RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO
TEORYA
Przyſtóſowaná do linii krzywych

Przez
Iana Sniadeckiego w Szkole Główney Koronney
Matematyki wyżſzey i Aſtronomii Profeſsora,
teyże Szkoły Sekretarza.

TOM I.

Zawieraiący Algebrę *na dwie części podzieloną.*

Cena dwóch Tomów - - Zł. 12.

Znayduie ſię do przedania { w Krakowie w Drukarni Szkoły Główney Koronney.
{ w Warſzawie u II. XX. Piiarów.

K.W. Warczewskiego

W KRAKOWIE
w Drukarni Szkoły Głowney Koronney. Roku 1783.

I. 2. 13938

D.1621

Museum Frid. Gothan

m m 194

pauc

RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO
TEORYA
PRZYSTOSOWANA DO GEOMETRYI LINII KRZYWYCH

Przez

J. P. SNIADECKIEGO

w Szkole Główney Koronney Matematyki wyżſzey i Astronomii Profeſsora, teyże Szkoły Sekretarza.

TOM PIERWSZY.

ZAWIERAIĄCY ALGEBRĘ NA DWIE CZĘSCI
PODZIELONĄ.

w Krakowie w Drukarni Szkoły Główney 1783.

CZĘSC PIERWSZA

WYKŁADA SIĘ NATURA i WŁASNOSCI FUNKCYI ORAZ ZROWNAN ALGEBRAICZNYCH, DZIAŁANIA W ODMIANACH FUNKCYI, i SPOSOBY w ROZWIĘZYWANIU ZROWNAN ZACHODZACE.

BIBLIOTEKA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Pierwſze myślenia początki (*a*) ſtósowane do poznawania natury ilości, prowadzą rozum do odkrycia tych wſzyſtkich prawideł, które w działaniach FUNKCYI iakichkolwiek i w ſposobach rozwiązania ZRÓWNAN PIERWSZEGO STOPNIA, zachodzą.

§. I.

Pierwſze początki myślenia któremi ludzie przychodzą do wynalazków.

Ktokolwiek przeſtawſzy choć na moment bydź Uczniem ludzi, ſtał ſię uczniem doświadczenia, ieżeli był kiedy ſzczęśliwym choć naypotocznieyſzą prawdę ſam przez ſię wprzód odkryć, niżeli ią od kogo ſłyſzał, wróciwſzy ſię uwagą na drogę ſwego wynalazku doſtrzegł zapewne; że iego prawdę poprzedzić muſiała w umyśle iaſna przytomność rzeczy iemu przedtem dobrze znanych, do których potem przypadek iaki lub reflexyą zbliżywſzy obrazy inne albo obłąkane w iego pamięci, albo przywiązane do innych iakich myśli, dały mu ie zrównać z wiadomemi i przytomnemi na ten czás; w tem porównaniu pokazał mu ſię nowy zwiazek między iego myślami, z którego powſtała prawda świeżo przez niego odkryta. Przyſzedł więc od rzeczy znanych do nieznanych przez porównanie obrazów iakim przypadkiem lub reflexyą do ſiebie zbliżonych. Wſzyſtkie wynalazki począwſzy od náygrubſzych ſztuk i rękodzieł aż do naywyżſzych umieiętności ten ſam miały początek. Umyſł naſz przywiązany do zmyſłów, nie miał w pierwiaſtkach ſwego poznawania iak tylko ſkład obrazów ſzczególnych, których przez czucie

---

(*a*) Rozumiém przez to słowo POCZĄTEK práwdę pewną i oczywiſtą będącą gruntem wielu innych práwd: i w tém znaczeniu używać będę tego słowa w całem tem dziele.

nabył: te obrazy ſzczególne ścieśniały niezmiernie póty iego widok, póki przypadek lub reflexya nie odkryły mu związku między pewnemi myślami. Ten związek roſſzerzył iego poymowanie dla tego, że ie uczynił powſzechnieyſzem. Odebrawſzy niezliczoną liczbę poruſzeń wyciſkaiących w iego pamięci tyle obrazów rzeczy, przebiegłſzy z niemi niezmierzoną krainę błędu i prawdy, zrównáwſzy ſzczęśliwie wiele w ſobie myśli, odkrył więcey ogólnieyſzych związków, które mu łatwo dały uczuć większą doſkonałość iego działań, bo mu wyiawiły pewne prawidła ogarniaiące wiele przypadków przedtem w pamięci iego ſamotnych i nieużytych. Te prawidła prowadziły go do innych; między któremi znowu pokazał ſię łańcuch wiążący paſmo prawd ogólnych, z których umieiętności powſtały: doſkonaliły ſię potem tem bardziey i roſſzerzały granice rozumowi, im do dalſzey ogólności wynieſionemi zoſtały, z których dopiero wynikło użycie dla towarzyſtwa iako ſkutek znowu doſtrzeżonego związku między prawdą i pożytkiem. Ten ieſt prawdziwy poſtępek ludzkiego rozumu ſtwarzaiącego tyle Nauk, które będą zawſze świadkami iego dzielności, a zaſzczytem i roſkoſzą towarzyſtwa. Takowych my dróg ſtatecznie ſię trzymaiąc, poſtawiemy ſię w ſtanie pierwſzych Nauki naſzey wynalazców, i odkrywać ſami przez ſię będziemy te wſzyſtkie prawdy które ona zamyka. Wyćwiczeni dobrze w Arytmetycznych początkach i działaniach weźmy ſobie do rozwiązania takowe Pytanie:

Trzech Kupców wſzedłſzy w towarzyſtwo handlu złożyli pewną ſummę kapitału. Pierwſzy z nich dał n.p. 20.000. drugi 18.000. á trzeci 12.000. złotych Polſkich. Zyſkali w pewnym przeciągu czaſu 90.000 złot: wieleż zyſku każdemu z nich przypadá?

Każdy za pomocą Arytmetyki tak ſobie to pytanie rozwiąże. Ponieważ zyſk przypadaiący na każdego Kupca bydź powinien proporcyonalny iego ſummie zakładowey, będzie ſię miał do teyże ſummy, iako ſię

ma

má maſsa cała zyſku do całey maſſy kapitału. Za pomocą takowey proporcyi znaydziemy, że na pierwſzego przypada zyſku 36.000, na drugiego 32.400, na trzeciego 21.600 złot: Pol: Te oſtatnie wypadki działań Arytmetycznych zacieraią nam wſzyſtkie ślady kombinacyi, przez ktoreśmy do nich przyſzli, dla tego, że ſą wyrażone przez znaki ſzczególne, iakiemi ſą liczby. *Liczba* bowiem będąc wyrażeniem związku między pewną wielkością, i iednością wziętą za miarę, nie tylko ſię odmienia z odmianą związku, a przeto gubi ślad naſzego rozumowania, ale nawet rodzić ſię każdá może z nieſkończonych odmian i ſpoſobów ſtóſowania wielkości. Skąd pochodzi, że ſpuściwſzy z myśli tę rozumowania które nas do wypadków oſtatnich przywiodły, gubiemy razem wiadomość odmian iſtotnie przywiązanych do naſzego pytania. Chcąc ie więc tak rozwiązać, żeby oſtatni wypadek rachunku ſtawiał przed oczy wſzyſtkie kombinacye, przez które do niego przechodzić należy, potrzeba na to znaków ogólnieyſzych nad liczby.

Uwagi pokazuiące konieczną potrzebę wprowadzenia w rachunek znaków ogólnieyſzych nad liczby.

Gdybyśmy wprowadzili warunki iakie n.p. że oſtatni z tych Kupców uchybiwſzy należytey troſkliwości w pewnym zabiegu, podług umowy powinien utracić dwudzieſtą część zyſku na niego ſpadaiącego: powtóre, że ſummy zakładowe były oddane w różnych czaſach, tak że pierwſzego n.p. zakład trwał dziewięć Mieſięcy, drugiego rok, a trzeciego Mieſięcy 15: te kondycye zawiklą znacznie pytanie pierwſze, którego rozwiązanie potrzebować będzie daleko głębſzych i trudnieyſzych kombinacyi. I tak chcąc nową iaką kondycyą przydadź lub dawną którą zniſzczyć, przymuſzeni ieſteśmy za każdym razem zaczynać naſze dociekania. Ta nieprzyzwoitość ſkutkiem ieſt także znaków ſzczególnych, które odmieniaiąc ſię zawſze, nie dadzą nam rozeznać w oſtatnim wypadku tego, co wciągnął ten lub ów warunek, a przeto co za zniſzczeniem go powinno wypaśdź. Chcąc więc doyśdź do takowego rozwiązania, któreby ogarnąwſzy wſzyſtkie okoliczności w pytaniu, mogło za umorzeniem iakiego warunku odkryć nám natychmiáſt odpowiedź przyzwoitą, i oſzczędzić pracy rospoczynania naſzych kombinacyi; potrzeba nám także wprowadzić w działania znaki ogólnieyſze nad te których Arytmetyka używa. Dwie te nieprzyzwoitości przywiązane do liczb, ktoreśmy dopiero ſpoſtrzegli, pokazały ſię zapewne pierwſzym Nauki naſzey wynalazcom i wciągły ich równie iako nas w potrzebę użycia znaków ogólnieyſzych do wyrażenia myśli i rozwiązania iakiegokolwiek zadania. Takiemi znakami ogólnieyſzemi ſą litery Alfabetu łacinſkie a, b, c, d, e, i t. d. albo greckie α, β, γ, δ, ε, i t. d. znaczyć mogące iakąkolwiek wielkośc, n. p. przez a, możemy naznaczyć zakład pierwſzego Kupca, przez b zakład drugiego, zakład trzeciego przez c, maſſę całą zyſku wyrażać może e. Oprócz tego czaſy przez które trwały zakłady trzech Kupców naznaczyć możemy przez litery t, t', t''. Ze zaś w każdem pytaniu dwoiakiego ſą rodzaiu ilości, znane i nieznane; iako pierwſze znaczyliśmy przez początkowe litery Alfabetu, tak oſtatnie zgodzemy ſię wyrażać przez litery oſtatnie x, y, z, i t.d. W naſzem pytaniu ilością niewiadomą, którey ſzukamy ieſt część zyſku ſpadaiąca na pierwſzego Kupca, nazwiemy ią więc x. Niżeli przyſtąpiemy do nazywania innych rzeczy niewiadomych, rostrząſnąć nam wprzód należy, czyli te niezawiſły od pierwſzey nieznaney rzeczy x, tak że za odkryciem tey, pokażą nám ſię wartości tamtych. Iakóż w naſzem zadaniu łatwo ſię przekonać, że maiąc część zyſku przypadaiącą na pierwſzego Kupca, będzie nám łatwo odkryć części należące ſię dwom oſtatnim, które ſą proporcyonalne ſummom zakładowym i czaſom. Przez tę uwagę tyle korzyſtamy, że rzeczy nieznane w pytaniu przywodzemy do iak naymnieyſzey liczby, i ułatwiamy niezmiernie naſze dociekania.

Przeſtroga w znaczeniu iloſci.

ciekania. Bez tey przeſtrogi gdybyśmy n. p. byli przez y, z, naznaczyli porcye dwóch oſtatnich Kupców, zawikłalibyśmy byli przez tę niezręczność naſze badania, wciągnąwſzy bez potrzeby trzy nieznane ilości x, y, z, a przez to z iednego pytania, zrobilibyśmy ich byli trzy. Ta nieprzyzwoitość da nam ſię uczuć niżey.

§. II.

Spoſoby roſtawione rozumowi ludzkiemu dochodzenia rzeczy nieznanych.

Odkrywſzy ogólne znaki na cechowanie ilości, zatrzymaymy ſię uwagą nad pytaniem podanem. Mamy w niem rzeczy znane i nieznane; potrzeba nam więc z pierwſzych przyiśdź do oſtatnich. Ale iakąż drogą? oto tą ſamą, którą idziemy we wſzyſtkich myślach i poznawaniach naſzych iakichkolwiek, to ieſt: przez związki które zachodzą między rzeczami znanémi i nieznanemi; te bowiem związki raz doſtrzeżone uczą nas, że rzeczy nieznane nic innego nie ſą tylko rzeczy znane zawarte w pytaniu, pewnym ſpoſobem do ſiebie zbliżone i ułożone. Doſtrzegłſzy więc związku, cała ſztuka wynalazku zależy na tem zbliżeniu rzeczy znanych do ſiebie. Upatruymy naſamprzód tego związku w naſzem pytaniu równaiąc wſzyſtkie w niem zawarte okoliczności. Zebrawſzy razem wſzyſtkie kondycye, Pytanie naſze tak ſię ogólniey wykłada:

,, Trzech Kupców złożyli pewny kapitał w czaſie
,, różnym. Pierwſzy dał ſummę a na czas t, drugi
,, ſummę b na czas t', trzeci ſummę c na czas t''.
,, Ten oſtatni uczynił niedbalſtwem pewny zawód,
,, dla którego tracić musi podług kontraktu *zoſtą* część
,, przypadaiącego zyſku. Zyſkali ſummę e, cóż ſię ka-
,, żdemu należy za porcyą odpowiadaiącą zakładowi,
,, przeciągowi czaſu i warunkom w umowie zawar-
,, tym ,, ?

Pierwſzy związek wypadaiący z porównania wſzyſtkich kondycyi pokazuie ſię ten: że wſzyſtkie trzy rozdziały zyſku, dodane ſobie, wyczerpać powinny całą maſsę zyſku e; a zatem ſumma trzech zyſków ieſt równa maſsie e. Pamiętaiąc o tym związku doſtrzeżo-

Znaki Mnożenia, Dzielenia.

nym w pytaniu, pracuymy teraz nad wyrażeniem go przez znaki ogólne. Potrzeba nam naſamprzód wyrazić porcya każdego z oſobna Kupca, dodadź ie razem, i zrównać potem z e. Aże dwóch oſtatnich porcye zawiſły od porcyi pierwſzego nazwaney x, trzeba nam ie więc także wyrazić przez x ſtóſowane z zakładem i czaſem każdego. Do tego wynalazku doydziemy przez proporcya, w którey maiąc trzy terminy, wynayduiemy w Arytmetyce czwarty, mnożąc drugi przez trzeci i dzieląc tę mnogość przez pierwſzy. Ale działaiąc przez litery iakże ten czwarty termin wyrażemy? Oto przez inne znaki, któremi cechować będziemy zachodzące działania: i tak mnożenie liter znaczyć będziemy przez kropkę (.) lub krzyż leżący (×) położony między literami wchodzącemi do mnożenia n. p. $x.b$, albo $x \times b$ znaczyć będzie x rozmnożone przez b. Nawet litery przy ſobie tuż położone bez żadnego znaku wyrażać będą mnożenie iedney przez drugą, iako to xb. Dzielenie zaś ilości wyrażać będziemy albo dwiema kropkami (:) położonemi między ilością podzielną i dzielącą, albo przez ułomek, którego licznik znaczyć będzie ilość podzielną, mianownik zaś ilość dzielącą, n. p. $xb:a$ albo $\frac{xb}{a}$ znaczy mnogość xb rozdzieloną przez a.

Maiąc iuż znaki na cechowanie działań, a chcąc doyśdź podziałów przypadaiących na każdego w ſzczególności Kupca, ſtóſóymy naſamprzód ſame ſummy nie maiąc żadnego względu na czaſy. Ieżeli podział pierwſzego ieſt x odpowiadaiący zakładowi a; podział drugiego odpowiadaiący ſummie b wypada s takowey proporcyi.

Na drugiego - $a : x :: b : \frac{xb}{a}$

Na trzeciego - $a : x :: c : \frac{xc}{a}$

Trzy więc porcye zyſku x, $\frac{xb}{a}$, $\frac{xc}{a}$, dopiero wynalezione należą do tegóż ſamego czaſu, który biorę za miarę porównywania czyli za iedność; iakież wypadną zyſki na czaſy różne naznaczone przez $t, t,' t,''$? Ponieważ zyſki odpowiadaiące pewnym zakładom, tak ſię maią iak czaſy, pytanie naſze rozwiążą naſtępuiące proporcye:

Na pierwſzego Kupca - $1 : x .: t : xt.$

Na drugiego - - - $1 : \frac{xb}{a} :: t' : \frac{xbt'}{a}$

Na trzeciego - - - $1 : \frac{xc}{a} :: t'' : \frac{xct''}{a}$

Oſtatnie terminy tych proporcyi xt, $\frac{xbt'}{a}$, $\frac{xct''}{a}$ wyrażaią trzy porcye zyſku należyte każdego ſummie i czaſowi, przez który trwał zakład. Nie zoſtaie nam tylko wyrazić przez znaki ten związek w pytaniu doſtrzeżony, ktoryśmy na początku tego § wyłożyli w ſłowach. Potrzeba nam więc znaku, któryby wyraził dodanie trzech podziałów xt, $\frac{xbt'}{a}$, $\frac{xct''}{a}$ takowym znakiem, będzie krzyż proſty ſtoiący (+) położony między terminami, które chcemy dodawać. Wymawia ſię ten znak u łacinników *plus* (*więcey*,) my go zaś wymawiać będziemy przez z, i tak $xt + \frac{xbt'}{a}$ czyta ſię ilość xt z ilością $\frac{xbt'}{a}$. A że oſtatni Kupiec tracić ma dwudzieſtą część ſwoiego podziału, dla pewnego zawodu; więc ta ſtrata wyraża ſię $\frac{xct''}{20a}$ którą należy odciągnąć od $\frac{xct''}{a}$ wezwiemy przeto za znak odciągania liniykę położoną w dłuż między ilościami (—) która ſię czyta u łacinników *minus* (*mniey*), my

Znaki Dodawania, odciągania i równości.

zaś wymawiać ią będziemy *bez*, i tak $\frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a}$ czyta ſię $\frac{xct''}{a}$ bez $\frac{xct''}{20a}$. Na koniec do wyrażenia równości zachodzącey w związkach iakiegokolwiek Pytania użyiemy dwóch linii równo-ległych, (=) które czytać będziemy *równe*. Przeto związek zachodzący między rzeczami znanemi i nieznanemi doſtrzeżony w naſzem pytaniu, to ieſt: *że Summa trzech zyſków ſzczególnych równa ieſt maſsie całey zyſku e*; tak ſię w znakach ogólnych wyraża:

$$xt + \frac{xbt'}{a} + \frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a} = e.$$

Opis Zrównania Funkcyi, i ich różnicy.

Takowe wyrażenie związku doſtrzeżonego między ilościami iakiemikolwiek wchodzącemi w pytanie nazywa ſię ZRÓWNANIEM *(Aequatio)* w którem terminy na lewey ſtronie znaku równości położone ſkładaią PIERWSZY CZŁONEK ZRÓWNANIA, terminy zaś leżące po prawey ſtronie znaku, czynią ZRÓWNANIA CZŁONEK DRUGI. Gdybyśmy zaś oderwali uwagę od związku, który ſię wyraża w Zrównaniu, i wziąwſzy ſam pierwſzy albo obydwa razem Zrównania członki bez znaku równości, mielibyśmy tylko zbiór terminów zamykaiących ilości znane i nieznane różnie pomięſzane z ſobą i złączone znakami rożnemi n. p. $xt + \frac{xbt'}{a} + \frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a}$ takowy wyraz nazywa ſię FUNKCYĄ *(Functio)*, gdzie przywiązawſzy ſzczególnie baczność na ilość nieznaną x, wyraz dopiero wyłożony zowie ſię Funkcyą x. S tego opiſania pokazuie ſię zaraz różnica między Funkcyą i Zrównaniem. *Funkcya* bowiem ieſt tylko proſtem wyrażeniem terminów zamykaiących rożne ilości iakimkolwiek ſpoſobem z ſobą zmięſzane bez żadnego między niemi związku. *Zrównanie* zaś wyraża koniecznie albo związek dwóch Funkcyi, albo związek

ilości

iłości w iedney Funkcyi zawartych. Każde zadanie przed odkryciem związku między iego kondycyami będąc zbiorem myśli rozerwanych, ieſt tem co my nazywamy w ilościach Funkcyą, tak iako każdy rosſądek i zdanie wypadaiące z związku doſtrzeżonego między myślami to ſamo znaczy, co u nas Zrównanie. Pytanie któreśmy do roztrząśnienia przedſięwzięli uczy nas, że do Zrównania przychodzemy przez pewne ſtóſunki myśli, te ſtóſunki ciągną za ſobą rożne odmiany w ilościach, do wyrażenia tych odmian ſłużą nam rożne działania, na któreśmy natrafili w naſzych kombinacyach. Trafiliśmy zaś na te ſame które zachodzą w Arytmetyce, to ieſt na Dodawanie, Odciąganie, Mnożenie i Dzielenie ilości. Iakóż ilość ogólnieyſzemi naznaczona cechami nie traci natury ilości zależącey na możności powiękſzania ſię lub zmnieyſzania. Wſzyſtkie iey odmiany kończą ſię na tych dwóch ſtanach, które ſą ſkładem różnych ſtóſunków i związków. Zaſtanówmy ſię nad iakąkolwiek w nas myślą, znaydziemy w niey tyle odmian, ile mieć może ſytuacyi obiekt którego ona ieſt obrazem. Wſzyſtkie te odmiany wypadaią z pewnych ſtóſunków tey myśli, i potrzebuią ſwego ięzyka. To co ſię dzieie z każdą myślą, dziać ſię muſi z uwagą ilości: i działania Arytmetyczne ſą tem, czem ſą w każdey myśli rożne iey odmiany i wyrazy do tych odmian przywiązane. Są to więc ſpoſoby znaczenia wzroſtu lub ubywania ilości, które też ſame ſą w literach co i w liczbach, uczyniwſzy pewne rożnice, które będąc ſkutkiem większey ogólności iuż nam ſię pokazały i pokażą ieſzcze niżey.

§. III.

Tłómaczy ſię użycie znaku Dodatnego, i Odiemnego.

Użyliśmy na oznaczenie Dodawania i odciągania dwóch znaków (+,—), z których pierwſzy czyni ilości Dodatnemi (*Quantitates Poſitivae*) a drugi Odiemnemi (*Quantitates negativae*)· te atoli znaki daleko maią rozlegleyſze użycie. Uważaiąc ilości ſame przez ſię, to ieſt iako mogące tylko wzraſtać lub ubywać, litery Alfabetu wyſtarczaią nam na wyrażenie naſzych myśli; ale zważaiąc też ilości iedne w porównaniu drugich, wpadamy uwagą na różne ſtany i ſpoſoby ieſteſtwa, w których iedna ilość zoſtaie względem drugiey. Takowe ſtany wyrażamy znakami położonemi przed literami. I tak dwa dopiero wymienione znaki (+ —) nie tylko nam ſłużą na cechowanie Dodawania i Odciągania, ale nawet na znaczenie dwóch ſtanów iakichkolwiek między ſobą przeciwnych iako to wzroſtu i ubywania, maiątku i długu, dwóch biegów lub położeń opacznych i t. d. W naſzem pytaniu naznaczyliśmy znakiem dodatnym porcye, które każdy Kupiec brać powinien z maſſy zyſku; ſtratę zaś która za uchybioną troſkliwość ponieść przypadło trzeciemu, nacechowaliśmy znakiem odiemnym. Skąd ſię pokazuie, że ilości odiemné maią ſwoie ieſteſtwo tak rzetelné i prawdziwé iak i ilości dodatné, tylko że w ſpoſobie między ſobą przeciwnym. A przeto wyobrażenie ilości odiemnych nie zawiſło od tak dzikich i obłąkanych tłómaczeń, któremi niektórzy Autorowie uczących ſię bałamucą. Ieżeli to ieſt prawo dla ludzkiego rozumu, że we wſzyſtkich poznawaniach nie może przeniknąć do prawdy tylko drogą porównywania, rostrząſaiąc naturę ilości wpada w konieczną potrzebę uważania ich iedne względem drugich, a przeto znaki na wyrażenie tych względów i ſtanów ſą mu nieprzerwanie potrzebné. We wſzyſtkich więc działaniach, na któreśmy w Pytaniu natrafili nie powinniśmy rozłączać uwagi nad naturą ogólną ilości od uwagi ich ſtanów, w których ſię iedne względem drugich znayduią; bo każde iakiegokolwiek rodzaiu pytanie wciąga nas koniecznie razem w obydwie te uwagi.

Opiſuie ſię Dodáwanie i Odciąganie Algebraiczne skąd wyciągaią ſię prawidła na te działania.

S tey Metafizyki wypadaią różne początki działań. I tak dwie albo więcey funkcyi złożonych z różnego ſtanu ilości mogą ſię łączyć z ſobą zoſtawiwſzy wſzyſtkie ilości przy tym ſamym ſtanie, w którym ſię przed tem złączeniem znaydowały, to ieſt: zoſtawiwſzy ie przy tych ſamych znakach, i takowe Działanie

nie zowie ſię *Dodáwaniém Algebraicznem.* Chcąc dodadź funkcyą $a+bf—c$ do funkcyi $de+bf—g$ znaczemy to działanie tak: $(a+bf—c)+(de+bf—g)$, a chcąc ie wykonać, nie potrzeba do tego tylko napiſać ie razem z ſwémi znakami przy ſobie, a ſumma będzie $a+bf—c+de+bf—g$; ilość bowiem na początku iakiey funkcyi napiſana bez znaku, zawſze ieſt dodatną, i tak de iedno znaczy co $+de$, a iedno ieſt co $+a$. Z umowy bowiem znak dodatny na początku nigdy ſię nie zwykł piſać. Takim ſpoſobem złączyliśmy trzy porcye zyſku xt, $\frac{xbt,'}{a}$; $\frac{xct''}{a}$ położywſzy ie przy ſobie z témi ſamémi znakami $xt+\frac{xbt'}{a}+\frac{xct''}{a}—\frac{xct''}{zoa}$ wſzyſtkie te porcye maią znaki odpowiadaiące pewnym względom, w których ſię iedne w porównaniu drugich znayduią.

Powtóre Funkcyá iaká łączyć ſię może z drugą odmieniaiąc we wſzyſtkich ilościach ſtan ich na ſtan przeciwny, to ieſt: odmieniaiąc wſzyſtkie znaki na przeciwne, takowe Działanie, zowie ſię *Odciąganiém Algebraicznem.* Chcąc więc odciągnąć funkcyą $ax+by+e—cd—b$ od funkcyi $ax+by+cg+fm—e+cd+b$ znaczémy to działanie tym ſpoſobem $(ax+by+cg+fm—e+cd+b)—(ax+by+e—cd—b)$, a chcąc ie wykonać, należy w Funkcyi którą odciągamy odmienić wſzyſtkie znaki na przeciwne, to ieſt + na —; — na +; a dopiero w tak odmienionych znakach złączyć ią z funkcyą tą od którey ią odciągamy; wykonywaiąc to w naſzym przykładzie, wypada $ax+by+cg+fm—e+cd+b—ax—by—e+cd+b$. Rozważywſzy dobrze te dwa wyłożone działania wciągaiące nas w uwagę znaków pokazuie ſię oczywiście, że Dodawanie które zawſze w Arytmetyce powiękſza ilość, w literach może ią powiękſzyć lub zmnieyſzyć, i tak do a dodaiąc $—b$ w ſummie $a—b$ w rzeczy ſamey a zmnieyſzam ilością b. Odciąganie zaś które w Arytmetyce zawſze zmnieyſza ilość, tu może ią powiękſzyć; chcąc od a odciągnąć $-b$, mam $a+b$ gdzie a powiękſzam ilością b.

Tłómaczy ſię znaczenie wſpółczynników, i ſpoſób obchodzenia ſię z niemi.

W złączeniu funkcyi przez obydwa te działania zachodzą terminy też ſame ilości zawieraiące, kilka razy powtórzone które zebrać ſię mogą w krótſzy wyraz położywſzy ieden z nich z liczbą zawieraiącą tyle iedności, ile razy ten termin znayduie ſię powtórzonym w funkcyi; i tak mamy w przykładzie pierwſzego działania $bf+bf$, na których mieyſcu możemy położyć $2bf$, w przykładzie drugiego działania mamy $-e-e$;$+cd+cd$;$+b+b$, za które piſać możemy $-2e$;$+2cd$;$+2b$, zoſtawiwſzy zawſze w tym zbiorze ten ſam znak, którym były cechowane w ſamotności. Takowe liczby wyrażaiące wiele razy ilość iaka znayduie ſię położoną w funkcyi, nazwiemy WSPÓŁ-CZYNNIKAMI (*Coefficientes*). Ieżeliby zaś terminy iakie kilka-krotnie powtórzone w funkcyi znaydowały ſię z znakami przeciwnemi, na ten czas zebrać należy oſobno dodatne i odiemne, a wyraziwſzy ie przez wſpół-czynnika, odciągnąć potrzeba wſpoł-czynnika większego od mnieyſzego, reſzta będzie wſpół-czynnikiem terminu należącego do Funkcyi przy tym znaku, którym był naznaczony wſpoł-czynnik większy; gdyby zaś wſpół-czynnik dodatny był równy odiemnemu, na ten czas oba te terminy będąc przeciwne zniſzczą ſię razem, i tak w przykładzie działania drugiego mamy $by-by$, $ax-ax$, które wypadaią z funkcyi; bo ilości nie maiące żadnego wſpół-czynnika wyraźnego, maią za wſpół-czynnika iedność. Zoſtaie ſię więc funkcya prościeyſzym ſpoſobem wyrażona ale iedney wartości z przeſzłą: $cg+fm-2c+2cd+2b$. Gdybyśmy zaś mieli $4x-3x$ albo $3bf-6bf$, na mieyſcu pierwſzych napiſalibyśmy x, a zaś $-3bf$ na mieyſcu drugich. Ten ſpoſób przywiedzenia do prościeyſzego wyrazu funkcyi iakieykolwiek ieſt oczywiſtym wypadkiem z początków dopiero wyłożonych, gdzie nam nie trzeba zapomnieć, iż ſię nie rosciąga tylko

do

do terminów iednéy natury, to ieſt zamykaiących tyleż i też ſamé litery. Wſpół-czynniki więc różné nie oznaczaiąc tylko rożné powtorzenie ilości iakiey nie odmieniaią nic w iey naturze, i tak $6a$ ieſt teyże ſamey natury co i $12a$. Są ony tem, czém ſą liczby mnożącé w Arytmetyce, któré iako wiemy natury liczby mnożnéy nie odmieniaią w mnogości.

Wſpół-czynniki więc oznaczaiąc pewné powtórzenie ilości, wyrażaią mnożenie Arytmetyczne, gdybyśmy zaś chcieli ilość iakąkolwiek x, powtórzyć nieoznaczonym razem b, to ieſt tyle razy, ile warta b, i w takim względzie w iakim zoſtaie b, otrzymalibyśmy ilość rozmnożoną bx, gdzie b ieſt wſpół-czynnikiem nieoznaczonym; Działanie naſzé pod ten czas nazywa ſię *Mnożeniem Algebraicznem*, które ieżeli tylko chcemy naznaczyć, używamy do tego znaków wyżey wyłożonych s tą przeſtrogą, iż ieżelibyśmy chcieli oznaczyć mnożenie funkcyi iakiey s kilku terminów złożoney przez drugą iaką funkcyą, potrzeba nam obie te funkcye zawrzeć nawiaſami lub po nad nie kreſkę pociągnąć, i tak $(ax+3by+2dz)\,(b+2d)$ albo - - - $\overline{ax+3by+2dz}.\ \overline{b+2d}.$ znaczy mnożenie funkcyi $ax+3by+2dz$ przez $b+2d$, podobnie $(cm+ny)n$, lub $\overline{cm+ny}.n$ znaczy mnożenie $cm+ny$ przez n. Ieſzcze $(ax—bx)\,(bc+cd)\,(l+m)$ znaczy tylé Mnożników (*Factor*) wchodzących w działanie ile ieſt przedzielonych nawiaſami funkcyi lub ilości. Wykonywaiąc zaś w rzeczy ſamey mnożenie kładziemy tuż przy ſobie ilości n.p. xbc znaczy x rozmnożoné przez b, i znowu rozmnożoné przez c. w tem mieyſcu należy nam ſię oſtrzedz, że w iakimkolwiek porządku położemy ilości w mnogości, nic nie odmieniemy w ich wartości, i tak zamiaſt xbc możemy piſać bxc albo cxb, albo bcx, nie odmieniwſzy nic w naturze mnogości; znaki bowiem ogólné ilości nie będąc tak przywiązané do pewney oznaczoney wartości iak ſą liczby, nie zawiſły bynaymniey

Opiſuie ſię Mnożenie Algebraiczne, z czego wyciągaią ſię rożne prawidła.

w ſwym

w ſwém znaczeniu od porządku. Tu ieſzcze wpada nam oczywiście w oczy, że ieżeli ilości tuż przy ſobie położone znaczą funkcyą rozmnożoną, możemy takową funkcyą rozebrać na mnożników, oddzieliwſzy litery znayduiące ſię we wſzyſtkich terminach funkcyi, od innych: i tak pierwſzy członek naſzego Zrównania $xt+\frac{xbt'}{a}+\frac{xct''}{a}-\frac{xct''}{20a}$ wyrazić ſię może tak: $x\left(t+\frac{bt'}{a}+\frac{ct''}{a}-\frac{c''}{20a}\right)$ ponieważ x znayduiąc ſię we wſzyſtkich terminach ieſt mnożnikiem całey funkcyi.

Gdy nam przypada ilość lub funkcyą iaką ſamę przez ſię mnożyć, obchodząc ſię podług przyiętego znaczenia kładziemy przy ſobie ilość lub funkcyą tylé razy, ile razy wchodzi w mnożenie, n.p. xxx. w tym przypadku zgodziemy ſię na proście yſzy wyraz takowey mnogości kładąc nad ilością lub funkcyą liczbę zamykaiącą tylé iedności ile razy ta ilość lub funkcya wchodzi za mnożnika w mnogości, i tak xxx wyrażemy krócey x^3, $xxbbccc$ wyrażemy $x^2\ b^2\ c^3$ takowe liczby położone nad ilościami nazywać będziemy WYKŁADNIKAMI *(Exponentes)*. Chcąc więc ilość lub funkcyą iaką z Wykładnikiem mnożyć przez też ſamę ilość lub funkcyą z Wykładnikiem, nie potrzeba nam iak tylko dodać do ſiebie wykładników, a tak ſumma wykładników będzie wykładnikiem mnogości: pamiętaiąc na to, że ilość lub funkcya nie maiąca żadnego wykładnika, uważa ſię z wykładnikiem 1. n.p. x iedno znaczy co x^1 podług tego prawidła chcąc x^2 mnożyć przez x^3 otrzymam mnogość x^5. podobnież $(x+a)^2.(x+a)=(x+a)^3$. i t.d.

Znaczenie Wykładnikow

Zatrzymaymy ſię teraz nad odkryciem prawideł Mnożenia zachodzącego w funkcyach złożonych z wielu terminów. Funkcye takowe zamykaią Ilości, Wſpół-czynniki, Wykładniki i Znaki. Co ſię tycze

wykła-

wykładników, dopiéro nauczyliśmy ſię z niémi obchodzić w mnożeniu. O ilościach zaś tyle wiemy z umowy, że w mnogości nie należy nam iak tylko piſać ich tuż przy ſobie: a ponieważ według opiſu mnożenia ilość mnożna tyle razy bydź powinna powtórzona ile warta ilość mnożąca, więc należy nam wſzyſtkié terminy w tey funkcyi zawarte przez tę ilość mnożyć: tak n. p. w $(xa+2by+c)\ d$, przez d należy mnożyć każdy termin Funkcyi $xa+2by+c$, a ſtąd wypadnie mnogość $xad+2bdy+cd$. S tego ſamégo początku wypływa: że kiedy nam przychodzi mnożyć funkcyą przez funkcyą n.p. $(xa+x^2b+c)$ $(yc+bx+m)$, należy nam całą funkcyą $xa+x^2b+c$ mnożyć przez każdy z oſobna termin funkcyi $yc+bx$ $+m$ to ieſt:

Funkcya Mnożna - $xa+x^2b+c$
- - - Mnożąca - $yc+bx+m$

Mnożąc przez yc - - $xayc+x^2byc+yc^2$
Mnożąc przez bx - - $bx^2a+b^2x^3+bxc$
- - - przez m - - $max+mx^2v+mc$

Té dopiéro ſzczgólné mnogości razem dodané i ułożoné podług wykładników x daią mnogość całką:

$$b^2x^3+bax^2+mbx^2+bycx^2+aycx+max+bcx+c^2y+mc$$

Tymże ſamym ſpoſobém należy nam poſtępować maiąc do mnożenia więcey funkcyi: i tak gdyby nam przyſzło dwie wymienioné funkcye $(xa+x^2+c)$ - $(yc+bx+m)$ mnożyć ieſzcze przez trzecią $az+by+n$, należałoby nam całką dopiero wynalezioną mnogość mnożyć przez każdy z oſobna termin trzeciey tey funkcyi, a tym ſpoſobém przyſzlibyśmy do mnogości trzech wzmiankowanych funkcyi.

Maiąc do mnożenia Wſpółczynników przed ilościami, proſtá uwaga nad ich naturą przekonywá nas, że ich należy ſamych przez ſię mnożyć, a wypadaiąca ſtąd liczba rozmnożona będzie wſpół-czynnikiem mnogości Algebraiczney. Jakóż chcąc $2x$ mnożyć przez $3c$ potrzeba $2xc$ trzy razy ieſzcze powtórzyć, s czego

wypadnie

wypadnie $6xc$: podobnie $(6ax+2b)10.x$ daie w mnogosci $60axx+20bx$.

Prawidło na znaki wyciągá ſię z opiſu mnożenia.

Zoſtaie nam teraz wynaleśdź prawidło na znaki. Wróćmy ſię myślą do naſzych początków. Powiedzieliśmy naprzód s przekonania że w działaniach iakichkolwiek nigdy nie możemy odłączyć uwagi ogólney nad ilością od uwagi nad iey ſtanem w którym ſię iedna względem drugiey znayduie. Nauczyliśmy ſię powtóre z opiſu mnożenia że ilość mnożna nie tylko bydź powinna tyle razy powtórzona ile warta ilość mnożąca, ale ieſzcze bydź powinna w tym ſamym względzie powtórzona, w iakim zoſtaie taż ilość mnożąca: więc kiedy nam przychodzi $xa-b$ mnożyć przez a, ponieważ a ma znak Dodawania; znak zaś Dodawania wyraża złączenie ilości zoſtawiwſzy ie przy tych ſamych znakach przy których przedtem zoſtawały, idzie zatem że mnogość która bydź zawſze powinna iedney natury z ilością mnożną, powinna mieć też ſame znaki, które ma ilość mnożna, zaczem $(xa-b)a$ daie mnogość $xaa-ba$. W pierwſzym terminie xaa mnogości, mnożyliśmy znak dodatny $+xa$. przez znak dodatny $+a$, i wypadł nam znak dodatny $+xaa$; w drugim $-ba$ mnożyliśmy znak odiemny $-b$ przez znak dodatny $+a$ i otrzymaliśmy znak odiemny $-ba$. Więc w mnożeniu + przez + daie +; zaś — przez + daie —. Maiąc zaś do mnożenia $xa-b$ przez $-c$, ponieważ $-c$ ma znak odciągania; znak zaś odciągania każe nam odmieniać wſzyſtkie znaki; idzie za tem, że mnożąc przez $-c$, w każdym terminie funkcyi $xa-b$ odmienić powinniśmy znak na znak iemu przeciwny, i tak wypadnie mnogość $-xac+bc$. Tu znowu mnożąc znak dodatny $+xa$ przez odiemny $-c$, otrzymaliśmy iak w pierwſzym przykładzie znak odiemny $-xac$; mnożąc zaś znak odiemny $-b$ przez znak odiemny $-c$, otrzymaliśmy znak dodatny $+bc$. Łacząc więc ten wypadek z przeſzłym, wyciągniemy prawidło ogólne na znaki w mnożeniu: to ieſt że: w

mnożeniu

mnożeniu, też ſame znaki bądź to dodatny + przez dodatny +; bądź odiemny — przez odiemny —, daią zawſze w mnogości znak dodatny; znaki zaś rożne to ieſt dodatny + przez odiemny —, albo odiemny — przez dodatny +, daią zawſze w mnogości znak odiemny —. Zebrawſzy razem te wſzyſtkie prawidła któreśmy s tak proſtych i oczywiſtych wyciągnęli początków, użyiemy ich w naſtępuiącym przykładzie:

Mnożyć - $ax^2+2by-c$
przez - $3dx-m$

Mnogość $3adx^3+6bdyx-3dcx-max^2-2bym+mc$

Dla większey wprawy czytelnika przyłączamy tu Tablicę różnych przykładów.

W każdey Nauce pewney chcąc doſiąc prawdy iakiey ogólney, nie doſyć nam ieſt rozwiązać iakowe zadanie prowadzące nas do ważnych iakich początków, ale ieſzcze dla doſtatecznego przekonania powinniśmy rozwiązać zadanie wywrotne; to ieſt: wrócić ſię od oſtatnich wynalezionych wypadków do pierwiaſtków naſzego zadania. I tak od części przyſzedłſzy do pewnego ſkładu, należy nam ieſzcze od tego ſkładu wrócić ſię do części, s czego dwoiako korzyſtamy; naprzód zoſtawiamy rozum naſz w nieprzeparțey pewności o naſzych początkach; powtóre odkrywamy nowe prawdy roſtrząſaiąc przypadki przeciwne pierwſzym. W poprzedzaiącém działaniu odkryliśmy prawidła prowadzące nas od Mnożników do ilości rozmnożoney; teraz chcąc od ilosci rozmnożoney zniżyć ſie do Mnożników, potrzeba nam ten ſkład który z mnożenia funkcyi powſtał rozebrać, i odkryć pewne przepiſy prowadzące nas do tego rozbioru. W takowém zadaniu zachodzą trzy rzeczy: funkcya podana, i dwie funkcye prościeyſze ſkładaiące pierwſzą. Tamta nazywa ſię funkcya *Podzielną*, iedna z dwóch oſtatnich *funkcyą dzielącą*. Z dwóch tedy funkcyi znanych, to ieſt podzielney i dzielącey, wynaleśdź trzecią, którą nazwano *wielorazem*, znaczy dzielić funkcyą iednę przez drugą. S tego Opiſu wynikaią na-

Dzielenie Algebraiczne i reguły mu ſłużące.

B. P.W.

ſtępuiące prawdy: Ieżeli funkcya dzieląca wchodzi całkiem w ſkład funkcyi podzielney, dzielenie odbydź ſię może zupełnie, a przeto wieloraz otrzymać powinniśmy w wyrazie ſkończonym: ieżeli zaś funkcya dzieląca nie ieſt prawdziwym elementem funkcyi podzielney; rozbiór tey funkcyi bydź nie może doſkonałym, a zatem wieloraz wypaśdź musi z oſtatkiem nie zupełnie podzielnym. Ponieważ więc w dzieleniu zachodzi ieden warunek, to ieſt: ieżeli funkcya ma bydź doſkonale podzielną, potrzeba aby funkcya dzieląca cała była ſkładaiącą iey częścią; ten warunek czyni to działanie ſzczególnieyſzem nad mnożenie i ieſt przyczyną, dla czego nie każde dzielenie bydź może doſkonałe kiedy każda mnogość ſtaie ſię zupełną z iakichkolwiek mnożników.

Przyſtąpmy iuż do wynaydowania prawideł dzielenia na ilości, wſpół-czynniki, wykładniki i znaki. Ponieważ dzielenie rozebrać powinno ten ſkład, który z mnożenia powſtał, idzie za tem że prawidła iego bydź powinny przeciwne tym, ktoreśmy na Mnożenie odkryli. Więc ieżeli mnożąc kładziemy tuż przy ſobie litery Mnożników; dzieląc powinniśmy mazać w funkcyi podzielney litery funkcyi dzielącey; i tak xb chcąc rozdzielić przez b, mażę b w funkcyi podzielney, i zoſtaie ſię na wieloraz x, to ieſt: $\frac{xb}{b}$, daie x. Powtóre ſzukaiąc mnogości mnożyliśmy wſpół-czynniki przez ſię, więc ſzukaiąc wielorazu dzielić powinniśmy wſpół-czynnika funkcyi podzielney przez wſpół-czynnika dzielącey: n.p. chcąc $12xb$ rozdzielić przez $3b$, dzielę 12 przez 3, potem zmazawſzy b podług prawidła 1go, otrzymuię wieloraz $4x$. Nakoniec w mnożeniu dodawaliśmy do ſiebie wykładniki, więc w dzieleniu należy nam odciągać wykładnika funkcyi dzielącey od wykładnika podzielney, i takim ſpoſobem $12x^4b^2$ rozdzieliwſzy przez $3x^3b$ otrzymam za wieloraz $4xb$. S kąd ſię wnoſi oczywiście iż gdyby nam przypadło dzielić takie fun-

kcye,

kcye, w którychby wykładnik dzielącey był więkſzy od wykładnika podzielney, wieloraz wypadnie z wykładnikiem odiemnym równaiacy ſię ułomkowi maiącemu za licznika iedność, a za mianownika tenże wieloraz z wykładnikiem dodatnym n. p.

$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ s kąd ſię wnoſi że wyrazy - - x^{-2}, y^{-3}, ba^{-m}, równe ſą tym - $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^3}, \frac{b}{a^m}$, i t. d.

Prawidło na znaki w Dzieleniu.

Cóż za prawidła będą na znaki? Przypomniymy ſobie że w mnożeniu znaki też ſame wydały nam zawſze znak dodatny mnogości; znaki zaś rożne rodziły znak odiemny. Więc ponieważ wieloraz z funkcyą dzielącą ſą dwiema częściami, z których przez mnożenie powſtać powinna funkcya podzielna; znaki wielorazu tak powinny odpowiadać znakom funkcyi dzielącey, ażeby z nich wypadły koniecznie w mnożeniu znaki funkcyi podzielney: i tak maiąc do dzielenia x^2b przez b, ponieważ funkcya podzielna x^2b ma znak dodatny, który nie mógł powſtać, tylko z znaków tychże ſamych, idzie zatem, że wieloraz mieć powinien tenże ſam znak, który ma funkcya dzieląca; przeto $+x^2b$ rozdzielone przez $+b$ daie $+x^2$ to ieſt: znak dodatny rozdzielony przez znak dodatny, daie w wielorazie znak dodatny. Taż ſama przyczyna przekonać nas powinna, że dzieląc x^2b przez $-b$ wieloraz wypaśdź powinien $-x^2$; przeto znak dodatny rozdzielony przez znak odiemny daie w Wielorazie znak odiemny.

Ieżeli zaś mamy $-x^2b$ dzielić przez b ponieważ $-x^2b$ nie mogło w mnożeniu powſtać tylko z znaków przeciwnych, więc Wieloraz mieć powinien znak przeciwny znakowi funkcyi dzielącey, zaczem $-x^2b$ rozdzielone przez b daie $-x^2$ to ieſt: znak odiemny rozdzielony przez znak dodatny daie w Wielorazie znak odiemny. Nakoniec maiąc $-x^2b$ dzielić przez $-b$ z dopiero powiedzianego dowodu wypada w Wielorazie $+x^2$. Więc znak odiemny rozdzielony przez znak odiemny daie w Wielorazie znak dodatny. Zebrawſzy te wſzyſtkie przypadki razem, pokazuie ſię że prawidło na znaki w dzieleniu ieſt toż ſamo, ktoreśmy wyciągnęli na mnożenie ilości, to ieſt: że znaki też ſame bądź to + przez +, bądź — przez —, rodzą w Wielorazie znak dodatny; znaki zaś przeciwne to ieſt + przez —, albo — przez +, wydaią znak odiemny. Do tych wſzyſtkich prawideł zoſtaie nam ieſzcze przydadź iednę uwagę: Wyciągnęliśmy byli z natury mnożenia ten przepis: że potrzeba funkcyą mnożną całą mnożyć przez każdy z oſobna termin funkcyi mnożącey, s tąd wypada tyle mnogości ſzczególnych, ile ieſt terminów funkcyi mnożącey, s których dopiero razem zebranych powſtaie mnogość całka. Temu prawidłu odpowiadać powinno przeciwne w dzieleniu. Funkcya naſamprzód podzielna uważana bydź powinna iako powſtaiąca z tylu mnogości ſzczególnych, ile terminów zamyka wieloraz, każdy więc termin wielorazu zniſzczyć powinien iednę mnogość ſzczególną w funkcyi podzielney. Zaczem przez każdy termin Wielorazu świeżo wynaleziony, mnożyć powinniśmy całą funkcyą dzielącą, i mnogość s tąd wypadaiącą odciągnąć od funkcyi podzielney: reſzte zaś pozoſtałą w funkcyi podzielney dzielić znowu przez pierwſzy termin funkcyi dzielącey, powtarzaiąc za każdym razem mnożenie terminu nowego w Wielorazie przez całą funkcyą dzielącą, i odciąganie tey mnogości od funkcyi podzielney. Przeto aby to działanie wypadało porządnie, należy funkcyą podzielną ułożyć podług wykładników iakowey ilości, począwſzy od naywyżſzego ſkończyć na nayniżſzym, lub na tych terminach w których ſię ta ilość główna naſzego porządku nie znayduie; a to dla tego, że w mnożeniu taki zachodzi układ ilości, iako każdego przykłady przekonaią. Przyſtóſóymy teraz te prawidła do dzielenia funkcyi.

Funkcya

Funkcyá Podzielna, $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ } Wieloráz
- - - Dzieląca, $x-a$ } $x^2-2ax+a^2$

Mno: z x^2. przez ſunk:dzi: x^3-ax^2
Reſzta pozoſtałá z odciąg: $-2ax^2+3a^2x-a^3$
Funkcyá Dzieląca - - - $x-a$

Mnog: z $-2ax$ przez funk:dziel: $2ax^2+2a^2x$
Reſzta z odciągnienia - - - - a^2x-a^3
Funkcyá Dzieląca - - - - - - - $x-a$

Mnogość z a^2 przez funkcyą dzielącą a^2x-a^3

Reſzta - - - - - - 0 0.

to ieſt pierwſzy termin x^3 Funkcyi podzielney dzielę przez x, wypadá na wieloráz x^2, przez ten termin wielorazu mnożę funkcya dzielącą $x-a$, i powſtaie s tąd mnogość ſzczególná x^3-ax^2; odmieniam w niey znaki na przeciwne podług przepiſów odciągania, i odtrąciwſzy ią od ſunkcyi podzielney, wypadá reſzta $-2ax^2+3a^2x-a^3$, którey pierwſzy termin $-2ax^2$, dzielę przez pierwſzy termin x ſynkcyi dzielącey, otrzymuię nowy termin wielorazu $-2ax$, przez który mnożę funkcyą dzielącą i tę mnogość odciągam od pozoſtałey funkcyi podzielney. Tož ſamo powtarzaiąc daley, przyidę do wyczerpania zupełnego funkcyi podzielney otrzymawſzy zero za reſztę która kończy moie działanie.

Gdybyśmy zaś mieli do dzielenia funkcya podzielną przez funkcya dzielącą taką, ktoraby nie była cząſtką ſkładaiącą pierwſzey; działaiąc podług dopiero wynalezionych przepiſów, wieloraz rościągnie ſię bez końca, iako každego przekona przykład pod znakiem (B) podany na Tablicy przykładów, która ſię dla wprawy Czytelnika przyłącza.

Pozoſtały nam ieſzcze Funkcye łomané: w nich té ſame działania zachodzą, któreśmy wykonywali w całkich. Wiemy naſamprzód z Arytmetyki, že ułomek nic innego nie wyraža, tylko ſtóſunek dwóch

Z natury Funkcyi ułomkowych wypadaią prawidła działań w nich zachodzące.

ilości zachodzący między miarą porównywania zawartą w mianowniku, i pewną iaką wielkością którą zowiemy licznikiem: i dla teyci to przyczyny wyraz ułómkowy wzięliśmy ſprawiedliwie za znak dzielenia. A ponieważ natura iakieykolwiek ilości zawiſła od iedności, z którą ią ſtóſuiemy; zawiſła od mianownika wyrażaiącego też iedność. Przeto ieżeli nie można dodawać lub odciągać ilości tylko iedney natury; nie można dodawać lub odciągać ułomków, nie przywiodłſzy ich do teyże ſamey iedności czyli do iedney powſzechney miary porównywania. Prawda: że znaki dodawania lub odciągania wyżey obrane wyſtarczaią nam do cechowania tych działań nawet miedzy ułomkami rożney natury; ale chcąc wykonać to, o czém nas té znaki oſtrzegaią, iſtotną ieſt kondycyą przywieśdź ie do iedney powſzechney miary, czyli do iednego mianownika, nie odmieniwſzy nic w ich ſzczególnych wartościach: i tak chcąc dodadź lub odciągnąć ułomki $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ do lub od ułomku $\frac{xb}{m}$ znaczémy pierwſzé s tych działań przez $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{xb}{m}$ drugie zaś przez $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{xb}{m}$: chcąc zaś wykonać obydwa te działania należy ułomek $\frac{x}{a}$ przywieśdź do mianowników b, m, razém; ułomek yb do mianowników a, m; ułomek nakoniec $\frac{xb}{m}$ do mianowników a, b; ocaliwſzy każdego wſzczególności wartość. To wykonać ſię iedynie może przez mnożenie i dzielenie razem ułomku przez te ſame mianowniki, do których go chcemy przywodzić. Tym bowiem ſpoſobem $\frac{xbm}{abm}$ tyle będzie wartało ile $\frac{x}{a}$; $\frac{yam}{abm}$ tyle co $\frac{y}{b}$; $\frac{xab^2}{abm}$ tyle

Tablica do karty 22.

Przykład I. Mnożenia.

$a^2 + 2ax - 3xb^2$

$a^2 - 2ax + 3xb^2$

$a^4 + 2a^3x - 3a^2b^2x$

$\quad - 2a^3x - 4a^2x^2 + 6ab^2x^2$

$\quad\quad + 3a^2b^2x + 6ab^2x^2 - 9b^4x^2$

$a^4 + 0 - 4a^2x^2 + 12ab^2x^2 - 9b^4x^2$

Przykład II.

$a^2 + x^2$

$a^2 - x^2$

$a^4 + a^2x^2$

$\quad - a^2x^2 - x^4$

$a^4 - x^4$

Przykład I. Dzielenia.

Funkcya Dzieląca. | Podzielna.

$a^3 + 3abc - b^2c \mid 2a^5 + a^3bc - 2a^2b^2c - 15ab^2c^2 + 5b^3c^2 \mid$ Wieloraz

$\quad - 2a^5 - 6a^3bc + 2a^2b^2c \mid 2a^2 - 5bc$

$\quad - 5a^3bc - 15ab^2c^2 + 5b^3c^2$

$\quad + 5a^3bc + 15ab^2c^2 - 5b^3c^2$

0

Przykład II. (B).

$a^2 + ab \mid a^3 + 2a^2b - ab^2$

$\quad \mid - a^3 - a^2b$

$\quad a^2b - ab^2$

$\quad - a^2b - ab^2$

$\quad - 2ab^2$

$\quad + 2ab^2 + 2b^3$

$\quad 2b^3$

$\quad - 2b^3 - \frac{2b^4}{a}$

$\quad - \frac{2b^4}{a}$

$\quad + \frac{2b^4}{a} + \frac{2b^5}{a^2}$ i t. d.

Wieloraz.

$a + b - \frac{2b^2}{a} + \frac{2b^3}{a^2} - \frac{2b^4}{a^3} + \frac{2b^5}{a^4} -$ i t. d.

tylé; co $\frac{xb}{m}$. S czego wypadá prawidło przywodzeniá ułomków do iednego mianownika: rozmnożyć każdego licznika przez tych wſzyſtkich mianowników, do których chcemy przywodzić ułomek, i mnogość ze wſzyſtkich razem mianowników podpiſać za mianownika każdemu ułomkowi, znaki zaś zachodzących działań zoſtawić przy liczniku każdego ułomka. Itak w trzech podanych ułomkach zachowane prawidło przyprowadzi nás w dodáwaniu do $\frac{xbm+yam+xab^2}{abm}$; w odciąganiu zaś do $\frac{xbm+yam-xab^2}{abm}$.

Stego przepiſu wypadá ſpoſób przerobieniá ilości lub funkcyi całkiey na ilość lub funkcyą łomaną iakiegokolwiek mianownika; chcąc n.p. xt przywieśdź do mianownika a, przez dopiero podane prawidło otzymam $\frac{xta}{a}$. Maiąc więc do czynieniá s funkcyą zawieraiącą terminy całkie i ułomkowe, dla wprowadzeniá iednoſtayności w działanie, zaczynam od przywiedzenia wſzyſtkich ułomków do iednego mianownika; powtóre ilości całkie przerabiam na ułomkowe tego ſpólnego mianownika. W zrównaniu do którego nas zadanie przywiodło, mámy: $xt+\frac{xbt'}{a}+\frac{xct''}{a}-\frac{xct''}{20a}$; w czem poſtępuiąc ſobie podług wyłożonego przepiſu przerobiemy tę funkcyą na inną iednoſtayną, ale toż ſamo znacząca: $\frac{20axt+20xbt'+20xct''-xct''}{20a}$ czyli:

$$\frac{x\ (20at+20bt''+20ct''-ct'')}{20a}$$

Chcąc dóyśdź prawidła na mnożenie iednégo ułomku przez drugi, weźmy do tego działania $\frac{a}{b}$, $\frac{x}{c}$ gdyby nam przyſzło $\frac{x}{c}$ mnożyć przez licznika ſamego a drugiego ułomku; należałoby nam $\frac{x}{c}$ tyle razy powtórzyć, ile wartá a; zaczem mnożyłibyśmy licznika ułomku $\frac{x}{c}$ przez a, s czego wypadá $\frac{xa}{c}$: teraz chcąc $\frac{x}{c}$ mnożyć przez $\frac{a}{b}$ mnogość $\frac{xa}{c}$, bydź powinna tyle razy mnieyſzá, ile wartá b; a zatem należy przez b mnożyć mianownika pierwszey mnogości, i wypadnie $\frac{a}{b}.\frac{x}{c}=\frac{ax}{bc}$. Więc w mnożeniu ułomków należy liczników przez liczników, i mianowników przez mianowników mnożyć.

Gdyby nam zaś $\frac{x}{c}$ przypadło dzielić przez a, należałoby ułomek $\frac{x}{c}$ tyle razy zmnieyſzyć, ile wartá a; przeto mnożylibyśmy mianownika ułomku $\frac{x}{c}$ przez a, ſkąd wypadá $\frac{x}{ac}$; chcąc zaś $\frac{x}{c}$ dzielić przez $\frac{a}{b}$, potrzebaby wieloraz $\frac{x}{ac}$ powiękſzyć wielkością b, to ieſt rozmnożyć go przez b, ſkąd wyniknie $\frac{xb}{ac}$ wieloraz

$\frac{x}{c}:\frac{a}{b}$

$\frac{x}{c}:\frac{a}{b}$. Toż ſamo przypadnie czynić chcąc mnogość $\frac{ax}{bc}$ rozebrać tak, ażeby otrzymać ułomek mnożny $\frac{x}{c}$. Więc w dzieleniu ułomków należy ie mnożyć na wywrot, to ieſt; mnożnika ułomku podzielnego przez mianownika ułomku dzielącego, i mianownika ułomku podzielnego przez licznika ułomku dzielącego.

§. IV.

Zbiór krótki wyłożonych wyżey początków wrácaiący nás do natury Zrównań.

Nauczyliśmy ſię dotąd odbywać pierwſze działania Arytmetyczne w literach, na któreśmy natrafili rostrząſaiąc podług prawdziwych prawideł myślenia podane ſobie do rozwiązania na początku tego rozdziału pytanie. Cofnąwſzy ſię myślą do zaczęcia naſzych docieczeń, pamiętamy naſamprzód że doſtrzeżony między warunkami naſzego pytania związek przyprowadził nás do zrówania $xt+\frac{xbt'}{a}+\frac{xct''}{a}-\frac{xct''}{20a}=e$, któreśmy potem tak nauczyli ſię wyrazić - - - - $\frac{x(20at+20bt'+20ct''-ct'')}{20a}=e$: w tem Zrównaniu uważaiąc tylko zbiór różnych ilości bez żadnego zwiazku, przyſzliśmy do wyobrażenia ſobie funkcyi. Natura funkcyi wciągła nás w uwagę różnych odmian, którym podpadać mogą ilości podług gatunku i okoliczności pytania. Uczuliśmy stąd potrzebę znaczenia takowych odmian; i przybraliśmy ſobie do tego różne znaki działań, z których iedne ſłużą nam na wyrażenie odmian ilości co do ſtanu i położenia, drugie zaś znaczą odmiany wartości: zaſtanowiwſzy potem myśl nad temi działaniami, ſpoſtrzegliśmy ich wielką ogólność, która nas przywiodła do rozległeyſzych uwag, té zaś do powſzechnych prawideł podaiących nam ſpoſoby poſtępowania ſobie z iakiemikolwiek funkcyami, do którychby nás przyprowadzić mogły różne pytania. Takowe prawidła iako pewne wypadki naſzych ſtóſunków i rozumowań wyrażaiąc w różnym układzie ilości wchodzących w ſkład funkcyi, uſtanowiliśmy pewien ięzyk, czyli ſpoſób znaczenia zwięźle i krótko naſzych myśli, kombinacyi o ilościach, ich właſnościach i odmianach, który nazwano RACHUNKIEM *(calculus)*. Przypadek więc ſzczególny iakim było naſze pytanie ogarniony rozległeyſzą uwagą uczynił naſze poznanie doſkonalſzem, bo nam dał odkryć tyle prawd powſzechnych, ileśmy znaleźli prawideł różnych działań; między któremi należy rozróżnić te, które od umowy zawiſły, od tych, które wypadły z natury działań: tamte bowiem ſą arbitralne, te zaś konieczne i nieodmienne. Oświeceni takową różnicą przekonamy ſię, że lubo rachunek odbywa ſię przez znaki od upodobania zawiſłe, wypadki atoli iego ſą koniecznie pewne i nieprzeparte, ieżeli ſą dobrze z niewątpliwych prawd wyciągnione; tak iak dobre rozumowanie wypadaiące s początku pewnego i prawey kombinacyi ieſt nieomylne, chociaż ie wyrażamy ſłowy *arbitralnemi*: w obydwóch bowiem przypadkach doſtrzeżone oſtatnie prawdy zawiſły od początków myślenia albo od natury rzeczy, ale nie od znaków..

Po tych wſzyſtkich działaniach, przez które przechodzić nam w każdem dociekaniu należy, idąc od ſtóſunku do związku, od związku do odkrycia rzeczy nieznaney; ſtaraymy ſię iuż wynalesdź to, cośmy ſobie zadali. Pamiętamy, że rozwiązanie naſzego pytania zależy od wynalezienia części zyſku przypadaiącey na pierwſzego Kupca, którąśmy nazwali x; ieżeli więc potrafiemy w Zrównaniu - - - - .

$$\frac{x(20at+20bt'+20ct''-ct'')}{20a}=e,$$

wyrazić x przez ſame rzeczy znane $a, b, c, t,$ i t. d. i przenieść wſzyſtkie rzeczy znane przy x, na drugi członek zrównania

do e,

Drogi zwyczayne myślenia ſtóſowane do rozwiązania Zrownan.

do *e*, zoſtawiwſzy w pierwſzym członku ſamo *x*, i nie naruſzywſzy zwiazku między ilościami raz doſtrzeżonego, rozwiążemy podane zrównanie i wynaydziemy to, czego ſzukamy. Iakże tego dokazać? oto ta ſama ſztuka, którey używamy w naypotocznieyſzem myśleniu, gdy prawdę iaką nieznaną w liczbie innych prawd poſtrzegłſzy, chcemy ią wydobydź z zamieſzania tych obrazów w których ieſt utopiona a z któremiśmy ia związali: pracuiemy ieſzcze na ten czas nad zwiazkiem raz upatrzonym, oddzielaiąc doſtrzeżoną prawdę od tego co ćmi iey oczywiſtość, a zbliżaiąc do ſiebie obrazy ściśley ſię z ſobą wiążące, tak dalece; że cała praca naſza zależy na odmianie porządku w łańcuchu naszych myśli. Czyniemy na ten czas nowe porównywanie, uważaiąc wſzyſtkich myśli związanych znowu ſzczególnieyſze między ſobą związki, i zbliżaiąc do ſiebie te, które ſię bardziey s ſobą trzymaią; a to końcem wyſtawienia ſobie nowo odkrytey prawdy w nayiaśnieyſzym widoku.

Ten ſam ſpoſób zachodzi w rozwiązaniu zrównań. ale odmieniaiąc w zrównaniu raz wprowadzony porządek między rzeczami znanemi i nieznanemi, aby te oſtatnie oddzielić i wyrazić przez pierwſze, na iakimże gruncie zaſadzamy tę wolność odmiany; i co nas może upewnić, że w tey odmianie nie naruſzemy raz doſtrzeżonego i wyrażonego związku? Na ułatwienie tego pytania coſniymy ſię do roſtrząſania iuż założonych od nas początków. Powiedzieliśmy że odkrywamy nowe prawdy, przez związek upatrzony między rzeczami znanemi i nieznanemi: ale cóż to znaczy *związać* prawdę iednę z drugą, i na czem ten związek zależy? związać iednę prawdę z drugą, ieſt to doſtrzec, że iedna prawda z pewnych myśli złożona, ieſt to to ſamo co i druga prawda złożona z innych myśli, albo też z tych ſamych ale innym ſpoſobem do ſiebie ſtóſowanych; tak dalece: że związek między prawdą i prawdą nie zależy tylko na upatrzoney Tosamości *(identitas)* iednych obrazów z drugiemi: i *rownać* iedne rzeczy z drugiemi, nic innego nie znaczy, tylko uważać które rzeczy w pytaniu ſą to ſamo co i drugie, albo iakim ſpoſobem iedne ſtać ſię mogą to ſamo znaczącemi, co i drugie: doſtrzegłſzy z warunków pytania tę toſamość rzeczy, a w nię zagarnąwſzy rzecz nieznaną, mówiemy żeśmy związali rzeczy znane z nieznanemi. Cały zbiór prawd wynalezionych w iakimkolwiek rodzaiu, i cały ſpoſób myślenia zagłebiwſzy ſię w iego roſtrzaſanie przekona nas o oczywiſtości tego tłómaczenia, z któregobyśmy tu bardzo wiele Loicznych mogli wyciągnąć uwag, gdybyśmy ſię nie bali przeſtapić granic naſzego zamiaru. Zrównania Algebraiczne nayoczywiściey to pokazuią. Ieżeli więc dwa członki zrównania ſą wyrazem toſamości między iednemi rzeczami i drugiemi zawartemi w pytaniu; ta toſamość zoſtanie nienaruſzoną, czyniąc iakiekolwiek bądź odmiany, byleby te ſame odmiany któreśmy czynili w iednym członku zrównania, były czynione i w drugim. Wolno nam więc wprowadzić w zrównanie iakiekolwiek działania potrzebne do oddzielenia rzeczy nieznaney od znanych, bo te działania nie naruſzą bynaymniey raz doſtrzeżonego związku, byleby to, co ſię rozrywa lub znosi w iednym członku dla otrzymania ilości nieznaney ſamotnie, w drugim zaraz członku było znieſione lub rozerwane. Chcąc więc oſwobodzic x od tych wſzyſtkich ilości znanych, z ktoremi ſię mięſza; potrzeba nam naſamprzód uwolnić ie od dzielnika $20a$; przeto należy obydwie ſtrony mnożyć przez tego dzielnika, i wypadnie $x(20at+20bt'+20ct''-ct'')=20ae$: chcąc potem uwolnić x od mnożnika $20at+20bt'+20ct-ct''$ dzielić nam potrzeba przez niego obydwa członki, a tak otrzymamy:

$$x=\frac{20ae}{20at+20bt'+20ct''-ct''},$$

gdyby

gdyby ieſzcze do tego x przydaná lub odciągnioná była iaka ilość znana, w pierwſzym razie przypadłoby nam ią odciągnąć; w drugim zaś razie dodadź z obydwóch ſtron zrównania; czyli co na iedno wyidzie przenieśćby ią należało na drugą ſtronę z znakiem przeciwnym. Cała więc ſztuka rozwiązaniá zrównań takiego rodzaiu, iaki tu roſtrząſamy; czyli wyrażeniá ilości nieznaney przez funkcyą znanych, zależy na używaniu działań przeciwnych tym, które zachodzą z ilościami znanémi znayduiącemi ſię przy ilości nieznaney. Naypierwſzą więc ieſt rzeczą przenieść terminy zrównaniá zamykaiące ilość nieznaną na iednę ſtronę znaku równości, wſzyſtkie zaś ilości znané na ſtronę drugą, odmieniaiąc znak w tym terminie który ſię przenosi, na przeciwny: potém ieżeli ta ilość nieznaná znayduie ſię mnożoną lub dzieloną przez iakié znané, należy w pierwſzym przypadku obydwie ſtrony rozdzielić, w drugim zaś należy ie rozmnożyć przez té ſame ilości znané; a tak ilośc nieznana oſwobodzoná od wſzelkiego ſkładu, wyrazi ſię przez ſamé ilości znané, i pytanie rozwiązané zoſtanie. Wartość takowá ilości nieznaney wyrażona przez ſame ilości znané nazywá ſię PIERWIASTKIEM ZRÓWNANIA (*Radix Aequationis*). Ieżeli pytanie naſze nie ma więcey iak iednę odpowiedź, Zrównanie oné zawieraiące nie dá tylko ieden pierwiaſtek i nazywá ſię PIERWSZEGO STOPNIA. Funkcye zaś takowé w które wprowadzony związek nie wiedzie tylko do iedney odpowiedzi, nazywać odtąd będziemy IEDNO-KSZTAŁTNE (*Uniformes*).

Z poprzedzaiących uwag wyciągá ſię prawidło ogólne na rozwiązanie zrównań 1go ſtopnia.

§. V.

Wypádki z reguły poprzedzaiącey.

Z reguły dopiero wyłożoney wnosi ſię oczywiście: *Naprzód*: Że ieżeli zrównanie iakie znayduie ſię mnożonem lub rozdzielonem we wſzyſtkich terminach przez iaką ilość lub funkcyą, ta ilość lub funkcya nie należy do zrównania: mażąc ią bowiem nie naruſzamy bynaymniey związku między warunkami pytania, tak iako podane iakie zrównanie mnożąc

lub

lub dzieląc całe, przez iakąkolwiek funkcyą; lub dodaiąc do ſiebie kilka zrównań s tego ſamego pytania wypadaiacych tenże związek zupełnie ocalamy. *Powtore*: Ze Zrównanie iakiekolwiek, przenioſłſzy w niem wſzyſtkie terminy na iedne ſtrone znaku równości bydź może przywiedzionem do zero, to ieſt do wyrazu $A=o$, gdzie A ieſt funkcyą iakichkolwiek ilości w Zrównanie wchodzących. Takowego wyrazu zrównań wprowadzonego od *Hariota* będziemy zawſze używać w głebſzych naſzych dociekaniach. Zrównanie wiec pierwſzego ſtopnia, w którem nie zachodzi tylko iedna nieznana, wyrazić ſię może nayogólniey przez $x+B=o$ gdzie B ieſt funkcyą ſamych ilości znanych, iego zaś pierwiaſtek przez $x=-B$. *Po trzecie*: Ze każdy pierwiaſtek Zrównania podanego włożony za ilość nieznaną w Zrównanie $A=o$, znieſie wſzyſtkie terminy, a przywiodłſzy ie do zero *uczyni* iak mówią Geometrowie *zadoſyć* Zrównaniu.

§. VI.

Równaią ſię wypadki Arytmetyczne z Algebraicznemi dla obiaśnienia i potwierdzenia tego co ſię w §. 1. mówiło.

Chcąc teráz wypadki Arytmetyczne z Algebraicznemi porównać, wróćmy ſię do Zrównania rozwiązanego.

$$x=\frac{20ae}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$$

Wyrażaiąc podziały zyſku podług §. 2. przypada;

$$\text{na Pierwſzego Kupca } xt=\frac{20aet}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$$

$$\text{na Drugiego - - } \frac{xbt'}{a}=\frac{20bet'}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$$

$$\text{na Trzeciego - - } \frac{xct''}{a}-\frac{xct''}{20a}=\frac{20cet''-cet''}{20at+20bt'+20ct''-ct''}.$$

te trzy Zrównania ſtawiaią nam przed oczy działania Arytmetyczne przywiązane do natury naſzego pytania taniá, a zatém pokazuią reguły, za któremi iśdź mámy, chcac w liczbach wynaleśdź to, cośmy ſobie zadali. Wiedząc bowiem znaczenia liter, ich układ odpowiadaiacy pewnym działaniom, czytać możemy w naſzych Zrównaniach té wſzyſtkie reguły, któreby Arytmetyka mogła podadź w takowym przypadku: a wykonywaiąc ié, znaydziemy w ſzczególności każdy podział w liczbach, których ſumma równa ieſt 90.000 czyli *e*, ieżeli za a, b, c, t, t', t'', té włożemy wartości któreśmy ſobie w §. 1. przybrali, to ieſt, $a = 20.000$ $b = 18.000$, $c = 12.000$, $t = 9$, $t' = 12$, $t'' = 15$. Znaydziemy że przy tych wſzyſtkich warunkach

na pierwszego Kupca przypada				$28,571\frac{486}{1134}$ -
na drugiego	-	-	-	$34,285\frac{810}{1134}$
na trzeciego	-	-	-	$27,142\frac{972}{1134}$

Umorzywſzy iaki warunek w naſzem pytaniu, zaráz w Zrównaniu niknie termin odpowiadaiący temu warunkowi, który opuściwſzy mámy zaráz rozwiązanie pytania tym warunkiem zmnieyſzonego: i tak n.p. gdybyśmy chcieli zniſzczyć tę ſtratę którą oſtatniemu Kupcowi przypada ponieść, nie potrzeba nám tylko w podziále trzeciego Kupca opuścić $\frac{xct''}{20a}$, potém w mianowniku wſzyſtkich zrównań $-ct''$, terminy obydwa temu warunkowi należyte: a wypadnie:

$$xt = \frac{aet}{at+bt'+ct''}$$

$$\frac{xbt'}{a} = \frac{bet'}{at+bt'+ct''}$$

$$\frac{xct''}{a} = \frac{cet''}{at+bt'+ct''}$$

té

Z Zrównań wyciąga ſię reguła Arytmetyczna towarzyſtwa.

te Zrównania wyrażaią nam bardzo iaśnie *regułę Towarzyſtwa*, to ieſt:,, że zyſk przywiązany do nierównych ſumm i czaſów każdego Kupca, otrzymuie ,, ſię mnożąc maſsę ogólną zyſku przez czas i ſummę ,, każdego zakładową; a mnogość dzieląc przez ſummę trzech mnogości z każdego w ſzczególności zakładu przez odpowiadaiący mu czas,,. Ieżeli ieſzcze nawet zakłady położemy w równym czaſie, będzie $t = t' = t'' = 1$, otrzymamy:

$$x = \frac{ae}{a+b+c}, \quad \frac{xb}{a} = \frac{be}{a+b+c}, \quad \frac{xc}{a} = \frac{ce}{a+b+c},$$

i pytanie naſze przywiedzione do naypierwſzego ſtanu, odkrywa nam w Zrównaniach tę regułę, za którą idąc wynaydziemy podziały zaraz na początku rozdziału wymienione. Te wſzyſtkie korzyści tracemy działaiąc w liczbach, dla przyczyn iuż wyłożonych, których prawdę oſtatnie te Algebraiczne wypadki daią nam iak nayoczywiściey uczuwać, a w nich poznać te nieprzyzwoitości, które pokazawſzy ſię pierwſzym wynalazcom wciągły ich w potrzebę użycia znaków ogólnych. Widzieliśmy ieſzcze, że Zrównania ogólnie rozwiązane ſtawiaią umyſłowi zbiór wielu prawd i twierdzeń w nich zawarty. Wydobywanie takowych prawd z oſtatnich wypadków Algebraicznych, potrzebuie rozbierania tego ſkładu myśli na inne proſcieyſze i na różne przypadki ſzczególne razem w Zrównaniu ogarnione, co nazywaią niektórzy Geometrowie *Analyſis*, różniąc ią tem od Algebry, że ta oſtatnia poddaiąc nam tylko znaki i działania do gatunku pytań przywiązane, zależy iedynie na prowadzeniu nas do Zrównania wyrażaiącego wartość rzeczy nieznaney przez znane: po czem dopiero naſtępuie Analyſis zatrudniaiąca umyſł rozbieraniem Zrównań na różne prawdy w nich zawarte, y wyciąganiem ogólnych prawideł ſłużyć nam maiących zawſze na rozwiązanie wſzyſtkich iakich-

Opiſanie *Analyſis* podług niektórych Geometrów: iey różnica od Algebry.

kolwiek

kolwiek pytań związanych z tém, któré nás do tych wypadków przywiodło. Zatrzymámy ſię ieſzcze z naſzem zdaniem nad tą różnicą; bo ſobie zachowuiemy inną porę wytłómaczeniá obſzerniey w tym punkcie naſzego ſpoſobu myślenia.

§. VII.

Początki prowadzące do rozwiązaniá pytán wielé nieznanych rzeczy zamykaiących.

Pytanie dopiero rozwiązane ſłużyć nám może za wzór do innych iakichkolwiek podobnego rodzaiu, to ieſt: gdzie nie zachodzi do wynalezienia tylko iedna rzecz nieznaná. Ale iakże ſobie poſtąpić maiąc wiele na ráz rzeczy nieznanych w pytaniu? Pewni ieſteśmy, że rzeczy nieznane w pytaniu nie wynayduią ſię inaczey, tylko za pomocą doſtrzeżonego ich związku z rzeczami znanemi; że ieden doſtrzeżony związek nie może nám odkryć tylko iednę rzecz nieznaną: więc maiąc wiele na raz rzeczy nieznanych do wynalezienia, potrzeba nám tyle związków rzeczy nieznanych z znanemi, ile zachodzi niewiadomych rzeczy w pytaniu. Potrzeba ieſzcze aby każdy s tych związków był różny od innych: bo ieżeli rzeczy nieznane ſą prawdziwie różne, każda z nich zawiſła od innego ſtóſunku z rzeczami znanemi: inaczey, pytanie naſze nie maiąc tylko na pozór wielé nieznanych rzeczy, które zależą od wynalazku iedney, należałoby do rodzaiu pytań roſtrząſanych w §§. poprzedzaiących. Idzie więc za tem, że maiąc wiele do wynalezieniá rzeczy, potrzeba nám mieć tyle Zrównań ile zachodzi niewiadomych ilości w pytaniu, z których każdé ſłużyć nám má do wyciągnieniá wartości iedney nieznaney. Gdyby każde s takowych Zrównań nie zawierało w ſobie tylko iednę niewiadomą ilość złączoną z wiadomemi; rozwiązawſzy ie po iednemu podług reguły wyżey podaney, odkrylibyśmy zaraz to wſzyſtko cośmy ſobie zadali. Ale ktokolwiek z nás pilnie uważał drogi wynalazku w pierwſzem pytaniu, powinienby teraz uczuć, że doſtrzeżenie takowych związków każdey rzeczy nieznaney z ſamemi tylko znanemi, potrzebowałoby oſtatniego wyſilenia naſzych myśli, i byłoby barzo małey liczbie rozumów doſtępne. Smiem nawet trzymać że w przypadku znaczney liczby rzeczy nieznanych, byłoby niepodobne; ponieważby ciągło za ſobą wielką mnogość bardzo zawikłanych kombinacyi w iednym prawie momencie, co przechodzi granicę naydzielnieyſzey duſzy. Wſpomagamy przeto umyſł naſz w takowych dociekaniach proſtem uważaniem związków między ilościami iakiemikolwiek. Wiemy że te wyciągaią ſię z warunków pytania: w tych zaś warunkach tak rzeczy pokazuią ſię zwikłane, iż iedna nieznana wiąże ſię z drugą, zaczem zrównania ſtąd wypadaiące będą takowe, że każde z nich zawierać może wſzyſtkie ilości nieznane różnym ſpoſobem związane z znanemi. Obiaśniymy to przykładem.

,,Iedna bryła zmięſzanego kruſzcu z złota i ſrebra ,,ma w ſobie obiętości *(Volumen)* dwanaście calów ,,kubicznych, waży zaś ſto uncyi. Pytam ſię wieleż ,,pod tą obiętością i wagą zamyka złota, a wiele ſrebra?, wiedząc że ieden cal kub: złota waży $12\frac{2}{3}$,,uncyi, ieden zaś cal kub: ſrebra waży $6\frac{8}{9}$ uncyi?,,

W tem zadaniu mamy dwie nieznane rzeczy od ſiebie różne, ilość złota, i ilość ſrebra wchodzącą w ſkład maſſy zmięſzaney: potrzeba nam więc dwóch związków, a z nich tyleż zrównań. W każdey z dwóch ilości nieznanych zachodzi uważać obiętość i wagę: ponieważ zaś wiemy ciężar iednego calu każdego kruſzcu, zoſtaie nam do wynalezienia ſama ich obiętość w calach, którą mnożąc przez ciężar iednego calu każdemu kruſzcowi właściwy, wynaydziemy wagę. Nazwiymy więc obiętość złota wchodzącego w bryłę zmieſzaną, x; obiętość ſrebra y; a rozważywſzy dobrze zadanie, wypadną nam dwa związki między temi ilościami, z których ieden należeć będzie do obiętości, a drugi do ciężaru. Naſamprzód podług

warunków

warunków pytania ſumma dwóch obiętości kruſzcowych bydź powinna równą 12: s kąd wypada pierwſze Zrównanie - - - $x+y=12$. Powtóre: dwie te obiętości ważyć powinny ſto uncyi, aże ieden cal złota waży $12\frac{2}{3}$ uncyi, więc x calów waży $12\frac{2}{3}x$ czyli $\frac{38}{3}x$: podobnym ſpoſobem wypada że y calów ſrebra waży $6\frac{8}{9}$ y uncyi, czyli $\frac{62}{9}$ y, ieżeli ieden cal waży $6\frac{8}{9}$ czyli $\frac{62}{9}$; s kąd wynika drugie Zrównanie: $\frac{38}{3}x+\frac{62}{9}y=100$,

Mamy teraz dwa Zrównania $x+y=12$; $\frac{38}{3}x+\frac{62}{9}y=100$. s których każde zamyka obydwie nieznane ilosci. Doſyć nam ieſt wniyśdź w lekkie rostrząśnienie naſzych myśli aby ſię przekonać, że póty żadne s tych Zrównań nie odkryie nam wartości iakieykolwiek nieznaney, poki w niem druga nieznana ilość oznaczoną nie będzie. Dla czegoż tyle zagadnień nie tylko w naukach moralnych i Fizycznych, ale nawet w ſprawach życia potocznych zoſtaie nierozwiązanych, chociaż znamy wyſtarczaiaca liczbę związków do ich odkrycia: oto dla tego, że te zagadnienia wiążą ſię z innemi rzeczami nieznanemi do którycheśmy ieſzcze oddzielenia lub oznaczenia nie przyſzli. Daymy teraz że reflexya ciagłem zaſtanowieniem ſię i kombinacya dała nam tey nieznaney rzeczy, od którey zagadnienie zależy, wydobydź znaczenie w innych zwiazkach utopione, i wyrazić ie przez ſame rzeczy znane; na ten czas na mieyſce tey nieznaney rzeczy kładziemy iey naturę odkryta i zagadnienie naſze ułatwiamy. Cóż to znaczą te wſzyſtkie drogi myślenia uważaiąc ie geometrycznie? oto nie mogąc rozwiązać zagadnienia mieliśmy rzeczy nieznane zwikłane we wſzyſtkich związkach: przenoſząc atoli wartość iedney rzeczy nieznaney z iednego Zrównania do drugiego przerabiamy każde z nich na związek między iedną tylko nieznaną i rzeczami znanemi, a tym ſpoſobem naſze dociekania przyprowadzamy do tego ſtanu, w iakim było Zrównanie naſze wyżey rozwiązane. Tać to ſamą drogą iśdź nam należy chcąc z dwóch Zrównań $x+y=12$ - - - $\frac{38}{3}x+\frac{62}{9}y=100$, odkryć to, czego ſzukamy, to ieſt: potrzeba nam wartość iedney nieznaney ilości wyciągnąć z iednego Zrównania i włożyć ią w drugie: i tak mamy $x=12-y$, włożywſzy za x, $12-y$ w drugie Zrównanie; wypadnie $\frac{38}{3}(12-y)+\frac{62}{9}y=100$, czyli znoſząc ułomki $3.38(12-y)+62y=900$ - - $1368-114y+62y=900$: Zrównanie nie zamykaiące tylko iednę nieznaną y, ktore rozwiązawſzy podług §. 4. wynaydziemy $y=\frac{468}{52}=9$, więc $x=12-9=3$. Przeto w bryle mięſzaney zamyka ſię 9. calów kubicznych ſrebra, a 3 cale złota.

Przyſzliśmy do wypadków barzo ſzczególnych dla tego żeśmy użyli liczb. Rozwiążmy ieſzcze to ſamo zadanie ogólnieyſzym ſpoſobem, nazwawſzy Obiętość całey maſsy a; ciężar iednego calu kubicznego cięższego kruszcu b; drugiego lekſzego c, ciężar całey maſsy d: będzie $x+y=a$ - - $bx+cy=d$, działaiąc tym ſamym ſpoſobem co i przedtem znaydziemy - - - $y=\frac{d-ba}{c-b}$; $x=\frac{ca-d}{c-b}$. Te dwa Zrównania ſwą ogólnością przywiodły nas do reguły powſzechney na wſzyſtkie podobnego rodzaiu pytania. Chcąc ią wyciągnąć zrozumiymy wprzód znaczenie terminów: ponieważ c znaczy ciężar iednego calu kub:, a zaś znaczy obiętość całey maſsy, więc ca znaczy ciężar całey maſsy zrobioney z ſamego lekſzego kruſzcu: $b-c$ znaczy różnicę cięſzkości gatunkowych dwóch kruſzców zmieſzanych. Dwa więc Zrównania wyrażaią naſtępuiącą regułę.

,, Chcąc doyśdź obiętości kruſzcu ciężſzego, rachuy
,, ciężar bryły iak gdyby była zrobiona z ſamego kruſzcu
,, lekſzego, odciągniy ten ciężar od ciężaru maſsy
,, zmięſzaney, i reſztę stąd wynikaiącą rozdziel przez
,, różnicę dwóch ciężkości gatunkowych. Wieloraz
,, podziału da obiętność kruſzcu ciężſzego.

,, Chcąc zaś wynaleśdź obiętość kruſzcu podleyſzego:
,, ſzukay ciężaru maſsy, iak gdyby była zrobioną
,, z ſamego ciężſzego kruſzcu, od tego odciągniy ciężar
,, maſsy zmięſzaney, a reſztę rozdzieliwſzy przez
,, różnicę dwóch ciężkości gatunkowych wypadnie
,, obiętość lekſzego kruſzcu.

Ta reguła nazywa ſię w Arytmetyce **REGUŁĄ MIĘSZANIA** (*Regula Alligationis*), za pomocą którey wiele innego rodzaiu pytań może ſię rozwiązać: n.p. to:

,, Iedna ſtopa kubiczna wody morſkiey waży 74
,, funty; stopa zaś wody deſzczowey waży 70 funtów:
,, pytam ſię wieleby potrzeba zmięſzać wody
,, morſkiey i deſzczowey ażeby iedna ſtopa tey mięſzaniny
,, ważyła 73 funty,,. Rozwiązanie tego pytania łatwo ſię bardzo wyciąga z naſzych Zrównań uczyniwſzy $a=1$, $b=74$, $c=70$, $d=73$ wypadnie ilość wody morſkiey $x=\frac{3}{4}$; ilość wody deſzczowey $y=\frac{1}{4}$.

Uwagi które nas przywiodły do rozwiązania Zrównań 1go ſtopnia zamykaiących wiele ilości nieznanych kończą ſię na tem, ażeby maiąc kilka Zrównań między ilościami nieznanemi x, y, z, i t. d. przerobić ie na innych tyleż, z którychby każde zamykało w ſobie iednę tylko niewiadomą. Spoſób którego tu użyiemy, wypada z pierwſzego wnioſku §. 5. Niech będą dwa Zrównania: - - - - - - $ax+by+c=o$ - - - - $a'x+b'y+c'=o$, chcąc wyrzucić x, mnożę całe Zrównanie pierwſze przez wſpół-czynnika x w drugiem, to ieſt przez a'; potem mnożę Zrównanie drugie przez a to ieſt przez wſpół-czynnika x w pierwſzem, a tak terminy zawieraiące x w obydwóch Zrównaniach przywiodłſzy do tegoż ſamego wyrazu, ieżeli maią iedne znaki odciągam iedno Zrównanie od drugiego; ieżeli zaś miałyby znaki przeciwne, dodaię ie razem: przez co otrzymam nowe Zrównanie bez x: to ieſt wykonywaiąc to wſzyſtko:

$$aa'x+ba'y+a'c=o \quad - - - \quad aa'x+b'ay+ac'=o$$

$$(a'b-ab')\,y+a'c-ac'=o \quad - - - \quad y=\frac{-a'c+ac'}{a'b-ab'}$$

Chcąc wyrzucić y aby otrzymać wartość na x; mnożę pierwſze Zrównanie przez b', drugie przez b, a odciagnąwſzy tamto od tego otrzymam Zrównanie w ktorem nie będzie y.

$$ab'x+b'by+b'c=o \quad - - - \quad a'bx+bb'y+bc'=o$$

$$(a'b-ab')\,x+bc'-b'c=o \quad - - - \quad x=\frac{b'c-bc'}{a'b-ab'}$$

Niech będą trzy Zrównania:

(A) $ax+by+cz+d=o$ - - (B) - - $a'x+b'y+c'z+d'=o$

(C) - - $a''x+b''y+c''z+d''=o$

działaiąc ſpoſobem dopiero wyłożonym, kombinuię ich dwa na raz; i tak kombinuiąc (A) z (B) aby wyrzucić y, przyidę do Zrównania:

$$(ab'-a'b)\,x+(b'c-bc')\,z+b'd-bd'=o \quad - - \quad (D)$$

kombinuiąc potem (A) z (C) tymże ſamym końcem, otrzymam:

$$(ab''-a''b)\,x+(cb''-bc'')\,z+b''d-bd''=o. \quad - - \quad (D').$$

Powtóre kombinuiąc (A) z (B) aby wyrzucić z, wypadnie mi:

$$(ac'-a'c)\,x+(bc'-b'c)y+dc'-d'c=o \quad - - - - \quad (E).$$

Kombinuię znowu (A) z (C) na ten ſam koniec i przyidę do

$(ac''$

$$(ac''-a''c)x+(bc''-b''c)y+dc''-d''c=0 \quad \cdots \quad (E').$$

Tąż ſamą ſztuką kombinuię (*D*) z (*D'*) abym z nich wyrzucił *z*, i otrzymawſzy zrównanie na ſamo *x*, wyciągnę z niego tę wartość:

$$x=\frac{(ab'-a'b)(b''d-bd'')-(b'd-bd')(cb''-bc'')}{(ab'-a'b)(cb''-bc'')-(b'c-bc')(ab''-a''b)}$$

Z tychże ſamych zrównań wyrzuciwſzy *x*, otrzymam na *z* naſtępuiącą wartość:

$$z=\frac{(b'd-bd')(ab''-a''b)-(b''d-bd'')(ab'-a'b).}{(ab'-a'b)(cb''-bc'')-(b'c-bc')(ab''-a''b).}$$

Na koniec kombinuiąc (*E*) z (*E'*) wyrzucam *y*, i wypadnie mi zrównanie na *y*:

$$y=\frac{(dc'-d'c)(ac''-a''c)-(dc''-d''c)(ac'-a'c).}{(ac'-a'c)(bc''-b'c)-(bc'-b'c)(ac''-a''c).}$$

Tymże ſamym ſpoſobem, to ieſt przez kombinacyą dwóch naraz Zrównań, poſtępuiąc ſobie z więkſzą ich liczbą potrafiemy ie przerobić na inne nie zamykaiące tylko iednę ilość nieznaną. Z tych przykładów widziemy oczywiście, iak oſtatnie wypadkowe Zrównania znacznie ſą zawikłane; to zawikłanie tem ſię barziey pomnaża, im z więkſzą liczbą Zrównań mamy do czynienia. Będziemy mieli ſpoſobność wyłożenia na innem mieyſcu tych wſzyſtkich nieprzyzwoitości, które ſą przywiązane do niedoſkonałości ſpoſobów w tym punkcie nam ſłużących.

