych, Hydrostatyka i Hydrodynamika*. Paryż, 1876, in-8° stron 885, z figurami w tekscie. Cena 15 fr.

21. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VII zawierający prace pp. Wł. Gosiewskiego, K. Brandta, K. Hertza i S. Dicksteina, A. Sękowskiego, M.-A. Baranieckiego, B. Rejchmana, M.-A. Baranieckiego i A. Sągajły. Paryż, 1875, in-4° czterdzieści arkuszy druku, figury w tekscie (drzeworytów) 56, miedziorytów typograficznych (sur cuivre en relief) 2; tablic : miedzioryt 1, stalorytów 4, fotodruk 1. Cena franków 20.

22. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryzu*, tom VIII zawierający prace pp. M.-A. Baranieckiego, Wł. Gosiewskiego, M. Hulewicza, Z. Laskowskiego, J. Rostafińskiego, A. Sągajły, A. Transon (tłomaczenie z francuzkiego), M.-A. Baranieckiego. In-4°, Paryż, 1876, trzydzieści arkuszy druku, figur w tekscie 18, tablica jedna litografowana. Cena franków 20.

23. Wł. Kluger : *Wykład wytrzymałości materyałów*. Paryż, 1871, in-8° stron 595 z figurami w tekscie. Cena 15 fr.

24. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu,* tom IX zawierający prace pp. M. Girdwoynia, Ł. Wojciechowskiego, Wł. Gosiewskiego, S. Dicksteina i Gosiewskiego, M. Szystowskiego, K. Brandta i J. Śniechowskiego. Paryż, 1877, in-4° pięćdziesiąt arkuszy druku, drzeworytów 75, tablic litografowanych 11, miedziorytów 2. Cena 20 franków.

25. *Wykład nauki o równaniach różniczkowych* przez Wł. Zajączkowskiego, doktora filozofii, profesora Matematyki w Akademii Technicznej Lwowskiej, in-8° stron XIV i 918. Cena franków 25.

26. *Zasady geometryi analitycznej* przez A. Sągajłę, tom I, in-4°. Paryż, 1877, stron 699 z figurami w tekscie. Cena 25 franków (*).

ZNAJDUJĄ SIĘ OBECNIE W DRUKU :

27. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu,* tom X, in-4°.

28. **G.-H. Niewęgłowski**, *Algebra,* in-8°.

(*) Dalszy ciąg tego dzieła zostaje przerwanym przez śmierć autora, który z trzech tomów, jakie napisać zakładał sobie, zaledwie pierwszy zdołał wygotować. Zarząd Biblioteki Kórnickiej puszcza go w obieg w nadziei, że książka ta nie będzie bez pożytku dla polskiej publiczności i utrwali pamięć szanownego jej autora, który do ostatniego tchnienia pracował dla nauki.

PARIS. — IMPRIMERIE DE E. MARTINET, RUE MIGNON, 2