§. VIII.

Tłómaczy ſię ſtán poznáwaniá, kiedy w pytaniu mniéy zachodzi związków niżeli rzeczy nieznanych: z kąd ſię wyciąga natura pytán nieoznaczonych.

Iużeśmy ſię z naypewnieyſzych początków myślenia i z natury Zrównań zupełnie przekonali, że chcąc pytanie iakie zawieraiące kilka nieznanych rzeczy doſtatecznie rozwiązać i wynaleśdź wartość każdey z oſobna, potrzeba nam tyle Zrównań ile rzeczy niewiadomych. Trafia ſię atoli częſto, że pytanie iakie więcey zawiera rzeczy nieznanych niżeli w niem upatrzyć można związków różnych: na ten czas nie maiąc wyſtarczaiącey liczby Zrównań na przerobienie ich takie, ażeby każde z nich zamykało iednę tylko nieznaną, wſzyſtkié ſpoſoby na rozwiązanie pytania ſtaią ſię póty bezſkuteczne, poki nie dopełniemy związków brakuiących. Opuſzczony w tym razie umyſł od ſpoſobów do ogólnego rozwiązania potrzebnych, ucieka ſię do pewnych ſzczególnych wartości, które podług upodobania tylu ilościom nieznanym nadaie, ilé mu Zrównań brakuie. Takowe partykularne przypuſzczenia ſą nowemi warunkami wprowadzonémi w pytanie, i razem nowemi związkami arbitralnémi zaſtępuiącemi mieyſce koniecznych. Aże te ſzczególne wartości zawiſły od upodobania, iako to rosciągnać ſie może bez końca do iakichkolwiek wartości; tak liczba odpowiedzi na takowe pytanie bydź może nieſkończona. Przechodząc bowiem wolą naſzą naſtępnie po wſzyſtkich ſzczególnych przypadkach, na każdy znaydziemy inną odpowiedź przywiązaną do każdey z oſobna wprowadzoney wartości. I s tych ci to przyczyn takowe pytania maią imię Nieoznaczonych (*Problemata indeterminata*). Ieden nayprościeyſzy przykład wyſtarczy nam do obiaśnienia tego cośmy dopiero mówili:

„Wynaleśdź dwie liczby których ſumma byłaby „równą 36.„ Nazwawſzy obie te liczby nieznané x, y; mamy z warunku pytania to tylko iedno Zrównanie:

$x+y=36$ - - - $x=36-y$. W tym przykładzie widziemy oczywiście że poty nie odkryiemy znaczenia x; póki drugiey ilości nieznaney y, nie nadamy pewney wartości: kładąc więc za y iakié nam ſię tylko podoba liczby, każdey z nich będzie odpowiadać inſzá wartość na x: i tak biorąc

za y - - - - - 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t.d.
Odpowiada wartość na x 35, 34, 33, 32, 31, 30, i t.d.

a iako iśdź możemy po wſzyſtkich liczbach iakichkolwiek w y; tak paſmo odpowiedzi na naſze pytanie ciagnąć ſię może bez końca. Każda s tych wartości nic innego nie ieſt tylko nowe Zrównanie, ktore w niedoſtatku na rozwiązanie pytania doſtarczamy.

my. Przenioſłſzy uwagę naſzę z Geometryi do innych nauk i ſpraw życiá, znaydziémy w nich niezmierną liczbę takowego rodzaiu pytań. Z kądże powſtało tylé różnych przypuſzczeń do tłomaczeniá wielu ſkutkow natury, ktoremi romanſowé głowy zapełniły Fizykę? s kądże tylé rozmaitych domyſłów i ſyſtematycznych przyczyn, ktoremi w tylu naukach i ſprawach czyniémy paradę z naſzéy niewiadomości? Wſzyſtkié te pytaniá ſą względem nas nieoznaczoné, w których rozumowi brakuie doſtatecznéy liczby związków do ich ułatwieniá. Zaſtępuiąc imaginacya ten niedoſtatek rzeczy znanych i warunków, poddaie rożné przypuſzczeniá rozumowi; z których on wyciagá ſkutki rzetelné albo uroioné, zgodné lub opaczné ſwym początkom podług prawéy lub fałſzywéy kombinacyi. A iako kraina domyſłu ieſt niezmierzoná, tak liczba tłomaczeń bydź muſi bez granic; a rózum ludzki poty ſię błąka i gubi w niepewności poki doſtrzeżonéj prawdziwé związki nie dopełnią iego potrzeb, i nie poſtawią go w ſtanie odkrycia prawdy, ktorá dzieła imaginacyi i domyſłu obalá.

§. IX.

Z natury pytáń nieoznaczonych wyciaga ſię barzo ogólny początek niezmiernie rozległégo w całéy Matematyce użyciá.

Kiedy w innym rodzaiu poznawaniá niedoſtatek związków w zadaniach nieoznaczonych ſtał ſię zrzódłem tylu błędów; duch geometryczny ſzczęśliwſzy zawſze w dociekaniu i użyciu prawdy, odkrył w nim zrzódło niezliczonych i nieprzepartych wynalazków. Zatrudniymy ſię nayiaśnieyſzém tego początku wyłożeniem:

Ponieważ maiąc więcey ilości nieznanych niżeli zrównań, mamy wolność wprowadzeniá w pytanie naſzé tylé warunków i przypuſzczeń, ilé nam związków brakuie; te zaś wſzyſtkié nowé przypuſzczeniá zawiſły od upodobaniá naſzego; więc w ſzukaniu iakieykolwiek prawdy, możémy wprowadzić ſpoſoby iakié nam ſię tylko podobá, bylebyśmy pytanie naſzé przerobili na nieoznaczoné przez wprowadzenie w nié więcey ilości nieznanych. Té bowiem zoſtawuiąc nam wolność zakładania iakichkolwiek kondycyi, daią nam prawo czynienia takich przypuſzczeń, które pytanie naſze przywiążą do takich ſpoſobów rozwiązania, iakieśmy ſobie obrali: Owſzem możemy nawet za pomocą nowych nieznanych ilości, zaraz takowe kondycye wprowadzić, które nam natychmiaſt pytanie naſze rozwiążą. A iako bez naruſzenia natury rzeczy możemy w Zrównania iakiékolwiek wciągnąć więcey nieznanych rzeczy, tak w pytanie nasze możemy wprowadzić drogi wynalazku, iakie nam ſię tylko pokażą nayprościeyſzé, lub założyć kondycye odkrywaiącé nam natychmiaſt to, cośmy ſobie zadali. Ten początek dobrze obięty umyſłem ieſt ieden z nayogólnieyſzych i z nayobfitſzych podbiiaiący nam w iakiemkolwiek badaniu ſpoſoby z natury ſwoiey proſte a czeſto bez tey pomocy w wielu pytaniach nieużyte, i że tak rzekę uporne. Używanie tego początku ieſt niezmierne po wſzyſtkich Matematyki i Fizyki częściach lubo pod rozmaitą poſtacią i odmianą. My ſami użyiemy go w ciągu teraźnieyſzey nauki: abyśmy zaś tem barziey oświecili ſię o ſpoſobie poſtąpienia ſobie z nim, przyſtóſoymy go teraz do teoryi Eliminacyi, ktorąśmy wyżey podług innych ſpoſobów odbyli.

Niech będą dané dwa zrównania:

$$(A) \cdot\cdot\; ax+by+c=0 \;\cdot\cdot\; (B.) \cdot\cdot\; a'x+b'y+c'=0$$

chcąc ié przerobić na inné dwa, z którychby iedno zawierało ſamo x, drugié zaś ſamo y; biorę trzecią nieznaną ilość m, i przez nię rozmnożywſzy pierwſzé zrównanie, dodaię ié do drugiego, s czego wypada:

$$(C) \cdot\cdot\; (ma+a')x+(mb+b')y+mc+c'=0$$

ponieważ do rozwiązania mego pytania założona ieſt kondycyá, aby n.p. z zrównania (C) wypadło x; maiąc iuż prawo wprowadzenia iey, czynię $-ma+a'=0$ (D). i zoſtaie mi ſię $\cdot\cdot\cdot$ $(mb+b')y+mc+c'=0$ $\cdot\cdot\cdot\cdot$

$$y=-\frac{mc+c'}{mb+b'}$$

Zro-

Zrównanie *(D)* nazywa ſię ZRÓWNANIEM WARUNKOWEM *(Aequatio Conditionalis)* ſłużące na oznaczenie nowey nieznaney ilości m. Iakóż z *(D)* wyciągam $m=-\frac{a'}{a}$, a włożywſzy tę wartość za m w y, wypada $y=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$.

Chcąc zaś z Zrównania *(C)* wyrzucić y, czynię - - $mb+b'=o$ i zoſtaie mi ſię $(ma+a')x+mc+c'=o$ - - - $x=-\frac{mc+c'}{ma+a'}$; włożywſzy w x za $m=-\frac{b'}{b}$ iego wartość: otrzymam, - $x=\frac{bc'-b'c}{b'a-ba'}$

Maiąc trzy Zrównania:

$ax+by+cz+d=o$ - - $a'x+b'y+c'z+d'=o$

$a''x+b''y+c''z+d''=o$

ponieważ z każdego przychodzi wyrzucić dwie ilości nieznane, potrzeba wprowadzić dwie nowe nieznane, któreby mi dały prawo uczynienia dwóch warunków potrzebnych: mnożę więc pierwſze przez nieznaną m, drugie przez n, i dodaię wſzyſtkie trzy razem; s kąd powſtaie:

$(ma+na'+a'')x+(mb+nb'+b'')y+(mc+nc'+c'')z+md+nd'+d''=o$.

chcąc teraz wyrzucić y, z, razem, czynię:

$$\left.\begin{array}{l} mb+nb'+b''=o \\ mc+nc'+c''=o \end{array}\right\} (D).$$

zoſtaie ſię $x=-\frac{md+nd'+d''}{ma+na'+a''}$. Dwa Zrównania warunkowe *(D)* ſłużą mi do wynalezienia m, n, które rozwięzuiac podług przykładu pierwſzego, mnożę pierwſze z nich przez p, i dodawſzy ie razem, otrzymam - - - $(pb+c)m+(pb'+c')n+pb''+c''=o$
chcac wyrzucić z niego n, czynię $pb'+c'=o$ - - - $p=-\frac{c'}{b'}$, zoſtaie mi ſię $m=-\frac{pb''+c''}{pb+c}=\frac{c''b'-c'b''}{bc'-b'c}$

chcąc zaś wyrzucić m, wypada: $pb+c=o$ · $p=-\frac{c}{b}$

$n=-\frac{pb''+c''}{pb'+c'}$ a włożywſzy za p iego wartość $=\frac{c}{b}$,

$n=\frac{cb''-c''b}{bc'-b'c}$ te dwie wartości za m, n, włożywſzy w zrównanie na x, wypada:

$$x=-\frac{c''b'd-c'b''d+cb''d'-c''bd'+c'bd''-b'cd''}{c''b'a-ac'b''+a'cb''-a'bc''+a''bc',-a''cb'}$$

tymże ſamym ſpoſobem postępuiąc znaydziemy:

$$y=-\frac{ad'c''-a'dc''+a''dc'-ad''c'+a'cd''-a''cd'}{ab'c''\text{[illegible]}ab''c'+a'cb''-a'bc''+a''bc'-a''cb'}$$

$$z=-\frac{ab'd''-a'bd''+a''bd'-ab''d'+a'b''d-a''b'd}{ab'c''-ab''c'+a'cb''-a'bc''+a''bc'-a''cb'}$$

Té trzy Zrównania roſtrząśnione co do układu ilości w nie wchodzących, tak iako dwa w pierwſzym przykładzie, pokażą nam reguły ſłużyć mogące do rozwiązania iakichkolwiek dwóch lub trzech zrównań między tyleż niewiadomemi ilościami. Wſzyſtkie iak widziemy ilości nieznane maią w ſwoich wyrazach tegoż ſamego mianownika, i iednoſtayność ta pokazałaby nam ſię w większey liczbie Zrównań tym ſpoſobem rozwiązanych. Stóſuiąc teraźnieyſze trzy Zrównania s temi któreśmy w §. 7. s tychże ſamych związków przez mnożenie i kombinacyą dwóch naraz wyciągnęli byli, widzemy, że tamte ſą zawikleyſze, i zamykaiące więcey mnożników iak te. S kąd ſię oczywiście pokazuie; że Zrownania na końcu §. 7. maią w ſobie pewnego mnożnika ſpólnego licznikowi i mianownikowi, przez którego rozdzielone wzięłyby taki wyraz iak teraźnieyſze. A iako tego mnożnika ſpólnego nie ieſt tak łatwo doſtrzec, tak gdybyśmy mieli do czynienia z większą liczbą Zrównań, ſpoſób §. 7. przyprowadziłby nas do barzo zawikłanych oſtatnich wypadków, którehy także zawierały iakowych mnożników zbytnich i nie należących bynaymniey naymniéy do naſzego pytania. Tę nieprzyzwitość wiele innych za ſobą ciągnacą doſtrzegli Geometrowie, i pracowali nad wynalezieniem takówey teoryi Eliminacyi, któraby ich w oſtatnich Zrównaniach przywiodła do wypadków nie barziey zawikłanych iak natura rzeczy wyciąga. Wſzyſtkie ich uſiłowania w tym punkcie nie były dotąd barzo pomyślne: nayſzczęśliwiey atoli w nich poſtąpił J. P. *Bezout* Akademik Paryzki w świeżem ſwoiem dziele (a). Będziemy mieli okazyą w wyżſzych częściach Matematyki roſtrząſnąć tego Autora teoryą, i poznać iak wiele ieſzcze do iey doſkonałości brakuie. Od tych nieprzyzwoitości ten nawet ſpoſób, ktoregośmy dopiero użyli, nie ieſt wyięty; że atoli w małey liczbie Zrównań nie pokazuią ſię zaraz, powinniśmy go przenieść nad pierwſzy. Stóſuiąc go do liczby iakieykolwiek n Zrównań, potrzeba nam przybrać $n-1$ ilości nieoznaczonych, przez które mnożąc tyleż Zrównań dodamy ie wſzyſtkie z ſobą; a chcąc wyrzucić $n-1$ ilości nieznanych, uczyniemy tyleż wſpół-czynnikow zero, co nam da $n-1$ Zrównań warunkowych ſłużących na oznaczenie tyleż nowo wprowadzonych niewiadomych ilości. Chcąc te $n-1$ Zrównań rozwiązać, przybierzemy znowu $n-2$ ilości nieznanych, przez które rozmnożywſzy tyleż warunkowych Zrównań i dodawſzy wſzyſtkie $n-1$ z ſobą, wyciągniemy tym co i przedtem ſpoſobem $n-2$ innych nowych Zrównań warunkowych. S tych znowu rozmnożywſzy $n-3$ przez tyleż nowo wprowadzonych ilości nieznanych, przyidziemy do tyleż nowych innych warunkowych Zrównań, których liczba za każdem działaniem i kombinacyą zmnieyſza ſię iednością, aż naoſtatek przyſzedłſzy do dwóch oſtatnich Zrównań, i s temiż podobnie poſtąpiwſzy odkryiemy, wartości $n-1$ ilości nieznanych, ktoreśmy wprowadzili. Na każdą zaś ilość nieznaną w Zrównania podane wchodzącą też ſame działania powtarzaiąc przyidziemy do

---

(a) Théorie generale des Equations Algebriques. à Paris 1779.

do wyrażenia każdey w ſzczególności nieznaney przez funkcye znanych, na czem rozwiązanie Zrównania zależy. Łatwo nam barzo przekonać ſię z wyżſzych wiadomości, że wſzyſtkie Zrównania pierwſzego ſtopnia, w których wiele nieznanych ilości zachodzi, wyſtawić możemy w tem ogólnem:

$$ax+by+cz+du+ \text{ i t. d. - - - } +k=o.$$

§. X.

Z rożności Pytań wykładaią ſię rożne gatunki Zrównań i właſności im ſłużące,

Nie zaſzkodzi nam tu powtórzyć to, cóśmy iuż wyżey namienili, że maiąc do rozwiązania iakowégo pytania tyle Zrównań ile nieznanych ilości, potrzeba koniecznie, aby każde s tych Zrównań wyrażało inny związek; potrzeba więc aby iedno Zrównanie nie było funkcyą drugiego; inaczey, wypadki nasze nic nie będą znaczyć: i tak n.p. gdyby pytanie iakie przywiodło nas do takich dwóch Zrównań $6x+2y-16=o$ - - - $3x+y-8=o$; wynaydziemy

$\frac{16-2y}{6}=\frac{16-2y}{6}$ Zrównanie, które zamykaiąc z obydwoch ſtron też ſame ilosci i terminy, nic nas nie uczy i nazywa ſię TOSAME (*Aequatio identica*): przyſzliśmy zaś do takiego Zrównania dla tego, że z dwóch początkowych Zrównań drugie nic innego nie ieſt, tylko pierwſze rozdzielone przez *2*. co nowego związku nie wyraża: i takowe przypadki lubo ſię zdaią na pozór zamykać tyle Zrównań ile potrzeba, należą atoli w rzeczy ſamey do klaſsy pytań nieoznaczonych. Utkwiymy to ſobie teraz w pamieci, że Zrównania toſame nie wyrażaią żadnego zwiazku między ilościami, że ich związek cały na tem zależy, iż każdy termin iednego członka ieſt ze wſzyſtkiem równy terminowi podobnemu drugiego. *Powtóre*: że wſzyſtkie Zrównania wyrażaią *toſamość*, bo wyrażaia związek podług §. 3. ale przez to nie wſzyſtkie Zrównania ſa toſamemi, ale tylko te; które wyrażaią toſamość co do ſtóſunku i co do terminów. Przytrafić ſię ieſzcze może, że związek w iednem Zrównaniu

będzie

będzie przeciwny związkowi drugiego, i tak n. p. gdybyśmy przez iakie pytanie przyszli do takich dwóch Zrównań [illegible]$y+12x-4z=0$. $2y+24x-3z=0$ rozwiazawſzy ié znaydziemy $4z=16$: ta nieprzyzwoitość oſtrzega nas o przeciwnościach któré ſię wmięſzały w warunkach naſzego pytania, a zatem o niepodobieńſtwie wyciągnienia z niego prawdy.

Roſtrząſnęliśmy dwa przypadki Zrównań pierwſzégo ſtopnia, *piérwſzy:* kiedy tylé wypada związków ilé ilości nieznanych; *drugi:* gdy iaka liczba takowych związków brakuie: wyſtawić ſobie ieſzcze można *trzeci:* kiedy liczba Zrównań więkſza ieſt od liczby niewiadomych ilości. Takowy zbytek Zrównań ścieśnia tem barziey naſzé poznawanie, im ieſt więkſzy: tak iak niedoſtatek związków rościąga daléy naſzę wolność myślenia aż do krainy imaginacyi i domyſłu. Każdé bowiem Zrównanie zawiera inſzé warunki, którym będąc obowiązani uczynić zadoſyć, muſzemy ieſzcze przypadki pewné dzielić na ſwoie klaſsy, i w tych naznaczać excepcye przywiązané do kondycyi w zbytnich Zrównaniach zawarte. Znayduiemy ſię na ten czas w podobnym ſtanie owego badacza natury, który doſtrzegłſzy iakiego prawa między pewnemi ſkutkami ciał, rościągnął ie odważnie do wſzyſtkich okoliczności mieyſca i czaſu, w którym takowé ſkutki dziać ſię mogą: wtém nowa iaka obſerwacyá odkryła mu przypadek odſtępuiący od tego prawa, i dala mu poznać że iego początek podlega excepcyi do pewney odmiany czaſu lub mieyſca przywiązaney, która ogranicza iego ogólność. Nowa ta obſerwacyá nic innego nie ieſt, tylko nowy zbytkuiący związek ścieśniaiący iego prawo i myślenie. Widziemy przeto że iak niedoſtatek tak zbytek związków w iednéy rzeczy, ieſt myśleniu naſzemu ſzkodliwy; iak pierwſzy przez uſzczególnianie, tak i drugi przez zbyt śmiałe upowſzechnianie myśli bydź może zrzódłem błędu. Pierwſzy każe nam bydź pracowitemi w dochodzeniu prawdy, drugi uczy nas oſtrożności w iey ſtóſowaniu; obydwa obiaśniaią nas o ſtanach i drogach naſzego rozumu w poznawaniu rzeczy: przekonamy ſię o tem w dalſzym ciągu naſzey nauki.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Uwagi nad początkami iuż odkrytemi prowadzą nas do Zrównań wyżſzych Stopni, do poznania FUNKCYI WIELO-KSZTAŁTNYCH i działań im ſłużących; z których przychodzemy do rozwiązania ZRÓWNAN DRUGIEGO STOPNIA, ich własności, i do nowych początków myślenia wciągaiących nas w rozlegleyſze poznawanie Zrównań i Funkcyi.

§ XI.

Nowy rodzay Zrównan odkrywá nám różne potęgi w Funkcyach i działaniu im właściwe.

Abyśmy nic nie odſtąpili od łańcucha naſzych myśli ciągniecymy daley uwagi nad ſpoſobem Eliminacyi, który przerabiaiąc Zrównania między wielu ilościami nieznanemi przywodzi ie do tego rodzaiu Zrównań pierwſzego ſtopnia, którychmy naſamprzód roſtrząſali. Wſzyſtkie Zrównania wiele ilości nieznanych zawieraiące któreśmy brali za przykłady naſzych działań powſtawały z funkcyi iednokſztałtnych i były takiego wzoru: $ax+by+cz+$ i t. d. $+k=o$, gdzie ilość nieznana była mnożoną przez ſame tylko ilości znane w każdym terminie. Ale kto przywykł cokolwiek do rozlegleyſzego poznawania rzeczy, powinien ſobie pomyślić, że pytanie przywieść nas może do takowych Zrównań, w których ilość nieznana będzie mnożoną przez drugą nieznaną: na ten czas do rozwiązania mieć będziemy Zrównania pod takiemi wzorami: $xy+by+a=o$ - - - $xyz+yz+c=o$ - - - - $xzuy+yzu+byx+$ i t. d. $+c=o$ - - i t. d. Daymy n. p. że przyſzedłſzy do dwóch takich Zrównań $xy+by=a$ $y=bx+c$ włożémy wartość za y s tego oſtatniego w pierwſzé; przerobiemy ié na $bx^2+(b^2+c)x+bc=a$. Przyſzedłſzy do trzech takich $xyz+yz+c=d$, - - - $y=bx+c$ - - - $z=x+d$, a włożywſzy za y, z, wartości z dwóch oſtatnich w Zrównanie pierwſzé; przerobiemy ié na - $x(bx+c)(x+d)+(bx+c)(x+d)+c=d$, czyli na $bx^3+(c+bd+b)x^2+(cd+c+bd)x+cd+c=d$. - - Takowym ſpoſobém przyſzliśmy prawda do Zrównań nie zamykaiących tylko iednę nieznaną ilość, aleśmy onego nie przywiedli do rodzaiu, w którym ſię znaydowało naypierwſzé naſzé Zrównanie rozwiązane w §. 4. rozdziału 1. Wſzyſtkie więc tam rozumowania naſze i prawidła z nich wyciągnione ſtaią ſię w teraźnieyſzym przypadku dla nas nieużyteczné; ponieważ w Zrównaniu $bx^2+(c+b^2)x+bc=a$ wſzyſtkie Rozdziału pierwſzego działania wyczerpawſzy, nie przyidziémy nigdy do wyrażenia x przez funkcyą ſamych ilości znanych a, b, c. Gdyby nawet w Zrównaniu naſzem nie znaydował ſię termin $(c+b^2)x$, ale tylko $bx^2+bc=a$, i tak ieſzcze kuſzenia naſzé podług pierwſzych ſpoſobów byłyby daremne, dla tego że ilość nieznana ieſt ſamey ſiebie mnożnikiem. Pamiętni na ſpoſoby do rozwiązania Zrównań w §. 1. użyte, a oświeceni razem przyczyną dla czego te w teraźnieyſzym przypadku nie mogą nam pomóc, wpadamy łatwo na tę uwagę: że działanie przywiązane do teraźnieyſzego ſtanu ilości nieznaney, ieſt zapewne inne od tych, które nam tam ſłużyły. Iakóż ilość nieznana nacechowana wykładnikiem iakimkolwiek pokazuie mnożenie ſamey przez ſię; mnożyć zaś ilość lub funkcyą ſamę przez ſię nazywa ſię w Arytmetyce *Wynoſić ią do potęgi*: aże działania Arytmetyczné te ſame zachodzą w literach co i w liczbach, należy nám zatrzymać ſię teraz nad tym nowym ich gatunkiem.

Pokazuie ſię z wyżſzego opiſu że potęga iakieykolwiek funkcyi lub ilości nic innego nie ieſt, tylko mnogość wypádaiącá z powtarzanego teyże funkcyi lub ilości przez ſiebie mnożenia: oznaczá oná ſię przez wykładnika nad ilością lub funkcyą położonego; tak, że ieżeli ilość lub funkcyá iaka wchodzi dwa razy w mnożenie, wykładnik 2 oznácza iey potęgę drugą n.p. x^2 - - $(x+a)^2$; ieżeli trzy razy, wykładnik 3 znaczy potęgę trzecią, n. p. x^3 - - $(x+a)^3$; ieżeli n razy, n.p. x^n - - $(x+a)^n$, wykładnik n oznacza iey potęgę iakąkolwiek n. S czego oczywiście ſię wnosi: że ponieważ liczby naturalne oznaczáią wielością iedności w ſobie zawartych pewne potęgi; chcąc ilości iakie ſamotne cáłkie lub łomane wynoſić do iakieykolwiek potęgi, nie potrzeba nam tylko przez wykładnika tey potęgi rozmnożyć wykładnika ſamey ilości, a nowy wykładnik s tey mnogości powſtaiący położony nad ilością, wydá potęgę któreyśmy ſzukali: chcąc n.p. x, albo $\frac{x^2}{a^2}$, wynieść do potęgi czwártey którey wykładnik ieſt 4, wypadá mi z reguły poprzedzaiącey - - x^4 - $\frac{x^{2 \cdot 4}}{a^{2 \cdot 4}} = \frac{x^8}{a^8}$ potęga czwártá ilości podanych. Iako więc mnożenie ilości odbywa ſię przez dodáwanie; tak wynoſzenie ich do potęg, przez mnożenie wykładników. To ſamo prawidło rościąga ſię do wſzyſtkich iakimkolwiek ſpoſobem zawikłanych funkcyi n. p. $(x+a)^2$ - $(x+a+b+c+)^2$ i t. d. ale w tym oſtatnim przypádku wykładniki znaczą tylko działanie, które zachodzi. Przyſtąpmy teraz do wykonywaniá onego.

Wziąwſzy funkcyą złożoną z dwóch terminow $x+a$, rozmnożmy ią ſamę przez ſię, otrzymámy $(x+a)(x+a)$

$=x^2+$

$=x^2+2ax+a^2$. Ten wypadek odkrywa nam te prawdę o częściach wchodzących w drugą potęgę funkcyi DWU-WYRAZOWEY (*binomium*): że każda takowa potęga zamyka w ſobie potęgę drugą pierwſzego terminu x, to ieſt x^2; potęgę znowu drugą drugiego terminu a, czyli a^2; i dwie mnogości z pierwſzego terminu przez drugi $2ax$: ta prawda o częściach potęgi drugiey powſtaiącey z funkcyi dwuwyrazowey ſłużyć nam może do wynoſzenia funkcyi z więcey wyrazów złożoney, n.p. $x+c+b$, wziąwſzy bowiem dwa terminy $x+a$ za ieden, mamy podług wyżſzego twierdzenia - - - $(x+a+b)^2=(x+a)^2+2(x+a)b+b^2$, a włożywſzy wartość $(x+a)^2$, i wykonawſzy mnożenie z $2(x+a)b$, otrzymamy $x^2+2ax+a^2+2bx+2ab+b^2$; maiąc cztery terminy w funkcyi $x+a+b+c$, możemy wziąć trzy pierwſze za ieden, a ſtóſuiąc zawſze do niego twierdzenie wyżey wyłożone, wypadnie: $(x+a+b+c)^2=(x+a+b)^2+2(x+a+b)c+c^2$, gdzie kładąc za $(x+a+b)^2$, wyżey znalezioną wartość, i wykonywaiąc w drugim terminie mnożenie, przyidziemy do - - $x^2+2ax+a^2+2bx+2ab+b^2+2cx+2ac+2bc+c^2=(x+a+b+c)^2$. Ten ſam ſpoſób zachowuiąc w funkcyi z ilekolwiek bądź terminów złożoney, przerobiemy ią na funkcyą dwuwyrazową, a maiąc wzgląd na części, które iſtotnie wchodzić powinny w ſkład funkcyi dwuwyrazowey; potrafiemy wyrazić natychmiaſt drugą potęgę funkcyi złożoney nawet z nieſkończoney liczby terminów: i tak ieżeli dobrze rozważemy prawo zachodzące w układzie drugiey potęgi tych funkcyi, które nam dopiero ſłużyły za przykład; poſtrzeżemy że n. p. $(x+a+b+c+d+e+f+g+$ i t. d.$)^2=x^2+2ax+a^2+2bx+2ba+b^2+2cx+2ca+2bc+c^2+2dx+2ad+2bd+2cd+d^2+2xe+2ae+2be+2ce-+2de+e^2+2fx+2fa+2fb+2fc+2fd+2fe+f^2+$ i t. d. to ieſt:

Tłomaczy ſię skład potęgi drugiey, i ſpoſób wynoſzenia do niey funkcyi wielowyrazowych.

ieſt: wynióſſzy pierwſzy naſamprzód termin do potęgi drugiey, ten który po nim naſtępuie należy rozmnożyć przez 2 i przez poprzedzaiący, potem zrobić z niego potęgę drugą: i tak idąc do innych, każdego należy rozmnożyć przez 2 i poiedyńczo przez wſzyſtkie poprzedzaiące, a ſtanąwſzy na tym rozmnożonym przez 2, wynieść go ſamego do potęgi drugiey: tym ſpoſobem poſtępuiąc, potrafiemy funkcyi iakieykolwiek wyrazić natychmiaſt potęgę drugą.

Wzór ogólny Zrównań i funkcyi drugiey potęgi.

Dopiero wyłożone prawo ſłuży nam do rozeznania czyli funkcya iaka ieſt zupełną potęgą drugą, i do oddzielenia w funkcyi iakieykolwiek tych terminow które w ródzáy drugiey potęgi wchodzą, od tych które iey ſą obce i dorzucone. Co ſię tycze uwági nad ſamą ilością nieznaną, z oſtatniego przykładu widziemy, że ieżeli ilość takowa wchodzi w funkcyą iaką wynieſioną do drugiey potęgi, ta znayduie ſię raz ſamotną w drugiey potędze, drugi raz rozmnożoną przez wſzyſtkie terminy podwoione, to ieſt: $x^2+2(a+b+c+d+e+f+g+$ i t.d.$)x$, toż ſamo ſłuży i wſzyſtkim innym. Przeto ponieważ mnożnika $2(a+b+c+d+e+f+g+$ i t.d.$)$ z ſamych ilości znanych, wyrazić możemy przez iednę ilość znaną n.p. A; w każdey funkcyi zamykaiącey iednę nieznaną ilość i wynieſioney do potęgi drugiey, terminy z tą nieznaną ilością przywodzą ſię do tego wyrazu x^2+Ax, wſzyſtkie zaś inne będą znane które znowu wyraziwſzy przez D, wzór x^2+Ax+D wyſtawia nam funkcyą iakąkolwiek drugiey potęgi z iedną ilością nieznaną i innemi znanemi bądź náleżącemi do tey potęgi bądź obcemi: tak iako $x^2+Ax+D=0$ pokazuie wſzyſtkie Zrównania zamykaiące funkcyą drugiey potęgi z iedną ilością nieznaną. Zachowáymy ſobie tę uwagę w pamięci.

§. XII.

Ieżeli mnożenie funkcyi iakiey ſamey przez ſię powtarzać będziemy kilkokrotnie, rodzą ſię ſtąd różne potęgi wyżſze tey funkcyi. Gdyby więc można z

wielu

Skład i własności wyżſzych iakichkolwiek potęg.

wielu przykładów doſtrzec prawa, ktoré zachowuie funkcya wynieſiona do potęgi iakieykolwiek, moglibyśmy podadź wzór ogólny wyrażaiący to prawo; który ſłużąc na iakąkolwiek potęgę, oſzczędziłby nam pracy przywiązaney do kilkokrotnie powtarzanego pomnożenia. Poprzedzaiący §. powinien nam był podadź myśl tego dociekania. Weźmy ſobie więc dwuwyrazową funkcyą $x \pm a$, i mnożąc ią dwa, trzy, cztery, i więcey razy ſamę przez ſię, przyidziémy do różnych potęg zawartych w naſtępuiącey Tablicy:

I. $x \pm a$

II. $x^2 \pm 2ax + a^2$

III. $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm x^3$

IV. $x^4 \pm 4ax^3 + 6a^2x^2 \pm 4a^3x + a^4$

V. $x^5 \pm 5ax^4 + 10a^2x^3 \pm 10a^3x^2 + 5a^4x \pm a^5$

i t. d.

te wſzyſtkie potęgi dobrze rostrząśnione i ſtóſowane między ſobą co do ilości, wykładników, wſpoł-czynników i znaków; daią nam oczywiście widzieć

Naprzod: że liczba terminów każdey potęgi przewyżſza iednością ſwego wykładnika; potęga więc m zamykać będzie $m+1$ terminów. Nazwawſzy pierwſzą potęgę z którey ſię rodzą inne, PIERWIASTKIEM; widzemy

Powtóre: że pierwſzy termin iakieykolwiek potęgi, ieſt pierwſzy termin pierwiaſtku ſamotny z wykładnikiem tey potędze właściwym, który w naſtępuiących terminach zmnieyſza ſię zawſze iednością póki w oſtatnim nie zniknie; wykładnik zaś drugiego terminu pierwiaſtkowego rośnie tyle, ile ſię pierwſzy zmnieyſza, poki doſzedłſzy naywyżſzey liczby nie zakończy ſamotnym ſwym terminem potęgi tak, iak ią pierwſzy zaczął. W potędze więc m, co do wykładników zachodzić będzie taki porządek:

$$x^m,\ x^{m-1}a,\ x^{m-2}a^2,\ x^{m-3}a^3, + \text{ i t. d. } a^m$$

Potrzecie: ieżeli znaki pierwiaſtku ſą obydwa dodatne, wſzyſtkie terminy będą dodatnemi; ieżeli zaś obydwa odiemné, wſzyſtkie potęgi wykładników parzyſtych będą dodatne, wſzyſtkie zaś nieparzyſte będą odiemne; ieżeli nakoniec ieden termin pierwiaſtku ieſt dodatnym a drugi odiemnym; znaki w potęgach idą na przemian, tak że wſzyſtkie terminy w porządku parzyſtym ſą odiemné; wſzyſtkie zaś inné w porządku nieparzyſtym ſą dodatne.

Poczwarte: Co do wſpoł-czynników prawo zdaie ſię bydź zawikłane: uważaiąc ich atoli pilnie, znaydziemy: że każdy wſpółczynnik drugiego terminu ieſt równy wykładnikowi potęgi, w innych zaś równa ſię mnogości z wſpółczynnika przez wykładnika x w terminie poprzedzaiącym, rozdzielonemu przez liczbę porządku, który tenże termin poprzedzaiący zaſtępuie w potędze; i tak trzeci termin potęgi piątey $10 = \frac{5.4}{2}$; toż ſamo mowić o innych. S tych wſzyſtkich uwag wypada że potęga m funkcyi dwu-wyrazowey $x \pm a$ tak ſię układa:

$$(x \pm a)^m = x^m \pm m x^{m-1} a + \frac{m(m-1)}{1.2.} x^{m-2} a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} a^3 \pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.} x^{m-4} a^4 + \text{ i t. d. } \quad \pm a^m$$

w oſtatnim terminie znak wyżſzy należeć będzie do liczby m parzyſtey, niżſzy zaś kiedy za m weźmiemy liczbę nie parzyſtą.

Ten wzór ſłużący nam na wynoſzenie funkcyi dwuwyrazowey do iakieykolwiek potęgi, ieſt znany pod imieniem *wzoru Newtona*, który go naſamprzód odkrył. Wyciągnęliśmy go s proſtey obſerwacyi i analogii między potegami doſtrzeżoney: co nie może mieć mocy dowodu matematycznego, którego ſzukać należy w początkach ogólnych do natury funkcyi przywiązanych. Zoſtanie nam ſię ten dowód do dalſzych wiadomości, gdzie nam ſię pokaże związek teraźnieyſzych rażnieyſzych uwag z ogólnieyſzemi prawdami i użycie wzoru Newtona daleko rozlegleyſze. Gdyby funkcya pierwiaſtkowa zamykała więcey terminów; moglibyśmy ich dwa, trzy, i więcey brać za ieden, tak iak w §. XI, tych potem różne znakowane potęgi podług tablicy na ſwe terminy rozebrawſzy; i podłożywſzy przyzwoicie ilości porządkowey, przyſzlibyśmy do wyrażenia potęgi iakieykolwiek m, funkcyi Kilko-wyrazowey (*Polynomium*). Trzebaby nam ieſzcze ſpoſób ten poſunąć aż do funkcyi złożoney z nieſkończoney liczby terminów, ile że takowy rachunek w wyżſzych częściach Matematyki barzo ſię częſto nadarza, ale żebyśmy nie rozwlekli nadto ciągu naſzych myśli, odkładamy to ſobie na inne mieyſce. Nie możemy tu iednak opuścić iedney ważney uwagi, która nam pokazuie piękną właſność funkcyi iakieykolwiek wynieſioney do potęgi m: zależy ona na tem, iż rozebrawſzy $(a+x)^m$ na ſwe terminy, i każdemu z nich podłożywſzy liczbę z poſtępu Arytmetycznego 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, i t. d. ieżeli każdy termin rozmnożemy przez liczbę mu podłożoną, i mnogości te dodamy razem, wypadnie $mx(a+x)^{m-1}$, to ieſt: potęga zniży ſię o ieden ſtopień, ale będzie rozmnożona przez ilość nieznaną i ſwego dawnego wykładnika. Zobaczmy to w rachunku: $(a+x)^m$

$$=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3 \text{ i t.d.}$$

$$\underline{\quad 0, \qquad 1, \qquad\qquad 2, \qquad\qquad\qquad 3, \qquad\qquad \text{i t.d.}}$$

$$\text{Mnog: } mx\left(a^{m-1}+(m-1)a^{m-2}x+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot2}a^{m-3}x^2+\right.$$

$$\left.\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot2\cdot3}a^{m-4}x^3+\text{ i t.d.}\right)=mx(a+x)^{m-1}.$$

s kąd wypada, że ieżeli potęgi iakieykolwiek $(a+x)^m$ terminy mnożyć będziemy przez terminy poſtępu Arytmetycznego. $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, $4k$, $5k$, $6k$, i t. d. otrzymamy $mkx(a+x)^{m-1}$ gdyż takim ſpoſobem mnożemy naprzód terminy przez $0, 1, 2, 3, 4, 5$, i t.d. s kąd wynika $mx(a+x)^{m-1}$, powtóre przez k, s kąd znowu wyniknąć powinno $kmx(a+x)^{m-1}$. Ieżeli potęga m będzie mnożona przez iakąkolwiek funkcyą N, to ieſt $N(a+x)^m$; rozmnożywſzy potem iey terminy przez $0k$, k, $2k$, $3k$, i t. d. otrzymamy na mnogość $Nmkx(a+x)^{m-1}$; położmy więc $Nmkx=A$, $m-1=n$ będzie $A(a+x)^n$, którey znowu terminy mnożąc przez poſtęp Arytmetyczny $0k$, k, $2k$, $3k$, $4k$, i t. d. otrzymamy mnogość $Ankx(a+x)^{n-1}=m(m-1)Nk^2x^2\times(a+x)^{m-2}$: nazwawſzy $m(m-1)Nk^2x^2=B, m-2=p$, będzie $B(a+x)^p$, a mnożąc znowu przez poſtęp Arytmetyczny $0k$, k, $2k$, $3k$, i t.d. otrzymamy mnogość $Bpkx(a+x)^{p-1}=m(m-1)(m-2)Nk^3x^3(a+x)^{m-3}$ ten znowu mnożąc przez $0k$, k, $2k$, $3k$, i t.d. wypadnie nam $m(m-1)(m-2)(m-3)Nk^4x^4(a+x)^{m-4}$, i ogólnie mowiąc: $m(m-1)(m-2)(m-3)$ - - - $(m-[n-1])Nk^nx^n(a+x)^{m-n}$, ieżeli n razy terminy takowey potęgi mnożyć będziemy przez poſtęp Arytmetyczny $0k$, k, $2k$, $3k$, $4k$, i t.d. Uczyniwſzy $N=1$, widziemy w oſtatnim wzorze tę ogólną prawdę: że chcąc funkcyą iakąkolwiek wynieſioną do potęgi m, zniżyć o tyle ſtopni ile nam ſię podoba, potrzeba ią naſtępnie mnożyć tyle razy przez poſtęp Arytmetyczny $0k$, k, $2k$, $3k$, $4k$, i t.d. ſpoſobem dopiero wyłożonym, ile iedności zamyka liczba wyrażaiąca zniżenie. W tem atoli zniżeniu zawſze nieznana ilość wchodzi za mnożnika z wykładnikiem tym, który nam zniżenie pokazuie, a zatem zniżenie to potęgi nie zniża zrównania, w którem takowa potęga z innemi funkcyami zachodzi.

§. XIII.

Odbywſzy ſpoſób wynoſzenia funkcyi do iakichkolwiek potęg, zoſtaie nam ieſzcze wynaleśdź inny wywrotny, za pomocą którego moglibyśmy od potęg przyiśdź do ſamych funkcyi, z którey potęga iaka powſtała.

wſtała. Takową funkcyą nazwaliśmy **Pierwiastkiem Potęgi** *(Radix Potentiae)*, i ſzukanie funkcyi któraby powtarzaném mnożeniem wydadź mogła potęgę daną nazwiemy **Wyciąganiem Pierwiastków** *(Extractio Radicum)*. A iako na cechowanie każdego zachodzącego działania ſtanowiliśmy znaki oſtrzegaiące nas o gatunku roboty, tak na znaczenie pierwiaſtków użyiemy cech $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[m]{\ }$; liczby w otworzyſtości tych znaków położone ſą wykładniki potęg, których pierwiáſtku ſzukámy: i tak n.p. $\sqrt[3]{(a^3+b^3)}$ znaczy pierwiaſtek trzeciey potęgi do wyciągania z funkcyi między náwiaſami zawartey, a ponieważ potęga druga ieſt nayniżſza z potęg, w których wyciąganie pierwiaſtków zachodzi, dla tego znak iey piſać będziemy bez żadnego wykładnika i tak $\sqrt{x}$ znaczyć będzie pierwiáſtek potęgi drugiey z x.

Mówiąc o potęgach iedno-wyrazowych doſtrzegliśmy że w działaniu ich należy nam wykładnika ilości mnożyć przez wykładnika potęgi, więc w działaniu przeciwném, iakiém ieſt teraźnieyſze, potrżeba nam wykładnika ilości dzielić przez wykładnika potęgi któréy ſzukámy pierwiáſtku, a wieloraz s tego podziału będzie wykładnikiem pierwiaſtku ſzukanego. Chcąc n.p. wynaleśdź pierwiaſtek *drugiey* potęgi ilości - - x^2, x^3, x^4, x^5, i t. d. dzieląc każdego wykładnika przez 2, wypádaią pierwiaſtki - - - - x, $x^{\frac{3}{2}}$, x^2, $x^{\frac{5}{2}}$. które ſię równaią tym wyrazom $\sqrt{x^2}, \sqrt{x^3}, \sqrt{x^4}, \sqrt{x^5}$. s czego wypádaią naſtępuiące prawdy.

Naprzód. Ze wſzyſtkie ilości i funkcye z wykładnikami łomanemi ſą **Pierwiastkowe** *(Radicales)* tak; że licznik ułomku ieſt wykładnikiem ilości lub funkcyi, mianownik zaś wykładnikiem znaku pierwiaſtkowego; wſzyſtkie więc funkcye pierwiáſtkowe możemy albo przez znaki albo przez wykładniki ułomkowe wyrażać, i tak $(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}$, albo $\sqrt[3]{(a^3+b^3)}$

to ſamo znaczy. Iłości zaś lub funkcye z wykładnikami odiemnemi poniéważ ſą równé iedności rozdzieloney przez tęż iłość lub funkcyą §. 3. przeto wyrazy $x^{-\frac{3}{2}}, y^{-\frac{m}{n}}$ i t.d. iedno znaczą co . . . .

$$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{y^{\frac{m}{n}}}, \quad \text{albo} \quad \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{y^m}}$$

Powtóre: Ieżeli w iłości lub funkcyi iakiey znayduie ſię mnożnik którego wykładnik rozdzielić ſię zupełnie może przez wykładnika znaku pierwiaſtkowégo, takowy mnożnik może bydź wydobyty s pod znaku, i na ten czas funkcya ſkładać ſię będzie z iłości pierwiaſtkowych, i z iłości bez znaku. które nazwiemy WYMIERNEMI (*rationales*) n. p. . .

$$\sqrt{4x^2a^3} = 2x\sqrt{a^3} = 2ax\sqrt{a} \quad . \quad . \quad . \quad \sqrt[3]{8a^3(b+x)} =$$

$2a\sqrt[3]{(b+x)}$. i t. d. tym ſpoſobém wydobywaiąc iłość s pod znaku uproſzczamy funkcyą: gdyby nam znowu przeciwnie potrzeba było funkcyą przywieśdź do iednoſtaynego wyrazu, to ieſt iłości wſzyſtkie wymierné podciągnąć pod znak pierwiaſtkowy nienaruſzywſzy ich wartości, każdy oczywiście widzi, iż w ten czas potrzeba wynieść funkcye wymierné do tey potęgi którą oznacza pierwiaſtek. Chcemy n. p. w funkcyi $3x(a+b)\sqrt{(y^3+c)}$ podciągnąć wſzyſtkié iłości pod znak prewiaſtkowy, otrzymamy: $\sqrt{(9x^2[a+b]^2[y^3+c])}$. który wyraz to ſamo znaczy co i przeſzły. Te wſzyſtkie ſpoſoby przerabiania funkcyi wyciągnione s proſtych barzo uwag nad natura pierwiaſtków będą nam barzo częſto pomocné, trzeba żebyśmy ſię w nie dobrze wprawili, aby ſobie oſzczędzić trudności na które napadamy w rachunku.

Nauczyliśmy ſię iuż znaczyć, i czytać znaczenia pierwiaſtkowych funkcyi; zoſtaie nam teraz wynaleśdź prawidła ſłużyć mogące do wyciągania pierwiaſtków s funkcyi iakimkolwiek ſpoſobém zawikłanych.

nych. Te że bydź mogą albo zupełnemi potęgami albo też niezupełnemi; w piérwſzym razie powinniśmy przyiśdź przez pewne prawidła do ich piérwiaſtku wymiernego: w drugim zaś przypadku znaleśdź możemy pierwſze pierwiaſtku terminy ale reſzta zoſtanie ſię pod znakiem, tak iak doświadczyliśmy w dzieleniu: i takowe funkcye nazywaią ſię **Niewymiernemi** (*Irrationales*), ile więc razy będziemy mięć do czynienia s funkcyą lub zrównaniem potęgi niezupełney przeſtaniemy w działaniu na naznaczeniu tego pierwiaſtku, który do wyciągania zachodzi i tak n. p. maiąc zrównanie $x^m=a$, a chcąc znaleśdź wartość tey nieznaney, wyrażemy ią $x=\sqrt[m]{a}$. Ten oſtatni rodzay rachunku o potęgach niezupełnych zoſtawiemy ſobie na potem, zatrzymaymy ſię tylko teraz nad piérwſzym.

Pamiętamy o uwadze wyżey uczynioney, że w potęgę zupełną iakąkolwiek wchodzą prócz liczb, te ſame ilości które należą do pierwiaſtku, nie zoſtaie nam tylko te ilości wydobydź przez działania na to potrzebne. Nad to zaś nic łatwieyſzego: wiemy naprzód że pierwſzy termin potęgi iakieykolwiek ieſt ſamotną potęgą piérwſzego członka pierwiaſtku, więc go zaraz wydobędziemy przez dopiero podaną regułę na funkcye iedno-wyrazowe, to ieſt dzieląc wykładnika ilości przez wykładnika pierwiaſtku, n. p. z funkcyi $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$ chcąc wyciągnąć piérwiaſtek 3ciey potęgi mamy $\sqrt[3]{x^3}=x$ za pierwſzy termin piérwiaſtku. Drugi termin potęgi zawierać będzie drugi członek pierwiaſtku rozmnożony przez funkcyą pierwſzego n.p. $3ax^2$, zamyka a, rozmnożone przez $3x^2$, zrobiwſzy tedy tę funkcya, i rozdzieliwſzy przez nię drugi termin, wynaydziemy drugi członek pierwiaſtku n. p. $\frac{3ax^2}{3x^2}=a$; ten potém kombinuiąc z piérwſzym tak ażeby wypadły te wſzyſtkie terminy, ktorekolwiek powſtaią z dwóch tych członków pierwiaſtku w potędze; odciągniemy ich od ſiebie, i znieſiemy to, co te dwa terminy pierwiaſtku wprowadziły w potęgę. Tym ſpoſobem daley poſtępuiąc przyidziemy do wyciągnienia pierwiaſtku z iakieykolwiek potęgi zupełney. Przypatrzmy ſię z uwagą wzorowi działania.

Potęga 3cia. - - $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ Pierwiaſtek iey

Działanie - - - $\overset{3}{x^3}$ x Pierwſzy człon:

Potęga z pierwi:
do odciągnienia $-x^3$

Reſzta z potęgi - $3x^2a+3xa^2+a^3$.

Dzielnik z 1go człon:
ka pierwiaſtku $3x^2$ - - - $+a$ - 2gi członek.

Funk: obydwóch czł:
do zgładzenia wſzyſtkich terminów. - $-3x^2a-3a^2x-a^3$

$x+a$. $\Big\}$ pierwiaſtek cały

Reſzta - - - 0 0 0.

Tą ſamą drogą iśdź należy w iakichkolwiek potęgach niżſzych i wyżſzych, gdzie znowu widzemy, że ponieważ litery ſwoią ogólnością wyrażaią nam działania zachodzące w iakiinkolwiek terminie, daią nam zaraz czytać reguły potrzebne na wydobycie pierwiaſtków s potęgi. Te reguły rosciągnąć możemy do wyciągania iakichkolwiek pierwiaſtków z liczb, używaiąc wzoru s tablicy wyżey podaney na potęgę którey ſzukamy pierwiaſtku. Zadaymy ſobie n.p. do wyciągnienia pierwiaſtek 3ciey potęgi z liczby 34,965,783(B) za pomocą wzoru - $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ (A)

Niżeli przyſtąpiemy do ſamego działania, zbliżmy ſobie wſzyſtkie uwagi z wyżſzych wiadomości powzięte, a potrzebne do teraźnieyſzey roboty.

Naprzod: wiemy s ſamego przypatrzenia ſię że wzór (A) nie zamyka tylko dwa członki pierwiaſtku $x+a$, więc nam także pierwiaſtek liczebny rozdzielić potrzeba na dwie części, s których iedna odpowiadałaby x, druga zaś a; to otrzymamy dzieląc

liczbę

liczbę pierwiaſtku na dzieſiątki odpowiadaiące x, i na iedności odpowiadaiące a; a ponieważ ſta, tyſiące, i t.d. dzielić ſię mogą na dzieſiątki, więc gdyby nawet pierwiaſtek liczebny zamykał w ſobie ſta, tyſiące i t. d. wſzyſtkie te razem weźmiemy za pierwſzy członek i wyrażemy przez x w dalſzych działaniach, abyśmy pierwiaſtek na dwie tylko części rozdzielony uważali.

Powtóre: potrzeba nam w potędze liczebney *(B)* oddzielić te dwie części. Ponieważ $x=10$; $x^3=1000$; w działaniach zaś Arytmetycznych gdzie mnożenie odbywa ſię od prawey na lewą ſtronę, i gdzie dzieſiątki powſtaią z mnożenia iedności, naypierwſzy wzgląd obrócić powinniśmy na iedności aby im oddzielić tyle figur, ile ich zawierać może potęga trzecia naywiękſzey iedności iaką ieſt 9. Dzielę więc kreſką od prawey na lewą ſtronę podaną liczbę *(B)* na rzędy, naznaczaiąc każdemu trzy figury. Działanie które mamy teraz tłómaczyć widzieć możemy na tablicy tu przyłączoney.

Pierwſzy rząd 34 odpowiada x^3 w wzorze *(A)*: ſzukam więc liczby, któreyby trzecia potęga albo wyrównała, albo przynaymniey nayblizſzą była 34; taką ieſt 3, która będąc pierwſzym członkiem pierwiaſtku, nazywam ią x; wynoſzę potym $x=3$, do potęgi trzeciey i mam 27, które odciągnąwſzy od 34, zoſtaie mi ſię 7: do tey reſzty znoſzę rząd naſtępuiący 965.

Uważam liczbę 7965 iako zawieraiącą inne terminy wzoru *(A)* to ieſt: $3x^2a+3xa^2+a^3$; żebym wyciągnął a drugi członek pierwiaſtku; dzielę pomienioną liczbę przez $3x^2$ to ieſt przez $3.9=27$, a ponieważ x znaczy dzieſiątki, więc x^2 znaczy ſta, podpiſuię więc dzielnika 27 tak, aby iego oſtatnia figura przypadła pod ſta liczby podzielney; zapełniam potém reſztę mieyſc próżnych przez zero; a wykonawſzy dzielenie otrzymam 2 na drugi członek pierwiaſtku, który nazywam a; przez a mnożę dzielnika i otrzymam $3x^2a$; robię potém inne terminy $3xa^2$, a^3, i te razem dodawſzy odciągam od 7965. Zo-

Zoſtaie mi reſzta 2197, do któréy znioſſzy oſtatni rząd 783 biorę obydwie części pierwiaſtku 32 za ieden, który nazywam x. Uważam znowu liczbę 2197783, iako zamykaiącą terminy $3x^2a+3xa^2+a^3$; żebym z niéy wyciągnął a, dzielę ią przez $3x^2=3.(32)^2=3072$, podpiſuię tego dzielnika tak iak i przedtém, i z dzielenia otrzymam 7, za nowy członek pierwiaſtku który nazywam a, przez ten mnożąc $3x^2=3072$, i potém robiąc inne terminy $3xa^2+a^3$ dodaię ie razem, s których ſummy powſtaie liczba nie zoſtawuiąca żadney reſzty. Gdyby ieſzcze liczba (B) zamykała więcey rzedów, zawſzebyśmy po każdém odciąganiu wſzyſtkie członki pierwiaſtku brali za ieden, i nazywali ie x, a ſzukaiąc nowego a poſtępowalibyśmy ſobie tak iak teraz.

Ten ſam ſpoſób ſłużyć nam może do wyciągania iakichkolwiek pierwiaſtków z liczb, używaiąc zawſze wzoru przyzwoitego. I tak ſzukaiąc pierwiaſtku potęgi m, dzielić potrzeba na rzędy s prawéy ſtrony na lewą, i każdemu dać m figur. z naypierwſzego rzędu po lewey ſtronie wyciągnąć, pierwiaſtek x potęgi m, a wynioſſzy go znowu do téy ſamey potęgi odciągnąć od rzędu; znieść potém do reſzty naſtępuiący rząd, rozdzielić go przez mx^{m-1} podſunąwſzy dzielnika o $m-1$ figur dałey od prawey ſtrony: za pomocą dzielenia wynaydzie ſię a, które z x kombinowane przyzwoicie da wſzyſtkié terminy wzoru Algebraicznego, których ſummę odciągnąć należy od liczby podzielney. Tym ſpoſobem n.p. za pomocą wzoru . . .

$x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$ wyciągniemy z liczby 380204032 piewiaſtek 5téy potęgi $=52$.

Tu naywięcey powinniśmy uczuć korzyści, którą z ogólnych znaków Algebraicznych zbieramy. *Naprzód* wyciągamy reguły na działania nigdy niedoſtępne Arytmetyce, z naygruntownieyſzemi onychże dowodami. *Powtóre;* przywyknąwſzy raz do tego używania

wzorów

wzorów nigdy tych reguł nie możémy zapomnieć; albo zapomniawſzy, w iednym momencie możemy ié ſobie przywieśdź na pamięć. Nie tylko więc drogi wynalázku i przekonaniá dlá rozumu, alé i dlá pamięci wielka ſolga ieſt w ogólności znaków ukrytá.

§. XIV.

Rozwięzuie ſię Zrównanie 2go ſtopnia.

Nie zapomniéymy o tém że w té wſzyſtkié działaniá dotąd roztrząſané byliśmy wciągnieni przez uwágę nad zrównaniami przywiedzionemi na początku tego rozdziału. Widzieliśmy tam, że wſzyſtkié ſpoſoby w Rozd: I. wyłożoné, nie pomogą nam do rozwiązaniá zrównań $bx^2+(c+b^2)x+bc=a$, - - $bx^3+(c+bd+b)x^2+(cd+c+bd)x+cd+c=d$, i innych, w których x wynieſioné było do potęg wyżſzych; trzeba nam więc użyć tych praw nowo odkrytych w naturze potęg i piérwiaſtków do rozwiązaniá teraźnieyſzych zrównań, czyli do wynalezieniá x w funkcyi ilości znanych. Weźmy z nich piérwſzé $bx^2+(c+b^2)x+bc=a$ czyli $x^2+\frac{c+b^2}{b}x+c-\frac{a}{b}=o$, ponieważ w niém x znayduie ſię wynieſionem do drugiéy potęgi, uważać możémy całé zrównanie iako potęgę drugą z niewiadoméy x, i s pewnéy funkcyi ilości wiadomych: ta więc zawarta ieſt w wzorze powſzechnym $x^2+Ax+D=o$ w którémeśmy pod §. XI. chcieli ogarnąć wſzyſtkié iakiekolwiek zrównaniá zawieraiące niewiadomą x w drugiéy potędze. Znoſząc zaś ogólné zrównanie z podaném, wypadá $A=\frac{c+b^2}{b}$; $D=b-\frac{a}{b}$

Ponieważ potęgi w zrównaniu ogólném zawartéy częścią piérwiaſtku ieſt x, gdybyśmy mogli przyiśdź do znalezieniá dokładnego piérwiaſtku zrównaniá - - $x^2+Ax+D=o$ przyſzlibyśmy do zrównaniá takiégo, iakieśmy w Rozd: I. rozwiazali, a zatém do wártości ilości nieznanéy.

Wiémy

Wiemy z dopiero odbytych działań że pierwiaſtek iakieykolwiek potęgi nie może bydź dokładnie wyciągniony, tylko kiedy ta potęga ieſt zupełną; potęga zaś druga do ſwoiey pełności potrzebuie podług wyżſzych początków takiego wyrazu $x^2 \pm 2ax+a^2$; nie możemyż zrównania naſzego tak przyſpoſobić aby ieden iego członek zawieraiący x, miał te wſzyſtkie części do zupełney potęgi potrzebne? Przekonywa nas o tem podobieńſtwie ſamo lekkie zaſtanowienie ſię nad naturą zrównania, w ktorem można bez naruſzenia związku cokolwiek chcemy, działać, byleby te działania z obydwóch ſtron zrównania zachodziły. Przenieśmy więc naprzod wſzyſtkie terminy znane z drugiey ſtrony zrównania i otrzymamy - - - - $x^2+Ax=-D$ - - (A). dopełniymy teraz cokolwiek brakuie pierwſzemu członkowi do drugiey potęgi, to ieſt dodaymy z obydwoch ſtron $\frac{A^2}{4}$ a wypadnie - - $x^2+Ax+\frac{A^2}{4}=\frac{1}{4}A^2-D$; zrównanie którego pierwſzy członek ieſt zupełną potęgą drugą; wyciągnąwſzy więc pierwiaſtek z obydwóch ſtron otrzymamy $x+\frac{A}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2-D\right)}$, ależ potęga druga 1go członka zrównania powſtać mogła albo z obydwóch terminów dodatnych albo z obydwóch odiemnych §. 12; zachodzi trudność, czyli pierwiaſtkowi obydwa te znaki ſłużyć powinny, czyli tylko ieden i który? Na ułatwienie iey wróćmy ſię do naypierwſzych początków, które nas przywiodły do teraźnieyſzego gatunku zrównań. Wyciągliśmy ie z innych maiących w ſobie ilości niewiadome rozmnożone przez inne niewiadome, które lubo były funkcyą iedney, zawiſły iednak od różnych między ſobą związków; te związki ſłużyły nam na wyrażenie wſzyſtkich innych niewiadomych przez iednę, i przyprowadziły nas do zrównań zawieraiących rożne potęgi teyże iedney niewiadomey.

wiadomey.

wiadomey. To więc oſtatnie zrównanie ſtało ſię ſkładem tylu związków, ilé było nieznanych ilości. a zatém rozwiązanie iego odkryć nam ie wſzyſtkié powinno: że zaś podług liczby niewiadomych rozmnożonych przez ſiebie roſły rożné potęgi w zrównaniu, tak że dwie niewiadomé ilości przywiodły nas do zrównania zamykaiącego x^2; trzy niewiadomé do zrównania zawieraiącego x^3; iednem ſłowem ieżeli w zrównaniu znaydowałoby ſię m ilości nieznanych rozmnożonych przez ſię, byleby wſzyſtkie były funkcyą x, wypadnie po wyrzuceniu ich x^m: aże każdey wartości ſłużyć powinno inne znaczenie, to ieſt inna odpowiedź na pytanie; zaczém żadné pytanie nie może nas przywieśdź do zrównania rożnych potęg tylko to, które ma wielé odpowiedzi, tak że od liczby odpowiedzi przywiązanych do pytania zawiſła wielkość potęgi ilości niewiadomey czyli to co nazywaią WYMIAR albo STOPIEN ZRÓWNANIA, i przeciwnie od ſtopnia zrównania na któryśmy natrafili, zawiſła koniecznie liczba odpowiedzi temu pytaniu ſłużących. Nazwali bowiem Geometrowie zrównanie *drugiégo*, *trzeciégo*, *czwartégo*, *mgo* ſtopnia, w ktorém niewiadoma znayduie ſię wynieſioną do *drugiey*, *trzeciey*, *czwartey*, *mtey* potęgi, tak że wykładnik naywyżſzy ilości nieznaney ieſt razem ſkazówką ſtopnia zrównania.

Té tak oczywiſté rachunku wypadki rzucaią wielkié światło w metafizykę naſzego myślenia. Uczą nas bowiem że iedno pytanie wiązac ſię może z wielu barzo innemi, które od tey ſamey kombinacyi myśli zawiſły; albo że wielé bydź może razem rzeczy którym té ſamé ſłużą właſności w warunkach pytania zawarte. Prawda: że myśląc o iednem pytaniu nie przyidzie nam prawie nigdy na myśl żeby ſię z niem inné wiązały; ale to wſzyſtko pochodzi z barzo ciaſnych granic naſzego poięcia, i z barzo ſzczególnego poznawania rzeczy. Gdybyśmy atoli mieli wiadomą w całey obſzerności Metafizykę naſzych myśli, rozum naſz ogarniałby rzeczy ogólniey, i znalázłby ſię w tych wſzyſtkich zakrętach kombinacyi, w które go koniecznie natura rzeczy wciąga, a których on przez niewiadomość początków myslenia nie może rozróżnić. S tąd pokazuie ſię wielki ſzacunek rachunku Algebraicznego, który ogólnością ſwych znaków ogarnia całą ogolnóść rzeczy i ieſt naygruntownieyſzym dowodem, że doſkonałość myślenia zawiſła od doſkonałości języka. Nie będzie tu od rzeczy uczynić niektóre uwagi Loiczne które nam dopiero wyłożony początek podaie.

Ponieważ od iedney kombinacyi zawiſnąć może wiele pytań, w porównywaniu naſzych myśli trafić możemy na kilka wnioſków od ſiebie różnych, a wypadaiących oczywiście s teyże ſamey kombinacyi; s tych wnioſków ieden może rozwiązać naſze zadanie podług doświadczenia, a drugi z niem ſię wcale nie zgadzać: cóż tego za przyczyna? oto kombinacya naſza przywiązana ieſt do wielu pytań mimo naſze wiadomość, z którycheśmy tylko iedno mieli na myśli: aże wypadki kombinacyi dobrze zrobioney ſą konieczne, wyciągliśmy odpowiedzi na inne pytania związane z naſzem. Trzebaby nam ſię więc cofnąć do pierwſzego pytania, i poznać że ono ieſt ogólnieyſze, niżeliśmy ſię ſpodziewali, a wynioſłſzy ſię do tey ogólności odkrylibyśmy przypadki inſze zawarte w naſzey kombinacyi, na które ſłużą te wnioſki, które ſię z naſzem pytaniem i doświadczeniem nie kleią. Przytrafić ſię nawet może że s kombinacyi iakiey wyciągniemy wypadki doświadczeniu przeciwne, co może pochodzić s tąd, żeśmy odpowiedź iednego pytania wzięli za odpowiedź drugiego. Te wſzyſtkie przeciwności pozorne póty nas nie przeſtaną zadziwiać, i póty rozum nie wyidzie z dziecinności ſwoich działań; póki myślenie naſze nie będzie miało tak ogólnych początków, iak ſą ogólne związki między rzeczami. Tego zaś poſtępu myślenia nie można tylko od wzroſtu Geometryi i od duchów prawdziwie Geometrycznych oczekiwać.

Wſzyſtkie

Wſzyſtkié te rozumowania przekonywaią nas, że zrównanie *2go* ſtopnia zamyka koniecznie dwa pierwiaſtki do dwóch znaków przywiązane $x = -\frac{1}{2}A + \surd(\frac{1}{4}A^2 - D)$ - - $x = -\frac{1}{2}A - \surd(\frac{1}{4}A^2 - D)$. które tyleż daią odpowiedzi na pytanie w niem zawarte. I dla tegoć to dwoiakiego znaczenia wſzyſtkié funkcye znaki pierwiaſtkowe drugiey potęgi zawieraiącé w ilościach nieznanych, nazywać będziemy DWÓ-KSZTAŁTNEMI *(Functiones biformes)*. Obiaśniymy wſzyſtkie te prawdy w przykładzie:

Zadanie. „W pewney Prowincyi liczba mięſzkań-„cow *n* uroſła przez dwa łata do liczby *d*, powię-„kſzaiąc ſię w iedney corocznie proporcyi ſwoiey lu-„dności, wynaleśdź liczbę tego wzroſtu *x*, i ludność „po pierwſzym roku?„

Ieżeli w początku ludność była n, powiękſzaiąc ſię liczbą x pierwſzey ludności, po pierwſzym roku było ludzi $n+nx$, po drugim roku $n+2nx+nx^2=d$, i tak idąc daley, w trzecim roku będzie ludzi $n+3nx+3nx^2+nx^3=e$, w czwartym roku $n+4nx+6nx^2+4nx^3+nx^4=f$: idąc tak przez dalſze lata trafiemy na zrównania wyżſzych ſtopni. Ale teraz nie zatrudniáymy ſię tylko drugim należącym do pytania i do naſzego zamiaru. Liczba więc ludzi po dwóch łatach zawarta ieſt w zrównaniu *2go* ſtopnia $n+2nx+nx^2=d$, któré nám powinno odkryć wartość na x. Chcąc ie rozwiązać podług wyżey wyłożonych reguł i znieść z zrównaniem ogólnem (A) przywiedźmy ie do wyrazu $x^2+2x=\frac{d-n}{n}$.

równaiąc ie potém z (A) będziem mieli $A=2, D=-\frac{n-d}{n}$. zatém $\frac{A^2}{4}=1$, więc:

$$x^2+2x+1=\frac{d-n}{n}+1 \quad \text{- - - -} \quad x+1=\pm\surd\left(\frac{1-n}{n}+1\right)$$

$$x=-1\pm\surd\left(\frac{d-n}{n}+1\right)$$

Dáymy

Dáymy teráz że liczba pierwiáſtkowey ludności $n=10.000$, liczba ludności po dwóch latach $d=90.000$; włożywſzy te wártości w zrównanie, wypadnie $x=-1\pm\sqrt{9}$, to ieſt $x=2$, $x=-4$, pierwſzá wártość na x náleży do wzroſtu ludności, i uczy nás, że do liczby każdego roku przybywała liczba ludzi roku poprzedzaiącego rozmnożoná przez 2, było więc ludzi po pierwſzym roku $10.000+20.000=30.000$, po drugim $30.000+60.000=90.000$.

Drugá wártość na $x=-4$ będąc odiemną, náleży podług wyżſzych wiadomości do odludnieniá, to ieſt: że gdybyśmy byli chcieli rachować niſzczeiącą corocznie ludność kraiu w iedney proporcyi, trafilibyśmy byli na to ſamo zrównanie, a zatem oba te pytaniá od iedney zawiſły kombinacyi. Zeby więc po dwóch latach brakowało 90.000 mięſzkańców; przypuściwſzy że ich zaráz ubyło 10.000, potrzeba do tego, aby odludnienie w każdym naſtępuiacym roku było cztery razy więkſze iak w pierwſzym: brakować ich więc będzie w pierwſzym roku 50.000, w drugim 90.000. Zeby więc liczbę zgaſłego obywatela w równey liczbie łat, ludnością iednoſtayną nadgrodzić, trzeba żeby ſię miało zaludnienie do niſzczeniá iako 2 : 4.

§. XV.

Znaczenie i włáſności pierwiáſtków uroionych.

Wróćmy ſię teráz od przykładu do początków zoſtawionych. Ponieważ zrównanie $x^2+Ax+D=0$; i iego pierwiáſtki $x=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2-D)}$. wyſtawiá nám zrównaniá drugiego ſtopnia; zawierać ono powinno w ſobie wſzyſtkie ſzczególne przypádki tychże zrównań i włáſności do nich przywiązane. Ieżeli więc uczyniemy w niem $A=0$ zoſtaie ſię zrównanie bez drugiego terminu $x^2=-D$, i iego pierwiáſtki $x=\pm\sqrt{-D}$. ieżeli więc D ieſt funkcyą odiemną; x^2 będzie dodatne, i zrównanie będzie zamykać obydwa pierwiáſtki równe, s których ieden dodátny, a drugi odiemny. Ieżeli zaś D ieſt dodátne, x^2 będzie odiemnem. Ale x^2 ieſt potęgą drugą x, która podług natury potęg parzyſtych zawſze bydź powinna doda-

tną

tną bądź ona powſtaie s funkcyi dodátnéy, bądź z odiemnéy; wynaleśdź więc na x^2 wartość odiemną w zrównaniu, albo na x funkcyą pod znakiém pierwiaſtkowym odiemną, ieſt to wynaleśdź rzecz przeciwną całéy naturze funkcyi 2go ſtopnia; i dla teyci to przyczyny takowé pierwiaſtki odiemne pod znakami $\sqrt{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[8]{}$, i t. d. wzięły imie UROIONYCH (*Radices imaginariae*), któré w oſtatnich wypádkach pokazuią nám niepodobieńſtwo tego, czégo ſzukámy, dla iakieyś przeciwności, którá ſię w pytanie mimo naſzę uwagę wmieſzała. Iakóż do przypádków ſzczególnych któré ogarniá zrównanie, należy zaiſte i tén, który to pytanie czyni niepodobném, i który przez oſtatnié wypádki powinien nám bydź wytknięty. A tak zrównanie każdé nie tylko nás prowadzi do prawdy, ale nám i wytyka błąd ieżeliśmy go popełnili. Mieliśmy tego iuż przykład w zrównaniach *1go* ſtopnia pod §. 10.

Przypádki więc pierwiaſtków uroionych zawarté bydź koniecznie muſzą w zrównaniu ogólném - - $x^2+Ax+D=0$ - - $x=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{}(\frac{1}{4}A^2-D)$ do których roſpoznaniá uważać nám potrzeba wielkość funkcyi zoſtaiących pod znakiem pierwiaſtkowym. Dla ſkróceniá więc ięzyka, znak (<) ſłużyć nám będzie za znak wielkości, oznáczaiąc tę ilość, lub funkcyą większą, ku któréy ieſt obróconá otwártość znaku, tę zaś mnieyſzą którá ſię kładzie przy kończyſtości tegoż znaku n.p. $x<a$, pokazuie że x ieſt mnieyſzem od a, i że a ieſt większe od x.

Ponieważ funkcyá odiemná pod znakiem $\sqrt{}$ oznaczá pierwiaſtki uroioné, roſtrząśniymy, kiedy $\frac{1}{4}A^2-D$ bydź może odiemném lub dodatném. Pewni ieſteśmy z poprzedzaiących początków że $\frac{A^2}{4}$ muſi zawſze bydź dodatném, iakiekolwiek ieſt ſamo A; ieżeli D ieſt odiemnem, odciąganiem ſtanie ſię dodatné, więc koniecznie na ten czas $\frac{A^2}{4}-D$ zawſze będzie dodatnem i zrównanie *2go* ſtopnia nie ma pierwiaſtków uroionych.

Ieżeli zaś D ieſt dodatnem, $\frac{1}{4}.A^2-D$ będzie tylko w tén czas odiemnem, kiedy $D>\frac{1}{4}.A^2$, i zrównanie na ten czas ma obydwa pierwiaſtki uroioné. S tych dwóch tak proſtych uwag ieſzcze przed rozwiązaniem zrównania *2go* ſtopnia, możémy poznać czyli ono zamyka pierwiaſtki rzetelnie lub uroioné. Te pierwiaſtki uroione nie wydałyby nam ſię aż w oſtatnich wypadkach, gdybyśmy nie byli doſzli dopiero wyłożonego ſpoſobu na ich roſpoznanie, może więc zrównanie pokazać ſię w poſtaci rzetelney a iednak zamykać coś niepodobnego. Coż tego za przyczyna? barzo proſta: w pytaniu zadanem może zachodzić przeciwność między iednym warunkiem i drugim względem iedney rzeczy, ale może zachodzić związek względem drugiey; uważane te warunki w tym oſtatnim przypadku prowadzą nas do zrównania prawdziwego; że zaś to zrównanie ogarnia wſzyſtkié okoliczności, odkryie ſię dopiero w wypadku przeciwność, która względem czego zachodzi. Oprócz tego mogą warunki wiązać ſię s ſobą dobrze w pytaniu, ale mogą nie bydź przywiązané tylko do pewnych wartości; ieżeli w nie wprowadzémy wartość która im nie ſłuży, wprowadzemy rzecz niepodobną, i trafiemy na uroione pierwiaſtki. Zobaczmy to w przykładzie:

Zadanie. „Rozdzielić liczbę 18 na dwie tak, żeby „ich mnogość wydała 135„

Daymy że iedna s tych liczb ieſt x, druga więc będzie 18—x, i warunek pytania daie nam Zrównanie $x(18-x)=135$. $18x-x^2=135$. $x^2-18x=-135$; a zatem $x=9\pm\sqrt{(81-135)}=9\pm\sqrt{-58}$, pierwiaſtki dwa uroioné. Pytanie więc naſzé ieſt niepodobné w liczbie 18, ale bydź może podobne w inney liczbie.

Gdybyśmy

Gdybyśmy n. p. zamiaſt 18 wzięli byli 24, znaleźlibyśmy byli dwie liczby $x=9$; $x=15$. których mnogość równa ieſt 135 podług warunku pytania.

§ XVI.

Zrównanie 2go ſtopnia składa ſię z dwóch pierwſzego ſtopnia.

Zoſtawmy ſobie na potem przykłady i dalſze obiaśnienia naſzych początków, a ciągmy daley naſzę uwagę. Przyſzliśmy byli do zrównania 2go ſtopnia od zrównań zamykaiących w ſwych terminach mnogość z iedney ilości nieznaney przez drugą n. p. $xy+ay+b=o$, uważaiąc y iako funkcyą x daną przez inny związek 1go ſtopnia. Takowe zrównanie ieſt zaiſte barzo ogólne 2go ſtopnia, s którego dopiero wypada $x^2+Ax+D=o$, ale że tamto podług podanych prawideł nie może bydź rozwiązane tylko przywiodłſzy ie do tego oſtatniego wzoru. Iednakowoż wyraz iego tak przerobiony nic nie odmienia w iego naturze i związku, a zatem nie naruſza żadnego przymiotu iemu iſtotnego. Ieżeli więc zrównanie $xy+ay+b=o$ uważane bydź powinno iako złożone z dwóch związków różnych lub iednakich, s których ieden ſłuży na x, drugi na y; i z dwóch wartości równych lub nierównych, ilosci nieznanych x, y; dwie te wartości nie mogły ſię złożyć razem w zrównaniu, tylko tak iak i ſame nieznane, to ieſt mnożeniem iedney przez drugą. Zrównanie więc $xy+ay+b=o$ uważane bydź powinno iak gdyby było złożone z dwóch wartości zrównań 1go ſtopnia przez ſiebie rozmnożonych. Więc i $x^2+Ax+D=o$ które ieſt zawarte w tamtem podobnie bydź powinno uważane: te dwie wartości pierwſzego ſtopnia wypadaią z rozwiązania tego zrównania i ſą oznaczone w dwóch pierwiaſtkach, więc dwa pierwiaſtki zrównania $x^2+Ax+D=o$, to ieſt - -

$$x=-\tfrac{1}{2}A+\surd(\tfrac{1}{4}A^2-D) \text{ - - - } x=-\tfrac{1}{2}A-\surd(\tfrac{1}{4}A^2-D)$$

przywiedzione do zero i rozmnożone przez ſię wydadź powinny ſamo zrównanie $x^2+Ax+D=o$.

Przywiedzeni więc ieſteśmy tak oczywiſtą uwagą do działań w funkcyach pierwiaſtkowych rzetelnych lub uroionych. Zatrzymaymy ſię nad niemi.

Działania funkcyi niewymiernych.

Działania któreśmy roſtrząſali wyżey w funkcyach wymiernych zaſadzané były na pierwſzych właſnościach i na naturze ſamych funkcyi i ilości. Z różnych odmian wypadały różné ich gatunki, té atoli zawſze pokazały nam ſię uważaiąc iedno działanie ſpoſobem mniey lub więcey rozległym i dzieląc ie niby na różné przypadki. Iakżeśmy wynaydowali prawidła na działanie iakié nowé? oto równaiąc to z innem iuż wiadomém, a podług odmian w tém porównaniu doſtrzeżonych, przerabialiśmy prawidła iednego działania na prawidła drugiego; to ieſt ſzliśmy zawſze od rzeczy wiadomych do niewiadomych i w ſzukaniu té oſtatnié ſtaraliśmy ſię zawſze przywieśdź do pierwſzych. Nie odſtąpmy więc i teraz od tey drogi i ſtaraymy ſię funkcye niewymierné porównać z wymiernemi co do działań w nich zachodzących. Nie możemy naſamprzód wątpić żeby działania w funkcyach teraźnieyſzych nie przypadały té ſamé, które ſłużyły funkcyom wymiernym. Té bowiem działania nie były ſkutkiem ich wymierności, ale wypadały z różnych odmian wzroſtu lub ubywania, którym podlega ilość podług natury i okoliczności pytania. Té odmiany zachodzić więc mogą w ilościach niewymiernych tak iak w wymiernych; nie zoſtaie nam teraz tylko prawidła tamtych przyzwoicie ſtóſować do teraźnieyſzych.

Dodawanie i odciąganie,

Wſzyſtkie ilości niewymierné wyrazić ſię mogą na podobieńſtwo wymiernych przez wykładniki ułomkowé; przyſtóſowawſzy więc to wſzyſtko cośmy mowili o obchodzeniu ſię z wykładnikami całkiemi, do ułomkowych, wynaydziemy to cośmy ſobie zadali. A naprzód iako różné litery i wykładniki w funkcyach wymiernych, oddzielały nam té funkcye nie dozwalaiąc ich dorzucać lub odciągać razém chyba przez ſamé tylko znaki, tak różné litery i wykładniki znaków pierwiaſtkowych w funkcyach niewymiernych tak oddzielaią ich gatunki, że ich s ſobą łączyć nie można tylko przez znaki n.p. maiąc $\sqrt{a}$, $\sqrt{ab}$,

albo

albo $\sqrt{-a}$, $\sqrt[3]{-3a}$, i t.d. mamy funkcye tak różné, że ich dodawanie lub odciąganie nie może ſię ſtać tylko przez naznaczenie, to ieſt: $\sqrt{a}\pm\sqrt{ab}-\sqrt{-a}\pm\sqrt[3]{-3a}$. Przeciwnie zaś chcąc dodadź lub odciągnąć $3\sqrt{ab}$ do lub od $\sqrt{ab}$, albo $4\sqrt{-x}$, $2\sqrt{-x}$, wypada $4\sqrt{ab}$, $6\sqrt{-x}$ w pierwſzem; $2\sqrt{ab}$, $2\sqrt{-x}$ w drugiem działaniu, bo wſpół-czynniki liczebné nie odmieniaią natury funkcyi.

Mogą częſtokroć funkcye niewymierné pokázać ſię na pozór różnemi, lubo w ſamey rzeczy takiemi nie ſą, n.p. $3\sqrt{xa^2}$, $a\sqrt{4x}$, albo $12x\sqrt{-d}$, $2\sqrt{-dx^2}$, na rozeznanie tego należy ich wyraz uprościć, wydobywſzy z pod znaku té ilości, które bydź mogą wydobyte, lub wciągnąwſzy niektóre pod znak podług niedáwno przepiſanego ſpoſobu w §. 13. a przywiódłſzy ie takim ſpoſobem do iednoſtaynego wyrazu pokáże nam ſię prawdziwé ich znaczenie: i tak w przykładzie naſzym $3\sqrt{xa^2}=3a\sqrt{x}$, $a\sqrt{4x}=2a\sqrt{x}$. $2\sqrt{-dx^2}=2x\sqrt{-d}$, widziemy teráz że $3a\sqrt{x}$ i $2a\sqrt{x}$, $12x\sqrt{-d}$ i $2x\sqrt{-d}$ ſą funkcye iednakie.

Przywodzenie do iednego znaku pierwiáſtkowego.

Ale maiąc funkcye pod różnemi znakami pierwiáſtkowemi, nie możnażby ich przywieśdź do iednego znaku bez naruſzenia ich wártości, n.p. $\sqrt{ax}+\sqrt[3]{yd}+\sqrt[m]{a^4z}$? Odpowiedź na to ieſt barzo łatwá. Przerabiać wykładnika znaku pierwiáſtkowego na inny, ieſt to podwyżſzyć lub zmnieyſzyć pierwiaſtek potęgi w funkcyi pod tym znakiem zoſtaiącey; w tey odmianie ocalemy zupełnie wártość funkcyi, ieżeli ſamę ilość pod znakiem do tyle wyżſzey lub niżſzey potęgi wynieſiemy, ile ſię powiękſzyć lub zmnieyſzyć powinien pierwiáſtek w tem przerobieniu; wykonywamy bowiem tym ſpoſobem dwa działania przeciwne, a zatem to co iedno odmienia w funkcyi, drugie znosi i przywráca ią do dáwney wártości: i tak n.p. w funkcyi $\sqrt{ax}$ możémy wykładnika znaku podług woli odmienić, bylebyśmy tę ſamę odmianę czynili i w funkcyi pod znakiem; chcąc n.p. wykładnika 2 zamienić na 4. 6. 8. i t. d. przez tę ſamę liczbę mnożę zaraz wykładnika znaku pierwiaſtkowego i funkcyi; mam $\sqrt{ax}$, $\sqrt[4]{a^2x^2}$, $\sqrt[6]{a^3x^3}$, $\sqrt[8]{a^4x^4}$, i t.d. które tożſamo znaczą; te bowiem funkcye podług wyżſzych wiadomości ſą równe.

$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{2}{4}}x^{\frac{2}{4}}$, $a^{\frac{4}{8}}x^{\frac{4}{8}}$ ułomki zaś $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. W rzeczy więc ſamey to pytanie na tem ſię kończy, żeby wykładniki ułomkowe odmienić na inne z ocaleniem ich wartości: i przywieśdź funkcye $\sqrt{ax}+\sqrt[3]{yd}+\sqrt[m]{a^4z}$ do iednego wykładnika znaku; ieſt to iedno, co przywieśdź wykładniki ułomkowe ilości do tego ſamego mianownika. A zatem w funkcyi $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{m}}z^{\frac{1}{m}}$ trzeba $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4+1}{m}$ przywieśdź do iednego mianownika $\frac{3m+2m+24+6}{6m}$: więc $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{m}}z^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{3m}{6m}}x^{\frac{3m}{6m}}+y^{\frac{2m}{6m}}d^{\frac{2m}{6m}}+a^{\frac{24}{6m}}z^{\frac{6}{6m}}=\sqrt[6m]{a^{3m}x^{3m}}+\sqrt[6m]{y^{2m}d^{2m}}+\sqrt[6m]{a^{24}z^6}$.

Wynoſzenie do potęg i wyciąganie pierwiaſtków,

Działanie, któreśmy dopiero odbyli, potrzebuie mnożenia wykładników, mnożyć zaś wykładniki iakiey funkcyi ieſt to wynosić ią do potęgi, tak iak dzieląc wykładnika teyże funkcyi, ieſt to wyciągać z niey pierwiaſtek. Wſzyſtkie funkcye niewymierne wyrażaiąc ſię przez wykładniki ułomkowe podlegaią podobnym prawidłom w tych dwóch działaniach, tak dalece; że ſtóſuiąc ie do ułomków przyzwoicie, w wynoſzeniu do potęg przypadnie nam mnożyć liczników, w wyciąganiu zaś pierwiaſtków mianownika ułomku wykładnikowego. Aże w funkcyi niewymierney, licznik ieſt wykładnikiem ilości, mianownik zaś wykładnikiem znaku pierwiaſtkowego, więc wy-

noſząc

noſzac n. p. $\sqrt[3]{(x+a)}$ do potęgi m należy nam przez m mnożyć wykładnika ilości i wypadnie potęga m $\sqrt[3]{(x+a)^m}$: wyciągaiąc zaś pierwiaſtek potęgi m z funkcyi $\sqrt[3]{(x+a)}$, przypada wykładnika znaku pierwiaſtkowego rozmnożyć przez m, co daie $\sqrt[3m]{(a+x)}$ pierwiaſtek potęgi m funkcyi $\sqrt[3]{(x+a)}$.

Mnożenie i Dzielenie.

Chcąc mnożyć lub dzielić iednę ilość niewymierną przez drugą takąż, mamy do czynienia z wykładnikami ułomkowémi, które tak iak w funkcyach wymiernych należy dodadź do ſiebie w pierwſzem, odciągnąć zaś w drugiem działaniu u tych ſamych liter. Ażc ułomków nie możémy dodawać ani odciągać nie przywiodłſzy ich do iednego mianownika, więc niżeli przyſtąpiémy do mnożenia lub dzielenia funkcyi niewymiernych, należy ie wprzód przywieśdź do tego ſamego znaku pierwiaſtkowego; i tak $\sqrt[m]{a^n b^p}$. $\sqrt[q]{a^r b^s} = a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}} = a^{\frac{qn+rm}{qm}} b^{\frac{pq+sm}{qm}} = \sqrt[qm]{(a^{qn+rm} b^{pq+sm})}$; to ſamo ſłuży i na dzielenie n. p. $\sqrt[m]{a^n b^p} : \sqrt[q]{a^r b^s} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}} = a^{\frac{nq-rm}{qm}} b^{\frac{pq-sm}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{nq-rm} b^{pq-sm}}$. Ieżeli zaś znaki zachodzą té ſamé w mnożnikach, nie zoſtaie tylko rozmnożyć ſame ilości podłożywſzy ich mnogości tenże ſam znak. n.p. $\sqrt{ab}.\sqrt{ac}=\sqrt{a^2bc}=a\sqrt{bc}$.

Skąd ſię wnoſi że $\sqrt{a}.\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$; $\sqrt{a}.-\sqrt{a}=-\sqrt{a^2}=-a$, to ieſt: że mnożąc dwie funkcye pierwiaſtkowe też ſame przez ſie, wypada w mnożeniu ſama funkcya bez znaku pierwiaſtkowego, dodatna ieżeli znaki ſą też ſame; odiemna, ieżeli ſą różne: co ſię także wyciąga z wzorów ogólnych uczyniwſzy $qn=rm=qm$, $pq=sm=qm$.

Funkcye pierwiaſtkowe uroione wyrazićby ſię także powinny przez wykładniki ułomkowe. Ale że ich cecha zależy na znaku odiemnym położonym po znaku pierwiaſtkowym, który ma wykładnika parzyſtego, dla tego wynaleśdź nam potrzeba różnicę na to znaczenie: bo n.p. $\sqrt{-a}$ wyraziwſzy przez $-a^{\frac{1}{2}}$ mógłby kto znak odiemny przywiazać do znaku pierwiaſtkowego a nie do ſamey ilości, przez coby uroioną wziął za rzetelną. Zabieżemy temu przez znaczenie $(-a)^{\frac{1}{2}}$ gdzie iuż znak przed nawiaſami należeć będzie do znaku pierwiaſtkowego, znak zaś pomiędzy nawiaſami do ſamey ilości; a ponieważ $-a$ uważać ſię może iako $a.-1$ przeto $(-a)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}.(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}\sqrt{-1}$. wſzyſtkie więc funkcye uroione znaczyć odtąd będziem mogli tym ſpoſobem n. p. $\sqrt{-3x}=\sqrt{3x}\sqrt{-1}$. Zaczem ponieważ w funkcyach uroionych dwoiakie znaki należy rozróżnić, iedne które należą do znaku pierwiaſtkowego, drugie które należą do ſamey ilości, trzeba w działaniu mieć wielką baczność na kombinacyą tych dwoiakich znaków, która lubo dzieie ſię zgodnie do wſzyſtkich prawideł znaków, prowadzi nas do wypadków na pozor zdawaiących ſię im ſprzeciwiać.

Funkcye uroione ſą przypadkiem ſzczególnym funkcyi niewymiernych: wſzyſtkie więc prawidła któreśmy na te oſtatnie znaleźli, ſłużyć muſzą i pierwſzym. Maiąc zatem do mnożenia $\sqrt{-b}.\sqrt{-c}$, mamy w rzeczy ſamey $\sqrt{b}.\sqrt{-1}.\sqrt{c}.\sqrt{-1}$ czyli $\sqrt{bc}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$; aże $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-1$; zaczem $\sqrt{b}.\sqrt{-1}.\sqrt{c}.\sqrt{-1}=-\sqrt{bc}$. podobnie $\sqrt{-b}.-\sqrt{-c}=+\sqrt{bc}$, $\sqrt{-a}.\sqrt{-a}=-a$, dwie więc funkcye uroione rozmnożone przez ſię, wydaią mnogość rzetelną.

Prawda ta tak oczywiſta, i ze wſzyſtkiemi prawidłami działań zupełnie ſię zgadzaiąca nie powinna nikogo zadziwiać, uważaiąc każdą funkcyą uroioną iako wypadek oſtatnich kombinacyi rachunku, do którego nas przywieśdź może rozwiązanie iakiegokolwiek

zrównania

zrównania ſtopnia parzyſtego, Związek bowiem w zrównaniu mógł bydź prawdziwy, ale go ſtóſuiąc do pewnego przypadku ſtał ſię niepodobnym. Zdaie mi ſię więc, że pierwiaſtki uroione ſą tylko przypadkami ſzczególnemi rozwiązania ogólnego, pokazuiącemi gdzie ſię, to rościągnąć nie może, iako niżey będziemy mieli tego dowody. Mnożąc więc dwie funkcye przez ſię, wracamy ſię do tych prawdziwych ogolnieyſzych kombinacyi s których powſtaly.

Zatrzymaymy ſię ieſzczè nad tem działaniem. Mnożąc $(a+b\surd-1)(a-b\surd-1)$ wypada za mnogość a^2+b^2 funkcya rzetelna, $(a^2+b^2)(a+b\surd-1)=a^3+ab^2+a^2b.\surd-1+b^3\surd-1$ funkcya uroiona; - - - - $(a^3+ab^2+a^2b\surd-1+b^3\surd-1)(a-b\surd-1)=a^4+2a^2b^2+b^4$ funkcya znowu rzetelna; i t. d. Widziemy więc że mnogość s funkcyi uroionych nigdy nie może ſię ſtać rzetelną, tylko kiedy liczba mnożników uroionych ieſt parzyſta.

Nauczywſzy ſię obchodzić z funkcyami niewymiernemi w różnych zachodzących działaniach, wróćmy ſię do naſzych uwag, i użyimy dopiero wyłożonych na mnożenie prawideł: chcąc ſię doświadczeniem przekonać o tey prawdzie, ktoreyśmy oczywiſtem rozumowaniem doſzli to ieſt: że zrównanie drugiego ſtopnia zamyka koniecznie dwa pierwiaſtki, które przywiodłſzy do zero, i rozmnożywſzy przez ſię, otrzymamy to ſamo w mnogości zrównanie, które nam było do rozwiązania podane. Iakóż rządząc ſię prawidłami mnożenia.

$$\left(x+\tfrac{1}{2}A+\surd(\tfrac{1}{4}A^2-D)\right)\left(x+\tfrac{1}{2}A-\surd(\tfrac{1}{4}A^2-D)\right)=x^2+Ax+D=0.$$

Wſzyſtkie więc zrównania $2go$ ſtopnia uważane bydź mogą iako zroſłe z dwóch zrównań $1go$ ſtopnia przez ſiebie rozmnożonych, których albo obydwa pierwiaſtki ſą rzetelne, albo obydwa uroione: każdy s takowych pierwiaſtków rozwiązuie iakie pytanie, albo daie odpowiedź inną na toż ſamo. Zaczem zrównanie $2go$ ſtopnia ieſt zawſze ſkładem dwóch

pytań

pytań proſtych oznaczonych przez dwa pierwiaſtki tegóż zrównania. Każde zrównanie *1go* ſtopnia na które ſię zrównanie *2go* rozbiera, ieſt równe zeró; więc wartość na *x*, s któregokolwiek z nich wyciągniona i włożona w zrównanie *2go* ſtopnia przywieśdź ie powinna do zero, iako działanie każdego o tem przekona w teraźnieyſzym przykładzie. Przeto każda wartość ilości nieznaney która włożona w zrównanie *2go* ſtopnia przywiedzie ie do zero, ieſt pierwiaſtkiem zrównania: takich zaś wartości nie może bydź więcey nad dwie. *Powtore* znalazłſzy innym iakim ſpoſobem ieden tylko pierwiaſtek, a rozdzieliwſzy przezeń zrównanie *2go* ſtopnia podane, otrzymamy pierwiaſtek drugi.

Niżeli rościagniemy daley teraźnieyſze uwagi, rozwiążmy sobie ieſzcze iedno zadanie, które nas wprawi w używanie prawideł w tym Rozdziale wyłożonych.

Zadanie: ,,Maiąc dwie świece nierownie światła ,,udzielaiącé złączone przez linią proſtą, wynaleśdź ,,na tey linii mieyſce rownie od obydwóch oświecone?,,

Na rozwiązanie tego pytania przypuścić nam tu potrzeba ieden początek optyczny, że iaſności rozrzucane od ciał świecących tak ſię maią do ſiebie, iako potęgi drugie wywrotne ich odległości: (*in ratione inverſa duplicata diſtantiarum*). Tak że ieżeli w odległości *a* iaſność ieſt równa *c*, w odległości *x* rowna będzie $\frac{ca^2}{x^2}$. Chcąc teraz doyśdź światła każdey w ſzczególności świecy, równać powinniśmy iaſność iedney i drugiey rzucona w teyże ſamey odległości na iaką płaſzczyznę: połóżmy więc że piewſza świeca daie iaſność *c* w odległości *a*; druga światłość *d* w teyże ſamey odległości; nazwawſzy odległość dwóch świec od ſiebie *b*, odległość pierwſzey świecy od mieyſca którego ſzukamy *x*, będzie odległość drugiey od tegóż mieyſca *b*—*x*. Wypada więc s poczatku optycznego że świeca pierwſza w odległości *x* będzie dáwać światła $\frac{ca^2}{x^2}$, drugá w odległości $b-x$, udzieli światła $\frac{da^2}{(b-x)^2}$; a ponieważ podług warunku pytaniá obydwa té światła bydź powinny równé, idzie zatém że - - $\frac{ca^2}{x^2}=\frac{da^2}{(b-x)^2}$; znioſłſzy ułomki i roſporządziwſzy terminy podług potęg x, otrzymámy: $x^2-\frac{2bc}{c-d}x=-\frac{cb^2}{c-d}$ - - $x^2-\frac{2bc}{c-d}x+\frac{b^2c^2}{(c-d)^2}=\frac{b^2cd}{(c-d)^2}$ $x-\frac{bc}{c-d}=\pm\frac{b\sqrt{cd}}{c-d}$ czyli - - - $x=\frac{bc\pm b\sqrt{cd}}{c-d}$ odległość pierwſzéy świecy; - - $b-x=-\frac{b(d\pm\sqrt{cd})}{c-d}$ odległość drugiéy świécy od miéyſca równie oświeconego.

Ponieważ x má dwie wártości, przeto muſzą bydź koniecznie dwa takowé miéyſca. Roztrząśniymy teráz wſzyſtkié przypádki w zrównaniu zawarté i ściągaiące ſię do różnych ſtopni światła, to ieſt kiedy $c>d$; powtóre kiedy $c<d$; nakoniec kiedy $c=d$.

Co do pierwſzego, ieżeli $c>d$, $c>\sqrt{cd}$, i $d<\sqrt{cd}$: pierwſzá więc wártość na x, $\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d}$ ieſt ilością dodatną, ale że $(c+\sqrt{cd})>(c-d)$, więc $\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d}>b$, dlá tego miéyſce to przypadá aż za drugą świécą ſłabſzą. Drugá odległość $b-x=-\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d}$ ieſt odiemną, więc przypadá na przeciwną ſtronę podług tego cośmy mówili o ilościach odiemnych. Drugá wártość na x ieſt $\frac{b(c-\sqrt{cd})}{c-d}$ ieſt także dodatná, ale że

mnieyſzá

mnieyſzá od b, więc to mieyſce przypadá między dwiema świecami, i na tén czas drugá odległość $b-x=\frac{b(\sqrt{cd}-d)}{c-d}$ ieſt dodatná iako bydź powinna. Widzemy więc że kiedy $c>d$, zadanie má dwie odpowiedzi, a przeto ſą dwa takowe mieyſca, s których iedno przypadá między dwiema świecami, drugie za świecą ſłabſzą. Daymy n.p. że $c=4d$, $b=30$ ſtóp, więc $x=60$ ſtóp, $b-x=-30$ ſtóp na pierwſzą odpowiedź; powtóre $x=20$ ſtóp, $b-x=10$ ſtóp na odpowiedź drugą, co ſię zupełnie zgadza z doświadczeniem

Przypuśćmy potém że $c<d$, $c<\sqrt{cd}$, $d>\sqrt{cd}$, w tym przypadku nic więcey nie czyniemy, tylko że przenoſzémy światło mocnieyſzé na mieyſce ſłabſzégo, a ſłabſzé na mieyſce mocnieyſzego, zaczém odpowiedzi będą te ſame co i przedtem tylko ſtóſownie do teraźnieyſzych odmian.

Połóżmy na koniec obydwa światła równe to ieſt $c=d$; na tén czás $x=\frac{b(c+c)}{0}$; . . $b-x=\frac{b(d+d)}{0}$, powtóre $x=\frac{0}{0}$, $b-x=\frac{0}{0}$; obydwie pierwſzé wártości ſą równe ułomkom maiącym za mianownika zero, czyli ilość nieſkończenie małą; ſą więc nieſkończenie wielkie. Coż to znaczy?

Tłómaczy ſię znaczenie ilości nieskończenie wielkiey, i nieskończenie małey, i wyrazu nieoznaczonego $\frac{0}{0}$

Każda ilość odmieniaiąc ſię nie może tylko albo ſię powiękſzać albo zmnieyſzać. W pierwſzym razie dorzucaiąc iey ilekolwiek bądź podobnych ilości, wzráſta; ale nie przeſtaie nigdy bydź ilością ſkończoną: iednakowóż wzraſtaiąc zawſze zbliża ſię co raz barziey do pewnéy granicy, którą my ſobie wyſtawiamy w umyśle, abyśmy ſtóſuiąc do niey iakiekolwiek bądź wielkości, mogli o ich wártościach ſądzić: tą granicą ieſt ilość nieſkończenie wielka która ſię znaczy przez $\frac{1}{0}$ albo przez ∞; nie maſz iey w naturze, w którey wſzyſtkie rzeczy ſą ſkończoné, ale to ieſt tylko ſtworzeniém rozumu wymyślonem do mierzenia iakichkolwiek bądź wzroſtów ilości. Drugi

Drugi przymiot ilości to ieſt zmnieyſzanie ſię ciągłé, potrzebowało podobney granicy, do którey ią odnoſząc, moglibyśmy bydź w ſtanie ſądzenia o ich wartościach: taką granicą ieſt zero *o*. czyli ilość nieſkończenie mała która tak iak pierwſza nie ma ieſteſtwa tylko w ſamym umyśle.

Każda ilość wzraſtaiąc lub ubywaiąc przybliża ſię do iedney s tych granic ale iey nigdy nie może doſiąc, boby tym ſpoſobém z ilości rzetelney ſtała ſię zmyśloną. Ieżeli ſię kiedy przytrafi że iaka wartość w zrównaniu zamieni ſię na $\frac{1}{0}$ albo na *o*, znakiem ieſt, że w naturze takowy przypadek podług ściſłości geometryczney nie ma mieyſca, ale że ie mieć może w ſpoſobie prawdy bliſkim. n. p. przypuściwſzy w naſzem zadaniu $c=d$ znaleźliśmy na x i $b-x$ ilość nieſkończoną: co nas uczy, że iedna s tych odległości nie może ſię znaydować w naturze; że na ten czas pytanie naſze nie należy do drugiego ſtopnia ale do 1*go*, iako nas zaraz początkowe uczy zrównanie. Ieżeli atoli nie będziemy brać rzeczy w nayſkrupulatnieyſzey ściſłości, drugié to mieyſce mogłoby bydź naznaczoné w tak wielkiey odległości, przed którąby niknąć mogła odległość dwóch świec, co zawſze w naturze daie tylko wartość bliſką prawdy. Każda funkcya całka ſtaie ſię nieſkończenie wielką, kiedy który z iey terminów ſtanie ſię takim; nieſkończenie zaś małą kiedy który z iey mnożników ieſt zero. Każda zaś funkcya ułomkowa ſtaie ſię nieſkończenie małą, kiedy iey licznik, kiedy zaś iey mianownik ieſt zero, ſtaie ſię nieſkończenie wielką, co wypada koniecznie z natury ułomków.

Między dwiema granicami $\frac{1}{0}$, *o*, zawarte ſą wſzyſtkie ilości ſkończone i rzetelné; które pokazuią ſię w rachunku pod znakiem $\frac{0}{0}$, ieżeli w oſtatnié wypadki wprowadziliśmy iaką kondycyą do którey rachunek naſz nie należy. Znak więc $\frac{0}{0}$ uczy nas, że rzecz którey ſzukamy ieſt podobna, że ma wartość ſkończoną, ale że te oſtatnie wypadki nie mogą iey naznaczyć, a zatem należy ſię aż do początkowego wrócić zrównania, i wprowadzić w nie ten warunek nowy, który zapewne coś w warunku odmieniwſzy, odkryie nam dokładnie to czego ſzukamy. I tak w teraźnieyſzym przykładzie wprowadziliśmy do oſtatniego zrównania $c=d$, kondycyą która zniża zrównanie do pierwſzego ſtopnia i daie nam $b=2x$, czyli $x=\frac{b}{2}$, to ieſt: że w tym przypadku iedno ieſt tylko takowe mieyſce w ſamym środku odległości dwóch świec od ſiebie: ſzukaiąc tey odległości w zrównaniu 2go ſtopnia gdzie iuż iedna wartość ſtała ſię nieſkończoną, i kombinuiąc to mieyſce niepodobne s podobnem, nie mogliśmy zaiſte nic wyciągnąć oznaczonego w takowey kombinacyi, o czem nas ſam rachunek przeſtrzegł.

Ieżeli ilość iaka przeſzedłſzy za granicę oſtatnią ſwego wzroſtu lub ubywania zaczyna znowu brać wartosci iakie, te nie mogą bydź tylko nieſkończone uważaiąc ie w takim względzie iak przedtem, i na ten czas wypadaią różne porządki ilości nieſkończonych, które Matematyka wyżſza roſtrząſa: ieżeli zas te wartości ſą ſkończone nie mogą one znaydować ſię w tym ſtanie i względzie, w iakim były przedtem: bo iuż ſkończyły zupełnie ſwóy bieg dawny i ſwoię nawet miarę ſtóſonku; nie mogły one więc pokazać ſię tylko innemi od tego, czem były przedtem; to bowiem przeyście nic innego nie znaczy, tylko że wzroſty lub ubywania ilości w tym względzie ſą niepodobnemi, ale podobnemi w względzie inſzym. Ieżeli więc ilość iaka była dodatną, a w tym ſtanie ſtała ſię dla pewney wartości $\frac{1}{0}$ albo o; roſnąc znowu potem ſtaie ſię odiemną albo z odiemney dodatną, i dla tegoć to podobno ilości odiemne nazwano MNIEYSZEMI OD NIczego (*minores nihiló*); nazwiſko barzo ſzczególné, które tu dopiero może bydź obiaśnione.

Ieżeli więc niektórzy Autorowie wyrywaią ſię zaráz z niem przy wſtępie, możemy s teraźnieyſzych i przeſzłych uwág rossądzić iak mało znaią teoryą ilości dodátnych i odiemnych. Oprócz wielkiey nieprzyzwoitości przez którą uczących ſię wprawiaią w ciemné i dziwaczné rzeczy opiſywanie, błądzą przeciwko prawom geometrycznym daiąc nazwiſko powſzechné barzo ſzczególnemu przypádkowi, i wprowádzaiąc niezrozumiany ięzyk w tę naukę, która s swey natury ieſt ſtolicą iasności i przekonánia. Staraymy ſię wrazić náygłębiey w umyſł i pamięć teraźnieyſzé uwági, bo ony ſłużyć nam będą do iaſnego zrozumienia wyżſzych Matematycznych nauk, których ſą náypierwſzym gruntem.

S tego tłómaczenia ſpytá ſię nie ieden, iak rozróżnić wypádki pokazuiące nam pierwiaſtki uroioné w zrównaniu, od tych które nas przyprowádzaią do $\frac{1}{0}$ albo do *o*; ale na to doſyć mu zrozumieć dobrze opiſanie dwóch tych rzeczy, a przyzná że inná ieſt rzecz, kiedy iaká odpowiedź ſtaie ſię dla pewnego warunku wcale niepodobną, a inná znowu kiedy odpowiedź ieſt niepodobná dla pewney kombinacyi od którey nie zależy. Ale pierwiaſtki uroioné będą ieſzcze miały rozlegleyſzé znaczenie niżey.

§. XVII.

Przykłady któreśmy ſobie obrali dlá doświadczenia prawideł na zrównanie 2go ſtopnia dały nam poznać, że wypádki Algebraiczne nie tylko nam odkrywaią prawdziwą wartość ilości nieznaney, ale nawet i ſtán iey w którym ſię względem innych znayduie i do którego należy odpowiedź pytania podług wiadomości o funkcyach dodátnych i odiemnych wyżey wyłożoney. Kiedy więc nadaiemy znaczenia rzeczom w pytaniu zawartym nie należy nam ſię troſzczeć czyliśmy ie przyzwoitym znakiem nacechowali lub nie?

Wypádki poprzedzaiących uwág i prawidła zrównań 2go ſtopnia daley rościągnione.

oſtatnié bowiem wypadki nauczą nás tego; ieżeli w nich ilość nieznana wypadá s tym ſamym znakiem ktoryśmy iey na początku pytania nadali, pokazuie że naſzé cechowanie było dobre; ieżeli zaś wypadnie ze znakiem przeciwnym, oſtrzegá nás, że to cośmy wzięli w pewnym względzie, powinno było bydź wzięte w względzie przeciwnym. Rachunek więc Algebraiczny ſame nawet błędy znaczeniá poprawiá.

Zachodzi nám tu iedno pytanie: czyli prawidła podane na rozwiązanie zrównań 2go ſtopnia nie mogą bydź rościągnione do ſtopni wyżſzych? To pytanie ſtóſować można do dwóch przypadków, albo kiedy zrównaniá wyżſzych ſtopni zamykaią tylko pewne terminy iakowe podobieńſtwo maiące s temi, ktore w drugim ſtopniu zachodzą; albo kiedy zrównaniá zamykaią wſzyſtkie terminy ſwych ſtopni, lub niektóre niemogące ſię zrównać s terminami 2go ſtopnia. Wniesie ſobie każdy że tu nie rozumiem innych terminów tylko te które zamykaią ilość nieznaną, bo cała uwaga naſza na te tylko terminy w rozwięzywaniu zrównań bydź powinna obrócona. Co do pierwſzego przypadku: ponieważ zrównanie 2go ſtopnia powſtaiące s funkcyi dwó-kſztałtney zawierá terminy x^2+Ax, gdzie wykładnik 2go terminu ieſt połową wykładnika 1go; więc ieżeli iakiekolwiek zrównanie będzie zamykało w dwóch terminach ilość nieznaną tak, że wykładnik 2go terminu będzie połową wykładnika 1go, te ſame reguły które nám tu ſłużyły, będą ieſzcze mogły bydź użyte na rozwiązanie takowych zrównań. Daymy n.p. że mámy zrównanie $x^{2m}+Ax^m+D=0$. gdzie m ieſt iakąkolwiek liczbą, to zapewne rozwiązać ſię może ſpoſobem 2go ſtopnia; uczyniwſzy bowiem $x^m=y$, a zatem $x=\sqrt[m]{y}$, zrównanie naprzód podané, odmieni ſię na zrównanie 2go ſtopnia $y^2+Ay+D=0$, które rozwiązáwſzy, wynaydziemy $y=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2-D)}$ . . .

$x=\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2-D)}\right)}$. Ieżeli

Ieżeli zaś zrównania wyżſzych ſtopni nie będą miały kondycyi dopiero wyłożoney; na ten czas prawidła 2go ſtopnia nie będą mogły bydź na ich rozwiązanie użyte. Uciekaiąc ſię do własności potęg, które nas także przywiodły do prawideł na drugi ſtopień, potrzebaby naſamprzód aby wſpół-czynniki wſzyſtkie ilości nieznaney, miały takowe wartości iakich każda w ſzczególności potęga wyciąga; inaczéy nie udałoby nam ſię wyciąganie z nich pierwiaſtków. Ale ktokolwiek zatrzyma ſię nad temi warunkami, pozna, że takowym ſpoſobem uſzczególniamy barzo teoryą zrównań, przywięzuiąc ich terminy do tych a nie inſzych wartości. Reguły na takowe ſzczególne przypadki nie poſunęłyby cale granic nauki, która ſwóy ſzacunek zabiera od ogólności początków. Trzebaby przeto wpuścić myśl naſzę w głębſze i rozległéyſze badania, do których nas ſamo tylko doſkonalſze poznanie zrównań wyżſzych ſtopni może przyprowadzić. Usiłuymy więc poznać lepiéy właſności zrównań iakichkolwiek ſtopni, w których może nam nie będzie trudno upatrzyć reguły na ich rozwiązanie. Ale iakąż drogą przyidziemy do tego poznania? Zbierzmy krótko naſamprzód treść całey nauki tego Rozdziału, a może w nim znaydziemy łańcuch myśli, za którym nam iśdź będzie potrzeba.

Treść nauki w całym Rozdziale.

Zrównania z eliminacyi wypadłe przywiodły nas do zrównania 2go ſtopnia; te znowu pokazały nam funkcye ſobie podobne, któreśmy nazwali dwó-kſztaltnemi dla dwoiakich wartości ich znaków. Mamy więc każdemu rodzaiowi zrównań odpowiadaiacy rodzay podobny funkcyi, a tamte przywiodły nas zawſze do tych, i do działań im właściwych. I lubo w iakiemkolwiek zadaniu funkcya poprzedzać musi zrównanie podług różnicy między niemi uczynioney w §. 2; że iednak przez związek myśli poſtępuiemy do prawdziwego poznawania, idzie zatem, że od zrównania przyiśdź muſiał rozum ludzki do właſności funkcyi, roſtrząſaiąc zbiór myśli i warunków,

które

które w tem związku porównał. Funkcye dwókſztałtne odkryły nam ſwoie pierwiaſtki; mamy więc pierwiaſtki funkcyi i pierwiaſtki zrównań: a iako, pierwſza potęga ieſt pierwiaſtkiem innych wyżſzych w funkcyi iakiey nieznaney ilości; tak zrównanie *1go* ſtopnia uważać ſię może iako pierwiaſtek wyżſzych zrównań, lubo w innym względzie, bo tam zważaią ſię pierwiaſtki co do ilości w funkcyą iednokſztałtną wchodzących, które zawſze bydź powinny te ſame; tu zaś co do związku który może różny lub tenże ſam zachodzić w pierwiaſtkach zrównania.

Przyſzliśmy bowiem przez oczywiſte barzo początki do tey gruntowey prawdy, że zrównania *2go* ſtopnia uważać ſię powinny iako złożone z dwóch zrównań *1go*; te ſame początki ſłużą nam do przekonania ſię że zrównania *3go*, *4go*, i t. d. ſtopnia zważane bydź mogą iako powſtaiące s trzech, czterech, i iednem ſłowem s tylu zrównań pierwſzego ſtopnia, ile ilość nieznana ma iedności w naywyżſzym wykładniku. Ieżeli ten wnioſek zdaie nam ſię za nagły, przyidziemy potem do niego przez inne początki. Nie możemy go atoli nie użyć do odkrycia właſności zrównań iakiegokolwiek ſtopnia. A naprzód ieżeli potęga druga funkcyi przywiodła nas do wzoru ogólnego zrównań *2go* ſtopnia; potęgi także wyżſze odkryią nam podobne wzory do wyżſzych zrównań, doſyć nam bowiem upowſzechnić wſpółczynniki ilości nieznaney w każdym terminie, i termin oſtatni, to ieſt rosciągnąć ie do iakichkolwiek ilości znanych, i wprowadzić w funkcye związek; a natychmiaſt Tablica §. 12. nauczy nas o wzorze przywiązanym do zrównania każdego ſtopnia.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Nowy Sposób uważania Zrównań doſtrzeżony w poprzedzaiących wiadomościach daie nam barziey poznawać ſztukę i moc Rachunku, za którego pomocą odkrywaią się Ogólne Własności Zrownan Jakiegokolwiek Stopnia: pokazuią się wzaiemne pomocy ſpływaiące s teoryi Zrównań na Funkcye, i s teoryi funkcyi na Zrównania.

§. XVIII.

Uwági Loiczne obiáśniaiace ſpoſób myślenia przez rachunek.

Uczyńmy tu naſamprzód potrzebną uwágę nad poſtępkiem naſzégo rozumowania. W poprzedzaiących dwóch rozdziałach ſzliśmy od zrównania do pierwiaſtków, dla tego, że tam iedno pytanie rzuciło tyle światła w naſze badania, żeśmy nie mieli trudności poiąć naturę zrównania i funkcyi; s których opiſu wypadły nam różne właſności zrównań *1go* i *2go* ſtopnia. Te oſtatnie atoli potrzebowały iuż znaczney pomocy rachunku dla tego, że kombinacye w nich zawarte iuż ſą barziey zawikłane. Im do wyżſzych poſtąpiemy ſtopni, tem ſię zapuſzczémy w delikatnieyſze i cięższe ſtóſónki, pod których liczbą upadłaby myśl naſza, gdyby nie była wſparta pomocą rachunku, i wiadomości iuż nabytych. Aże dochodzémy zawſze rzeczy nieznanych przez znane; każda walna prawda doſtrzeżona, ieſt dla nas nową drogą do innych odlegleyſzych. Zrównania *2go* ſtopnia pokazały nam oczywiście, że zrównania *1go* ſtopnia wchodzą za pierwiaſtki w wſzyſtkie inne. Szukać więc będziemy właſności zrównań wyżſzych ſtopni za pomocą pierwſzégo; i poydziémy teraz od pierwiaſtków do zrównań. W tym poſtępku pomożemy niezmiernie naſzym myślom, bo rachunek oſzczędzi nam wielé kombinacyi, których mnogość uciſnęłaby niezmiernie naſzé myśli. Całé więc myślenie do zrównań *1go* ſtopnia i iego działań przywiązané odpadnie nam, a uwaga naſza nie będzie miała do rostrząśnienia iak tylko nowé prawdy, które s tąd wypadną. Owóż cała Metafizyka myślenia przez rachunek! w nim naginamy badania naſzé do ſił rozumu, i uſiłuiémy rozumowania naſzé przywieśdź do iak naymnieyſzey liczby: wſzyſtkié zbyt odległé i zawarté w poſiłkach odpadaią od naſzey uwagi i zamieniaią ſię w formuły i mechanizm, a ſamé tylko iſtotne zoſtaią ſię przy umyśle, aby ſwobodnieyſzy przez ten ſpoſób, mogł prędzéy i dokładniey poſtrzegać nowé prawdy, które z rachunku wypadaią. Teraz n. p. użyiemy różnych działan i własności zrównań *1go* ſtopnia, ale te wſzyſtkie kombinacye które do tych działań i zrównań ſą przywiązané, ſą nam teraz niepotrzebne. Gdybyśmy ié byli obowiązani mieć przytomné w umyśle, mnogość myśli zmięſzałaby naſzę attencyą nie pozwoliwſzy nam daley przeniknąć. Rachunek więc nie tłumi rozumowania, ale nam ilé bydź może oſzczędza tego, któreśmy iuż raz uczynili, a które ciężąc na uwadze, tamowałyby dalſzé poſtępowanie naſzé do prawdy. Nie możemy nie uznać iak ta ekonomia ieſt nieodbicie naſzym myślom potrzebna, bez którey tylé innych nauk ulgnąwſzy na pierwſzych doſtzeżeniach i pewnych ſzczególnych prawdach, nie mogą ſię wynieść do innych zawikleyſzych.

§. XIX.

Nie oddalaymy ſię od tego na czymeśmy ſtanęli. Przedſięwzięliśmy dochodzić własności zrównań wyżſzych iakichkolwiek ſtopni przez ſkładanie ich z zrównań ſtopnia pierwſzego; wziąwſzy więc kilka zrównań *1go* ſtopnia $x-a=o$, $x-b=o$, $x-c=o$, $x-d=o$ $x-e=o$, których wſzyſtkie pierwiaſtki ſą dodatne;

powtore:

powtóre: $x+a=o$, $x+b=o$, $x+c=o$, $x+d=o$, $x+e=o$, i t.d. w których wſzyſtkie pierwiaſtki ſą odiemne, a rozmnożywſzy ich trzy, cztery, i t. d. przez ſię wypadnie z

$$(x-a)(x-b)(x-c)=o \text{ czyli:}$$

$$\begin{array}{llll} x^3 & -a.x^2 & +ab.x & -abc=o \\ & \left.\begin{array}{l}-b\\-c\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l}+ac\\+bc\end{array}\right\} & \end{array}$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=o$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -a\,x^3 & +ab.x^2 & -abc.x & +abcd=o. \\ & \left.\begin{array}{l}-b\\-c\\-d\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l}+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l}-abd\\-acd\\-bcd\end{array}\right\} & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=o \text{ czyli:}$$

$$\begin{array}{llll} x^3 & +a.x^2 & +ab.x & +abc=o. \\ & \left.\begin{array}{l}+b\\+c\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l}+ac\\+bc\end{array}\right\} & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=o.$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +a.x^3 & +ab.x^2 & +abc.x & +abcd=o. \\ & \left.\begin{array}{l}+b\\+c\\+d\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l}+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l}+abc\\+acd\\+bcd\end{array}\right\} & \end{array}$$

Zatrzymáwſzy ſię uwagą nad temi przykładami wyciągniemy z nich naſtępuiące prawdy:

Wykładaią ſię właſności ogólne zrównań iakiegokolwiek ſtopnia.

Naprzód; Każda z ilości znanych a, b, c, d, będąc wartością nieznaney x, ieſt pierwiaſtkiem zrównania, włożywſzy ią w zrównanie s tego mnożenia powſtaiącé znieſie wſzyſtkie terminy i przywiedzie całe zrównanie do zero. Właſnosć wiec ta pierwiaſtków dowiedziona w dwóch poprzedzaiących ſtopniach, ma mieyſce we wſzyſtkich ſtopniach wyżſzych.

Powtóre: Roſtrząſaiąc wſpół-czynniki ilości niezna-

Właſności wſpół-czynników,

ney we wſzyſtkich tych terminach zrównań, znaydziemy: że wſpół-czynnik drugiego terminu ieſt równy ſummie wſzyſtkich pierwiaſtków z znakiem przeciwnym wziętych. Wſpół-czynnik trzeciego terminu równy ſummie mnogości różnych, które powſtać mogą z pierwiaſtków po dwa na raz mnożonych: Wſpół-czynnik czwartego terminu równy ſummie mnogości różnych s trzech na raz pierwiaſtków; piątego terminu ſummie mnogości s czterech na raz pierwiaſtków i t. d. nakoniec oſtatni termin równy ieſt mnogości ze wſzyſtkich pierwiaſtków przez ſiebie rozmnożonych. Ieżeli więc w iakiemkolwiek zrównaniu brakuie drugiego terminu, ten nie mógł zniknąć inaczey, tylko że ſumma wſzyſtkich pierwiaſtków ſtała ſię zeró; to ieſt: że w niem znayduią ſię pierwiaſtki dodatne i odiemne, i że ſumma dodatnych ieſt równa ſummie odiemnych: ieżeli brakuie trzeciego terminu, muſi koniecznie w takiem zrównaniu ſumma mnogości dodatnych z dwóch na raz pierwiaſtków, bydź równa ſummie odiemnych: podobnie należy ſądzić o innych terminach. Ale ieżeli oſtatni termin w iakiem zrównaniu brakuie, nie mogł ten inaczey zniknąć, tylko że ieden s pierwiaſtków zrównania ſtał ſię zero; i na ten czas zrównanie rozdzielić ſię całe może przez x, i zniżyć o ieden ſtopień.

Potrzecie: Maiąc do rozwiązania iakiegokolwiek ſtopnia zrównanie s pewnemi oznaczonemi wſpół-czynnikami n.p. $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$ - - - (A). doſyćby nam było porównać iego wſpół-czynniki s wſpół-czynnikami iednego s teraźnieyſzych zrównań które mu odpowiada w tymże ſamym ſtopniu, to ieſt z zrównaniem.

$$x^3 \left.\begin{array}{l}-a\\-b\\-c\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+bc\end{array}\right\} x - abc = 0 \qquad (B).$$

a gdybyśmy potrafili wynaleśdź a, b, c, w liczbach, które wchodzą w zrównanie (A) mielibyśmy tym ſpoſobem właściwe pierwiaſtki zrównania (A). Do-

świadczmy

świadczmy tego przez rachunek. Równaiąc wſpółczynniki podobnych terminów zrównań (A), (B), otrzymamy $a+b+c=8$, $ab+ac+bc=7$, $abc=9$, trzy zrównania na tyleż nieznanych a, b, c. Ponieważ każde s tych zrównań zamyka wſzyſtkie nieznane, nie możemy przyſtąpić do rozwiązania ich, póki ich przez eliminacyą nie przerobiemy na inne trzy, z którychby w każdem nieznaydowała ſię tylko iedna s tych nieznanych. Działaiąc podług §§. 8. i 14. wynaydziemy te trzy zrównania.

na a - - $a^3-8a^2+7a-9=0$. na b - - $b^3-8b^2+7b-9=0$.
na c - - - $c^3-8c^2+7c-9=0$.

Widzemy że wſzyſtkie te trzy zrównania ſą iednakie; a ponieważ nie braliśmy pierwiaſtków a, b, c, za równe; więc trzy te zrównania nie dadzą nam tylko trzy pierwiaſtki rożne, s których ieden będzie wartością a, drugi wartością b, a trzeci wartością c. Te trzy zrównania powſtały z zrównania (A), i pokazały ſię w tym ſamym wyrazie co i tamto; więc wartość ilości nieznaney w zrównaniu (A), będzie takąż ſamą i tychże ſamych ilości znanych funkcyą co i w tych oſtatnich. Przeto ieżeli te trzy zrównania maią trzy pierwiaſtki, zrównanie (A) tyleż ich mieć muſi, co nam oczywiście dowodzi, że zrównanie 3go ſtopnia ma koniecznie trzy pierwiaſtki; że na wynalezienie tych trzech pierwiaſtków, rozwiązać nam koniecznie potrzeba zrównanie 3go ſtopnia, i że nakoniec przyſzedłſzy do tego rozwiązania, iedno ktorekolwiek s trzech oſtatnich zrównań odkryie nam wſzyſtkie te trzy pierwiaſtki. Na nic by nam ſię bowiem nie zdało rozwięzywać ie wſzyſtkie, kiedy w dziewięciu pierwiaſtkach nie byłoby tylko trzy różne, których ſzukamy, a które wypadną z iednego któregokolwiek.

Ieżeli weźmiemy zrównanie 4go ſtopnia s wſpółczynnikami oznaczonémi, przyidziemy tąż ſamą drogą do tey prawdy; że ono zamyka cztery pierwiaſtki.

Nie możemy iuż więc wątpić o tem, że każde zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia tyle zamyka w ſobie pierwiaſtków, ile naywyżſzy wykładnik ilości nieznaney ma w ſobie iedności. Aże zrównanie nie tylko zamykać może pierwiaſtki rzetelne ale i uroione; pierwiaſtki zaś uroione nie znoſzą ſię tylko kiedy ſą w liczbie parzyſtey, zaczem każde zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia pod wyrazem rzetelnym, ieżeli ma w ſobie pierwiaſtki uroione, liczba ich bydź muſi parzyſta: i tak zrównanie *3go* ſtopnia muſi mieć koniecznie albo wſzyſtkie trzy pierwiaſtki rzetelne, albo ieden rzetelny, a dwa uroione. Zrównanie czwartego ſtopnia może mieć albo wſzyſtkie cztery pierwiaſtki rzetelne, albo wſzyſtkie uroione; albo dwa rzetelne a dwa uroione: podobnie należy twierdzić o innych.

Właſności zrównań co do znaków.

Poczwárte: Przypatrzywſzy ſię układowi znaków w zrównaniach z mnożenia powſtaiących, doſtrzeżemy, że w tych gdzie wſzyſtkie pierwiaſtki ſą dodatne znaki idą na przemian, to ieſt we wſzyſtkich terminach liczby nieparzyſtey ſą dodatne, w terminach zaś liczby parzyſtey, odiemne; gdzie zaś pierwiaſtki wſzyſtkie ſą odiemne, tam też ſame znaki ciągle naſtępuią: w naſzych przykładach wypadły wſzyſtkie dodatne, ale gdybyśmy byli wzięli zrównania *1go* ſtopnia pod wyrazem $-x-a=0$, otrzymalibyśmy byli wſzyſtkie odiemne, w zrównaniach ſtopni nieparzyſtych. S tey uwagi nad znakami wniósł *Des-Cartes*; że w zrównaniu przemiana znaków oznacza pierwiaſtki dodatne, ich zaś naſtępſtwo pierwiaſtki odiemne, tak dalece; że w zrównaniu n. p. - - - $x^4-13x^3+11x^2+253x-252=0$ bydźby powinno podług tey uwagi trzy pierwiaſtki dodatne a ieden odiemny. Pamiętaymy iednak, że zrównania s których tę uwagę wyciągamy, maią wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne: możeż ona bydź rosciągniona do zrównań maiących pierwiaſtki uroione?

Rozmnóżmy przez ſię te trzy zrównania:

$$(x+\sqrt{-3})$$

$(x+\sqrt{-3})(x-\sqrt{-3})(x-6)=0$ otrzymamy: - - $x^3-6x^2+3x-18=0$. Powtóre $(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2})(x+3)=0$ otrzymamy $x^3+3x^2+2x+6=0$. układ znaków w pierwſzem zrównaniu pokazuie wſzyſtkie trzy pierwiaſtki dodatne, w drugiem zaś wſzyſtkie odiemne; lubo w pierwſzem ieden tylko ieſt dodatny a dwa uroione, w drugiem dwa uroione, a ieden odiemny; widzemy więc oczywiście, że reguła *Des-Carta* na roſpoznanie pierwiaſtków dodatnych i odiemnych nie ſłuży zrównaniom maiącym pierwiaſtki uroione. Wnieſiono s tąd, że maiąc podané ſobie iakiekolwiek zrównanie a chcąc wiedzieć, ieżeli te zamyka pierwiaſtki uroione, porachowawſzy z układu znaków liczbę pierwiaſtków dodatnych i odiemnych, rozmnożyć ie potrzeba przez zrównanie iakie *1go* ſtopnia; ieżeli w mnogości pokaże ſię pierwiaſtek przybyły z nowego zrównania, zupełnie ſię zgadzaiący z liczbą ich pierwſzą; zrównanie to będzie miało pierwiaſtki rzetelne, inaczey wnieść należy pierwiaſtki uroione: ale ta reguła nie prawdzi ſię tylko w pewnych przykładach, i dla tego że ta własność zrównań nie ieſt ogólna wſzyſtkim, nie mamy przyczyny nad nią ſię długo zaſtanawiać. Przydaymy atoli ieſzcze do niey iednę uwagę: że kiedy w zrównaniu iakiem brakuie którego terminu, kładąc na iego mieyſce $+0$, albo -0, zawſze wypadnie ta ſama liczba pierwiaſtków dodatnych lub odiemnych z układu znaków, ieżeli zrównanie ma wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne; wypadnie zaś inna liczba na $+0$, inna na -0, ieżeli ma pierwiaſtki uroione.

§. XX.

Rozwiązanie zrównań wyżſzych ſtopni zamyka wſzyſtkie zrównania ſtopni niżſzych.

Wſzyſtkie uwagi wyżſze oczywiście nas przekonywaią że zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia m, zamyka ſię w tym wyrazie ogólnym.

$$x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+rx^{m-3}+ \text{ i t. d. } +k=0. \quad (C).$$

gdzie p, q, r, s, k, ſą ilosciami znanemi. Rozwiązać takowe zrównanie ieſt to iedno, co wynaleśdź liczbę

m wartości na x w funkcyach $p, q, r, k,$ i t. d. s którychby każda włożona za x w zrównanie podane, znioſła wſzyſtkie w niem terminy i przywiodła ie do zero. Rozwiązanie to ſtóſowne do natury umieiętności, powinno bydź tak ogólne, aby ſłużyło wſzyſtkim ſzczególnym przypadkom, które tylko rodzić ſię mogą przez wprowadzenie iakiegokolwiek warunku w zrównanie. Daymy więc że rozwiązawſzy zrównanie (C) tak ogólnym ſpoſobem, uczyniemy w niem $k=0$, w tem przypuſzczeniu prawidła użyte ieſzcze te ſame ſłużyć powinny, ale na ten czas zrównanie będzie całe rozdzielne przez x i odmieni ſię na

$$x^{m-1}+px^{m-2}+qx^{m-3}+rx^{m-4}+ \text{ i t. d. } + i=0 \quad (D).$$

Zrównanie ſtopnia $m-1$, które nie może ſię rozwiązać, tylko przez prawidła właściwe ſtopniowi $m-1$. Aże zrównanie (D) wypadło s przypadku ſzczególnego zrównania (C), który w rozwiązaniu powinien był bydź ogarniony, ieżeli to było tak ogólne iakeśmy mówili, i iak ſama natura umieiętności wyciąga; więc rozwiązanie zrównania ſtopnia $m-1$, ieſt zawarte w ſtopniu m. To rozwiązanie ſtopnia $m-1$ lubo będzie ſzczególnym przypadkiem ſtopnia m, będzie iednak co do ſwego ſtopnia w ſamym ſobie zważanego tak ogólne iak pierwſze, a zatem ogarniać znowu powinno wſzyſtkie ſzczególne przypadki mogące bydź wprowadzone w zrównanie (D): ieżeli w niem uczyniemy $i=0$; ieſzcze prawidła ſtopnia $m-1$ będą ſłużyć te ſame w takowey odmianie. Ale w tem przypuſzczeniu zrównanie (D) będzie rozdzielne przez x, i zamieni ſię na:

$$x^{m-2}+px^{m-3}+qx^{m-4}+rx^{m-5}+ \text{ i t. d. } +h=0 \quad (E).$$

to zrównanie ieſt ſtopnia $m-2$, na którego rozwiązanie trzeba prawideł temu ſtopniowi właściwych. Te prawidła wypadną s tych które zrównaniu ſtopnia $m-1$ ſłużyły, a zatem rozwiązanie ſtopnia $m-2$ zawarte ieſt w ſtopniu $m-1$ a tém ſamém w ſtopniu m. Ieżeli ieſzcze w zrównaniu (E) uczyniemy $h=0$, otrzy-

otrzymamy zrównanie znowu rozdzielne przez x, po którem rozdzieleniu wypadnie

$$x^{m-3}+px^{m-4}+qx^{m-5}+rx^{m-6}+ \text{ i t. d. } +g=o. \quad (F)$$

To zrównanie będąc ſtopnia $m—3$ nie będzie ſię mogło rozwiazać tylko ſpoſobem temu ſtopniowi ſłużącym; który że znowu ieſt przypadkiem ſzczególnym ſtopnia $m—2$, lubo ſam w ſobie i w porównaniu niżſzych ſtopni będzie barzo ogólnym; zaczem rozwiązanie ſtopnia $m—3$, zawarte ieſt w ſtopniu $m—2$, te obydwa w ſtopniu $m—1$, a wſzyſtkie razem w ſtopniu m. S tąd nam wypada ta wielka prawda: że rozwiązanie ogólne zrównania iakiegokolwiek ſtopnia, zamyka w ſobie rozwiązanie wſzyſtkich ſtopni niżſzych: aże każdy ſtopień ma ſobie właściwe pierwiaſtki nacechowane w ilościach znanych przyzwoitym ſobie znakiem, rozwiązanie to w ſwym pierwiaſtku zamykać muſi znaki pierwiaſtkowe wſzyſtkich ſtopni niżſzych. Pokaże nam ſię ta prawda w drugim ſtopniu, ieżeli w iego pierwiaſtkach uczyniemy oſtatni termin zrównania zero, ieden nam bowiem pierwiaſtek zniknie, a drugi da rozwiązanie pierwſzemu ſtopniowi ſłużące.

Gdybyśmy więc mieli ſpoſób na rozwiązanie ſtopnia m, mielibyśmy przez to prawidła na wſzyſtkie zrównania, i Algebra doſięgłaby ſzczytu ſwey doſkonałości. Ale ieſzcze niezmiernie ieſteśmy od tego oddaleni. Niżeli przyidziemy do poznania granic naſzey nauki, obróćmy wprzód uwagę na ſiebie, iakeśmy daleko w naſzych dociekaniach dotąd poſtąpili. Cała naſza ſztuka rozwięzywania zrównań ſkończyła ſię na drugim ſtopniu, chcąc dosiąc ſtopni wyżſzych, potrzebaby nam każdy przywieśdź do tych, s któremi umiemy ſię obchodzić: albo na każdy w ſzczególności wynaydować prawidła i ſpoſoby z wiadomości dotąd nabytych. Doświadczmy ieſzcze niektórych, które nam poznane dotąd właſności zrównań poddać mogą.

§. XXI.

Wláſność oſtatniego terminu zamyká ſpoſób na rozwiązanie zrównania.

Powiedzieliśmy byli, że oſtatni termin zrównaniá iakiegokolwiek, ieſt mnogością ze wſzyſtkich pierwiaſtków, więc rozebrawſzy go na mnożniki, moglibyśmy pomiędzy niemi odkryć te, które ſą pierwiaſtkami zrównania: kładąc bowiem każdy s takowych mnożników za x w zrównanie, ten któryby go przywiodł do zero, byłby iego pierwiaſtkiem. Ten ſpoſób rozwiązania zrównań byłby zaiſte powſzechny na wſzyſtkie iakiegokolwiek ſtopnia, gdybyśmy byli w ſtanie rozebrania iakieykolwiek liczby na ſwych mnożników. Ale że naſze wiadomości Arytmetyki nie rosciągaią ſię ieſzcze tak daleko: mamy liczby niewymierne i *pierwſze* (a) w których takowy ſpoſób rzadkoby ſię udał. Może on bydź użyty, ale tylko prawie w ſamych zrównaniach maiących pierwiaſtki wymierne. I w tych nawet má ſwoie niepzyzwoitości: każdego bowiem mnożnika należy doświadczać dwa razy, to ieſt biorąc go dodatnie i odiemnie, czyli ten przywiedzie zrównanie do zero lub nie? Niechże liczba iaka rozbierze ſię na barzo wiele mnożników, działanie przypadnie pracowite a czeſto bezſkuteczne. Ieżeli ieſzcze do mnożników całkich przydamy ułomkowe, liczba ich może bydź bez końca, i na ten czás kuſzenia naſze ledwo bydź mogą kiedy ſzczęśliwe. Chąc zatem użyć tego ſpoſobu w iakiem zrównaniu, należy ſię wprzód upewnić czyli to zamyka pierwiaſtki ułomkowe lub nie? Nad to zaś nic łatwieyſzego, bo ieżeli naywyżſza potęga ilości nieznaney ieſt bez wſpół-czynnika liczebnego, a przytem wſzyſtkich innych terminów wſpół-czynniki całkie; Arytmetyka ſama nas uczy, że pierwiaſtek takowego zrównania nie może bydź ułomkowy, bo gdyby był takim, nie mogłby był mianownik zniknąć tylko ſtawſzy ſię wſzyſtkim terminom powſzechny, a zatem naywyżſza potęga ilości nieznaney byłaby była przez iaką liczbę rozmnożona. Wſzakże

ten

(a) Liczby pierwſze nazywaią ſię w Arytmetyce, które nie maią innych dzielników procz ſiebie ſamych i iednosci.

ten mianownik który ſłuży x, muſi bydź odmiennym w x^2 w x^3 i t. d. Prawda: że zrównania maiące wſpół-czynniki ułomkowe, przerobić ſię łatwo mogą na inne wſpół-czynników całkich: wziąwſzy bowiem za ilość nieznaną, inną rozdzieloną przez iaką liczbę, i włożywſzy ią w zrównanie, wſzyſtkie wſpół-czynniki ſtaną ſię całkiemi, n.p. niech będzie zrównanie. $x^3+\frac{a}{b}x^2+\frac{b}{c}x+\frac{d}{e}=o$, kładąc za x, $\frac{y}{m}$; przerobiemy zrównanie podane na - - $\frac{y^3}{m^3}+\frac{ay^2}{bm^2}+\frac{by}{cm}+\frac{d}{e}=o$ - - czyli $y^3+\frac{am}{b}y^2+\frac{bm^2}{c}y+\frac{dm^3}{e}=o$. ieżeli więc m ieſt rozdzielne razem przez b, c, e; wſpół-czynniki $\frac{am}{b}$, $\frac{bm^2}{c}$, $\frac{dm^3}{e}$ będą całkiemi: a choćby nawet b, c, e, były liczbami pierwſzemi, wziąwſzy $m=bce$ wſzyſtkie terminy ſtaną ſię rozdzielne: w przypadku zaś gdy b, c, e, nie ſą pierwſzemi, m może bydź liczba mała, która zadoſyć uczyni pytaniu.

Widzemy więc, że rozwiązanie zrównań maiących pierwiaſtki wymierne, zawiſło od rozbioru oſtatniego terminu na ſwoie mnożniki całkie; to pytanie co do niektórych ſzczególnych przypadków rozwięzuie Arytmetyka. Nie chcemy go tu powtarzać, bo naprzód mało wchodzi w naſz zamiar; oprócz tego ten ſpoſób nadto ieſt ograniczony i nadto pracowity, abyśmy ſię nad nim zaſtanawiać mieli; wolemy raczey zoſtawić uwagę naſze ogólnieyſzym w tey materyi badaniom. Obiaśniymy go iednak choć w iednym przykładzie: Niech będzie do rozwiązania zrównanie 3go ſtopnia - - $x^3-17x^2+79x-63=0$, oſtatni termin ma za dzielników liczby 1, 3, 7, 9, 21, 63, s których 1, 7, 9, włożone za x, przywodzą zrównanie do zero, więc $x=1$, $x=7$, $x=9$, ſą pierwiaſtkami zrównania podanego. Gdyby liczba iaka zamykała nieſkończoną nawet liczbę mnożnikow; między temi tyle tylko bydź musi takich, które przywodzą zrównanie do zero, ile wykładnik ſtopnia ma w ſobie iedności. Gdybyśmy przez kuſzenia naſze choć przynaymniey ieden tylko wynaleźli pierwiaſtek, zyſkuiemy ieſzcze i tak na naſzey pracy, bo rozdzieliwſzy przezeń zrównanie, zniżamy ie o ieden ſtopień; maiąc dwa pierwiaſtki, i rozdzieliwſzy przez nie zrównanie, zniżemy ie o dwa ſtopnie, a tak n. p. od *3go* ſtopnia przyidziemy do *2go* lub do pierwſzego, które umiemy rozwiązać.

§. XXII.

Wyrzucenie terminu iakiegokolwiek w zrównaniu.

Mówiąc o zrównaniach *2go* ſtopnia widzieliśmy, że te prawidła, które im ſłużyły, mogą ieſzcze ſłużyć w niektórych zrównaniach wyżſzych ogołoconych s pewnych terminów: tu znowu w §. 19. doſtrzegliśmy że gdyby zrównanie iakie można przerobić tak, aby w niem oſtatniego terminu brakowało, zniżyłoby ſię o ieden ſtopień, przez tę ſztukę moglibyśmy każde zrównanie przywieśdź do tuż ie poprzedzaiącego. Obie te uwagi powinnyby nam poddać takowe pytanie: Czyby w zrównaniu iakiemkolwiek nie można wyrzucić iakiego tylko chcemy terminu, bez naruſzenia związku; abyśmy przez to wyrzucenie zrównanie naſze mogli przywieśdź do prawideł znanych, lub przynaymniey uczynić ie prościeyſzem? Na rozwiązanie tego pytania mamy iuż ſpoſoby wyżey podane pod §. 9: wprowadziwſzy bowiem drugą niewiadomą będziemy mieli prawo czynić przypuſzczenie iakiego pytanie naſze wyciąga. Niech będą zrównania podane:

$$x^3+ax^2+bx+c=o \quad - - - \quad x^4+px^3+qx^2+rx+s=o.$$

uczyniwſzy $x=y+m$, m będąc drugą niewiadomą, zrównania podane odmienieniemy na;

$$\left.\begin{array}{llll} x^3 & +3m.y^2 & +3m^2.y & +m^3 \\ & +a. & +2m. & +am^2 \\ & & +b. & +m \\ & & & +c \end{array}\right\}=o.$$

y^4+

$$\left.\begin{array}{llll} y^4+4m.y^3 & +6m^2.y^2 & +4m^3.y & +m^4 \\ \quad +\ p. & +3pm. & +3pm^2. & +pm^3 \\ & +\quad q. & +\ 2qm. & +qm^2 \\ & & +\quad r. & +rm \\ & & & +s \end{array}\right\}=0.$$

chcac teraz wyrzucić którykolwiek nam ſię podoba termin z zrównania podanego, nie zoſtaie nam, tylko tego terminu wſpół-czynnika w zrównaniu przerobionem uczynić zero; co nam da zrównanie warunkowe ſłużące na oznaczenie nowey wprowadzoney nieznaney m, przez wſpół-czynniki znane a, b, c, albo p, q, r, s. W pierwſzem zrównaniu chcąc wyrzucić drugi termin, wypadnie $3m+a=0$; chcąc trzeci termin wyrzucić, otrzymamy $3m^2+2ma+b=0$, na oſtatni termin przypadnie $m^3+am^2+bm+c=0$ - - podobnie należy uczynić w zrównaniu drugiem: na drugi termin $4m+p=0$; na trzeci $6m^2+3pm+q=0$, na oſtatni $m^4+pm^3+qm^2+rm+s=0$.

Widzemy więc oczywiście, że na wyrzucenie 2go terminu w iakiemkolwiek zrównaniu podanem trzeba nam rozwiązać zrównanie 1go ſtopnia; na wyrzucenie 3go terminu, zrównanie 2go ſtopnia; na wyrzucenie 4go terminu zrównanie 3go ſtopnia, aby wynaleśdź m; na wyrzucenie więc oſtatniego terminu trzeba nam rozwiązać zrównanie tego ſamego ſtopnia, w którym ſię znayduie zrównanie podané; co nas prowadzi do takiey ſamey trudności iakąśmy uſiłowali zwyciężyć. Wſzyſtkie przeto ſpoſoby ktore ſpoſtrzegliśmy w właſnościach zrównań do ich rozwiązania, albo ſą niedoſtateczne, albo nas rzucaią na te ſame trudności które znaleźliśmy na pierwſzym wſtępie. Prawda atoli którąśmy dopiero odkryli nadgradza ſwą pięknością naſzé kuſzenia.

Wyrzucenie 2go terminu zawiſło w pierwſzem zrównaniu od $3m+a=0$, co daie $m=-\frac{a}{3}$; w drugiem zrównaniu $4m+p=0$ $m=-\frac{p}{4}$, gdybyśmy byli wzięli zrównanie;

$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+$ i t. d. $+k=0$ - - znaleźlibyśmy byli że wyrzucenie w niem 2go terminu zawiſło od zrównania $mn+p=0$, co daie $m=-\frac{p}{n}$; to ieſt: że chcąc wyrzucić z iakiegokolwiek zrównania 2gi termin, należy wziąść za iego niewiadomą inną, dodawſzy do niey wſpół-czynnika 2go terminu ze znakiem przeciwnym, rozdzielonego przez wykładnika ſtopnia: takim ſpoſobem, zmnieyſzemy iednym terminem zrównanie podane nie naruſzywſzy w niem zwiazku.

§. XXIII.

Z właſności zrównań wyciągá ſię dowód wzoru Newtona.

Kiedy więc ſpoſoby w właſnościach zrównań doſtrzeżone nie udały nam ſię na ich rozwiązanie ogólne, zoſtawmy te badania na potem, a teraz wróciwſzy się ieſzcze do zrównań na początku §. 19. z mnożenia wyciągnionych, uczyńmy w nich wſzyſtkie pierwiaſtki rowne, to ieſt $a=b=c=d=e$ i t.d. zrównania naſze odmienią ſię na różne potęgi, i tak otrzymamy

z piewſzego - - - $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3=(x-a)^3=0.$

- - - - $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=(x+a)^3=0$

z drugiego - - $x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4=(x-a)^4=0$

- - $x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4=(x+a)^4=0.$

Gdybyśmy byli roſtrząſali wyżſzych ſtopni zrównania, pokazałyby nam ſię z nich w teraźnieyſzem przypuſzczeniu wyżſze potęgi, które wſzyſtkie razem podaią nam dowód tych praw, któreśmy tylko s ſamego rachunku w potęgach wielo-kſztałtnych (*multiformes*) doſtrzegli. Teorya bowiem ogólna zrównań dopiero ſpoſtrzeżona uczy nás, że wſpółczynnik 2go terminu zamykać powinien ſummę wſzyſtkich wartości x, gdy te wartości wſzyſtkie ſą między ſobą równe, iedna z nich tyle razy bydź powinna powtórzona, ile ma iedności wykładnik náywyżſzey ilości niewiadomey. Przeto ieżeli m ieſt ten wykładnik; ponieważ tyle bydź powinno pierwiaſtków zrównania;

powinno

powinno toż ſamo m bydź wſpół-czynnikiem drugiego terminu. *Powtore:* Mnogości z dwóch na raz pierwiáſtków odmienia ſię każdá z oſobna na a^2; mnogość każda s trzech pierwiáſtków na a^3, i t. d; przeto wſpół-czynnik trzeciego terminu zamykać powinien a^2 tyle razy powtorzone, ile pierwiaſtki a, b, c, i t. d. mnożone po dwa na ráz, wydadź mogą mnogości różnych. Wſpół-czynnik czwartego terminu zamykać powinien a^3 tyle razy, ile też ſame pierwiáſtki dadzą mnogości różnych, mnożąc ie po trzy na ráz, i t.d. Wiec dla oznaczenia trzeciego, czwartego, piątego, *mgo* terminu wiedzieć należy, wiele m liter dadź może różnych mnogości, mnożąc ie po dwie, po trzy, po cztery, i t.d. na ráz.

Nie ieſt zaś trudno doſtrzec, iż maiac m liter, i układaiąc ich po dwie, po trzy, po cztery, i t. d. między ſobą, przez wſzyſtkie które ſię tylko wynaleśdź mogą położenia; nie ieſt mowię trudno doſtrzec, że:

Naprzód: Liczba kombinacyi układaiąc ich po dwie, będzie dwa razy więkſzá od liczby mnogości różnych, mnożąc ich po dwie. Maiąc bowiem dwie litery a, b, można z nich zrobić dwa porządki ab, ba; ale te dwa porządki nie czynią tylko iednę też ſamę mnogość.

Powtore: Liczba porządków kombinuiąc kilka liter po trzy, ieſt ſześć razy więkſzá od liczby mnogości różnych, mnożąc ie po trzy Ułożywſzy bowiem n.p. trzy litery a, b, c, we wſzyſtkie mogące ſię wynaleśdź porządki, mam ſześć kombinacyi, abc, acb, cab, bac, bca, cba; mnogośc ich atoli ieſt tylko iedna. Tymże ſamym ſpoſobem poſtępuiąc, doſtrzeżemy, że cztery n.p. ilości mogą mieć 24 kombinacyi, wſzyſtkie atoli nie czynią tylko iednę mnogość. Podobnie, liczba kombinacyi wielu liter po pięć na ráz, ieſt ſto dwadzieścia razy więkſzá od liczby mnogości; i t. d. A co na iedno wynidzie: że liczba mnogości z dwóch na raz liter ieſt $= \frac{\textit{licz: kombin:}}{1.\ 2}$. liczba mnogości różnych s trzech na raz liter $= \frac{\textit{liczb: kombin:}}{1.\ 2.\ 3}$: s czterech liter $= \frac{\textit{liczb: kombin:}}{1.2.3.4}$: s pięciu liter $= \frac{\textit{liczb: kombi}}{1.2.3.4.5}$ i t. d. to ieſt ogólnie mowiąc: że liczba mnogości z ilekolwiek liter, ieſt równą ułomkowi, którego licznik pokazuie liczbę kombinacyi, a mianownik mnogość z liczb naturalnych 1. 2. 3. 4. 5. i t. d. aż do tey, którą oznacza z wielu liter ſkłada ſię mnogość. Zebyśmy więc znaleźli wzór ogólny na wyrażenie każdego wſpół-czynnika w potędze dwówyrazowey, wiedzieć nam teraz należy liczbę kombinacyi złożonych z m liter, układaiąc ie po dwie, po trzy, po cztery i t. d. Zaſtanówmy ſię nad tem docieKaniem:

Maiąc m liter i chcąc ich układać po dwie na raz, ponieważ iedna litera nie może ſię kombinować ſama s ſobą, oczywiſta ieſt rzecz, że ieſt $m-1$ liter do kombinowania z nią; więc ta iedna litera da $m-1$ kombinacyi; a ponieważ ieſt m liter, więc będzie $m.\overline{m-1}$ kombinacyi. Przeto liczba mnogości różnych z dwóch na raz liter, wyrazi ſię przez $m.\frac{m-1}{1.2}$.

Chcąc kombinować po trzy na raz litery; potrzeba, aby każda kombinacya z dwóch liter układała ſię s każdą inną literą którey nie zamyka, to ieſt z liczbą liter wyrażoną przez $m-2$; przeto każdy z oſobna porządek z dwóch liter wyda $m-2$ kombinacyi s trzech liter; więc ponieważ ieſt $m.\overline{m-1}$ kombinacyi z dwóch liter, a każda z nich wyda $m-2$ kombinacyi s trzech liter; będzie wſzyſtkich kombinacyi s trzech liter. $m.\overline{m-1}.\overline{m-2}$; więc liczba mno-

gości

gości różnych s trzech liter wyraża ſię przez $m.\frac{(m-1)(m-2)}{2.\ \ 3}$

Ciągnąc daley to ſamo rozumowanie, znaydziemy, że liczba kombinacyi s czterech liter wyraża ſię przez $m(m-1)(m-2)(m-3)$; ponieważ należy każdą kombinacyą s trzech liter ułożyć z inną czwartą, którey ona nie zamyka, a zatem zoſtaie $m-3$ liter do kombinowania s każdym porządkiem tróy-literanym; doſtanie ſię więc na każdego $m-3$ kómbinacyi: aże ieſt $m(m-1)(m-2)$ takowych porządków; wypada $m(m-1)(m-2)(m-3)$, kombinacyi po cztery na raz litery. Zaczem liczba mnogości różnych wyraża ſię przez $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$. Tym ſpoſobem dowieśdź łatwo, że liczba mnogości s pięci liter, równa ieſt, $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$, s ſześciu liter $=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$, i t.d. Wnieśmy więc s tych wſzyſtkich uwag; że potęga m dwówyrazowey ilości $x\pm a$ tak ſię wyraża ogólnie:

$$(x\pm a)^m = x^m \pm max^{m-1} + m.\frac{m-1}{1.\ 2}a^2x^{m-2} \pm m\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.\ 3}a^3x^{m-3} + m.\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^4x^{m-4} \pm \text{ i t. d.}$$

Przyśliśmy więc do ściſłego dowodu wzoru *Newtona*, którego nieſkończone ieſt użycie po całey Matematyce i Fizyce. Mógłby nam kto zarzucić, że wzór do odwikłania funkcyi ſłużący, nie zawieraiący żadnego związku dowiedliśmy przez teoryą zrównań, a przeto prawdę ogólną przez ſzczególną, ale zatrzymawſzy ſię myślą nad wielką ogólnością zrównań tu przyſtóſowanych przyznamy, że te wyrażaiąc iakikolwiek związek wſzyſtkich razem ilości w funkcyi zamkniętych, ani będąc do żadnych ſzczególnych związków między terminami przywiązane, rosciągaią ſwoie właſności do zrównań TOSAMYCH *(identica)*, do których należeć mogą wſzyſtkie wzory na ſwe terminy odwikłane, a zatem i teraźnieyſzy. Oprócz tego właſności zrównań, które nam tu do tego dowodu ſłużyły, nie ſą zagruntowane na koniecznym związku ale raczey na ſkładzie funkcyi w zrównanie wchodzących. S tego owſzem przykładu pokazuie ſię ieſzcze iaśniey to, cośmy iuż wyżey doſtrzegli, iak ieſt ściſła wzaiemność między zrównaniami, i funkcyami im odpowiadaiącemi; iak doſkonałość iednych wpływa w doſkonałość drugich, iak nakoniec iedne obiaśniaią i dowodzą drugie, w czem iednak należy nam bydź barzo oſtrożnemi na całość praw geometrycznych, które nam nakazuią nayściśleyſze przeſtrzeganie ogólności początków.

Należy nam tu tylko to ieſzcze uważyć, że cały dowód teraźnieyſzego wzoru tak ieſt roſporządzony, iż ieden iego termin dowodzi ſię przez drugi poprzedzaiący. Zoſtaie nam więc ieſzcze takową znaleśdź demonſtracyą, któraby ſłużyła na każdy termin bez żadney zawiſłości od innych, ale tak rozległa ogólność ſkładaiąca całą piękność matematycznych początków będzie dopiero w mocy wyżſzych matematyki części.

Użycie wzoru Newtona rosciagnione do potęg iakichkolwiek wykładników.

Zatrzymaymy ſię teraz nad różnem przerobieniem naſzego wzóru i iego użyciem: maiąc wzgląd na ilość z wykładnikami odiemnemi, przekonamy ſię, że wzór Newtona tak ſię może wyrazić:

$$(x \pm a)^m = x^m \left(1 \pm m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{a^2}{x^2} \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}\frac{a^3}{x^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\frac{a^4}{x^4} \text{ i t. d.} \right) = x^m \left(1 \pm \frac{a}{x}\right)^m,$$

który wyraz ſłużyć nam będzie niżey.

Nie

Nie potrzeba nám zaś zapomnieć że tén wzór funkcyi dwó-wyrazowey prowadzi nás do podobnego wynoſzeniá funkcyi wielo-wyrazowych trzymaiąc ſię ſpoſobu braniá kilku terminów za ieden wyżey wyłożonego. Nadarzá nám ſię tu iedno pytanie: czyli odwikłanie funkcyi dwo-wyrazowey podług wzoru Newtona oznaczoney wykładnikiem całkim i dodatnym, rosciągnąć ſię może do funkcyi z wykładnikiem ułomkowym i odiemnym, to ieſt: czyli te ſamé prawa któré nám ſłużą do wyrażeniá $(x \pm a)^m$, ſłużyć nám ieſzcze mogą do wyrażeniá $(x \pm a)^{\frac{m}{n}}$ lub - - - - $(x \pm a)^{-p}$, p będąc ułomkiem lub liczbą całką. Dowód któryśmy wyżey wyłożyli, nie pokazuie nám tego; wáżną atoli ieſt barzo rzeczą roſtrząſnąć czyli prawda nie daley ſię rosciaga niżeśmy ią ogarneli, a upowſzechnienie naſzych myśli byłoby tego roſtrząſaniá pierwſzym naſámprzód ſkutkiem. Oprocz tego wynikłyby s tego inne ieſzcze pożytki, któré powinniśmy łatwo zgadnąć s poprzedzaiących wiadomości. Iakimże ſię tedy ſpoſobem o tym domyśle zapewnić? Owóż ieden, który nám ſię tym czaſem nadarzá:

Przypuśćmy że to, o czém ſię domyślamy, ieſt prawdą, i wyraźmy $(x+a)^{\frac{m}{n}}$ podług práw wyżſzych, wypadnie nám:

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}\left(1 + \frac{m}{n}\frac{a}{x} + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\frac{a^4}{x^4} + \text{i t. d.}\right) \qquad (P)$$

wſzyſtkié terminy naſtępuiące w tym ſzeregu po iedności, nazwiymy p, a wzór naſz zamieni ſię na $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}(1+p)$, wynióſłſzy obydwa członki do potęgi n, będzie: $(x+a)^m = x^m(1+p)^n$ zrównanie toſamé: ieżeli więc $x^m(1+p)^n$ rozwiązawſzy, i przywrociwſzy p ſwoię wartość, otrzymamy takie ſame terminy, iakie nam wyżey dał wzór $(x+a)^m$; znakiem będzie, że wzór Newtona prowadząc do wypadków prawdziwych, rosciąga ſię ieſzcze na wykładniki ułomkowe dodatne. Rachunek powinien nas o tem przekonać: doświadczmy go:

$$(1+p)^n = 1+np+n.\frac{(n-1)}{2}p^2+n.\frac{(n-1)(n-2)}{2.\quad 3}p^3$$

$$+n.\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\quad 3.\quad 4}p^4 + \text{i t. d.} \quad - \quad - \quad (A)$$

$$p=\frac{m}{n}.\frac{a}{x}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}+$$

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\frac{a^4}{x^4}+\text{i t. d.}$$

$$p^2=\frac{m^2}{n^2}.\frac{a^2}{x^2}+2\ \frac{\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}\frac{a^3}{x^3}+\text{ i t. d.}$$

$p^3=\frac{m^3}{n^3}.\frac{a^3}{x^3}+$ i t. d. te wſzyſtkie wartości różnych potęg p, położywſzy za p, p^2, p^3 i t. d. w wzorze (A), i ułożywſzy terminy podług potęg $\frac{a}{x}$, wypadnie:

$$1+m.\frac{a}{x}+\frac{m\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{m\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}+\text{ i t.d.}$$

$$+\frac{m^2}{n}\left(\frac{n-1}{2}\right)+\frac{\frac{2mm}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2}\qquad+\text{ i t.d.}$$

$$+\frac{m^3}{n^2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\qquad+\text{ i t.d.}$$

wykonawſzy mnożenie wſzyſtkich wſpół-czynników, i wymazawſzy terminy wzaiemnie ſię znoſzące, otrzymamy

mamy

mámy za wſpół-czynnika ilości $\frac{a^2}{x^2}$, $m\frac{(m-1)}{2}$; $m.\frac{(m-1)}{2.}\frac{(m-2)}{3}$ za wſpół-czynnika $\frac{a^3}{x^3}$ i t.d. a przeto wzór Newtona przyprowádzá nás do tak pewnych wypádków w potęgach wykładników ułomkowych dodátnych iak i w wykładnikach cáłkich.

Co ſię zaś tycze wykładników odiemnych n. p. $(x+a)^{-\frac{m}{n}}$, połóżmy $(x+a)^{-\frac{m}{n}}=Q \cdot\cdot\; 1=Q(x+a)^{\frac{m}{n}}$; ieżeli rozebrawſzy té funkcye podług wzoru Newtona trafiemy na takié wypádki, iakié nám to zrównanie pokazuie, pewni bydź możemy, że wzór Newtona rosciąga ſię nawet do funkcyi z wykładnikami odiemnemi. Doświadczmy trzecá przynaymniéy początkowych terminów.

$$(x+a)^{-\frac{m}{n}}=x^{-\frac{m}{n}}\left(1-\frac{m}{n}\frac{a}{x}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}\frac{a^2}{x^2}-\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2.}\frac{\left(\frac{m}{n}+2\right)}{3}\frac{a^3}{x^3}+\text{i t.d.}\right) \quad .\;.\;.\quad (Q)$$

$$(x+a)^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}.\frac{a}{x}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\,2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\,2.}\frac{\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3}\frac{a^3}{x^3}+\text{i t. d.}\right.$$

rozmnożywſzy pierwſzy ſzereg przez drugi, i ſtanąwſzy przynáymniey na wſpół-czynniku $\frac{a^3}{x^3}$, otrzymámy:

$$x^{\frac{m}{n}-\frac{m}{n}}\left(1-\frac{m}{n}.\frac{a}{x}+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)}{1.\,2}\frac{a^2}{x^2}-\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{m}{n}+2\right)}{1.\,2.\,3}\frac{a^3}{x^3}\right.$$

$$+\frac{m}{n}.\frac{a}{x} \quad - \quad \frac{m^2\,a^2}{n^2.x^2} \quad + \quad \frac{\frac{m^2}{n^2}.\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}\frac{a^3}{x^3}$$

$$+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}\frac{a^2}{x^2} - \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{a^3}{x^3}$$

$$+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}\,1-\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{2.\ \ 3}\frac{a^3}{x^3}$$

wykonawſzy cały ten rachunek, który tu ieſt naznaczony, otrzymamy terminy wſzyſtkie wzaiemnie ſię znoſzące, tak dalece: że cały ſzereg będzie równy iedności, podług zrównania $1=Q(x+a)^{\frac{m}{n}}$. Pewni więc ieſteśmy, że wzór Newtona rosciąga ſię do funkcyi iakichkolwiek wykładników całkich lub ułomkowych, dodatnych lub odiemnych. Dowód więc tén któryśmy wyżey z teoryi zrównań i kombinacyi wyciągli, lubo ſię zdawał ogólnym, ieſt iednak ſzczególnym barzo, bo ſię tylko rosciąga do ſamych wykładników całkich dodatnych. Te zaś oſtatnie dowody ſą raczey doświadczeniami rachunku, niżeli ściſłemi dowodami Matematycznemi; zaczem zoſtaie nam ieſzcze do wyżſzych części taki dowód wzoru Newtona, któryby ſię ſwą ogólnością rosciągnął do wſzyſtkich iakichkolwiek wykładników.

Stoſowanie wzoru Newtona do wyciągania pierwiaſtku w potęgach iakichkolwiek.

Ponieważ wykładniki ułomkowé oznaczaią zawſze wyciąganie pierwiaſtków; przeto wzór Newtona ſłuży nam nie tylko do wynoſzenia funkcyi do potęg iakichkolwiek, ale nawet do wyciągania pierwiaſtków s funkcyi zupełnych i niezupełnych. Te oſtatnie, ponieważ nigdy nie prowadzą do wyrazu ſkończonego, zaczem paſmo terminów w potęgach niezupełnych pociągnie ſię bez końca, i da to, co nazywaią SZEREGIEM *(Series)*. Ieżeli w tym ſzeregu terminy tem ſię barziey zmnieyſzaią im ſą odlegleyſze, to teſt, kiedy $\frac{a}{x}$ ieſt prawdziwym ułomkiem; Szeregi nazywaią ſię MALEIĄCEMI *(Convergentes)*; ieżeli zaś te terminy tem ſię barziey powiękſzaią im

ſię

ſię daléy ciągną, to ieſt, kiedy $\frac{a}{x}$ ieſt liczbą całką lub ułomkiem fałſzywym, nazywaią ſię **WZRASTAIĄCEMI** (*Divergentes*).

Trafiliśmy iuż na dwa gatunki funkcyi, któré nás prowadzą do ſzeregów, a któré biorą ſwóy początek w działaniach przywiązanych do pewnych kondycyi, iakie ſą dzielenie i wyciąganie pierwiaſtków. Ten rodzáy rachunku zatrzymá nás niżéy z więkſzą obſzernością.

Wzory któréśmy podali na wykładniki ułomkowé, użyté bydź mogą w liczbach niewymiernych, kiedy nám w nich zachodzi wyciąganie pierwiaſtków n.p. chcąc znaleśdź wártość $\sqrt{101}$, potrzeba nám naſamprzód $\sqrt{101}$ przywieśdź do wyrazu takiego, w iakim ſię znayduią naſzé wzory, to ieſt: do $100^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$, a uczyniwſzy w wzorze (P), $x=100$, $\frac{a}{x}=0,01$; $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ otrzymamy:

$$\sqrt{101}=10\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}=10\left(1+\frac{0,01}{2}-\frac{(0,01)^2}{8}+\frac{(0,01)^3}{16.}-\frac{5(0,01)^4}{128}+\frac{35(0,01)^5}{1280}-\text{ i t. d.}\right).$$

każdy s tych terminów zamieniwſzy na ułomek dzieſiątkowy, i dodawſzy ich razem, otrzymamy za wártość $\sqrt{101}$, liczbę bliſką $10,0498756$ i t. d.

Nie chcémy ſię bawić nad przykładami takowych działań, bo każdy zrozumiawſzy ogólné początki będzie w ſtanie ſám przez ſię w nich podług upodobania ćwiczyć ſię.

§. XXIV.

Nie zgubmy ſię w tych wycieczkach, do których nás wyciągnęły właſności ogólné zrównań. Uważaliśmy iakiegokolwiek ſtopnia zrównanie, iako powſtaiącé z zrównań pierwſzégo ſtopnia przez ſiebie

O liczbie pierwiaſtków rzetelnych i urojonych w zrównaniu.

rozmno

rozmnożonych, możémy ié więc ieſzcze uważać iako powſtaiącé z zrównań innych ſtopni od ſiebie niżſzych, byleby tak dobranych; aby z ich mnogości wypaśdź mogło zrównanie podané; i tak zrównanie 3go ſtopnia możémy uważać iako powſtaiącé z zrównania 2go ſtopnia przez zrównanie 1go; zrównanie 5go ſtopnia, iako powſtaiące z zrównania 3go ſtopnia przez zrównanie 2go rozmnożoné, i t. d. Ieżeli będziemy uważać zrównania wyżſze iako powſtaiącé z zrównania 2go ſtopnia; poniéważ te mogą zamykać pierwiáſtki uroioné, zrównania także wyżſzych ſtopni będą mogły zamykać tyle par pierwiaſtków uroionych, ile w ich ſkład wchodzi zrównań 2go ſtopnia. Zaczem zrównania ſtopni parzyſtych będą mogły mieć wſzyſtkie pierwiaſtki uroioné, ſtopni zaś nieparzyſtych muſzą mieć koniecznie przynaymniey ieden pierwiaſtek rzetelny.

Uważaiąc iakiegokolwiek ſtopnia m zrównanie, iako powſtaiące z zrównań 2go ſtopnia; tych zrównań tyle tylko wchodzić może za mnożników w zrównanie m, ile razy 2 zamyka ſię w wykładniku ſtopnia. Ale ponieważ zrównanie ſtopnia m, zamyká m pierwiaſtków, z nich tyle możemy ułożyć zrównań 2go ſtopnia, ile razy kombinować możemy m pierwiaſtków, biorąc ich po dwa na raz, to ieſt $m.\frac{m-1}{2}$. Każde więc zrównanie ſtopnia m wydadź może $m.\frac{m-1}{2}$ Zrównań 2go ſtopnia, ale takowych zrównań nie wchodzi w iego ſkład tylko liczba $\frac{m}{2}$: gdybyśmy więc chcieli wyrazić przez zrównanie $x^2+ax+b=o$ wſzyſtkie zrównania 2go ſtopnia, któré tylko wydadź może zrównanie ſtopnia m, potrzeba aby b będąc mnogością wſzyſtkich pierwiaſtków, tyle miało wartości, ile wypaśdź może kombinacyi z m pierwiaſtków, biorąc ich po dwa na raz; za-

czém

czém *b* musi bydź dané przez zrównanie ſtopnia $m.\frac{m-1}{2}$: tož ſamo trzymać mámy i o *a*, któré ieſt ſumma pierwiaſtków. Podobné rozumowanie przekona nas równie, że uważaiąc zrownanie *m* iako powſtaiące z zrównań 3go ſtopnia, i chcąc té wſzyſtkie zrównania 3go ſtopnia ogarnąć w zrównaniu $x^3+ax^2+bx+c=0$, musi *c* bydź dané przez zrównanie ſtopnia $m.\frac{(m-1)}{2.}\frac{(m-2)}{3}$ ponieważ tyle wypadá kombinacyi z *m* pierwiaſtków biorąc ich po trzy na ráz, a zatém tyle złożyć można zrównań 3go ſtopnia, s których iednak nie wchodzi za mnożnikow w zrównanie ſtopnia *m* tylko liczba $\frac{m}{3}$. Wnieſie ſobie każdy iak należy rozumować o zrównaniach wyżſzych ſtopni uważaiąc ié iako mnożniki ſtopniá *m*. Weźmy za przykład zrównanie 4go ſtopnia na począku §. 19. położoné $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$, biorąc z iego pierwiaſtków po dwa na ráz, ułożémy ſześć zrównań 2go ſtopnia, s których każdé dwa rozmnożoné przez ſię, dadzą zrównanie czwártego ſtopnia podané; to ieſt:

$(x-a)(x-b)$ rozmnożone przez $(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-c)$ - - - $(x-b)(x-d)$
$(x-a)(x-d)$ - - - $(x-b)(x-c)$
$(x-b)(x-c)$ - - - $(x-a)(x-d)$
$(x-b)(x-d)$ - - - $(x-a)(x-c)$
$(x-c)(x-d)$ - - - $(x-a)(x-b)$.

Gdybyśmy doszli ſpoſobu rozebrania zrównań iakiégokolwiek ſtopnia na zrównania pierwſzego lub drugiego, któré iuż umiémy rozwiązać, przyſzlibyśmy do prawideł na wynalezienie pierwiaſtków każdego zrównania. Nie możémy wątpić, że maiąc n. p. iedno przynaymniey zrównanie 1go lub 2go ſtopnia wchodzące

dzące w ſkład zrównaniá ſtopnia m, możemy przez nie to zrównanie rozdzielić i zniżyć ie do ſtopnia $m-1$, albo $m-2$. Bo maiąc n.p. zrównanie $x-a=o$, które wchodzi w ſkład zrównaniá A ktoregokolwiek ſtopnia, tak dalece, że włożywſzy w A, $x=a$, A przywiedzie ſię do zero; musi koniecznie A bydź zupełnie rozdzielne przez $x-a$. Wątpiemyż o tém? nazwiymy w zrównaniu A wſzyſtkie inne pierwiaſtki oprócz $x-a$, Q; więc ieżeli A nie ieſt zupełnie rozdzielne przez $x-a$, wypadnie podług prawideł dzieleniá $\frac{A}{x-a}=Q+\frac{R}{x-a}$, R znacząc reſztę z dzielenia pozoſtałą, a zatém $A=(x-a)Q+R$, uczyniwſzy $x=a$, $(x-a)Q$ będzie zero; ale i A ieſt także na ten czas zero, podług pierwſzego przypuſzczeniá, więc $R=o$, a przeto $\frac{A}{x-a}=Q$.

§ XXV.

Tłómaczy ſię potrzeba i ſpoſób oſwobodzeniá zrównań od znaków pierwiaſtkowych i od niewymierności.

Niżeli poydziémy daley, uczyńmy tu krótką uwagę: każdy ſtopień zrównaniá ma ſwoie właściwe do rozwiązaniá go prawidłá i właſności z nich wynikaiące, nie możemy więc poty przyſtąpić do rozwiązaniá iakiegokolwiek zrównaniá, poki ſię nie dowiemy o iego ſtopniu. Sądziemy zaś o ſtopniu iakiegokolwiek zrównaniá z wykładnika ilości nieznaney, ieżeli wſzyſtkie ſą całkie: ale ieżeli który z wykładników będzie łomany, przerwie ſię porządek, który w zrównaniach foremnych zachować zwykły wykładniki nieznaney ilości: poty więc nie możemy bydź w ſtanie ſądzeniá o ſtopniu zrównaniá, a zatém nie możemy przyſtąpić do rozwiązaniá onego, poki wſzyſtkich ilości nieznaney wykładników nie przywiedziemy do całkich. Wykładniki ułomkowe pokazuią znaki pierwiaſtkowe w zrównaniu, które ieſzcze i tę maią nieprzyzwoitość, że będąc przywiązane do wielorakich znaczeń wprawiaią nas w wątpliwość,

czyli

czyli wſzyſtkié té znaczenia czyli tylko iedno, i które do naſzego pytania należy. Ieſt więc rzeczą naypierwſzą niżeli przyſtąpiemy do rozwiązania iakiégokolwiek zrównania, oſwobodzić ié ze wſzyſtkich znaków pierwiaſtkowych. Zatrudniymy ſię teraz tem działaniem.

Wiémy, że znaki pierwiaſtkowé odpadaią wynoſząc do tey ſamey potęgi ilości pod niémi zawarte; dla tego ſpoſób, którego tu użyiemy ieſt łatwy do zrozumienia iako wyciągniony s poprzedzaiących wiadomości. Iaśniey on ſię pokaże w rachunku, niż gdybyśmy go ſłowy wykładali. Niech będą zrównania.

$x^2+a\sqrt{x}+m=0$ - - $x^3-\sqrt[3]{(x-a)}+d=0$ - - - - - -

$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+xd+f=0.$

odbądźmy ſię z dwiema pierwſzémi naſamprzód:

$$a\sqrt{x}=-(x^2+m) \text{ - - } x^3+d=\sqrt[3]{(x-a)}$$

$$a^2x=(x^2+m)^2 \text{ - - } (x^3+d)^3=x-a, \text{ czyli:}$$

$$x^4+2mx^2-a^2x+m^2=0 \text{ - - } x^9+3dx^6+3d^2x^3+d^3-x+a=0.$$

pierwſze więc ieſt czwartego, a drugie dziewiątégo ſtopnia. Zrównanie trzecié, dwa zamyka znaki oddzielone, a zatem, dwoiakie takowé w niem zachodzi działanie: naprzód

$\sqrt[3]{x^2}=-(\sqrt{x}+xd+f)$ - - $x^2=-(\sqrt{x}+xd+f)^3$, a nazwawſzy $xd+f=p$; mamy, $x^2=-p^3-3p^2\sqrt{x}-3px-x\sqrt{x}$, czyli - - $x^2+p^3+3px=-(3p^2+x)\sqrt{x}$, $(x^2+p^3+3px)^2=(3p^2+x)^2x$. włożywſzy w to oſtatnie za p, $xd+f$; otrzymamy zrównanie ſzóſtego ſtopnia wymierne. Gdybyśmy więcey ieſzcze mieli znaków pierwiaſtkowych w zrównaniu, złączonych s ſobą przez ſame znaki dodatne lub odiemne; działanie temby było trudnieyſze, i ten ſpoſób ieſzczeby nam ſię nie zawſze udał. Użyimy przeto inſzego.

Oſwobodzić zrównanie iakié od znaków pierwiaſtkowych ieſt to tyle wprowadzić kondycyi do naſzego zrównania, ile ſię takowych znaków potrzebuiących oſobnego działania znayduie w zrównaniu. Wſzyſtkie te kondycye ściągaią ſię do tego aby te znaki znikły; nie mozna im więc inaczey uczynić zadoſyć, tylko wprowadziwſzy tyle innych nieznanych ilości, ile ſię liczy znaków pierwiaſtkowych w zrównaniu, podług §. 9. Ale iakże kilka nieznanych ilosci wprowadzić w iedno zrównanie, którego nie mamy s czem kombinować? Widzemy że początek §. 9. potrzebuie tu ſpoſobu nagięcia go do teraźnieyſzego przypadku. Ten ſpoſób ieſt barzo proſty. Uczyńmy każdy termin znak pierwiaſtkowy zamykaiący równy iedney nieznaney, przez co otrzymamy tyle zrównań, ile mamy znaków pierwiaſtkowych w zrównaniu; włóżmy potém wſzyſtkie nieznane na mieyſce niewymiernych w zrównanie podane; a każde s pierwſzych zrównań wynioſſzy do tey potęgi, którą znak pierwiaſtkowy oznacza, otrzymamy liczbę zrównań $m+1$: ieżeli znaków pierwiaſtkowych liczba ieſt m. Te wſzyſtkie zrównania ſtaraymy ſię tak kombinować, aby z nich wſzyſtkie nieznane nowo wprowadzone wypadły. Przyidziemy tym ſpoſobem przez eliminacyą do zrównania pewnego ſtopnia zamykaiącego ſame terminy wymierne z iedną nieznaną. Niech będzie n.p. zrównanie:

$$x^2 - \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{d^2} + \sqrt{x} + g = 0$$

czynię $\sqrt[3]{ax} = y$, - - $\sqrt[3]{d^2} = z$ - - $\sqrt{x} = u$, s kąd mam cztery zrównania:

(1) - - $x^2 - y + z + u + g = 0$ - - (2) - $ax - y^3 = 0$ - -
(3) - $d^2 - z^3 = 0$ - - (4) - $x - u^2 = 0$

oſtatnie daie mi $x = u^2$; złączone z drugiem $ax = au^2$: te wartości włożone w (1) (2). daią mi dwa zrównania bez x

$u^4 - y$·

$u^4-y+z+u+g=o$ - $au^2=y^3$, s pierwſzego otrzymám: $z=y-u^4-u-g$ - - $z^3=(y-u^4-u-g)^3=d^2$; czyli położywſzy dlá ſkróceniá $u^4+u+g=p$; i wynióſłſzy $y-p$, do potęgi trzeciey

$$y^3-3y^2p+3p^2y-p^3-d^2=o \quad - - \quad au^2=y^3$$

dwa zrównaniá s których wyrzuciwſzy y, otrzymámy zrównanie na u wymierne: wyſtáwmy ié pod naſtępuiącym wzorem nazwáwſzy

$$3p=A, \quad - - \quad 3p^2=B, -p^3-d^2=C, \quad au^2=P.$$

$$y^3-Ay^2+By+C=o \quad - - \quad y^3-P=o.$$

za pomocą tych dwóch zrównań potrzeba nám wyrzucić y, aby otrzymać zrównanie wymierné z iedną tylko niewiadomą u. Na to wyrzucenie przepiſy §. 7. nie mogą nám ſłużyć; bo té rosciągaią ſię tylko do ilości niewiadomych pierwſzego ſtopnia. Uſiłuymyż teraz odkryć ſpoſób wyrzuceniá z zrównań ilości niewiadomych iakiegokolwiek ſtopnia, będąc do tey potrzeby porządnym ciągiem naſzych myśli przywiedzeni.

§ XXVI.

Spoſoby eliminacyi na zrównaniá wyżſzych ſtopni.

Pamiętámy, że wyrzucanie ilości nieznanych 1go ſtopnia odbywaliśmy przez kombinacyą dwóch zrównań, która kończyła ſię na tem, aby z dwóch zrównań maiących ſpólną pewną nieznaną, otrzymać zrównanie bez tey nieznaney. Zrównaniá więc w których takowé działanie zachodzi wyrazić możemy przez

$$a+bx=o \quad - - - \quad A+Bx=o.$$

gdzie, a, b, A, B, ſą funkcyami innych nieznanych. *Newton* w ſwoiey Arytmetyce powſzechney podał nám do tego ſpoſób, o którym iuż namieniliśmy byli, a którego on użył aż do zrównań 4go ſtopnia. Ten chociaż ieſt niedoſtateczny, godzien iednak przynaymniey dlá hiſtoryi naſzey uwagi.

Przyprowádzaiąc ieden termin w każdém zrównaniu do tegóż ſamego wyrazu za pomocą mnożenia mogę w dwóch podanych zrównaniach albo wyrzucić a, A, i rozdzielić potem zrównanie przez x; albo też zaraz wyrzucić bx, Bx. Na ten koniec mnożę pierwſze przez A, drugie przez a, odciągam iedno od drugiego i mam:

$$Abx-aBx=0 \quad - - \quad Ab-aB=0.$$

albo mnożę pierwſze przez B, drugie przez b i odciągnąwſzy ie od ſiebie otrzymam: - - $Ba-Ab=0$.

Niech będą podane dwa zrównania 2go ſtopnia:

$$a+bx+cx^2=0 \quad - - - \quad A+Bx+Cx^2=0.$$

mnożę pierwſze przez A, drugie przez a, i odciągam tamto od tego rozdzieliwſzy ie przez x; wypadnie:

$$Ab-Ba+(Ac-Ca)x=0.$$

powtóre mnożę pierwſze przez C, drugie przez c, a ich rożnica będzie:

$$Ac-aC+(Bc-bC)x=0.$$

przyſzliśmy do dwóch zrównań 1go ſtopnia s któremi obſzedłſzy ſię podług 1go przypadku przyidziemy do zrównania:

$$(Ac-Ca)(Ac-Ca)-(Bc-bC)(Ab-Ba)=0.$$

widzemy więc że eliminacya w drugim ſtopniu przywiodła nas do oſtatniego zrównania które ieſt 4go ſtopnia, tak iak w pierwſzym ſtopniu do zrównania ſtopnia 2go.

Maiąc podane dwa zrównania 3go ſtopnia:

$$a+bx+cx^2+dx^3=0 \quad - - \quad A+Bx+Cx^2+Dx^3=0.$$

mnożę pierwſze przez A; drugie przez a, i odciągnąwſzy ie od ſiebie przyidę do

$$Ba-bA+(Ca-cA)x+(Da-dA)x^2=0.$$

powtóre do wyrzucenia oſtatnich terminów mnożę pierwſze przez D, drugie przez d, a ich rożnica da mi:

$$Ad-Da+(Bd-bD)x+(Cd-cD)x^2=0.$$

dwa te zrównania 2go ſtopnia chcąc kombinować podług poprzédzaiącego przypadku, nazywam dla ułatwienia rachunku

$$Ba-bA=A' \;\text{- - -}\; Ad-Da=a'$$

$$Ca-cA=B' \;\text{- - -}\; Bd-bD=b'$$

$$Da-dA=C' \;\text{- - -}\; Cd-cD=c'$$

a zrównania przerobione wyrażą ſię tym proſcieyſzym ſpoſobem:

$$A'+B'x+C'x^2=0 \;\text{- - -}\; a'+b'x+c'x^2=0.$$

s tych dwóch zrównań mnożę pierwſze przez a', drugie przez A', a różnica ich da mi:

$$B'a'-b'A'+(C'a'-c'A')x=0.$$

mnożę powtóre pierwſze przez c', drugie przez C', i otrzymam z ich odciągnienia: - - - -

$$A'c'-a'C'+(B'c'-b'C')x=0$$

nakonicc dla ułatwienia rachunku nazywam:

$$B'a'-b'A'=A'' \;\text{- - -}\; A'c'-a'C'=a''$$

$$C'a'-c'A'=B'' \;\text{- - -}\; B'c'-b'C'=b''$$

i dwa zrównania przerabiaiąc tym ſamym ſpoſobem przyidę do oſtatniego:

$$A''b''-a''B''=0$$

które ieſt óſmego ſtopnia podług znaczeń liter, któreśmy im nadali. To atoli zrównanie óſmego ſtopnia ma iednego mnożnika ſpolnego wſzyſtkim terminom $Ad-Da$, przez który rozdzielone wyda zrównanie *6go* ſtopnia

$$\begin{array}{rl}(Ad-Da)^3+(Ac-Ca)^2(Cd-Dc)-2(Ab-Ba)(Ad-Da)(Cd-Dc) & \\ +(Bd-Db)^2(Ab-Ba)-(Ab-Ba)(Bc-Cb)(Cd-Dc) & =0 \\ -(Ad-Da)(Ac-Ca)(Bd-Db) & \end{array}$$

ciągnąc dalcy rachunek dwa zrównania *4go* ſtopnia przywodzą nas naprzód do zrównania 16. ſtopnia, które dobrze roſtrząſnąwſzy znaydziemy w niem mnożnika *8go* ſtopnia, rozdzielone więc przez niego zniży ſię do ſtopnia óſmego.

Przeto ten ſpoſób tę ma w ſobie nieprzyzwoitość, że nas wiedzie do mnożników nie należących bynaymniey

mniey do naſzego zamiaru. W takowe mnożniki obwikłane zrównanie da pierwiaſtki fałſzywe, które pytania nie rozwiążą, bo mu ſą cale obce. Nie maiąc więc ſpoſobu na rozróżnienie tych pierwiaſtków które do pytania prawdziwie należą, od tych które niedoſkonałość rachunku wciągnęła, ieſteśmy w niebeſpieczeńſtwie trafienia na fałſzywe rozwiązanie pytania. Tać to przyczyna dała do myślenia Geometrom o innym nowym i dokładnieyſzym ſpoſobie eliminacyi. Ich wielorakie badania ſą naylepſzym dowodem natężonych uſiłowań, któremi chciano te trudności pokonać. Obierzemy ſobie iedno z nich, które wyciągnione s czyſtych rozumowań, da nam dokładnieyſze wyobrażenie o naturze tego rachunku; i ſłużyć nam będzie mogło na rozwiązanie wielu innych różnego rodzaiu pytań.

Zaczniymy od przykładu ſzczególnego: Maiąc dwa zrównania różnych ſtopni:

$$x^2+Px+Q=o \text{ - - - } x^3+px^2+qx+r=o$$

w których P, Q, p, q, r, zamykaią inne iakiekolwiek ilości nieznane, a chcąc s tych zrównań wyrzucić x, nic innego ſobie w tem nie zamierzamy, iak tylko zrobić iedno z nich zrównanie między P, Q, p, q, r; to ieſt: odkryć związek który zachodzić powinien między wſzyſtkiemi innemi ilościami w zrównaniu potrzebny na to, aby wypadło x. Ale iakżeby ten związek można wyciągnąć z dwóch związków od ſiebie różnych, gdyby te nie miały ſobie coś ſpólnego łączącego ie s ſobą wzaiemnie? Zaiſte muſi koniecznie zrównanie iedno iakąś zamykać właſność, która ſłużąc drugiemu, byłaby razem gruntem tego porównania które ſobie między wſpół-czynnikami P, Q, p, q, r, zakładamy wynaleśdź. A ponieważ dwa zrównania, które tu ſobie za przykład obraliśmy równie iak i wſzyſtkie inne do tey teoryi ſłużące, chcemy mieć nayogólnieyſze w ſwoim rodzaiu, dla tego nie możemy w nich przypuſzczać żadnego warunku, któryby ich znaczenie ścieśniał. Uważaiąc ie bez żadney

dney między ſobą zawiłości, a nie mogąc przyiśdź do rozwiązania tego pytania któreśmy tu ſobie zadali nie wprowadziwſzy iakowey ſpólności między naſzemi zrównaniami; muſzemy przydadź drugi ten warunek potrzebny, i ſtarać ſię obydwóm w rozwiązaniu zadoſyć uczynić. Na czemże zagruntuiemy tę ſpólność? oto na iſtotnym charakterze zrównań i ich pierwiaſtkach.

Zeby dwa zrównania mogły wydadź związek między ich wſpół-czynnikami, i oraz bydź ſobie w czem podobnemi, potrzeba koniecznie, aby ieden ich pierwiaſtek czyli wartość na x włożona w iedno i drugie zrównanie, mogła ie obydwa razem przywieśdź do zero; więc żeby znaleśdź pewny związek między P, Q, p, q, r, któryby mógł zgubić x; potrzeba koniecznie, aby obydwa zrównania miały ieden pierwiaſtek ſpólny; i całe pytanie naſze wychodzi na to: znaleśdz związek pewien między wſpół-czynnikami P, Q, p, q, r, potrzebny na to, aby obydwa zrównania podane miały ieden pierwiaſtek ſpolny:

Nazwiymy m ten ſpolny pierwiaſtek: będzie $x-m$ ſpólny mnożnik obydwóch zrównań, a przeto:

$$x^2+Px+Q=(x-m)(x+A)$$

$$x^3+px^2+qx+r=(x-m)(x^2+ax+b),$$

gdzie A, a, b, ſą ilości nieznane: z dwóch tych oſtatnich zrównań wypada:

$$\frac{x^3+px^2+qx+r}{x^2+ax+b}=\frac{x^2+Px+Q}{x+A} \quad - \; - \; -$$

$$(x^3+px^2+qx+r)(x+A)=(x^2+Px+Q)(x^2+ax+b).$$

wykonawſzy mnożenie otrzymamy zrównanie *Toſame*, którego każdy termin w iednym członku, iedno ieſt s terminem mu podobnym drugiego członka. Równaiąc więc między ſobą wſpół-czynniki s tego mnożenia wynikłe, otrzymamy cztery zrównania:

$$(1) \; - \; A+p=P+a \; - \; - \; (2) \; - \; Ap+q=Q+Pa+b$$

$$(3) \; - \; Aq+r=Qa+Pb \; - \; - \; (4) \quad Ar=Qb.$$

pierwſzé i drugié daie:

$A=P-p+a$ - - $b=Pp-p^2+pa+q-Q-Pa$, té wártości włożywſzy w (3) przyidziémy do

$Pp(P-p)+pq-PQ-r=P(P-p)a-(Q-q)a$, a zatem

$$a=\frac{Pp(P-p)+pq-PQ-r}{P(P-p)-(Q-q)}=p-\frac{Q(P-p)+r}{P(P-p)-(Q-q)}$$

té ſamé wártości za A, b, włożoné w (4) zrównanie, wydadzą

$Q(P-p)a+ra=Qp(P-p)+Q(q-Q)-r(P-p)$, przeto

$$a=\frac{Qp(P-p)+Q(q-Q)-r(P-p)}{Q(P-p)+r}=p-\frac{Q(Q-q)+Pr}{Q(P-p)+r}$$

idzie więc za tém, że

$$\frac{Q(P-p)+r}{P(P-p)-(Q-q)}=\frac{Q(Q-q)+Pr}{Q(P-p)+r},$$ s którégo powſtaie naſtępuiącé zrównanie:

$$Q(P-p)(Pq-Qp)+2Qr(P-p)+Pr(Q-q)-P^2r(P-p)$$
$$+Q(Q-q)^2+r^2=0.$$

Zawieraiącé w ſobie te warunki, ktoreśmy do pytania wprowadzili, to ieſt: związek między wſpółczynnikami potrzebny na to, aby obydwa zrównania podané miały ieden pierwiaſtek ſpólny. Podźmy iuż do przykładu ogólnégo. Niech będą dwa zrównania iakiégokolwiek ſtopnia:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+Sx^{m-4}+ \text{ i t. d. } =0.$$
$$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+sx^{n-4}+ \text{ i t. d. } =0.$$

s których należy wynaleśdź związek między wſpółczynnikami potrzebny na to, aby znikło x, to ieſt: potrzeba wynaleśdź zrównanie między P, Q, R, S, i t. d. p, q, r, s, i t. d. aby obydwa zrównania miały ieden ſpólny pierwiaſtek czyli ſpólnego mnożnika $x-m$. Zaczém rządząc ſię wyżey podanym ſpoſobem wypadnie.

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+ \text{ i t. d.}$$
$$=(x-m)(x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+ \text{ i t. d.})$$

x^n+

$$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+ \text{ i t. d.}$$
$$=(x-m)(x^{n-1}+ax^{n-2}+bx^{n-3}+ \text{ i t. d.})$$

s których powſtanie zrównanie to-samé:
$(x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+ \text{ i t. d.})(x^{n-1}+ax^{n-2}$
$+bx^{n-3}+ \text{ i t. d})=(x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+ \text{ i t. d.})$
$(x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+ \text{ i t. d.})$
równaiąc w niem wſpół-czynniki terminów podobnych, otrzymamy liczbę zrównań $m+n-1$, gdyż pierwſzé terminy będąc też ſame bez żadnego wſpół-czynnika, nie wnidą w porównanie; a ponieważ mamy niewiadomych, A, B, C, D, i t. d. liczbę $m-1$; niewiadomych zaś a, b, c, d, i t. d. liczbę $n-1$; na oznaczenie tych wſzyſtkich potrzeba liczby zrównań $m+n-2$; zoſtaie ſię więc iedno zrównanie nad to, które iak wiemy z §. 10. ieſt warunkowe, to ieſt zawieraiącé w ſobie kondycye wprowadzone, od których odpowiedź pytania zawiſła. Teoryą tę winniśmy *I. P. Eulerowi* którą on podał w Pamietnikach Akademii Berlińſkiey na Rok 1764. Przyſtóſóymy ią do zrównań któreśmy na końcu §. poprzedzaiącégo zoſtawili. Przyſzliśmy tam do dwóch zrównań.

$$y^3-P=o \text{ - - - } y^3-Ay^2+By+C=o$$

s których nam potrzeba wyrzucić y. Podług dopiero wyłożonego ſpoſobu.

$$y^3-P=(y-m)(y^2+ay+b) \text{ - - - -}$$
$$y^3-Ay^2+By+C=(y-m)(y^2+py+q).$$
$$\frac{y^3-P}{y^2+ay+b}=\frac{y^3-Ay^2+By+C}{y^2+py+q};$$
$$(y^3-P)(y^2+py+q)=(y^3-Ay^2+By+C)(y^2+ay+b).$$

po wykonaném mnożeniu równaiąc wſpół-czynniki podobné, otrzymamy pięć naſtępuiących zrównań:
$(1)\ a-A=p$ - - $(2)\ B+b-Aa=q$ - - $(3)\ P=bA-$
$Ba-C$ - - $(4)\ Ca+Bb=-Pp$ - - $(5)\ bC=-Pq$
s których należy wyrzucić a, b, p, q. Mamy z (1), (2),

$a=A+p;$

$a=A+p$; - - $b=A^2+Ap+q-B$, té wártości włożywſzy w (4), (5), (3), wypadną té trzy na p - .

$$p=\frac{B^2-Bq-BA^2-CA}{BA+C+P} \qquad p=\frac{BC-(P+C)q-CA^2}{CA};$$

$$p=\frac{P+2BA+C-A^3-Aq}{A^2-B};$$

równaiąc pierwſzą wártość p, z drugą, wypadnie - .

$$q=\frac{BC^2+PBC-PCA^2}{BAP+B^2+P^2}$$

drugą zaś wártość na p równaiąc s trzecią, wyciągniemy:

$$q=\frac{CAP+2BCA^2+C^2A+B^2C}{CB+PB-PA^2},$$

s porównania dwóch wártości na q, otrzymámy na koniec zrównanie ſzukane bez y.

$$(CAP+2BCA^2+C^2A+B^2C)(BAP+C^2+P^2)$$
$$-(BC^2+PBC-PCA^2)(CB+PB-PA^2)=0$$

włożywſzy w nie za A, B, C, P, wártości, których one zaſtępowały mieyſce w rachunku; otrzymámy zrównanie na u wymierne podług tego cośmy ſobie w §. 25. zamierzyli.

§. XXVII.

Różność zrównań wykłada ſię z różności wymiaru w terminach.

Po tych wſzyſtkich własnościach ogólnych zrównań, zoſtaie nam iedna uwaga wypadaiąca s pierwſzych Roz: I. początków: ponieważ zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia zamyka związek między ilościami w niém zawartemi, tén związek nie mógł wypaśdź tylko s porównania tychże ilości między ſobą. Ażе nie możémy nigdy równać s ſobą tylko rzeczy iedney natury; idzie za tem, że terminy w zrównaniu zamknięte ſą koniecznie iedney natury; to ieſt iednego wymiaru, czyli ſtopnia: gdyż natura ilości zależy na iednoſtayności wymiaru, wymiar zaś na równéy liczbie mnożników w termin wchodzących. Ieżeli więc zrównanie iakié ieſt rzetelne i mo-

gące

gące co znaczyć, wſzyſtkie iego terminy powinny bydź iednego wymiaru, to ieſt powinny mieć równą liczbę mnożników. Do tych mnożników nie należą bynaymniey liczby; bo te nic odmieniaią nic w náturze ilości ogólney. Każde takowe zrównanie zamykaiące równą liczbę mnożników literalnych w ſwych terminach nazywa ſię IEDNO-RODNEM (*Aequatio homogenea*). n. p. $x^3+3a^2x+ax^2+b^3=0$.

Ieżeli zaś liczba mnożników w terminach iakiégo zrównania ieſt nierówna, na ten czas uważać potrzeba każdy taki niedoſtateczny termin, iako rozmnożony przez tyle ilości wziętych za iedność, ile mu mnożników do równego wymiaru brakuie: i takowe zrównanie zowie ſię RÓŻNO-RODNEM (*Aequatio heterogenea*) n. p. $x^3+ax+3b=0$. ten ſam podział i ta ſama uwaga ſłuży funkcyom, s których powſtaią zrównania.

Dowodzą ſię s poprzedzaiących wiadomości wielkie pożytki rachunku przeciwko zarzutom pewnych Autorów.

Skończmy ten Rozdział króciuteńką uwagą nad ſpoſobem naſzych dociekań. Bawiąc ſię w początku naſzey nauki nad iakiem pytaniem dochodziliśmy w niem związku przez ſtóſunek i porównanie w myśli rzeczy znanych z nieznanémi: wſzyſtkie te ſtóſunki ogarneliśmy wprzód rozumowaniem, niżeśmy ie wyrazili przez znaki, dla tego że tam kombinacye ieſzcze były barzo proſte. Teraz zaś zapuściwſzy ſię w delikatnieyſzé pytania iakiem było n.p. to oſtatnié, gdzie kombinacye zachodza licznieyſzé i zawikleyſze, nie mogliśmy natychmiaſt rzeczy nieznaney z znanémi równać myślą, bo mnogość kombinacyi razem związanych i potrzebuiących prawie w momencie iednego ogarnienia już ieſt nad ſiły naſzego rozumu ſwym działaniom oddanego: trzeba go tu było weſprzeć pomocą rachunku; przeto czyniąc prawie podſtep pod trudnością, ſtaraliśmy ſię naprzód pytanie naſze związać s początkiem iakim walnym; i za pomoca tego trafić na zrównanie, w któréby rzecz nieznana weſzła. Potem dopiero uważaiąc ią iak gdyby była znaná, wpadliśmy ná większą liczbę nieznanych, które iednak za pomocą rachunku przywiedliśmy do tego ſtanu, iż wſzyſtkie łatwym ſpoſobem mogły bydź znoſzoné i równané z rzeczami znanemi. S tego ſtóſunku wypadły nam wartości wſzyſtkich nieznanych zamkniętych w zrównaniu, a w nich to, cośmy ſobie do wynalezienia zadali. Rachunek więc rozebrał naſzę kombinacyą na ſwe że tak powiem elementa, i ugiął trudność do naſzey mocy; bo to co trzeba było koniecznie razem ogarniać i równać, a czego dokazać było niepodobna; przywiodł do tego ſtanu, iż mogło bydź uważane i równane po części. Szliśmy więc tym co przedtem ſpoſobem ale inaczey nakierowanym, w nim złączyliśmy początek Analityczny s początkiem ilości nieoznaczonych §. 9. do których zręcznego kierowania poſłużyły nam właſności zrównáń dawniey odkryte. Droga ta wynalazków ledwo nám nie będzie w całem dziele powſzechną: nie odmieni ona ſię tylko podług ſzczególnych każdego zadania okoliczności, które ſtóſowac będziemy ż naybliżey związanemi poznanemi prawdami. Rachunek będzie iedyną silną naſzą do pokonania zaſtępuiących trudności, wſpierać on nas będzie oſzczędzeniém rozumowań tych, które iuż raz były uczynioné, bo ich zbytek równié zaſłania prawdę wſzyſtkim umyſłom iak ią zaſłania niedoſtatek umyſłom niedołężnym. Na mieyſce iednak tych oſzczędzonych rozumowań podawać on będzie materyą nowych; które ſą właściwemi wypadkami świeżego wynalazku. Doſtrzegliśmy iuż tey prawdy na początku tego rozdziału, ale ią ieſzcze widzieć będziemy iaśniey w naſtępuiącym.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Rozwięzuią ſię Zrównania Trzeciego i Czwartego Stopnia z tłómaczeniém własności każdému ſzczególnych: prawidła tych działań roſtrząśnioné podług nabytych początków, pokazuią ſię niedoſtateczné, w nich zaś wſzyſtkie przeſzkody, które zatamowały poſtępek Geometrów w rozwiązaniu Zrównań wyżſzych Stopni; á oſtatnie ucieczki naſzéy niedoſkonałości zoſtawioné, wprowadzaią nas w nowy rodzáy Rachunku, który Część drugą naſzych badań zabiéra.

§. XXVIII.

Rozwiązanie zrównania 3go ſtopnia.

Zbierzmy naſámprzód wſzyſtkie trudności, któré nam przeſzkadzały do rozwiązania zrównań ſtopni wyżſzych od drugiego; i doświadczmy czyli te nie będą mogły bydź zwyciężoné. Rozwiązaliśmy drugi ſtopień przez dopełnienie potęgi drugiey w funkcyi ilości nieznaney, ſkładaiącey pierwſzy członek zrównania. Doſtrzegliśmy potem że chcąc ſię trzymać tey ſamey drogi w wyżſzych ſtopniach, potrzebaby mieć zrównanie, którego wſpół-czynniki byłyby w pewnym ſtóſunku ſwey potędze przyzwoitym, n.p. maiąc zrównanie 3go ſtopnia. $x^3+px^2+qx+r=o$ i równaiąc ie s funkcyą zupełną potęgi 3ciey $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=o$, wypadnie warunek: $\frac{p}{3}=\sqrt{\frac{q}{3}}=\sqrt[3]{r}$, który zamyka ſtóſonek między ilościami znanémi potrzebny na to, aby s funkcyi w zrównanie wchodzącey mógł bydź zupełnie pierwiaſtek wyciągniony. Warunek ten uſzczególnia nie-

zmiernie

zmiernie zrównanie, i ſpoſób rozwiązaniá onégo przywięzuie tylko do przypádku zawartégo w zrównaniach $\frac{p}{3}=\sqrt{\frac{q}{2}}=\sqrt[3]{r}$. Oświéceni początkami gruntuiącémi doſkonałość naſzéy nauki, nie możémy nie uznać iakbyśmy mało tak ſzczególnym rozwiązaniá zrównáń ſpoſobém poſtąpili: Zebyśmy więc zrównanie podané zachowali przy całéy ſwéy ogólności, potrzebaby nám niektóre terminy przenieść na drugi członek zrównaniá, aby ocálić ilości znáné przy dawnéy ſwéy wártości, a dopiéro potém dorzucić té terminy, które do pełności potęgi brakuią: ale tym ſpoſobém wprowadzémy ilość nieznaną z obydwóch ſtron zrównaniá, które poty nie będzie rozwiązané, póki z drugiéy ſtrony ilość nieznaná nie zniknie. Oſtatniá ta trudność, nie ieſt ciężká, abysmy iey nie mieli użyciém §. 9. pokonać; pracuymy nád nią, ile że przy niéy zrównanie nic s ſwéy ogólności nie traci.

Włáſność powſzechná zrównáń w §. 22. wyłożoná uczy nás, że zrównanie zmniéyſzyć można iednym terminém nie naruſzywſzy ani iego zwiazku, ani ogólności. Użyimy iéy teráz dla uproſzczeniá podanego zrównaniá $x^3+px^2+qx+r=o$, położywſzy - - $x=y-\frac{p}{3}$, otrzymámy:

$$\left.\begin{array}{l} y^3-\frac{1}{3}p^2.y-\frac{2}{27}p^3 \\ \quad+\;q\;.\;-\frac{1}{3}pq \\ \qquad\qquad+\;r \end{array}\right\}=o$$

nazwáwſzy dlá proſtſzégo wyrazu $-\frac{1}{3}p^2+q=a$; $\frac{2}{27}p^3-\frac{1}{3}pq+r=b$ będziém mieli zrównanie do rozwiązaniá pod wyrazém prościéyſzym - - - -

$$(A)\ -\ -\ y^3+ay+b=o\ -\ -\ y^3=-ay-b.$$

a wziąwſzy drugą niewiadomą z, ſkombinuymy ia z y aby z iednégo członka wypadła potęga trzeciá zupełna;

pełná, to ieſt: przydáymy z obydwóch ſtron terminy $3y^2z+3yz^2+z^3$; zrównanie naſzé ſtanie ſię:

$$\begin{array}{l} y^3+3y^2z+3yz^2+z^3=3y^2z+3z^2y+z^3-b\ \text{- - -}\ (B). \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -ay \end{array}$$

nowá ta nieznaná z daie nám prawo wprowadzeniá takiey kondycyi, iakiey rozwiązanie zrównaniá potrzebuie. Pamiętáymy że to zależy od zniſzczeniá nieznaney y w drugim członku zrównaniá, więc - - $3zy^2+(3z^2-a)y=0$, czyli: $3zy+3z^2-a=0$ - - - $y+z=\frac{a}{3z}$; $(y+z)^3=\frac{a^3}{27z^3}$. Ale zrównanie (B) w tém nowém przypuſzczeniu odmieniá ſię na - - - $y^3+3y^2z+3yz^2+z^3=z^3-b$, to ieſt: $(y+z)^3=z^3-b$, zaczém - - $z^3-b=\frac{a^3}{27z^3}$ $z^6-bz^3=\frac{a^3}{27}$ - - - - (C).

Zrównanie 6go ſtopnia które podług §. 17. rozwiązać ſię może ſpoſobém drugiego, i dá nám wártość na z w funkcyi a, b. Rozwiązáwſzy ié więc, podług prawideł §. 17. znaydziemy: -

$$z^3=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3\right)}\ \text{- -}\ z=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3\right)}\right)}.$$

Aże zrównanie podané (A) odmieniło ſię było na

$$(y+z)^3=z^3-b\ \text{- -}\ y=-z+\sqrt[3]{(z^3-b)}$$

włożywſzy w to oſtatnié za z, z^3 wártości dopiéro odkryte otrzymámy:

$$y=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{1}{27}a^3\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}b-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{1}{27}a^3\right)}\right)}$$

gdzie nie położyliśmy tylko ieden znak przed znamieniami pierwiaſtkowémi drugiey potęgi, dlá tego że na obadwa tén ſám wypadá wyráz: powtóre, znak odiemny przed cechą pierwiaſtkową przenieśliśmy za cechę; wiemy bowiem że znaki odiemné lub dodatné w pierwiaſtkach potęg nieparzyſtych mogą ſię kłaśdź przed, lub po znamieniu pierwiaſtkowém i tak $\sqrt[3]{-a}$ iedno znaczy co $=-\sqrt[3]{a}$.

Znale-

Znaleźliśmy iuż iedén piérwiaſtek zrównania 3go ſtopnia, zoſtaie nam ich ieſzcze dwa do wynalezienia. Piérwiáſtek iakiegokolwiek zrównania przywiedziony do zero, ſtaie ſię iego dzielnikiém, i zniża ié o iedén ſtopień. Potrzeba nam więc zrównanie podané rozdzielić przez piérwiaſtek dopiero znaleziony; ale że ilości niewymiérne czyniłyby nim to działanie barzo zawikłané, przeto dla uproſzczenia wyrazów nazwiemy:

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3\right)}\right)}=g \quad - \; - \; - \; -$$

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}b-\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3\right)}\right)}=h.$$

S czego wypadnie $gh=-\frac{1}{3}a$, $a=-3gh$: powtóre; $b=-g^3-h^3$: włożywſzy w zrównanie (A) za a, b, tę wartości wyrażoné przez funkcye g, h, odmieniemy ié na - - $y^3-3ghy-g^3-h^3=0$, piérwiaſtek zaś wynaleziony na $y-g-h=0$, przez który rozdzieliwſzy toż zrównanie, zniżemy ié do drugiego ſtopnia $y^2+(g+h)y+h^2+g^2-gh=0$, to oſtatnié rozwiązawſzy podług prawideł w Roz: 2. podanych, znaydziemy inne dwa piérwiaſtki:

$$y=\frac{-(g+h)+(g-h)\sqrt{-3}}{2}, \quad y=\frac{-(g+h)-(g-h)\sqrt{-3}}{2}.$$

do których przydáwſzy piérwſzy, będziemy mieć trzy piérwiaſtki zrównania (A)

$$I.\; y=g+h \;\; - \; - \;\; II.\; y=\frac{-(g+h)+(g-h)\sqrt{-3}}{2}.$$

$$III.\; y=\frac{-(g+h)-(g-h)\sqrt{-3}}{2}.$$

piérwſzy z nich ieſt rzetelny, dwa oſtatnié mogą bydź rzetelné lub uroioné; będą rzetelné, ieżeli - - $(g-h)\sqrt{-3}$ ieſt funkcya rzetelną, to ieſt: ieżeli g, h, będą uroioné; będą zaś dwa oſtatnié piérwiaſtki uroioné, ieżeli $(g-h)\sqrt{-3}$ będzie funkcyą uroioną: to ieſt ieżeli g, h, będą rzetelne, podług §.16. Będą zaś g,h,

zawſze

zawſze rzetelné, kiedy a ieſt ilością dodátną, albo będąc odiemną, kiedy $\frac{b^2}{4}>\frac{a^3}{27}$. Zaczém każdé zrównanie 3go ſtopnia pod wzórém $y^3+ay\pm b=o$ má tylko iedén pierwiaſtek rzetelny, a dwa uroioné: powtóré: zrównanie pod wzorem $y^3-ay\pm b=o$ ieſt tegóż ſamégo rodzaiu kiedy $\frac{b^2}{4}>\frac{a^3}{27}$. Gdyby zaś było w tém oſtatniém zrównaniu $\frac{b^2}{4}=\frac{a^3}{27}$, zrównanie 3go ſtopnia będzie na tén czás miało wſzyſtkié pierwiaſtki rzetelne, s których dwa będą ſobie równe. Wprowadziwſzy bowiem to przypuſzczenie, będzie $g=h$, a przeto wartości na y,

$$y=2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}} \cdot\cdot\; y=-\sqrt[3]{\frac{b}{2}} \cdot\cdot\; y=-\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$$

Zatrzymaymy ſię teráz z uwágą nad zrównaniém $y^3-ay\pm b=o$ kiedy w niém $\frac{1}{4}b^2<\frac{1}{27}a^3$. W tém przypuſzczéniu g, h, ſtaną ſię uroionémi, a przeto funkcyá $(g-h)\sqrt{-3}$ będzie rzetelną. Ze zaś g, h, znáyduią ſię ieſzcze ſamé we wſzyſtkich trzech pierwiaſtkach, zdaie ſię na pozór że wſzyſtkié té pierwiaſtki ſtana ſię uroionemi; w tym iednak przypadku wſzyſtkié ſą rzetelné. Doświadczmy tego rachunkiém, który abyśmy tém łatwiey wykonali, ſkróćmy ieſzcze ráz naſzé wyrazy: połóżmy na mieyſce $\frac{b}{2}$, m; na mieyſce zaś $\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{27}a^3\right)}$, która ieſt podług teraźnieyſzego przypuſzczenia uroioną, połóżmy $n\sqrt{-1}$; będą więc naſzé pierwiaſtki:

$$y=\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}$$

$$y=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{-3}}{2}\Big)$$

$$+\frac{\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}\right).$$

$$y=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}\right).$$

każdy s tych terminów odwikławſzy podług wzoru Newtona, otrzymamy tyle ſzeregów nieſkończonych, ile ſię terminów niewymiernych znayduie. W czem tę mieć należy uwagę, że, ponieważ wartość ilości nieznaney s takowych wyrazów nie może wypaśdź tylko bliſka prawdy; ſtarać ſię powinniśmy aby, to zbliżenie było naywiękſze i naykrótſze, to ieſt aby terminy ſzeregów pomykaiąc ſię znacznie malały. Na ten koniec obierać należy za pierwſzy termin w porządku potęg, ten, który ieſt więkſzy. Ieżeli w teraźnieyſzym wyrazie pierwiaſtków $-m>n\sqrt{-1}$, m będzie pierwſzym terminem dla tego, że w ciągu ſzeregu maiąc wykładnika odiemnego ſtaie ſię mianownikiem ułomku; i uczyni go przez potęgi coraz barziey maleiącym. Przyſtąpmy iuż do rachowania pierwſzego pierwiaſtku, pamiętaiąc w rachunku na różne potęgi $n\sqrt{-1}$. które tak naſtępuią: $n\sqrt{-1}, -n^2, -n^3\sqrt{-1}, +n^4, n^5\sqrt{-1}, -n^6$, i t. d:

$$(-m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-m^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{n\sqrt{-1}}{m}\right)^{\frac{1}{3}}=-m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(1-\frac{n\sqrt{-1}}{3m}+\frac{1}{9}\cdot\frac{n^2}{m^2}+\frac{5}{81}\cdot\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3}-\frac{10}{243}\cdot\frac{n^4}{m^4}-\frac{22}{729}\cdot\right.$$
$$\left.\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5}+\text{i t. d.}\right)$$

$$-(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-m^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{n\sqrt{-1}}{m}\right)^{\frac{1}{3}}=-m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(1+\frac{n\sqrt{-1}}{3m}+\frac{1}{9}\cdot\frac{n^2}{m^2}-\frac{5}{81}\cdot\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3}-\frac{10}{243}\cdot\frac{n^4}{m^4}+\frac{22}{729}\cdot\right.$$
$$\left.\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5}+\text{i t. d.}\right)$$

które

które dodáwſzy razem, wſzyſtkie terminy uroione wypadną a wártość na y będzie dana w ſamych rzetelnych.

$$y = -2m^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243}\cdot\frac{n^4}{m^4} + \frac{154}{6561}\cdot\frac{n^6}{m^6} - \text{i t.d.}\right)$$

działaiąc podobnym ſpoſobem w wyrazie innych pierwiáſtków, zginą naſamprzód wſzyſtkie terminy uroione, a w ſamych funkcyach rzetelnych wypadną ieſzcze naſtępuiące dwie wártości na y.

$$y = m^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{n}{3m} + \frac{5}{81}\cdot\frac{n^3}{m^3} - \frac{22.n^5}{729m^5} + \text{i t. d.}\right) + m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(-\frac{n\sqrt{3}}{3m} + \frac{5}{81}\cdot\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} - \frac{22}{729}\cdot\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5} + \text{i t.d.}\right)$$

$$y = m^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{n}{3m} + \frac{5}{81}\cdot\frac{n^3}{m^3} - \frac{22}{729}\cdot\frac{n^5}{m^5} + \text{i t. d.}\right) - m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(-\frac{n\sqrt{3}}{3m} + \frac{5}{81}\cdot\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} - \frac{22}{729}\cdot\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5} + \text{i t. d.}\right)$$

Przyſzliśmy do wyrazów rzetelnych w trzech pierwiáſtkach zrównania $y^3 - ay \pm b = 0$, kiedy $\frac{1}{4}b^2 < \frac{1}{27}a^3$ ale te wyrazy nie kończąc ſię nigdy, ſłużą raczey do przekonania nás, że pierwiáſtki ſą rzetelne, niż do odkrycia ściſley ich wártości. Takowy przypádek zrównáń 3go ſtopnia wziął imię NIEPRZYWIEDLNEGO (*caſus irreductibilis*), s tąd, że naprzód prowadzi do wyrazu uroionego pierwiáſtków: ten wyraz, potem przerobiwſzy, trafiamy na ſzeregi bez końca, które nie mogą dadź tylko wártości bliſkie prawdy na ilość nieznaną. Przypádek nieprzywiedlny ma zawſze mieyſce w zrównaniach 3go ſtopnia, ile razy te zamykaią trzy pierwiáſtki rzetelne, nierówne i niewymierne. Wſzyſtkie kuſzenia Geometrów do uniknienia tego przypádku a zatem do rozwiązania zupełnego zrównáń 3go ſtopnia były dotąd niepomyślne,

Przypádek w którym zrównanie 3go ſtopnia nie może bydź dokładnie rozwiązane.

S kąd wnieść należy, że ile razy w zrównaniach $3go$ ſtopnia trafiemy na ten przypadek, nie ieſteśmy w ſtanie rozwiązać dokładnie takowego zrównania: że oſtatnia ucieczka, która nam w tym razie zoſtaie, zależy na ſzukaniu pierwiaſtków bliſkich prawdy, przez uczynienie ſzeregów iak naybarziey maleiącemi. Spoſoby na to podane barzo rozległego potrzebuią tłómaczenia, które nas zatrudni niżey, pamiętaymy tylko, że ieſteśmy oczywiſtą potrzebą wciągnieni w ten nowy prawie rodzay rachunku. Co ſię zaś tycze pierwiaſtków uroionych, o nich teraźnieyſze uwagi ucza nas, że te mogą ſię pokazać w wypadkach oſtatnich rachunku, nie będąc do niego przywiązanemi: chcąc przeto rossądzić czyli pierwiaſtki uroione koniecznie z naſzego wypadaią pytania lub nie? należy nam wprzód poczynić wſzyſtkie przerobienia oſtatnich zrównań zamykaiących uroione wyrazy; ieżeli ie potrafiemy zmazać, znakiem ieſt, że terminy uroione przypadkiem tylko wmieſzały ſię w rachunek; ieżeli zaś po wſzyſtich odmianach zoſtaną; pokazuią na ten czas niepodobieńſtwo tego czego ſzukamy: to niepodobieńſtwo znaleśdź powinniśmy w roſtrząſaniu uważnym wſzyſtkich kondycyi naſzego pytania.

Spoſób, który nas przywiódł do rozwiązania zrównań $3go$ ſtopnia zawiſł od oznaczenia ilości nieznaney z, którąśmy wprowadzili. Ta dana nam była przez zrównanie $6go$ ſtopnia (C), s kąd przyidzie nie iednemu na myśl, że ponieważ zrównanie to mieć powinno ſześć pierwiaſtków, otrzymamy ſześć wartości na z, które włożone w trzy wartości na y, obiecuią 18 pierwiaſtków: coby zruynowało naywalnieyſzy początek o liczbie pierwiaſtków w każdem iakiegokolwiek ſtopnia zrównaniu. Sam tylko rachunek może nas s takowey trudności wyprowadzić; nie chcemy nim obciążać xiążki, bo ten tak ieſt łatwy, że każdy za pomocą ogólnie podanych początków może go ſobie zrobić. Znaydzie zaś że wſzyſtkie ſześć wartości na z, przywiodą go tylko do trzech wartości na y; to ieſt kładąc którąkolwiek wartość na z, trafi na to ſamo wyrażenie y, a zatém na trzy tylko pierwiaſtki zrównania 3go ſtopnia.

Użyimy w przykładzie wyłożonych prawideł na zrównanie 3go ſtopnia: wyſtawmy ſobie, że pytanie iakie przywiodło nas do tego zrównania $x^3+6x^2+20x+124=0$, gdzie $p=6$, $q=20$, $r=124$; na wyrzucenie 2go terminu $x=y-2$; co zamieni zrównanie podane na - - $y^3+8y+100=0$, które ma tylko ieden pierwiaſtek rzetelny, a dwa uroione podług wyżey na to podanych znamień. $a=8$, $b=100$, włożywſzy te wartości za a, b, w wyraz ogólny pierwiaſtku, wypadnie:

$$g=\sqrt[3]{\left(-50+\sqrt{\frac{67812}{27}}\right)} \cdot\cdot\ h=\sqrt[3]{\left(-50-\sqrt{\frac{67812}{27}}\right)}$$

$$y=\sqrt[3]{\left(-50+\sqrt{\frac{67812}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(-50-\sqrt{\frac{67812}{27}}\right)} \text{ czyli}$$

$y=-4,15701$ a zatem $x=-6,15701$.

Obróćmy teraz uwagę na ſzczególne przypadki, które zrównanie $x^3+px^2+qx+r=0$ w ſobie ogarnia. Przypuśćmy naprzód że $p=0$, $q=0$, zoſtanie ſię $x^3+r=0$, a w przerobioném zrównaniu będzie $a=0$, $b=r$ $y^3+r=0$: to ieſt $x=y$; iego więc pierwiaſtek - - $x=\sqrt[3]{-r}$; niech będzie $r=m^3$, $\sqrt[3]{-r}=-m$; wypadnie $x^3+m^3=0$, które rozdzieliwſzy przez $x+m=0$, otrzymamy - - - - $x^2-mx+m^2=0$, - - -

$$x=\frac{m}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-m^2\right)}=\frac{m}{2}\left(1\pm\sqrt{-3}\right)$$

obydwa pierwiaſtki uroione; co właśnie wyciągniemy s trzech pierwiaſtków zrównania ogólnego. Więc zrównanie 3go ſtopnia $x^3+r=0$, ma tylko ieden pierwiaſtek rzetelny, a dwa uroione; zrównanie zaś $x^3-r=0$, ma wſzyſtkie trzy pierwiaſtki rzetelne. Ocaliwſzy p, q, a położywſzy $r=0$; znaydziemy ieden pierwiaſtek równy zero, i zrównanie zniży ſię do drugiego ſtopnia.

Skończmy zrównania *3go* ſtopnia tą ſamą uwagą, którąśmy uczynili nad zrównaniami *2go* pod §. 17; to ieſt, że prawidła dopiero odkryte rosciągaią ſię do zrównań wyżſzych ſtopni zawartych w wzorze: $x^{3n}+px^{2n}+qx^{n}+r=o$. uczyniwſzy bowiem $x^{n}=y$, zrównanie to zamieni ſię na $y^{3}+py^{2}+qy+r=o$ iakie nas dotąd zatrudniało.

§. XXIX.

Rozwięzuie ſię zrównanie 4go ſtopnia.

Doſyć nám ieſt przenieść pierwſzé uwagi nad zrównaniem *3go* ſtopnia do ſtopni wyżſzych, aby ſię przekonać, że té ſamé trudności, które nam ſię naſamprzód pokazały w zrównaniach *3go* ſtopnia, maią mieyſce i w ſtopniu czwartym. Nie potrzeba nám więc odſtępować od tych początków, które nam do zwyciężenia tamtych przeſzkód pomogly. Wſzyſtkie iakiekolwiek zrównania *4go* ſtopnia wyſtawić ſię mogą w tem ogólnem - - - $x^{4}+px^{3}+qx^{2}+rx+s=o$, które nám wprzód potrzeba zgubieniem drugiego terminu uprościć, niżeli przyſtąpiemy do iego rozwiązania. Na ten koniec niech będzie $x=y-\frac{p}{4}$, §. 22; zrównanie naſzé zamieni ſię na:

$$\left.\begin{array}{l} y^{4}-\frac{3}{8}p^{2}.y^{2}+\frac{1}{8}p^{3}.y-\frac{3}{256}p^{4} \\ \quad + \; q. \; -\frac{1}{2}pq.+\frac{1}{16}p^{2}q \\ \qquad\quad + \; r. \; -\frac{1}{4}pr \\ \qquad\qquad\qquad +s \end{array}\right\}=o.$$

uczyńmy dla ſkrócenia wyrazów $\frac{-3}{8}p^{2}+q=a$; $\frac{1}{8}p^{3}-\frac{1}{2}pq+r=b$; $-\frac{3}{256}p^{4}+\frac{1}{16}p^{2}q-\frac{1}{4}pr+s=c$, a wy-

padnie

padnie zrównanie 4go ſtopnia do rozwiązania.

(α) - - $y^4+ay^2+by+c=0$ - - - $y^4=-ay^2-by-c$

przybierzmy ſobie inną nieznaną z maiącą nam ſłużyć do wyrzucenia y z drugiey ſtrony zrównania, i do dopełnienia potęgi w pierwſzym członku. W tem dopełnieniu nie możnażby obrać niżſzey potęgi nad czwartą, któraby iednak ocaliła zupełnie y^4? Pamiętaiąc na to cośmy w §. 17. mówili; doſtrzeżemy łatwo, że zamiaſt potęgi czwartey możemy użyć drugiey, byleby wykładnik wtórego terminu był połową pierwſzego: takim ſpoſobem zrównanie 4go ſtopnia przywiedziemy do 2go, nic nie odmieniwſzy w iego ogólności; wſzyſtkie bowiem terminy zrównania (α) iego ogólność wyrażaiące, będą ſię w zrównaniu tak przerobionem znaydować. Otrzymamy więc:

$$y^4+2zy^2+z^2=(2z-a)y^2-by-c+z^2 \text{ - - - } (\beta)$$

pierwſzy członek tego zrównania ieſt zupełną potęgą drugą, przypuśćmy także że i drugi członek ieſt takąż potęgą zupełną, ile że do tego przypuſzczenia daie nam prawo nieznana z. Zeby ten warunek mogł mieć mieyſce, wyſtawmy ſobie drugi zrównania członek pod tym wzorem: $y^2-\frac{b}{2z-a}y+\frac{z^2-c}{2z-a}$, a ponieważ trzeci termin bydź powinien potęgą drugą połowy wſpół-czynnika drugiego, wypada zrównanie warunkowe:

$$\frac{b^2}{4(2z-a)^2}=\frac{z^2-c}{2z-a}, \text{ czyli - - } -b=2\sqrt{[(z^2-c)(2z-a)]}$$

dla proſtſzego wyrazu uczyńmy ieſzcze $2z-a=u$, - - $z=\frac{u+a}{2}$ - - $z^2-c=\frac{(a+u)^2-4c}{4}$: wprowadziwſzy te wartości w zrównanie warunkowe, i oſwobodziwſzy ie od znaku pierwiaſtkowego, otrzymamy:

$$u^3+2au^2+(a^2-4c)u-b^2=0 \text{ - - - } (\gamma).$$

Zrównanie to zawiera naprzód w ſobie tę kondycyą,

aby

aby drugi członek zrównania (β) był zupełną potęgą drugą; powróré: ſłuży do oznaczenia nieznaney z którąśmy wprowadzili: wciągnąwſzy wartość za b przez warunek odkrytą w zrównanie (β), wypadnie

$$y^4+2zy^2+z^2=(2z-a)y^2+2\sqrt{}[(z^2-c)(2z-a)]y+z^2-c$$

a wyciągnąwſzy z obydwóch ſtron pierwiaſtek potęgi drugiey, będzie:

$y^2+z=\pm(y\sqrt{}(2z-a)+\sqrt{}(z^2-c))$, to ieſt kładąc za z, z^2, iego wartości:

$$y^2-y\sqrt{u}=-\frac{u+a}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u}};\quad y^2+y\sqrt{u}=-\frac{u+a}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u}}.$$

dwa té zrównania rozwiązané podług prawideł Rozd. 2. dadzą cztery pierwiaſtki:

$$(1)\quad y=\frac{\sqrt{u}}{2}+\sqrt{}\left(-\frac{u+2a}{4}-\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)$$

$$(2)\quad y=\frac{\sqrt{u}}{2}-\sqrt{}\left(-\frac{u+2a}{4}-\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)$$

$$(3)\quad y=-\frac{\sqrt{u}}{2}+\sqrt{}\left(-\frac{u+2a}{4}+\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)$$

$$(4)\quad y=-\frac{\sqrt{u}}{2}-\sqrt{}\left(-\frac{u+2a}{4}+\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)$$

Pierwſzé dwa maią té ſamé ilości pod znakiém pierwiaſtkowym, i dwa oſtatnié także té ſamé, przeto ieżeli pierwſzy pierwiaſtek będzie rzetelny lub uroiony, drugi takiż bydź musi; ieżeli trzeci pierwiaſtek będzie uroiony lub rzetelny, czwarty także będzie koniecznie uroionym lub rzetelnym. Więc zrównanie 4go ſtopnia może mieć albo wſzyſtkie pierwiaſtki uroioné, albo wſzyſtkie rzetelné, albo dwa rzetelné a dwa uroioné. Niżeli przyſtąpiémy do roſtrząſania znamień każdego s tych przypadków, ułatwić w przód należy trudność, która ſię tu nadarza.

Każdy s czterech pierwiaſtków zrównania (α) zamyka w ſobie u, które dané ieſt przez zrównanie 3go

ſtopnia

Ułatwia ſię trudność o liczbie pierwiaſtków.

ſtopnia (γ). To rozwiązawſzy wypadną trzy wartości na u, które naſtępnie kładzione w cztery wartości y, obiecuią dwanaście pierwiaſtków zrównania (α). Trudność tak rzetelna wyciągniona z właſności zrównań godna całą naſze zatrzymać uwagę; bo w niey idzie o całość naypierwſzych prawd gruntowych. Żeby te zoſtały nienaruſzone, a zrównanie 4go ſtopnia (α) nie wydało więcey iak cztery pierwiaſtki, potrzebaby aby każda s trzech wartości na u, zoſtawiła cztery pierwiaſtki przy tym ſamym nieodmiennym wyrazie. Na ten koniec potrzebaby nam rozwiązać zrównanie (γ) podług prawideł §§. poprzedzaiących, i widzieć, czyli to co ſię zdaie bydź koniecznym wypadkiem pewnych początków, ieſt także wypadkiem doświadczenia i rachunku. Ale ten rachunek byłby niezmiernie długi, uſiłuymy koniecznie przekonać ſię o tem drogą krótſzą i łatwieyſzą. Ponieważ tu nie idzie tylko o upewnienie ſię, czyli trzy wartości na u, zoſtawią pierwiaſtki zrównania (α) przy tey ſamey liczbie lub nie? doſyć nam ieſt za iakąkolwiek pomocą tak przerobić zrównanie (γ), aby z niego wyciągnąć trzy wartości na u, któreby ie przywieśdź mogły do zero; nie należy nam więc bydź w tem dociekaniu troſkliwemi o oznaczenie tego przez ilości znane, od czego znaiomość pierwiaſtków zawiſła: wyſtawmy ſobie tylko cztery wartości na y, iak gdyby zawierały ſame ilości znane, i iakby nic do ich oznaczenia nie brakło, lubo w rzeczy ſamey ieſzcze w niem nie znamy u. Wziąwſzy trzy litery m, n, s, uczyńmy $\frac{\sqrt{u}}{2}=s$; $\sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4}-\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}=m$; $\sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4}+\frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}=n$, a cztery naſze pierwiaſtki wyrażą ſię krócey: $y=s+m$; $y=s-m$; $y=-s+n$; $y=-s-n$; rozmnożywſzy ie przez ſię, otrzymamy zrównanie;

$$\left.\begin{array}{llll} y^4 & -2s^2.y^2 & -2m^2s.y & +s^4 \\ & -m^2. & +2n^2s. & -s^2n^2 \\ & -n^2. & & -s^2m^2 \\ & & & +m^2n^2 \end{array}\right\}=0 \quad (A).$$

które iedno bydź powinno z zrównaniem (α), Równaiąc wſpół-czynniki tamtego s wſpół-czynnikami tego, wypada $a=-2s^2-m^2-n^2$; $b=2n^2s-2m^2s$, $c=s^4-s^2n^2-s^2m^2+m^2n^2$: té wartości za a, b, c, włożywſzy w zrównanie (γ) odmieniemy ie na

$$\left.\begin{array}{llll} u^3 & -4s^2.u^2 & +8s^2m^2.u & -4s^2(m^2-n^2)^2 \\ & -2m^2. & +8s^2n^2. & \\ & -2n^2. & +m^4. & \\ & & +n^4. & \\ & & -2m^2n^2. & \end{array}\right\}=0 \quad (G);$$

ponieważ oſtatni termin zrównania (G) ieſt mnogością s wſzyſtkich pierwiaſtków, rozebrawſzy go na ſwoie mnożniki, znaydziemy ich trzy, $4s^2$, $(m+n)^2$, $(m-n)^2$, s których każdy włożony za u, przywiedzie zrównanie do zero. Użyć więc można tych mnożników iako pierwiaſtków zrównania (γ), które nas nauczą o liczbie pierwiaſtków zrównania (α), i ułatwią zupełnie zachodzącą trudność. Biorąc bowiem $u=4s^2$, $u=(m+n)^2$, $u=(m-n)^2$, po iedney s tych wartości za u, i kładąc ie naſtępnie w cztery wartości na y, zamieniwſzy także a, b, c, na funkcyą s, m, n, za pomocą wyżey podanych na to zrównań; przeydziemy przez dwanaście kombinacyi, ale nie trafiemy w nich tylko na cztery różne pierwiaſtki, to ieſt: $y=s+m$; $y=s-m$; $y=-s+n$, $y=-s-n$, każda wartość na u, naprowadzi nas na nie, a trzy wartości na u trzy razy nam ie tylko powtórzą, nie ſprawiwſzy inney odmiany prócz tey, że pierwiaſtek na y który był n.p. wyciągniony z zrównania (1) położywſzy $u=4s^2$; wypadnie potem z innego zrównania kładąc $u=(m+n)^2$. Rachunek tak proſty i łatwy przekona każdego o prawdzie którą tu ogłaſzamy.

my. Skąd ſię wnoſi oczywiście, że nam nie potrzeba rozwięzywać zupełnie zrównania (γ), aby z niego otrzymać trzy wartości na u, nie potrzeba nam bowiem z nich tylko iedney. Tey doſtąpiwſzy przez iaki ſzczególny ſpoſób z wyżey podanych, odkryiemy natychmiaſt cztery pierwiaſtki zrównania podanego.

Gatunki pierwiaſtków wyciągaia ſię s porownaniá ſtopnia 3go s 4tym

Ieſteśmy więc iuż więcey niż pewni że zrównanie czwartego ſtopnia nie wyda więcey nad cztery pierwiaſtki: ale że te pierwiaſtki bydź mogą wſzyſtkie rzetelne albo wſzyſtkie uroione, albo dwa z nich rzetelne a dwa uroione; oprócz tego zrównanie (γ) będąc 3go ſtopnia, może w pewnych okolicznościach naprowadzić nas na przypadek nieprzywiedlny, który dawſzy nam tylko wartości bliſkie prawdy, przywiedzie nas do podobnych pierwiaſtków w zrównaniach 4go ſtopnia; dla tego zatrzymać nam ſię z uwagą należy nad rozróżnieniem wſzyſtkich tych przypadków, i nad odkryciem znamien każdemu właściwych. Przekonani że zrównanie 4go ſtopnia zawiſło całkiem od zrównania ſtopnia trzeciego, znieśmy ie razem s ſobą, i roſtrząśniymy wſzyſtkie wypadki które s tey zawiſłości i porównania mogą wyniknać. Połóżmy ſobie naprzód przed oczy wſzyſtkie kombinacye pierwiaſtków rzetelnych i uroionych, które ſą właściwe zrównaniom 4go ſtopnia, to ieſt:

$$\begin{array}{lllll} & y=s+m; & & & y=s+m\sqrt{-1}; \\ I. & y=s-m; & & II. & y=s-m\sqrt{-1}; \\ & y=-s+n; & & & y=-s+n\sqrt{-1}; \\ & y=-s-n; & & & y=-s-n\sqrt{-}; \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} & y=s+m & & & y=s+m\sqrt{-1} \\ III. & y=s-m & & IV. & y=s-m\sqrt{-1} \\ & y=-s+n\sqrt{-1} & & & y=-s+n \\ & y=-s-n\sqrt{-1} & & & y=-s-n \end{array}$$

do tych przypadków ſtóſować winniśmy wartości na u, kładąc w nich za m, n, wartość taką, iaka ſię znayduie w przypadku do którego przywięzuiemy naſzę uwagę, to ieſt: w (I) m, n, brać należy za rzetelne: w (II), obydwa za uroione: w (III) m rzetelne, n uroione: w (IV) nakoniec m uroione, n rzetelne. Pamiętaymy zaś o tem, że ile razy w tych kombinacyach trafiemy na wſzyſtkie trzy rzetelne wartości u, wpadamy na przypadek nieprzywiedlny, który w zrównaniu 3go ſtopnia ma mieyſce, kiedy to zamyka wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne: na ten czas niedoſkonałość prawideł 3go ſtopnia wpływać koniecznie będzie w ſtopień czwarty; i zrównanie 4go ſtopnia równie nie będzie mogło bydź zupełnie rozwiązane iak zrównanie 3go. Pierwiaſtki zaś rzetelne lub uroione wypadną koniecznie z rzetelnych lub uroionych wartości na s, m, n, które brać winniśmy s czterech wyłożonych kombinacyi pierwiaſtków czwartego ſtopnia.

Obróciwſzy naprzód uwagę na (I), wypadaią nam s, m, n, rzetelne, a zatem $u=4s^2$, $u=(m+n)^2$, $u=(m-n)^2$, wſzyſtkie trzy rzetelne pierwiaſtki zrównania (γ); więc iako w tym przypadku zrównanie 3go ſtopnia nie daie tylko pierwiaſtki bliſkie prawdy, zrównanie 4go ſtopnia maiąc wſzyſtkie cztery pierwiaſtki rzetelne, wpada na przypadek nieprzywiedlny, i nie możemy mieć w niem pierwiaſtków zupełnych. Roſtrząſaiąc powtóre (II), gdzie wſzyſtkie pierwiaſtki uroione, brać winniśmy s, $m\sqrt{-1}$, $n\sqrt{-1}$, a zatem $u=4s^2$, $u=(m\sqrt{-1}+n\sqrt{-1})^2=-(n+m)^2$; $u=(m\sqrt{-1}-n\sqrt{-1})^2=-(m-n)^2$, znowu wſzyſtkie trzy rzetelne wartości na u; więc zrównanie 4go ſtopnia maiąc wſzyſtkie cztery pierwiaſtki uroione, ieſt znowu w przypadku nieprzywiedlnym, i nie możemy mieć iego pierwiaſtków w wyrazie ſkończonym.

Potrzecie: Przypadek (III). i (IV). daie $s, m, n\sqrt{-1}$; $s, m\sqrt{-1}, n$, kładąc ie w wartości na u, otrzymamy w (III.) $u=4s^2$, $u=(m+n\sqrt{-1})^2=m^2+2mn\sqrt{-1}-n^2$; $u=(m-n\sqrt{-1})^2=m^2-2mn\sqrt{-1}-n^2$; w (IV).

$u=4s^2$;

$u=4s^2$; $u=(m\sqrt{-1}+n)^2=n^2+2mn\sqrt{-1}-m^2$; $u=(m\sqrt{-1}-n)^2=n^2-2mn\sqrt{-1}-m^2$, w obydwóch razach wypadaią dwie wartości uroione na u, a iedna rzetelna; w takowym przypadku wiemy że zrównanie 3go ſtopnia ma pierwiaſtki w wyrazie ſkończonym; więc zrównanie 4go ſtopnia będzie mogło bydź rozwiązane zupełnie w ten czas, kiedy ma dwa pierwiaſtki uroione a dwa rzetelne.

Ponieważ zrównanie 4go ſtopnia ieſt w przypadku nieprzywiedlnym maiąc albo wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne albo wſzyſtkie uroione; iakże rozróżnić od ſiebie dwa te przypadki do których ieſt przywiązana niedoſkonałość naſzych prawideł? Cecha ta która te dwie rzeczy od ſiebie oddziela muſi bydź koniecznie w zrównaniu (y) zawarta. Wróćmy ſię do wypadków rachunku na któreśmy natrafili w tych dwóch przypadkach.

Roſtrząſaiąc I przykład, gdzie zrównanie 4go ſtopnia ma wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne, trafiliśmy na trzy wartości u dodatne: w II zaś przykładzie, gdzie zachodzą wſzyſtkie pierwiaſtki uroione, otrzymaliśmy iednę wartość na u dodatną, a dwie odiemne. Właśnie w zrównaniu (y) oſtatni termin $-b^2$ będąc odiemnym nie mógł powſtać tylko albo s wſzyſtkich pierwiaſtków dodatnych albo iednego dodatnego a dwóch odiemnych podług właſności ogólnych zrównań; więc ieżeli zrównanie (y) będzie miało trzy pierwiaſtki rzetelne i wſzyſtkie dodatne, zrownanie 4go ſtopnia będzie miało wſzyſtkie pierwiaſtki zupełne. Ieżeli zaś w zrównaniu (y) s trzech rzetelnych pierwiaſtków ieden będzie dodatny a dwa odiemne; zrównanie czwartego ſtopnia będzie miało wſzyſtkie pierwiaſtki uroione. W obydwóch zaś przypadkach te pierwiaſtki nie będą mogły bydź w wyrazie ſkończonym ogarnione; więc iako zrównania 3go ſtopnia nie umiemy dokładnie rozwiązać kiedy ma wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne, tak podobnie

zrównania

zrównania 4go ſtopnia nie ieſteśmy w ſtanie doſtąpić pierwiaſtków zupełnych, kiedy te albo wſzyſtkie ſą rzetelne albo wſzyſtkie uroione.

Przéyście do drugiey części

Widzemy więc ściſły barzo związek, który zachodzi między zrównaniami niżſzych i wyżſzych ſtopni. Ten związek iak ieſt miły dla umyſłu, tak ſię ſtał ſzkodliwy dla Geometrów, bo przeſzkodził dalſzym ich dociekaniom. Widząc bowiem że doſkonałe rozwiązanie zrównań 4go ſtopnia zawiſło koniecznie od doſkonałego ich rozwiązania w trzecim ſtopniu; obrócili całe uſiłowania ſwoie na tén oſtatni, aby uniknąć przypadku nieprzywiedlnego i przyiśdź do odkrycia pierwiaſtków w wyrazie ſkończonym. Wſzyſtkie kuſzenia i uſiłowania ich były dotąd daremne, bo iakiekolwiek przedſięwzięli drogi w rozwiązaniu zrównania maiącego wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne; nie trafili nigdy tylko na pierwiaſtki bliſkie prawdy. Niedokładność ta prawideł pokazała ſię zaraz w ſtopniach wyżſzych; co ich oſtrzegło, iż póty próżno było zapuſzczać ſię w wyżſze ſtopnie, poki zrównanie 3go ſtopnia nie będzie doſkonale, to ieſt w całey ſwey ogólności rozwiązane. Pewne bowiem ſzczególne przypadki, w którychby nam ſię mogło udadź nie rosszerzaią nauki, i nie ſą warte pracy, którey rozwlekłość rachunku wyciąga. Należało więc po wielu daremnych uſiłowaniach uſtąpić przeſzkodóm, a chwycić ſię zoſtawionych pomocy naſzey niedoſkonałości. Ieżeli nie możemy mieć zrównań wyżſzych ſtopni pierwiaſtków całe zupełnych; należało natężyć całe dociekania, aby ſię do nich naybarziey zbliżyć przez doſkonalenie teoryi ſzeregów, która ſię ſtała w tem odſtąpieniu prawdy oſtatnią i naybeſpiecznieyſzą ucieczką do iey ścigania. Przywiedzeni i my ieſteśmy potrzebą i barzo przyrodzonym porządkiem do nowego przedmiotu naſzych badań, który nám całą część drugą zabierze. Nim do niey przyſtąpiemy zatrzymaymy ſię ieſzcze nad niektóremi uwagami wypadaiącemi s tego, cośmy dotąd mówili.

§. XXX.

Spoſób rozeznawania potęg zupełnych w funkcyach niewymiernych.

Właſnosci naprzód ogólne zrównań nauczyły nas, że pierwiaſtki zrównania iakiegokolwiek ſtopnia zawieraią w ſwoim wyrazie znaki pierwiaſtkowe ſwego ſtopnia i wſzyſtkich innych ſtopni od ſiebie niżſzych. Doświadczenie potem utwierdziło nas w tey prawdzie, kiedy po rozwiązanem *2go*, *3go* i *4go* ſtopnia zrównaniu, pierwiaſtki pokazały ſię w wyrazie barzo niewymiernym i zawikłanym. Ten znacznieby ſię zaiſte uprościł, gdyby s funkcyi pod znakami pierwiaſtkowemi zawartych mogły bydź pierwiaſtki wyciągnione ſpoſobem zupełnym. Wyciąganie zaś pierwiaſtków nie może ſię udadź, tylko kiedy funkcya ieſt potęgą zupełną: ale iakże poznać czyli ieſt taką lub nie, w śrzod niewymiernych wyrazów, które ią wiklą i zaſłaniaią prawo potęg zupełnych?

S tey uwagi nie możemy nie uczuć potrzeby ſzukania ſpoſobu na rozeznanie potęg zupełnych w funkcyach pierwiaſtkowych. Każdą takową funkcyą nie zawieraiącą tylko znaki pierwiaſtkowe *2go* ſtopnia wyrazić ogólnie możemy przez $A\pm\sqrt{B}$, gdzie wſzyſtkie ilości wymierne znaczą ſię przez A; wſzyſtkie zaś niewymierne przez $\sqrt{B}$. Ieżeli $A\pm\sqrt{B}$ ieſt zupełną potęgą drugą, iey pierwiaſtek niech będzie wyrażony przez $\sqrt{p}\pm\sqrt{q}$; przeto $\sqrt{(A\pm\sqrt{B})}=\sqrt{p}\pm\sqrt{q}$; $A\pm\sqrt{B}=p\pm2\sqrt{pq}+q$; czyli (1) - - $A=p+q$; $\pm\sqrt{B}=\pm2\sqrt{pq}$. - - (2) $B=4pq$ - - $q=\frac{B}{4p}$, co włożywſzy w (1) wypadnie: $p^2-Ap=-\frac{B}{4}$ - - $p=\frac{A\pm\sqrt{(A^2-B)}}{2}$ $q=A-p=\frac{A\mp\sqrt{(A^2-B)}}{2}$; żeby więc $A\pm\sqrt{B}$, było potęgą zupełną, potrzeba żeby p, q, były funkcyami wymiernemi; a przeto potrzeba żeby A^2-B było zupełną potęgą drugą. Iakóż w teraźnieyſzym przypadku $A^2-B=(p+q)^2-4pq=(p-q)^2$. Chcąc więc doświadczyć

doświadczyć, czyli funkcyá iaká pierwiaſtkowá która ſię zamyká pod wzorem $A\pm\surd B$ ieſt zupełną potęgą drugą, należy wiedzieć, czyli w niey $\surd(A^2-B)$ ieſt funkcyą wymierną; ieżeli nie ieſt; funkcya $A\pm\surd B$ nie będzie zupełną potęgą: ieżeli zaś $\surd(A^2-B)$ ieſt pierwiaſtkiem zupełnym; funkcyá $A+\surd B$ będzie miała za pierwiaſtek:

$$\surd p+\surd q=\pm\left[\surd\left(\frac{A+\surd(A^2-B)}{2}\right)+\surd\left(\frac{A-\surd(A^2-B)}{2}\right)\right].$$

funkcyá zaś $A-\surd B$ mieć będzie pierwiaſtek:

$$\surd p-\surd q=\pm\left[\surd\left(\frac{A+\surd(A^2-B)}{2}\right)-\surd\left(\frac{A-\surd(A^2-B)}{2}\right)\right].$$

Przykład. Niech będzie funkcyá $5a^2-b^2\pm 4a.\surd(a^2-b^2)$, o którey chcemy wiedzieć, czyli ieſt potęgą zupełną lub nie?
$A=5a^2-b^2$; $\surd B=4a\surd(a^2-b^2)$; $A^2-B=9a^4+6a^2b^2+b^4$, potęga zupełná funkcyi $3a^2+b^2$: więc $p=4a^2$; $q=a^2-b^2$, przeto funkcyá podaná ieſt zupełną potęgą drugą, którey pierwiaſtki ſą $\surd p+\surd q=\pm[2a\pm\surd(a^2-b^2)]$. Tym ſpoſobem znaydziemy że wyraz liczebny $28+10\surd 3$ ieſt potęgą drugą, którey pierwiaſtki ſą $\pm(5+\surd 3)$.

Ieżeli s funkcyi $A+\surd B$ chcemy wyciągnąć pierwiaſtek potęgi trzeciey, potrzeba aby ten pierwiaſtek mógł bydź wyſtawiony pod takim wyrazem, któryby nie mogł wydadź iak tylko ieden niewymierny termin w potędze trzeciey. Przekonamy ſię zaś łatwo s krótkiey uwagi nad potęgami, że takowy pierwiaſtek nie może w ſobie zawierać tylko ieden także niewymierny termin, i że wyraz iego właściwy ieſt $p+\surd q$: wprowadziwſzy bowiem więcey terminów niewymiernych w pierwiaſtek n.p. $\surd p+\surd q$, potęga trzecia będzie mieć wſzyſtkie terminy niewymierne, i nie będzie mogła bydź porównaną s funkcyą $A+\surd B$. Ale ten pierwiaſtek wyciągniony s funkcyi $A+\surd B$ nie będzież on mogł zawierać znaku pierwia

ſtkowego

ſtkowégo potęgi trzeciey? Powinniśmy to barzo łatwo poiąć, że takowy znak nie może ſię znaydować, chyba że ſama potęga $A+\sqrt{B}$, ieſt rozmnożona przez iaką ilość lub funkcyą n.p. $(A+\sqrt{B})m$, a na tén czás pierwiaſtek także będzie zawierał funkcyą niewymierną $\sqrt[3]{m}$, która równie będzie ſpólną wſzyſtkim iego terminom; to ieſt: $(p+\sqrt{q})\sqrt[3]{m}$.

Wróćmy ſię do pierwſzégo przypádku:

$$A+\sqrt{B}=p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q}.$$

równaiąc terminy niewymierné i wymierné s ſobą, mámy

$$(1) \text{ - - } A=p^3+3pq \text{ - - } (2) \text{ - - } \sqrt{B}=(3p^2+q)\sqrt{q}$$

$$A^2-B=(p^2-q)^3 \text{ - - - } \sqrt[3]{(A^2-B)}=p^2-q.$$

ieżeli więc $A+\sqrt{B}$ ieſt zupełna potęga trzecią, powinno koniecznie A^2-B bydź tąż zupełną potęgą funkcyi p^2-q: nazwáwſzy $p^2-q=n$; $q=p^2-n$, i włożywſzy tę wártość za q w (1) otrzymámy zrównanie warunkowé:

$$4p^3-3np-A=0 \text{ - - - } (L).$$

s którego należy wyciągnąć wártość na p, w wyrazie wymiernym: potrzebaby więc rozebrać zrównanie (L) na ſwé mnożniki wymierné, czego nie we wſzyſtkich przypádkach potrafiemy dokázać.

Ieżeli $A+\sqrt{B}$ będzie zupełną potęgą mimo to, że A^2-B nią nie ieſt; na tén czás $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}$ ieſt rozmnożone przez ſpólną iaką ilość pierwiaſtkową trzeciey potęgi; rozdzieliwſzy ie więc przez tę ilość, wynáydziemy pierwiaſtek funkcyi $A+\sqrt{B}$, i na tén czás A^2-B będzie zupełna potęga trzecia.

Uważaiąc na koniec $A\pm\sqrt{B}$ iako potęgę ſtopnia n, którey pierwiaſtek wyráża ſię przez $p\pm\sqrt{q}$, mámy na to zrównanie:

$$A+\sqrt{B}=(p+\sqrt{q})^n$$
$$A-\sqrt{B}=(p-\sqrt{q})^n$$

Mnogość

$$A^2-B=(p^2-q)^n.$$

co nas ogólnie uczy, że ieżeli $A \pm \sqrt{B}$ ma bydź zupełną potęgą n, potrzeba koniecznie aby funkcya $A^2 - B$ była taż ſamą potęgą $p^2 - q$: nazwawſzy $p^2 - q$, k; włożemy za $q = p^2 - k$ w zrównanie na A, i otrzymamy inne warunkowé ſtopnia n, s ktorem należy ſie tak obeyśdź iak z zrównaniem (L) aby wynaleśdź p.

Służy nam ieſzcze ten ſam ſpoſob do wyciągania pierwiaſtków s funkcyi zamykaiących więcey terminow niewymiernych. Ieżeli te pierwiaſtki wyrażémy przez $p + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, albo przez $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; należy nam uważyć, że potęga druga s takowego pierwiaſtku powſtaiąca tyle będzie zawierać terminow niewymiernych, ile wypadnie mnogości z dwóch na raz pierwiaſtka terminow; znak bowiem pierwiaſtkowy nie zniknie, tylko w ſamych czyſtych potęgach każdego terminu poiedynczego: i tak n.p. trzy terminy, s których albo wſzyſtkie albo dwa tylko pierwiáſtkowe, wydadzą koniecznie trzy terminy niewymierne w potędze drugiey: cztery terminy niewymierne pierwiaſtka, zrodzą ſześć niewymiernych w potędze: n terminów pierwiaſtka, s ktorychby albo żaden albo ieden tylko był wymierny, wydadzą $\frac{n(n-1)}{1.2}$ terminów niewymiernych w potędze. Chcąc więc wyſtawić potęgę drugą pierwiaſtka $p + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, albo $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; wyrazić ią muſzemy przez $A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} = p + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} + q + r$; więc - - - $A = p + q + r$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{pq}$; - - - $\sqrt{C} = 2\sqrt{pr}$; - - - - $\sqrt{D} = 2\sqrt{qr}$, s kąd wypada $q = \frac{B}{4p}$ - - $r = \frac{C}{4p}$ - - - $r = \frac{D}{4q}$, włożywſzy za q, r, ich wartości w pierwſze; otrzymamy $A = p + \frac{B}{4p} + \frac{C}{4p}$; czyli - - -

$$p^2 - Ap = -\frac{B+C}{4} \text{ - - } p = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - B - C)}}{2}$$ skąd łatwo

łatwo wynaleśdź q, r. Ieżeli więc $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$, ieſt zupełną potęgą drugą; p powinno bydź wymiernem, a zatem A^2-B-C bydź także powinno zupełną potęgą drugą. Iakóż w teraźnieyſzym przykładzie $A^2-B-C=(p+q+r)^2-4pq-4pr=(p-q-r)^2$.

Oprócz tego warunku zoſtaie ieſzcze ieden pochodzący z dwóch wartości różnych na r, to ieſt: $\frac{C}{4p}=\frac{D}{4q}$.

Zeby więc funkcya podaná miała za pierwiaſtek $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, potrzeba naprzód, żeby A^2-B-C było zupełną potęgą drugą; powtóre; żeby - - - - - - $\frac{C}{4p}=\frac{D}{4q}$. Zobáczmy to w przykładzie.

. Niech będzie wyráz liczebny $28+\sqrt{320}+\sqrt{448}+\sqrt{140}$, o którym chcemy wiedzieć, czyli ieſt zupełna potęga druga, i iaki ieſt iego pierwiaſtek? W nim $A=28$, $B=320$; $C=448$, $D=140$ - - $A^2-B-C=16$, którego pierwiaſtek 4; więc $p=\frac{A+\sqrt{(A^2-B-C)}}{2}=16$, $q=\frac{B}{4p}=5$, - - $r=\frac{C}{4p}=7$; $\frac{C}{4p}=\frac{D}{4q}$ czyli $7=7$. więc pierwiaſtek podanego wyrazu ieſt $\pm(4+\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

Należy nam tu uczynić iednę przeſtrogę, że równaiąc przykład iaki podany z wzórem ogólnym, może ſię czaſem nie udadź która kondycya w iednem nazwiſku, ale ſię uda w nazwiſku innem, i dla tego ieżeli z nadanych wartości A,B,C,D, nie wypadną warunki właściwe pytaniu; nie należy w przód ſtanowić, że funkcya podaná nie ma pierwiaſtku, póki nie przeydziemy przez wſzyſtkie odmiany które wypaśdź mogą z różnych nadanych wartości ilościom pierwiaſtkowym: i tak n. p. maiąc wyraz liczebny $10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}$ nie wypadną nam obydwa warunki nazwawſzy $A=10$, $B=24$, $C=40$, $D=60$, ponieważ na $\frac{C}{4p}=\frac{D}{4q}$ otrzymamy $5=80$: ale ieżeli nazwiemy $A=10, B=40, C=60$, $D=24$, obydwie kondycye będą miały mieyſce, i pierwiaſtek pod nego wyrazu będzie: $\pm(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Maiąc do rospoznania funkcyą podaną, ktorey obydwa terminy byłyby pierwiaſtkowe: n.p. $\sqrt{A}+\sqrt{B}$. potrzebaby nam dobrać takiego wyrazu w pierwiaſtku, ktoryby w drugiey potędze wydał dwa tylko terminy, obydwa zaś z znakiem pierwiaſtkowym: Takowy pierwiaſtek wyrazi ſię barzo dobrze przez $\sqrt{(p\sqrt{r})}+\sqrt{(q\sqrt{r})}$; maiąc bowiem iednego mnożnika ſpolnego, dwa terminy złączą ſię razem; i potęga druga takowego pierwiaſtku będzie: $(p+q)\sqrt{r}+2\sqrt{pqr}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$, a zatem $(p+q)^{2}r=A$, - - $4pqr=B$ - - $A-B=(p+q)^{2}r-4pqr=(p-q)^{2}r$. ieżeli więc $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ ma bydź zupełną potęgą drugą, powinno $A-B$ bydź potęgą drugą kilkokrotną, czyli rozmnożoną przez iaką liczbę r. Dwa s tąd otrzymane zrównania

$$\sqrt{(A-B)}=p\sqrt{r}-q\sqrt{r}.$$
$$+\sqrt{A}=p\sqrt{r}+q\sqrt{r}.$$

dodaiąc lub odciągaiąc od ſiebie; doſtapiemy

$$p\sqrt{r}=\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(A-B)}}{2}$$

$$q\sqrt{r}=\frac{\sqrt{A}-\sqrt{(A-B)}}{2}$$

s których powſtaie pierwiaſtek funkcyi $\sqrt{A}+\sqrt{B}$.

$$\sqrt{(p\sqrt{r})}+\sqrt{(q\sqrt{r})}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(A-B)}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{(A-B)}}{2}\right)}.$$

Użycie tego ſamego ſpoſobu w funkcyach uroionych,

Doświadczmy ieſzcze tego ſpoſobu w funkcyach uroionych. Wyſtáwmy ſobie funkcyą uroioną zamykaiącą znaki pierwiaſtkowe ſamey potęgi drugiey, w wzorze ogólnym $A+\sqrt{-B}$. gdzie B ieſt koniecznie dodátne: a ſtóſuiąc do niey té ſamé uwági, któreśmy uczynili nad $A+\sqrt{B}$, wynáydziemy, że

$\sqrt{(A+\sqrt{-B})}$

$$\sqrt{(A+\sqrt{-B})}=\pm\left[\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}\right)}\right]\ \text{- - -}\ (M).$$

ieżeli więc funkcya uroiona $A+\sqrt{-B}$ ieſt zupełną potęgą drugą; muſi koniecznie A^2+B bydź takąż potęgą: pierwſzy termin tego pierwiaſtku - - - $\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}\right)}$, ieſt funkcyą rzetelną, którą możemy wyrazić przez a; drugi termin - - - $\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}\right)}$ ieſt uroiony; ponieważ $A<\sqrt{(A^2+B)}$; wyrazić on ſię może przez $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(A^2+B)}-A}{2}\right)}.\sqrt{-1}$ $=b\sqrt{1}$. gdzie b znaczy ilość rzetelną. Pierwiaſtek więc uroioney funkcyi wyrazić ſię może przez $a+b\sqrt{-1}$, gdzie a; b; ſą ilościami koniecznie rzetelnemi.

Maiąc ſobie podaną funkcyą uroioną $\sqrt{\sqrt{-C}}=\sqrt[4]{-C}$ a równaiąc ią z wzorem $A+\sqrt{-B}$, będzie $A=0$; $B=C$, a wartość $\sqrt[4]{-C}$ z zrównania (M) wyciągaiąc, znaydziemy $\sqrt[4]{-C}=\sqrt[4]{\left(\frac{C}{4}\cdot(1+\sqrt{-1})\right)}$, co także wyrazić możemy przez $a+b\sqrt{-1}$ uczyniwſzy $a=\sqrt[4]{\frac{C}{4}}=b$.

Niech będą funkcye: $\sqrt{(\sqrt[4]{-C})}=\sqrt[8]{-C}$; $\sqrt{\sqrt[8]{-C}}=\sqrt[16]{-C}$, i t. d. ponieważ $\sqrt[4]{-C}$ iuż przywiedliśmy do wyrazu $a+b\sqrt{-1}$, będzie $\sqrt[8]{-C}=\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}$ $=\pm\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}\right)}\sqrt{-1}$ który także należy do wzoru $a+b\sqrt{-1}$, wziąwſzy $\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}\right)}$ za a; $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}\right)}$, za b;

tym ſpoſobem poſtępuiąc ſobie przekonamy ſię, że wſzyſtkie funkcye uroione, maiące wykładnika $2k$; k znacząc liczbę parzyſtą, przywiedzione bydź mogą do wyrazu $a+b\sqrt{-1}$.

Ieżeli k będzie liczbą nieparzyſtą, $2k$ będzie zawſze parzyſtą: ale że wykładniki parzyſte 6, 10, 14, 16, 18, i t. d. uważać ſię mogą iako powſtaiące z rozmnożenia liczby nieparzyſtey przez parzyſtą; funkcye uroione, s takiemi wykładnikami $\sqrt[6]{-C}$, $\sqrt[10]{-C}$, i t. d. będą równe $\sqrt{(\sqrt[3]{-C})}$, $\sqrt{(\sqrt[5]{-C})}$, i t. d. A że $\sqrt[3]{-C}=-\sqrt[3]{C}$, $\sqrt[5]{-C}=-\sqrt[5]{C}$, $\sqrt[7]{-C}=-\sqrt[7]{C}$ i t.d. nazwawſzy $\sqrt[3]{C}$, $\sqrt[5]{C}$, $\sqrt[7]{C}$, b^2; wyrazy uroione $\sqrt[6]{-C}$, $\sqrt[10]{-C}$, i t. d. ieſzcze należeć będą do wzoru ogólnego $a+b\sqrt{-1}$. Wnieśmy więc że wſzyſtkie funkcye uroione z wykładnikiem $2k$, k będąc parzyſtą lub nie parzyſtą liczbą, wyrazić ſię mogą przez wzór ogólny $a+b\sqrt{-1}$.

Ieżeli funkcya podana $A+\sqrt{-B}$ będzie potęgą nie parzyſtą zamykaiącą pierwiaſtki częścią rzetelne, a częścią uroione, obeyśdź ſię z nią będziem mogli podług tych ſamych prawideł, które nam ſłużyły na $A+\sqrt{B}$. Wſzakże pierwiaſtki nawet potęg nieparzyſtych wyraziliśmy przez $p+\sqrt{q}$; więc ieżeli teraz wyrażemy potęgę iakąkolwiek nieparzyſtą przez $A+\sqrt{-B}$, pierwiaſtek iey będzie $p+\sqrt{q}$ ogarniaiący razem wartości rzetelne i uroione; a zatem funkcye nawet które w potęgach nieparzyſtych zawieraią pierwiaſtki rzetelne zmieſzane z uroionemi, przywiodą ſię do wzoru $a+b\sqrt{-1}$. Wyſtawmy ſobie n.p. trzecią potęgę w funkcyi $A+\sqrt{-B}$ którey pierwiaſtek wyraźmy przez $r+s$, pamiętaiąc że s zamyka w ſobie znak pierwiaſtkowy drugiey potęgi. Będzie więc $A+\sqrt{-B}=r^3+3rs+3rs^2+s^3$; ponieważ znak pierwiaſtkowy nie mógł zniknąć w potęgach nieparzyſtych s; równaymy z $\sqrt{-B}$ wſzyſtkie terminy, gdzie s

ieſt

ieſt wymiaru nieparzyſtego, wſzyſtkie zaś inne z A; otrzymamy - - $r^3+3rs^2=A$; - - $3r^2s+s^3=(3r^2+s^2)s=\sqrt{-B}$. - - $B=-(3r^2+s^2)^2s^2$: dwa te zrównania złączone s ſobą dadzą wartość na r, s, tak; aby $A+\sqrt{-B}$ było zupełną potęgą trzecią maiącą za pierwiaſtek $r+s$. Aże z wyżey iuż wyłożonych warunków A^2+B bydź powinno zupełną potęgą trzecią, ieżeli nią ieſt $A+\sqrt{-B}$; otrzymamy naprzód s teraźnieyſzych na A, B, wartości, $\sqrt[3]{(A^2+B)}=r^2-s^2$: powtóre otrzymamy zrównanie warunkowe któreśmy wyżey nazwali (L) - - $4r^3-3nr-A=0$. gdzie $n=r^2-s^2$.

To zrównanie maiąc drugi termin odiemny, będzie miało wſzyſtkie trzy pierwiaſtki rzetelne, s których ieden wyrazić możemy przez a: wypadnie powtóre $s^2=\frac{-B}{(3r^2+s^2)^2}$, a włożywſzy za s^2, iego wartość r^2-n; $s^2=\frac{-B}{(4r^2-n)^2}$ wartość koniecznie odiemna, ponieważ B w teraźnieyſzém przypuſzczeniu ieſt koniecznie dodatnem; mianownik także z natury ſwoiey dodatnym, więc $s=\frac{\sqrt{B}}{4r^2-n}.\sqrt{-1}$. co ſię wyrazić może przez $b\sqrt{-1}$, biorąc za b ilość rzetelną $\frac{\sqrt{B}}{4r^2-n}$.

S tych więc wſzyſtkich przypadków wypada prawda ogólna: że wſzyſtkie fnnkcye uroione wyrazić ſię mogą przez wzór $a+b\sqrt{-1}$. Niżeli rosciagniemy daley użycie dopiero wyłożoney prawdy, przychodzi nam tu uczynić króciuteńką uwagę o zrównaniach 3go ſtopnia. Wiemy, że ile razy te zamykaią wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne, prowadzą nas do przypadku nieprzywiedlnego, w którym pierwiaſtki pokazuią ſię pod wyrazem uroionym prowadzącym nas do ſzeregów nieſkończonych.

Ale ieżeli iaki pierwiaſtek będzie przy ſwoim uroionym wyrazie zupełną potęgą trzecią, wyciągnąwſzy z niego pierwiaſtek 3ciey potęgi ſpoſobem teraz wyłożonym, przyidziemy do wyrazu ſkończonego trzech rzetelnych wartości na ilość nieznaną. n. p. Maiąc zrównanie $x^3—6x+4=0$, i rozwiązawſzy ie podług §. 28. otrzymamy - - - $x=\sqrt[3]{(—2+2\sqrt{—1})}+\sqrt{(—2—2\sqrt{—1})}$, chcąc wiedzieć czyli drugi członek tego zrównania ieſt zupełną potęgą trzecią, i wynaleśdź iego pierwiaſtek; równam go s funkcyą $A±\sqrt{B}$, będzie więc $A=—2$, $\sqrt{B}=2\sqrt{—1}$ - - $A^2=4$, $B=—4$ $A^2—B=8$, którego pierwiaſtek $\sqrt[3]{(A^2—B)}=2=n$: kładę tę wartość za n w zrównanie warunkowe (L), i ſtaie ſię - - $4p^3—6p+2=0$. które ieſt rozdzielne przez $p—1=0$: więc $p=1$, $q=p^2—n=—1$, a zatem pierwiaſtek $p+\sqrt{q}=\sqrt[3]{(—2+2\sqrt{—1})}=1+\sqrt{—1}$. Tym ſpoſobem znaydziemy że $\sqrt[3]{(—2—2\sqrt{—1})}=1—\sqrt{—1}$; przeto $x=1+\sqrt{—1}+1—\sqrt{—1}=2$: rozdzieliwſzy zrównanie podane przez $x—2$, zniżemy ie o ieden ſtopień $x^2+2x—2=0$, którego pierwiaſtki rzetelne ſą $x=—1+\sqrt{3}$, - - $x=—1—\sqrt{3}$. Zrównanie więc 3go ſtopnia chociaż będzie w przypadku nieprzywiedlnym, może iednak mieć pierwiaſtki wyrażone ſpoſobem ſkończonym, ale tylko w ten czas, kiedy iego wartości ſą zupełnemi potęgami trzeciemi, co będąc tylko przypadkiem ſzczególnym i rzadkim, dowodzi ieſzcze niedoſkonałość prawideł, które nam w tey mierze ſłużą.

§. XXXI.

Ogólny ſpoſob rozeznania pierwiaſtków uroionych w zrównaniu.

Doſzedłſzy wyrazu ogólnego pierwiaſtków uroionych w zrównaniu lub funkcyi, wypada nam tu bardzo porządne iego użycie, ſłużące do rozeznania czyli zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia ma pierwiaſtki uroione lub nie? każdy bowiem dotąd ſtopień zrównania potrzebował od nas ſzczególnych ſpoſobów na roſpoznanie pierwiáſtków rzetelnych lub uroionych któreśmy dopiero rozwiązawſzy zrównanie, wyciągali. Maiac zaś wyráz ogólny zrównaniá iakiegokolwiek ſtopnia $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+rx^{m-3}+$ i t. d. $+k=0$, i wyráz ogólny pierwiáſtku uroionego $x-a-b\sqrt{-1}=0$, możemy z dwóch tych ogólnych wyrazów wyciągnąć trzeci, który będzie ſame pierwiáſtki uroione w zrównaniu oznaczał. Trzymáymy ſię tylko w tém dociekaniu drogi Analityczney, która nas iuż do tak wielu prawd ſzczęśliwie przywiodła; to ieſt: uważaymy rzecz nieznaną iak gdyby była znana: a wiążąc warunki pytaniá z ogolnémi początkami ſtaráymy ſię przyiśdź do proſtych zrównań i ſtóſunków, s którychby wypaśdź mogły wartości rzeczy nieznanych.

Każdy pierwiáſtek uroiony w zrównaniu wyráżá ſię przez $x-a-b\sqrt{-1}=0$, tak iako każdy mnożnik uroiony w funkcyi przez $x-a-b\sqrt{-1}$; ale że w tym wyrazie b koniecznie powinno bydź ilością lub funkcyą rzetelną; albo będąc uroionem, nie powinno bydź rozdzielne przez $\sqrt{-1}$: albowiem termin $b\sqrt{-1}$ nie mógł powſtać tylko z zrównania rozwiązanego, które zawierało b z wykładnikiem parzyſtym, n. p. b^2. To b^2 albo ieſt ſamo rzetelnem albo uroionem; w pierwſzym przypadku dáymy że wartości rożne b^2 ſą m, m' i t. d. tak dalece że $b=\sqrt{m}$, $b=\sqrt{m'}$, czyli $b=\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-1}}$, $b=\frac{\sqrt{-m'}}{\sqrt{-1}}$; wyráz ogólny pierwiáſtku uroionego daie $x=a+b\sqrt{-1}$, czyli $x=a+\sqrt{-m}$, $x=a+\sqrt{-m'}$, gdzie widzémy, że potrzeba, aby $-m$, $-m'$ były koniecznie dodatné ieżeli x má bydź rzetelnem, to ieſt potrzeba aby b było funkcyą uroioną: i przeciwnie żeby x było uroionem, potrzeba aby $-m$, $-m'$ było odiemnem to ieſt, aby b było rzetelném. Ieżeli zaś ſamo b^2 ieſt uroionem, n. p. $b^2=\frac{m}{\sqrt{-1}}$, $b=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{-1}}$, $x=a+\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt[4]{-1}}$, żeby więc x było uroionem w ten czas, kiedy b ieſt także uroionem, potrzeba aby b nie było całkiem rozdzielne przez $\sqrt{-1}$.

Pierwiaſtki rzetelne lub uroione w zrównaniu ſą to wartości rzetelne lub uroione na x, te zaś wartości x zawiſły od wartości b, idzie za tem, że chcąc ſię dowiedzieć czyli zrównanie podane ma pierwiaſtki uroione lub nie? należy w nie za x i iego potęgi włożyć wartość uroioną $x=a+b\sqrt{-1}$; a tak zamieniwſzy zrównanie podane na inne między a, b, i ilościami znanemi; należy roſtrząſnąć wſzyſtkie stąd powſtać mogące wartości na b, s tych ſądzić o wartościach x, a zatem o pierwiaſtkach zrównania podanego. Ale a, b, ſtaią ſię ilościami nieznanemi wprowadzonemi na mieyſce x, s kądże ich oznaczyć wartości lub związek? Chcąc na to odpowiedzieć uważmy, że kładąc w zrównanie podane za x, $a+b\sqrt{-1}$, przerobiemy ie na inne takie, w ktorem będą terminy rzetelne i uroione; aże zrównanie przerobione iedno bydź powinno s podanem; wſzyſtkie terminy uroione należy zniſzczyć, to ieſt uczynić zbiór tych wſzyſtkich, które ſą rozmnożone przez $\sqrt{-1}$, równy zero. A tak otrzymamy dwa zrównania, które nazwiemy *Wypadkowemi:* z nich iedno ſłużyć będzie na oznaczenie a, drugie na b. Aże pierwiaſtki rzetelne lub uroione w zrównaniu zawiſły od pewnych wartości i ſtóſunków ilości znanych; potrzeba nam z zrównań wypadkowych prócz a, b, wyciągnąć związek między ilościami znanemi na pierwiaſtki uroione. Nadawſzy więc podług upodobania pewną iaka wartość na a, wyciągniemy z iednego zrównania wypadkowego odpówiadaiącą wartość na b; te zaś dwie wartości włożywſzy w drugie zrównanie wypadkowe, odkryiemy związek między ilościami znanemi wyrażaiący potrzebne warunki, aby zrównanie podane miało pierwiaſtki uroione.

Takowe warunki w ilościach znanych moglibyśmy otrzymać przez wartość na a, b wyciągnioną z związku zawartego w zrównaniach wypádkowych; ale na to trzebaby nám rozwiązać obydwa te zrównaniá, przez co dociekaniá naſze ſkończyłyby ſię na tych tylko zrównaniach, któré teraz ieſteśmy w ſtanie rozwiązać. Trzeba nám więc przeſtać raczey na pierwſzym ſpoſobie iako rozległeyſzym i niezawiſłym od rozwiązaniá zrównań. Zebyśmy tem mocniey uczuli iego użycie, nie zgubmy tego z myśli, że kiedy z zrównań wypádkowych otrzymamy na *b* wartość rzetelną; zrównanie podané będzie miało pierwiaſtki uroioné: kiedy zaś *b* będzie uroionem; zrównanie zamyká pierwiaſtki rzetelné. Wyſtawmy ſobie teráz,, że zrównaniá wypádkowé nie tylko nas nauczą kiedy *b* ieſt rzetelnem lub uroionem, ale nám nawet oznaczą moment, kiedy przechodzi z wartości rzetelney na uroioną lub przeciwnie; oddzieliwſzy tem przeyściem klaſsę pierwiaſtków rzetelnych od klaſsy uroionych, rozwiązanie zrównaniá byłoby nám w tym razie niepotrzebné, bo ſama uwága nad wſpółczynnikami nauczyłaby nás o gatunku pierwiaſtków. Te wſzyſtkié rozumowaniá daleko ſię oczywiściey pokażą w rachunku. Niech będzie zrównanie podané, s którego dlá łatwieyſzego rachunku pozbyliśmy ſię *2go* terminu:

$$x^m+px^{m-2}+qx^{m-3}+rx^{m-4}+ \text{ i t. d. } +k=o.$$

kładąc w niém za x, $a+b\sqrt{-1}$; wypadnie

$$x^m=a^m+ma^{m-1}b\sqrt{-1}-m\frac{(m-1)}{2}a^{m-1}b^2-m.$$

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2.\quad 3}a^{m-3}b^3\sqrt{-1}+ \text{ i t. d. } \pm b^m\sqrt{(-1)^m}$$

$$+px^{m-2}=pa^{m-2}+p\frac{(m-2)}{1}a^{m-3}b\sqrt{-1}-p\frac{(m-2)}{1.}$$

$$\frac{(m-3)}{2}a^{m-4}b^2-p\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\quad 2.\quad 3.}a^{m-5}b^2\sqrt{-1}$$

$$+ \text{ i t. d. } \quad . \ . \ . \ . \quad \pm pb^{m-2}\sqrt{(-1)^{m-2}}$$

$$+qx^{m-3}=qa^{m-3}+ \text{ i t. d. } \quad . \ . \quad \pm qb^{m-3}\sqrt{(-1)^{m-3}}$$

$$+ \text{ i t. d. } +k=o.$$

Wykładnik m bydź może párzyſty albo niepárzyſty. Ieżeli ieſt párzyſtym, $\sqrt{(-1)^{m}}=\pm 1$ to ſamo mowić należy o $\sqrt{(-1)^{m-2}}$, $\sqrt{(-1)^{m-4}}$ i t.d. naywyżſza więc potęga b mnożona przez $\sqrt{-1}$ w x^{m}, będzie b^{m-1}; w x^{m-2}, b^{m-3}; i t. d. S tych wſzyſtkich terminów powſtanie iedno zrównanie warunkowe (A), które zamykaiąc we wſzyſtkich terminach b, będzie mogło przez nie bydź rozdzielone, a przeto potęgi b w tem zrównaniu będą b^{m-2}, b^{m-4}, b^{m-6}, i t.d. Zrównanie więc ſłużące na oznaczenie b będzie o dwa ſtopnie niżſze od podanego, i ieżeli ieſzcze ſzukać będziemy podwóynych wartości na b, dla tego że pierwiaſtki uroione ſą zawſze w liczbie párzyſtey, trudność naſza w ſzukaniu b będzie ſtopnia $\frac{m-2}{2}$. W drugiem zrównaniu warunkowem, które nazywam (B) będą potęgi b: b^{m}, b^{m-2}, b^{m-4} i t. d. a zatem trudność ſtopnia $\frac{m}{2}$.

Ieżeli zaś m ieſt niepárzyſte $\sqrt{(-1)^{m}}$, $\sqrt{(-1)^{m-2}}$, $\sqrt{(-1)^{m-4}}$, i t. d. będąc równe $\pm 1.\sqrt{-1}$; ilości zaś $\sqrt{(-1)^{m-3}}$, $\sqrt{(-1)^{m-5}}$, i t. d. $=\pm 1$. Zrównanie więc wypádkowe (A) będąc całe rozdzielne przez b będzie zawierało potęgi b^{m-1}, b^{m-3}, b^{m-5}, i t. d. i nie zniży ſię tylko o ieden ſtopień; w drugiem także zrównaniu warunkowem, b znaydować ſię będzie w potęgach b^{m-1}, b^{m-3} i t. d. a zatem trudność w obudwoch będzie iednego ſtopnia co do b. W pierwſzym i drugim przypádku b zawſze ſię znayduie w ſtopniu párzyſtym; co właśnie zgadza ſię z naturą pierwiaſtków uroionych. Przyſtóſóymy te wſzyſtkie uwagi do zrównań 3go ſtopnia: pozbywſzy ſię 2go terminu, zrównanie podane będzie: $x^3+px+q=0$. kładąc za x, $a+b\sqrt{-1}$; przerobiemy ie na

Stóſowanie po przedzaiącey teoryi do zrównań 3go ſtopnia.

$$\left.\begin{array}{ll} a^3+3a^2b\sqrt{-1} & \\ -3ab^2-b^3\sqrt{-1} & \\ +ap & +bp\sqrt{-1}. \\ +q & \end{array}\right\}=0.$$

s którego powſtaią dwa zrównania wypádkowe:

(B)

(B) - - $a^3+(p-3b^2)a+q=o$, (*A*) - - $b^2-3a^2-p=o$. włożywſzy za b^2 wartość z (*A*) w zrównanie (*B*); otrzymamy zrównanie iednego ſtopnia s podanem - - (*C*) $2a(4a^2+p)-q=o$: od rozwiązania iego, zawiſło rozwiązanie zrównania podanego, i dla tego nazwać ie możemy *Rozwięzuiącem.*

Roſtrząśniymy teraz rożne wartości na b które wyniknąc mogą z różnych przypuſzczeń wciagnionych w zrównania wypadkowe. Naprzód (*A*) daie $b=\pm\sqrt{(3a^2+p)}$, uczyniwſzy $a=o$, wypada z (*B*) $q=o$. $b=\pm\sqrt{p}$. Ieżeli p ieſt dodatnem, b będzie koniecznie rzetelnem, i zrównanie podane będzie mieć dwa pierwiaſtki uroione, co ſię zgadza z doświadczeniem rachunku: ieżeli zaś p będzie odiemnem, b będzie uroionem, i zrównanie podane ma pierwiaſtki rzetelne.

Niech a nie będzie zero; $b=\sqrt{(3a^2+p)}$: ieżeli p ieſt dodatnem, iakiemkolwiek będzie a zawſze b będzie rzetelnem, i zrównanie podane będzie miało wſzyſtkie pierwiaſtki uroione; wſzyſtkie bowiem kombinacye między a, b, ogarniaią w ſobie wſzyſtkie kombinacye między p, q; więc iakikolwiek zaydzie ſtóſunek między p, q, byleby p było dodatnem, zrównanie podane będzie miało koniecznie dwa pierwiaſtki uroione.

Ieżeli p ieſt odiemnem, b nie koniecznie ieſt rzetelnem, i zrównanie nie koniecznie ma pierwiaſtki uroione: zależy to bowiem od ſtóſunku między p i $3a^2$; to ieſt: ieżeli $3a^2>p$, zrównanie ma dwa pierwiaſtki uroione; ieżeli zaś $3a^2<p$; b ieſt uroionem, i zrównanie ma pierwiaſtki rzetelne. Kiedy zaś $3a^2=-p$, czyli $a=\sqrt{-\frac{p}{3}}$; $b=o$ i zrównanie ieſt w ſamem przeyściu s pierwiaſtków rzetelnych na uroione lub przeciwnie: włożywſzy za a iego wartość $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ w zrównanie warunkowe (*B*), otrzymamy:

$\frac{2p}{3}$

$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q=o$, czyli znióſłſzy znak pierwiáſtkowy

$$(D)\ \text{- -}\ 4p^3+27q^2=o.$$

Zrównanie daiące nam związek między ilościami znanémi p, q, w ten czas, kiedy dwa pierwiaſtki przechodzą z uroionych na rzetelne, lub z rzetelnych na uroioné. W tym momencie $b=o$, $x+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ ieſt mnożnikiem zrównania.

Ale na cóż nam ſię zda wiedzieć warunek przeyſcia pierwiáſtków z iednego rodzaiu na drugi, ieżeli ten warunek nie nauczy nas o ſtanie pierwiaſtków w innych przypadkach. Szukaymy czyli funkcya $4p^3+27q^2$ w (D) wchodząca, nie odkryie nam iakiey cechy na pierwiaſtki zrównania. Na ten koniec trzeba znowu b wrócić dawną wartość $b=\sqrt{(3a^2+p)}$: niech będzie $3a^2+p=y$, - - $3a^2+p-y=o$ (E). gdzie nam trzeba pamiętać, że kiedy zrównanie ma pierwiaſtki uroione, y koniecznie bydź powinno dodatnem: że y ieſt iſtotnie odiemnem, kiedy zrównanie ma wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne. Ieſt zaś y dodatnem lub odiemnem podług iuż wyłożonego ſtanu i ſtóſunku między a, i p, s którego wynika ſtóſunek ilości znanych p, q, zawarty w zrównaniu wypadkowem (B). Kombinuiąc zrównania (A), (B), otrzymaliśmy byli (C) - - - $2a(4a^2+p)-q=o$ które wynióſłſzy do drugiey potęgi, wypada: $4a^2(4a^2+p)^2-q^2=o$, w to teraz kładąc za a^2 wartość wyciągnioną z (E) to ieſt: $a^2=\frac{y-p}{3}$, $4a^2+p=\frac{4y-p}{3}$, otrzymamy: $\frac{(4y-4p)(4y-p)^2}{3\cdot\ 3^2}-q^2=o$. czyli wykonawſzy mnożenie: $4y(4y-3p)^2-4p^3-27q^2=o$ (F). S tego oſtatniego mamy: $4p^3+27q^2=4y(4y-3p)^2$, gdzie widzemy, że iakiemkolwiek ieſt y dodatnem lub odiemnem; $(4y-3p)^2$ zawſze ieſt s ſwey natury dodatnem, a zatem znak $4p^3+27q^2$ zawiſł iedynie od mnożnika $4y$: ieżeli y ieſt dodatnem, $4p^3+27q^2$ będzie także koniecznie dodatnem; lecz kiedy y ieſt dodatnem, b ieſt rzetelnem i zrównanie podane $3go$ ſtopnia ma dwa pierwiaſtki uroione podług (*E*). *Powtóre* y będąc odiemnem, w zrównaniu (*F*) - - $(4y-3p)^2$ będzie dodatnem, lecz $4p^3+27q^2$ ſtaie ſię odiemnem. Aże kiedy y ieſt odiemnem, b ſtaie ſię uroionem i zrównanie $3go$ ſtopnia ma wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne; więc zrównanie $3go$ ſtopnia ma koniecznie wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne, kiedy $4p^3+27q^2$ ieſt odiemnem. Owóż prawdziwe znamie pierwiaſtków rzetelnych lub uroionych w zrównaniu iakiemkolwiek $3go$ ſtopnia! $4p^3+27q^2$ będąc odiemne, pokazuie pierwiaſtki rzetelne; będąc zaś dodatne wytyka pierwiaſtki uroione: będąc zero, oznacza moment przeyścia pierwiaſtków rzetelnych na uroione, lub uroionych na rzetelne. Winniśmy tę tak piękną prawdę s całą teoryą zacnemu dziś Geometrze Imci P. *du Sejour* Konſyliarzowi Parlamentu Paryzkiego, który ią podawſzy w pamiętnikach Akademii na Rok 1772, barzo dowcipnie do linii krzywych przyſtóſował. Spoſób atoli którego w tem dociekaniu użył, iuż był dawniey od I.P *Eulera* wytknięty, iako będziem mieli ſpoſobność przekonać ſię o tem niżey.

Ułatwia ſię trudność zachodząca w zrównaniach wypádkowych.

Nie opuſzczaymy dalſzych uwag, które nam podać może zrównanie (*F*). Położywſzy w niem $4p^3+27q^2=0$, dwa mnożniki drugiego członka (*F*) daią $y=0$, albo $4y-3p=0$. Ponieważ zaś $4p^3+27q^2=0$ oznacza czas przeyścia pierwiaſtków z iednego rodzaiu do drugiego, kiedy bydź powinno $b=0$, temu przeyściu zupełnie odpowiada pierwſzy mnożnik $y=0$; ale $4p^3+27q^2$ może bydź także zero, kiedy $4y-3p=0$, czyli $y=\frac{3p}{4}$, pod tén czás b nie będzie zero, ale $=\pm\sqrt{\frac{3p}{4}}$, $a=\sqrt{\frac{-p}{12}}$, iako nás uczą zrównania (*E*), (*A*): co nám pokazuie, iż w pe-

wnych

wnych przypádkach $4p^3+27q^2$ może ſię ſtać zero, chociaż pierwiaſtki nie będą w momencie przeyścia z rzetelnych na uroioné lub przeciwnie. Do czegóż więc ſtóſować ten przypádek w zrównaniu, i iak zgodzić s ſobą te tak dziwáczné wypádki? Imć P. *du Sejour* barzo nám to dowcipnie tłómaczy:

Niech m, m', m'', znaczą trzy pierwiáſtki zrównania *3go* ſtopnia, s których każdy wyráża ſię przez $x-a-b\sqrt{-1}=0$, zrównanie wypádkowé *(A)* nie oznacza nám s tych pierwiáſtków tylko dwa, które położywſzy $b=0$, ſtaią ſię obydwa równé, i pokazuią moment przeyścia z iednego rodzaiu do drugiego; więc pierwſza prawda która nám ſię tu pokazuie ieſt: iż pierwiáſtki w ten czás tylko ſą w czáſie przeyścia z rzetelnych na uroioné lub przeciwnie, kiedy dwa pierwiáſtki dané przez zrównanie *2go* ſtopnia *(A)* ſą równé, czyli, kiedy dwa pierwiáſtki równé należą do iednego zrównania i ſą że tak rzekę tey ſamey páry.

Ale $4p^3+27q^2$ ieſt zawſze zero, ilé razy dwa pierwiáſtki w zrównaniu *3go* ſtopnia ſą równé: mogą zaś bydź równé albo te, które należą do tey ſamey páry i ſą dané przez zrównanie *(A)*; albo te s których ieden tylko należy do zrównania *2go* ſtopnia, a drugi nie: co żebyśmy łatwiey poięli, wyſtawmy ſobie, że dwa pierwiáſtki m, m' ſą tey ſamey páry dané obydwa przez zrównanie *2go* ſtopnia, które ſtawſzy ſię równé, czynią $4p^3+27q^2=0$, i oznáczaią przeyście pierwiáſtków w zrównaniu podanem z iednego rodzaiu do drugiego. Ale będąc raz $m=m'$, po tem przeyściu té dwa pierwiáſtki ſtaią ſię rzetelné i nierówné; w tey nierówności może ſię przytrafić, że n. p. $m=m''$, albo że $m'=m''$, to ieſt, że ieden s tey páry pierwiáſtków ſtanie ſię równy trzeciemu, pod ten czás $4p^3+27q^2$, będzie zero, ale pierwiáſtki zrównania podanego nie będą dla tego w momencie przeyścia, że dwa z nich nie tey ſamey páry, i nie wyciągnioné s tego ſamego zrównania, ſtały ſię równé. Należy więc podług tego tłômaczenia warunek $4p^3+27q^2=0$ odnoſić do dwóch przypadków, to ieſt, kiedy dwa pierwiaſtki teyże ſamey pary i wypadłe z iednego zrównania *2go* ſtopnia ſtana ſię równe; i na ten czas w zrównaniu *3go* ſtopnia pokazuią moment przechodu pierwiaſtków z iednego rodzaiu do drugiego.

Powtóré: kiedy dwa takié pierwiaſtki ſtaną ſię równé, które nie wypadły z zrównania *2go* ſtopnia, i nie ſą teyże ſamey pary; i na ten czas $4p^3+27q^2=0$ nie pokazuie przechodu pierwiaſtków z iednego rodzaiu do drugiego.

Stáwmy ſobie na koniec zrównanie podané $x^3+px+q=0$, którego pierwiaſtki ſą pewnemi funkcyami p, q; przy niem wſzyſtkie inne zrównania *(A)*, *(B)*, *(C)*, *(E)*, *(F)*: a położywſzy w tem oſtatniem $4p^3+27q^2=z$, odmieniemy ie na $4y(4y-3p)^2-z=0$, to zrównanie wyraża nam wſzyſtkie ſtoſunki i związki, które zachodzić mogą między wartościami ilości znanych p, q; i między odpowiadaiącemi im wypadkami na pierwiaſtki rzetelne lub uroione zrównania podanego; wiemy bowiem że pierwiaſtki rzetelné lub uroioné w zrównaniu podanem zawiſły od pewnych wartości i ſtóſunków p, q, które wſzyſtkié razem wyraża zrównanie $4y(4y-3p)^2-z=0$. To albowiem zrównanie wyraża związek między z, y; zrównanie *(E)* daie związek między y, a; zrównanie *(C)* między a, p, q; więc kombinuiąc ie s sobą, wypadnie z *(F)* ogólny ſtóſunek między p, q, z. Aże z ieſt znamieniem pierwiaſtków rzetelnych lub uroionych podług znaku dodatnego lub odiemnego; więc *(F)* zamyka wſzyſtkie ſtóſunki i związki między ilościami znanemi w zrównaniu podanem, i między odpowiadaiącym im rodzaiem pierwiaſtków.

Teorya ta ſtóſowana do zrówań *4go* ſtopnia odkryłaby nam zapewne ważne iakie prawdy i uwagi, ale że ten rachunek barzoby nas rosciągnął i odwiódł od tego, naczymeśmy ſtanęli: każdy z uwag nad *3cim* ſtopniem poznać powinien ducha tey teoryi, oraz ſpoſób obeyścia ſię z nią w iakimkolwiek ſtopniu wyżſzym. Zoſtawiemy to docieczenie prywatnemu każdego dochodzeniu, przyſtępuiąc iuż do nowego rachunku który nam ſię w ciągu naſzych badań pokazał.

KONIEC PIERWSZEY CZĘSCI.

CZĘSC DRUGA

TŁOMACZĄCA NATURĘ I WŁASNOSCI *FUNKCYI PRZESTĘPNYCH,* ORAZ SPOSOBY ONYCH WYRAZANIA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

Rozbieraią ſię Funkcye na Szeregi: wykładaią ſię własności Szeregów zwrotnych i ſpoſób wynaydowania ogólnego ich wyrazu, s przyſtoſowaniém do zrównań.

§. XXXII.

Porównanie funkcyi Algebraicznych z przeſtępnemi.

Odbyliśmy ſobie w Pierwſzéy Części to, co do zrównań i odpowiadaiących im funkcyi należy, idąc tak daleko w tych badaniach, iak daleko w nich rozum ludzki poſtąpił. Ale ponieważ zawſze z zrównań dochodziliśmy nowych gatunków i własności funkcyi, nie zaſtanawialiśmy ſię tam, tylko nad takiemi funkcyami, w które wprowadziwſzy związek mogliśmy s każdego wartość iakieykolwiek ilości, wyrazić przez inné w zrównaniu zawarte. I tak n. p. maiąc zrównanie $A+B+C+D=o$, gdzie A, B, C, D, znaczą ilości znané i nieznané zmięſzane razem, mogliśmy z związku w tem zrównaniu zamkniętégo wyrazić iakąkolwiek ilość przez inné, nie potrzebuiąc do tego, tylko tych działań ktoreśmy tam doſtrzegli w funkcyach, to ieſt: dodawania, odciągania, mnożenia, dzielenia, wynoſzenia do potęg, i wyciągania pierwiaſtków; do czego przydadź należy rozwiązanie zrównań. Wſzyſtkie początki któreśmy w tych dociekaniach mięſzali, nie ſłużyły nam tylko za pomoc do wprowadzenia tego lub owego działania w naſzé rachunki, tak dalece: że lubo przeſzkody te ſame które zatrzymały wſzyſtkich Geometrów, odięły nam ſpoſoby rozwiązania zrównań ſtopni wyżſzych nad czwarty; iednakowóż nie mogły w nas oſłabić tego przekonania, że gdyby prawidła naſze na trzeci i czwarty ſtopień były doſkonalſze, przyſzlibyśmy do wynalezienia pierwiaſtków wyżſzych ieſzcze ſtopni, i że w tem wynaydowaniu nie potrzebaby nam innych działań prócz tych, które nám w ſtopniach niżſzych ſłużyły. Właſność bowiem ogólna zrównań pod §. 20. i ſame przeſzkody na końcu pierwſzey części wytknięte, dały nám oczywiście poznáć wzáiemną záwiłość niżſzych ſtopni od wyżſzych, i przeciwnie; a zatém oſtrzegły nás, że działania byłyby tego ſamego rodzaiu, byleby dokładniey mogły bydź przyſtóſowane. Ieżeli więc nie mogliśmy w zrównaniach *5go*, *6go* i dalſzych ſtopni wyrazić iakieykolwiek ilości przez inne; przypiſać to powinniśmy niedokładnym prawidłom; nie mámy zaś prawa wnosić potrzeby nowych działań prócz tych, któreśmy wymienili. A zatém zrównania iakichkolwiek ſtopni wyżſzych, iako i funkcye wielo-kſztáłtne, które im odpowiadaia, należą do tego ſamego rodzaiu ilości, któreśmy dotąd uważali. Takowe zrównania nazywaią ſię *Algebraiczne*, dla tego że wynalazek w nich dokładny i niewątpliwy iakieykolwiek ilości, záwiſł od działań Algebraicznych w pierwſzey części wyłożonych. Funkcye także mogące ſię zamienić i ogarnąć w takowych zrównaniach, wzięły imie *Algebraicznych*. Ieżeli więc trafiemy na taki rodzáy funkcyi, które potrzebować będą innych cale działań, i na których traktowanie nawetby nám nayogólnieyſze zrównań Algebraicznych prawidła nie mogły pomóc;, umieſzczemy ie w inney klaſsie zrównań i funkcyi, które nazwiemy PRZESTĘPNEMI (*Tranſcendentes*).

Działania przywiązane do pewnych kondycyi, iakiem było dzielenie, wyciąganie pierwiaſtków, przywiodły nás do wyrazu pewnych funkcyi przez paſmo terminów nigdy ſię nie maiących ſkończyć. Przypadek także nieprzywiedlny *3go* ſtopnia wciągnął nás w podobny rodzáy rachunku. Gdyby wynalazek iakiey rzeczy nieznaney z natury ſwoiey zawiſł od takiego nieſkończonego wyrazu, przyzná każdy, że na odkrycie takiey rzeczy dokładne, wſzyſtkie prawidła naydoſkonalſze Algebraicznych zrównań nie mogłyby nám wyſtarczyć ani pomóc. Zrównanie bowiem

tego

tego rodzaiu maiąc nieſkończoną liczbę pierwiaſtków, nie mogłoby bydź rozwiązane ſpoſobem przywiązanym do iakieykolwiek, ale zawſze ſkończoney pierwiaſtków liczby, iaką zrównania Algebraiczne wyrażać zwykły: a gdybyśmy nawet potrafili wartość iedney ilości przez ſzereg nieſkończony wyrazić n. p. $z = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ i t. d. oprócz tego, żeby ten wyraz nie mógł nam nigdy odkryć wartości zupełney z, ma ieſzcze i tę niedoſkonałość, że chcąc x wyrazić przez z i inne ilości w zrównanie wchodzące, nie moglibyśmy nigdy przyiśdź do tego przez ſpoſoby zrównaniom Algebraicznym właściwe, a zatem nie potrafilibyśmy z związku podanego wyciągnąć zupełnie wartości iedney iakieykolwiek ilości przez inne. Ale możemyż s tego wnieść, że funkcye nierozdzielne zupełnie, funkcye pierwiaſtkowe, i zrównania 3go ſtopnia nie ſą funkcyami Algebraicznemi? Bynaymniey: funkcye bowiem nierozdzielne maią ſwóy wyraz ułomkowy ſkończony, który zamieniony lub wciągniony w zrównanie kładzie nas w ſtanie wynalezienia iakieykolwiek ilości zupełnie, za pomocą działań Algebraicznych; i nie zamienia ſię na ſzereg nieſkończony, tylko kiedy ią chcemy wyrazić przez różne potęgi ilości nieznaney wchodzącey w mianownika. Takowy wyraz ciągnąc ſię bez końca daie nam poznać, że funkcya nie maiąca potrzebney kondycyi do zupełney podzielności, może przeyiśdź przez wſzyſtkie potęgi ilości nieznaney, i przez wſzyſtkie terminy poſtępu Geometrycznego, zoſtaiąc zawſze niepodzielną: i że wſzyſtkie Algebraiczne działania wyczerpawſzy, nie potrafiemy iey natury odmienić. Funkcye także pierwiaſtkowe niewymierne rozbieraiąc ſię na ſzeregi nieſkończone, nie przeſtaią bydź Algebraicznemi; bo maią ſwóy wyraz pierwiaſtkowy ſkończony, przy którym zamieniwſzy ie na zrównanie, możemy w nich ilość iakąkolwiek wyrazic przez inne ſpoſobem zupełnym, oſwobodziwſzy ie wprzód od znaku pierwiaſtkowego podług

§. 25. Ich wyráz nieſkończony pokazuie tylko to, co w funkcyach niepodzielnych, to ieſt: że będąc z natury ſwey niezupełnemi potęgami, nie potrafiémy ich przez wſzyſtkié gatunki działań algebraicznych na potęgi zupełné przerobić. Zrównania nakoniec 3go ſtopnia przyprowadziły nás do ſzeregu nieſkończonego przez niedoſkonałość prawideł do tego użytych. Nie można bowiem tego dowieśdź, że zrównanie 3go ſtopnia przez naturę ſwoię nie może wydadź pierwiaſtków w wyrazie ſkończonym, kiedy té ſą wſzyſtkié rzetelné; widzieliśmy bowiem przypadki ſzczególné, które wyſtawiaiąc nám pierwiaſtki pod wyrazém uroionym i niewymiernym, dały ſię przecię przywieśdź do wyrazu rzetelnego i ſkończonego.

Wyciągaią ſię zadaniá zachodzić mogące w teoryi ſzeregów, które nás zatrudnić maią.

Kiedy zaś po użyciu wſzyſtkich nám dotąd zoſtawionych ſpoſobów nie możemy przyiśdź do pierwiaſtków ſkończonych zrównaniá, przeſtać na ten czás muſzémy na pierwiaſtkach bliſkich prawdy wyciągnionych s pierwſzych terminów ſzeregu, które ſtarać ſię winniśmy iak naybarziey uczynić maleiącemi, aby to; co opuſzczámy, małością ſwoią nie rodziło znaczney odmiany w wypádkach rachunku. Chcąc zaś ſądzić o wártości opuſzczonych terminów, potrzeba wiedzieć zachodzącé w ich ciągu prawo przywiązané do gatunku i wzoru funkcyi; przy którém maiąc wiadomą wártość ilości w terminy wchodzących, poznámy łatwo ſtopnie ich wzroſtu lub ubywaniá. Te ieſzcze doſtrzeżoné prawa naſtępſtwa ſłużą nám do wynalezieniá funkcyi ſkończoney, która ſię na taki ſzereg rozbierá, kiedy ta ieſt nieznaná. Nim nám ſię té myśli w więkſzém pokażą świetle powinny nám teraz dadź uczuć, że puściwſzy mimo ſiebie innego rodzaiu funkcye, których ieſzcze nie známy, ſamé funkcye Algebraiczné wyciągaią po nás dokładnego poznaniá ſzeregów nieſkończonych. W tém poznaniu zachodzą trzy zadaniá do których rozwiązaniá cała naſzá zmierzać bedzie uwaga; to ieſt: maiąc funkcyą iakąkolwiek Algebraiczną mogącą ſię rozebrać na ſzereg nieſkończony, wynaleśdź ſpoſób łatwy i ogólny na ten rozbiór: *powtóre:* maiac funkcyą rozebraną na ſzereg nieſkończony, wynaleśdź prawo, podług którego układaią ſię terminy bez końca ſię ciagnące: *potrzecie*. Maiąc ſzereg nieſkończony i prawo iego poſtępu, odkryć funkcyą, która ten ſzereg s ſiebie wydała. Zatrudniymy ſię rozwiązaniem tych zadań, które ſkładać będą całą teoryą ſzeregów nieſkończonych, abyśmy ſię nauczyli w wſzelkich przypadkach obchodzić nie tylko s funkcyami Algebraicznémi, ale nawet i s funkcyami innego rodzaiu ieżeli nam ſię pokażą, i ieżeli ich wyraz zawiśnie od ſzeregów.

Ponieważ zaś w teraźnieyſzych badaniach wynieśliśmy ſię iuż do rozległeyſzey ogólności, uważaiąc funkcye niezawiſſe od żadnego pytania ſzczególnego, muſzemy upowſzechnić nazwiſko i podział ilości w funkcye wchodzących, abyśmy ſię zbliżali co raz barziey do ięzyka wyżſzych matematycznych nauk. W piérwſzey Części dzieliliśmy ilosci na znane i nieznane, dla tego, że w teoryi zrównań ſzło nam zawſze o wynalezienie pierwiaſtków, czyli wyrażenie ilości niewiadomcy przez wiadome; do zrównań ſtóſuiąc funkcye, zachowaliśmy w nich to ſamo nazwiſko. Ze zaś uważać nam przyidzie funkcye przez się, nie maiąc względu na wartość ilości nieznaney, dzielić ieſzcze będziemy ilości na ODMIENNE (*variabiles*) i STATECZNE (*conſtantes*). Przez pierwſze rozumieć będziémy ilości odmieniaiące ſwoię wartość iakimkolwiek ſpoſobém, to ieſt ſpoſobne do przyięcia wſzyſtkich iakie ſię tylko wymyślić mogą wartości; przez drugie będziemy rozumieć ilości dochowuiące w całym ciagu rachunku raz nadaney wartości. Ilości odmienne znaczyć będziemy przez oſtatnie litery alfabetu x, y, z, i t. d. tak iakeśmy znaczyli ilości niewiadome; ilości zaś ſtateczne tak, iak ilości wiadome przez litery alfabetu pierwſze a, b, c, terminu ſzeregowego zawiſt od liczby $n-1$ poprzedzaiących. Ponieważ więc w ſzeregu s funkcyi ułomkowey powſtaiącym, każdy wſpół-czynnik ieſt funkcyą kilku poprzedzaiących, ſzeregi takowe nazywaią ſię ZWROTNEMI *(Series Recurrentes)*. dla tego, że chcąc oznaczyć którego z nich, wracać ſię muſzemy do poprzedzaiacych go.

Potrzecie. Terminy poprzedzaiace przez które wyraża ſię iakikolwiek wſpoł-czynnik ſzeregowy, ſą mnożone przez wſpółczynniki mianownika ułomku; od wſpółczynników więc mianownika zawiſt cały ſtóſunek i związek terminów ſzeregowych co do ich wartości i liczby: i dla tego te wſpół-czynniki nazywać odtąd będziemy z Angielſkim Geometrą *Moivre*, STOPNIAMI STOSUNKU *(Scala relationis)*. Ieżeli mianownik ułomku ieſt $p+qz$, w ſzeregu stąd powſtaiącym wſpół-czynnik Q terminu iakiegokolwiek oznacza ſię przez zrównanie: $pQ+qP=o$; ieżeli $p+qz+rz^2$ ieſt mianownikiem ułomku, w iego ſzeregu wſpółczynnik Q zawiſt od zrównania $pQ+qP+rO=o$. i t. d. gdzie litery p, q, r, i t. d. ſą tem, co my nazywamy ſtopniami ſtóſunku.

Poczwarte: Oznaczaiac z zrównań (α), (β), (γ), (δ), i t. d. wſpół-czynniki iakiegokolwiek s terminów ſzeregowych, przez poprzedzaiące, przypada wſzyſtkie dzielić przez p, czyli przez termin całki wiadomy mianownika ułomku; więc w przypadku kiedy ta ilość byłaby zero, wſzyſtkie terminy ſtaną ſię nieſkończone, i pokazuią nieprzyzwoitość zaſzłą w rachunku. Zatrzymaymy ſię teraz nad ſpoſobem rozbierania takowych funkcyi.

§. XXXIII.

Rozwięzuią ſię ſzczególne przypádki w ułomkach rodzących ſzeregi.

Mamy już ieden początek którego ſtatecznie używamy w ułatwieniu trudności wypadaiących s pewnych ſzczególnych przypadków wybaczaiących od teoryi ogólnych. Ten początek zależy na tem, ażeby roſtrząſnąć naprzód dla czego przypadek naſz

nie

nie zgadzá ſię z ogólnémi prawidłami: powtóre, przywieśdź go do takiego wyrazu, na iaki ſłużyły té ogólne prawidła. Tu n.p. wypadła nám nieprzyzwoitość zniſzczywſzy termin całki wiadomy, który wchodził w mianownika, cała więc przyczyna tey nieprzyzwoitości wynika z różnicy między wzorem pierwſzych przykładów $\frac{a+bz+cz^2+\text{ i t. d.}}{p+qz+rz^2+sz^3+\text{ i t.d.}}$ i przykładów teraźnieyſzych, które ſię wyrażaią przez $\frac{a+bz+cz^2+\text{ i t. d.}}{qz+rz^2+sz^3+\text{ i t. d.}}$, ale przywiódłſzy ten oſtatni do pierwſzego, wpadniemy znowu na takié przypádki którym ſłużyły prawidla iuż użyté. I tak rozebráwſzy mianownika oſtatniego wzoru na dwa mnożniki $z(q+rz+sz^2+\text{ i t.d.})$, złóżmy pierwſzy ułomek $\frac{a+bz+cz^2+\text{ i t. d.}}{q+rz+sz^2+tz^3+\text{ i t.d.}}$, który rozbierze ſię na ſzereg nieſkończony, przez té ſamé prawidła, które nám ſłużyły wyżey: ten ſzereg potém rozdzieliwſzy przéz z, wypadnie wártość ułomku podanego, to ieſt:

$$\frac{a+bz+\text{ i t. d.}}{z(q+rz+sz^2+\text{ i t.d.})} = \frac{A}{z}+B+Cz+Dz^2+Ez^3+Fz^4+$$

i t. d. Chcąc ieſzcze wyſtawić przypádek teraźnieyſzy pod ogólnieyſzym wzorém, uważáymy funkcyą

$$\frac{a+bz+cz^2+\text{ i t. d.}}{qz^m+rz^{m+1}+sz^{m+2}+\text{ i t. d.}} = \frac{a+bz+\text{ i t. d.}}{z^m(q+rz+sz^2+\text{ i t. d.})}$$

a ſzereg s tego oſtatniego wyrazu podług dopiero wyłożonégo działaniá wypadnie: $\frac{A}{z^m}+\frac{B}{z^{m-1}}+$ $\frac{C}{z^{m-2}}+\frac{D}{z^{n-3}}+\text{ i t d.} = \frac{a+bz+\text{ i t. d.}}{z^m(q+rz+sz^2+\text{ i t.d.})}$ przywiódłſzy takowé zrównanie do zero, każdy wſpółczynnik będzie zero, i na z nie przypadnie żadná wartość, podług prawd gruntowych, na których zaſadziliśmy rozbiór funkcyi ułomkowych na ſzeregi.

Zebyśmy nic nie opuścili cokolwiek do zupełności téy teoryi náleży, potrzeba nám przeyśdź przez wſzyſtkie wyrazy funkcyi ułomkowych; tych różnica wiemy że wypádá z różności mianownika; który iako wyráża naturę ułomku, tak razem ciągnie za ſobą prawo ſtóſunku między iakimkolwiek terminem i poprzedzaiącemi go. Wyſtawmy ſobie więc funkcye ułomkowe pod wſzelką iaka ſię tylko wymyślić może poſtacią; tych ſzukać nám potrzeba w różnych wyrazach mianownika. Wiemy s pierwſzey Części że funkcyi natura wypádá z natury mnożników, tak iako natura zrównania powſtaie z natury pierwiáſtków. Te mnożniki mogą bydź równe lub nierówne, rzetelne lub uroione. Nie przypáda nam tu ieſzcze użycie tego oſtatniego podziału, dla tego, że funkcye uważámy w całym ſwoim ſkładzie, wyrażaiąc ie przez ſzeregi. Ale pierwſzy podział należy iſtotnie do teraźnieyſzego zamiaru. Biorąc za mianownika funkcyą $p+qz+rz^2+$ i t. d. uważaliśmy go pod ogólnym barzo wyrazem, a zatem iako złożonego z mnożników nierównych iakichkolwiek: uſzczególniymy teraz naſzé myśli, i wyſtawmy ſobie mianownika z mnożnikami równemi, a tym ſpoſobem wypadną nám różné potegi w ułomku; to ieſt: $\frac{a+bz}{(1-pz)^2}$, - - $\frac{a+bz+cz^2}{(1-pz)^3}$, i ogólniéy $\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ \text{ i t. d.}}{(1-pz-qz^2+ \text{ i t. d.})^m}$; $\frac{a+bz+ \text{ i t. d.}}{(1-pz)^m}$.

Pierwſzy ułomek rozebráwſzy na ſzereg, otrzymámy:

$$\frac{a+bz}{(1-pz)^2}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+ \text{ i t. d. czyli}$$

$$\begin{array}{llllllll}
0=A & +B.z & +C.z^2 & +D.z^3 & +E.z^4 & +F.z^5 & + \text{ i t.d.} \\
-a & -2pA. & -2pB. & -2pC. & -2pD. & -2pE. & + \text{ i t.d.} \\
 & -b. & +p^2A. & +p^2B. & +p^2C. & +p^2D. & + \text{ i t.d.}
\end{array}$$

więc

wiec $A-a=0$, $B-2pA-b=0$,
$C-2pB+p^2A=0$, s których wypada $A=a$, $B=2pa+b$,
$D-2pC+p^2B=0$, $C=3p^2a+2pb$, $D=4p^3a+3p^2b$;
$E-3pD+p^2C=0$, $E=5p^4a+4p^3b$.
i t. d. a przeto funkcya podana:

$$\frac{a+bz}{(1-pz)^2}\begin{array}{llllll} =a & +2pa.z & +3p^2a.z^2 & +4p^3a.z^3 & +5p^4a.z^4 & +\text{ i t. d.}\\ & +\;b. & +\;2pb. & +\;3p^2b. & +\;4p^3b. & +\text{ i t. d.}\end{array}\quad(t).$$

W tym ſzeregu łatwo ieſt barzo widzieć układ ciągnących ſię terminów, i ten wyrazić przez wykładnika ilości nieznaney z: wyraz takowy oznaczaiący wſpół-czynnika iakiegokolwiek terminu przez wykładnika z w tym terminie zachodzącego, nazwiemy WYRAZEM OGÓLNYM SZEREGU (*Terminus generalis ſeriei*); ten bowiem wyraz przez ſtóſunek który nam pokazuie między wykładnikiem i wſpół-czynnikiem każdego terminu, maluie nam prawo, za którem idzie ſzereg, i oznacza wartość iakiegokolwiek terminu nie zawiśle od wſzyſtkich innych. Wyraz ogólny ſzeregu dopiero uważanego ieſt $[(n+1)p^na+np^{n-1}b]z^n$. s którego za wartością wykładnika n, wypadnie cały mu odpowiadaiący termin ſzeregu. Idac daley w tem dociekaniu, znaydziemy ſzeregi na funkcye wyżſzych ſtopni:

Podaią ſię wyrazy ogólne na ſzeregi zwrotnę.

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-pz)^3}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ i t. d. czyli:}$$

$$\begin{array}{lllllll} 0=A & +B.z & +C.z^2 & +D.z^3 & +E.z^4 & +F.z^5 & +\text{i t.d.}\\ \;-a & -3pA. & -3pB. & -3pC. & -3pD. & -3pE. & -\text{ t.d.}\\ & -b. & +3p^2A. & +3p^2B. & +3p^2C. & +3p^2D. & +\text{i t.d.}\\ & & -c. & -p^3A. & -p^3B. & -p^3C. & -\text{i t.d.}\end{array}$$

Skad wypadaią zrównania: $A-a=0$, $B-3pA-b=0$,
$C-3pB+3p^2A-c=0$,
$D-3pC+3p^2B-p^3A=0$, $A=a$, $B=3pa+b$; $C=6p^2a+3pb+c$,
$E-3pD+3p^2C-p^3B=0$, $D=10p^3a+6p^2b+3pc$,
$F-3pE+3p^2D-p^3C=0$, $E=15p^4a+10p^3b+6p^2c$.

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-pz)^3}\begin{array}{llllll} =a & +3pa.z & +6p^2a.z^2 & +10p^3a.z^3 & +15p^4a.z^4 & +\text{ i t.d.}\\ & +\;b. & +\;3pb. & +\;6p^2b. & +10p^3b. & \text{i t. d.}\\ & & +\;c. & +\;3pc. & +\;6p^2c. & \text{i t. d.}\end{array}\quad(x)$$

chcąc daley ciągnąć ten ſzereg przypatrzmy ſie z uwagą wſpół-czynnikom każdego terminu, a doſtrzeżemy łatwo, że ich prawo zamknięte ieſt w tym wyrazie ogólnym $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}p^na+\frac{n.(n+1)}{1.\ 2}p^{n-1}b+\frac{(n-1)n}{1.\ 2}p^{n-2}c\right]z^n.$

Rozbierałąc ieſzcze tym ſamym ſpoſobem funkcyą $\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-pz)^4}$, znaydziemy naprzód, że każdy termin ſzeregu s tąd powſtaiącego wyrazi ſię przez cztery poprzedzaiące mnożone przez wſpół-czynniki czwartey potęgi, gdzie oraz doſtrzeżemy że iego termin ogólny ieſt:

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3}p^na+\frac{n.(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}p^{n-1}b+\frac{(n-1).n.(n+1)}{1.\ 2.\ 3}p^{n-2}c+\frac{(n-2)(n-1)n}{1.\ 2.\ 3}p^{n-3}d\right]z^n.$$

Stawiwſzy ſobie teraz przed oczy wynalezione dotąd wyrazy ogólne na różne potęgi mianownika, łatwo nam s tąd będzie przez porównanie i podobieńſtwo przyiśdź do wyrazu ogólnego takiego ułomku, którego mianownik ieſt potęgi m, takowy bowiem wyraz wypada oczywiście:

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots[n+(m-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\cdots(m-1)}p^na+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots[n+(m-2)]}{1.2.3.4.\cdots(m-1)}p^{n-1}b+\frac{(n-1)n.(n+1)\cdots[n+(m-3)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\cdots(m-1)}p^{n-2}c+\cdots+\frac{[n-(m-1)][n-(m-2)]\cdots n}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\cdots(m-1)}p^{n-(m-1)}g\right]z^n.$$

gdzie n znaczy iakiegokolwiek wykładnika ilości odmienney z; m wykładnika potęgi w mianowniku, g oſtatniego wſpół-czynnika w liczniku.

Na-

Należałoby nam tu rosciągnąć uwage na funkcye ułomkowe zamykaiące w mianowniku potęgi iakiekolwiek WIĘLO-WYRAZÓW (*Polynomium*). Ale że ten rachunek byłby nadto dla nas zawikłany odbywaiąc go ſpoſobem który nam tu poſłużył, zoſtawiemy go więc wyżſzym częściom Matematyki. Niżeli zaś przyidzie nam ſię zaſtanowić nad wypadkami teraźnieyſzych doſtrzeżeń, wróćmy ſię ieſzcze do roſtrząſania ſzeregów powſtaiących z rozbioru funkcyi ułomkowych maiących różne potęgi w mianowniku. Przypatrzywſzy ſię terminom ſzeregu (ε) i uczyniwſzy w nich $p=1$, $z=1$. zamieni ſię ten ſzereg na

$$a+(2a+b)+(3a+2b)+(4a+3b)+(5a+4b)+ \text{ i t. d.}$$

gdzie między dwoma każdemi przyległemi terminami, zachodzi ta ſama ſtateczna różnica, a zatem ten ſzereg czyni to, co nazywaią POSTĘPEM ARYTMETYCZNYM (*Progreſſio Arithmetica*). Każdy termin w tym ſzeregu nie przeſtaie bydź funkcyą dwóch poprzedzaiących: wyſtawiwſzy ſobie bowiem ten ſzereg pod wyrazem: $A+B+C+D+E+$ i t. d. będzie $C=3B-A$, $D=2C-B$, $E=2D-C$, i t. d. a przeto każdy poſtęp Arytmetyczny ieſt ſzeregiem zwrotnym. Idąc do dalſzych potęg, uczyńmy w zrównaniu (λ) $p=1$, $z=1$, a zamieni ſię na:

$$a+(3a+b)+(6a+3b+c)+(10a+6b+3c)+(15a+10b+6c)+ \text{ i t. d.}$$

biorąc różnicę między każdemi dwoma przyległemi terminami, powſtanie s tych różnic drugi ſzereg:

$$(2a+b)+(3a+2b+c)+(4a+3b+2c)+(5a+4b+3c)+ \text{ i t.d.}$$

w którym dopiero każde dwa przyległe terminy od ſiebie odciągnione, daią wſzędzie iednę ſtateczną reſztę $a+b+c$: co pokazuie poſtęp Algebraiczny *drugiego porządku*, dla tego, że w nim dopiero drugie różnice ſą ſtateczne: takim ieſt poſtępem ſzereg liczb 1, 8, 25, 52, 89, i t. d. którego każdy termin ieſt funkcyą trzech poprzedzaiących, maiacych za ſtopnie ſtoſunku wſpół-czynniki trzeciey potegi, tak dalece, że wyraziwſzy taki ſzereg przez $A+B+C+D+$ i t.d.

będzie $D=3C-3B+A$, $E=3D-3C+B$, i t. d.

Ciągnąc tym ſamym ſpoſobem naſz rachunek, funkcya: $\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-pz)^4}$ przyprowádzi nás do ſzeregu, w którym położywſzy $p=1$, $z=1$, trafiemy na poſtep Algebraiczny *trzeciego Porządku*, w którym trzecié dopiero różnice będą ſtateczné: takim ieſt ſzereg liczb 1, 8, 27, 64, 125, 216, i t. d. gdzie każdy termin ieſt funkcyą czterech poprzedzaiących, które maią za ſtopnie związku wſpół-czynniki potęgi czwartey, tak dalece że wyraziwſzy taki ſzereg przez $A+B+C+D+E+$ i t. d. znaydziemy $E=4D-6C+4B-A$, $F=4E-6D+4C-B$, i t.d. Ułomek nakoniec którego mianownik będzie potęgą m, przyprowadzi nas do poſtępu Algebraicznego $m-1^{so}$ porządku, dla tego, że w nim dopiero różnice $m-1$*te* będą ſtateczne. Każdy takowego ſzeregu termin ieſt funkcyą m poprzedzaiących, w których wſpół-czynniki potęgi m ſą ſtopniami związku: co nam pokazuie tę ogólną prawdę, że poſtępy Arytmetyczne i Algebraiczne iakiégokolwiek porządku ſą ſzeregami zwrotnemi. W uwagach ieſzcze teraźnieyſzych pokazało nam ſię, że s ſzeregów iakiegokolwiek porządku, przez różnice między dwoma przyległemi terminami rodzą ſię nowé ſzeregi, s których dopiero przed-oſtatni ieſt poſtępem Arytmetycznym wydaiącym rożnice ſtateczné. Tu odkrywa nam ſię nowy ſpoſób uważania ſzeregów zwrotnych, przez wzgląd na ich rożnice wypadaiące z odciągania dwóch iakichkolwiek przyległych terminów. Ale ten ſpoſób nie należy tu ieſzcze do naſzego zamiaru.

Wróćmy ſię teraz do uwag które nam pozoſtały o wyrazach ogólnych, a które razem należą do rozwiązania drugiego zadania o ſzeregach. Stawmy ſobie razem przed oczy wyrazy ogólne, któreśmy nie dawno wynaleźli na funkcye ułomkowe maiące w mianowniku różne potęgi, a uczyniwſzy w nich $l=0$,

$c=0$, $d=0$, $g=0$, tak dalece, żeby licznik ułomku nie zamykał tylko ſamę ilość ſtateczną i wiadomą, którą wyrażemy przez A; wyciągniemy na

Funkcye: $\frac{A}{(1-pz)^2}$ - - - - - $\frac{A}{(1-pz)^3}$ - - - -

Wyrazy ogólne: $(n+1)Ap^nz^n$ - - $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}Ap^nz^n$

Funkcya: $\frac{A}{(1-pz)^k}$

wyra: ogól: $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ \text{- - -}\ (n+k-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \text{- - - -}\ (k-1)}Ap^nz^n$.

S tego powodu wróćmy ſię ieſzcze do ułomków których mianowniki ſkładaią ſię z mnożników nierównych, a któreśmy iuż uważali naſamprzód. Przypomniawſzy ſobie ſzereg powſtaiący z ułomku $\frac{a}{p+qz}$ łatwo doſtrzeżemy, że iego wyraz ogólny ieſt: - - $\pm\frac{aq^n}{p^{n+1}}$, gdzie znak niżſzy należeć będzie do liczby n parzyſtey; niżſzy zaś do liczby nieparzyſtey: ten ieſzcze wyraz ogólny wyrażemy prościey przez - - - $\frac{a}{p}\frac{(-q)^n}{(p)^n}$, ieżeli więc funkcyą ułomkową $\frac{a}{p+qz}$ przywiedziemy do wzoru $\frac{A}{1-pz}$; będzie Ap^nz^n iey wyrazem ogólnym. Rozbieraiac zaś funkcye, których mianownik należy do wzoru $p+qz+rz^2+sz^3+$ i t. d. zobaczemy tak zawikłane kombinacye między wſpółczynnikami terminów, iż z nich ani ſobie obiecywać można ſpoſobu na znalezienie wyrazu ogólnego; ten bowiem zależy na pewnym ſtóſunku między wſpółczynnikami iakiegokolwiek terminu, i wykładnikiem ilości odmienney w tymże terminie: wſpółczynniki zaś będąc funkcyami p, q, r, s, i t. d. nie mogą bydź przez liczbę n w ſwych kombinacyach wyrażoné. Bo gdyby nawet ilościom p, q, r, s, i t. d. naznaczoné były pewné liczebné wartości, potrzebaby bydź w ſtanie wyciągnienia wſzyſtkich zachodzących kombinacyi tych liczb z iednéy liczby n, co ieſt niezmiernie trudno i przez naturę liczb, i przez ograniczoną barzo naſzę wiadomość w ich teoryi. Zoſtaie nam w tey trudności chwycić ſię zoſtawionego naſzym dociekaniom ſpoſobu, to ieſt przywieśdź iakąkolwiek funkcyą maiącą mianownika złożonego z mnożników nierównych, do wyrazu $\frac{A}{1-pz}$ albo do $\frac{A}{p-qz}$, to ieſt: potrzebaby mianownika rozebrać na ſwé mnożniki proſté, i s tych złożyc tyle ułomków wzoru $\frac{A}{p-qz}$ ile takowych znayduie ſię mnożników, tak, żeby ſumma ułomków proſtych była równą ułomkowi podanému. Wynalaſſzy potém wzory ogólne na każdy s tych proſtych ułomków, będzie ſumma tych wzorów ogólnych równą wyrazowi ogólnému ułomku podanego. Zatrudniymy ſię teráz tym wynalazkiem.

§. XXXIV.

Wyrażaią ſię ułomki składané przez ułomki proſté.

Funkcyá prawdziwie ułomkowá wyrażá ſię nayogólniéy: $\frac{M}{N} - - \frac{a+bz+cz^2+dz^3 - - - +gz^n}{p+qz+rz^2+sz^3 - - +kz^{n+1}}$: gdzie potęga naywyżſzá w liczniku, ieſt koniecznie mnieyſzá od potęgi naywyżſzey mianownika. Zeby rozbieraiąc tę funkcyą na ułomki proſte $\frac{A}{a'-b'z}$ zoſtawić ią przy całey ſwéy ogólności; potrzeba koniecznie, aby takowé ułomki proſte dodané do ſiebie były ze wſzyſtkim równé ułomkowi podanému, i nie wprowadziły żadnego warunku, któryby mógł iego ścieśnić ogólność; potrzeba więc aby funkcye ułom-

kowé

kowe proſte, były i co do wyrazu i co do liczby takie, iżby przywiodłſzy ie do zero, s wpół-czynników ilości odmienney tyle tylko wypadło zrównań, ile ilości nieznanych. To zaś wſzyſtko zachowamy rozbieraiąc funkcyą $\frac{M}{N}$. na tyle ułomków proſtych: - -

$\frac{A}{a'-b'z}+\frac{B}{c'-d'z}+\frac{C}{f'-g'z}+$ i t. d. ile ieſt mnożników proſtych nierównych w mianowniku N; gdzie nam potrzeba pamiętać, że ponieważ te ułomki proſte bydź powinny koniecznie ułomkami prawdziwemi, w których potęga ilości odmienney w liczniku, bydź powinna niżſza od potęgi mianownika; liczniki A, B, C, D, i t. d. muſzą bydź koniecznie ilościami całkiem ſtatecznemi. Mowiłem że na tyle ułomków proſtych w ſpomnionego wyrazu rozbiera ſię funkcya, ile mianownik N ma w ſobie mnożników proſtych *nierownych*. Maiąc bowiem mnożniki *równe* wzoru $\frac{M}{(a'-b'z)^m}$ dla ocalenia wyżey iuż przytoczonych przyczyn i zachowania funkcyi w tym rozbiorze przy całey ogólności, ułomek $\frac{M}{(a'-b'z)^m}$ rozbiera ſię znowu na ułomki $\frac{A}{(a'-b'z)^m}+\frac{B}{(a'-b'z)^{m-1}}$ $+\frac{C}{(a'-b'z)^{m-2}}+ - - - - +\frac{K}{a'-b'z}$, których tyle bydź powinno, ile m zamyka w ſobie iedności; te bowiem ułomki dodane razem i przywiedzione do iednego mianownika, wprowadzą do licznika potęgę $m-1$, która zamyka m terminow; wypadnie więc przywiódłſzy ie do zero, tyle zrównań, ile ilości nieznanych A, B, C, D, i t. d. i ogólność funkcyi nie będąc ścieśnioną żadnem zbytniem zrównaniem, zoſtanie nienaruſzoną. S tego rozumowania wypada, że chcąc funkcyą ułomkową ſkładaną rozbierać na funkcye cząſtkowé których mianownik byłby drugiéy potęgi n.p. $a'-b'z+c'z^2$, każdy ich licznik powinien miéć dwa terminy wzoru $A+Bz$, aby tylé wprowadzić ilości nieznanych, ile wyniknie terminów z przywiedzenia takowych ułomków do iednego mianownika, które potém tyleż wydadzą zrównań.

Nie opuśćmy nic, cokolwiek pod uwagę o funkcyach ułomkowych może teraz podpadać. Uważaliśmy funkcye przez wzgląd na mnożniki równé i nierówné w mianowniku; uważaymy ié ieſzcze przez wzgląd na mnożniki rzetelné lub uroioné: ta bowiem uwaga ieſt iſtotná funkcyom, iak prędko ich mianowniki zaczęliśmy rozbierać. Iużeśmy ſię zupełnie odbyli co do mnożników rzetelnych, ale kiedy mianownik N będzie zamykał mnożniki uroioné, iakże ſobie poſtąpić? Wprowadziwſzy który ułomek proſty uroiony w tén rozbiór, cała funkcyá ſtanie ſię uroioną; przywodząc ié bowiém do iednego mianownika, wmięſzaią ſię w liczniku terminy uroioné, które ſię nie znioſą: będzie więc funkcyá rzetelná równa funkcyi uroioney powſtaiącey z dodania ułomków proſtych: co ieſt wielką nieprzyzwoitością. Chcąc iéy uniknąć, przymuſzeni ieſteśmy w tym razie wſzyſtkie funkcye cząſtkowé wprowadzić rzetelné, a zatém mianownika N iuż nie rozbierać na mnożniki 1go ſtopnia uroioné, ale na mnożniki 2go ſtopnia rzetelné, które ſię rodzą z dwóch uroionych rozmnożonych przez ſiebie. Rozebraná więc takowa funkcya na ſwé ułomki cząſtkowé zamykać będzie między temi cząſtkowémi ułomkami tylé dwoiſtych wzoru - - - $\frac{A+Bz}{a'-b'z+c'z^2}$, ilé pár znayduie ſię mnożników uroionych w mianowniku N. Ale mianownik dwoiſty $a'-b'z+c'z$ ieſt koniecznie taki, iż iego mnożniki proſté ſą koniecznie uroioné. Zebyśmy tę kondycyą mogli zawſze myśli uczynić przytomną, potrzebaby nam takiego wyrazu mianownika podwóynego, któ-

ryby

ryby noſił na ſobie cechę oznaczáiącą, że on powſtał z dwóch mnożników proſtych uroionych. Ponieważ wſzyſtkié dotąd roſtrząśnioné początki nie mogą nám poddać takiego wyrazu, odłożyć muſzemy do niżſzych uwag rozbiór takowych funkcyi: któré nám podobnie trzeba będzie rozdzielić na równé i nierówné. Przeſtaniemy więc teraz na uwádze tych tylko funkcyi ułomkowych wymiernych, których mianownik *N* ſkładá ſię z ſamych mnożników rzetelnych.

§. XXXV.

Spoſoby rozbierania ułomków składanych na proſte.

Zeby ułomek iaki rozebrać na cząſtkowé ułomki, s których ſię ſkładá; potrzeba w tych cząſtkowych ułomkach oznaczyć liczników i mianowników. Mianowniki té proſté wynayduią ſię przez rozbiór mianownika ſkładanego na ſwé mnożniki, który odbywá ſię ſpoſobem użytym na rozwiązanie zrównań. Wiémy bowiem że to co ieſt pierwiaſtkiem w zrównaniu, ieſt mnożnikiem w funkcyi, więc wprowadziwſzy związek w funkcyą ſkładaną $p+qz+rz^2+$ i t. d. przez uczynienie ią równą zero, otrzymamy zrównanie, które rozwiązáwſzy znáydziemy iego pierwiaſtki; zniſzczywſzy potém związek w tych pierwiaſtkach przerobiemy ie na funkcye proſte, które będą mnożnikami funkcyi ſkładaney, a oraz mianownikami ułomków proſtych. Ale iakże wynaleśdź liczników na takié proſté ułomki? Ponieważ w tem zadaniu nie idzie tylko o oznaczenie iłości nieznanych przez znane; pierwſzy ſpoſób, któryby nám ſię tu powinien ſtawić w myśli, ieſt początek pytań nieoznaczonych *Des-Carta* użyty w takim ſpoſobie, iaki nám poſłużył na początku tego rozdziału, kiedy nám trzeba było wynaydować wſpół-czynniki *A*, *B*, *C*, *D*, i t. d. ſzeregu. Doświadczmy czyli nám ſię tu udá.

Niech będzie do rozebrania funkcya podaná: - -

$$\frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}$$. będą iéy ułomki cząſtkowé

$$\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{1-3z}+\frac{D}{1-5z}=\frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}$$

chcąc A, B, C, D, wyrazić przez liczby, potrzeba nam przywieśdź 1^{8o} członka ułomki do iednego mianownika, i przenióſſzy potem licznika drugiey ſtrony; całe zrównanie do zero: s kąd wypadnie:

$$\begin{array}{rrrr} o = A & +9A.z & +23A.z^2 & -15A.z^3: \\ & -1+B. & -8B. & +15B. \\ & +C. & -6C. & +5C. \\ & +D. & -4D. & +3D. \\ & -1. & -3. & \end{array}$$

czyniąc w tem zrównaniu każdego wſpół-czynnika równym zero, otrzymamy prawda tyle zrównań ile nieznanych: ale że w każdem s tych zrównań znayduią ſię wſzyſtkie nieznane, przez wyrzucanie ich działanie znacznie ſię zawikle. W teraźnieyſzym ieſzcze przypadku wyciągniemy przez eliminacyą $A=1$; $B=\frac{5}{8}$, $C=-\frac{90}{8}$, $D=-\frac{165}{8}$. Ale ieżeli funkcya ſkładać ſię będzie z więcey takowych ułomków proſtych, wynalazek liczników nieporównanie będzie pracowitſzy. Spoſób więc ten, który nam ſłużył do rozbierania funkcyi na ſzeregi, lubo i w teraźnieyſzey teoryi ma ſwoie użycie, przywiązany atoli ieſt do tych ſamych trudności, które nam ſię pokazały w eliminacyi. Uſiłuymyż przyiśdź do łatwieyſzego:

Zacząwſzy od funkcyi $\frac{M}{N}$, w których N ſkłada ſię z mnożników nierównych, nazwiymy $N=(a'-b'z)S$, gdzie $a'-b'z$ znaczy iednego proſtego mnożnika; S zaś mnogość ze wſzyſtkich innych, które wchodzą w N; będzie więc $\frac{M}{N}=\frac{A}{a'-b'z}+\frac{R}{S}$, gdzie M, A, R, S, ſą koniecznie ilościami całkiemi: uważaiąc te ułomki przywiedzione do nayprościeyſzego ułomkowego wyrazu. Ieżeli więc $\frac{M}{(a'-b'z)S}=\frac{A}{a'-b'z}+\frac{R}{S}$

będzie

będzie $R=\frac{M-AS}{a'-b'z}$, ponieważ R ieſt ilością całką, $M-AS$ musi bydź koniecznie rozdzielnem przez $a'-b'z$; więc uczyniwſzy $a'-b'z=0$, musi także bydź $M-AS=0$, s kąd wypada $A=\frac{M}{S}$: wynaydziemy więc A włożywſzy w M, S, $z=\frac{a'}{b'}$ wyciągnione z zrównania $a'-b'z=0$. Tym zaś ſpoſobem, którym odkryliśmy A, wynaydziemy wſzyſtkie inne cząſtkowych ułomków liczniki. Weźmy n. p. funkcyą iuż dawniey rozbieraną $\frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}$, gdzie $M=1+z+3z^2$, $S=(1-z)(1-3z)(1-5z)$ - - - $a'-b'z=z$, czyli $a'=0$, $b'=-1$; włożywſzy $z=0$ w M, S, będzie $\frac{M}{S}=1=A$. Chcąc wynaleśdź B, będzie $a'-b'z=1-z$, czyli $a'=1$, $b'=1$, $z=1$. - - $S=z(1-3z)(1-5z)$; $\frac{M}{S}=\frac{5}{8}=B$. Na C będzie - - $a'-b'z=1-3z$, $z=\frac{1}{3}$, $S=z(1-z)(1-5z)$, $M=\frac{5}{3}$ $S=-\frac{4}{27}$, $\frac{M}{S}=-\frac{9.5}{4}=-\frac{90}{8}=C$. Na wynalezienie D będzie $z=\frac{1}{5}$, $S=z(1-z)(1-3z)=\frac{8}{25.5}$. $M=\frac{33}{25}$, $\frac{M}{S}=\frac{165}{8}=D$. Przeto funkcya - - -

$$\frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}=\frac{1}{z}+\frac{5}{8(1-z)}-\frac{90}{8(1-3z)}+\frac{165}{8(1-5z)}.$$

Tym ſamym ſpoſobem poſtępuiąc ſobie z ułomkiem $\frac{1+z^2}{z-z^3}=\frac{1+z^2}{z(1+z)(1-z)}=\frac{M}{N}=\frac{A}{z}$

$+\frac{B}{1+z}+\frac{C}{1-z}$, i nadaiąc przyzwoité wártości S, które ſię za każdém działaniém odmienia; znaydziémy $A=1$, $B=-1$, $C=1$, ułomki zaś proſte na któré ſię funkcyá rozbierá $\frac{1}{z}-\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}$.

Przyſtapmy teráz do rozbioru funkcyi na ułomki cząſtkowe, kiedy N zamyká w ſobie mnożniki równé. Dowiedliśmy iuż, że na ten czás $\frac{M}{N}$ rozebrać ſię może na tylé ułomków cząſtkowych, ilé wykładnik N zamyká w ſobie iedności, to ieſt: że - - -

$$\frac{M}{(a'-b'z)^m S}=\frac{A}{(a'-b'z)^m}+\frac{B}{(a'-bz)^{m-1}}+ \cdot\cdot \frac{C}{(a'-b'z)^{m-2}}+\frac{D}{(a'-b'z)^{m-3}} \cdot\cdot + \frac{K}{a'-b'z}+\frac{R}{S},$$

gdzie $A, B, C, M, K, R, S,$ ſą ilościami całkiemi; S zaś znaczy innych mnożników nierównych wchodzących w N. Przywiółſzy té ułomki proſte do iednego mianowniká, i rozmnożoné przez S przeniółſzy na iednę ſtronę zrównaniá, otrzymámy:

$$\frac{M-S(A+B(a'-b'z)+C(a'-bz)^2+ \cdot\cdot K(a'-b'z)^{m-1})}{(a'-b'z)^m}$$

$=R$. Aże R ieſt ilością całką, więc żeby zrównanie to mogło mieć mieyſce, licznik pierwſzego członka, musi bydź koniecznie zupełnie rozdzielnym przez mianowniká, a zatém $a'-b'z$ ieſt koniecznie mnożnikiem całego licznika; uczyniwſzy więc $a'-b'z=0$, cały licznik ſtanie ſię zero: aże terminy wſzyſtkie począwſzy od B ſą mnożoné przez $a'-b'z$, więc té ſtawſzy ſię zaraz zero, odpadną, zoſtawiwſzy $M-AS=0$, s kąd $A=\frac{M}{S}$: gdzie nám trzeba pamiętać, iż nie wprzód $A=\frac{M}{S}$, póki w $M, S,$ nie włożémy za z

wártości

wártości wyciągnioney z zrównaniá $a'-b'z=o$, czyli $z=\frac{a'}{b'}$. Ale iakże odkryiemy A, B, C, D, i t. d? Nie zgubmy ſię tylko w naſzém rozumowaniu, a łatwo tego dokażemy.

Ponieważ $M-AS$ ieſt zupełnie rozdzielném przez $a'-b'z$; wykonáymy dzielenie, i wieloráz ſtąd otrzymány nazwiymy T, będzie $\frac{M-AS}{a'-b'z}=T$: kiedy zaś rozdzielémy cały ułomek przez $a'-b'z$, mianownik zmnieyſzy ſię o ieden ſtopień, i zrównanie pozoſtałé będzie:

$$\frac{T-S(B+C(a'-b'z)+D(a'-b'z^2)^2 \cdot\cdot K(a'-b'z)^{m-2})}{(a'-b'z)^{m-1}}=R.$$

Teráz znowu R ieſt ilością całką, więc znowu ułomek cały pierwſzego członka musi bydź rozdzielnym przez $a'-b'z$, położywſzy więc $a'-b'z=o$, cały licznik będzie zero, ale niektóre w nim terminy rozmnożone przez $a'-b'z$, zaráz odpadną, zoſtawiwſzy $T-SB=o$, s kąd $B=\frac{T}{S}$, co nám dá wártość na B, włożywſzy w T, S, $z=\frac{a'}{b'}$. Ponieważ $T-SB$ ieſt zupełnie rozdzielnem przez $a'-b'z$; wykonáymy to dzielenie, i wieloráz ſtąd wypádaiący nazwiymy U, $U=\frac{T-SB}{a'-b'z}$, takim ſpoſobem cały pierwſzy członek zrównaniá rozdzieli ſię znowu przez $a'-b'z$, i zoſtanie

$$\frac{U-S[C+D(a'-b'z) \cdot\cdot +K(a'-b'z)^{m-3}]}{(a'-b'z)^{m-2}}=R.$$

gdzie znowu R będąc ilością całką uczyni pierwſzy członek zupełnie rozdzielnym przez $a'-b'z$, a zatém $a'-b'z=o$, zoſtawi $U-SC=o$, s kąd $C=\frac{U}{S}$: ta-

kim

kim ſpoſobem ciągnąc naſze rozumowanie przyidziemy do wynalezienia wſzyſtkich liczników ułomków cząſtkowych. W całem tem działaniu widzemy, że S zoſtaie zawſze przy tey ſamey wartości, a ſamo tylko M odmienia ſię przez dzielenie, które za każdym wynalazkiem ieſteśmy obowiązani wykonywać. Prawidła te wſzyſtkie iaśniey ſię ieſzcze wydadzą w przykładach.

Niech będzie $\frac{M}{N} = \frac{1+z^2}{(1-2z)^3(1+z)} = \frac{A}{(1-2z)^3} + \frac{B}{(1-2z)^2} + \frac{C}{1-2z} + \frac{D}{1+z}$, gdzie $M = 1+z^2$, - - $S = 1+z$, $1-2z = 0$, $z = \frac{1}{2}$, $A = \frac{M}{S} = \frac{5}{6}$, $\frac{M-AS}{1-2z} = \frac{1-5z+6z^2}{6(1-2z)} = \frac{1-3z}{6} = T$, $B = \frac{T}{S} = -\frac{1}{18}$; $\frac{T-BS}{1-2z} = \frac{4}{18} = U$, a zatem $C = \frac{U}{S} = \frac{4}{27}$. Nakoniec $D = \frac{M}{S}$ gdzie $M = 1+z^2$, $S = (1-2z)^3$; $1+z = 0$, $z = --1$, a przeto $D = \frac{2}{27}$; funkcya więc podana rozbiera ſię na te ułomki cząſtkowe:

$$\frac{5}{6(1-2z)^3} - \frac{1}{18(1-2z)^2} + \frac{4}{27(1-2z)} + \frac{2}{27(1+z)}.$$

Tym ſamym ſpoſobem poſtępuiąc ſobie w innych przykładach, przyidziemy do cząſtkowych ułomków iakieykolwiek funkcyi ſkładaney maiącey w mianowniku mnożniki rzetelne, rowne lub nierówne. Teoryą tę tak dokładną i tak proſtą rozbierania ułomków ſkładanych na proſte winniśmy W. Geometrze *Janowi Bernoullemu.*

§. XXXVI.

Przypomniymy ſobie teraz co nas wciągło w potrzebę rozbierania ułomków ſkładanych na ułomki proſte. Bawiąc ſię nad włáſnościami ſzeregów zwrotnych

Przyſtóſowanie poprzedzaiącéy teoryi do wynaydowania wyrazów ogólnych

tnych, potrzeba nam było wynaleśdź każdego w ſzczególności *wyráz ogolny*; ten łatwo nam ſię pokazał w funkcyach ułomkowych proſtych wzoru $\frac{A}{1-pz}$, $\frac{A}{(1-pz)^n}$: ale chcąc naſzę uwágę rosciagnąć do ułomków zawikleyſzych, pokazało ſię że wynalázek ich wyrazu ogólnego ledwo ieſt podobny: potrzeba nam więc było ułomki zawikłane przerobić na proſte; s tych każdy przywiódlſzy do wzoru $\frac{A}{1-pz}$ będzie iego wyráz ogólny Ap^nz^n: a iako zbiór takowych proſtych ułomków równá ſię ułomkowi podanemu, tak zbiór wyrazów ogólnych na ułomki cząſtkowé równy będzie wyrazowi ogólnemu funkcyi podanéy. Niech będzie funkcyá podaná $\frac{M}{N}$, którey ułomki cząſtkowé ſą $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}+\frac{C}{1-rz}$ i t. d. będzie $(Ap^n+Bq^n+Cr^n+$ i t. d. $)z^n$ wyrazém ogólnym funkcyi $\frac{M}{N}$. Gdyby dwa z mnożników mianownika N, były ſobie równe, to ieſt $p=q$, mielibyśmy $\frac{A}{(1-pz)^2}+\frac{B}{1-pz}$ i pierwſzego ułomku wyráz ogólny ieſt $(n+1)Ap^nz^n$; drugiego Bp^nz^n, kładąc za $A+B$, B; będzie wyráz ogólny ułomku $\frac{M}{N}$, $[(nA+B)p^n+Cr^n]z^n$. i t. d. Ieżeli w N trzy mnożniki ſą równe, to ieſt $p=q=r$, iego wyraz ogólny będzie - - $\frac{(n+1)(n+2)}{2}Ap^nz^n$; ale ieżeli oprócz tych trzech równych znayduie ſię ieſzcze który nierówny, rozbiór na tén czás ułomku $\frac{M}{N}$ na ułomki proſté ſtaie ſię potrzebny; tén rozbiór, nie może nás przyprowadzić tylko albo do wzoru $\frac{A}{1-pz}$ albo do $\frac{A}{(1-pz)^n}$; każdego z oſobna znaiąc wyráz ogólny, znáydziémy wyráz ogólny ſaméy funkcyi ſkładanéy $\frac{M}{N}$. Zobáczmy to w przykładach:

I. Niech będzie ſzereg $1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+$ i t. d. powſtaiący s funkcyi ułomkowéy - - $\frac{1+2z}{1-z-z^2}$, iakiż iego wyráz ogólny?

Wynáydziémy náprzód mnożniki mianownika uczyniwſzy $1-z-z^2=0$, co nám dá $z+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, i $z+\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, zgubiwſzy związek; té dwa mnożniki chcąc ie przywieśdź do wzoru $1-pz$, mnożę pierwſzégo przez $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, i odmieniwſzy znaki wypadnie $1-\frac{(1-\sqrt{5})}{2}z$: drugiégo rozmnożywſzy przez - - $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, otrzymámy $1-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}z$. które maią wzór $1-pz$: będzie więc $\frac{1+2z}{1-z-z^2}=\frac{A}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z}+\frac{B}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z}$, ſzukaiąc liczników podług dopiero wyłożonych prawideł znáydziémy $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, - - -

B=

$B=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, przeto wyráz ogólny $(Ap^n+Bq^n)z^n$ w teraźnieyſzym przykładzie położywſzy $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, będzie: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n$

II. Wynaleśdź wyráz ogólny ſzeregu $1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+$ i t. d. wypádaiącégo z ułomku $\frac{1}{1-z-z^2+z^3}=\frac{1}{(1-z)^2(1+z)}$, ułomek ten rozbiera ſię podług ſpoſobu podanégo na te proſté:

$\frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1-z}+\frac{\frac{1}{4}}{1+z}$; pierwſzégo wyráz ogólny ieſt $\frac{n+1}{2}z^n$, drugiégo $\frac{1}{4}z^n$, trzeciégo $\frac{1}{4}(-1)^n z^n$, a więc wyráz ogólny ſzeregu podanégo ieſt: $\frac{2n+3\pm1}{2}z^n$, znak wyżſzy náleży w nim do liczby n párzyſtey, niżſzy zaś do niepárzyſtey.

Zbierzmy teráz na uwagę te práwdy, któreśmy o wyrazach ogólnych doſtrzegli. Każdy ułomek próſty wzoru $\frac{A}{1-pz}$, przyprowadził nás do wyrazu ogólnego Ap^nz^n, którysmy oznaczyli przez licznika ułomku A, i przez wſpół-czynnika nieznaney z; ponieważ wyráz ogólny zamyka w ſobie każdy termin ſzeregu wypádaiacy za nadaniem wártości n, zámyká razem związek zachodzący między terminami ſzeregu i między licznikami ułomków proſtych A, B, C, i t. d. s tego więc zwiazku można wyciągnąć wártość liczników przez wſpół-czynniki ſzeregowé równaiąc termin ſzeregu, z wypádaiacym tego ſamégo porządku terminem z wyrazu ogólnégo. Zeby ſię nie mylić w znaczeniu, wyrażać odtąd będziemy przez A, B, C, D, i t. d. liczniki ułomków proſtych przez któré dany

Tłomaczy ſię związek między licznikami ułomków proſtych i terminami ſzeregu.

re dany bywá wyraz ogólny; przez $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, i t. d. znaczyć będziemy wſpół-czynniki ſzeregu powſtaiącego z iakiegokolwiek ułomku. Niech więc

$$\bar{A}+\bar{B}z+\bar{C}z^2+\bar{D}z^3+\bar{E}z^4+ \text{ - - } \bar{P}z^n+\bar{Q}z^{n+1}+\bar{R}z^{n+2} \text{ - - } +\bar{X}z^{2n}+\bar{Y}z^{2n+1}\bar{Z}z^{2n+2} \text{ i t. d.} \qquad (\downarrow)$$

znaczy ſzereg powſtaiący z rozbierania iakieykolwiek funkcyi ułomkowey. Ieżeli ta funkcya była proſta $\frac{A}{1-pz}$, pierwſzy iey termin wyciągniemy z wyrazu ogólnego Ap^nz^n uczyniwſzy $n=0$, s kąd wypadnie $A=\bar{A}$ to ieſt; że pierwſzy takowy termin ieſt zawſze równy licznikowi ułomku. Ieżeli ta funkcyá rozbiera ſię na dwa ułomki proſte $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}$, iey wyraz ogólny ieſt $(Ap^n+Bq^n)z^n$, zachodzą nam w tym przypadku dwa liczniki A, B, do oznaczenia, na co potrzeba dwóch zrównań: wyciągniemy te dwa zrównania z wyrazu ogólnego za nadaniem dwóch różnych wartości n, a zatem licznik każdy oznaczać ſię będzie przez dwa wſpół-czynniki początkowych terminów ſzeregu; to ieſt uczyniwſzy w wyrazie ogólnym $n=0$, wypada $\bar{A}=A+B$, - - (a), uczyniwſzy potem $n=1$, otrzymamy $Ap+Bq=\bar{B}$ - - - - (b) kombinuymy (a) z (b), to ieſt mnóżmy naſamprzód (a) przez q, i odciągniymy od niego (b), wypadnie: $A=\frac{\bar{A}q-\bar{B}}{q-p}$. Mnożmy powtóre (a) przez p, i odtrąćmy od niego (b), co nam da - - $B=\frac{\bar{A}p-\bar{B}}{p-q}$ mamy więc liczników ułomków proſtych A, B, wyrażonych przez dwa początkowe terminy ſzeregu $\bar{A}$, $\bar{B}$, i przez ſtopnie ſtóſunku p, q. Ieżeli funkcyá ułomkowá rozbiera ſię na trzy proſte, potrzeba nam na oznaczenie trzech ilości nieznanych, tyleż zrównań, które wyciągniemy z wyrazu ogólnego, nadawſzy

dawſzy

dawſzy trzy różné wartości n: będzie więc w tym przypadku każdy licznik ułomku proſtego wyrażony przez trzy początkowé terminy ſzeregu, i przez ſtopnie zwiazku p, q, r. Zgoła tyle nam potrzeba w tem dochodzeniu zrównań, na ile ułomków proſtych rozbiera ſię funkcya ſkładana: te zrównania otrzymuiémy z wyrazu ogólnego, który nam ich podług potrzeby może doſtarczać: idzie więc zatem, że z iakiegokolwiek ułomku ſkładanego rodzących ſię ułomków proſtych liczniki możemy wyrazić przez początkowé wſpół-czynniki terminów ſzeregowych: liczba tych wſpół-czynników taka będzie wchodzić w wyraz każdego licznika, iaka ieſt liczba ułomków proſtych, na które ſię funkcya rozbiera. Co oczywiście wypada z uwagi nad ſzeregami i odpowiadaiącemi im wyrazami ogólnemi.

§. XXXVII.

Poniéważ każdy termin ſzeregu wyciągaiąc go z wyrazu ogólnego oznaczamy przez liczniki ułomków proſtych; té zaś liczniki potrafiemy wyrazić przez początkowé terminy ſzeregu, więc możemy każdy nayodległeyſzy termin ſzeregu wyrazić przez terminy początkowé. Ieżeliśmy więc w ſzeregach zwrotnych potrzebowali pewnéy liczby tuż poprzedzaiących terminów, możémy tę liczbę tuż poprzedzaiących terminów zmnieyſzyć, a na ich mieyſcé wprowadzić początkowe terminy ſzeregu. S kąd nam wypada naſtępuiacé do rozwiązania zadanie: ,,Ieżeli ſzeregu ,, zwrotnego termin każdy zawiſł od liczby pewnéy ,, tuż poprzedzaiących, wyrazić ten ſam termin przez ,, liczbę mnieyſzą tuż poprzedzaiących,,

S poprzedzaiących uwág wypadaią nowé właſności zwrotnych ſzeregów co do związku terminów.

Zaczniymy od nayprościeyſzych ſzczególnych przypadków. Daymy n.p. że ſzereg zwrotny powſtał z ułomków mianownika $1-a'z+b'z^2$, każdy więc w nim termin zawiſł od dwóch tuż poprzedzaiących, tak dalece, że n. p. $C=a'B-Ab'$. Ieżeli ułomek ten ſkładany rozbiera ſię na dwa proſte $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}$, będzie $a'=p+q$, $b'=pq$, a wyraz ogólny takiego ſzeregu $(Ap^n+Bq^n)z^n$. Chcąc s tego wyrazu wyciągnąć terminy ſzeregu $\overline{P}$, $\overline{Q}$, znaydziemy $\overline{P}=Ap^n+Bq^n$, $\overline{Q}=Ap.p^n+Bq.q^n$. Zważywſzy dobrze zadanie naſzé, zobaczemy iż w niem o więcey nie idzie tylko o wynalezienie zrównania między $\overline{P}$, $\overline{Q}$. Kombinuymy więc dwa oſtatnie s ſobą, a otrzymamy: $\overline{P}q-\overline{Q}=A(q-p)p^n$ - - $\overline{P}p-\overline{Q}=B(p-q)q^n$. Które rozmnożywſzy przez ſię, i włożywſzy za $p+q$, a'; za pq, b'; za $-p^2-q^2+2pq=-[(p+q)^2-4pq]=-[a'a'-4b']$, czyli $4b'-a'a'$; otrzymamy

$$\overline{P}^2b'-\overline{P}\,\overline{Q}a'+\overline{Q}^2=AB(4b'-a'a')b'^n. \text{ - - - } (K).$$

a ponieważ liczniki ułomków proſtych A, B, wyraziliśmy byli przez początkowe wſpół-czynniki ſzeregu,

$$A=\frac{\overline{A}q-\overline{B}}{q-p}, \text{ - - } B=\frac{\overline{A}p-\overline{B}}{p-q}, \text{ będzie}$$

$$AB=\frac{\overline{A}^2b'-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2}{4b'-a'a'},$$ włożywſzy tę wartość za A, B, w zrównanie (K) wypadnie: $\overline{P}^2b'-\overline{P}\,\overline{Q}a'+\overline{Q}^2=(\overline{A}^2b'-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2)b'^n$. Zrównanie 2go ſtopnia, które rozwiązawſzy otrzymamy:

$$\overline{Q}=\tfrac{1}{2}\overline{P}a'+\sqrt{[(\tfrac{1}{4}a'a'-b')\overline{P}^2+(\overline{A}^2b'-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2)b'^n]}$$

ieżeli więc termin iaki ſzeregu zwrotnego zawiſł od dwóch tuż go poprzedzaiących, wyrazić go możemy tylko przez ieden, ale na ten czas rozwiązać nam trzeba zrównanie 2go ſtopnia. To zrównanie daleko nam ogólniey rozwięzuie naſze żadanie, niżeśmy ie poięli, bo maiąc dwa pierwiaſtki, daie nam nie tylko termin tuż naſtępuiący, ale i tuż poprzedzaiący $\overline{P}$; pierwſzy wypadnie, biorąc znak dodatny przed cechą pierwiaſtkową, drugi zaś, biorąc znak odiemny. Ponieważ zaś w teraźnieyſzem zadaniu nie idzie, tylko o termin tuż naſtępuiący po $\overline{P}$, dla tego położyliśmy tylko ſam znak dodatny przed cechą pierwiaſtkową. Lubo $\overline{Q}$ zamyka w ſobie wyraz pierwiaſtkowy

ſtkowy, że że iednak nie mamy do czynienia tylko s ſamemi terminami wymiernemi; $\overline{Q}$ będzie koniecznie wymiernem, i funkcya pod znakiem pierwiaſtkowym ieſt koniecznie zupełną potegą drugą.

Maiąc ſzereg powſtaiący z ułomku mianownika $1-a'z+b'z^2-c'z^3$, którego ułomki czaſtkowe ſą - - $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}+\frac{C}{1-rz}$, wyráz zaś ogólny - - - $(Ap^n+Bq^n+Cr^n)z^n$, gdzie $a'=p+q+r$, $b'=pq+pr+qr$, $c'=pqr$: każdy termin w takowym ſzeregu zawiśnie od trzech poprzedzaiących tak dalece: że $\overline{R}=a'\overline{Q}-b'\overline{P}+c'\overline{O}$: chcąc $\overline{R}$ wyrazić przez dwa tylko poprzedzaiące $\overline{Q}$, $\overline{P}$; a działaiąc tym co wyżey ſpoſobem, będzie: $\overline{P}=Ap^n+Bq^n+Cr^n$, $\overline{Q}=Ap.p^n+Bq.q^n+Cr.r^n$, $\overline{R}=Ap^2.p^n+Bq^2.q^n+Cr^2.r^n$; S tych trzech zrównań między ſobą tak iak przdtem kombinowanych wypadnie zrównanie 3go ſtopnia uczące nas, że ieżeli termin ſzeregu zwrotnego zawiſł od trzech poprzedzaiących, wyrażemy go przez dwa tylko; ale na ten czas rozwiązać muſzemy zrównanie 3go ſtopnia. A s podobieńſtwa działań wnoſząc podobieńſtwo wypadków na inne ſzeregi, powinniśmy widzieć w ſamych początkach tę ogólną prawdę: że ieżeli termin ſzeregu zawiſł od m tuż poprzedzaiących, chcąc go wyrazić przez liczbę $m-1$, wpadamy na zrównanie ſtopnia m, które iakokolwiek pokaże ſię niewymierne i zawikłane, zawſze iednak po nadanych przyzwoitych wartościach ilościom w nie wchodzącym ſtanie ſię wymiernem.

Zatrzymawſzy ſię nad świeżo odkrytemi właſnościami ſzeregów zwrotnych, doſtrzeżemy nawet; że każdy termin w takowym ſzeregu może ſię przez iakiekolwiek s poprzedzaiących wyrazić. Każdy bowiem wyraża ſię przez tuż poprzedzaiące, więc kładąc za iedne poprzedzaiące ich znowu wartości w drugich poprzedzaiących, możemy od iakiegokolwiek terminu cofnąć ſię aż do początkowych, i wyrazić go przez funkcyą początkowych lub iakichkolwiek innych poprzedzaiących go w ſzeregu. Rachunek przez eliminacyą mógłby nas o tém nayoczywiściey przekonać, który ażeby ſobie ſkrocić, użyimy znowu naſzego początku §. 9. Weźmy w ſzeregu (ψ) termin maiący iakiś ſtóſunek z odlegleyſzym na odwrot w w ſzeregu, n. p. $\bar{X}z^{2n}$, którego wykładnik dwa razy większy od $\bar{P}z^n$, więc chcąc $\bar{P}$ wprowadzić w wyraz $\bar{X}$, z natury wykładników muſi $\bar{P}$ bydź wynieſioné do potęgi drugiey; wprowadziwſzy więc trzy niewiadome ilości f, g, h, do oznaczenia trzech terminów potęgi drugiey; będzie

$$\bar{X}=f\bar{P}^2+g\bar{P}\,\bar{Q}-hABb'^n \quad - - - \quad (c)$$

ponieważ zaś wyraz ogólny daie nam, $\bar{P}=Ap^n+Bq^n$ - - $\bar{Q}=Ap.p^n+Bq.q^n$ - - - $\bar{X}=Ap^{2n}+Bq^{2n}$ - - (d) kładąc w (c) za $\bar{P}$, $\bar{Q}$ iego wartość, i tak przerobioné równaiąc z (d), otrzymamy tyle zrównań ile terminów, które nam poſłużą na oznaczenie trzech wprowadzonych nieznanych ilości.

$$f\bar{P}^2= \quad fA^2.p^{2n}+fB^2.q^{2n}+2fAB.b'^n$$
$$g\bar{P}\,\bar{Q}=gA^2p.p^{2n}+gB^2q.q^{2n}+gABa'.b'^n$$
$$-hABb'^n= \quad - - - - \quad -hAB.b'^n$$

równaiąc drugiego członka terminy podobné z (d), znaydziemy: $f+gp=\frac{1}{A}$, - - - $f+gq=\frac{1}{B}$, - - - $2f+ga'-h=0$, a przeto $g=\frac{B-A}{AB(p-q)}$, $f=\frac{Ap-Bq}{AB(p-q)}$.

Aże z wyżſzych zrównań $B-A=\frac{\bar{A}a'-2\bar{B}}{p-q}$, $Ap-Bq=\frac{\bar{B}a'-2\bar{A}b'}{p-q}$, - - - - - - - - $AB(a'a'-4b')=-(\bar{A}^2b'-\bar{A}\,\bar{B}a'+\bar{B}^2)$; włożywſzy te wartości w g, f, h, wypadnie: $g=\frac{2\bar{B}-\bar{A}a'}{\bar{A}^2b'-\bar{A}\,\bar{B}a'+\bar{B}^2}$;

$f=$

$$f=\frac{2\bar{A}b'-\bar{B}a'}{\bar{A}^2b'-\bar{A}\,\bar{B}a'+\bar{B}^2},\quad h=\frac{(4b'-a'a')\bar{A}}{\bar{A}^2b'-\bar{A}\,\bar{B}a'+\bar{B}^2};$$

więc $$\bar{X}=\frac{(2\bar{A}b'-\bar{B}a')\bar{P}^2+(2\bar{B}-\bar{A}a')\bar{P}\,\bar{Q}}{\bar{A}^2b'-\bar{A}\,\bar{B}a'+\bar{B}^2}-Ab'^n \;.\;.\;(e)$$

W tem oſtatniem zrównaniu znayduie ſię b'^n, gdzie wykładnik n należy do $\bar{P}$: żebyśmy mieli wyraz terminów przez odległeyſze ſpoſobem nayogólnieyſzym którybyśmy rosciągnąć mogli do innych iakichkolwiek, trzebaby nam wyrzucić b'^n, a zatem znaleśdź drugie zrównanie na $\bar{X}$; możemy więc ieſzcze położyć $\bar{X}=f\bar{P}^2+g\bar{Q}^2-hABb'^n$, a działaiąc tak, iak przedtem znaydziemy:

$$\bar{X}=\frac{[a'b'\bar{A}-(a'a'-2b')\bar{B}]\bar{P}^2+(2\bar{B}-a'\bar{A})\bar{Q}^2}{a'(\bar{A}^2b'-\bar{A}\,\bar{B}a'+\bar{B}^2)}-\frac{2\bar{B}b'^n}{a'} \;.\;.\;.\;(m)$$

za pomocą dwóch zrównań (e), (m), wyrzuciwſzy b'^n, otrzymamy:

$$\bar{X}=\frac{(\bar{A}b'-\bar{B}a')\bar{P}^2-\bar{A}\,\bar{Q}^2+2\bar{B}\,\bar{P}\,\bar{Q}}{\bar{B}^2-a'\bar{A}\,\bar{B}+b'\bar{A}^2} \;.\;.\;.\;(n)$$

to zrównanie ſłużyć nam może za wzór do wyrażenia iakiegokolwiek terminu przez inny poprzedzaiący z wykładnikiem połową mnieyſzym: n. p. w ſzeregu (ψ) $\bar{Z}z^{2n+2}$. wyrazić możemy przez $\bar{Q}$, $\bar{R}$, kładąc $\bar{Q}$ za $\bar{P}$, $\bar{R}$ za $\bar{Q}$ w zrównaniu (n): będzie więc

$$\bar{Z}=\frac{(\bar{A}b'-\bar{B}a')\bar{Q}^2-\bar{A}\,\bar{R}^2+2\bar{B}\,\bar{Q}\,\bar{R}}{\bar{B}^2-a'\bar{A}\,\bar{B}+b'\bar{A}^2}.$$

A ponieważ $\bar{R}=a'\bar{Q}-b'\bar{P}$ uważaiąc ſzereg (ψ) iako powſtaiący z ułomku mianownika $1-a'z+b'z^2$; włożywſzy tę wartość za $\bar{R}$, wypadnie:

$$\bar{Z}=\frac{(\bar{A}b'-\bar{A}a'a'+\bar{B}a')\bar{Q}^2+2b'\bar{P}\,\bar{Q}(\bar{A}a'-\bar{B})-b'b'\bar{A}\,\bar{P}^2}{\bar{B}^2+a'\bar{A}\,\bar{B}+b'\bar{A}^2} \;.\;.\;(p)$$

Maiąc $\bar{Z}$, $\bar{X}$, znaydziemy ſrzodkuiący między niémi termin $\overline{Y}$ w ſzeregu (ψ). Mamy bowiem $\overline{Z}=a'\overline{Y}-b'\overline{X}$. więc $\overline{Y}=\frac{\overline{Z}+b'\overline{X}}{a'}$ to ieſt: - - - -

$$\overline{Y}=\frac{(\overline{B}-\overline{A}a')\overline{Q}^2+2b'\overline{A}\,\overline{P}\,\overline{Q}-b'\overline{B}\,\overline{P}^2}{b'\overline{A}^2-\overline{A}\,\overline{B}a'+\overline{B}^2}\quad - - - \quad (q).$$

Mamy więc $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ wyrażone przez $\overline{P}$, $\overline{Q}$: ciągnąc daley ten rachunek przyſzlibyśmy ieſzcze do wyrażenia dalſzych iakichkolwiek terminów przez $\overline{P}$, $\overline{Q}$, a iako $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, znaczyć mogą iakiekolwiek terminy wykładników parzyſtych albo nieparzyſtych, tak iako $\overline{P}$, $\overline{Q}$, iakiékolwiek poprzédzaiące; pokazuie ſię oczywiście, że w ſzeregu zwrotnym powſtaiącym z ułomku, można iakikolwiek bądź termin wyrazić przez dwa iakiékolwiek s poprzédzaiących, między któremi mięſzaią ſię ieſzcze ſame początkowe: a zatem w ſzeregu zwrotnym termin iakikolwiek bydź może uważany iako funkcya pewna iakichkolwiek s poprzedzaiących. Gdyby nas nawet rachunek był o téy prawdzie nie zapewnił, powinnibyśmy ią byli s proſtéy uwagi nad naturą ſzeregów zwrotnych wyciągnąć, i dla tego luboby należało do innych ieſzcze zwrotnych ſzeregów to dociekanie rosszerzyć; że iednak każdy będzie w ſtanie iśdź w tem za dopiero pokazaną drogą, przeſtaniemy teraz na ſamym przykładzie obiaśniaiącym to, cośmy w oſtatnich zrównaniach zamknęli.

Niech będzie ſzereg zwrotny $3+7x+18x^2+47x^3+123x^4+322x^5$ i t. d. - - $+Px^n+Qx^{n+1}$ i t. d; powſtaiący z ułomku $\frac{3-2x}{1-3x+x^2}$, będzie w nim $\overline{A}=3$, $\overline{B}=7$, $a'=3$, $b'=1$. $\overline{Q}=\frac{3}{2}\overline{P}+\sqrt{(\frac{5}{4}\overline{P}^2-5)}$, a ieżeli $P=123$, $n=4$, wynaydziemy $\overline{Q}=322$.

Wſpół-czynnik terminu x^{2n} - - $\overline{X}=\frac{-14\overline{P}\,\overline{Q}+24\overline{P}^2+3\overline{Q}^2}{5}$

Wſpół-czynnik terminu x^{2n+1} . . $\overline{Y}=\frac{2\overline{Q}^2+7\overline{P}^2-6\overline{P}\,\overline{Q}}{5}$

Wſpół-czynnik terminu x^{2n+2} . . $\overline{Z}=\frac{3\overline{P}^2-3\overline{Q}^2-4\overline{P}\,\overline{Q}}{5}$

§. XXXVIII.

Zwiążmy teráz to, co nám ſię z uwági nad ſzeregami pokázało. W nich chcąc odkryć wyráz ogólny, muſieliśmy mianownika rozbierać na ſwé mnożniki, s których powſtáwały ułomki cząſtkowé. Potrafiliśmy przez dopiero poprzedzaiący §. liczniki ułomków proſtych oznáczać przez początkowé terminy ſzeregu: gdybyśmy ieſzcze przez terminy ſzeregu mogli mianowniki ułomków proſtych wynaleśdź, mielibyśmy nowy ſpoſób rozbiéraniá funkcyi ſkładaney na ſwé mnożniki. Dotąd bowiem ten rozbiór czyniliśmy za pomocą zrównań, który tak daleko tylko może ſię rosciągnąć, iak daleko naſzé wiadomości o zrównaniach zaſięgaią. S kąd łatwo każdy ſobie wnieſie, że gdyby teorya ſzeregów nauczyła nas ſpoſobu innego wynaydowaniá mianowników ułomków proſtych; nauczyłaby nás także ſztuki dochodzeniá pierwiaſtków iakiegokolwiek zrównaniá. Mianowniki ułomków proſtych wyrażaliśmy wzorem $1-pz$; maiąc więc p, mámy to wſzyſtko co do odkryciá mnożnika proſtego w funkcyi, a w zrównaniu do odkryciá pierwiaſtku należy. Szukáymy czyli terminy iakiegokolwiek ſzeregu nie odkryią nám wártości na p.

Teorya ſzeregów zwrotnych prowadzi nas do wynaydowaniá pierwiaſtków bliskich prawdy w zrównaniu.

Dáymy że funkcyá ſkładaná $\frac{M}{N}$ rozbiéra ſię na ułomki cząſtkowé $\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}+\frac{C}{1-rz}+$ i t. d. a zatém $N=(1-pz)(1-qz)(1-rz)$ i t. d: wyrazem zaś ogólnym tey funkcyi ieſt: $(Ap^n+Bq^n+Cr^n+\text{i.t.d.})z^n=\overline{P}z^n$. drugi po nim naſtępuiący termin w ſzeregu, má wyráz ogólny $\frac{(Ap.p^n+Bq.q^n+Cr.r^n+\text{ i t. d.})z^{n+1}}{N5}=$

$=Qz^{n+1}$, gdybyśmy chcieli s tych dwóch wyrazów wyciągnąc wartość na p; potrzebaby, albo q, r, i t. d. wyrazić przez p, co ieſt rzeczą barzo trudną; albo żeby q, r, i t. d. w terminach całkiem znikły. Gdybyśmy nawet potrafili q, r, wyrazić przez p, niewielebyśmy na tem zyſkali; bo wpadłſzy na zrównanie ſtopnia n, niebylibyśmy w ſtanie rozwiązać ie. Zeby zaś q, r, i t. d. zniknąć mogły przed p, potrzebaby *naprzod:* aby q, r, były barzo małe względem p; *powtore:* aby n było liczbą nieſkończenie wielką; wiemy bowiem z Arytmetyki, że liczby nierówne tem ſię barziey od ſiebie w wartości oddalaią, im do wyżſzey potęgi bywaią podnieſione; gdyby więc p było więkſze od q, r; w wyżſzych potęgach corazby ie barziey przewyżſzało, tak dalece, że w potędze n nieſkończenie wielkiey, q, r, zupełnieby znikły w porównaniu p. Zniknąwſzy q, r, zoſtanie ſię z wyrazów ogólnych $Ap^n=\bar{P}$, $Ap.p^n=\bar{Q}$, więc - - $\frac{\bar{Q}}{\bar{P}}=p$, to ieſt: że termin nieſkończenie odległy w ſzeregu, rozdzielony przez poprzédzaiący, dałby wartość na p zupełną. Ieżeli zaś n nie będzie liczbą nieſkończenie wielką; q, r, nie znikną całkiem przed p, ale tem będą od niego mnieyſze, im n będzie więkſzem; ieżeli więc za n weźmiemy liczbę znacznie wielką, a maleiące barzo q, r, opuſzczemy; będziemy mieli tylko wartość bliſką prawdy na p, uczyniwſzy $\frac{\bar{Q}}{\bar{p}}=p$. to ieſt: ieżeli weźmiemy w ſzeregu barzo odległe terminy, i ieden z nich rozdzielémy przez poprzédzaiący, otrzymamy za wieloraz p, s którego $1-pz$ da mnożnika funkcyi: ten przerobiony na zrównanie przez wprowadzony związek, wyda $1-pz=0$, $z=\frac{1}{p}$, ieżeli więc p było naywiękſzym mnożnikiem podług naſzego przypuſzczenia,

nia,

niá, $z=\frac{1}{p}$ będzie pierwiáſtkiem tego zrównaniá náymnieyſzym, ale tylko bliſkim prawdy.

Stych barzo proſtych uwág wyciagnął W. Geometra *Daniel Bernoulli* ſpoſób wynaydowaniá pierwiáſtków bliſkich prawdy i podał go w tomie III. Pamiętników Peterzburſkich, którego nám tu użycie przypádá z dokładnością wyłożyć. Spoſób ten iak nam ſię dopiero pokázał, potrzebuie koniecznie, aby zrównanie podane do rozwiązaniá obrocić na mianownika ułomku: s tego potem zrobić ſzereg nieſkończony, którego dwa odległe terminy przez ſię rozdzielone dadzą pierwiáſtek náymnieyſzy, ale tylko bliſki prawdy. Dáymy więc że tákowem zrównaniem ieſt $N=o$. zniſzczywſzy w niem związek, będzie N funkcyą, i oraz mianownikiem, a iego wſpół-czynniki ſtopniami ſtóſunku, od których wartość terminów w ſzeregu zawiſła. Nie maiąc oznaczonego licznika tákowego ułomku, weźmy początkowe terminy ſzeregu podług upodobaniá: wiemy bowiem z §. 32. że licznik ułomku rozebranego ná ſzereg, nie wpływá tylko w wartość tylu początkowych terminów ſzeregu, ile on ſam má terminów w ſobie; s tych początkowych od upodobaniá terminów ułożemy inſze s ſtopniów ſtóſunku, a poſunąwſzy te terminny daleko, rozdzielemy nayodległeyſzy przez tuż go poprzedzaiący, co nám dá wártość na p, a z niey $z=\frac{1}{p}$, pierwiáſtek náymnieyſzy zrównaniá.

Przykład 1wſzy. Wynaleśdź pierwiáſtek náymnieyſzy zrównániá: $1-15z+66z^2-80z^3=o$:

Będzie: $\frac{M}{1-15z+66z^2-80z^3}$; s tego ułomku powſtanie ſzereg, ktorego każdy termin bedzie funkcyą trzech poprzedzaiących; ſtopnie zaś ſtóſunku ſą 15, 66, 80, tak dalece, że n. p. $\underline{Q}=15\overline{P}-66\overline{Q}+80\overline{N}$; $\overline{P}$,

$\overline{Q}$, $\overline{N}$,

O, N, znaczą terminy ſzeregu zaraz poprzedzaiące Q; wziąwſzy więc trzy początkowe terminy od upodobania, n. p. $1, 2, 6$, wypadnie ſzereg:

$1, 2, 6, 38, 334, 2982, 25726, 215798$, i t. d. s kąd $\frac{215798}{25726}=8,39221=p$. gdybyśmy ten ſzereg daley ciągli, ułomek dzieſiątkowy 39221 corazby malał, a pierwiaſtek przez to corazby ſię powiękſzał, tak dalece, iżbyśmy w odległeyſzych terminach trafili na $p=8$ bliſko; a zatém na $z=\frac{1}{p}$, bliſko $\frac{1}{8}$, który ieſt prawdziwym naymnieyſzym pierwiaſtkiem zrównania podanego.

Przykład 2gi. Niech będzie podane zrównanie: $1-16z+77z^2-134z^3+72z^4=0$, wynaleśdź iego pierwiaſtek naymnieyſzy?

Ponieważ zrównanie ieſt 4go ſtopnia, więc w ſzeregu s tąd powſtaiącym każdy termin zawiſł od czterech poprzedzaiących, to ieſt: $Q=16P-77O+134N-72M$; wziąwſzy cztery początkowé terminy od upodobania, otrzymamy ſzereg liczb:

$0, 1, 1, 2, 136, 2084, 23068, 215700$, i t. d. zaczém $\frac{215700}{23068}=9,351=p$: więc $z=\frac{1}{p}=\frac{1}{9,351}$, to ieſt pierwiaſtek naymnieyſzy ieſt bliki $\frac{1}{9}$:

Gdybyśmy zaś chcieli zrównania podanego odkryć pierwiaſtek naywiękſzy, potrzebaby nam ie przerobić na inne, któregoby pierwiaſtek naymnieyſzy, był naywiękſzym zrównania podanego; to ieſt trzeba uczynić $z=\frac{1}{x}$, a tak zrównanie na z, przerobiemy na - - - $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+$ i t. d. $+k=0$. ſzukaiąc potem tego oſtatniego zrównania pierwiaſtku, znaydziemy $x=\frac{1}{p}$, a s tąd $z=p$, pierwiaſtek naywiękſzy-

Maiąc n. p. zrównanie podané: $24-35z+12z^2-z^3=0$, a uczyniwſzy w niem $z=\frac{1}{x}$ przerobiemy ié na $1-12x+35x^2-24x^3=0$. s którego powſtanie ſzereg liczb: $1, 1, 5, 49, 437, 3649, 29669, 238801$, i t. d. zaczém $\frac{238801}{29669}=8,015133=p=z$, to ieſt, że pierwiaſtek naywiękſzy zrównania podanego ieſt bliſki 8: gdybyśmy daley ciągli ſzereg liczb: trafilibyśmy na liczbę mnieyſzą od znalezioney, którąby ſię niezmiernie mało różniła od 8, prawdziwego pierwiaſtku zrównania.

Uwagi nad ſpoſobem poprzédzaiącym.

Maiąc przytomné w myśli té wſzyſtkié początki i rozumowania, s którycheśmy teraźnieyſzą wyprowadzili naukę, przyznamy; że ten ſpoſób nie barzo nam ſię uda, kiedy zrównanie zawierać będzie pierwiaſtki barzo ſiebie bliſkie, tak dalece, że w wyżſzych potęgach ich wzroſt mało ſię co różni, a zatem nie można w tym przypadku iednego s takich pierwiaſtków brać za niknący w porównaniu drugiégo. Na ten czas potrzeba nam koniecznie przerobić zrównanie podané na inné, w któremby dwa te bliſkie ſiebie pierwiaſtki koniecznie ſię barziey różniły: czego dokażemy kładąc w niem za ilość nieznaną inną powiękſzoną lub zmnieyſzoną iakąkolwiek liczbą k; s kąd powſtanie zrównanie maiącé za naymnieyſzy pierwiaſtek to tylko, co brakuie k do pierwiaſtku prawdziwego. Maiąc n.p. zrównanie podané: $z^3-z^2+5z+5=0$, ktorego naywiękſzé dwá pierwiaſtki ſą $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$, niczem ſię od ſiebie prócz znaku nie różniącé: gdybyśmy w niem podług podanego ſpoſobu działali, trafilibyśmy na ſzereg: $1, 2, 3, 8, 13, 38, 63, 188, 313, 938, 1563$, i t. d. s których żadné dwie przyległé liczby, nie daią pierwiaſtku wzmiankowanego. Przeſtępuiąc zaś o ieden termin, i dzieląc każdy przez wtóry przed nim idący, znáydziémy kwadrat pierwiaſtku ſzukanego, to ieſt: $\frac{1563}{313}=$

$=\frac{938}{188}=\frac{313}{63}=5$, co nam daie widzieć, ze ile razy taki trafi ſię liczb ſzereg, którego terminy wſzyſtkie na przemian daią ten ſam wielo-raz; zrównanie go wydaiące, zamyka koniecznie pierwiaſtki te ſame, lecz z znakiem przeciwnym. Uczyniwſzy zaś w zrównaniu podanem $z=y+2$, przerobiemy ie na: $1-3y+5y^2-y^3=0$. s którego powſtanie ſzereg liczb: $1, 1, 1, 9, 33, 145, 609, 2585, 10945$, i t. d. s kąd: $\frac{2585}{10945}=0,2361=y$, $z=2,2361$, co ieſt bliſkie $\sqrt{5}$.

Spoſób Newtona prowadzący do piérwiaſtków zrównania coraz bliżſzych prawdy.

Sztuka ta rozdzielenia pierwiaſtku w zrównaniu daleko ieſzcze rozległeyſze może mieć użycie: doſzedłſzy n. p. przez iakikolwiek ſpoſób pierwiaſtka bliſkiego w zrównaniu, a chcąc to zbliżenie daley poſunąć, powiękſzamy naſz pierwiaſtek liczbą nieznaną k, którey potem wyciągnąwſzy wartość z zrównania, otrzymuiemy przydatek do pierwſzego pierwiaſtku, zbliżaiący nas barziey do prawdy.

Niech będzie n.p. zrównanie $x^3+5x+7=0$, którego bliſki pierwiaſtek przez iakikolwiek ſpoſób znalazłſzy równy $-1,1$ a chcąc doyśdź bliżey prawdy, kładę $x=-1,1+k$; k znaczy tu ułomek maiący bydź dodany do $-1,1$; tę wartość za x położywſzy w zrównaniu $x^3+5x+7=0$, przerobiemy ie na: $k^3-3,3k^2+8,63k+0,169=0$. a ponieważ k ieſt ułomkiem mnieyſzym od $0,1$; k^3, k^2, będą mnieyſzemi od $0,001, 0,01$; przeto możemy ie cale opuścić: zoſtanie ſię więc: $8,63k+0,169=0$, a zatem $k=-\frac{0,169}{8,63}=-0,019$. Pierwiaſtek więc zrównania podanego bliżſzy, będzie $x=-1,1+k=-1,119$. Chcąc ieſzcze doyśdź bliżey, czynię $x=-1,119+u$, a włożywſzy tę wartość w zrównanie podane przerobię ie na u, w którem opuściwſzy u^3, u^2, zoſtanie nam $8,756483u+0,00383 1842=0$, s kąd $u=-0,00044$; $x=-1,119+u=-1,11944$: tym ſpoſobem moglibyśmy ciągnąć naſze zbliżanie do barzo wielu cząſtek dzieſiątkowych.

kowych. Nawet w przerobionych zrównaniach na z, u, moglibyśmy nie opuſzczac tylko z^3, u^3, a pozoſtałe zrównanie 2go ſtopnia rozwiązawſzy, trafilibyśmy prawie na te ſame wypadki.

Ten ſpoſób barzo wygodny należałoby nám rozlegley wyłożyć, ale iego zrozumienie tak ieſt proſte i łatwe, iż przywiedziony przykład może nám wyſtarczyć do nauczenia nás iego w iakiemkolwiek zrównaniu. *Newton* naypierwey go podał w ſwey Arytmetyce powſzechney, a przyſtóſowanie go teraźnieyſze do teoryi *Bernoullego* ieſt tylko ſzczególnym tego ſpoſobu przypadkiem.

Teorya Bernoullego nie służy, kiedy zrównanie má pierwiaſtki równe.

Druga uwaga która nám ſię w użyciu teoryi *Bernoullego* ſtawić powinna, ściąga ſię do pierwiaſtków zrównania równych. Pamiętaymy że $\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} = p$ wypadło nám z wyrazu ogólnego ſzeregu, w którym inne ilości q, r, i t. d. uważaliśmy iako nierowne i nikmace w porównaniu z p. Przypuśćmy teraz że mianownik ułomka ſkładanego zamyka mnożniki równe, s których powſtaią ułomki cząſtkowe $\frac{A}{(1-pz)^2} + \frac{B}{1-pz} + \frac{C}{1-qz} + \frac{D}{1-rz}$ i t. d. ich wyrazy ogólne razem dodane będą: $[(n+1)Ap^n+Bp^n+Cq^n+Dr^n+ \text{i t. d.}]z^n=\bar{P}z^n$; $[(n+2)Ap^{n+1}+Bp^{n+1}+Cq^{n+1}+Dr^{n+1}+ \text{i t. d.}]z^{n+1}=\bar{Q}z^{n+1}$; przypuściwſzy nawet że p ieſt tak wielkie, iż q, r, i t. d. przed niém w znacznych potęgach nikną, zoſtanie ſię: $[(n+1)Ap^n+Bp^n]=\bar{P}$ . . . . $[(n+2)Ap^{n+1}+Bp^{n+1}]=\bar{Q}$ . . $\frac{\bar{Q}}{\bar{P}}=\frac{(n+2)A+B}{(n+1)A+B}p>p$.

Widzemy więc, że poſunąwſzy gdyby naydaley ſzereg liczb z zrównania powſtaiący, nie trafiemy na wartość p, ale zawſze nám wypadnie pierwiaſtek większy od rzetelnego, chyba żeby n było liczbą nieſkończoną; to ſamo znaydziemy na liczbę większą pier-

pierwiáſtków równych: co nám dowodzi że użycie ſpoſobu dopiero wyłożonego nie może nám ſię tak udadź iak w pierwiaſtkach nierównych. Zeby więc podane zrównanie można beſpiecznie przez ſpoſób *Bernoullego* traktować, trzeba nám ſię wprzód przekonać, czyli to nie zamyká w ſobie pierwiáſtków równych. Iakże tego będziem mogli dociec?

§. XXXIX.

Spoſób rozeznaniá pierwiáſtków równych w zrównaniu.

Pierwiáſtki równe należą do ſwego ogólnego wyrazu $(a+x)^m$, który nám wzór *Newtona* pokazuie. Szukáymy w włáſnościach tego wzoru przyzwoitey cechy, na rozeznanie takowych pierwiáſtków. Na ten koniec przypomnieć nám ſobie potrzeba to, cośmy w pierwſzey Części na końcu §. 12. o potęgach doſtrzegli: że maiąc funkcyą $M(a+x)^m$, i tę rozebraną na ſwoie terminy rozmnożywſzy przez poſtęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k, 4k$, i t. d. zniżemy ią o ieden ſtopień; będzie bowiem mnogość równá $Mmkx(a+x)^{m-1}$. Aże zrównanie zamykaiące iakąkolwiek liczbę pierwiáſtków równych wyrazić możemy przez $(a+x)^m(a'+b'x+c'x^2+$ i t. d.$)=o$, albo przez $(a+x)^m(b+x)^n(a'+b'x+c'x^2+$ i t. d.$)=o$ rozebrawſzy $(a+x)^m$, $(b+x)^n$ na ſwé terminy, i te rozmożywſzy naſamprzód wſzyſtkie przez $a'+b'z+c'z^2$ + i t. d. potem każdy z oſobna przez podłożony ſobie termin poſtępu Arytmetycznego $ok, k, 2k, 3k$, i t. d. obydwie potęgi zniżą ſię o ieden ſtopień, i zrównanie umnieyſzy ſię iednym s każdego gatunku pierwiáſtkiem równym. Ieżeli więc całe było rozdzielne przez $(a+x)^m.(b+x)^n$, po tem rozmnożeniu będzie tylko rozdzielne przez - - - $(a+x)^{m-1}.(b+x)^{n-1}$. To atoli oſtatnie przerobione zrównanie ma s pierwſzem za ſpólnego mnożnika $(a+x)^{m-1}.(b+x)^{n-1}$; s kąd wypada takie prawidło: ,,że zniżywſzy zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia o ieden, ,,ieżeli znaydziemy w niem ſpolnego mnożnika s podanem; zrównanie takowe będzie zamykało pierwiáſtki równe.,,

Teraz

Teráz maiąc podané ſobie do rozwiązaniá zrównanie, potrzeba ié naſámprzód dopełnić, ieżeliby których terminów brakowało, piſząc ié w ſwym porządku z mnożnikiém zero; ták dopełnioné rozmnóżmy ſpoſobém iuż wyłożonym przez poſtęp Arytmetyczny liczb, który lubo od upodobaniá zawiſł, dlá prościéyſzego atoli działaniá obierzémy poſtep $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ i t. d. takim ſpoſobém zrównanie zniży ſię o iedén ſtopień, króré nazwiémy *przerobionem*: ſzukáymy powtóré przez §. 21. mnożnika ſpólnégo obydwom zrównaniom. S kąd wypadną naſtępuiącé przypádki i wnioſki do nich przywiązane:

Ieżeli ten mnożnik będzié pierwſzego ſtopnia $(x-p)$, zrównanie podane, będzie miało dwa pierwiáſtki równé $(x-p)^2$

Ieżeli mnożnik ſpólny ieſt drugiégo ſtopnia, rozebráć go potrzeba na dwa 1go ſtopnia, króré albo będą równé albo nierówné: w pierwſzym przypádku zrównanie podané má trzy pierwiaſtki równé, s których każdy wyráża ſię przez tego mnożnika przywiedzionego do zero, w drugim záś przypádku zrównanie má cztéry pierwiáſtki równé; s których każdé dwa ſą różnego gatunku i wyrážaią ſię przez iednego z mnożników.

Zgoła ieżeli mnożnik ſpólny obydwóch zrównań ieſt ſtopnia n, rozebráć go należy na n mnożników pierwſzego ſtopnia: te ieżeli będą wſzyſtkié rowné, zrównanie podané má $n+1$ pierwiaſtków równych tego ſamego gatunku; ieżeli záś będą wſzyſtkié nierówné zrównanie má $2n$ mnożników równych co do liczby, a zaś n co do gatunku; każdému bowiem różnému mnożnikowi odpowiadá pára pierwiaſtków tego ſamego gatunku. Ieżeli w liczbie n mnożników iedné będą równé, drugié nierówné, liczbę każdégo gatunku powiękſzyć należy iednością; a zbiór ich pokaże liczbę pierwiaſtków równych w zrównaniu podaném:

Przykład I. Niech będzie zrównanie podané x^4-

$3x^3-6x^2+28x+24=0$, wynaleśdź czyli, i wiele ma pierwiaſtków równych?

Rozmnóżmy każdy iego termin przez podłożoną mu liczbę poſtępu Arytmetycznego $4, 3, 2, 1, 0$: wypadnie s tąd zrównanie przerobione $4x^3-9x^2-12x+28=0$, które ma za mnożnika ſpólnie z zrównaniem podanem: $x^2-4x+4=(x-2)^2$, co pokazuie, że zrównanie podane ma trzy pierwiaſtki równe $(x-2)(x-2)(x-2)=x^3-6x^2+12x-8=0$, przez to zrównanie $3go$ ſtopnia rozdzieliwſzy podane, otrzymamy czwarty pierwiaſtek $x+3=0$.

Przykład II. Maiąc zrównanie $x^4-10x^3+37x^2-60x+36=0$, wynaleśdź iego pierwiaſtki równe?

Wziąwſzy poſtęp Arytmetyczny liczb $4, 3, 2, 1, 0$, i przez każdy iego termin rozmnożywſzy termin zrównania, zniżemy ie o ieden ſtopień: $4x^3-30x^2+74x-60=0$. ſzukaiąc naywiękſzego mnożnika ſpólnego obydwóm zrównaniom, znaydziemy go x^2-5x+6: ten mnożnik rozebrany na dwa pierwſzego ſtopnia daie $x=2$, $x=3$, co pokazuie że zrównanie podane ma dwa pierwiaſtki równe iednego gatunku $(x-2)^2=0$, i dwa równe drugiego gatunku $(x-3)^2=0$ Mnogość bowiem $(x-2)^2(x-3)^2=0$ wyda zrównanie podane.

Wynalazek więc pierwiaſtków równych zawiſł od ſpoſobu rozbierania zrównań na ſwe mnożniki, który iak ieſt niedokładny widzieliśmy w §. 21. Nie możemy więc przyiśdź do rozeznania pierwiaſtków równych tylko w pewnych ſzczególnych przypadkach, które iednak pomóc nam wiele mogą w ſtóſowaniu teoryi *Bernoullego*. Widzieliśmy bowiem, że ta nie może ſię udadź chyba z znacznem oddaleniem ſię od prawdy, ieżeli zrównanie zamyka pierwiaſtki równe. Chcąc przeto naukę ſzeregów zwrotnych beſpiecznie i ſzczęśliwie ſtóſować do wynalezienia pierwiaſtków bliſkich, należy nam wprzód ſię przekonać przez dopiero podany ſpoſób, że zrównanie nie ma pierwiaſtków równych, to ieſt: że zrównanie podane, né, i drugié zniżoné o iedén ſtopień, nie maią żádnégo piérwiaſtku ſpólnégo.

Przebiegliśmy iuż piérwiaſtki równé i nierówné ale zawſze rzetelné; zoſtaie nám ieſzcze ſtóſować ſzeregi zwrotné do wynalezienia piérwiaſtków uroionych. Ponieważ każdé zrównanie pokazuie ſię w wyrazach rzetelnych, ſzeręg z niego powſtaiący, a w tym ſzeregu wieloraz z rozdzielenia iednégo terminu przez poprzédzaiący, nie może bydź tylko rzetelny. Idzie więc zatém żé piérwiaſtków uroionych w zrównaniu nie możémy ſzukać za pomocą ſzeregów, tylko zamieniaiąc té piérwiaſtki na rzetelné przez mnożenie ich po dwa na ráz. Chcąc zas ſzukać dwoiſtych takowych piérwiaſtków, potrzeba nám znowu ſzczególnégo wyrazu któryby oznaczał mnogość rzetelną, powſtaiącą z dwóch piérwiaſtków uroionych: dla czego ten przypadek muſzémy niżſzym uwagom zachować.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Zbieranie ſzeregów zwrotnych prowadzi nás do poznania Ułomków ciągłych, których ſię wykładaią znakomitſzé włáſności i użycie.

§. XL.

Summowanie ſzeregów zwrotnych, wiedząc związek zachodzący między terminami.

Pierwſzy widok rzucony ogólnie na naturę i rodzáy ſzeregów, podał nám trzy zadania zawieraiącé całą rozległość téy nauki. Rozwiązaliśmy ich iuż dwa, bo naſamprzód wyłożyliśmy barzo ogólny ſpoſób rozbierania funkcyi ułomkowych iakichkolwiek na ſzeregi: ſpoſób wydobyty z natury ilości nieoznaczonych, który ieſt iednem z naypięknieyſzych wynalazków *Des-Carta*. Właſności różné ſzeregów w tym rozbiorze doſtrzeżoné poſłużyły nám do odkrycia ſtóſunku między wſpół-czynnikiem iakiegokolwiek terminu, i wykładnikiem ilości nieznaney w tymże terminie: co nam pokazuie układ każdego terminu w iednym wyrazie który nazwano *wyrazem ogólnym*. Zoſtaie nam ieſzcze do wynalezienia ſpoſób wracaiący nas od ſzeregu do funkcyi, która go wydała, a którą my nazwiemy RODZĄCĄ (*Functio, Fractio generatrix*). Ieżeliśmy dobrze obięli prawdy §. 32, uznamy że rozwiązanie zadania trzeciego ieſt nayważnieyſzą cząſtką nauki o ſzeregach. W niem zamierzamy ſobie wynaleśdź każdego ſzeregu wyraz ſkończony, któryby tyle wartał, ile wſzyſtkie terminy ſzeregu razem dodane, lub pewna ich liczba. Spoſób ten nazwano ZBIERANIEM albo SUMMOWANIEM SZEREGÓW (*Summatio Serierum*).

Ponieważ dotąd ieden tylko gatunek ſzeregów przypadło nam roſtrząſać, któreśmy zwrotnemi nazwali; dla tego będziemy ſię tylko teraz zaſtanawiać nad zbieraniem ſzeregów do tego gatunku należących, to ieſt nad wynaydowaniem funkcyi ułomkowey któraby była równa ſzeregowi podanemu. Nie możemy zaś wiedzieć że ſzereg podany ieſt zwrotny, nie będąc pewnemi, że w nim każdy termin ieſt funkcyą poprzedzaiących; poznawſzy tę funkcyą, wiedzieć razem będziemy ſtopnie ſtóſunku, a zatem i mianownika ułomku. Nie idzie więc w takim przypadku tylko o wynalezienie licznika, który w ſamych tylko początkowych terminach ſzeregu ieſt zawarty. Iakże go odkryiemy? oto przez te ſame początki ilości nieoznaczonych, które nam dotąd ſłużyły: maiąc przez ſtopnie ſtóſunku danego mianownika, wprowadzemy w licznika ilości nieoznaczone a, b, c, d, i t. d. a rozebrawſzy potem taki ułomek na ſzereg. przez porównanie terminów wypadną nam wartości na niewiadome a, b, c, d, i t. d. Daymy n.p. że $A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4$ - - - $+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+Tz^{n+4}+$ i t. d. ieſt ſzeregiem podanym: że związek doſtrzeżony między terminami ſzeregu przyprowadził nas do mianownika $1-a'z+b'z^2-c'z^3+d'z^4$, będzie ułomek rodzący $\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{1-a'z+b'z^2-c'z^3+d'z^4}$, który rozebrawſzy na ſzereg i przywiódłſzy do zero, znaydziemy: $a=A$ - - - - - $c=C-Ba'+Ab'$

$b=B-Aa'$ - - $d=D-Ca'+Bb'-c'A$,

a przeto ſumma ſzeregu nazwana (s) będzie

$$s=\frac{A+(B-Aa')z+(C-Ba'+Ab')z^2+(D-Ca'+Bb'-Ac')z^3}{1-a'z+b'z^2-c'z^3+d'z^4}$$

Chcąc zaś zbierać ſzereg do pewnego tylko terminu n.p. Pz^n, nazwawſzy ſummę terminów od początku aż do końca (s), ſummę zaś terminów od Pz^n aż do końca nazwawſzy (s'), będzie $s-s'$, ſummą terminów od początku aż do Pz^n.

$$s'=Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+Tz^{n+4}+ \text{ i t. d.}$$

który rozdzieliwſzy przez z^{n+1}, otrzymamy ſzereg takiego wzoru iak podany; a przeto - - - $s'=$

$$\frac{Qz^{n+1}+(R-Qa')z^{n+2}+(S-Ra'+Qb')z^{n+3}+(T-Sa'+Rb'-Qc')z^{n+4}}{1-a'z+b'z^2-c'z^3+d'z^4}$$

co odciągnąwſzy od pierwſzey ſummy, otrzymamy zbiór terminów aż do Pz^n. Ieżeli mianownik ułomku będzie wyżſzego lub niżſzego ſtopnia, ſpoſób znalezienia licznika będzie ten ſam.

Niech będzie n.p. ſzereg podany: $1+3z+4z^2+7z^3+11z^4$ - - - $+Pz^n+$ i t. d. w którym każdy termin ieſt ſummą dwóch poprzedzaiących; mianownik zaś ułomku ieſt $1-z-z^2$, gdzie $a'=1$, $b'=-1$, $A=1$, $B=3$. Summa więc tego ſzeregu aż do Pz^n będzie:

$$s-s'=\frac{1+2z-Qz^{n+1}-(R-Qa')z^{n+2}}{1-z-z^2}=\frac{1+2z-Qz^{n+1}-Pz^{n+2}}{1-z-z^2}$$

gdyż $R-Qa'=-Pb'$. Aże według §. 37.

$Q=\frac{P+\sqrt{(5P^2\pm20)}}{2}$, włożywſzy tę wartość za Q w ſummę, i uczyniwſzy $z=1$, wypadnie ſumma liczb:

$$1+3+4+7+11+18 \; - - - \; +P = \frac{3P-6+\sqrt{(5P^2\pm20)}}{2};$$

można więc wyrazić ſummę do pewnego iakiego terminu, przez ſunkcyą terminu oſtatniego.

§. XLI.

Nie wiedząc związku między terminami ſzeregu, ſpoſób wynalezienia go, i rozeznania ſzeregów zwrotnych od innych.

Wziąwſzy na uwagę ſpoſób zbierania ſzeregów dopiero wyłożony, znaydziemy że ten potrzebuie w nas wiadomości o gatunku ſzeregu, i o związku zachodzącym między iego terminami: obrani choć z iedney takowéy wiadomości nie możemy bydź w ſtanie naznaczenia mianownika ułomku, a zatem ani ſummy ſzeregu. Gdybyśmy zadanie o zbieraniu ſzeregów mogli nie zawiśle od tych wiadomości rozwiązać, niezmierniebyśmy rozlegleyſzey doſtąpili o ſzeregach nauki. Usiłuymyż więc do takiego zamiaru rozwiązać zadanie naſtępuiące: „Maiąc podany ſobie iakikolwiek ſzereg, doyiśdź ſpoſobu rozeznania czyli „ten ieſt zwrotny lub nie; a będąc takim, wynaleśdź „iego ułomek rodzący?„ Nim przyſtąpiemy do rozwiązania tego zadania zgódźmy ſię nazywać ſzeregi te, które powſtaią z ułomków mianownika *1go, 2go, 3go, 4go, mgo* ſtopnia; *Szeregami 1go, 2go, 3go, 4go, mgo Porządku*, iakéśmy iuż pod §. 33 uczynili, mówiąc o ſzeregach Algebraicznych. Zeby ſię dowiedzieć, czyli ſzereg podany iakikolwiek ieſt zwrotny lub nie; potrzebaby doyiśdź, czyli on powſtał z ułomku wymiernego, w którym licznik ieſt niżſzey potęgi od mianownika, a przeto potrzebaby nam znaleśdź ſpoſób przerobienia ſzeregu na ułomek.

Szereg zwrotny rodzi ſię z ułomku przez ciągłé dzielenie, s którego nowy wieloraz daie nowy termin ſzeregu; potrzebaby nam więc w tém ſamém działaniu ſzukać ſpoſobu wrocenia ſię od tych ciągłych wielorazów do ſaméy funkcyi dzielącey i podzielney. Niech będzie $A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+$ i t. d. $=s$ ſzeregiem zwrotnym pierwſzego porządku, będzie iego ułomek rodzący pierwſzego ſtopnia, czyli $s=\frac{a}{a'+b'z}$;

więc

wiec $\frac{1}{s}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{a}z=p+qz$, kładąc p za $\frac{a'}{a}$; q za $\frac{b'}{a}$; a przeto wieloraz tego dzielenia będzie funkcyą ſkończoną: s kąd wypada, że rozdzieliwſzy iedność przez ſzereg podany, ieżeli s tego dzielenia otrzymamy wieloraz wzoru $p+qz$, bez żadney reſzty; ſzereg naſz będzie ſzeregiem zwrotnym *Pierwſzego porządku*, a iedność rozdzielona przez ten wieloraz będzie ułomkiem rodzącym i razem ſummą ſzeregu.

Ieżeli ſzereg podany ieſt drugiego porządku, należy on do ułomku drugiego ſtopnia $\frac{a+bz}{a'+b'z+c'z^2}=s$, będzie więc $\frac{1}{s}=\frac{a'+b'z+c'z^2}{a+bz}$ a wykonawſzy to dzielenie i nazwawſzy wſpół-czynnika reſzty $\frac{bb'}{a}+c'$, (a''); otrzymamy $\frac{1}{s}=p+qz+\frac{a''z^2}{a+bz}$. Uważaiąc to dzielenie w ſzeregu nieſkończonym s, widziemy że przezeń rozdzielona iedność wyda za wieloraz $p+qz$, i oprócz tego zoſtanie ſię reſzta rozdzielna przez z^2: ta reſzta będzie ſzeregiem znowu nieſkończonym, którego s ieſt dzielnikiem. Nazwiymy ten ſzereg pozoſtały (s') wyrażaiąc go przez $T+T'z$ $+T''z^2+T'''z^3+$ i t. d. Będzie więc równaiąc wieloraz z ułomku ſkończonego z wielorazem ſzeregowym:

$$\frac{1}{s}=p+qz+\frac{s'z^2}{s}=p+qz+\frac{a''z^2}{a+bz};\text{ więc }\frac{s'}{s}=\frac{a''}{a+bz},$$

a przeto $\frac{s}{s'}=\frac{a}{a''}+\frac{b}{a''}z=p'+q'z$; co nas uczy; że rozdzieliwſzy iedność przez ſzereg nieſkończony s, i otzymawſzy $p+qz$, z reſztą s', która ieſt także ſzeregiem nieſkończonym, ieżeli przez tę reſztę s' dzieląc powtórnie ſzereg podany s, przyidziemy do wielorazu ſkończonego bez żadney reſzty; ſzereg takowy będzie ſzeregiem zwrotnym *drugiego Porządku*, którego ułomek $= \frac{1}{p+qz+\frac{s'}{s}z^2} = \frac{1}{p+qz+\frac{z^2}{p'+q'z}} = s.$

Ieżeli ſzereg ieſt 3go porządku; ułomek go rodzący muſi mieć mianownika 3go ſtopnia, będzie więc: $s = \frac{a+bz+cz^2}{a'+b'z+c'z^2+d'z^3}$, $\frac{1}{s} = \frac{a'+b'z+c'z^2+d'z^3}{a+bz+cz^2}$, wykonawſzy to działanie otrzymamy za ilość ſkończoną $p+qz$, i reſztę pozoſtałą $\frac{a''z^2+b''z^3}{a+bz+cz^2}$, przez p, q, a'', b'', znacząc wſpół-czynniki z, które s tego dzielenia wypadną. A ponieważ to działanie które tu odbywamy z ułomkiem, odbywać należy s ſzeregiem nieſkończonym; reſzta s tego dzielenia będzie ſzereg nieſkończony s' rozdzielny przez z^2, i maiący za dzielnika s; wieloraz więc ſzeregu wyrazi ſię przez $\frac{1}{s}$ $= p+qz+\frac{s'z^2}{s} = p+qz+\frac{a''z^2+b''z^3}{a+bz+cz^2}$; przeto $\frac{s'}{s} =$ $\frac{a''+b''z}{a+bz+cz^2}$. To oſtatnie zrównanie pokazuie ten ſam przypadek któryśmy w ſzeregach 2go porządku uważali, gdyż $\frac{s}{s'} = \frac{a+bz+cz^2}{a''+b''z}$. Tu wykonane znowu dzielenie wyda wieloraz $p'+q'z+\frac{a'''z^2}{a''+b''z}$; gdzie reſzta pozoſtała będzie, ſzereg nieſkończony s'', rozdzielny przez z^2, i maiący za dzielnika s' tak dalece że: $\frac{s}{s'} = p'+q'z+\frac{a'''z^2}{a''+b''z} = p'+q'z+\frac{s''z^2}{s'}$; a przeto $\frac{a'''}{a''+b''z} = \frac{s''}{s'}$; $\frac{s'}{s''} = \frac{a''+b''z}{a'''} = p''+q''z$. co nas znowu uczy: że maiąc ſzereg podany, i przezeń rozdzieliwſzy iedność, otrzymamy naſamprzód wielo-raz

$p+qz,$

$p+qz$, a za reſztę ſzereg nieſkończony s'; przez tę reſztę dzieląc znowu ſzereg s, otrzymamy wieloraz $p'+q'z$, a za reſztę ſzereg nieſkonczony który wyrażam przez s'': przez tę oſtatnią reſztę, dzieląc reſztę poprzedzaiącą s', ieżeli trafię na wieloraz zupełny bez reſzty; ſzereg podany s będzie ſzeregiem zwrotnym trzeciego porządku. A ponieważ - - $s=$

$$\frac{1}{p+qz+\frac{s'}{s}z^2}; \quad \frac{s'}{s}=\frac{1}{p'+q'z+\frac{s''z^2}{s'}}; \quad \frac{s''}{s'}=\frac{1}{p''+q''z}$$

będzie $s=\cfrac{1}{p+qz+\cfrac{z^2}{p'+q'z+\cfrac{z^2}{p''+q''z}}}$ co przerobiwſzy na ułomek poſpolity, otrzymamy ſummę ſzeregu podanego, czyli ułomek rodzący ſzereg podany.

S trzech tych ſzczególnych przykładów mamy iuż prawo wnieść ſpoſób ogólny na rozeznanie ſzeregów zwrotnych, i na wynalezienie ułomków rodzących: ten ſpoſób z działań poprzedzaiących wyciągniony i rozwięzuiący zadanie, zamyka ſię w takowem prawidle: „Maiąc ſobie podany ſzereg, dziel przez niego iedność, poki nie otrzymaſz za wieloraz dwóch „terminów wzoru $p+qz$; ieżeli ſię zoſtała reſzta s', „dziel przez nię ſzereg podany s, poki nie wypadną „na wieloraz dwa terminy $p'+q'z$; ieżeli z drugiego tego dzielenia zoſtała reſzta s''; dziel przez nię „reſztę poprzedzaiącą s', poki za wieloraz nieotrzymaſz dwóch terminów wzoru $p''+q''z$: ieżeli ieſzcze zoſtanie ſię reſzta s'''; dziel przez nię reſztę „poprzedzaiącą s'', a tak ciągnąc daley dzielenie reſzty poprzedzaiącey, przez reſztę pozoſtałą z oſtatniego dzielenia, przyidzieſz koniecznie do wielorazu zupełnego bez żadney reſzty, ieżeli ſzereg ieſt „zwrotny; tak dalece: że liczba dzielenia będzie razem liczbą porządku do którego ſzereg należy; i

,, ieżeli ſzereg ieſt *ngo* porządku; dzielenie ſkończy ,, ſię na *ntym* działaniu. Ieżeli zaś dzielenie takim ,, ſpoſobem odbywane nie przyprowadzi cię do wie- ,, lorazu zupełnego; ſzereg podany nie ieſt ſzeregiem ,: zwrotnym.,,

Obiaśniymy to w przykładach:

Maiąc podany ſzereg liczb $1, 2, 3, 3, 7, 5, 15, 9, 31, 17, 63, 33, 127, 65,$ i t. d. ktorego prawo cale nam nieznane, wynaleśdź czyli ieſt zwrotnym lub nie? i ieżeli ieſt takim, odkryc iego ułomek rodzący?

Podane liczby układam podług wzoru ſzeregów z ilością nieznaną, to ieſt: $1+2z+3z^2+3z^3+7z^4+5z^5+15z^6+9z^7+31z^8+17z^9+63z^{10}+33z^{11}+127z^{12}+$ i t. d. (s); rozdzieliwſzy przezeń iedność, otrzymam $\frac{1}{s}=1-2z$; za reſztę zaś ſzereg $z^2+3z^3-z^4+9z^5-5z^6$ i t. d. który rozdzieliwſzy przez z^2, wypadnie

(s') - - - $1+3z-z^2+9z^3-5z^4+21z^5-13z^6+45z^7-29z^8+93z^9-$ i t. d. przez ten ſzereg dzieląc ſzereg podany, będzie $\frac{s}{s'}=1-z$, reſzta pozoſtała: $7z^2-7z^3+21z^4-21z^5$ i t.d. którą rozdzieliwſzy przez z^2, zoſtanie ſię ſzereg

(s'') - - - $7-7z+21z^2-21z^3+49z^4-49z^5+$ i t. d.

Przez tę reſztę dzieląc reſztę poprzedzaiącą s', otrzymam za wieloraz zupełny $\frac{s'}{s''}=\frac{1+4z}{7}$ bez żádnéy reſzty, co mi pokazuie, że ſzereg podany s, ieſt ſzeregiem zwrotnym $3go$ porządku, którego ułomek - -

$$=\cfrac{1}{1-2z+\cfrac{z^2}{1-z+\cfrac{7z^2}{1+4z}}} \quad \text{- - - - -} \quad (a)$$

to ieſt: $\frac{1+3z+3z^2}{1-z-2z^2-2z^3}$ iako ſię pokáże niżéy.

Doſtrze-

Doſtrzegliśmy w teraźnieyſzém działaniu, że każdy zoſtaiący ſzereg, który ma ſłużyć za dzielnika, ieſt rozdzielny przez z^2, co koniecznie wypada z natury działania. Przytrafić ſię atoli może, że ſzereg takowy będzie zamykał w pierwſzym zaraz terminie potęgę wyżſzą nad z^2, i na ten czas żeby nie wprowadzić wykładników odiemnych w wieloraz, można cały ſzereg przez tę potęgę rozdzielić, która ſię w pierwſzym terminie pokaże, byleby takową potęgę położyć za z^2 w liczniku $\frac{1}{s'}$, $\frac{1}{s''}$ i t. d. n. p.

Niech będzie podany ſzereg liczb: 1, 1, 1, 2, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 13, 13, 14, 16, i t. d. układam z niego ſzereg potęg:

$1+z+z^2+2z^3+4z^4+6z^5+7z^6+7z^7+7z^8+8z^9+$ i t.d. - - - (s):

dzieląc przezeń iedność, otrzymam za wieloraz $\frac{1}{s}=1-z$, a za reſztę $-z^3-2z^4-2z^5-z^6 ** -z^9-2z^{10}$ i t. d. to ieſt:

(s') - - - $1+2z+2z^2-z^3 ** +z^6+2z^7+2z^8+z^9 ** z^{12}$ i t.d. przez co dzieląc znowu ſzereg podany s, otrzymam za wieloraz $\frac{s}{s'}=1-z$; za reſztę zaś $z^2+3z^3+5z^4+6z^5+$ i t. d. $=s''z^2$, zaczem:

(s'') - - - - $1+3z+5z^2+6z^3+6z^4+6z^5+7z^6+9z^7+11z^8+$ i t. d, przez tę znowu reſztę dzieląc reſztę poprzedzaiącą s', wypadnie $\frac{s'}{s''}=1-z$, bez żádney reſzty, co nam dowodzi, że ſzereg podany ieſt zwrotnym, ktorego ułomek wyraża ſię przez - - - -

$$\cfrac{1}{1-z-\cfrac{z^3}{1-z+\cfrac{z^2}{1-z}}} \quad - \quad - \quad - \quad (b).$$

ten przywiodłſzy do ułomku poſpolitego,

litégo, znaydziem $s = \frac{1-2z+2z^2}{1-3z+4z^2-3z^3+z^4}$; przeto ſzereg podany ieſt czwartego porządku, lubo trzy tylko zachodziły działania: co żebyśmy dokładniey oznaczyli, niech n znaczy liczbę działań; p, q, r, i t.d. potęgi z w licznikach ułomków, czyli potęgi przez które dzielą ſię reſzty s', s'', s''', i t. d. będzie ſzéreg takowy, którego reſzty nie ſą ſtatecznie rozdzielne przez z^2, ale przez potęgi p, q, r, i t. d; będzie mowię takowy ſzereg porządku $n+(p-2)+(q-2)+(r-2)+$ i t. d. o czem nas przykłady łatwo przekonaią.

§. XLII.

Opiſanie ułomków ciągłych.

Spoſób rozeznawania ſzeregów zwrotnych zależący na ciągłem dzieleniu iedney reſzty przez drugą, odkrył nam nowy rodzay ułomków iakiemi były *(a)*, *(b)*, gdzie każdy mianownik zamyka ilość całką złączoną z ilością łamaną. Takowe ułomki nazwano CIĄGŁEMI (*Fractiones continuae*). Przez nie wyrażaią ſię zbiory czyli ſummy ſzeregów zwrotnych, tak dalece, że im ſzereg iaki ieſt wyżſzego porządku, tem ſię iego ſumma w dłużſzym ułomku ciągłym zawiera; i ten ułomek ciągnie ſię bez końca, ieżeli ſzereg nie należy do klaſsy ſzeregów zwrotnych. Nie możémy więc ſummy ſzeregów zwrotnych w ułomku poſpolitym wyrazić, nie umiawſzy ſpoſobu przerabiania ułomków ciągłych na poſpolité. Spoſob zaś ten lubo ieſt barzo proſty, iednakowóż dla gruntownego poznania nowego tego rachunku, godna ieſt rzecz naſzey uwagi wniśdź w ſciśleyſze roſtrząśnienie iego natury i właſności, które nam tu z porządku barzo zwięzłego przypada. Obrocémy więc uwagę naſzę *naprzód* na poznanie rozległeyſze natury ułomków ciągłych: *powtóre* na ſpoſób przerabiania ich na ułomki poſpolite; *potrzecie* na wypadki ſtąd wynikaiące i obiaśniaiące nas o właſnościach ułomków ciągłych.

Co do pierwſzego: trafiliśmy na ułomki ciągłe, dzieląc reſzty zoſtaiące iedne przez drugie; czyli chcąc to ogólniey wyrazić, ſzukaiąc naybliżſzych wartości całkich, tych funkcyi, których nie możemy wyrazić zupełnie. Zebyśmy więc rozległey obięli znaczenie i początek ułomków ciągłych, wyſtawmy ſobie funkcyą α, którey nie możemy w wyrazie całkim zawrzeć, ale do tego wyrazu możemy ſię co raz barziey zbliżać. Te bliſkie wartości znaczyć będziemy literami łacińſkiemi $a, b, c, d, e,$ i t. d. ich zaś reſzty pozoſtałe zupełne wyrażać będą litery greckie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,$ i t.d. Ieżeli α ieſt funkcyą ułomkową, ſzukaymy wartości całkiey, która ią naybliżey wyraża, i nazwieymy ią b; zoſtanie ſię więc s tego dzielenia reſzta $(\alpha-a)<1$, chcąc znowu tey reſzty mieć naybliżſzą wartość całką, muſzę ią przerobić na wyraz większy od iedności. Ieżeli $(\alpha-a)<1$, będzie - - - $\frac{1}{\alpha-a}>1=\beta$, $\alpha=a+\frac{1}{\beta}$; ponieważ β ieſt większe od iedności, ſzukam naybliżſzego iey całkiego wyrazu, który nazywam b; s tego podziału zoſtanie ſię znowu reſzta $(\beta-b)<1$, więc $\frac{1}{\beta-b}=\gamma>1$, a przeto $\beta=b+\frac{1}{\gamma}$; ſzukam znowu wartości całkiey naybliżſzey γ, i nazywam ią c; s tego dzielenia zoſtanie ſię reſzta $(\gamma-c)<1$, więc $\frac{1}{\gamma-c}=\delta>1$, a przeto $\gamma=c+\frac{1}{\delta}$; ponieważ ieſzcze $\delta>1$, ſzukam naybliżſzey mu wartości całkiey, którą nazywam d; zoſtanie ſię reſzta $(\delta-d)<1$, a zatem $\frac{1}{\delta-d}=\varepsilon>1$,

z kąd ſię rodzą

$\delta=d+$

$\delta=d+\frac{1}{\varepsilon}$; ciągnąc tak daley to dochodzenie, muſzę koniecznie wyczerpać α, bo muſzę koniecznie przyiśdź do nayprościeyſzego wyrazu, którego iuż daley dzielić niepodobna, chyba że α nie ieſt funkcyą algebraiczną, albo że ieſt funkcyą algebraiczną niewymierną; i na ten czás działanie moie pociągnie ſię bez końca. Zbierzmyż teráz te wſzyſtkie zbliżania wypadki.

$$\alpha=a+\frac{1}{\beta},\ \beta=b+\frac{1}{\gamma},\ \gamma=c+\frac{1}{\delta};\ \delta=d+\frac{1}{\varepsilon},\ \text{i t. d.}$$

$$\alpha=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{\gamma}},\quad \text{czyli}\quad \alpha=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{i t. d.}}}}}$$

$$\alpha=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{\delta}}},$$

i t. d.

ich właſność co do znaków

Poniéważ według naſzégo przypuſzczenia a, b, c, d, e, i t. d. ſą ilościami całkiemi naybliżſzemi ilości α, β, γ, δ, ε, i t. d. ilości zaś naybliżſzé ſą albo te, które tuż poprzedzaią wártość prawdziwą, i ſą od niey mnieyſze; albo te które tuż idą po wártości prawdziwey i ſą od niéy większé: ieżeli a, b, c, d, i t.d. ſą tuż poprzedzaiącemi i mnieyſzemi od wártości prawdziwych α, β, γ, δ, i t. d. reſzty pozoſtałe $\alpha-a$, $\beta-b$, $\gamma-c$ ſą dodatné. Ieżeli zaś wártości bliſkie a, b, c, d, i t.d. ſą większé od prawdziwych n.p. $a>\alpha$ reſzta $\alpha-a$, a zatem $\frac{1}{\alpha-a}=\beta$ ieſt odiemną; ieżeli β ieſt odiemné, b muſi bydź takiém; gdyż ieſt tego ſamégo rodzaiu ilością naybliżſzą β; b będąc odiemné, ieżeli ieſt znowu ilością większą od β; $\beta-b=\frac{1}{\gamma}$.

będzie

będzie ilością dodatną, więc i c bydź muſi dodatné: c będac dodatné a razem naybliżſze γ, ieżeli $c > \gamma$; będzie $\gamma - c = \frac{1}{\delta}$ ilością odiemną; więc δ będzie odiemné, a zatém i d iego wartość całka naybliżſza: δ, d, będąc odiemné, ieżeli $d > \delta$ będzie $\delta - d = \frac{1}{\varepsilon}$ ilością dodátną, zaczém e będzie dodatné; s kąd ſię pokazuie; że ieżeli za naybliżſze całkie wartości brać będziemy ilości mnieyſze od prawdziwych; ułomek ciągły s tąd powſtaiący cały będzie dodatny; ieżeli zaś za naybliżſze wartości brać będziemy ilości więkſze od prawdziwych; ułomek ciągły będzie miał w ſwych terminach znaki dodatne z odiemnemi na przemian. Tymże ſamym ſpoſobem rozumuiąc znaydziém, że ieżeli iednę ilość naybliżſzą weźmiemy więkſzą od prawdziwey, inne zaś po niey naſtępné weźmiem mnieyſze; wſzyſtkie terminy ułomku ciągłego po tey więkſzey bliſkiey wartości idące będą odiemne. Chcąc te wſzyſtkie rozumowania iaśniey widzieć w przykładzie, przypuśćmy, że α ieſt ułomkiém poſpolitym $\frac{A}{B}$, przypuściwſzy i to że $A > B$ lubo to przypuſzczenie nie ieſt konieczné: dzieląc A przez B, otrzymamy za wieloraz a, za reſztę C; zaczém $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$, gdzie $C < B$ więc $\frac{B}{C} > 1$: dzielę znowu B przez C, i otrzymám zá wieloráz całki b, za reſztę zaś D; przeto $\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$, gdzie $D < C$, a zatém $\frac{C}{D} > 1$, którey ſzukaiąc znowu bliſkiey wartości całkiey c, a reſztę przewracaiąc, przerobię ią na ilość złożoną z całkiey i ułomkowey: takim ſpoſobem

ciągnąc

ciągnąc dzielenie, przyidę do wyczerpania ułomku $\frac{A}{B}$, ile razy ten zamykać będzie funkcyą algebraiczną wymierną: a ieżeli zoſtaiące ułomki przewracam za każdem działaniem, przewracaiąc także wieloraz i robiąc go z całkiego ułomkowym, nie naruſzam nic wartości prawdziwey $\frac{A}{B}$. Niech będzie $\frac{A}{B} = \frac{1103}{887}$, biorac za wieloraz nayblíżſzą wartość albo wſzyſtkie liczby mnieyſze, albo iednę więkſzą, a inne mnieyſze; otrzymamy

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}} \quad \text{albo} \quad \frac{1103}{887} = 2 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{1}{-7 + 1 \text{ i t. d.}}}}$$

§. XLIII.

Ułomki ciągłe przerabiaią ſię na poſpolite.

Ponieważ w ułomku ciągłym każdy mianownik ſkłada ſię z ilości całkiey i łamaney; ſpoſób przywiedzenia go do ułomku poſpolitego wypada s prawideł arytmetyki: to ieſt zaczynać należy działanie od oſtatniego mianownika, i każdą ilość całką przywieśdź do mianownika danego, którego potem przenioſłſzy do licznika umnieyſzemy ułomek iednym mianownikiem: to czyniąc podobnie z dalſzemi ułomkami, za każdem działaniem zgubiemy iednego mianownika poki do pierwſzego przyſzedłſzy, nie przywiedziemy całego ułomku ciągłego do iednego tylko mianownika całkiego. Zobaczmy to w rozebranym na części ułomku ciągłym; i abyśmy nie ścieśnili ogólności prawideł, weźmiemy ieden ułomek ciągły maiący wſzędzie za licznika iedność, drugi maiący ilość iakąkolwiek.

$$\alpha=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{ i t. d.}}}}}$$

$$\frac{a}{1}\cdots\cdots=\frac{a}{1}$$

$$a+\cfrac{1}{b}\cdots\cdots=\frac{ab+1}{b}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}\cdots\cdots=\frac{abc+c+a}{bc+1}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}\cdots\cdots=\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}=\frac{abcde+cde+ade+abe+e+abc+c+a}{bcde+de+be+bc+1}$$

$$\alpha=a+\cfrac{a'}{b+\cfrac{b'}{c+\cfrac{c'}{d+\cfrac{d'}{e+\text{ i t. d.}}}}}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{a}{1}$$

$$a+\frac{a'}{b} = \frac{ab+a'}{b}$$

$$a+\cfrac{a'}{b+\cfrac{b'}{c}} = \frac{abc+ca'+b'a}{bc+b'}$$

$$a+\cfrac{a'}{b+\cfrac{b'}{c+\cfrac{c'}{d}}} = \frac{abcd+cda'+adb'+abc'+a'c'}{bcd+db'+bc'}$$

i t. d.

Zaſtanowiemy ſię naprzód nad ułomkiem ciągłym maiącym wſzędzie iedność za licznika, dla tego że ten gatunek ieſt nayczęſtſzy w używaniu; powtóre że uwagi nad nim mogą bydź podobnym ſpoſobem rosciagnione do drugiego. Znoſząc s ſobą te ułomki poſpolite, doſtrzeżemy w ich rodzaiu, że każdy licznik ułomku poſpolitego ieſt funkcyą dwóch liczników poprzedzaiących, i każdy mianownik funkcyą także dwóch mianowników poprzedzaiących, to ieſt, rozmnożywſzy pierwſzego poprzedzaiącego licznika przez nową literę w ułomku ciągłym, i do tey mnogości dodawſzy poprzedzaiącego licznika, wypadnie licznik nowego poſpolitego ułomku: to ſamo prawo ma mieyſce w mianowniku każdym, tak dalece, że wyſtawiwſzy ſobie przez A, B, C, D, E, F, i t.d. ſzereg liczników powſtaiących z ułomków ciągłych co raz dłużſzych; mianowników zaś tychże poſpolitych ułomków przez A', B', C', D', E' i t. d. znaydziemy między niemi taki związek:

$$(k)\quad \begin{array}{l} A=a \\ B=bA+1 \\ C=cB+A \\ D=dC+B \\ E=eD+C \\ \text{i t. d.} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} A'=1 \\ B'=b \\ C'=cB'+A' \\ D'=dC'+B' \\ E'=eD'+C' \\ \text{i t. d.} \end{array} \quad (l)$$

a, b,

$a, b, c, d, e,$ i t. d. będąc ilościami koniecznié całkiémi, mogą bydź dodatné lub odiemné, a dla nich niektóré terminy w zrównaniach poprzedzaiących będą takié. Ieżeli naſamprzód wſzyſtkié będą dodatne, dzieląc ié przez ſię, wypadnie:

$$\begin{array}{cll c}
 & \text{na liczniki,} & \text{na mianowniki.} & \\
 & \frac{B}{A}=b+\frac{1}{A} & \frac{B'}{A'}=b & \\
 & \frac{C}{B}=c+\frac{A}{B} & \frac{C'}{B'}=c+\frac{A'}{B'} & \\
(m) & \frac{D}{C}=d+\frac{B}{C} & \frac{D'}{C'}=d+\frac{B'}{C'} & (n) \\
 & \frac{E}{D}=e+\frac{C}{D} & \frac{E'}{D'}=e+\frac{C'}{D'} & \\
 & \text{i t. d.} & \text{i t. d.} &
\end{array}$$

przypuściwſzy nawet że $a, b, c, d, e,$ i t. d. nie ſą więkſzemi od iedności; zrównania teraźnieyſzé pokazuią, że każdy z ułomków $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C},$ i t. d. iako też $\frac{B'}{A'}, \frac{C'}{B'}, \frac{D'}{C'},$ i t. d. ieſt więkſzym od iedności: zaczém muſi bydź $B>A$, $C>B$, $D>C$, $E>D$, i t. d. podobnież $B'>A'$, $C'>B'$, $D'>C'$, $E'>D'$, i t. d. to ieſt że mianowniki równie iak liczniki poſtępuiąc co raz barziey roſną. Ieżeli zaś $a, b, c, d, e,$ i t. d. będą wſzyſtkié albo niektóré równé iedności, oprócz tego niektóré terminy w zrównaniach odiemné; n. p. $c=\pm 1$, ieżeli $\frac{A}{B}$ nie będzie tego ſamégo znaku z c, będzie $\frac{C}{B}<1$, a przeto $B>C$; na tén czás wzroſt liczników i mianowników będzie przerwany. Uważmy czyli w tym przypadku inné terminy naſtępuiącé będą roſły lub nie? Na ten koniec wróćmy ſię do dawniey-

dawnieyſzych zrównań: ponieważ $\gamma=c+\frac{1}{\delta}$, $c=1$, będzie $\gamma=1+\frac{1}{\delta}$, aże γ, δ, ſą koniecznie większemi od iedności, γ muſi mieć ieden znak z δ; więc c,d, iako naybliżſze wartości γ,δ, muſzą mieć z niemi iedne znaki; będą przeto γ,δ, c, d, koniecznie tychże ſamych znaków. Powtóre $\frac{C}{B}=c+\frac{A}{B}$, gdzie $\frac{A}{B}$ różni ſię znakiem od c; ale że $\frac{A}{B}<1$, będzie $c>\frac{A}{B}$, więc $\frac{C}{B}$ będzie tego ſamego znaku co i c, będą więc koniecznie γ, δ, c, d, $\frac{C}{B}$, tychże ſamych znaków, a przeto mnogość $\frac{dC}{B}$ będzie koniecznie ilością dodatną: a ponieważ $\frac{D}{C}=d+\frac{B}{C}$, rozmnożywſzy całe to zrównanie przez $\frac{C}{B}$, wypadnie $\frac{D}{B}=\frac{dC}{B}+1$; przeto $\frac{D}{B}>1$, a zatem $D>B$, co nam oczywiście dowodzi, że chociaż w poſtepie terminów A, B, C, D, i t.d. iako też A', B', C', D', i t. d. który ſtanie ſię mnieyſzym od poprzedzaiącego, drugi po nim idący znowu zacznie wzraſtać; wnieśmy więc, że ſzereg liczników i mianowników w ułomkach poſpolitych idzie wzraſtaiac, i że to prawo wzroſtu przerwane w którym terminie, wróci ſię znowu w terminach naſtępuiących.

§. XLIV.

§. XLIV.

Z ułomków poſpolitych wyciągaią ſię właſności ułomków ciągłych.

Roſtrząſnąwſzy z oſobna liczników i mianowników, złożmy ie teráz razem na ułomki poſpolité, s których każdy wyraża wartość ułomku ciągłego odpowiadaiącego mu. Té ułomki poſpolité pociągną ſię rzędem:

(p) $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \frac{F}{F'}$ i t. d. tak dalece że im dalſzy będzie takowy ułomek, tém ſię barziéy zbliży do wártości prawdziwey owey funkcyi, ktorąśmy na ułomek ciągły rozebrali; i oſtatni taki $\frac{V}{V'}$ będzie równy ze wſzyſtkiem funkcyi wſpomnioney. Co właśnie z natury rzeczy wypływa; bo ieżeli ułomek ciągły tém lepiey wyraża ſwą rodzącą funkcyą, im ſię daley rosciąga, a ſkończywſzy ſię, ieſt iey zupełnie równy; tak ułomki poſpolite $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}$ i t. d. wyrażaiące tém dłużſzy ułomek ciągły im ſą dalſze, barziey ſię do funkcyi rodzącey zbliżaią, im ſą odlegleyſze; aże oſtatni z nich ogarnia cały ułomek ciągły, ogarnia także całą funkcyą taki ułomek rodzącą.

Biorąc po dwa przyległe ułomki z rzędu (p) i dzieląc ieden przez drugi, wypadną zachodzace między niemi ſtóſunki: $\frac{BA'}{AB'}$; $\frac{B'C}{BC'}$, $\frac{C'D}{CD'}$, $\frac{D'E}{DE'}$ i t. d. których wártość wyciągniona z zrównań (m), (n), §. 43, to ieſt: $\frac{A'}{B'} \times \frac{B}{A} = \frac{A'}{B'}\left(b + \frac{1}{A}\right) = \frac{A'}{B'A} + 1$, kładąc za b wártość z (n); zaczem $A'B - AB' = 1$, podobnie w innych $\frac{B'C}{BC'}$, $\frac{C'D}{CD'}$ i t. d. kładąc za $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, wártość z (m); zaś za b, c, d, e, i t. d. wártośc z (n); przyidziemy do naſtępuiących zrównań.

$$(q) \quad \cdot \; - \quad \begin{array}{l} BA'—AB'=1. \\ CB'—BC'=—1. \\ DC'—CD'=1. \\ ED'—DE'=—1. \\ \text{i t. d.} \end{array}$$

Zrównania té uczą nas, że ułomki (*p*) ſą przywiedzione do nayprościeyſzego wyrazu; gdyby bowiem miały iakich mnożników ſpólnych licznikowi i mianownikowi; té pokazałyby ſię były w zrównaniach (*q*) wypadaiących z ich ſtóſunku. Te zrównania (*q*) wydaia s ſiebie inné:

$$(r). \quad \begin{array}{l} \frac{B}{B'}—\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'B'} \\ \frac{C}{C'}—\frac{B}{B'}=—\frac{1}{B'C'} \\ \frac{D}{D'}—\frac{C}{C'}=\frac{1}{D'C'} \\ \frac{E}{E'}—\frac{D}{D'}=—\frac{1}{E'D'} \\ \text{i t. d.} \end{array}$$

które ſtawiaią nam przed oczy naſtępuiącé prawdy: *Naprzód* z §. 43 wiemy, że A', B', C', D', E', i t. d. poſtępuiąc roſną; więc i mnogości $A'B'$, $B'C'$, $D'C'$, i t. d. a zatém różnice między ułomkami przyległemi (*p*) tém barziey maleią, im té ułomki ſą odlegleyſze: ułomki więc rzędu (*p*) przyſtępuią co raz barziey do prawdziwych i ściſtych wartości. *Powtóre* to przyſtępowanie tak ieſt bliſkie, iż nad nié nie można naznaczyć bliżſzego w tak proſtym wyrazie; poniéważ między dwoma takiemi ułomkami żaden inny nie może srzodkować, chyba z mianownikiem większym od którego s tuż przyległych. Pozwólmy bowiem że między ułomkami przyległemi $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$ ſrzodkuie inny $\frac{m}{n}$ z mianownikiem n mnieyſzym od

C',

C', albo D', ich więc różnica $\frac{nC-mC'}{nC'}$ bydźby powinna mnieyſzą od $\frac{1}{D'C'}$; pierwſzá nie może bydź mnieyſzą od $\frac{1}{nC'}$; więc ieżeli $n<D'$, $\frac{1}{nC'}>\frac{1}{C'D'}$, zaczém ułomek $\frac{m}{n}$ nie tak ſię zbliżá do wártości prawdziwey iak którykolwiek z rzędu (p). Gdyby zaś śrzodkuiący ułomek był z mianownikiem więkſzym od D' albo C', iego wártość barzieyby ſię oddalała od wártości prawdziwey niżeli wártość któregokolwiek z ułomków (p); różnica bowiem między - - - $\frac{C}{C'}$, $-\frac{m}{n}$ byłaby więkſzą od różnicy $\frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}$; a przeto między dwoma przyległémi ułomkami różnica znayduie ſię naymnieyſzá, ktorykolwiek s takowych ułomków wyrażá wártość tak bliſką prawdziwey, iż żaden inny ułomek wyrazić iey bliżey nie może, chybaby w wyrazie zawikleyſzym.

Uważmy teraz iak daleko idzie to zbliżenie. Ponieważ $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, i t. d. oznaczaią prawdziwe pozoſtałe reſzty; zaś a, b, c, d, e, i t. d. reſzty bliſkie tamtych, używaiąc zrównań, (k), (l), będą wártości prawdziwe na α.

$$\alpha=A+\frac{1}{\beta}=\frac{A\beta+1}{A'\beta}=\frac{A}{A'}+\frac{1}{A'\beta};$$

$$(s)\quad \alpha=\frac{B\gamma+A}{B'\gamma+A'}=\frac{B}{B'}-\frac{1}{B'(B'\gamma+A')},$$

$$\alpha=\frac{C\delta+B}{C'\delta+B'}=\frac{C}{C'}+\frac{1}{C'[C\delta+B']},$$

$$\alpha=\frac{D\varepsilon+C}{D'\varepsilon+C'}=\frac{D}{D'}-\frac{1}{D'(D'\varepsilon+C')}.$$

i t. d.

te wártości prawdziwe pokazuią nam zaraz rożnice od wártości bliſkich zamkniętych w ułomkach (p), s którychto różnic ſądzic możemy iak daleko oddalamy ſię od prawdy, biorąc $\frac{C}{C'}$ na mieyſce wártości prawdziwey. Błąd naſz wytknięty ieſt w ułomku - - $\frac{1}{C'(C'\delta+B')}$ wyrážaiącym rożnicę między $\frac{C}{C'}$ i $\frac{C\delta+B}{C'\delta+B'}$; chcąc ten błąd ocenić, uważmy że δ ma za wártość bliſką d, od którey różni ſię ułomkiem mnieyſzym od iedności, wártości więc δ zawarte ſą między d i $d\pm1$, znak wyżſzy należy ſię kiedy $d<\delta$; niżſzy zaś kiedy $d>\delta$ więc i mianownik różnicy zawarty ieſt między $C'd+B'$, i $C'(d\pm1)+B'$ czyli między D' i $D'\pm C'$, to ieſt: przypuściwſzy że $\delta>d$, a biorąc za warwártość α, $\frac{C}{C'}$; popełniamy błąd mnieſzy od $\frac{1}{D'C'}$ ale większy od $\frac{1}{D'(D'+C')}$, tymże ſamym ſpoſobem uważaiąc wártości β, γ, ε i t. d. zamknięte między granicami b, $b+1$; c, $c+1$; e, $e+1$; przez podobne rozumowania znaydziem, że biorąc za α ułomki $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$, i t. d. popełniamy błąd mnieyſzy od $\frac{1}{A'B'}$, $\frac{1}{B'C'}$, $\frac{1}{D'E'}$ i t. d. ale większy od $\frac{1}{A'(B'+A')}$, $\frac{1}{B'(C'+B')}$ i t. d. s kąd ſię pokazuie naprzód iak błąd naſz ieſt mały, i iak ten zmnieyſza ſię co raz barziey biorąc odległeyſze ułomki z rzędu (p).

Potrzecie zapatrzywſzy ſię na zrównania (r), widzemy że różnice brane między dwoma przyległemi ułomkami rzędu (p) ſą na przemian dodatne i odiemne;

mne, różnice znowu między wartościami prawdziwemi i bliſkiemi zamknięte w zrównaniach (*s*) ſą także na przemian dodatne i odiemne; co nam pokazuie, że ułomki rzędu (*p*), dzielą ſię na więkſze i mnieyſze od wartości prawdziwey: mnieyſze ſą $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{E}{E'}$ i t. d. więkſze zaś ſą $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, i t. d. przeto wartość prawdziwa iakieykolwiek funkcyi (α) rozebraney na ułomki ciągłe zawarta ieſt między dwoma przyległemi ułomkami poſpolitemi (*p*), na które ſię przerabiaią ułomki ciągłe. Zeby więc nie ſtracić tey oſtatniey korzyści, ſtarać ſię potrzeba, aby ułomki poſpolite (*p*) były wſzyſtkie dodatne, to ieſt aby ułomki ciągłe były takiemi; a co na iedno wychodzi; aby za wartość bliſką nie brać więkſzey od prawdziwey ale zawſze mnieyſzą.

Obróćmy teraz uwagę naſze na dwa te podziały ułomków rzędu (*p*), któreśmy dopiero doſtrzegli. Ułomki mnieyſze i więkſze od wartości prawdziwey ſą:

mnieyſze $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{E}{E'}$, i t.d. więkſze: $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, i t. d.

chcąc mieć różnicę między dwoma przyległemi, wyciągniemy ią z zrównań (*r*) dodaiąc dwa razem do ſiebie, i kładąc za $C'-A'$, cB' z zrównań (*l*); znaydziem

$$\frac{C}{C'}-\frac{A}{A'}=\frac{c}{A'C'}$$

$$\frac{E}{E'}-\frac{C}{C'}=\frac{e}{E'C'} \text{ i t. d.}$$

ieżeli a, b, c, d, i t. d. ſą iednościami; łatwo nam dowieśdź tak iak przedtem, iż różnica między takiemi dwoma ułomkami ieſt naymnieyſza; iże między niemi nie może żaden inny śrzodkować z mianownikiem mnieyſzym n. p. od C' albo od A'; ale ieżeli

$a, b, c, d,$ i t. d. ſą liczbami więkſzémi od iedności, na tén czás między każdé dwa przyległé ułomki tylé możná śrzodkuiących włożyć, ilé $a-1, b-1, c-1, d-1, e-1,$ i t. d. zamykaią iedności. Pozwólmy że n. p. $c=4$; będzie podług zrównań (l), (k), $C'=4B'+A'$, $C=4B+A$; a przeto między $\frac{C}{C'}, \frac{A}{A'}$ możná będzie włożyć $\frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'}$; gdzie widzémy, że mianowniki tych śrzodkuiących ułomków czynią poſtęp arytmetyczny od A' aż do C'. Różnice między dwoma przyległemi.

$$\frac{A+B}{A'+B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'(A'+B')}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{A+B}{A'+B'} = \frac{1}{(A'+B')(2B'+A')}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{2B+A}{2B'+A'} = \frac{1}{(3B'+A')(2B'+A')}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{3B+A}{3B'+A'} = \frac{1}{C'(3B'+A')}$$

ponieważ wſzyſtkie te różnice ſą dodatné, znakiem ieſt, że ułomki arytmetycznie poſtępuiąc roſną, co właśnie s ſamych pokazuie ſię mianowników. Aże z drugiey ſtrony iedności ſą wſzędzie licznikami; ułomki te ſą nayprościeyſze tak dalecé, iż teraz między dwoma temi przyległemi żaden inny nie może śrzodkować z mianownikiem mnieyſzym od któregokolwiek z dwóch przyległych. Tę ſamę właſność znaydziemy w ułomkach więkſzych od wartości prawdziwey.

S tych wſzyſtkich prawd wnoſi ſię oczywiście, że ułomki ciągłe ſą nayzdatnieyſzym rachunkiem do zbliżenia nas do prawdziwych wartości tych funkcyi, których nie możemy w wyrazach całkich ogarnąć, i że na takie ułomki przerobić możemy wſzyſtkié inné, iako to poſpolité, dzieſiątkowé i t. d.

Wróćmy

Wróćmy ſię ieſzcze do zrównań (r); ponieważ $\frac{B}{B'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'}$; $\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} + \frac{1}{B'C'}$; $\frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'C'}$; $\frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} + \frac{1}{D'E'}$ i t. d. kładąc iedne wartości za drugie, wypadnie:

$$\frac{C}{C'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'}$$

$$\frac{D}{D'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{D'C'}$$

$$\frac{E}{E'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{D'C'} - \frac{1}{D'E'}$$

nazwawſzy oſtatni ułomek z rzędu p $\frac{V}{V'}$; $\frac{V}{V'} - \frac{A}{A'} = x$; będzie $x = \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{D'C'} - \frac{1}{D'E'} + \frac{1}{E'F'} - \frac{1}{F'G'}$ + i t. d.

Każdy więc ułomek z rzędu (p) wyrazić ſię może przez ułomek pierwſzy i przez różnice wſzyſtkich śrzodkuiących; te różnice ciągną ſię ſzeregiem poſpolitym odmieniaiącym w terminach znaki na wzaiem, przeto każdy ułomek ciągły może ſię zamienić na ſzereg poſpolity, w którego terminach znaki idą na przemian. Przyſzliśmy więc do ſpoſobu wracaiącego nás od ułomków ciągłych do ſzeregów; zoſtaie nám teraz ieſzcze do rozwiązania zadanie; żeby s każdego iakiegokolwiek ſzeregu byle odmieniaiącego w terminach znaki na wzaiem, zrobić ułomek ciągły. Nim przyſtąpiemy do tego zadania rosciągaiącego ſię na szeregi iakiegokolwiek rodzaiu, muſzemy ſię oświecić o początku tych ſzeregów które nie ſą zwrotnemi.

§. XLV.

Tłómaczy ſię nowy rodzay ſzeregów.

Iużeśmy w §. 23. pierwſzey Części trafili byli na ſzeregi rodzące ſię s funkcyi niewymiernych iakiegokolwiek wykładnika dodatnego lub odiemnego, całkiego lub ułomkowego, gdzieśmy widzieli że na rozbiór tych wſzyſtkich wzór *Newtona* - - - - - $(P+Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$, powſzechnie ſłuży. W nim powinniśmy byli doſtrzec, że także ieden termin wyrazić ſię może przez poprzedzaiące podług liczby terminów w funkcyą niewymierną wchodzących. W rozbiorze takowym funkcyi pokazuie ſię barzo wiele prawd podobnych do tych, któreśmy w ſzeregach zwrotnych uważali; ale że dowód ich ściſły i ogólny ſłużący do poparcia wypadków ſamego rachunku ieſzcze nie ieſt w mocy naſzey nauki; więc ażebyśmy nie przeſtali na wierze tam gdzie naymocnieyſze przekonanie powinno przodkować; albo żebyśmy obiaśnień rachunku nie brali za dowody; zoſtawiemy ſobie te wiadomości do wyżſzych świateł. Nie możemy ſię iednak w tem mieyſcu uwolnić od tych ſzeregów, które nam będą mogły wiele pomóc w drugim Tomie teraźnieyſzego dzieła, a które my przynaymniey po większey części będziem mogli z nabytych iuż początków wyciągnąć. Takiemi ſą ſzeregi wypadaiące z rozwiązania zrównań nieoznaczonych wyżſzych ſtopni: n. p. Maiąc zrównanie 4go ſtopnia: $ay^3—x^3y—ax^3=0$, i chcąc y wyrazić przez x, nie możemy tego tylko przez ſzeregi dokazać. Ale nowa trudność która nam ſię tu pokazuie, zależy na tém, iż w tym nowym ſzeregu nie widzemy cale wzoru, podług którego ułożyć ſię powinny terminy, a zatém potrzeba razem pracować nad wynalazkiem wſpół-czynnika i wykładnika w każdym terminie. *Newton* podał na to ſpoſób znany Geometrom pod imieniem RÓWNOLEGŁOBOKU NEWTONA (*Paralellogrammum Nevtonianum*), nad którego uproſzczeniem pracowali niektórzy, zaniedbawſzy nań

dowodu

dowodu gruntownego który Newton opuścił; niektórzy ſzukali go uſilnie ale z małą pomyślnością. Zacny Geometra Francuzki J.P. *Couſin* Akademik i Profeſſor Królewſki w Paryżu, podał inny ſpoſób rozwięzuiacy to zadanie; który my wolemy tu krótko wyłożyc, niż zawikłany Newtona rownoległobok bez dowodu przytaczac, odſyłaiąc czytelnika do dzieł Newtona Matematycznych *(Opuſcula Mathematica)*, albo do Kſiążki *Cramera: Introduction a l' analyſe des lignes Courbes*, gdzie ieſt doſyć iaśnie wyłożony.

Teorya I.P. *Couſin* do rozbierania funkcyi lub zrównania na ſzeregi.

Ponieważ w ſzeregach o iakich tu mówiemy, należy nam wſpół-czynniki razem i wykładniki wynaleśdź, wprowadzemy na obydwa ilosci nieoznaczone: i tak maiąc zrównanie -- $ay^3-x^3y-ax^3=0$ (a') a chcą y wyrazić przez x; x będzie ilością porządkową w ſzeregu: czynię więc

$$y=Ax^{m}+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+Ex^{m+4n}+ \text{ i t. d.} \qquad (b')$$

$$ay^3=aA^3x^{3m}+3aA^2(Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+ \text{ i t. d.})\,x^{2m}$$
$$+3Aa(Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+ \text{ i t. d.})^2x^{2m}$$
$$+a(Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+ \text{ i t. d.})^3$$
$$yx^3=Ax^{m+3}+Bx^{m+n+3}+Cx^{m+2n+3}+ \text{ i t. d.}$$

Zrównanie (a') pokazuie nam, że y ieſt pewną funkcyą x wyrażoną przez związek w tem zrównaniu zawarty, funkcyą zaś x niezawiſłego od żadney ſzczególney wartości: przypuściwſzy że ta wartośc y, oznacza ſię dobrze przez zrównanie (b'), włożywſzy ią w zrównanie (a') powinna ie przywieśdź do zero tak, żeby żadney ſzczególney wartości nie wprowadzic na x, a zatem żadnego związku między terminami: więc zrównanie (a') włożywſzy w nie za y wartość z (b'), ſtaie ſię toſamem *(Aequatio identica)* a zatem każdego w niem terminu wſpół-czynnik bydź powinien zero.

Wykonawſzy wſzyſtkie wyżey naznaczone działania, i kładąc każdy termin pod przyzwoitą ſobie potęgą x, potrzeba nam bydź troſkliwemi, aby żadnego terminu w dalſzym ciągu nie opuścić, któryby do

tey

téy ſaméy potęgi x należał; maiąc zaś początkowych terminów dobrze oznaczone wykładniki, poznamy łatwo wzór ſzeregu: poznamy także wſpół-czynniki czyniąc każdy termin ſzeregu równy zero: ale iakże potrafiémy wykładniki oznaczyć? Na to wypadnie nam ſpoſób z naſtępuiącey uwagi: Ponieważ w zrównaniu przerobioném zachodzą terminy, w których x ma za wykładnika pewną oznaczoną liczbę; podkładaiąc terminy s takowémi wykładnikami pod którékolwiek terminy początkowe z wykładnikami nieoznaczonémi, i równaiąc wykładniki nieoznaczone z wiadomémi, otrzymamy s tego porównania wartości na m, n; roſtrząſnąwſzy potém czyli oznaczone wartości na m, n, dobrze ſię w dalſzych terminach nadaią, to ieſt: czyli albo nowéy nie wciągną wartości na m, n, przeciwnéy wprzód wynalezionéy; albo w porządnem naſtępſtwie utrzymuią dalſze terminy; to znalazłſzy wſzyſtko, pewni ieſteśmy że terminy były dobrze podłożone, i wartości na m, n, dobrze oznaczone: gdyby zaś iaka w dalſzym ciągu pokazała ſię nieprzyzwoitość, potrzeba to pokładanie odmieniać póty; póki nie trafiemy na wartości i ſzereg od wſzelkiéy nieprzyzwoitości wolny. A ponieważ to podkładanie terminów z wykładnikami znanémi zawiſło od naſzégo upodobania, ieżeli ſię przytrafi, że to podkładanie kilka razy odmienione żadnéy nieprzyzwoitości nie wprowadzi w wypadkach; otrzymamy kilka ſzeregów, s których każdy da wartość na y, ſtóſowną do związku w zrównaniu (a') zawartégo: co właśnie z naturą zrównań dobrze ſię zgadza; zrównanie bowiem (a') będąc czwartego ſtopnia mieć powinno cztéry piérwiaſtki, którym odpowiadać powinny cztery różne ſzeregi na y, wynikaiące s czterech ułożeń terminów znanych pod nieznanémi. Pamiętaymy na té wſzyſtkie uwagi w naſtępuiącym rachunku: Piérwſzy układ terminów z zrównania przerobionego ieſt:

aA^3x^{3m}

$$\begin{array}{llll} aA^3x^{3m} & +3aA^2Bx^{3m+n} & +\left.\begin{array}{r}3aAB^2.\\ +3aA^2C.\\ -Bx^{m+n+3}\end{array}\right\}x^{3m+2n} & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ -ax^3 & -\;Ax^{m+3} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l}+3aA^2D.\\ +6aABC.\\ +\;aB^3.\end{array}\right\}x^{3m+3n} & +3aA^2E.\;x^{3m+4n} \\ & \left.\begin{array}{l}+3aB^2C\\ +3aAC^2\\ +6aABC\end{array}\right\} \qquad \text{i t. d.} =0. \\ -Cx^{m+2n+3} & -Dx^{m+3n+3} \end{array}$$

równaiąc wykładników $3m=3$, $m=1$, $3m+n=m+3$, s kąd $n=1$; co ſię barzo dobrze z dalſzym poſtępem terminów zgadza: czyniąc teraz każdego wſpół-czynnika zero, wypada: $aA^3-a=0$, $A=1$, $3aA^2B-A=0$, czyli $B=\frac{1}{3a}$, to ſamo daley czyniąc znaydziem $C=0$, $D=-\frac{1}{81a^2}$, $E=\frac{1}{243a^4}$, i t. d. przeto

$$y=x+\frac{x^2}{3a}+0-\frac{x^4}{81a^3}+\frac{x^5}{243a^4}+\text{ i t. d.} \quad - \; - \quad (b'')$$

Drugi raz układaiąc wypadnie:

$$\begin{array}{llll} aA^3x^{3m} & +\;3aA^2Bx^{3m+n} & +\left.\begin{array}{r}3aAB^2\\ +3aA^2C\end{array}\right\}x^{3m+2n} & \cdot\;-\;\cdot \\ -Ax^{m+3} & -Bx^{m+n+3} & -\;Cx^{m+2n+3} & \\ & -\;ax^3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l}+3aA^2D\\ +6aABC\\ +\;aB^3\end{array}\right\}x^{3m+3n} & \left.\begin{array}{l}+3aA^2E\\ +3aB^2C\\ +3aAC^2\\ +6aABC\end{array}\right\}x^{3m+4n} \qquad \text{i t. d.} \quad =0. \\ -Dx^{m+3n+3} & -Ex^{m+4n+3} \end{array}$$

$3m=m+3$ s kąd $m=\frac{3}{2}$, $3m+n=m+n+3=3$, $n=-\frac{3}{2}$,

$A^3a-A=0$; $A=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$, $3aA^2B-B-a=0$, $B=\frac{1}{2}a$,

$C=\mp\frac{3a^3}{8\sqrt{a}}$, $D=\frac{1}{2}a^4$, $E=\mp\frac{51a^6}{128\sqrt{a}}$, i t. d.

a ponieważ

a ponieważ $A, C, E,$ i inne na przemian terminy maią dwie wartości do dwóch znaków przywiązane; powſtaną z nich dwa ſzeregi:

$$y = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} - \tfrac{51}{128}a^{\frac{11}{2}}x^{-\frac{9}{2}} + \text{i t. d.} \qquad (c')$$

$$y = -a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} + \tfrac{51}{128}a^{\frac{11}{2}}x^{-\frac{9}{2}} + \text{i t.d.} \qquad (d')$$

Trzeci ieſzcze układ ſzeregu ieſt ten:

$$\begin{array}{l} Ax^{m+3} + Bx^{m+n+3} + Cx^{m+2n+3} + Dx^{m+3n+3} \quad - \; - \; - \; - \\ +ax^3 - A^3ax^{3m} - 3aA^2Bx^{3m+n} \left.\begin{array}{l} -3aA^2C \\ -3aAB^2 \end{array}\right\} x^{3m+2n} \\ \\ +Ex^{m+4n+3} \\ \left.\begin{array}{l} -3aA^2D \\ -6aABC \\ -\quad aB^3 \end{array}\right\} x^{3m+3n} \qquad\qquad \text{i t. d.} = 0. \end{array}$$

$m+3=3$, s kąd $m=0$ $m+n+3=0$, $n=-3$, wſpółczynniki zaś $A=-a$, $B=-a^4$, $C=-3a^7$, $D=-12a^{10}$, $E=-55a^{13}$; zaczém czwartá wartość na y.

$$y = -a - \frac{a^4}{x^3} - \frac{3a^7}{x^6} - \frac{12a^{10}}{x^9} - \frac{55a^{13}}{x^{12}} - \text{i t.d.} \quad (e')$$

S czterech więc wynalezionych wartości na y (b''), (c'), (d'), (e'), podług różnych okoliczności zadania lub wartości x, wybrać można ſzereg naybarziey maleiący. Ieden ten przykład wyſtarczy ſpodziewam ſię na obiaśnienie tey o ſzeregach nauki. W wyżſzych Matematyki częściach będziem mieli ſpoſobność pomówić o niey obſzerniey.

Wyłożone dotąd ſpoſoby powinny nás oświecić o różnych gatunkach ſzeregów, na które ſię rozbierać mogą funkcye lub zrównania nie mogące bydź albo dokładnie rozwiązane, albo w całkiey wartości wyrażone zupełnie, co wſzyſtko ieſt przedmiotem Teoryi zbliżania (*Approximatio*), cząſtki nayważnieyſzey i naypotrzebnieyſzey do rozwiązania wiekſzey liczby pytań Fizycznych. Wróćmy ſię teraz do ułomków ciągłych.

§. XLVI.

§. XLVI.

Przerabiaią ſię ſzeregi na ułomki ciągłe.

Przebiegliśmy różne gatunki ſzeregów, i ſpoſoby przerobienia na nie różnych funkcyi i zrównań, a to tym końcem, abyśmy z rozlegleyſzą wiadomością funkcyi, mogli ogólniey poznać ułomki ciągłe, któryche śmy tak pożyteczne wytknęli własności. Oſtatnia z nich nauczyła nas, że nie tylko ſzeregi zwrotne, ale nawet inne iakiegokolwiek rodzaiu, byłeby w terminach znaki odmieniały na wzaiem, mogą ſię na ułomki ciągłe przerobić. Zebyśmy ten ſpoſób mogli iaśniey i powſzechniey ſtawić przed oczy, weźmy ułomek ciągły nayogólnieyſzy:

$$a+\cfrac{a'}{b+\cfrac{b'}{c+\cfrac{c'}{d+\cfrac{d'}{e+\cfrac{e'}{f+\text{ i t. d.}}}}}}$$

przerabiaiąc go częściami na ułomki poſpolite tak, iak w §. 42; wyciągniemy związek między ich licznikami i mianownikami podobnie iak w §. 43.

$$(k')\quad \begin{array}{ll} A=a & A'=1 \\ B=bA+a' & B'=b \\ C=cB+b'A & C'=cB'+b'A' \\ D=dC+c'B & D'=dC'+c'B' \\ E=eD+d'C & E'=cD'+d'C' \\ \text{i t. d.} & \text{i t. d.} \end{array}\quad (l').$$

s tych zaś

$$(q')\quad \begin{array}{l} BA'-AB'=a' \\ CB'-BC'=-a'b' \\ DC'-CD'=a'b'c' \\ ED'-DE'=-a'b'c'd' \\ \text{i t. d.} \end{array}\qquad (r')\quad \begin{array}{l} \frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{a'}{A'B'} \\ \frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}=\frac{a'b'}{B'C'} \\ \frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}=\frac{a'b'c'}{D'C'} \\ \text{i t. d.} \end{array}$$

uczyniwſzy podług §. 44. $\frac{V}{V'} - \frac{A}{A'} = x$, będzie

$$x = \frac{a'}{A'B'} - \frac{a'b'}{B'C'} + \frac{a'b'c'}{C'D'} - \frac{a'b'c'd'}{D'E'} + \text{i t. d.} \quad (a'')$$

maiąc teraz podany ſzereg iakikolwiek odmieniaiacy w terminach znaki na wzaiem

$$x = P - Q + R - S + T - V + \text{ i t. d. } - - - \quad (b'')$$

i chcąc go przerobić na ułomek ciągły, równam każdy iego termin s terminem ſzeregu (a''), wypadnie

$$P = \frac{a'}{A'B'},\ Q = \frac{a'b'}{B'C'},\ R = \frac{a'b'c'}{C'D'},\ S = \frac{a'b'c'd'}{D'C'} \text{ i t.d.} (c'')$$

té oſtatnie zrównania ſłużyć mi powinny na oznaczenie a', b', c', d', i t.d. w funkcyach P, Q, R, S, i t. d. s których dopiero wypaśdź maią przyzwoite wartości na a, b, c, d, i t. d. także w funkcyach P, Q, R, S, i t. d. do ułożenia ułomku ciągłego s ſzeregu (b''). Ale wynayduiąc pomienione wartości ſtarać ſię mamy, aby A', B', C', D', i t. d. w nich ſię nie znaydowały: i dla tego pracować należy nad przerobieniem zrównań (c'') na inne, w którychby A', B', C', D', i t. d. odpadły, co nam pokazuie przyczynę naſtępuiacego rachunku J.P. *Eulera*.

Naprzód ponieważ $A' = 1$, mamy $a' = PB'$.

$$\frac{Q}{P} = b' \frac{A'}{C'} \cdots b' = \frac{Q}{P}.\frac{C'}{A'}$$

$$\frac{R}{Q} = c'.\frac{B'}{D'} \cdot\cdot \quad c' = \frac{R}{Q}.\frac{D'}{B'}$$

$$\frac{S}{R} = d'.\frac{C'}{E'} \cdots d' = \frac{S}{R}.\frac{E'}{C'}$$

$$\frac{T}{S} = e'.\frac{D'}{F'} \cdots e' = \frac{T}{S}.\frac{F'}{D'}$$

$$P - Q = \frac{a'(C' - b'A')}{B'C'} = \frac{a'c}{C'} = \frac{PB'c}{C'}$$

Q—R=

$$Q—R=\frac{a'b'A'(D'—c'B')}{B'C'D'}=\frac{a'b'A'd}{B'D'}=\frac{QC'd}{D'}$$

$$R—S=\frac{a'b'c'A'(E'—d'C')}{C'D'E'}=\frac{a'b'c'A'e}{E'C'}=\frac{RD'e}{E'}$$

$$S—T=\frac{a'b'c'd'A'(F'—e'D')}{D'E'F'}=\frac{a'b'c'd'A'f}{D'F'}=\frac{SE'f}{F'}$$

i t. d.

s tych zrównań w oſtatnim porządku wypadaią inne:

$$(P—Q)(Q—R)=PQcd.\ \frac{B'}{D'}\ \text{więc}\ \frac{D'}{B'}=\frac{PQcd}{(P—Q)(Q—R)}$$

$$(Q—R)(R—S)=QRed.\ \frac{C'}{E'}\ \text{- -}\ \frac{E'}{C'}=\frac{QRde}{(Q—R)(R—S)}$$

$$(R—S)(S—T)=RSfe.\ \frac{D'}{F'}\ \text{- -}\ \frac{F'}{D'}=\frac{RSef}{(R—S)(S—T)}$$

i t. d.

tych oſtatnich ułomków wartości włożywſzy w $\frac{Q}{P}$, $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{R}$ i t. d. nie zapominaiąc że podług zrównań (l'), $B'=b$, $D'=\frac{Pbc}{P—Q}$, otrzymamy:

$$a'=Pb \qquad d'=\frac{SQde}{(Q—R)(R—S)}$$

$$b'=\frac{Qbc}{P—Q}$$

$$c'=\frac{RPcd}{(P—Q)(Q—R)} \qquad e'=\frac{TRef}{(R—S)(S—T)}$$

a ponieważ podług pierwſzych naſzych przypuſzczeń wyciągnionych z natury ſamych ułomków a', b', c', d', i t. d. powinny bydź ilościami całkiemi, więc na ocalenie tey kondycyi, wypadaią konieczne wartości na $a, b, c, d,$ i t. d.

$b=1$ - - - - $a'=P$ Przeto ułomek ciągły równy
$c=P-Q$ - - $b'=Q$ ſzeregowi (b''), ieſt:
$d=Q-R$ - - $c'=RP$
$e=R-S$ - - $d'=SQ$
$f=S-T$ - - $e'=RT$
i t. d. i t. d.

$$x=\cfrac{P}{1+\cfrac{Q}{P-Q+\cfrac{RP}{Q-R+\cfrac{QS}{R-S+\cfrac{RT}{S-T+\text{i t. d.}}}}}} \qquad (b''')$$

gdybyśmy nie byli wciągnieni potrzebą naznaczenia takowych wartości na $a, b, c, d, e,$ i t. d. które nam z natury teraźnieyſzego rachunku wypadły, ſzereg (b'') i iemu równy ułomek ciągły (b''') mogłyby nam były ſłużyć za wzór do przerabiania innych iakichkolwiek ſzeregów na ułomki ciągłe. Muſzemy dla tego na każdy gatunek ſzeregu podobny rachunek powtarzać i z niego przyiśdź do ułomku ciągłego.

Maiąc n.p. ſzereg złożony z ułomków.

$$x=\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}-\frac{1}{S}+\frac{1}{T}-\text{ i t. d.} \qquad (e'')$$

działaiąc tak iak w poprzedzaiącym; znaydziemy

$$a'=\frac{b}{P} \text{ - - - - - - } b=P \text{ - - - } a'=1$$

$$b'=\frac{Pbc}{Q-P} \text{ - - - - - } c=Q-P \quad b'=P^2$$

$$c'=\frac{Q^2cd}{(Q-P)(R-Q)} \text{ - - } d=R-Q \quad c'=Q^2$$

$$d'=\frac{R^2de}{(R-Q)(S-R)} \text{ - - } e=S-R \quad d'=R^2$$
$$f=T-S \quad e'=S^2$$

$x=$

$$x=\cfrac{1}{P+\cfrac{P^2}{Q-P+\cfrac{Q^2}{R-Q+\cfrac{R^2}{S-R+\cfrac{S^2}{T-S+\text{ i t. d.}}}}}}\qquad (e''').$$

Niech będzie ſzereg nieſkończony

$$(f'')\qquad x=\frac{1}{P}-\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PQR}-\frac{1}{PQRS}+\text{ i t. d.}$$

wypadnie nám przez podobny rachunek:

$a'=\frac{b}{P}$ - - - - - $b=P$ - - - - - $a'=1$

$b'=\frac{bc}{Q-1}$ - - - - - $c=Q-1$ - - - - $b'=P$

$d=R-1$ - - - $c'=Q$

$c'=\frac{Qcd}{(Q-1)(R-1)}$ - - $e=S-1$ - - - $d'=R$

$d'=\frac{Rde}{(R-1)(S-1)}$ - - $f=T-1$ - - - $e'=S$

i t. d.

$$x=\cfrac{1}{P+\cfrac{P}{Q-1+\cfrac{Q}{R-1+\cfrac{R}{S-1+\cfrac{S}{T-1+\text{ i t. d.}}}}}}$$

mając nakoniec ſzereg geometryczny

$x=P-Qz+Rz^2-Sz^3+Tz^4-$ i t. d. (g'').

znaydziem:

$a'=Pb$ - - - - $b=1$ - - - - - $a'=P$

$b'=\frac{Qbcz}{P-Qz}$ - - - - $c=P-Qz$ - - - $b'=Qz$

$$
\begin{array}{lll}
c' = \dfrac{PRcdz}{(P-Qz)(Q-Rz)} & d = Q-Rz & c' = PRz \\
d' = \dfrac{QSdez}{(Q-Rz)(R-Sz)} & \begin{array}{l} e = R-Sz \\ f = S-Tz \end{array} & \begin{array}{l} d' = QSz \\ e' = TRz \end{array} \\
\text{i t. d.} & \text{i t. d.} & \text{i t. d.}
\end{array}
$$

$$
x = \cfrac{P}{1 + \cfrac{Qz}{P - Qz + \cfrac{PRz}{Q - Rz + \cfrac{QSz}{R - Sz + \cfrac{RTz}{S - Tz + \text{ i t. d.}}}}}}
$$

przerabianie innych ieſzcze geometrycznych ſzeregów znaleśdź można w J.P. Eulerze *Introductio in Analyſim infinitorum T.I.p. 309*. i daley. Należałoby nam tu ieſzcze wyłożyć dalſze ſzeregów ciągłych własności, które odkrył W.Geometra J.P. *de la Grange* i podał w Pamiętnikach Akademii Berlińſkiey i Paryzkiey ſtóſuiąc ie do różnych matematycznych i fizycznych pytań, ale że te rozległością ſwoią zoſtawiłyby nam mało czaſu i mieyſca na teorye ieſzcze zamiarowi naſzemu iſtotne. Możemy iednak każdego czytelnika pilnego i zaiętego chęcią przeniknienia w głębſze matematyczne nauki upewnić, że wyłożone przez nas ważnieyſze, i trudnieyſze początki dobrze ogarnąwſzy, potrafi ſam przez ſię opuſzczonych wiadomości z łatwością dopełnić w dziełach wielkich Geometrów, do których zrozumienia iak przedſięwzięta od nas praca ieſt nieuchronnie potrzebna, doſyć nam o tę ſprawiedliwość odwołać ſię do każdego doświadczenia.

§. XLVII.

Zebrawſzy te tak związane s ſobą ściśle oſtatnie wiadomości, poymiemy łatwo, że celem teraźnieyſzego rozdziału było ſummowanie ſzeregów które nas wciągło w wiadomości inne s ſobą związkowe. Potrafiliśmy wſzyſtkich ſzeregów zwrotnych wynaleśdź

ſummy,

Summowanie poſtępów arytmetycznych i geometrycznych prowadzi nas do nowego rodzaiu zrownań i funkcyi.

ſummy, ale ieſzcze dalecy ieſteśmy od ogólnego ſpoſobu zbierania ſzeregów innego rodzaiu. W wyżſzych Matematyki częściach materya ta zatrudni nas barzo obſzernie, gdzie i tak po nayglębſzych uwagach i dociekaniach przeſtaniemy na rozwiązaniu pewnych tylko ſzczególnych przypadków. Nieſzczęście! że poznawanie nayważnieyſzych ſkutków w naturze przywodzi nas do ſzeregów nieſkończonych, których nie umieiąc powſzechnie ſummować, muſzemy przeſtać na zbliżaniu ſię do prawdy. Doſkonałość zaiſte fizyki zawiſła w większey części od doſkonałości naſzych o ſzeregach świateł, co ieſt przyczyną, iż naypierwsi talentem ludzie s tak upornym zapałem rzucaią ſię w te tak zawikłane i pracowite ale barzo ważne dociekania. Skończmy już wiadomości tego rozdziału iedną uwagą: rozbieraiąc funkcye ułomkowe w pierwſzym rozdziale tey części na ſzeregi nieſkończone, trafiliśmy na poſtępy arytmetyczne i geometryczne: s tych pierwſze zależą na iedney ſtateczney różnicy, drugie na iednym ſtatecznym wielorazie czyli ſtóſunku dwóch terminów przyległych. Zoſtaie nam wyłożyć w ſwych związkach to wſzyſtko cokolwiek ſię ściąga do rachunku dwóch tych nayczęſtſzych w używaniu ſzeregów. Poſtęp arytmetyczny wzraſtaiący wyraża ſię ogolnie:

$\div\ a.\ a+b.\ a+2b.\ a+3b.\ a+4b.\ a+5b.\ a+6b.$ i t. d.

przypuściwſzy że $a+6b$ ieſt terminem oſtatnim; widzemy że ten równy ieſt terminowi pierwſzemu powiękſzonemu różnicą b tyle razy powtórzoną, ile ieſt poprzedzaiących go terminów; a zatem nazwawſzy liczbę terminów całego ſzeregu x, termin pierwſzy a, oſtatni n, rożnicę b; będzie:

$$u=a+(x-1)b \quad - \ - \ - \quad (A)$$

oprócz tego dodawſzy oſtatni termin do pierwſzego, wypadnie taka ſumma, iaką rodzi dodanie dwóch którychkolwiek terminów równo oddalonych od ſkraynych: ſumma więc całego ſzeregu równa ſię ſummie dwóch ſkraynych tyle razy powtórzoney, ile liczba terminów rozdzielona przez dwa ma w ſobie iedności: czyli nazwawſzy ſummę s

$$s=(a+u)\frac{x}{2} \quad - - - - \quad (B)$$

za pomocą dwóch zrównań (A), (B), s piąciu rzeczy $a, u, x, b, s,$ maiąc trzy znane, wynaydziemy to wſzyſtko, cokolwiek do poſtępu arytmetycznego należy. Wſzyſtkie te rzeczy nad to ſą łatwe abyśmy ſię ich kombinacyą i obiaśnieniem przez przykłady bawili.

Poſtęp znowu geometryczny wzraſtaiący tak ſię ogólnie wyraża:

$$\div\ a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5.\ aq^6.\ \text{i t. d.} \qquad (\alpha)$$
$$a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g.\ \text{i t. d.} \qquad (\beta)$$

Oſtatni termin poſtępu geometrycznego (α) widzemy że ſię równa pierwſzemu rozmnożonemu przez ſtóſunek q wynieſiony do potęgi, którey wykładnik oznacza liczbę terminów całego ſzeregu zmnieyſzoną iednością, czyli, nazwawſzy oſtatni u, pierwſzy a, liczbę terminow x,

$$u=aq^{x-1} \quad (C).$$

Ieżeli przez ſzereg (β), wyrazić chcemy poſtęp geometryczny (α), będą zrównania $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$, $e=dq$, $f=eq$, i t. d.

zaczem - - - $b+c+d+e+f=(a+b+c+d+e)q$.

w tey ſummie widzemy że pierwſzemu członkowi zrównania brakuie pierwſzego terminu, a drugiemu członkowi oſtatniego, to ieſt: $s-a=(s-u)q$, s kąd

$$s=\frac{uq-a}{q-1}, \text{ czyli } s=\frac{aq^x-a}{q-1} \quad - - - - \quad (D).$$

z dwóch zrównań (C), (D), będziem mogli s, a, u, q, wynaleśdź za pomocą prawideł wyłożonych w I. Części na zrównania; lecz chcąc wynaleśdź liczbę terminów x, te prawidła wcale nam nie poſłużą. Owoż nowy cale dla nas rodzay rachunku! gdzie ilość niewiadoma ieſt wykładnikiem funkcyi znaney. W

całym

całym dotąd ciągu naſzéy nauki nie uważaliśmy w wykładnikach tylko ilości znané, lub liczby; teraz pokazało ſię iż zadania różné mogą nás przyprowadzić do zrównania, gdzie ilość nieznana będzie wykładnikiem funkcyi iakiey: co nám otwiera pole do nowych doſtrzeżeń w naſtępuiącym rozdziale.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Funkcye wykładniczé odkrywaią nám piérwſzy rodzáy funkcyi przeſtępnych, czyli LOGARYTMY; których ſię tłómaczą właſności, użycié, ſpoſób rozbiérania ich na ſzeregi, i rachowania z nich Tablic Logarytmów.

§. XLVIII.

Uwagi nad wykładnikami od iemnemi prowadza nás do poznania Logarytmów.

Wykładniki znané w iakieykolwiek ilości lub funkcyi były zawſze ſkazówkami potęg we wſzyſtkich dotąd naſzych uwagach, wſzakże wprowadzoné ſą dlá ſkrócenia wyrazów funkcyi wypádaiącéy z mnożenia iey ſaméy przez ſię. Té wykładniki ſtaiąc ſię ilościami odmiennemi lub nieznanemi, nie mogą tracić ſwéy iſtótney właſności. Wyſtawiwſzy ſobie funkcyą a^x; ta funkcyá będzie koniecznie odmienną; wſzyſtkie iey odmiany zawiſły od odmián x; możemy więc tę funkcyą wyrazić przez inną odmienną y, to ieſt $a^x = y$. A ponieważ wartości y zawiſły od wartości x, i wzaiemnie wartości x, od wartości y, a będąc zawſze ſtatecznem; y ſtaie ſię funkcyą x, i wzaiemnie x funkcyą y. Nie zapominaymy bowiem o tey przeſtrodze, że kiedy ilość odmienną wyrażamy przez drugą odmienną, całą wartość takiego wyrazu ſzacuiémy z ilości odmiennych, a ilości ſtateczné, iaką ieſt a, nie wchodzą na ten czas w naſzę uwagę dla tego że w rozumowaniach naſzych baczyć powinniśmy na wſzyſtkié odmiany funkcyi i ich ſtóſunki, w któré, ilości ſtateczné bynaymniey nie wpływaią.

Ieżeli x ieſt ilością odmiénną i razém wykładnikiem czyli ſkazówką potęg, x przechodzić może przez wſzyſtkie, któré ſię tylko wymyslić mogą wartości znané, a przeto y przechodzić także będzie przez wſzyſtkie mogące ſię pomyślić potęgi a, to ieſt przez całkié lub ułomkowé, dodatné lub odiemné. Ieżeli x przeydzie przez liczby następuiące po ſobie w porządku naturalnym 0, 1, 2. 3, 4, 5, i t.d. czyli przez poſtęp arytmetyczny; y przeydzie przez wſzyſtkié porządkiem idącé potęgi a; a^0, a, a^2, a^3, a^4, a^5, i t.d. czyli przez poſtęp geometryczny; będzie więc poſtępowi arytmetycznemu x, odpowiadać y w poſtępie geometrycznym. Aże wiemy z Arytmetyki że ułożywſzy dwa poſtępy liczb odpowiadaiącé ſobie, ieden arytmetyczny, a geometryczny drugi, pierwſzy nazywá ſię Logarytmem drugiego; będzie więc x *Logarytmém* y: co wyrażać odtąd będziemy $l.y$, i zrównanie $a^x = y$ będzie zrównaniém logarytmiczném, w którém to, co ieſt funkcya y, nazywá ſię logarytmém, to ieſt $x = l.y$. W nauce więc logarytmów trzy rzeczy zachodzą do uważania, ilość ſtateczna a która raz obraná ieſt tą ſamą we wſzyſtkich wartościach x, i dla tego nazywá ſię GRUNTEM LOGARYTMÓW (*Baſis Logarithmorum*), powtóré wartości różné na x, iako wykładniki potęg rachunkowych w gruncie a, któré nazwaliśmy logarytmami; nakoniec różné wartości y przywiązané do gruntu a raz obranégo, któré ſię zowią UKŁADEM LOGARYTMÓW (*Syſtema Logarithmorum*).

W układzie Logarytmów obráwſzy liczbę pewną za grunt, wſzyſtko zawiſło od wártości różnych na x, biorąc $x = 0$, wypadnie $y = 1$, czyli $0 = l.y$; w iakimkolwiek więc układzie, logarytm iedności ieſt zero; ieżeli za x będą brané liczby całkie dodatne lub odiemné; w pierwſzym przypadku y będzie wyrażać

różné

różné potęgi przez liczby wzráſtaiącé a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, i t. d. w drugim zaś przypádku przez liczby ubywaiącé $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, i t. d. przeto wſzyſtkich liczb całkich zámkniętych między dwiéma granicami o, ∞, Logarytmy ſą dodátne; któré tém barziey roſną, im liczba ieſt znacznieyſzá: wſzyſtkich zaś ułomków zawartych między $-\infty$, i o, Logarytmy ſą odiemne; któré tém ſię ſtaią większé, im liczba barziey ubywá, tak dalece że $l.o = -\infty$. Przypuściwſzy wártości ułomkowé dodátne lub odiemné na x, n.p. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, i t.d, y ſtanie ſię $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, i t. d. czyli $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$ i t. d: aże cechy piérwiáſtkowé maią wielorakie znaczeniá; każdy takowy wyráz na y i cały układ logarytmów náleżałby do kilku wártości, przez co byłby wątpliwym, co ſię także pokazuie w ułomkach odiemnych na x. Przyſtawiaiąc zaś za x wártości niewymierné, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{n}$, i t. d. y byłoby równé potędze wykładnika niewymiernego, którey nie mogąc naznaczyć zupełnie, nie wiedzielibyśmy nawet wyrazu takiey funkcyi.

Idźmy iuż do uważaniá różnych wártości na grunt a: wziąwſzy $a = 1$ za x zaś iakiekolwiek bądź liczby, wſzyſtkie wártości p i cały układ logarytmów zamienia ſię na iedność: obráwſzy zaś za a liczbę większą od iedności ale odiemną, $a^x = y$ dá wártości dodatné na y, kiedy x będzie liczbą całką párzyſtą; kiedy zaś x będzie liczbą całką nieparzyſtą, wártości na y będą odiemné, układ więc takowy logarytmów zamykałby razem liczby dodatné i odiemné. Ieżeli zaś za x w tymże ſamym przypádku kłaśdź będziémy ułomki dodatne lub odiemné, wártości na y częścią będą rzetelné a częścią uroioné. S tych wſzyſtkich uwág zaſadzonych na własnościach funkcyi wykładniczych i zrównaniu $a^x = y$, pokazuie ſię oczywiście, że do wygodnego i rzetelnego układu logarytmów grunt a bydź powinien koniecznie liczbą dodatną więkſzą od iedności; wartości zaś na x bydź powinny wymierné. Wziąwſzy n.p. $a=10$. wypadnie nam układ

Liczby - - -	1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	i t. d.
Logarytmy	0.	1.	2.	3.	4.	5.	i t. d.

tak dalece: że wſzyſtkich liczb, które ſą zupełnemi potęgami gruntu 10. logarytmy ſą całkie zamykaiącé $n-1$ iedności, gdzie n znaczy liczbę figur wchodzących w potęgę 10. Wſzyſtkich zaś liczb, któré nie ſą potęgami gruntu, logarytmy bydź nie mogą ani całkie ani wymierné; ale wſzyſtkich liczb śrzodkuiących między 1 i 10, logarytmy będą zawarté między 0 i 1, to ieſt będą >0, ale <1; wſzyſtkich zaś śrzodkuiących między 10, i 100, logarytmy będą więkſzé od iedności, ale mnieyſzé od 2; wſzyſtkich śrzodkuiących między 100 i 1000, będą więkſze od 2, ale mnieyſzé od 3. i t. d. Będą więc takowych liczb logarytmy zamykać figury całkie i łamané. Pierwſzé oznaczaią mieyſce dwóch przyległych potęg gruntu, między któremi liczba podana śrzodkuié, i nazywaią ſię CECHAMI (*Characteriſticae*). Ponieważ cechy logarytmów wypadaią zaraz z liczby figur wchodzących w liczbę podaną; piſanie ich w tablicach logarytmów ieſt wcale niepotrzebne, ile że to przywięzuie logarytm do iedney tylko liczby, który bydź może do barzo wielu liczb rościągniony odmieniaiąc cechę.

Chociaż logarytmy niezupełnych potęg gruntu, nie mogą bydź dokładnie ani wymiernie naznaczone, nie idzie iednak zatem że ſą niewymierné: pozwólmy bowiem że b wyraża liczbę całką wymierną nie będącą potęgą gruntu a gdyby iey logarytm był niewymierny, ſzłoby zatem że $l.b=\sqrt{n}$, a przeto $b=a^{\sqrt{n}}$, co ieſt przeciwko piérwſzému przypuſzczeniu. Wnieśmy więc że logarytmy liczb któré nie ſą potęgami gruntu, a któré my odtąd nazywać będziemy *śrzodkuiącémi*, ani ſą wymierné ani niewymierne, to ieſt, nie należą do żadnego podziału funkcyi

alge-

algebraicznych; i dlá tego logarytmy ſą funkcyami prawdziwie PRZESTĘPNEMI.

Rozwięzuią ſię zrównania przeſtępne za pomocą logarytmów.

Roſtrząśniymy teraz wſzyſtkie działania zachodzące w logarytmach. Niech będą dwie liczby iakiekolwiek y, u, których logarytmy ſą x, z, w tymże ſamym gruncie a; będzie $a^x=y$, $a^z=u$; mnożąc té zrównania przez ſię, wypada: $a^{x+z}=yu$, przeto $x+z=l.yu$: logarytm więc mnogości równy ieſt ſummie logarytmów wſzyſtkich mnożników. Dzieląc zaś te ſame dwa zrównania otrzymamy $a^{x-z}=\frac{y}{u}$, zaczém $x-z=l.\frac{y}{u}$ to ieſt: logarytm wielorazu ieſt równy różnicy logarytmów ilości podzielney i dzielącey: to oſtatnie prawidło ſłuży na wſzyſtkie ułomki.

Ieżeli $a^x=y$ będzie $a^{nx}=y^n$, a przeto $nx=l.y^n$, a ponieważ $x=l.y$ więc $nx=n.l.y=l.y^n$: kiedy n ieſt liczbą całką wzór $n.l.y=l.y^n$, ſłuży na wynoszenie do potęg funkcyi za pomocą logarytmów, to ieſt: że logarytm iakieykolwiek potęgi równy ieſt logarytmowi ſamey ilości rozmnożonemu przez wykładnika potęgi: kiedy zaś n ieſt liczbą łamaną wzór $n.l.y=l.y^n$, ſłuży na wyciąganie pierwiaſtków. Niech będzie n. p. $n=\frac{1}{3}$, będzie $\frac{1}{3}l.y=l.\sqrt[3]{y}$; to ieſt: że logarytm iakiegokolwiek pierwiaſtku ieſt równy logarytmowi ilości rozdzielonemu przez wykładnika pierwiaſtku. Działaiąc więc w liczbach przez logarytmy mnożenie zamienia ſię na dodawanie, dzielenie na odciąganie, wynoſzenie do potęg na mnożenie, a wyciąganie pierwiaſtków na dzielenie proſte, co niezmiernie ułatwia naypracowitſze arytmetyczne działania.

We wſzyſtkich tych kombinacyach rozwięzuiąc zrównanie $a^x=y$ czyli $x=l.y$ opuściliśmy $l.a=1$. piſząc $x=l.y$, zamiaſt $xl.a=l.y$; ponieważ rachowaliśmy zawſze w gruncie a; gdybyśmy atoli rachowali

Hiſtorya tego wynalazku.

w gruncie innym, $l.a$ nie byłby iednością, a przeto nie mógłby bydź opuſzczony. Po tych uwagach rozwiążemy barzo łatwo zrównanie (D) zoſtawione na końcu poprzedzaiącego rozdziału $s = \frac{aq^x - a}{q - 1}$, czyli $\frac{s(q-1)+a}{a} = q^x$, a przeto $x.log.q = l.\frac{s(q-1)+a}{a} = l.(sq-s+a) - l.a$, - - - $x = \frac{log.(sq-s+a)-l.a}{log.q}$ widzemy więc że takowy ſpoſób rozwiązania zrównań nie podobny ieſt cale do tego, któryśmy w pierwſzey części podali, i dla tego działanie to nazywa ſię przeſtępnem, tak iako funkcya w zrównanie wchodząca a zawiſła od logarytmów, ma imię funkcyi przeſtępney. Użycie więc logarytmów ieſt barzo rozległe nie tylko do ułatwienia działań arytmetycznych w liczbach, ale też i do rozwiązania takowych zrównań, gdzie ilość nieznana wchodzi za wykładnika. Z niego wypływa nieuchronna potrzeba tablic logarytmicznych na wſzyſtkie liczby, ktore s całym tym rachunkiem były nieznane aż do czaſow *Nepera*. Ten w Roku 1614 odkrył go Geometrom w dziele: *Mirifici Logarithmorum canonis deſcriptio*, i ułożył tablice logarytmów na cały rachunek trygonometryczny. Układ iego ma za grunt liczbę 2, 71828 i t. d. który potem poznawſzy nie ze wſzyſtkiem wygodny, przerobił na inny, gruntu 10. Pracuiąc nad doſkonaleniem i rosciągnieniem nowey tey teoryi w śród powſzechney ſławy umarł Roku 1618, i Synowi dopiero iego doſtało ſię wyiawić ten nowo przerobiony układ w dziele: *Appendix de Logarithmorum praeſtantiori uſu.* Winniśmy gorliwey pracy Henryka *Briggs* Profeſsora Geometryi w Oxford rosciągnienie rachunku logarytmicznego do liczb naturalnych. Godny ten wdzięczności Matematyk po przeczytanem pierwſzem dziele Nepera udał ſię do niego, a obiawſzy dobrze wyłożone ſobie grunta tey teoryi i zamyſły

myſły wynalázcy, iął ſię z nieſpracowaną cierpliwością tey prácy, wyrachował logarytmy liczb naturalnych w gruncie 10. i wydał ie w Londynie Roku 1624. pod tytułem *Arithmetica Logarithmica*, któré dzis powſzechnie używane, maią imie **LOGARYTMÓW BRIGGIUSZOWYCH** (*Logarithmi Briggiani*). W dziele dopiero wſpomnionem znaydziem logarytmy liczb od *1.* do *20.000* i od *90.000* aż do *101.000*; w wſtępie zaś całą teoryą tego rachunku wyłożoną. Roſpoczął także Briggs podług tego układu rachować logarytmy linii trygonometrycznych, ale w ciagu tego dzieła umarł, któré po nim *Henryk Gellibrand* Aſtronomii w Londynie Profeſsor dokończywſzy, wydał w Xiążce *Trigonometria Britannica* Roku 1630. Na koniec R. 1633 *Adrian Ulacq* Niderlandczyk zoſtawioną przez Briggs ſzparę w logarytmach liczb naturalnych zapełnił i tablice trigonometryczné z więkſzą dla użycia wygodą przez dzieſiątki wtóre (*minuta ſecunda*) poſtępuiąc, ułożył w dziele *Trigonometria Artificialis*.

Neper wyciągnął ſpoſób rachowania logarytmów z uwagi nad biegiem przyſpieſzonym i iednoſtaynym. Myśl ta ſpólna *Newtonowi* w innym rodzaiu rachunku a daleka od naſzych początków nie może należyć do teraźnieyſzego zamiaru. Każdy za pomocą Mechaniki potrafi ią zrozumieć w ſamych originalnych piſmach Nepera, i cokolwiek do hiſtoryi tego wynalazku należy, wyczyta w Xiążkach dopiero wyliczonych, któré chociaż barzo rzadkié znayduią ſię w Bibliotece Szkoły główney tutéyſzey. Wſzyſtkie te dzieła będą zawſze ſzacowną dla potomności pamiątką tak nadzwyczayney pracy i cierpliwości iakiey w owych czaſach rachunek logarytmów wyciągał.

§. XLIX.

Kiedy Algebra rosciagła ſwoié pomocy po wſzyſtkich matematycznych częściach, zaczęli myśleć Geometrowie o użyciu iey do rachowania logarytmów liczb środkuiących. Aże te logarytmy ſpoſobem

tylko

Rozbieraią ſię logarytmy i funkcye wykładnicze na ſzeregi.

tylko bliſkim mogą ſię wyrazić, ſzukali Geometrowie tego rachunku w ſzeregach nieſkończonych iako iednynym inſtrumencie w takim przypadku. Szeregi atoli nieſkończone iakośmy widzieli wynikaią tylko z rozbioru funkcyi ułomkowych albo niewymiernych; logarytmy zaś liczb śrzodkuiących nie należąc do żadney tey klaſsy funkcyi Algebraicznych nie mogły podpádać pod takie ſzeregi iakieśmy uważáli. Ta trudność powinna była wſtrzymać wſzyſtkie uſiłowania Geometrów, ale geniuſz barziey ſię nią zapala niż zraża; a taiemnica póty ciąży na iego ſpokoyności, póki iey prawdzie nie wydrze. Takim pokazał ſię właśnie J. P. *Euler* który nową cale drogą przyſzedł do ſpoſobu wyrażenia logarytmów i wſzyſtkich funkcyi wykładniczych przez ſzeregi nieſkończone. Zabáwmy ſię nad tak piękną geometryczną ſztuką którą żebyśmy w iak nayiaśnieyſzym poſtawili widoku, zbliżmy do ſiebie świeżo doſtrzeżone logarytmów właſności.

Ponieważ $a^x=y$ uczy nás, że odmieniaiąc a przy tey ſamey wártości na x, tworzemy różne układy logarytmów; odmieniaiąc zaś x przy wártości ſtateczney na a wyciągamy logarytmy różnych liczb w tymże ſamym układzie; ieżeliśmy przywykli do prawdziwie geometrycznych uwag, powinniśmy ſię zaráz zapytać o ſtóſunek zachodzić mogący między logarytmami pewney liczby n, branemi w różnych układach, i między logarytmami liczb w tymże ſamym układzie. Na ten koniec wyſtawmy ſobie dwa grunta a, e; a wziąwſzy liczbę iakąkolwiek n przypuśćmy że iey logarytm w gruncie a ieſt p, w gruncie zaś e ieſt q, wypadną nam dwa zrównania $a^p=n$, $e^q=n$; przeto $a^p=e^q$ $p.\log.a=q.\log.e$ - - - - $\frac{p}{q}=\frac{\log.e}{\log.a}$: to oſtatnie zrównanie uczy nás że ſtóſunek zachodzący między logarytmami dwóch układów ieſt cale nie zawiſły od liczby, ponieważ n wypadło z zrównania; ale ten ſtóſunek cáłkiem zawiſł od gruntów. Równaiąc więc logarytm iakieykolwiek bądź liczby wzięty w iednym układzie, z logarytmem teyże ſamey liczby wziętym w drugim układzie, wypadnie nam pewien ſtóſunek zachodzący między logarytmami dwóch tych układów; ten ſtóſunek ponieważ ſię nie odmienia z odmianą liczb ale z odmianą gruntów, idzie zatem, że w każdym układzie ieſt liczba wchodząca w ſkład każdego logarytmu, która całkiem zawiſłą będąc od gruntu, rozróżnia ieden układ od drugiego tak, że za odmianą tey liczby odmienia ſię grunt, i za odmianą gruntu odmienia ſię ta liczba wyrażaiąca ſtóſunek logarytmów w iednym układzie do logarytmów drugiego układu.

To dobrze zrozumiawſzy uważmy, że ſpoſób wyrażenia logarytmów przez ſzeregi nieſkończone zawiſł od przerobienia $a^x=y$ na funkcyą dwó lub kilko-wyrazową niewymierną iakiegokolwiek wykładnika. Upatruymy tego ſpoſobu w odmianach x, ponieważ od tych, wartości y zawiſły. Uczyniwſzy $x=o$, mamy $y=1$ we wſzyſtkich powſzechnie układach; więc ieżeli wykładnik $x=o$ powiękſzy ſię liczbą f nieſkończenie ſię mało różniącą od zero; y powiękſzy ſię także liczbą w nieſkończenie ſię mało różnicą od iedności; to ieſt będzie $a^f=1+w$; aże $a^o=1$ należało do wſzyſtkich układów, w zrównaniu $a^f=1+w$, w będzie funkcyą f, ale w ſwey wielkości zawiśnie od gruntu a: będzie więc w zamykać w ſobie f i razem liczbę zawiſłą od gruntu, wyrażaiąca ſtóſunek logarytmów w iednym układzie do logarytmów drugiego układu; nazwiymy taką liczbę k, ponieważ k wymierza wartość w podług wartości gruntu a, będzie $w=kf$, a zatem $a^f=1+kf$ - - - $a^{fg}=(1+kf)^g$, potrafiliśmy więc y rozebrać na funkcyą dwó-wyrazową i wynieść do potęgi g; trzeba nam teraz wynaleśdź związek między k, i a, oprócz tego chcąc funkcyą a^{fg} rosciągnąć na wſzyſtkie liczby ſkończone, potrzebaby g nadadź taką wartość, któraby rozmnożona przez f dała liczbę ſkończoną, co łatwo otrzymać, bo ieżeli $gf=x$, będzie $g=\frac{x}{f}$, a ponieważ f podług *1go* przypuſzczenia ieſt liczbą nieſkończenie małą, g będzie koniecznie liczbą nieſkończenie wielką; mnogość zaś z dwóch takowych liczb wypada ſkończona. Tym ſpoſobem J. P. *Euler* uważaiąc każdą liczbę ſkończoną iako mnogość z nieſkończenie małey przez nieſkończenie wielką, przyſzedł do przerobienia logarytmu na wyraz wykładniczy dwó-wyrazowy, ten zaś na ſzeregi nieſkończone. Patrzmy na ciąg tego rachunku i iego wypadki. Ponieważ

$$a^{fg}=(1+fk)^g=1+gkf+\frac{g(g-1)}{1.\ 2}k^2f^2+\frac{g(g-1)(g-2)}{1.\ 2.\ 3}k^3f^3+\frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}k^4f^4$$

i t. d. g będąc liczbą nieſkończenie wielką, wſzyſtkie wartości ſkończone przed nią nikną: można więc za $g-1$, $g-2$, $g-3$, i t. d. wziąść g; oprócz tego $f=\frac{x}{g}$ kładąc zaś te wartości w ſzereg dopiero rozebrany, odmieniemy go na

$$a^x=(1+\frac{kx}{g})^g=1+kx+\frac{k^2x^2}{1.2}+\frac{k^3x^3}{1.2.3}+\frac{k^4x^4}{1.2.3.4}+\text{ i t. d. - - - - }(A).$$

to zrównanie daie nam wyraz funkcyi wykładniczey przez ſzereg nieſkończony, ale funkcyi takiey, gdzie ilość ſtateczna ieſt gruntem logarytmów; chcąc więc wyrazić przez ſzereg nieſkończony funkcyą b^z tak, żeby b nie brać za grunt, znaleśdź nam trzeba związek między b^z i między a^x. Na ten koniec uczyńmy $b=a^n$, $b^z=a^{nz}$, $n=log.b$ w gruncie a; kładąc w zrównanie (A) $x=nz$, $n=l.b$ otrzymamy:

$$b^z=1+\frac{kz}{1}log.b+\frac{k^2z^2}{1.2}(log.b)^2+\frac{k^3z^3}{1.2.3}(log.b)^3+\text{ i t.d. }(B)$$

Zrównanie (B) wyraża funkcyą wykładniczą przez ſzereg tak, że ani k, ani $log.b.$ nie należą do gruntu

b, ale

b, ale do gruntu *a*. Położywſzy teraz w zrównaniu (*A*) $x=1$, otrzymamy:

$$a=1+k+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\frac{k^4}{1.2.3.4}+\frac{k^5}{1.2.3.4.5}+\text{ i t. d.}\qquad(C).$$

Oſtatnie to zrównanie daie nam związek między *k* i *a*, i uczy nas, że grunt *a* zawiſł całkiem od *k*, i ieſt owa liczbą ſtóſunkową wypadaiącą z porównania logarytmów dwoiakiego układu, i zawiſłą całkiem od gruntu, iakośmy na początku tego §. doſtrzegli. Maiąc więc takową liczbę każdemu układowi ſzczególną, wynaydziemy grunt tem bliżſzy prawdy, im ſzereg (*C*) będzie barziey maleiący, to ieſt im *k* będzie mnieyſze. Potrzebaby nam ieſzcze *k* wyrazić przez *a*, czego nie łatwo dokazać s ſzeregami. Spoſób poſpolity w Algebrze na ten przypadek nazywa ſię POWRÓT SZEREGÓW (*Retour des Suites*): żeby go tu można użyć potrzeba naprzód przypuścić że ſzereg (*C*) ieſt maleiącym, to ieſt że *k* ieſt liczbą barzo małą: ieżeli tak ieſt, w zrównaniu:

$$a-1=k+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\frac{k^4}{1.2.3.4}\text{ i t. d.}$$

uczyniwſzy $a-1=z$, możemy wziąść $z=k$; a chcąc mieć *k* wyrażone dokładniey przez *z*, zmyślmy ſobie że ieſt dane przez ſzereg:

$$k=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{ i t. d.}$$

a biorąc tę wartość za *k* w drugim członku zrównania (*C*) przywiedzionego do zero; znaydziem:

$$\begin{array}{lcl}
k & = & Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{ i t. d.}\\
\frac{k^2}{1.2} & = & \frac{1}{1.2}A^2z^2+ABz^3+\frac{1}{1.2}B^2z^4+\text{ i t. d.}\\
\frac{k^3}{1.2.3} & = & \frac{1}{1.2.3}A^3z^3+\frac{1}{1.2}A^2Bz^4+\text{ i t. d.}\\
\frac{k^4}{1.2.3.4} & = & \ldots\qquad\qquad\frac{1}{1.2.3.4}A^4z^4\\
+\text{ i t. d.} & & \\
-z & = & -z\qquad\qquad\qquad=0.
\end{array}$$

ponieważ to zrównanie ieſt toſamé, każdy wſpółczynnik z ieſt zero; s kąd mamy tyle zrównań ile nam ich potrzeba na oznaczenie $A, B, C, D,$ i t. d. znáydziémy zaś $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{3}$, $D=\frac{1}{}$, a przeto

$k=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3+\frac{1}{12}(a-1)^4$ i t.d. (D)

widzemy że ten oſtatni ſzereg nie może nam dadź bliſkiey wartości na k w funkcyi a, ieżeli a nie ieſt ułomkiem barzo małym.

Wyciagaia ſię zrównaniá na rachowanie tablic logarytmów.

Staraymy ſię teraz przyiśdź do wyrażenia logarytmu iakieykolwiek liczby przez ſzereg nieſkończony, upatruiąc oraz innego zrównania w ktoremby k bydź mogło dokładniey wyrażone przez a. Maiąc na pamięci pierwſze wartości na f, g, połóżmy - - -

$$(1+fk)^g=1+z=a^{fg}, \qquad 1+fk=(1+z)^{\frac{1}{g}} \quad - - -$$

$$fg=\frac{g}{k}\left[(1+z)^{\frac{1}{g}}-1\right];$$ aże $gf=l.(1+z)$; więc

$$l.(1+z)=\frac{g}{k}\left[(1+z)^{\frac{1}{g}}-1\right];$$ rozebráwſzy podług wzoru Newtona drugi ten zrównania członek na ſzereg nieſkończony, i położywſzy za $g-1$, $g-2$, $g-3$, i t. d. g; wypadnie:

$$l.(1+z)=\frac{1}{k}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\text{i t. d.}\right) \quad (E)$$

żebyśmy tem barziey maleiący otrzymali ſzereg, połóżmy znowu $a^{fg}=(1+fk)^g=1-z$; będzie

$$fg=l.(1-z)=\frac{g}{k}\left[(1-z)^{\frac{1}{g}}-1\right];$$ aże

$$(1-z)^{\frac{1}{g}}-1=-\frac{z}{g}-\frac{g-1}{g.2g}z^2-\frac{(g-1)(2g-1)}{g.\,2g.\,3g.}z^3$$

— i t. d.

podług zaś pierwſzego przypuſzczenia $g-1=g-2=g-3=g-4$ i t. d. $=g$

$$l.(1-z)=\frac{1}{k}\left(-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}-\text{i t.d.}\right)(F)$$

zrównanie

zrównanie *(F)* odciągnąwſzy od zrównania *(E)*, otrzymámy

$$l.(1+z)-l.(1-z)=l.\frac{1+z}{1-z}=\frac{2}{k}\left(z+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{9}z^9+\text{i t. d.}\right) \quad - \; - \; - \; - \quad (G).$$

to oſtatnié zrównanie ſłuży nám na wyrażenie logarytmu iakieykolwiek bądź liczby przez ſzeregi nieſkończoné. Chcąc n.p. mieć *log.* 5, czynię - - - - $\frac{1+z}{1-z}=5$, a przeto $z=\frac{4}{6}$

$$log.5=\frac{2}{k}\left(\frac{4}{6}+\frac{4^3}{3.6^3}+\frac{4^5}{5.6^5}+\frac{4^7}{7.6^7}+\frac{4^9}{9.6^9}+\text{i t. d.}\right)$$

znaiąc *k*, i znaleziony ſzereg przerobiwſzy na ułomki dzieſiątkowe, kilka terminów początkowych dá nam barzo bliſki logarytm liczby 5. Chcąc teráz z *(G)* wyciągnąć na *k* wyráz przez funkcyą *a*; połóżmy $\frac{1+z}{1-z}=a$, zaczém $z=\frac{a-1}{a+1}$, a poniéważ *log.* $a=1$, będzie z (G)

$$k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3.(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5.(a+1)^5}+\frac{(a-1)^7}{7.(a+1)^7}+\text{i t.d.}\right) \quad (H)$$

ieżeli $a=10$; będzie:

$$k=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.(11)^3}+\frac{9^5}{5.(11)^5}+\frac{9^7}{7.(11)^7}+\frac{9^9}{9.(11)^9}+\text{i t. d.}\right)$$

co przerobiwſzy na ułomki dzieſiątkowé, znáydziém:

$k=2,3025850929$ i t.d. $\frac{1}{k}=0,4342944819.$ i t. d.

kładąc więc tym ſpoſobém iakiégośmy iuż użyli na 5, za $\frac{1+z}{1-z}$ iakąkolwiek liczbę, wynáydziémy ſzereg, którego początkowé terminy zamiéniwſzy na ułomki dzieſiątkowé, i té przez $\frac{2}{k}$ rozmnożywſzy, wypadną nam logarytmy *Briggiuſza.* Táblice więc logarytmów tym ſpoſobem łatwo mogą bydź rachowane.

Dwa główné zrównaniá (*C*), (*H*), daią nam związek między *k*, i *a*, tak dalece, że *k* iak widzémy w zrównaniach i w teoryi, ciągnie za ſobą pewną wártość na grunt, i ſtanowi cały układ logarytmów; dlá tego też wártość na *k* nazywá ſię w Geometryi FOREMNIKIEM (*Numerus regulator*). Każdy układ logarytmów má ſwégo foremniká i grunt, s których ieden zawiſł w ſwey wártości od drugiego. Uczyńmy n.p. $k=1$; zrównanie (*C*) zamieni ſię na

$$a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\text{i t.d.}$$

co przerobiwſzy na ułomek dzieſiątkowy, będzie $a=2,718281828$ i t. d. Logarytmy na taki grunt rachowané ſą naypierwſzé logarytmy *Nepera* któré dziś PRZYRODZONEMI albo HYPERBOLICZNEMI (*Logarithmi naturales, Hyperbolici*) zowią; dlá tego, że przez takié logarytmy wyrażá ſię płaſzczyzna zamknięta łukiem linii krzywey zwaney *Hyperbola.* Użycié ich ieſt barzo rozległé w wyżſzych Matematyki częściach. Ilekolwiek zaś o logarytmach hyperbolicznych mówić będziemy, ich grunt z dziſieyſzemi Geometrámi 2,718281 i t. d. nazywać będziemy *e*, tak dalece: że rozumuiąc nad zrównaniem logarytmicznem w gruncie 10, wyrażać ie ſtatecznie będziem przez $a^x=y$; znaczyć zaś będziemy zrównanie logarytmiczné przez $e^x=y$, ilé razy rzecz będzie do logarytmów hyperbolicznych ſtóſowana.

Wſzyſtkie zrównaniá któreśmy na logarytmy i funkcye wykładniczé wyżey wyciągneli z J. P. *Eulerem*, należeć będą do gruntu *e* uczyniwſzy w nich $k=1$, i tak w układzie logarytmów hyperbolicznych:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{i t.d.}=\left(1+\frac{x}{g}\right)^g$$

$$l.(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\text{i t. d.}$$

l.(1—z)

$$l.(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}-\text{i t.d.}$$

$$l.\frac{1+z}{1-z}=2(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}+\text{i t. d.})$$

to oſtatnie zrównanie ſłuży nám do rachowaniá logarytmów hyperbolicznych iakichkolwiek liczb, chcąc n.p. mieć logarytm hyperboliczny liczby 2, czynię $\frac{1+z}{1-z}=2$, s kąd $z=\frac{1}{3}$, a przeto

$$\log.\ 2.=2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\text{i t. d.})$$

Co zamieniwſzy na ułomek dzieſiątkowy znáydziem $log.2=0,693147$ tym ſamym ſpoſobem znáydziemy $log.5=1,609437$ - - - $log.7=1,945910$. i t. d. maiąc zaś niektórych liczb logarytmy; z nich wypadaią logarytmy liczb innych podług wyżey wyłożonych początków. n.p. $2.l.2=l.4$; $2.log.5.=log.25$; $log.2+log.5=log.10$; $2.log.7=log.49$. i t. d.

Takim ſpoſobem J.P. *Euler* wyrachował náprzód logarytmy hyperboliczne aż do 26. figur na dzieſięć liczb początkowych, które potem P. *Wolfram* Lieutenant Artyleryi Rzeczy-Poſpolitey Holenderſkiey pociągnął aż do *10.009*. wydane przez P. *Schulze* w Berlinie 1778 wráz z logarytmami *Briggiuſza* barzo wygodnie ułożonemi. W roku 1781 widziałem w Paryżu w manuſkrypcie tablice logarytmów hyperbolicznych na liczby naturalne aż do *100.000*, które Benedyktyn ieden wyrachowáwſzy podał do roſtrząſnienia Akademii umieiętności. Te approbowane od Akademii za mey ieſzcze bytności zaczęto drukować.

§. L.

Poznáwſzy iuż ſpoſób rachowania logarytmów w iakimkolwiek układzie wróćmy ſię teraz do roſtrząſnienia ſtóſunków zachodzących między logarytmami różnych układów; i między logarytmami różnych liczb w tymże ſamym układzie. Co do pierwſzego wyciągnęliśmy byli w §. 49. na ten ſtóſunek zrównanie

Spoſób przérábianiá logarytmów iednégo, na logarytmy drugiégo układu.

wnanie $\frac{p}{q}=\frac{log.e}{log.a}$ czyli $p=\frac{log.e}{log.a}.q$ - - - (m), co nas uczy, że ieżeli a znaczy grunt logarytmów Briggiuſzowych, e zaś grunt hyperbolicznych, p logarytm liczby n należący do pierwſzego, q logarytm teyże ſamey liczby należący do drugiego układu; możemy za pomocą zrównania (m) przerobić logarytm hyperboliczny na logarytm Briggiuſza: ieżeli bowiem $log.e=1$, $log.a$ czyli $log.\ hyper.\ 10=2,302585$; będzie $\frac{log.e}{log.a}=\frac{1}{2,302585}=0,434294$, przeto $p=0,434294.q$: mnożąc więc iakieykolwiek liczby log. hyperb. q, przez $0,434294$, przerobiemy go na logarytm Briggiuſza. Chcąc zaś logarytmy Briggiuſza zamienić na hyperboliczne; oſtatnie zrównanie daie mi - - - - $q=\frac{1}{0,434294}\ p=2,302585.p$ to ieſt, mnożąc każdy logarytm Briggiuſza p, przez $2,302585$, zamieniemy go na hyperboliczny. S kąd poznaiemy iak ieſt łatwo logarytmy iednego układu przerobić na logarytmy drugiego iakiegokolwiek. Mnożnik ten przerabiaiący tak logarytmy, nazywa ſię ZAMIENNIK (*Modulus*).

Wſzyſtkie zrównania na rachowanie logarytmów uſtanowione różnią ſię foremnikiem k, który w dwóch od nas roſtrząſanych układach wypada z rozdzielenia logarytmu hyperbolicznego q iakieykolwiek liczby n, przez logarytm Briggiuſza p teyże ſamey liczby, to ieſt $\frac{q}{p}=k$: przypuśćmy że $n=10$; logar. Brigg. $10=p=1$. więc $q=k$, to ieſt foremnik układu Briggiuſza ieſt równy logarytmowi hyperbolicznemu liczby 10. co nam ſię właśnie w wyżſzym iuż rachunku pokazało.

Zebyśmy nic nie opuścili co do wyrazu funkcyi wykładniczych należy, ſtaraymy ſię wzór Briggiuſza

$a^x=y$

$a^x = y$ wyrazić przez ſzereg nieſkończony logarytmów hyperbolicznych. To zaś łatwo barzo wyciągniemy z zrównania (*B*) §. 49. położywſzy w niem *a* za *b*, *x* za *z*, i foremnika $k=1$, będzie

$$a^x = 1 + x\,log.a + \frac{x^2}{1.2}(log.a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}(log.a)^3 + \frac{x^4}{1.2.3.4}(log.a)^4 + \text{ i t. d.} \qquad (B')$$

funkcyá więc iakakolwiek wykładniczá może ſię rozebráć na ſzereg nieſkończony za pomocą logarytmów hyperbolicznych przez użycie zrównaniá (*B'*), tak iako taż ſama funkcyá rozbierze ſię na ſzereg nieſkończony za pomocą logarytmów Briggiuſza przez użycie wzoru (*B*) §. 49.

Zoſtaie nám teráz roſtrząſnąć ſtóſunek logarytmów różnych liczb w iednym układzie. Weźmy na to dwie liczby *M*, *N*; pierwſzey logarytm w gruncie *a* nazwiymy *p*; drugiey logarytm w tymże ſamym układzie nazwiymy *q*; wypadną zrównaniá $a^p = M$; $a^q = N$. obydwa przerobiwſzy na $a^{pq} = M^q$, $a^{pq} = N^p$; będzie $M^q = N^p$, $M = N^{\frac{p}{q}}$ uczyniwſzy $M = N^{\frac{m}{n}}$ będzie $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{p}{q}}$ czyli $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, té zrównaniá nie zamykaią w ſobie *a*, więc ſtóſunek dwóch logarytmów w tymże ſamym układzie ieſt nie zawiſły od gruntu, czyli ten ſtóſunek ieſt ieden we wſzyſtkich iakichkolwiek układach; té zrównaniá nám pokazuią, że logarytmy potęg teyże ſamey liczby w iakimkolwiek układzie tak ſię maią iako ich wykładniki.

Pokazuie ſię użycie táblic logarytmicznych w ułomkach.

S tey oſtatniey prawdy złączoney z innemi wyżey wyłożonemi wypadá nam ſpoſób użyciá logarytmów liczb całkich do liczb łomanych. Wiemy naprzód że ieżeli log. $1=0$; logarytmy wſzyſtkich ułomków prawdziwych ſą odiemne: żebyśmy więc ułomki mogli rachowáć przez té ſame logarytmy co i liczby całkie, należy koniecznie cechę licznika uczynić większą od cechy mianownika, aby reſzta z odciągania wypadła dodatna. Na ten koniec zgodzili ſię Geometrowie logarytmy na liczniki ułomków tak rachować, że w nich iedność ma za logarytm 10, albo 100; a przeto $\frac{1}{10}=0,1$ ma za logarytm 9; albo 99, co łatwiey w naſtępuiącey tablicy poznamy.

Ułomki.	Ich logarytmy.		
1	10,000000	albo	100,000000
0,1	9,000000		99,000000
0,01	8,000000		98,000000
0,001	7,000000		97,000000
0,0001	6,000000		96,000000

i t. d.

kiedy więc mamy do czynienia z ułomkiem n. p. $\frac{5}{465}$, bierzemy s tablic logarytm 5, i do iego cechy dodawſzy 10, odciągamy od niego logarytm zwykły mianownika 465, s czego wypadnie nam logarytm, reſzty 8,031170: ſzukam odpowiadaiącey liczby temu logarytmowi nie maiąc względu na iego cechę, a tę znalazłſzy 10752, tylé dodaię zero przed figurami, ilé ceſze logarytmu brakuię iedności do dzieſiątka, s tych zero ieden zaſtępuie mieyſce liczb całkich i oddziela ſię kreſką: i tak log. 8,0315170 ma liczbę odpowiadaiącą $0,010752=\frac{5}{465}$.

Przyczynę tego działania pokazuią nam własności ułomków dzieſiątkowych i logarytmów: powiękſzyć bowiem cechę logarytmu dzieſiątkiem, ieſt to liczbę temu logarytmowi odpowiadaiącą rozmnożyć przez 10000000000; potrzeba więc po ſkończonem działaniu przez tę ſamę liczbę wypadek cały rachunku rozdzielić, aby liczbę podaną wrócić do ſwey dawney wartości: to dzielenie wykonywa ſię przez dodanie tyle zero przed figurami ile ceſze brakuie iedności

do

do dzieſiątka. I tak w podanym przykładzie *log.* 8,0315170 przez ſwoię cechę pokazuie, że liczba mu odpowiadaiąca powinna mieć 9 figur, dopelniwſzy ią przez zero na końcu przydané, i całą tę liczbę potem rozdzieliwſzy przez 10000000000, przypadnie przed figurami tyle zero; ile ceſze logarytmu brakuie iedności do dzieſiątka. Przez tę ſamę ſztukę ſzukaiąc logarytmu ułomku dzieſiątkowego, bierzemy logarytm figur tego dzieſiątka, iak gdyby były całkie, kładąc za cechę liczbę tyle ſię od dzieſiątka różniącą; ile poprzedzá zero też figury, i tak liczby 0,00175 logarytm ieſt 7,2430380.

Ponieważ zaś w tym użyciu logarytmów, bierzemy 10 za logarytm iedności; we wſzyſtkich działaniach arytmetycznych muſzemy mieć wzgląd na 1, i iey logarytm. Wſzyſtkie bowiem działania arytmetyczne nic innego nie ſą, tylko różne ſpoſoby porównywania wielkości iakieykolwiek s ſwą iednością, i wynaydowania różnych odmian wypadaiących albo z odmiany iedności albo z odmiany wielkości ſamey: i tak mnożyć n. p. liczbę *a* przez *b*, nic innego nie znaczy, tylko znaleśdź wartość *b* kiedy iego 1 odmieniá ſię na *a*, czyli znaleśdź ſtóſunek *b* do mnogości taki; iaki ieſt iedności do *a*, to ieſt $1:a::b:\frac{ab}{1}$, należy więc w teraźnieyſzem używaniu logarytmów od logarytmu mnogości odciągnąć logarytm iedności 10: Podobnie potrzeba mowić o dzieleniu, które zależy na wynalezieniu takiego ſtóſunku liczby podzielney do wielorazu, iaki ieſt liczby dzielącey do iedności to ieſt: chcąc n.p. liczbę *ab* rozdzielić przez *b*, należy rozwiązać proporcyą, $b:1::ab:\frac{ab.1}{b}$ przeto náleży nam wprzód do logarytmu liczby podzielney dodadź $log.1=10$, a dopiero od tey ſummy odciągnąć logarytm liczby dzielącey. Te wſzyſtkie względy na iedność i iey logarytm odpadaią w liczbach całkich, ponieważ tam *log*..$1=0$. Zobaczmy té wſzyſtkie prawidła w przykładach.

Przykład mnożeniá: niech będą ułomki $\frac{3}{124} \times \frac{25}{732}$

$$\log.\frac{3}{124} = 8,3836996.$$

$$\log.\frac{25}{732} = 8,6720284.$$

---

log. mnogości $= 17,0557270 - 10 = 7,0557270$ którému podług pierwſzego prawidła odpowiadá liczba $0,0011369 = \frac{3}{124} \times \frac{25}{732}$

Przykład dzieleniá: niech będą ułomki $\frac{1}{3082} : \frac{7}{29}$

$$\log\frac{1}{3082} + \log.1 = 16,5111674$$

$$\log.\frac{7}{29} = 9,3827000$$

---

log. wielorazu $= 7,1284674.$

którému odpowiadá liczba $0,0013442 = \frac{1}{3082} : \frac{7}{29}.$

a ponieważ wynoſzenie do potęg nic innego nie ieſt, tylko mnożenie liczby ſamey przez ſię tylé razy powtórzoné, ilé wykładnik potęgi zmnieyſzony 1, má w ſobie iedności; wyciąganie zaś pierwiaſtków tyléż i takimże ſpoſobem powtórzoné dzielenie; za każdem zaś mnożeniem należy odciągać od logarytmu mnogości 10; tak iak za każdem dzieleniem potrzeba do liczby podzielnéy dodawać 10, idzie za tem, że wynoſząc ułomek iaki do potęgi m, za pomocą logarytmów, potrzeba od logarytmu potęgi odciągnąć liczbę $10.(m-1)$: wyciągaiąc zaś pierwiaſtek należy wprzód cechę logarytmu ułomku podanego powię-

kſzyć

kſzyć liczbą $10.(m-1)$, a dopiero go potem rozdzielić przez wykładnika pierwiaſtku. Zobaczmy to w przykładach.

Przykład wynoſzenia do potęg: wynaleśdź wártość $(0,05)^5$. - - - $5.\log.0,05=5.8,6989700=43,4948500$. od tey mnogości odciągnąwſzy $10.(5-1)=40$, zoſtanie ſię $3,4948500=\log.(0,05)^5$, któremu odpowiada liczba $0,0000003125=(0,05)^5$.

Przykład wyciągania pierwiáſtków. Wynaleśdź wártość $\sqrt[6]{0,15}$. - - - $\log.0,15+40=49,1760913$. rozdzieliwſzy go przez 6, wypádnie logarytm pierwiaſtku $8,1960152$ którego liczba $0,015704=\sqrt[6]{0,15}$.

Takim ſpoſobem przyſtóſowane logarytmy do ułomków niezmiernie rachunki arytmetyczne ułatwiaią, i ſłużą do obiaśnienia tablic trygonometrycznych, dla których prawie náyſzczególniey ten rodzáy rachunku był wynaleziony, i do nich iedynie użyty od *Nepera*. S tegoć to podobno powodu J. P. *Euler* przyſtóſowawſzy barzo ſzczęśliwie rachunek Algebraiczny do logarytmów, obrał ſobie zaráz rachunek trygonometryczny do wydoſkonalenia w tymże ſamym widoku, ale z większą daleko pomyślnością, i z niezmiernie rozlegleyſzym dla geometryi pożytkiem. Wypáda nam o nim z barzo proſtego rzeczy porządku mówić. Ieżeli bowiem we wſzyſtkich matematyki częściach, gdzie rachunek arytmetyczny wchodzi, pomoc Algebry przez ogólność ſwoich znaków i prawideł, rosciąga barzo daleko granice prawdy; w trygonometryi zaiſte która ieſt czyſtem przyſtoſowaniem arytmetyki do geometryi, rachunek algebraiczny náyſzczęśliwiey udadźby ſię powinien, i przyłożyć ſię do doſkonałości ledwo nie wſzyſtkich matematycznych nauk, i od nich zawiſłych ſztuk i rzemióſł, w których użycie trygonometryi ieſt nieuchronne. Iakóż ſkutek pokazał, że ſtworzenie tego rachunku, i wprowadzenie go w całą matematykę, będzie zawſze na czele náypożytecznieyſzych

wynalázków

wynalázków tego wielkiego Geometry. Należy do iſtoty naſzego zamiaru wyłożyć go w całey ſwéy obſzerności i świetle. Trzymaiąc ſię ściśle naſzego w tey xiążce przedmiotu, powinnibyśmy wſzyſtkie trygonometryi początki mimo ſię puścić, wyciągaiąc poprzedzaiącey tey wiadomości po czytelniku; ale pamiętni na niedoſtatek narodu, w którym rozrzucone geometryi xiążki barzo wiele do czynieniá w arytmetyce i trygonometryi zoſtawiły, nie uſpoſábiaiąc uczących ſię do dziſieyſzego ſtanu matematyki, i nie poprawiaiąc wiele niedokładnych i fałſzywych tłómaczeń w ſtóſunku liczb do linii; uznaliśmy za potrzebę, ogólny przynáymniey widok całey trygonometryi wyłożyć, i z niego wyciągnąć analityczny rachunek linii, które trygonometrycznémi nazwano.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

S pierwſzych początków Trygonometryi wyciągá ſię rachunek LINII TRYGONOMETRYCZNYCH; tłómaczą ſię włáſności ŁUKÓW KOŁA (drugi rodzay funkcyi przeſtępnych); ſpoſób rachowaniá Tablic trygonometrycznych i ich Logarytmów: użycie nakoniec tego rachunku s poprzedzaiących pokazuie ſię rozdziałów.

§. LI.

Obraz ogólny o wymiarach płaſzczyzn.

Wſzyſtkie figury liniami proſtémi zamknięte rozebrać ſię mogą na troykąty, przeto do ich wymiaru doſyć nam ieſt wiedzieć ſpoſób mierzenia troykątów. Każdy troykąt má w ſobie ſześć rzeczy do uważania: wſzyſtkie te wchodzą w iego rozmiár, od wielkości bowiem dwóch boków, i różney ich do ſiebie pochyłości, zawiſła wielkość trzeciego i iego pochyłość do pierwſzych, a od wſzyſtkich tych, wiel-

kość

kość płaſzczyzny w troykącie zawártey. Wymiár figury dzieie ſię przez porównanie płaſzczyzny z inną płaſzczyzną wziętą za miarę, która ſię za zwyczáy bráć zwykła s cząſtek figury. Równanie dwóch płaſzczyzn rodzi ſtóſunek, który póty nie odkryie wymiaru płaſzczyzny podaney, poki go nie zrównamy z drugim ſtóſunkiem. Drugi ten ſtóſunek bierzemy z nauki ogólney ſtóſunków czyli z arytmetyki, ſzukaiąc liczby, któraby ſię tak miała do ſwey iedności, iako ſię má płaſzczyzna podaná do ſwoiey miary. I na tem ci to wynaydowaniu liczb wſpomnionych, i wyrażeniu przez nie ſtóſunku zachodzącego między płaſzczyznami, zależy cała część geometryi o wymiarach płaſzczyzn. Dowodzi ona nam, że maiąc kwadrat, a z iego wyſokości wziąwſzy część za iedność liniową, drugą znowu część równą s podſtawką; s tych dwóch części zrobiwſzy kwadracik máły, tego kwadracika płaſzczyzna, má ſię do płaſzczyzny kwadratu podanego, iako ſię má mnogość liczebná ze zbioru iedności liniowych wyſokości, przez zbiór iedności liniowych s podſtawką; do iedności liczebney ogólney. S kąd wyciągamy tę regułę: że płaſzczyzna kwadratu ieſt równa mnogości z wyſokości przez podſtawek. Ten ſkrócony w geometryi wyráz nie wytłomaczony dobrze poczynaiącym, wprawić ich może w barzo przewrotne geometryi rozumienie: wiemy bowiem że liniá nie może ſię mnożyć przez linią, bo w tem działaniu ieden z mnożników bydź koniecznie powinien liczbą oderwaną i ogólną.

Z wymiaru płaſzczyzn wypádá potrzebá trygonometryi, i linii węnicy używanych.

W takowem płaſzczyzn między ſobą równaniu i wyrażeniu ich do ſiebie ſtóſunku przez liczby, czwárty termin wypádá koniecznie s trzech iuż wiadomych, a zatem z ſześciu rzeczy w ſkłád troykąta wchodzących trzy tylko ſą wolne dla naſzych przypuſzczeń, inne zaś trzy iuż ſą wypadkiem koniecznym s pierwſzych. I na tem ci to wynaydowaniu trzech rzeczy, z innych trzech podanych zależy

cała

cała ſztuka rachowaniá troykątów, którą *Trygonometryą* nazwano, a którá ieſt tylko proſtym rachunkiem arytmetycznym do geometryi ſtóſowanym. Idzie więc w trygonometryi o porównanie ſześciu rzeczy między ſobą, i wyciągnienie przez nię trzech niewiadomych s trzech podanych. Linie proſté iakiemi ſą boki troykąta potrafiemy dobrze między ſobą równać, i ſtóſować: ale iakże ſtóſować kąty z liniami? Geometrowie obrali ſobie obwód koła do wymiaru kątów, lecz nie maiąc dokładnego ſtóſunku między linią proſtą i krzywą, nie można było boków równać z łukami zamykaiącémi kąty. Trzeba im więc było powymyślać inne linie proſté znaczącé łuki koła, i kąty, s których wielkości możnaby przyiśdź do wielkości kątów.

Fig. 1.

Wziąwſzy ſobie na figurze 1. łuk *DB* mierzący kąt *ACB*; linié proſté oznaczaiącé ten łuk ſą: pionowá *AB* którá ſię nazywá WSTAWĄ ŁUKU *DB* lub kąta *ACB* (*Sinus arcûs vel anguli*); *DA* WSTAWĄ ODWRÓCONĄ (*Sinus verſus*): *ED* STYCZNĄ (*Tangens*): *EC* SIECZNĄ tego ſamégo łuku lub kąta (*Secans*). Aże z wiadomości łuku *DB* wypádá wiadomość łuku *BG* który ieſt iego dopełnieniém, więc i linie dopieró wymienioné odkryć nám zaráz powinny podobné linie ſłużącé łukowi *BG*, albo że iaśniey powiém, linie łuku *DB* mieć powinny inné odpowiadaiącé ſobie w łuku *BG*: iakoż *BH=AC* którá ieſt wſtawą łuku *BG*, nazywá ſię DOSTAWĄ łuku *DB* (*Coſinus arcûs*); *HC=BA* którá ieſt wſtawą *DB* nazywá ſię Doſtawą *BG*; *GH* którá ieſt Wſtawą odwróconą *BG*, zowié ſię Doſtawą odwróconą *DB* (*Coſinus verſus*) *FG*, którá ieſt Styczną *BG*, zowie ſię Doſtyczną *DB* (*cotangens*): Sieczná nakoniec *FC* łuku *BG*, ieſt Doſieczną łuku *DB* (*Coſecans*): i tak co ſię w iednym łuku zowie Wſtawą, Styczną, Sieczną; i t. d. to w iego dopełnieniu nazywá ſię Doſtawą, Doſtyczną, Doſieczną, i t. d. Wſzyſtkie té linie iak widzemy, ſą liniami proſtemi i funkcyami promienia, który

będąc

náywiękſzą wſtawą łuku 90, má imie Wstawy prostey (*Sinus rectus*). Naznaczywſzy takim ſpoſobem linie wyrażaiące łuki, potrzeba ié było przywieśdź do iedney powſzechney miary porównywánia, to ieſt wyrazić ié w cząſtkach promienia *DC*: oprócz tego znaleśdź ſtoſunek między niemi wſzyſtkiemi, za którego pomocą maiąc n.p. wſtawy, moglibyśmy przyiśdź do odkrycia doſtaw, ſtycznych, doſtycznych, ſiecznych, doſiecznych i t. d. potrzeba ieſzcze było znać przynáymniey iedne takową linią w cząſtkach promienia, a dopiero od tey wiadomey przyiśdź do wſzyſtkich odpowiadaiących łuków, począwſzy od náymnieyſzego aż do náywiękſzych. To oſtatnie zadanie rozwięzuie nám geometrya: ieżeli bowiem wſtawa ieſt połową cięciwy; cięciwa zaś łuku 60° ieſt równá promieniowi; więc wſtawa łuku 30° ieſt połową promienia. Iakimżeby ſpoſobem od wſtawy łuku 30° wiadomey przyiśdź do wſtaw innych iakichkolwiek łuków? oto gdybyśmy mieli ſpoſób s wſtawy iakiego łuku, wynalezienia wſtawy łuku podwóynego, iego połowy; powtóre z dwóch łuków poiedynczych wſtawę ich ſummy lub różnicy; mielibyśmy zaráz wſtawę łuków 15°, 7° + 30', 45°, i innych. Té wſzyſtkie uwagi pokazuią nám że do wynalezienia linii wſpomnionych które *trygonometrycznemi* nazwano, na wſzyſtkie łuki koła, rozwiązać nám potrzeba naſtępuiące zadania:

Pierwſzé: wynaleśdź związek zachodzący między wſzyſtkiemi liniami trygonometrycznemi.

Drugie: maiąc wſtawy poiedyncze dwóch łuków, wynaleśdź wſtawę ich ſummy i różnicy.

Trzecie: maiąc wſtawę iakiego łuku, wynaleśdź wſtawę łuku podwóynego i iego połowy.

Nim przyſtąpiemy do rozwiązania tych zadań, zgodziemy ſię dlá większey wygody w rachunku, promień koła, który ieſt zawſze ilością ſtateczną, wziąść za iedność; wſzyſtkie więc wſtawy łuków iakichkolwiek, wyiąwſzy łuk 90°, będą ułomkami.

Pierwſze zadanie rozwięzuią nam proporcye z geometryi wyięte, a przez algebraiczne zrównania wyrażone, dla czego łuk iakikolwiek DB, nazwiemy p; będzie więc $BG = 90° - p$: dla krótkości zaś użyiemy naſtępuiących wyrazów: *wſt.p*, znaczyć będzie, *wſtawa łuku albo kąta p*, podobnie:

Doſt: *p*. znaczy Doſtawa łuku lub kąta *p*. (*Coſinus arcus p*).
Sty: *p*. Styczna łuku lub kąta *p*. (*Tangens arcus p*.).
Doſty: *p*. Doſtyczna *p*. - - - (*Cotangens p*).
Siec: *p*. Sieczna łuku lub kąta *p*. (*Secans arc. p*).
Doſie: *p*. Doſieczna łuku lub ką. *p*. (*Coſecaus ar. p*.)
Wſt: odwr: *p*. Wſtawa odwrócona (*Sinus verſus*).
Doſt: odw: *p*. Doſtawa odwrócona (*Coſinus verſus*.)
Ł.Wſt: *k*. Łuk ktory ma za wſtawę *k*. (*Arcus cujus ſinus k*).
Ł. Doſt: *k*. Łuk który má za Doſtawę *k*. (*Arcus cujus coſinus k*). i t. d.

a naprzód chcąc wynaleśdź związek między wſtawą i doſtawą, to ieſt między AB, i $AC = BH$ mamy podług prop. 47. 1. Xięgi *Euklideſa* naſtępuiące zrównanie $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC^2)$, czyli $1 = (\text{wſt}.p)^2 + (\text{Doſt}.p)^2$, a przeto $\text{Doſt}.p = \sqrt{}(1 - [\text{wſt}.p]^2)$. Inne zrównania wyciągniemy s podobieńſtwa troykątów, znacząc ie przez ($\backsim$): i tak troykąt $EDC \backsim \triangle BAC \backsim \triangle FCG \backsim \triangle BCH$, które daią naſtępuiące proporcye.

$CA:DC::AB:ED$ to ieſt $\text{doſt}.p:1::\text{wſt}.p:\text{ſty}.p$, s kąd

$$\text{ſty}.p = \frac{\text{wſt}.p}{\text{doſt}.p}$$

$ED:DC::GC:GF$ - - $\text{ſty}.p:1::1:\text{doſty}.p$, s kąd

$$\text{doſty}.p = \frac{1}{\text{ſty}.p}$$

$AC:BC::DC:EC$ - - $\text{doſt}.p:1::1:\text{ſiec}.p$, s kąd

$$\text{ſiec}.p = \frac{1}{\text{doſt}.p}$$

$HC:BC::GC:FC$ - - $\text{wſt.}\,p:1::1:\text{doſie.}\,p$, s kąd

$$\text{doſie.}\,p=\frac{1}{\text{wſt.}\,p}$$

te zrównania daią nam związek między wſzyſtkiemi liniami trygonometrycznemi i rozwięzuią pierwſze zadanie.

Fig. 2. Co do drugiego: niech będzie na Fig. 2. łuk $KB=x$, którego wſtawa KL, doſtawa LG, łuk $BA=y$, którego wſtawa BD, doſtawa GD; potrzeba nam wynaleśdź łuku $KA=x+y$ wſtawę KM, i doſtawę GM; poprowadziwſzy LO, $LP=MO$, do złożenia troykątów podobnych GBD, GLP, tak aby w ich ſkład wchodziły linie wiadome, będzie wſtawa którey ſzukamy $KM=KO+OM$; wypada nam naprzód:
$GB:GL::BD:LP=OM$, to ieſt $1:\text{doſt.}x::\text{wſt.}y:OM=\text{wſt.}\,y.\,\text{doſt.}x$ powtóre $\triangle GBD \backsim KLO$ daie następuiącą proporcyą:
$GB:GD::KL:KO$ to ieſt, $1:\text{Doſt.}y::\text{wſt.}x:KO=\text{wſt.}\,x.\,\text{doſt.}\,y$; $KO+OM=\text{wſt.}(x+y)=\text{wſt.}x\,\text{doſt.}y+\text{Doſt.}x\,\text{wſt.}\,y$ - - - - - - - (1).
Chcąc zaś wynaleśdź GM czyli $\text{doſt.}\,(x+y)$, mamy naprzód $GB:GD::GL:GP$ to ieſt: $1:\text{doſt.}y::\text{doſt.}x\,GP=\text{doſt.}x\,\text{Doſt.}y$. Powtóre: - - - - -
$GB:GD::KL:LO$ to ieſt: $1:\text{wſt.}y::\text{wſt.}x:LO=\text{wſt.}\,x.\,\text{wſt.}\,y$ wiec $GM=GP-LO=\text{doſt.}(x+y)=\text{doſt.}x\,\text{doſt.}\,y-\text{wſt.}x.\,\text{wſt.}y$. - - - - - (2)
Drugą część tego ſamego zadania chcąc rozwiązać, nazwiymy na Fig. 3. KB (x), BA (y) s których wſtáw i doſtáw poiedynczych KL, GL; BD, GD, potrzeba nam wynaleśdź wſtawę i doſtawę łuku - - - $KB-BA=x-y$. Poprowadziwſzy MO, PL, LO, dla złożenia troykątów podobnych z linii znanych, naprzód $\triangle GBD \backsim \triangle GLP$, a przeto:
$GB:GL::BD:LP=OM$ to ieſt: $1:\text{doſt.}\,x::\text{wſt.}\,y:OM=\text{wſt.}\,y\,\text{doſt.}\,x$. Powtóre $\triangle KOL \backsim \triangle GBD$. więc
$BG:GD::KL:KO$ to ieſt: $1:\text{doſt.}\,y::\text{wſt.}\,x:KO=\text{wſt.}x.\,\text{doſt.}\,y$, s kad $KM=KO-OM=\text{wſt.}(x-y)=\text{wſt.}x.\,\text{doſt.}y-\text{doſt.}x\,\text{wſt.}y$ - - - - (3)

Na wynalezienie zaś $GM = \text{doſt.}(x-y)$ mamy naprzód $GB:GD::GL:GP$ to ieſt $1 : \text{doſt.}\, y :: \text{doſt.}\, x : GP = \text{doſt.}\, x.\ \text{doſt.}\, y$. Powtóré, - - - - - $GB:BD::KL:OL$ to ieſt $1 : \text{wſt.}\, y :: \text{wſt.}\, x : CL = \text{wſt.}\, y.\ \text{wſt.}\, x$, s czego otrzymuiemy $\text{doſt.}\,(x-y) = \text{doſt.}\, x.\ \text{doſt.}\, y + \text{wſt.}\, x\ \text{wſt.}\, y$. - - - - (4). wynaleźliśmy więc cztery zrównania:

(1) $\text{wſt.}(x+y) = \text{wſt.}\, x.\ \text{doſt.}\, y + \text{doſt.}\, x.\ \text{wſt.}\, y$
(2) $\text{doſt.}(x+y) = \text{doſt.}\, x.\ \text{doſt.}\, y - \text{wſt.}\, x.\ \text{wſt.}\, y$ (α).
(3) $\text{wſt.}(x-y) = \text{wſt.}\, x.\ \text{doſt.}\, y - \text{Doſt.}\, x.\ \text{wſt.}\, y$
(4) $\text{doſt.}(x-y) = \text{doſt.}\, x.\ \text{doſt.}\, y + \text{wſt.}\, x.\ \text{wſt.}\, y$

Dodawſzy zrównania (1) z (3), i znowu odciągnąwſzy te ſame od ſiebie, otrzymamy inne cztery.

(1) $2.\ \text{wſt.}\, x.\ \text{doſt.}\, y = \text{wſt.}(x+y) + \text{wſt.}(x-y)$,
(2) $2.\ \text{doſt.}\, x.\ \text{doſt.}\, y = \text{doſt.}(x+y) + \text{doſt.}(x-y)$, (β)
(3) $2.\ \text{doſt.}\, x.\ \text{wſt.}\, y = \text{wſt.}(x+y) - \text{wſt.}(x-y)$,
(4) $2.\ \text{wſt.}\, x.\ \text{wſt.}\, y = \text{doſt.}(x-y) - \text{doſt.}(x+y)$.

uczyniwſzy w zrownaniach (α) $x=y$, pierwſzé dwa zrównania daią nam:

$\text{Wſt.}\, 2y = 2;\ \text{wſt.}\, y,\ \text{doſt.}\, y$, - - $\text{Doſt.}\, 2y = (\text{doſt.}\, y)^2 - (\text{wſt.}\, y)^2$

oſtat. zaś dwa. $\text{wſt.}\, 0 = 0$, $\text{doſt.}\, 0 = (\text{doſt.}\, y)^2 + (\text{wſt.}\, y)^2 = 1$. to ieſt: że wſtawa łuku zero rowna ieſt zero; doſtawa zaś łuku zero równa ieſt promieniowi koła, co nam właśnie ſama figura pierwſza okazuie. Tę ſamę wartość wprowadziwſzy w zrównanie (β) - - $x = y = \frac{1}{2}a$, pamiętaiąc o dopiero wyciągnionych zrównaniach, otrzymamy z (2) i (4)

$$\text{Wſt.}\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1-\text{doſt.}\, a}{2}\right)};\ \text{Doſt.}\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1+\text{Doſt.}\, a}{2}\right)}$$

Dwa té zrównania wyrażaią wſtawy i doſtawy połowy łuku przez wſtawę i doſtawę łuku całkiego, tak iako pierwſze dwa wſtawę i doſtawę łuków podwóynych przez wſtawę i doſtawę łuków poiedynczych, przeto obydwa rozwięzuią zadanie trzecie. Każdy z nas łatwo poymuie, iakim ſpoſobem maiąc wiadomą wſtawę łuku 30°, i zrównania z rozwiazania trzech zadań wypadłe, rachowane s tąd bydź mogą wſtawy i doſtawy łuków innych.

Iakośmy zaś z zrównań (α) potrafili wyciągnąć wſtawy łuków podwóynych uczyniwſzy $x=y$, tak w tychże ſamych kładąc za $x=2y$, $x=3y$, $x=4y$ naſtępnie, i zamieniaiąc wſtawy łuków podwóynych, potróynych i t. d. za ich wartości w łukach poiedynczych, otrzymamy podobnie:

$\text{Wſt.}3y=3.\text{wſt.}y(\text{doſt.}y)^2-(\text{wſt.}y)^3$ - - - -

$\text{Doſt.}3y=(\text{doſt.}y)^3-3\text{doſt.}y(\text{wſt.}y)^2$. i t. d.

położywſzy teraz $\text{wſt.}x=p$, $\text{doſt.}x=q$, $\text{wſt.}y=m$, $\text{doſt.}y=n$ i dwa zrównania $p^2+q^2=1$, $m^2+n^2=1$, używaiąc do zamian; otrzymamy:

$\text{Wſt.}\,x=p.$
$\text{wſt.}(y+x)=mq+np.$
$\text{wſt.}(2y+x)=2n(mq+np)-p.$
$\text{wſt.}(3y+x)=2n[2mnq+2n^2p-p]-mq-np.$
i t. d.

to ieſt:

$\text{Wſt.}\,x=\text{wſt.}x$
$\text{wſt.}\,(y+x)=\text{wſt.}y.\ \text{doſt.}x+\text{doſt.}y.\text{wſt.}x$
$\text{wſt.}(2y+x)=2\ \text{doſt.}y.\ \text{wſt.}(y+x)-\text{wſt.}x$
$\text{wſt.}(3y+x)=2\ \text{doſt.}y.\text{wſt.}(2y+x)-\text{wſt.}(y+x)$
$\text{wſt.}(4y+x)=2\ \text{doſt.}y.\text{wſt.}(3y+x)-\text{wſt.}(2y+x)$
$\text{wſt.}(ny+x)=2\ \text{doſt.}y.\text{wſt.}[(n-1)y+x]-\text{wſt.}[(n-2)y+x]$

to ſamo i na doſtawy.

$\text{Doſt.}\,x=q$
$\text{doſt.}\,(y+x)=nq-mp.$
$\text{doſt.}(2y+x)=2n(nq-mp)-q$
$\text{doſt.}(3y+x)=2n(2n^2-2nmp-q)-nq+mp$
i t. d.

to ieſt:

$\text{Doſt.}\,x=\text{doſt.}x$
$\text{doſt.}\,(y+x)=\text{doſt.}y.\text{doſt.}x-\text{wſt.}y.\text{wſt.}x$
$\text{doſt.}(2y+x)=2.\text{doſt.}y.\text{doſt.}(y+x)-\text{doſt.}x$
$\text{doſt.}(3y+x)=2.\text{doſt.}y.\text{doſt.}(2y+x)-\text{doſt.}(y+x)$
$\text{doſt.}(4y+x)=2.\text{doſt.}y.\text{doſt.}(3y+x)-\text{doſt.}(2y+x)$
$\text{doſt.}(ny+x)=2.\text{doſt.}y.\text{doſt.}([n-1]y+x)-\text{doſt.}[(n-2)y+x]$.

gdzie widzemy, że kiedy łuki idą w poſtępie arytmetycznym ich wſtawy i doſtawy maią poſtęp zwrotny, iakiby wypadł z odwikłania ułomku maiącego za mianownika $1-2nx+(m^2+n^2)x^2$ podług §. 32.

S tych oſtatnich zrównań uczyniwſzy $x=y$ wnoſzą ſię inne wielkiego w rachunku matematycznym używania, to ieſt:

$$\text{Wſt}.2y=2\,\text{wſt}.y.\text{doſt}.y \qquad (x)$$

$$\text{wſt}.\,3y=2\,\text{doſt}.y.\text{wſt}.2y-\text{wſt}.y$$

$$\text{wſt}.\,4y=2\,\text{doſt}.y.\text{wſt}.3y-\text{wſt}.2y$$

$$\text{wſt}.5y=2\,\text{doſt}.y.\text{wſt}.4y-\text{wſt}.3y$$

$$\text{wſt}.ny=2\,\text{doſt}.y\;\text{wſt}.(n-1)y-\text{wſt}.(n-2)y$$

$$\text{doſt}.3y=2\,\text{doſty}.\text{doſt}.2y-\text{doſt}.y$$

$$\text{doſt}.4y=2\,\text{doſt}.y.\text{doſt}.3y-\text{doſt}.2y$$

$$\text{doſt}.5y=2\,\text{doſt}.y.\text{doſt}.4y-\text{doſt}.3y$$

i t. d.

$$\text{doſt}.ny=2\,\text{doſty}.\,\text{doſt}.(n-1)y-\text{doſt}.(n-2)y.$$

§. LII.

Linie trygonometryczne dodatne i odiemne.

Ponieważ zamierzyliśmy ſobie rachunek algebraiczny w trygonometryą wprowadzić, i za pomocą iego tę naukę daley rosciągnąć; potrzeba nam pamiętać na naſze początki w I. Części rzucone, że ilości iakiekolwiek cechowane znakami ogólnemi należy uważać nie tylko przez wzgląd na ich wielkość, ale nawet przez wzgląd na ich ſtan, w którym ſię iedne w porównaniu drugich znayduią. Należy nam przeto nauczyć ſię w liniach trygonometrycznych użycia znaków dodatnych i odiemnych. Czego chcąc doyśdź przez proſte geometryczne uwagi, rzućmy okiem na Fig. 1. i ścigaiąc różne odmiany łuku DB, a z nim odmiany wſtaw, doſtaw, ſtycznych, doſtycznych i t. d. znaydziemy, że kiedy łuk rośnie, iego wſtawa i ſtyczna powiękſza ſię; doſtawa zaś i doſtyczna ubywa; doſzedłſzy 90°, wſtawa ſtaie ſię naywiękſzą, czyli równą promieniowi, a doſtawa zero; w tym ſamym przypadku ſtyczna ſtaie ſię równo-ległą s ſieczną, czyli nieſkończoney wielkości, a doſtyczna zero. Kiedy łuk przeſzedłſzy 90° znowu rośnie; iego wſtawa i ſtyczna ubywa, a doſtawa zaczyna roſnąć. Ale że doſtawa była dopiero zero, ſtyczna zaś $\frac{1}{0}$, to ieſt przeſzły za granicę oſtatnią wzroſtu i ubywania: powiedzieliśmy zaś w §. 16. że ilość iaka ſkończona przeſzedłſzy za o, albo $\frac{1}{0}$, odmienia ſwóy ſtan i ſtaie ſię z dodatney odiemną lub przeciwnie. więc wſzyſtkie doſtawy i ſtyczne łuków większych od 90° czyli kątów rozwartych ſą odiemnemi. Idąc daley za wzroſtami łuku znaydziem, że kiedy ten będzie 180° na ten czas wſtawa $=o$, doſtawa równa promieniowi odiemnemu, to ieſt, nazwawſzy połowę obwodu koła P, wſt. $P=o$, doſt. $P=-1$. Przechodząc za połowę obwodu wſtawy zaczynaią roſnąć i bydź odiemnemi, a doſtawy w tymże ſamym ſtanie ubywaią, i doſzedłſzy $\frac{3}{2}P$ czyli do M, doſtawy ſtaią ſię znowu zero, a wſtawy równe promieniowi odiemnemu. Od M naoſtatek idąc do D, doſtawy roſną, ale przeſzedłſzy za zero ſtaią ſię znowu dodatne, a wſtawy odiemne aż do D, póki znowu nie przeydą powtórnie za granice ſwego wzróſtu i ubywania. S tych więc uwag wypada, że wſtawy łuków w pierwſzey i drugiey ćwierci koła ſą dodatne, w trzeciey zaś i czwartey odiemne; doſtawy w pierwſzey i czwartey ćwierci koła ſą dodatne, w drugiey i trzeciey odiemne: to ieſt, że śrzednica DL przedziela wſtawy dodatne, które leżą nad nią; i odiemne które ſię pod nią znayduią: śrzednica zaś GM oddziela doſtawy dodatne, które ſą położone na lewey, od odiemnych które ſą na prawey icy ſtronie. A ponieważ $\mathit{ſty}.p=\frac{\mathit{wſt}.p}{\mathit{doſt}.p}$, $\mathit{doſty}.p=\frac{1}{\mathit{ſtyc}.p}$, $\mathit{ſiec}.p=\frac{1}{\mathit{doſt}.p}$, $\mathit{doſie}.p=\frac{1}{\mathit{wſt}.p}$; idzie za tem że ſtyczne ſą w ten czas dodatne kiedy wſtawy i doſtawy razem dodatne, albo razem odiemne, co ma mieyſce w pierwſzey i trzeciey ćwierci koła: ſą zaś odiemne w ćwierci koła drugiey i czwartey ponieważ

waż tam wſtawy i doſtawy maią znaki różné. Doſtyczne iako pokazuie ich zrównanie właśnie ſię tak maią iako i ſtyczne, to ieſt krócey mówiąc: że ſtyczne i doſtyczne ſą w ćwierciach koła liczby nieparzyſté dodatne; w ćwierciach zaś liczby parzyſtey odiemné.

Sieczne łuków podług zrównania tak ſię maią iako ich doſtawy; doſieczne zaś iako wſtawy, to ieſt: że ſieczne w drugiey i trzeciey ćwierci koła ſą odiemne; w pierwſzey i czwartey dodatne; doſieczne zaś w pierwſzey i drugiey ćwierci dodatne, a w trzeciey i czwartey odiemné. S tych uwag wypadaią nam naprzód zrównania. $\text{Wſt.}0=0$, $\text{doſt.}0=1$; - - $\text{wſt.}\tfrac{1}{2}P=1$, $\text{doſt.}\tfrac{1}{2}P=0$, $\text{wſt.}P=0$, $\text{doſt.}P=-1$, - - - $\text{wſt.}\tfrac{3}{2}P=-1$, $\text{doſt.}\tfrac{3}{2}P=0$. $\text{wſt.}\,2P=0$, $\text{doſt.}\,2P=1$.

Linii każdéy trygonometryczného odpowiada nieskończoná liczba łuków.

Kombinuiac zrównania teraźnieyſze z (α), to ieſt, kładąc w te oſtatnie za x łuki $\tfrac{1}{2}P$, P, $\tfrac{3}{2}P$, $2P$, i t. d. otrzymamy naſtępuiące prawdy.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Wſt.}\left(\tfrac{1}{2}P+y\right)=+\text{doſt.}y \;\text{- - -}\; & \text{wſt.}\left(\tfrac{1}{2}P-y\right)=+\text{doſt.}y. \\
\text{doſt.}\left(\tfrac{1}{2}P+y\right)=-\text{wſt.}y \;\text{- - -}\; & \text{doſt.}\left(\tfrac{1}{2}P-y\right)=+\text{wſt.}y. \\
\text{wſt.}\,(P+y)=-\text{wſt.}y \;\text{- - -}\; & \text{wſt.}\,(P-y)=+\text{wſt.}y \\
\text{doſt.}\,(P+y)=-\text{doſt.}y \;\text{- -}\; & \text{doſt.}\,(P-y)=-\text{doſt.}y \quad (\gamma) \\
\text{wſt.}\left(\tfrac{3}{2}P+y\right)=-\text{doſt.}y \;\text{- -}\; & \text{wſt.}\left(\tfrac{3}{2}P-y\right)=-\text{doſt.}y. \\
\text{doſt.}\left(\tfrac{3}{2}P+y\right)=+\text{wſt.}y \;\text{- -}\; & \text{doſt.}\left(\tfrac{3}{2}P-y\right)=-\text{wſt.}y \\
\text{wſt.}\,(2P+y)=+\text{wſt.}y \;\text{- -}\; & \text{wſt.}\,(2P-y)=-\text{wſt.}y \\
\text{doſt.}\,(2P+y)=+\text{doſt.}y \;\text{- -}\; & \text{doſt.}\,(2P-y)=+\text{doſt.}y
\end{array}
$$

powtarzaiąc ieſzcze więcey razy obwód koła rosciąglibyśmy daley liczbę tych zrównań, s których każdé ieſt twierdzeniem geometrycznem. Przypatrzywſzy ſię zaś z uwagą wſzyſtkim, widzemy że kilka łuków między ſobą różnych maią te ſamé wſtawy i doſtawy, co nam także figura 4. pokazuie. Wiemy bowiem, że cięciwa w kole należy do tych wſzyſtkich łuków, które ſię kończą na iey przecięciach s kołem; i tak AC należy równie do łuku ABC, do łuku ADC

Figura 4.

i do

i do wſzyſtkich innych łuków, któré obrotém ſwoim opiſze w naſtępuiący ſpoſób: wziąwſzy n. p. koniec cięciwy A, i tocząc ią około drugiego końca G, ta cieciwa wrociwſzy ſię na ſwé mieyſce, będzie należyć do łuku ABC, i do całego obwodu koła który obiegła, tak dalece, że nazwawſzy ABC, u; tocząc cięciwę tylé razy, ile nam ſię podobá i wrácaiąc ią na ſwoie mieyſce, wſzyſtkié łuki, któré opiſze ſwym biegiem, będą do niey należyć, to ieſt łuki u, $u+P'$; $u+2P'$; $u+3P'$; $u+4P'$; i t. d. (tu bierzemy P' za cały obwod koła), tož ſamo mówić o łuku $ADC = P' - u$, s którym podobne dziać ſię będą odmiany za biegiem cięciwy, tak dalece, że znowu ta ſama cięciwa będzie należyć do łuków $P' - u$, $2P' - u$, $3P' - u$, $4P' - u$, i t. d. Ale że ta cięciwa przechodząc przez łuki u, $P' - u$, raz niknie, drugi raz znowu rośnie; idzie za tem że między temi łukami iedné będą, których cięciwa AC ieſt dodatná; a drugie, których ieſt odiemna podług §. 16. to ieſt uważaiąc ten bieg iakośmy go uważali w ſtawach i doſtawach, do cięciwy dodatney będą należyć łuki

$$u;\ u+2P';\ u+4P'\ -\ -\ u+2nP'\ -\ -\ -$$
$$P'-u;\ 3P'-u,\ 5P'-u\ -\ -\ (2n+1)P'-u.$$

Do cięciwy zaś odiemney łuki.

$$u+P';\ u+3P';\ u+5P''\ -\ -\ u+(2n+1)P'\ -\ -\ -$$
$$2P'-u;\ 4P'-u;\ 6P'-u\ -\ -\ 2nP'-u$$

to ieſt że do łuków ABC, ADC, przydaiąc iakąkolwiek liczbę parzyſtą obwodów koła, wſzyſtkie té łuki będą miały cięciwę AC dodatną: przydaiąc zaś do tychże ſamych łuków liczbę obwodów koła nie parzyſtą; wſzyſtkie będą miały cięciwę AC odiemną. Każdá więc cięciwa należy do nieſkończoney liczby łuków, a przeto i wſtawy które ſą połowami cięciw; doſtawy, ſtyczne, doſtyczne, i t. d. któré ſą funkcyami pierwſzych, maia także nieſkończoną liczbę łuków, do których należą. Ta więc liczba łuków odpowiadaiąca iedney linii trygonometryczney nie może bydź w zrównaniu algebraicznem zawartą;

to ieſt że łuki ſą ſunkcyami *przeſtępnemi* ſwych wſtaw, doſtaw i t. d. Maiąc więc podane zrównanie n.p. $\text{wſt}.z=A$, a chcąc z niego wyciągnąć łuk z, otrzymamy $z=\text{Ł}.\text{Wſt}.A$, to ieſt że z ieſt równe łukowi, którego wſtawa A. Tu naprzód widzemy, iż działanie którego na rozwiązanie takowego zrównania używamy, ieſt cale różne od tych, któreśmy w I. Części uważali. Oprócz tego tak rozwiązane zrównanie ieſzcze nas nic oznaczonego nie uczy: ieżeli bowiem wſtawa A mieć może nieſkończoną liczbę łuków przydaiąc tyle razy obwód koła, ile nam ſię podoba; z ma nieſkończenie wiele wartości, między któremi iedne mogą należyć do naſzego pytania i iego warunków, a drugie nie: ſpoſobu zaś rozróżnienia takowych wartości naſzemu pytaniu właściwych lub obcych, zrównanie nas nie uczy. I na tęć to tak wielką trudność natrafiać zwykliśmy nayczęściey w rachunkach aſtronomicznych, które poty nie rozwiężuią pytania, póki przez iaką kombinacyą nie wyrzucemy terminu zamykaiącego łuki. Spoſóbu tego nie przypada nam tu ieſzcze tłómaczyć; doſyć nam będzie wſzyſtkie pomocy do tego rachunku wyłożyć i nauczyć ſię w rachunku trygonometrycznym iedne wyrazy zamieniać za drugie.

§. LIII.

Spoſób zamieniania mnogości i potęg w liniach trygonometrycznych.

Pierwſza trudność którą tu ułatwić powinniśmy, pochodzi z różnych potęg i mnogości linii trygonometrycznych czyniących zrównania ciężkiemi do rozwiązania, albo przynaymniey znacznie zawikłanemi. Na ten koniec wróćmy ſię do zrównań (β), s których (2) i (1) zamykaiące mnogość wſtawy przez doſtawę, odmieniemy na prościeyſze, uczyniwſzy w nich $x=ny$, będzie bowiem

(1) - - $2\,\text{wſt}.ny.\,\text{doſt}.y=\text{wſt}\,(n+1)y+\text{wſt}.(n-1)y$ (δ)
(2) - - $2\,\text{doſt}.ny.\,\text{wſt}.y=\text{wſt}.(n+1)y-\text{wſt}.(n-1)y$

dwa te zrównania ſłużyć nam zawſze mogą za wzory do wyrażenia mnogości s wſtaw przez doſtawy łuków kilkokrotnie powtórzonych, przez ſame wſtawy tychże łuków kilkokrotnych. Czego użycie zaraz nam ſię pokaże, wziąwſzy zrównania (2) i (4) z (β) i w tem oſtatniem uczyniwſy $x = y$; będzie

$$2(\text{wſt.}y)^2 = 1 - \text{doſt.}2y$$

mnożąc obydwa członki przez $\text{wſt.}y$, wypadnie

$2(\text{wſt.}y)^3 = \text{wſt.}y - \text{wſt.}y.\text{doſt.}2y$, które zą pomocą zrównania (2) z (δ) przerobiemy na

$4.(\text{wſt.}y)^3 = 3\text{wſt.}y - \text{wſt.}3y$. Podobnym ſpoſobem mnożąc ciągle tak przerobione potęgi przez wſtawy, i kładąc za mnogości ich wartość w łukach proſtych z (δ), przyidziemy do przerobienia wſzyſtkich potęg wſtaw, przez wſtawy łuków kilkokrotnych; iak nam naſtępuiące pokazują zrównania:

$$
\begin{aligned}
2(\text{wſt.}y)^2 &= 1 - \text{doſt.}2y\\
4.(\text{wſt.}y)^3 &= 3\text{wſt.}y - \text{wſt.}3y\\
8(\text{wſt.}y)^4 &= 3 - 4\text{doſt.}2y + \text{doſt.}4y \qquad (\varepsilon^1).\\
16(\text{wſt.}y)^5 &= 10\text{wſt.}y - 5\text{wſt.}3y + \text{wſt.}5y\\
32(\text{wſt.}y)^6 &= 10 - 15\text{doſt.}2y + 6\text{doſt.}4y - \text{doſt.}6y\\
64.(\text{wſt.}y)^7 &= 35\text{wſt.}y - 21\text{wſt.}3y + 7\text{wſt.}5y - \text{wſt.}7y
\end{aligned}
$$

i t. d.

wziąwſzy zaś zrównanie (2) z (β) i z niem podobnie poſtępuiąc przez użycie zrównania (1) z (δ), przyidziemy do wyrażenia wſzyſtkich potęg doſtaw, przez doſtawy łuków proſtych kilkokrotnie powtórzonych to ieſt:

$$
\begin{aligned}
2.(\text{doſt.}y)^2 &= 1 + \text{doſt.}2y,\\
4.(\text{doſt.}y)^3 &= 3\text{doſt.}y + \text{doſt.}3y,\\
8(\text{doſt.}y)^4 &= 3 + 4\text{doſt.}2y + \text{doſt.}4y, \qquad (\varepsilon^2).\\
16.(\text{doſt.}y)^5 &= 10\text{doſt.}y + 5.\text{doſt.}3y + \text{doſt.}5y\\
32(\text{doſt.}y)^6 &= 10 + 15\text{doſt.}2y + 6\text{doſt.}4y + \text{doſt.}6y\\
64(\text{doſt.}y)^7 &= 35\text{doſt.}y + 21\text{doſt.}3y + 7\text{doſt.}5y + \text{doſt.}7y.
\end{aligned}
$$

i t. d.

w tych zamianach wſpółczynniki poſtępuią tym prawem co i w potędze dwó-wyrazowey. Wſzyſtkie te zrównania będą nam barzo pożyteczne w wyżſzych rachunkach.

§. LIV.

Tłómaczy ſię ſpoſób rachowania táblic wſtaw, doſtaw i t. d.

Potęgi ieſzcze wſtaw i doſtaw uroionych wyrażaią ſię prościey, i prowadzą nas do barzo ważnych wypadków. Weźmy zrównanie naypierwey wyciągnione $(\text{wſt}.y)^2+(\text{doſt}.y)^2=1$. którego pierwſzy członek rozebrawſzy na mnożników, znaydziemy - - - $(\text{doſt}.y+\sqrt{-1}.\text{wſt}.y)(\text{doſt}.y-\sqrt{-1}.\text{wst}.y)=1$, a przybrawſzy drugi łuk z wypadnie nam z rachunku

$$(\text{doſt}.y+\sqrt{-1}.\text{wſt}.y)(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)=\text{doſt}.(z+y)+\sqrt{-1}.\text{wſt}.(z+y)$$

$$(\text{doſt}.y-\sqrt{-1}.\text{wſt}.y)(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)=\text{doſt}.(z+y)-\sqrt{-1}.\text{wſt}.(z+y)$$

$$(\text{doſt}.x\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.x)(\text{doſt}.z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)(\text{doſt}.y\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.y)=\text{doſt}.(x+z+y)\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.(x+z+y).$$

uczyniwſzy w pierwſzych $y=z$, w oſtatniem $x=y=z$, otrzymamy:

$$(\text{doſt}.z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^2=\text{doſt}.2z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.2z$$

$$(\text{doſt}.z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^3=\text{doſt}.3z\pm\sqrt{-1}.\text{wſt}.3z$$

i ogólnie

$$(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n=\text{doſt}.nz+\sqrt{-1}.\text{wſt}.nz$$

$$(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n=\text{doſt}.nz-\sqrt{-1}.\text{wſt}.nz \quad (A)$$

dodaiąc i odciągaiąc dwa te oſtatnie zrównania od ſiebie, wypadnie:

$$2.\text{doſt}.nz=(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n+(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n$$

$$2\sqrt{-1}.\text{wſt}.nz=(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n-(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^n$$

te oſtatnie ogólne zrównania, równie iak poprzedzaiące uczą nas, że chcąc kąt lub łuk iaki podzielić na części, i s tego podziału iakąkolwiek część wyrazić przez łuk całki; wyraz takowy i rozdzielenie kąta zawiſło od zrównania ſtopnia, którego wykładnikiem ieſt liczba podziału; i tak rościęcie łuku lub kąta na trzy, cztery, pięć m części, i wyrażenie *3ciey*, *4tey*, *5tey*, *mtéy* części łuku, przez łuk całki, zawiſło od zrównania ſtopnia *3go*, *4go*, *5go*, *mgo*. Cośmy iuż także znaleźli wyrażaiąc połowę łuku przez łuk całki. S tąd łatwo ieſt zrozumieć owo wielkie u Starożytności zadanie o potroieniu kątu (*Problema triſectionis anguli*), które że zależy od zrównania *3go*

ſtopnia,

ſtopnia, a co iedno u dawnych Geometrów znaczyło, od wynalezienia dwóch śrzednich proporcyonalnych; nie dziwno, że ie próżno dawni Geometrowie uſiłowali rozwiązać.

W óſtatnich zrównaniach drugie członki rozebráwſzy na ſzereg nieſkończony za pomocą wzoru Newtona, otrzymamy:

$$Doſt.nz=(doſt.z)^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}(doſt.z)^{n-2}(wſt.z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(doſt.z)^{n-4}(wſt.z)^4 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}(doſt.z)^{n-6}.$$
$$(wſt.z)^6 + \text{i t. d.}$$

$$Wſt.nz=n.(doſt.z)^{n-1}\,wſt.z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}(doſt.z)^{n-3}$$
$$(wſt.z)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}(doſt.z)^{n-5}$$
$$(wſt.z)^5 - \text{i t. d.}$$

s których pierwſze zamyka w drugim członku terminy liczby niepárzyſtey; drugie, terminy liczby párzyſtey potęgi *n* funkcyi dwó-wyrazowey.

Wziąwſzy teraz za *z* łuk nieſkończenie mały zrównać go możemy s ſwą wſtawą, będzie więc $wſt.z=z$; $doſt.z=1$: powtóre, wziąwſzy *n* za liczbę nieſkończenie wielką, będzie *nz* liczbą ſkończoną, którą nazwiemy *v*; a przeto $wſt.z=z=\frac{v}{n}$: te wártości kładąc w zrównania poprzedzaiące, wypadnie:

$$Doſt.v=1-\frac{v^2}{1.2}+\frac{v^4}{1.2.3.4}-\frac{v^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{v^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}\ \text{i t. d.} \qquad (\psi)$$

Wſt.

$$\text{Wſt.}\,v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{v^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{i t. d.}$$

które nam wyrażaią wſtawy przez łuki w ſzeregach barzo maleiących, i ſłużą do rachowaniá tablic wſtáw, doſtáw, i t. d. Przypuśćmy n. p. że v má ſię do ćwierci koła czyli łuku 90°, iako m do n, to ieſt $v = \frac{mP}{2n}$; ponieważ geometryá nas uczy, że pół obwodu koła którego promień $=1$, wyrażá ſię w cząſtkach tegóż promienia $3,14159265358 = P$; będzie

$$\begin{aligned}\text{Wſt. Ł.}\,\frac{m}{n}90^\circ = & \frac{m}{n}.\ 1,57079632679 \\ & - \frac{m^3}{n^3}.\ 0,64596409750 \\ & + \frac{m^5}{n^5}.\ 0,07969262624 \\ & - \frac{m^7}{n^7}.\ 0,00468175413 \\ & + \frac{m^9}{n^9}.\ 0,00016044118 \\ & \text{i t. d.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Doſt.Ł.}\,\frac{m}{n}90^\circ = & \ 1,000000000000 \\ & - \frac{m^2}{n^2}.\ 1,23370055013 \\ & + \frac{m^4}{n^4}.\ 0,25366950790 \\ & - \frac{m^6}{n^6}.\ 0,02086348076 \\ & + \frac{m^8}{n^8}.\ 0,00091926027 \\ & \text{i t. d.}\end{aligned}$$

łatwość

łatwość tego rachunku zależy od ułomku $\frac{m}{n}$, który nie może bydź więkſzy od $\frac{1}{2}$ dla tego, że w rachowaniu wſtaw i doſtaw nie idziemy tylko do 45°. Daymy że $\frac{m}{n}=\frac{1}{5}$, włożywſzy tę wartość ułomku w wyrazy poprzedzaiące znaydziemy wſtawę łuku 18° $=0{,}30901699437$ iego zaś doſtawę $=0{,}95105651629$. wyiąwſzy oſtatnie figury liczb które będą dla tego różne, żeśmy do piąci tylko terminów ſzereg ciągnęli. Ponieważ zaś zrównania (ϕ) wypadły s tego przypuſzczenia że v ieſt łukiem barzo małym mogącym ſię zmięſzać s ſwą wſtawą; nie możemy brać za v łuku więkſzego od 30°. Iakże rachować wſtawy i doſtawy łuków więkſzych? na to podaią nam ſpoſób zrównania z (β), (1) i (4), uczyniwſzy w nich $x=30^\circ$, ponieważ $\text{wſt}.30^\circ=\frac{1}{2}$, będzie

$$\text{Wſt}.y=\text{doſt}.(30^\circ-y)-\text{doſt}.(30^\circ+y)$$
$$\text{Doſt}.y=\text{wſt}.(30^\circ+y)+\text{wſt}.(30^\circ-y)$$

więc

$$\text{Wſt}.(30^\circ+y)=\text{doſt}.y-\text{wſt}.(30^\circ-y)$$
$$\text{Doſt}.(30^\circ+y)=\text{doſt}.(30^\circ-y)-\text{wſt}.y.$$

za pomocą tych zrównań można iakichkolwiek łuków rachować wſtawy i doſtawy.

Rachunek ſtycznych i doſtycznych,

Od wſtaw i doſtaw łatwo przychodzemy do ſtycznych i doſtycznych przez zrównania wyrażaiące związek między pierwſzemi i oſtatniemi. Wiemy bowiem że $\text{ſty}.p=\frac{\text{wſt}.p}{\text{doſt}.p}$ a przeto z zrównań (α) otrzymamy:

$$\text{Sty}.(x+y)=\frac{\text{wſt}.x.\text{doſt}.y+\text{doſt}.x.\text{wſt}.y.}{\text{doſt}.x.\text{doſt}.y-\text{wſt}.x.\text{wſt}.y.}$$
$$\text{Sty}.(x-y)=\frac{\text{wſt}.x.\text{doſt}.y-\text{doſt}.x.\text{wſt}.y.}{\text{doſt}.x\ \text{doſt}.y+\text{wſt}.x.\text{wſt}.y.}$$

rozdzieliwſzy w obydwóch tych zrównaniach tak licznika iak i mianownika przez $\text{doſt}.x.\ \text{doſt}.y$; wypadnie;

Sty.

$$Sty.(x+y)=\frac{ſty.x+ſty.y}{1-ſty.x.ſty.y} \qquad (\psi).$$

$$Sty.(x-y)=\frac{ſty.x-ſt.y}{1+ſty.x.ſty.y}$$

w pierwſzem uczyniwſzy $x=y$, znáydziémy:

$$Sty.2y=\frac{2ſty.y}{1-(ſty.y)^2} \cdot\cdot\ doſty.2y=\frac{doſty.y-ſty.y}{2}$$

podobnym ſpoſobem działaiąc w zrównaniach (β), to ieſt uczyniwſzy naſamprzód $x+y=a$, $x-y=b$, przeto $y=\frac{a-b}{2}$, $x=\frac{a+b}{2}$; wypadną nám náprzód zrównaniá:

$$Wſt.a+wſt.b=2\,wſt.\frac{a+b}{2}.\ doſt.\frac{a-b}{2}$$

$$Doſt.a+doſt.b=2doſt.\frac{a+b}{2}\ doſt.\frac{a-b}{2}$$

$$Wſt.a-wſt.b=2doſt.\frac{a+b}{2}\ wſt.\frac{a-b}{2}$$

$$Doſt.b-doſt.a=2wſt.\frac{a+b}{2}\ wſt.\frac{a-b}{2}$$

któré dzieląc przez ſię otrzymámy:

$$\frac{Wſt.a+wſt.b}{Doſt.a+doſt.b}=ſty.\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{Wſt.a-wſt.b}{Doſt.b-doſt.a}=doſty.\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{Wſta.a-wſt.b}{Doſt.a+doſt{:}b}=ſty.\frac{a-b}{2} \qquad (\nu)$$

$$\frac{Wſt.a+wſt.b}{Doſt.b-doſt.a}=doſty.\frac{a-b}{2}$$

§. LV.

§. LV.

Zamiana funkcyi uroionych za rzetelne, i wyráz logarytmów przez łuki koła.

Wróćmy ſię teráz do zrównań (λ) zawieraiących wyrazy uroione, a utrzymáwſzy te ſame przypuſzczenia któreśmy tam uczynili na z, n, biorąc łuk z za nieſkończenie mały, a liczbę n za nieſkończenie wielką; wypadnie nám $zn=v$, $z=\frac{v}{n}$, $\text{wſt}.z=z=\frac{v}{n}$. $\text{doſt}.z=1$. a przeto

$$\text{Doſt}.v=\frac{\left(1+\frac{v}{n}\sqrt{-1}\right)^n+\left(1-\frac{v}{n}\sqrt{-1}\right)^n}{2}$$

$$\text{Wſt}.v=\frac{\left(1+\frac{v}{n}\sqrt{-1}\right)^n-\left(1-\frac{v}{n}\sqrt{-1}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Dowiedliśmy zaś w nauce o logarytmach hyperbolicznych pod §. 49. że biorąc e za ich grunt, - -

$(1+\frac{z}{n})^n=e^z$, czyli kładąc $v\sqrt{-1}$, $-v\sqrt{-1}$ za z;

$(1+\frac{v\sqrt{-1}}{n})^n=e^{v\sqrt{-1}}$, a przeto

$$\text{Doſt}.v=\frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2};\text{Wſt}.v=\frac{e^{+v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

s kąd $e^{v\sqrt{-1}}=\text{Doſt}.v+\sqrt{-1}.\text{Wſt}.v$; $e^{-v\sqrt{-1}}=\text{Doſt}.v-\sqrt{-1}.\text{Wſt}.v$, té zrównania pokazuią nám barzo biiącą, o umyſł prawdę; że funkcye wykładnicze uroione maią ſwóy wyraz rzetelny przez wſtawy i doſtawy łuków. Uczyńmy znowu teráz n liczbą nieſkończenie małą, a g liczbą nieſkończenie wielką czyli $n=\frac{1}{g}$; będzie $\text{doſt}.nz=\text{doſt}.\frac{z}{g}=1$; $\text{Wſt}.nz=\text{wſt}.\frac{z}{g}=\frac{z}{g}$, a zrównania ($\lambda$) ſtaną ſię

$$1 = \frac{(\text{Doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^{\frac{1}{g}}+(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^{\frac{1}{g}}}{2}$$

$$\frac{z}{g} = \frac{(\text{Doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^{\frac{1}{g}}-(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)^{\frac{1}{g}}}{2\sqrt{-1}.}$$

przypomniymy ſobie o logarytmach przyrodzonych w §. 49. że $\log.(1+z)=g(1+z)^{\frac{1}{g}}-g$: a uczyniwſzy $1+z=y$; $y^{\frac{1}{g}}=1+\frac{1}{g}\log.y$: te wyrazy wprowadzone w poprzedzaiące zrównania zamienią ie na:

$$1 = \frac{1+\frac{1}{g}\log.(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}\,\text{wſt}.z)+1+\frac{1}{g}\log.(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z)}{2.} \qquad (\rho)$$

$$\frac{z}{g} = \frac{\frac{1}{g}\log.(\text{doſt}.z+\sqrt{-1}\,\text{wſt}.z)-\frac{1}{g}\log.(\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\,\text{wſt}.z)}{2\sqrt{-1}.}$$

zrównanie drugie wyráża ſię ieſzcze tak:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{\text{Doſt}.z+\sqrt{-1}.\text{wſt}.z}{\text{doſt}.z-\sqrt{-1}.\text{wſt}.z}$$

rozdzieliwſzy w niém tak licznika iak mianownika przez *doſt.z*, otrzymamy:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{1+\sqrt{-1}.\text{ſty}.z}{1-\sqrt{-1}.\text{ſty}.z} \qquad (\omega).$$

niech będzie z łukiem, ktòrego *Styczna* $=0$, będzie: $2\sqrt{-1}.z=\log.1$. logarytm więc iedności tyle będzie miał wartości, ile ieſt łuków maiących ſtyczną zero; takich zaś łuków ieſt nieſkończona liczba podług §. 52; bo ieżeli *P* znaczy połowę obudwu koła, łuki

o, P,

$0, P, 2P, 3P, 4P, nP$, wſzyſtkie maią ſtyczną zero; a przeto logarytm iedności równy w tem przypuſzczeniu, $0, 2P\sqrt{-1}, 4P\sqrt{-1}, 6P\sqrt{-1}, 2nP\sqrt{-1}$. Iedność więc ma nieſkończoną liczbę logarytmów, s których wſzyſtkie uroione, prócz 0; aże każda liczba B, uważać ſię może iako. $1.B$. a iey logarytm $=\log.1+\log.B$, idzie za tem że każda liczba ma nieſkończenie wiele logarytmów, s których ieden ieſt tylko rzetelny, a wſzyſtkie inne uroione; co nam daie widzieć w logarytmach drugą własność funkcyi przeſtępnych.

Zapatrzywſzy ſię ieſzcze na zrównanie (ω) i przywiodłſzy ſobie na pamięć naukę o logarytmach pod §. 49. przekonamy ſię, że ieżeli tam $\log.\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+$ i t. d. położywſzy $x=\sqrt{-1}.\text{ſty}.z$; zrównanie (ω) rozbierze ſię na ſzereg

$$z=\text{ſty}.z-\frac{(\text{ſty}.z)^3}{3}+\frac{(\text{ſty}.z)^5}{5}-\frac{(\text{ſty}.z)^7}{7}+\text{ i t. d.}$$

położmy $\text{ſty}.z=t$, będzie

$$z=\text{Ł}.\text{ſty}.t=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\text{ i t. d.}$$

niech będzie z łukiem $45°$, czyli $z=\frac{1}{4}P$, ponieważ wiemy z geometryi że $\text{ſty}.\frac{1}{4}P=1$; będzie $t=1$, a przeto $\frac{1}{4}P=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+$ i t. d.
Ten ſzereg ieſt ſławnym owym wzorem *Leibnitza*, który on wynalazł na kwadrowanie koła. Z wyżey podanych o ſzeregach wiadomości rosſądzemy, że ten wzór na nic nam nie może ſłużyć. Potrzebaby bowiem dla użycia go, aby przynaymniey było $t=\frac{1}{10}$, ale ponieważ nie można naznaczyć ſtóſunku między łukiem którego ſtyczna $\frac{1}{10}$, i między obwodem

całym, to przypuſzczenie niczego nas nie może nauczyć o wymiarze koła. Należy do tego koniecznie obrać łuk taki, ktoryby był cząſtką wielokrotną obwodu; do czego naywygodnieyſzy w teraźnieyſzym razie łuk $30°$, którego ſtyczna $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ponieważ ſtyczne innych łuków ſą barziey niewymierné. W tém przypuſzczeniu znaydziem:

$$z = \frac{1}{6} P = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3.\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2.\sqrt{3}} - \text{i t. d. czyli}$$

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3} + \frac{2.\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \text{i t. d.}$$

s tego oſtatniego ſzeregu z niewypowiedzianą prácą wyciągniono wartość połowy obwodu koła w ułomku dzieſiątkowym do 130 przeſzło figur, którey liczby początkowe ſą $P = 3,14159265358979+$

J.P. *Euler* ſzczęśliwiey użył wzoru *Liebnitza*: wziąwſzy łuk $45°$ za z, rozdzielił go na dwa, $a+b=45°$, s kąd $\text{ſty}.(a+b) = 1 = \frac{\text{ſty}.a+\text{ſty}.b}{1-\text{ſt}.a.\text{ſty}.b}$, a przeto

$$\text{ſty}.b. = \frac{1-\text{ſty}.a}{1+\text{ſty}.a}.$$

połóżmy teraz $\text{ſty}.a = \frac{1}{2}$; więc $\text{ſty}.b = \frac{1}{3}$, a ſzereg Leibnitza rozebrany na dwie części, da wartość $\frac{1}{4}P$ znacznie ſię zbliżaiącą do wartości-prawdziwey

$$P = 4. \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \text{i t.d.} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \frac{11}{11.3^{11}} + \text{i t.d.} \end{cases}$$

te wſzyſtkie ſzeregi wypadaiące z wzóru Leibnitza, odmieniaiąc znaki, przerobić ſię mogą na ułomki ciągłe podług tego, cośmy wykonali w §. 46. na zrównaniu (e''): i tak ſam wzór Leibnitza zamienia ſię na ten ułomek ciągły:

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}p = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{i t. d.}}}}}}$$

Poznaliśmy w teraźnieyſzym §, że pierwiaſtki uroione maią ſwoie wyrazy rzetelne przez inny rodzay funkcyi: i tak wyraz uroiony w logarytmach można za pomocą podanych zrównań przemienić na wyraz rzetelny w łukach koła; tak dalece, że przechodząc od logarytmów do łuków, i przeciwnie, natrafiamy zawſze na wyrazy uroione. Ieżeli więc w zrównaniu przeſtępnem pokażą ſię pierwiaſtki uroione, te nie wytykaią niepodobieńſtwa zadania we wſzyſtkich ſpoſobach, ale tylko nas uczą, że rozwiązanie pytania ſtało ſię niepodobnem w logarytmach, ale że ieſt podobnem przez łuki koła; lub przeciwnie, że ieſt niepodobne w łukach koła, ale podobne w logarytmach. Mamy więc w funkcyach przeſtępnych ſpoſób przeyścia od pierwiaſtków uroionych do rzetelnych; co funkcyom algebraicznym nie ſłuży, podobno dla tego, że tam działania ſą te ſame na iakikolwiek funkcyi algebraicznych gatunek; tu zaś każdy gatunek funkcyi przeſtępnych ma ſobie właściwe działanie w rozwiązanie zrównań wchodzące: a zatem ieżeli n.p. pytanie iakie zawiſło od łuków koła, ſpoſób obeyścia ſię z niem przez logarytmy cale mu nie ſłuży, i czyni ie niepodobnem.

§. LVI.

Przyſtoſowanie poprzédzaiącey nauki do wynaydowania mnożników podwóynych funkcyi,

Dotąd odbyliśmy ſobie to, co należy do rachunku linii trygonometrycznych zamieniaiąc ie iedne za drugie. Zoſtaie nam ſię zatrzymać nad użyciem tego rachunku w tem, czegośmy przez funkcye algebraiczne nie mogli dokazać. Pamiętamy że w nauce o ſzeregach na końcu §. 43 rozbieraiąc ułomki ſkładane, na ułomki proſte wzoru $\frac{A}{1-pz}$ doſtrzegliśmy, że ile razy mianownik ſkłada ſię z mnożników uroionych, ułomek ſkładany nie może ſię rozebrać na ułomki mianowników *1go* ſtopnia, boby te całą funkcyą zrobiły uroioną; ale koniecznie w tym przypadku ułomki należy rozbierać na inne, których mianowniki ſą *2go* ſtopnia $a-bz+c^2zz$ rzetelne, powſtaiące z dwóch uroionych. Ta uwaga dała nam uczuć potrzebę cechy rozróżniaiącey funkcyą *2go* ſtopnia złożoną z mnożników uroionych, od tey, która ſię rodzi z mnożników rzetelnych. Zatrzymaymy ſię teraz nad tem: funkcya iakakolwiek *2go* ſtopnia wyrazić ſię może nayogólniey przez $a-bz+czz$: rozebráwſzy ią na mnożników, wypadnie: $z=\frac{b}{2c}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{c}\left[\frac{b^2}{4ca}-1\right]\right)}$: żeby z było uroionem, i żeby funkcya podana miała dwóch uroionych mnożników, potrzeba podług §. 15. żeby $\frac{b^2}{4ca}<1$, czyli żeby $\frac{b}{2\sqrt{ca}}<1$; wyraziwſzy więc $\frac{b}{2\sqrt{ca}}$ przez ilość iaką mnieyſzą od iedności, wyrażemy razem mnożnika uroionego funkcyi podaney.

Z wiadomości iuż wyłożonych w tym rozdziale wiemy, że wſtawy i doſtawy iakichkolwiek łuków prócz $90°$ ſą mnieyſzemi od iedności, więc przybráwſzy łuk p, i za $\frac{b}{2\sqrt{ca}}$ położywſzy doſtawę tego łuku, to ieſt $\frac{b}{2\sqrt{ca}}=Doſt.p.$ czyli $b=2\sqrt{ca}.\ Dost.\,p$; funkcya podana zamykaiąca w ſobie takową wartość na b, będzie koniecznie wyrażać mnożników uroionych, s których ſię ſkładą; to ieſt: $a-2z\sqrt{ca}.\ Doſt.p.+czz$, będzie wyrazem powſzechnym, wſzyſtkich funkcyi dwó-kſztałtnych zamykaiących mnożniki uroione ioné. Zebyśmy tén wyraz uczynili wygodnieyſzym, oſwobodźmy go ze znaku pierwiaſtkowego, położywſzy a^2 za a, c^2 za c, a tak - - $a^2-2acz\,Dost.p+c^2z^2$ - - (A') bedzie wzorem powſzechnym funkcyi złożoney z dwóch mnożników uroionych.

Chcąc teraz odkryć ſpoſób ogólny rozbierania iakieykolwiek funkcyi na mnożników wzóru (A'), potrzeba nam náprzód wyſtawić iakiegokolwiek ſtopnia funkcyą złożoną s takowych mnożników, s którą równaiąc wſzyſtkie inne, moglibyśmy ſię nauczyć, czyli ta zamyka mnożników uroionych lub nie? a doſzedłſzy że ich zamyka, żebyśmy mogli wyciągnąć s tego porównywania łuk p, i inne nieoznaczone ilości. Do rozwiązania tey trudności doſyć nam będzie użyć tey ſamey ſztuki, która nam ſzczęśliwie poſłużyła w §. 31. Rozebrawſzy naſamprzód (A') na ſwych mnożników, i té potem na zrównanie zamieniwſzy, znaydziemy:

$$cz-a(Dost.p+\sqrt{-1}.Wst.p);\quad cz-a(Dost.p-\sqrt{-1}.Wst.p)$$
$$z=a'(Dost.p+\sqrt{-1}.Wst.p);\quad z=a'(Dost.p-\sqrt{-1}.Wst.p)\qquad (A'')$$

gdzie $a'=\frac{a}{c}$. Teraz niech

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ i t. d.}\qquad (B')$$

oznacza funkcyą iakąkolwiek, którą chcémy przerobić na funkcyą zamykaiącą mnożniki (A'), kładę za z, z^2, z^3, i t. d. wartości z zrównań (A''); za pomocą wzóru ogólnego $(Dost.p\pm\sqrt{-1}.Wst.p)^n=Dost.np\pm\sqrt{-1}.Wst.np$; otrzymamy dwa naſtępuiące zrównania:

$$0=\left\{\begin{array}{l}A+Ba'Dost.p+Ca'^2Dost.2p+Da'^3Dost.3p+\text{ i t. d.}\\ \quad+Ba'\sqrt{-1}.Wst.p+Ca'^2\sqrt{-1}.Wst.2p+Da'^3\sqrt{-1}.\\ Wst.3p+\text{ i t. d.}\end{array}\right.$$

$$0=\left\{\begin{array}{l}A+Ba'Dost.p+Ca'^2Dost.2p+Da'^3Dost.3p+\text{ i t. d.}\\ \quad-Ba'\sqrt{-1}.Wst.p-Ca'^2\sqrt{-1}.Wst.2p-Da'^2\sqrt{-1}.\\ Wst.3p+\text{ i t. d.}\end{array}\right.$$

które dodane i odciągnione od ſiebie rodzą dwa inne:

$$\begin{aligned} o&=A+Ba'\,\text{Dost}.p+Ca'^2\,\text{Dost}.2p+Da'^3\,\text{Dost}.3p+\text{ i t. d.}\\ o&=Ba'\,\text{Wst}.p+Ca'^2\,\text{Wst}.2p+Da'^3\,\text{Wst}.3p+\text{ i t.d.} \end{aligned}\tag{B''1}$$

mnożąc pierwſzé z nich przez *Wst.mp*, drugié przez *Dost.mp*, i té potém mnogości dodané i odciągnioné zamieniwſzy na wſtawy łuków kilkokretnych za pomocą (ꝺ), otrzymamy dwa náyogólnieyſzé zrównaniá.

$$\begin{aligned} &o=A.\text{Wst}.mp+Ba'\,\text{Wst}.(m+1)p+Ca'^2\,\text{Wst}.(m+2)p\\ &+\text{i t. d.}\\ &o=A.\text{Wst}.mp+Ba'\,\text{Wst}.(m-1)p+Ca'^2\,\text{Wst}.(m-2)p\\ &+\text{ i t. d.} \end{aligned}\tag{B''2}$$

chcąc podobné zrównaniá otrzymać przez funkcyą doſtáw, mnożę pierwſzé z zrównań (*B''1*) przez *Dost.mp*, drugié przez *Wst.mp*, a za pomocą (*β*) wypadną zrównaniá:

$$\begin{aligned} &o=A.\text{Dost}.mp+Ba'\,\text{Dost}.(m-1)p+Ca'^3\,\text{Dost}.(m-2)p\\ &+\text{ i t. d.}\\ &o=A.\text{Dost}.mp+Ba'\,\text{Dost}.(m+1)p+Ca'^2\,\text{Dost}.(m+2)p\\ &+\text{ i t. d.} \end{aligned}\tag{B''3}$$

(*B''2*) i (*B''2*) ſą zrównaniá náyogólnieyſzé zamykaiącé mnożników (*A'*), s któremi równaiąc iakąkolwiek funkcyą podaną; wyciągniemy wartość kąta *p* i *a'*; a przeto mnożników wzóru (*A'*); tyle nam bowiem wypádnie wártości na *p*, ile funkcya podaná takowych mnożników zawierá. Zrównaniá (*B''2*), i (*B''3*) wyrażoné przez wſtawy i doſtawy poddaiąc więcey kombinacyi pomogą nám do tém łatwieyſzégo oznaczeniá *a'* i kąta *p*. Pierwſzé z (*B'2*), drugié z (*B''3*) ſłużą na funkcyą POWSTAIĄCĄ (*aſcendens*), w którey potęgi ilości nieznaney roſną; zrównanie zaś drugié z (*B''2*) i pierwſzé z (*B''3*) na funkcyą SPADAIĄCĄ (*deſcendens*), w którey ſię potęgi ilości nieznaney poſtępuiąc, zniżaią.

Zobaczmy té wſzyſtkie prawidła w przykładzie: Niech będzie a^n+z^n funkcyą podaną, którey chcemy wynaleśdź mnożników podwóynych (*A'*) pamiętaiąc że $a'=\frac{a}{c}$, ponieważ ta funkcyá zamyká pierwſzy

termin

termin a^n bez ilości nieznanéy, równać ią należy z. (B″1), s czego wypadną dwa zrównaniá:

$$a^n+a'^n \, Dost.np=o \; - - - \; a'^n \, Wst.np=o.$$

ażc a nie może bydź zero, drugié s tych zrównań daie $Wst.np=o$, trzeba więc za p brać wſzyſtkié łuki, których wſtáwa zero, maiąc wzgląd na dodatné i odiemné: łuki zaś te ſą $(2k+1)P$, albo $2kP$; k będąc liczbą iakąkolwiek całką, P zaś półobwodem koła; piérwſzym odpowiadá doſtawa -1, drugim $+1$. Ponieważ zaś funkcyá a^n+z^n ieſt cała dodatná; trzeba wziąść doſtawę odiemną, aby ſię ſtała a^n-z^n, przez co nie wprowadzi wyrazów uroionych zamieniaiąc ſię na zrównanie. Wziąwſzy przeto

$np=(2k+1)P$, czyli $p=\frac{(2k+1)P}{n}$; otrzymámy

$a^n=a'^n=\frac{a^n}{c^n}$, to ieſt $a'=a$, $c=1$, i mnożnik podwóyny funkcyi podanéy będzie - - - -

$a^2-2az \, Doſt. \frac{(2k+1)}{n} P+z^2$; gdzie za $2k+1$ brać náleży wſzyſtkié liczby nieparzyſté nie przewyżſzaiące n; wſzyſtkié bowiem większe od n wracaią tych ſamych mnożników. Niech będzie $n=5$; biorąc za $2k+1$, 1; 3; 5; otrzymámy:

$$a^2-2az \, Doſt.\tfrac{1}{5}P+zz \; - - \; a^2-2az \, Doſt.\tfrac{3}{5}P+zz; \; - - \; a^2+2az+zz.$$

oſtatni mnożnik ieſt zupełną potęgą drugą, ponieważ doſtawa $P=-1$; możeż on wchodzić cały za mnożnika funkcyi a^5+z^5? Na ułatwienie tego zagadnieniá wróćmy ſię do zrównań $(B''1)$: wypadło nam ich dwa dlá tego, że tu idzie o mnożników podwóynych; ale ieżeli w którym s takowych mnożników doſtawa $=\pm 1$; muſi koniecznie wſtawa bydź zero; a zatem iedno z zrównań $(B''1)$ niknie, i uczy nas, że w przypadku kiedy albo wſtawa albo doſtawa $=\pm 1$, na ten czas ieden tylko mnożnik wchodzi w ſkład funkcyi podanéy. Więc ilekolwiek razy otrzymámy za mnożnika podwóynego zupełną potęgę drugą, ge drugą, należy tylko iey pierwiaſtek brać za mnożnika funkcyi podaney. I tak w teraźnieyſzym przykładzie mnożniki funkcyi a^5+z^5, ſą

$a^2-2az\,\text{Doſt.}\frac{1}{5}P+z^2$ - - $a^2-2az\,\text{Doſt.}\frac{3}{5}P+z^2$ - - $a+z$.

Iakóż przypatrzywſzy ſię funkcyi $a^n\pm z^n$, doſtrzeżémy łatwo, że kiedy n ieſt liczbą parzyſtą, a^n+z^n nie ma żadnego mnożnika rzetelnego, ale a^n-z^n ma ich koniecznie dwa $a-z$, i $a+z$: kiedy zaś n ieſt liczbą nieparzyſtą a^n+z^n ma zawſze przynaymniey iednego mnożnika rzetelnégo $a+z$; podobnie a^n-z^n iednego rzetelnégo $a-z$.

Niech będzie funkcya podana $a^{2n}-2a^nz^n\,\text{Doſt.}g+z^{2n}$; mamy z niey za pomocą $(B''1)$ dwa zrównania

$$a^{2n}-2a^na'^n\,\text{Doſt.}g.\text{Doſt.}np+a'^{2n}\text{Doſt.}2np=0 \qquad (1)$$
$$-2a^na'^n\,\text{Doſt.}g.\,\text{Wſt.}np+a'^{2n}\text{Wſt.}2np=0 \qquad (2)$$

rozmnożywſzy pierwſze przez $\text{wſt.}\,2np$, drugie przez $\text{doſt.}\,2np$, i odciągnąwſzy ie od ſiebie, otrzymamy takie zrównanie iakie nam wyraża $(B''2)$, to ieſt:

$$a^{2n}\,\text{wſt.}2np-2a^na'^n\,\text{doſt.}g(\text{wſt.}2np\,\text{doſt.}np-\text{wſt.}np\,\text{doſt.}2np)=0.$$

czyli $a^{2n}\,\text{wſt.}2np-2a^na'^n\,\text{doſt.}g\,\text{wſt.}np=0$

znoſząc ie z (2), wypada $a=\frac{a}{c}$, $c=1$. $\text{wſt.}2np=2\,\text{doſt.}g\,\text{wſt.}np$; ażc $\text{wſt.}2np=2\,\text{doſt.}np.\,\text{wſt.}np$, więc $\text{doſt.}g=\text{doſt.}np$: a ponieważ znowu $\text{doſt.}(2kP\pm g)=\text{doſt.}g$, będzie $p=\frac{2kP+g}{n}$. Przeto biorac za $2k$ wſzyſtkie liczby parzyſte nie przewyżſzaiące n, otrzymamy mnożników ſzukanych. Niech będzie $n=3$, funkcya $a^6-2a^3z^3\,\text{doſt.}g+z^6$, ma za mnożników

$a^2-2az\,\text{doſt.}\frac{1}{3}g+z^2$, - - $a^2-2az\,\text{doſt.}\frac{2P-g}{3}+z^2$

$a^2-2az\,\text{doſt.}\frac{2P+g}{3}+z^2$.

§. LVII.

§. LVII.

Szeregi nieſkończone rozbieraią ſię na mnożników.

Spoſób dopiero wyłożony rozbierania funkcyi na ſwych mnożników dwoiſtych, rościąga ſię nawet do ſzeregów nieſkończonych. W §. 49. znaleźliśmy że $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ i t.d. $= (1 + \frac{x}{g})^g$: ſzereg ten bedąc równy potędze wykładnika nieſkończonego g, ma nieſkończoną liczbę mnożników równych. Jakże ich znaydziemy? zrównaymy naprzód ſzereg nieſkończony s ſwoią potęgą, tę zaś s funkcyą $a^n - z^n$; będzie

$$(1 + \frac{x}{g})^g - 1 = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{i t. d.}$$

przeto $1 + \frac{x}{g} = a$, $z = 1$, $n = g$, a mnożnik podwóyny (A') ſtanie ſię:

$$(1 + \frac{x}{g})^2 - 2(1 + \frac{x}{g})\, dost.\, \frac{2kP}{g} + 1.$$

biorąc teraz za $2k$ wſzyſtkie liczby parzyſte $0, 2, 4, 6$. i t. d. wypadną nam mnożniki ſzeregu podanego: połóżmy $2k = 0$, otrzymamy za mnożnika 1go, $\frac{x^2}{g^2}$ s którego podług wyłożoney przyczyny w §. poprzedzaiącym nie należy brać tylko $\frac{x}{g}$; ale że $\frac{x}{g}$ ma bydź mnożone przez nieſkończoną liczbę mnożników podwóynych; więc x ieſt w ſamey rzeczy pierwſzym mnożnikiem naſzego ſzeregu, co oczywiście ſię pokazuie. Chcąc teraz innych mnożników oznaczyć; weźmy z § 54. (φ), za $dost.\, \frac{2kP}{g}$ iego wartość w pierwſzych terminach ſzeregowych, uważaiac inne terminy rozdzielne przez potęgi g iako niknące, to ieſt $dost.\, \frac{2kP}{g} = 1 - \frac{2k^2P^2}{g^2}$; a mnożnik naſz zamieni ſię na $(1+\frac{x}{g})^2-2(1+\frac{x}{g})(1-\frac{2k^2P^2}{g^2})+1=\frac{x^2}{g^2}+\frac{4k^2P^2}{g^2}$ $+\frac{4k^2P^2x}{g^3}$; rozdzieliwſzy wſzyſtkie terminy drugiego członka przez $\frac{4k^2P^2}{g^2}$ otrzymámy za mnożnika $1+\frac{x}{g}$ $+\frac{x^2}{4k^2P^2}$. w którym biorąc za k^2 wſzyſtkie liczby párzyſte, wypadnie nám nieſkończona liczba mnożników ſzeregu podanego, to ieſt:

$$x(1+\frac{x}{g}+\frac{x^2}{4P^2})(1+\frac{x}{g}+\frac{x^2}{16P^2})(1+\frac{x}{g}+\frac{x^2}{36P^2})(1+\frac{x}{g}+\frac{x^2}{64P^2})\text{ i t. d.}=e^x-1.$$

tymże ſamym ſpoſobem znáydziemy, że

$$e^{-x}-1=(1-\frac{x}{g})^g-1=-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$-\text{i t. d.}=x(1-\frac{x}{g}+\frac{x^2}{4P^2})(1-\frac{x}{g}+\frac{x^2}{16P^2})(1-\frac{x}{g}+\frac{x^2}{36P^2})\text{ i t. d.}$$

Doświadczmy ieſzcze tego ſpoſobu w funkcyach urbionych: wiemy że $wſt.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$;

$$e^{x\sqrt{-1}}=(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g,\ e^{-x\sqrt{-1}}=(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g$$

będzie więc $wſt.x=\frac{(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g-(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g})^g}{2\sqrt{-1}}$; równaiąc tén wyráz s funkcyą a^n-z^n; wypadnie.

$a=\frac{1+\frac{x\sqrt{-1}}{g}}{2\sqrt{-1}}$; $z=\frac{1-\frac{x\sqrt{-1}}{g}}{2\sqrt{-1}}$; mnożnik zaś podwóyny

dwóyny będzie:

$$\frac{\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g}\right)^2}{-2} - \frac{2\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g}\right)\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g}\right)}{-2} \text{ doſt. } \frac{2kP}{g}$$
$$+\frac{\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g}\right)^2}{-2}$$

wykonáwſzy to mnożenie, i włożywſzy za Doſt. $\frac{2kP}{g} = 1-\frac{2k^2P^2}{g^2}$; wypadnie mnożnik $\left(1-\frac{x^2}{k^2P^2}\right)$; w którym biorąc za *k* wſzyſtkie liczby w porządku naturalnym, otrzymámy:

$$\text{Wſt.}x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{i t. d}$$
$$= x\left(1-\frac{x^2}{P^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4P^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9P^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16P^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{25P^2}\right)$$
$$\left(1-\frac{x^2}{36P^2}\right) \text{ i t.d.} = x\left(1+\frac{x}{P}\right)\left(1-\frac{x}{P}\right)\left(1-\frac{x}{2P}\right)\left(1+\frac{x}{2P}\right)$$
$$\left(1-\frac{x}{3P}\right)\left(1+\frac{x}{3P}\right)\left(1-\frac{x}{4P}\right)\left(1+\frac{x}{4P}\right) \text{ i t. d.}$$

Wziąwſzy znowu Doſt.$x = \frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \frac{\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{g}\right)^g}{2} + \frac{\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{g}\right)^g}{2}$, porównáwſzy ten wyráz s funkcyą a^n+z^n, wynaydziemy:

$$\text{Doſt.}x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{i t. d.} = \left(1-\frac{4x^2}{P^2}\right)$$
$$\left(1-\frac{4x^2}{9P^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25P^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49P^2}\right) \text{ i t. d.}$$

$=$

$$=\left(1-\frac{2x}{P}\right)\left(1+\frac{2x}{P}\right)\left(1-\frac{2x}{3P}\right)\left(1+\frac{2x}{3P}\right)\left(1-\frac{2x}{5P}\right)$$

$\left(1+\frac{2x}{5P}\right)$ i t. d.

Ieżeli którykolwiek s tych mnożników wchodzących w wyráz wſtawy ſtanie ſię zero; cały ſzereg zniknie, i *Wſt.*$x=0$, co ſię trafi wziąwſzy za x, $0, P, 2P, 3P$; kP; k znacząc iakąkolwiek liczbę. Toż ſamo znáydziemy w doſtawie, że ta zniknie, ieżeli $x=\frac{(2k+1)P}{2}$, co oczywiście z natury koła wypádá.

Uczyńmy teráz $x=\frac{m}{n}P$; $\frac{m}{n}$ wyráża ſtóſunek iakiegokolwiek łuku do półobwodu; będzie

Wſt. $\frac{mP}{n}=\frac{mP}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)$

i t. d.

Doſt. $\frac{mP}{n}=\left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{49n^2}\right)$

i t. d.

a położywſzy $2n$ za n, i rozebráwſzy każdego z mnożników na dwa proſte zrównania, te zamienią ſię na

Wſt. $\frac{mP}{2n}=\frac{mP}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)$

$\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\left(\frac{6n+m}{6n}\right)$ i t. d. . . . . (*L*)

Doſt. $\frac{mP}{2n}=\left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\left(\frac{5n-m}{5n}\right)$

$\left(\frac{5n+m}{5n}\right)\left(\frac{7n-m}{7n}\right)\left(\frac{7n+m}{7n}\right)$ i t. d. . . . . (*M*)

przypuśćmy teráz że $\frac{mP}{2n}=90°$, czyli $m=n=1$, będzie *Wſt.* $\frac{mP}{2n}=1$. zrównanie (*M*) zniknie, (*L*) zaś dá

1=

$$1=\frac{P}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{6}.\frac{7}{8}.\frac{9}{8}.\frac{9}{10}.\frac{11}{10}.\frac{11}{12}.\ \text{i t.d. czyli}$$

$$\frac{1}{2}P=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12.14.14.\ \text{i t. d.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13.13.15.\ \text{i t. d.}}$$

i ten ci to ieſt ſławny wzór *Walliſa*, podany od niego na kwadrowanie koła w arytmetyce ilości nieſkończonych. Biorąc po dwa na raz mnożniki wzór ten może ſię ieſzcze tak wyſtawić:

$$\frac{1}{2}P=2.\frac{8}{9}.\frac{24}{25}.\frac{48}{49}.\frac{80}{81}.\frac{120}{121}.\frac{168}{169}\ \text{i t. d.}$$

$$\text{aże }\frac{8}{9}=1-\frac{1}{9};\ \frac{24}{25}=1-\frac{1}{25};\ \frac{48}{49}=1-\frac{1}{49}\ \text{i t.d. więc}$$

$$\frac{1}{2}P=2(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{25})(1-\frac{1}{49})(1-\frac{1}{81})\ \text{i t. d.}$$

Wiemy z nauki o logarytmach hyperbolicznych; że

$$l.(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ \text{i t. d.}\ \text{-- (Q) więc}$$

$$log.(1-\frac{1}{9})=-\frac{1}{9}-\frac{1}{2.9^2}-\frac{1}{3.9^3}-\frac{1}{4.9^4}-\text{i t. d.}$$

co równie do wſzyſtkich mnożników ſtóſuiąc, znaydziem:

$$log.hyp.P=log.4+log.(1-\frac{1}{9})+log.(1-\frac{1}{25})+$$

$$log.(1-\frac{1}{49})+\ \text{i t. d.}$$

rozbieraiąc zaś $log.(1-\frac{1}{9})$, $log.(1-\frac{1}{25})$ i t. d. podług wzoru (Q) wypadną ich wartości w naſtępuiących ſzeregach.

$$log.(1-\frac{1}{9})\Big\{-\frac{1}{9}-\frac{1}{2.9^2}-\frac{1}{3.9^3}-\frac{1}{4.9^4}-\frac{1}{5.9^5}-\ \text{i t. d.}$$

$$log.(1-\frac{1}{25})\Big\{-\frac{1}{25}-\frac{1}{2.(25)^2}-\frac{1}{3(25)^3}-\frac{1}{4(25)^4}$$

$$-\frac{1}{5(25)^5}-\text{i t. d.}$$

log.

$$\log.(1-\frac{1}{49})\Big\{-\frac{1}{49}-\frac{1}{2(49)^2}-\frac{1}{3(49)^3}-\frac{1}{4(49)^4}$$

$$-\frac{1}{5(49)^5}-\text{ i t. d.}$$

a zebráwſzy ſzeregi s terminów ſobie podłożonych, nazwiymy:

$$A=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{ i t. d.}$$

$$B=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{ i t. d.}$$

$$C=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{ i t. d.}$$

$$D=1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{ i t. d.}$$

znaydziemy:

$$\log.hy.P=\log.4.-(A-1))-\tfrac{1}{2}(B-1)-\tfrac{1}{3}(C-1)-\tfrac{1}{4}(D-1)-\text{ i t. d.}$$

co zamieniwſzy na ułomki dzieſiątkowe, wypadnie nam bez wielkiey pracy.

$\log.hyp.P=1,1447298858494$ i t. d. rozmnożywſzy zaś tę liczbę przez 0,43429 i t. d. podług §. 50. wypadnie w układzie Briggiuſza.

$$\log.P=0,4971498726941338\text{ i t. d.}$$

Maiąc logarytm półobwodu koła, łatwo nam ieſt rachować logarytmy wſtaw i doſtaw za pomocą zrównań (L), (M). widziemy bowiem że

$$Log.Wſt.\frac{mP}{2n}=\log.P+\log.\frac{m}{2n}+\log.(1-\frac{m^2}{4n^2})+\log.(1-\frac{m^2}{16n^2})+\text{ i t. d.}$$

$$Log.Doſt.\frac{mP}{2n}=\log.(1-\frac{mm}{n^2})+\log.(1-\frac{mm}{9n^2}+\log.(1-\frac{mm}{25n^2})+\text{ i t. d.}$$

dwa

dwa te zrównania uczą nas ſpoſobu rachowania tablic logarytmów na linie trygonometryczne, iakich codziennie w matematyce praktyczney używać zwykliśmy.

S tych wſzyſtkich wyłożonych prawd oczywiście ſię pokazało, że, rozbieranie ſzeregów nieſkończonych przez które ſię funkcye przeſtępne wyrażaia, na ſwe mnożniki, ieſt wielkiego barzo użycia w rachowaniu tablic logarytmów. Z nich wyciagnęliśmy wzory i liczby, na które natrafiamy we wſzyſtkich praktyczney matematyki częściach, abyśmy czytelnikowi wytknęli ſpoſób, iakiego dziś można użyć do wynaydowania ich. Niechcemy ſię dłużey nad tą materyą rościagać, bo każdy z wyłożonych od nas początków reſzty ſobie doyśdź może bez naymnieyſzey trudności. Ułatwiymy tylko króciuteńko to, co nam z wyżſzych pozoſtało uwag.

§. LVIII.

Funkcyé ułomkowé rozbiérałą ſię na mnożniki dwó kſztałtne rzetelne, z dwóch uroiolonych złożone.

Zoſtawiliśmy w §. *35*. nierozwiązane zadanie o rozbiorze funkcyi ułomkowych, zamykaiących mnożniki uroione w mianowniku, na ułomki proſté; dla tego, żeśmy nie umieli ieſzcze mnożników podwóynych rzetelnych, które z dwóch uroionych powſtaią, w wyrazie przyzwoitym wyſtawić. Doſzedłſzy teraz, że takowe mnożniki wyrazić ſię ogólnie mogą przez $a^2-2arz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2$ (*Aa*) należy nam ſię do tamtego zadania wrocić, i tu ié dopełnić. Wyſtawmy ſobie więc ułomek nayogólnieyſzy.

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ i t. d.}}{a'+b'z+c'z^2+d'z^3+e'z^4+\text{ i t. d.}}=\frac{M}{N},$$

przypuśćmy, że mianownik N zamyka w ſobie mnożniki uroione proſte, a zatem mnożnika podwoynego $a^2-2acz\,\textit{doſt.}p+c^2z^2$, i oprócz tego mnożników innych rzetelnych, które wyrażemy przez $S=a''+b''z+c''z^2+d''z^3+e''z^4+$ i t. d. pamiętaiąc na początki wyłożone w §. 35. przekonamy ſię, że ułomek $\frac{M}{N}$, rozbiéra ſię na té proſte $\frac{M}{N} = \frac{A'+B'z}{a^2 - 2acz\,\text{doſt.}p + c^2z^2}$ $+\frac{R}{S} = \frac{M}{(a^2 - 2acz\,\text{doſt.}p + c^2z^2)S}$, á przeto $R = \frac{M-(A'+B'z)S}{a^2 - 2acz\,\text{doſt.}p + c^2z^2}$; R będąc ilością cáłką, muſi koniecznie $M-(A'+B'z)S$ bydź rózdzielné przez $a^2 - 2acz\,\text{doſt.}p + c^2z^2$, a zatém uczyniwſzy tę oſtatnią funkcyą zero, i z niey wydobytą wártość na z, $z = \frac{a}{c}(\text{doſt.}p \pm \sqrt{-1}.\text{wſt.}p)$, włożywſzy w $M-(A' + B'z)S$, będzie $M-(A'+B'z)S = 0$, s kąd wypáda $M = A'S + B'Sz$ - - (Ab). należy nám więc naſamprzód przerobić M, N, na funkcyą inną zamykaiącą nową wártość na z wziętą z (Aa), z nich potem otrzymáwſzy dwa zrównania na z, potrafiemy oznaczyć A', B'. Zatrudniymy ſię teraz tem przerabianiem pamiętaiąc na to, że $z^n = \frac{a^n}{c^n}(\text{doſt.}\,np \pm \sqrt{-1}.\text{wſt.}np)$, biorąc dla krotſzego rachunku $\frac{a}{c} = m$, otrzymámy naprzód dwa naſtępuiącé zrównania na licznika M.

$$A + Bm.\text{doſt.}p + Cm^2\,\text{doſt.}2p + Dm^3\,\text{doſt.}3p + \text{ i t.d. } = M'$$
$$\pm(Bm.\,\text{wſt.}p + Cm^2\,\text{wſt.}2p + Dm^3\,\text{wſt.}\,3p + \text{ i t.d.})\sqrt{-1}$$
$$= \pm M''\sqrt{-1}.$$

na $A'S$

$$A'(a'' + b''m\,\text{doſt.}p + c''m^2\,\text{doſt.}2p + d''m^3\,\text{doſt.}3p + \text{ i t. d.})$$
$$= A'N'$$
$$\pm A'(b''m\,\text{wſt.}p + c''m^2\text{wſt.}2p + d''m^3\text{wſt.}3p + \text{ i t.d.})\sqrt{-1}$$
$$= \pm A'N''\sqrt{-1}.$$

na $B'Sz$

$$B'(a''m\,\text{doſt.}\,p + b''m^2\,\text{doſt.}2p + c''m^3\,\text{doſt.}3p. + \text{ i t. d.})$$
$$= B'P'$$
$$\pm B'(a''m\,\text{wſt.}p + b''m^2\,\text{wſt.}2p + c''m^3\,\text{wſt.}3p + \text{ i t. d.})$$
$$\sqrt{-1} = \pm B'P''\sqrt{-1}.$$

w téy

w tey odmianie zrównanie (Ab), rozdzieli ſię na dwa takie

$$M'+M''\sqrt{-1}=A'N'+A'N''\sqrt{-1}+B'P'+B'P'\sqrt{-1}$$
$$M'-M''\sqrt{-1}=A'N'-A'N''\sqrt{-1}+B'P'-B'P'\sqrt{-1}.$$

które dodaiąc i znowu odciągaiąc od ſiebie, znaydziemy:

$$M'=A'N'+B'P'$$
$$M''=A'N''+B'P'' \quad \text{przeto}$$
$$A'=\frac{M'P''-M''P'}{N'P''-P'N''} \;\text{-}\;\text{-}\; B'=\frac{M''N'-M'N''}{N'P''-N''P'}$$

mamy przez oſtatnie dwa zrównania A', B'; a przeto licznika ułomku $\frac{A'+B'z}{a^2-2acz\;\text{doſt}.p+c^2z^2}$, pamiętaymy tylko że M' otrzymuiemy kładąc w M za z^n, $m^n\,\text{doſt}.np$; kładąc zaś w M za z^n, $m^n\,\text{wſt}.np$; otrzymuiemy M'': podobnie kładąc w S, $m^n\,\text{doſt}.np$ za z^n, otrzymuiemy N'; N'' zaś, kiedy $m^n\,\text{wſt}.np$ kładziemy za z^n w S: naoſtatek otrzymuiemy P' kładąc w Sz, $m^n\,\text{doſt}.np$ za z^n; P'' zaś, kładąc $m^n\,\text{wſt}.np$ za z^n w Sz: tym ſpoſobem wynalazłſzy M', M'', N', N'', P', P'', wypadaią wartości na A', B', i zadanie ſię rozwięzuie.

Przykład: Niech będzie ułomek

$$\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)}=\frac{M}{N}$$ który należy rozebrać

na dwa ułomki wzoru $\frac{A'+B'z}{a^2-2acz\;\text{doſt}.p+c^2z^2}$ biorąc $1-\frac{8}{5}z+z^2$ za mianownika ułomku ſzukanego, mamy $M=1+2z+z^2$, $S=1+2z+3z^2$, $Sz=z+2z^2+3z^3$, $a^2-2acz.\text{doſt}.p+c^2z^2=1-\frac{8}{5}z+z^2$; a przeto $a=1$, $c=1$, $m=1$, $2\,\text{doſt}.p=\frac{8}{5}$; $\text{doſt}.\,p=\frac{4}{5}$. Ponieważ nie mamy ſtóſunku łuku doſtawy $\frac{4}{5}$ do obwodu koła, muſzemy ſzukać wſtaw łuków powtarzanych za pomocą zrównań $(\varkappa)$ w §. 51; doſtaw zaś za pomocą zrównania $\text{Doſt}.p=\sqrt{[1-(\text{wſt}.p)^2]}$, będzie więc

$$\text{Wſt}.p=\frac{3}{5}\ \cdots\ \text{Doſt}.p=\frac{4}{5}$$

$$\text{Wſt}.2p=\frac{24}{25}\ \cdots\ \text{Doſt}.2p=\frac{7}{25}$$

$$\text{Wſt}.3p=\frac{117}{125}\ \cdots\ \text{Doſt}.3p=-\frac{44}{125}$$

kładąc zaś za z^n, *doſt.np.* w M, S, Sz
otrzymamy - - - M', N', P',
kładąc za z^n, *wſt.np* w M, S, Sz
otrzymamy - - - M'', N'', P''.

$$M'=1+\frac{2.4}{5}+\frac{7}{25}=\frac{72}{25}\ \cdots\ M''=0+2.\frac{3}{5}+\frac{24}{25}=\frac{54}{25}$$

$$N'=1+\frac{8}{5}+\frac{21}{25}=\frac{86}{25}\ \cdots\ N''=0+2.\frac{3}{5}+3.\frac{24}{25}=\frac{102}{25}$$

$$P'=\frac{4}{5}+\frac{2.7}{25}-\frac{3.44}{125}=\frac{38}{125}\ \cdots\ P''=\frac{3}{5}+\frac{2.24}{25}+\frac{3.117}{125}=\frac{666}{125}$$

s kąd wyciągniemy $N'P''-P'N''=\frac{2136}{125}$, a przeto

$$A'=\frac{1836}{2136}=\frac{12.153}{12.178}=\frac{153}{178}$$

$$B'=-\frac{540}{2136}=-\frac{12.45}{12.178}=-\frac{45}{178};$$ a przeto

ułomek pierwſzy na który ſię rozbiera $\frac{M}{N}$, ieſt - -

$$\frac{(153-45z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}$$

na wynalezienie drugiego ułomku, będzie $M=1+2z+z^2$, $S=1-\frac{8}{5}z+z^2$, - - $a^2-2acz\,\text{doſt}.p+c^2z^2=1+2z+3z^2$, s kąd wypada $a=1$, $c=-\sqrt{3}$, $m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{doſt}.p=\frac{1}{\sqrt{3}}$, podobnem iak przedtem działaniem znaydziemy:

Wſt.p=

$$\text{Wſt}.p=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{- - -} \quad \text{Doſt}.p=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Wſt}.2p=\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{- -} \quad \text{Doſt}.2p=-\frac{1}{3}$$

$$\text{Wſt}.3p=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \text{- -} \quad \text{Doſt}.3p=-\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

kładąc za z^n, $(-1:\sqrt{3})^n\text{Doſt}.np$ w M, S, Sz
otrzymamy - - - - - M', N', P'.
kładąc zaś $z^n=(-1:\sqrt{3})^n\text{Wſt}.np$ - - w $M, S, Sz.$
otrzymamy - - - - - M'', N'', P''.

$$M'=1-\frac{2}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

$$M''=0-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}}{3.3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$N'=1+\frac{8}{5.\sqrt{3}.\sqrt{3}}-\frac{1}{9}=\frac{64}{45}$$

$$N''=0+\frac{8.\sqrt{2}}{5.\sqrt{3}.\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}}{3.3}=\frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$P'=-\frac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}+\frac{8}{5.3.3}+\frac{5}{9.\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{4}{135}$$

$$P''=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}:\sqrt{3}}-\frac{8.2\sqrt{2}}{5.3.3}-\frac{\sqrt{2}}{3.3.3}=-\frac{98\sqrt{2}}{135}$$

s kąd wypadnie $N'P''-P'N''=-\frac{712\sqrt{2}}{675}$, a przeto

$A'=\frac{25}{178}$; $B'=\frac{135}{178}$, i ułomek drugi $=\frac{(25+135z):178}{1+2z+3z^2}$;

przeto $\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)}=\frac{(153-45z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}$
$+\frac{(25+135z):178}{1+2z+3z^2}$

w tym rachunku P', P'' wypadaią s teyże ſamey funkcyi S rozmnożoney przez z, s której N', N''; możemy więc przez kombinacyą barzo proſtą P', P'' wyrazić przez N', N'': iakóż przekonamy ſię że

$P'=m(N'\,\text{Doſt}.p-N''\,\text{Wſt}.p)$.

$P''=m(N'\,\text{Wſt}.p+N''\,\text{Doſt}.p)$ przeto

$N'P''-N''P'=(N'N'+N''N'')m\,\text{Wſt}.p$

$M'P''-M''P'=(M'N'+M''N'')m\,\text{Wſt}.p.+(M'N''-M''N').$
$m\,\text{Doſt}.p$

Przeto $$A'=\frac{M'N'+M''N''}{N'N'+N''N''}+\frac{(M'N''-M''N')\,\text{Doſt}.p}{N'N'+N''N''.\,\text{Wſt}.p}$$

$$B'=\frac{M''N'-M'N''}{N'N'+N''N''m.\,\text{Wſt}.p} \qquad (Y)$$

§. LIX.

Rozwięzuie ſię to ſamo zadanie, kiedy mianownik zawiera mnożników podwóynych równych

Uważaliśmy w teraźnieyſzym rozbiorze ułomku $\frac{M}{N}$, że N nie zawiera w ſobie mnożników równych $a^2-2acz\,\text{Doſt}.p.+c^2z^2$: przypuściwſzy zaś że N zamyka różne iakiekolwiek potęgi takowych podwóynych mnożników n.p. $(a^2-2acz\,\text{Doſt}.p+c^2z^2)^s$, na ten czás S zawiera także w ſobie $a^2-2acz\,\text{Doſt}.p+c^2z^2$, i położywſzy w zrównaniu $M=A'S+B'Sz$ - - (Ab), $z^n=m^n(\text{Doſt}.np\pm\sqrt{-1}.\text{Wſt}.np.)$ będzie $S=0$, a zatem $M=0$, co nie tylko nám nie da żadney wartości na A', B'; ale ieſzcze wprowadzi warunek cale przeciwny zadaniu uczyniwſzy $M=0$. S tey uwági łatwo ſię przekonać, że kiedy funkcya $\frac{M}{N}$ zawiera w ſobie mnożników podwóynych równych, ſpoſób rozbierania iey muſi bydź różny od tego, któregośmy dopiero użyli. Ta różnica iuż nam ſię pokazała wyżey pod §. 35. i oraz powinna nás wiele oświecić w teraźnieyſzym rachunku.

Niech będzie $N=(a^2-2acz\,\text{Doſt}.p+c^2z^2)^gS$, gdzie S zamyka mnożniki różne od tego, który ieſt w potędze g: §§. 34, 35, iuż nás przekonały, że funkcya takowa rozbiera ſię koniecznie na inne takich wzorow, rów, iakie nám naſtępuiące wyrážá zrównanie:

$$\frac{M}{(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)^s S}=\frac{A'+B'z}{(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)^s}$$

$$+\frac{C'+D'z}{(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)^{s-1}}+\frac{E'+F'z}{(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)^{s-2}}$$

$+$ i t.d. $+\frac{R}{S}$, z niego wypádá:

$$R=\frac{M-S[A'+B'z+(C'+D'z)(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)+\text{ i t.d.}]}{(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)^s};\ (A\alpha)$$

położywſzy teráz $a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2=0$, wſzyſtkie naſtępuiące terminy odpadną, zoſtawiwſzy $M-SA'-SB'z=0$, włożywſzy więc w M, S, Sz, za z^n, $m^n.\textit{Doſt.}np$, $m^n\,\textit{Wſt.}np$. otrzymámy A', B' tak, iak w poprzedzaiącem działaniu: miawſzy iuż A', B', oznaczone, $M-SA'-SB'z$, ieſt koniecznie rozdzielne przez $a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2$, wykonáwſzy to dzielenie, otrzymámy wieloráz P', to ieſt:

$$P'=\frac{M-SA'-SB'z}{a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2},$$

a zrównanie $(A\alpha)$ zniży ſię o ieden ſtopień, i dá nám naſtępuiąca wártość:

$$R=\frac{P'-S[C'+D'z+(E'+F'z)(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)+\text{ i t.d.}]}{(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)^{s-1}}$$

gdzie znówu mianownik ſtawſzy ſię zero, zoſtawi $P'-SC'-SD'z=0$. Kładąc w P', S, Sz, $m^n\,\textit{Doſt.}np$, $m^n\,\textit{Wſt.}np$ za z^n; oznaczemy C', D'; te oznaczone wártości na C', D', uczyniá $P'-SC'-SD'z$ zupełnie rozdzielnem przez $a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2$: wykonáwſzy to dzielenie i nazwáwſzy iego wieloráz Q', będzie

$$Q'=\frac{P'-SC'-SD'z}{a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2}:$$

włożywſzy znowu Q' w zrównanie oſtatnie na R, zniżémy ié ieſzcze o ieden ſtopień:

$$R=\frac{Q'-S[E'+F'z+(G'+H'z)(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)+\text{ i t. d.}]}{(a^2-2acz\,\textit{Doſt.}p+c^2z^2)^{s-2}}$$

podobném rozumowaniém i działaniém wynaydziémy znowu E', F', w czem nám wielé pomoże dokładne zrozumienie §. 25.

Używaiąc zrównań (Y) na A', B', wiedzieć nám należy, że te ſame ſłużą nám na C', D'; E', F'; G', H'; i t. d. wſzyſtkich liczników ułomków proſtych, na które ſię $\frac{M}{N}$ rozbierá, pamiętaiąc na to, że w nich N', N'', iako wypadaiące z S zoſtaną nienaruſzoné; ale M', M'', odmieniaią ſię z odmianą M, tak dalece, że iako wypadaia w pierwſzym ułomku kładąc $m^n\text{Doſt}.np$, $m^n\,\text{Wſt}.np$, za z^n w M; tak w drugim na C', D', wypadną kładąc w P'; w trzecim na E', F', kładąc w Q'.. te ſame wártości za z, i t. d.

Przykład. Niech będzie funkcyá podana - -
$\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)}$, gdzie $M=z-z^3$, $S=1+z^4$; a^2-2acz. $\text{Doſt}.p+c^2z^2=1+z^2$, a przeto $a=1$, $m=1$, $\text{Doſt}.p=0$ więc $p=\frac{1}{2}P$; tu P znaczy połobwodu koła, będzie więc

$$\text{Wſt}.p=1 \;\text{- - -}\; \text{Doſt}.p=0$$
$$\text{Wſt}.2p=0 \;\text{- - -}\; \text{Doſt}.2p=-1$$
$$\text{Wſt}.3p=-1 \;\text{- -}\; \text{Doſt}.3p=0$$
$$\text{Wſt}.4p=0 \;\text{- - -}\; \text{Doſt}.4p=1.$$

ułomek zaś $\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)}$ rozbiéra ſię na $\frac{A'+B'z}{(1+z^2)^4}$ $+\frac{C'+D'z}{(1+z^2)^3}+\frac{E'+F'z}{(1+z^2)^2}+\frac{G'+H'z}{1+z^2}+$ i t. d.
kładąc wſpomnione wártości na z, w M, S, Sz, wypadnie nám $M'=0$, $M''=2$, $N'=2$, $N''=0$, przeto z (Y) $A'=0$, $B'=1$.

$P'=\frac{-z^3-z^5}{1+z^2}=-z^3$, kładąc w P', $\text{Doſt}.np$, $\text{Wſt}.np$, za z^n; otrzymámy $M'=0$, $M''=1$, zaczém idzie $C'=0$, $D'=\frac{1}{2}$; $C'+D'z=\frac{1}{2}z$;

$Q'=$

$Q'=\frac{-z^3-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^5}{1+z^2}=-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^3$; kładąc w Q' za z, z^3 wſpomnione wártości, wypadnie $M'=o$, $M''=o$, a zatem $E'=o$, $F'=o$.

$$R'=\frac{Q'-SE'-SF'z}{1+z^2}=\frac{Q'}{1+z^2}=\frac{-z-z^3}{2(1+z^2)}=-\frac{1}{2}z,$$

włożywſzy za z wártość wſpomnioną w R', znáydziemy $M'=o$, $M''=-\frac{1}{2}$, a przeto $G'=o$, $H'=-\frac{1}{4}$. Zaczem

$$\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)}=\frac{1}{(1+z^2)^4}+\frac{1}{2(1+z^2)^3}-\frac{1}{4(1+z^2)}+\text{i t. d.}$$

§. LX.

Rozbieranie funkcyi ułomkowey ſkładaney, na ułomki proſté było nám potrzebne w §. 36, do wynaydowania wyrazów ogólnych na ſzeregi zwrotné, któré ſię s funkcyi ułomkowych rodzą. Spoſób w §. 36. na odkrycie wyrazów ogólnych podany, nie rościąga ſię do ułomków maiących w mianowniku mnożniki uroioné, bo dopiero za pomocą wſtáw i doſtáw potrafiliśmy ogólnie wyrazić funkcyą dwó-kſztaltną rzetelną, złożoną z dwóch uroionych, nauczywſzy ſię zaráz rozbierać iakąkolwiek bądź funkcyą całką lub łámaną na takowé mnożniki. S tych wiadomości łatwo nám ieſt barzo to dopełnić, cośmy w §. 36 o wyrazach ogólnych opuścili. Przypomniymy ſobie náprzód wzóry wyrazów ogólnych któreśmy w §. 33 podali na ſzeregi rodzącé ſię z ułomków $\frac{A}{1-pz}$, $\frac{A}{(1-pz)^m}$: potrzebá nám teráz podobné wynaleść na funkcye pozoſtałe

Przyſtóſowanie poprzedzaiącey nauki do ſzeregów.

$$(1)\ \frac{A+Brz}{1-2rz\,Doſt.p+r^2z^3}\ \text{- -}\ (2)\frac{A+Brz}{(1-2rz\,Doſt.p+r^2z^2)^s}$$

Gdybyśmy pierwſzą n.p. funkcyą rozebrali na ſzereg ſpoſobem Des-Carta w §. 32 użytym, i w tym ſzeregu upatrowali prawa, podług którego układaią ſię terminy; cięžkoby nam było doſtrzec zaraz wyrazu ogólnego dla przyczyn wyłožonych w §. 33. Chwyćmy ſię więc drogi iednoſtaynie nam w całey tey nauce ſłužącey, to ieſt: obierzmy ſobie inne funkcye ułomkowe z mianownikiem $1-2rz\,\text{Doſt}.p+r^2z^2$, któreby nam w ſwym ſzeregu łatwo odkryły wyraz ogólny; s temi dopiero równaiąc funkcyą (1), przyidziemy do wynalezienia iey wyrazu ogólnego.

Niech będzie $\frac{Lrz.\text{Wſt}.p}{1-2rz\,\text{Doſt}.p+r^2z^2}$ funkcyą wſpomnioną, rozbieraiąc ią na ſzereg podług §. 32.

$$\frac{Lrz.\text{Wſt}.p}{1-2rz\,\text{Doſt}.p+r^2z^2}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ i t. d.}$$

oznaczemy A, B, C, D, i t. d. i otrzymamy ſzereg:

$Lrz\,\text{Wſt}.p+Lr^2z^2\,\text{Wſt}.2p+Lr^3z^3\,\text{Wſt}.3p+Lr^4z^4\,\text{Wſt}.4p+$ i t. d. - - - (a)

którego wyraz ogólny oczywiście ſię pokazuie - -
$Lr^nz^n.\text{Wſt}.np.$ - - (a')

Niech będzie powtóre funkcya inna $\frac{Q-Qrz\,\text{Doſt}.p}{1-2rz\,\text{Doſt}.p+r^2z^2}$, którą przez ten ſam ſpoſób rozebrawſzy na ſzereg, otrzymamy:

$Q+Qrz\,\text{Doſt}.p+Qr^2z^2\,\text{Doſt}.2p+Qr^3z^3\,\text{Doſt}.3p+$ i t. d. (b)

którego wyraz ogólny ieſt - - $Qr^nz^n\,\text{Doſt}.np$ - - (b')

złączmy teraz funkcyą pierwſą z drugą, otrzymamy:

$$\frac{Q+Lrz\,\text{Wſt}.p-Qrz\,\text{Doſt}.p}{1-2rz\,\text{Doſt}.p+r^2z^2} \quad \text{- - - -} \quad (c)$$

wyraz ogólny tey oſtatniey funkcyi, ieſt równy ſummie wyrazów ogólnych (a'), (b'), to ieſt:

$$(L\,\text{Wſt}.np.+Q\,\text{Doſt}.np)r^nz^n \quad \text{- - - -} \quad (c')$$

a ponieważ funkcya (c) ieſt wzóru podobnego do $\frac{A+Brz}{1-2rz\,\text{Doſt}.p+r^2z^2}$ (1), równaiąc ich liczników między ſobą wypadnie wartość na L, Q, wyražona przez A, B, a przeto i wyraz ogólny. Otrzymamy bowiem

bowiem s porównania terminów $A=Q$, $B=L\,\text{Wſt}.p$, $-Q\,\text{Doſt}.p$, czyli $L=\frac{B+A\,\text{Doſt}.p}{\text{Wſt}.p}$, włożywſzy te wartości za L, Q, w (c'), znaydziemy:

$$\frac{(B\,\text{Wſt}.np+A\,\text{Wſt}.np\,\text{Doſt}.p+A\,\text{Wſt}.p\,\text{Doſt}.np)r^nz^n}{\text{Wſt}.p}.$$ Aże:

$\text{Wſt}.np\,\text{Doſt}.p+\text{Wſt}.p\,\text{Doſt}.np=\text{Wſt}.(n+1)p$: więc $\frac{B\,\text{Wſt}.np+A\,\text{Wſt}.(n+1)p}{\text{Wſt}.p}\,r^nz^n$ ieſt wyrazem ogólnym ſzeregu wypadaiącego s funkcyi ułomkowey - - $\frac{A+Brz}{1-2rz\,\text{Doſt}.p+r^2z^2}$

Zoſtaie nam teraz wynaleśdź wyraz ogólny ſzeregu powſtaiącego s funkcyi którey mianownikiem ieſt $(1-2rz\,\text{Doſt}.p+r^2z^2)^g$. Ten żebyśmy mogli z §. 33. wyciągnać, przypomniymy ſobie że funkcyi $\frac{A}{(1-qz)^g}$ wyraz ogólny ieſt:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\;-\;-\;-\;(n+g-1)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5\;-\;-\;-\;(g-1)}\,Aq^nz^n$$

potrzebaby nam więc funkcyą naſzę przywieśdź do wzoru $\frac{A}{(1-qz)^g}$. na ten koniec rozbierzmy - - - $(1-2rz\,\text{Doſt}.p+r^2z^2)^g$, na dwa mnożniki proſte, chociaż uroione: $(1-(\text{Doſt}.p+\sqrt{-1}.\text{Wſt}.p)rz)^g$, $(1-(\text{Doſt}.p-\sqrt{-1}\,\text{Wſt}.p)rz)^g$ przez co funkcya złożona rozbierze ſię na te dwa ułomki:

$$\frac{K}{(1-(\text{Doſt}.p+\sqrt{-1}.\text{Wſt}.p)rz)^g}+\frac{L}{(1-(\text{Doſt}.p-\sqrt{-1}.\text{Wſt}.p)rz)^g},$$

których mianowniki równaiąc z $\frac{A}{(1-qz)^g}$ wypadnie $q=r\,\text{Doſt}.p+r\sqrt{-1}.\text{Wſt}.p$ w pierwſzym; $q=r\,\text{Doſt}.p-r\sqrt{-1}.\text{Wſt}.p$, w drugim ułomku: a przeto $q^n=r^n(\text{Doſt}.np+\sqrt{-1}.\text{Wſt}.np)$, $q^n=r^n(\text{Doſt}.np-\sqrt{-1}.\text{Wſt}.np)$;

wyraz więc ogólny obydwóch tych ułomków będzie:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+g-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \cdots\ (g-1)}(\textit{Doſt}.np+\sqrt{-1}.\textit{Wſt}.np)Kr^nz^n+$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+g-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \cdots\ (g-1)}(\textit{Doſt}.np-\sqrt{-1}.\textit{Wſt}.np)Lr^nz^n$$

uczyniwſzy potem $K+L=f$, $K-L=\frac{h}{\sqrt{-1}}$, będzie

$$K=\frac{f\sqrt{-1}+h}{2\sqrt{-1}};\ L=\frac{f\sqrt{-1}-h}{2\sqrt{-1}},\ \text{a przeto}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+g-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \cdots\ (g-1)}(f\textit{Doſt}.np+h\,\textit{Wſt}.np)r^nz^n \quad \cdots \quad (s)$$

ieſt wyrazem ogólnym ſzeregu powſtaiącego z dwóch ułomków:

$$\frac{\frac{1}{2}f+\frac{h}{2\sqrt{-1}}}{(1-(\textit{Doſt}.p+\sqrt{-1}.\textit{Wſt}.p)rz)^g}+\frac{\frac{1}{2}f-\frac{h}{2\sqrt{-1}}}{(1-(\textit{Doſt}.p-\sqrt{-1}.\textit{Wſt}.p)rz)^g}$$

czyli ułomku iednego:

$$\frac{f-gfrz\,\textit{Doſt}.p+\frac{g(g-1)}{1.\ 2}fr^2z^2\,\textit{Doſt}.2p+\text{ i t.d.} \quad +ghrz\,\textit{Wſt}.p-\frac{g(g-1)}{1.\ 2}hr^2z^2\,\textit{Wſt}.2p+\text{ i t.d.}}{(1-2rz\,\textit{Doſt}.p+r^2z^2)^g}.$$

Ten ułomek wyſtawia nam nayogólnieyſzy wzór wſzyſtkich ułomków maiących w mianowniku iakąkolwiek potęgę mnożnika podwoynego $1-2rz\textit{Doſt}.p+r^2z^2$, których wyrazy ogólne ſą zamknięte w (s). Mamy więc iuż ſpoſób znaydowania wyrazów ogólnych w ſzeregach powſtaiących z iakieykolwiek funkcyi wymiernych; w obydwóch zaś tego Tomu częściach to wſzyſtko, czegokolwiek nás dziś Algebra może o zrównaniach i funkcyach nauczyć.

KONIEC PIERWSZEGO TOMU.

WYPIS

MATERYI W PIERWSZYM TOMIE ZAWARTYCH.

CZĘSC PIERWSZA

O FUNKCYACH I ZROWNANIACH ALGEBRAICZNYCH.

ROZDZIAŁ I. O prawidłach s pierwſzych myślenia początków wydobytych, które w działaniu iakichkolwiek, i w ſpoſobach rozwiązania Zrównan Pierwszego Stopnia zachodzą.

§. 4.

ROZDZIAŁ II. O poznaniu funkcyi Wielo-kształtnych i działaniach im ſłużących: s kąd o Zrównaniach Drugiego Stopnia i ich właſnościach.

CZESC

CZĘSC DRUGA

TŁOMACZACA NATURĘ I WŁASNOSCI FUNKCYI PRZESTĘPNYCH, ORAZ SPOSOB ONYCH WYRAZANIA.

ROZDZIAŁ I. O rozbieraniu funkcyi na ſzeregi: o ſzeregach zwrotnych, i ſpoſobie wynaydowania ogólnego ich wyrazu.

Spoſób

RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO
TEORYA
Przyſtóſowaná do linii krzywych

Przez
Iana SNIADECKIEGO w Szkole Główney Koronney
Matematyki wyżſzey i Aſtronomii Profeſsora,
teyże Szkoły Sekretarza.

TOM II.

w którym ſię przez zrównania nieoznaczone tłómaczą właſności LINII I POWIERZCHNI KRZYWYCH;

Zamyka ſiedm Tablic s Figurami.
Cena dwóch Tomów - - Zł. 12.
Znayduią ſię do przedania { w Krakowie w Drukarni Szkoły Główney Koronney. / w Warſzawie u II. XX. Piarów.

W KRAKOWIE
w Drukarni Szkoły Głowney Koronney Roku 1783.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Ilości i funkcye w zrównanie iakiégokolwiek ſtopnia wchodzącé wyrażaią ſię przez linie geometryczné: z różnych odmián tym ilościom lub funkcyom nadanych, tłómaczą ſię odmiany, któré odpowiadaią liniom.

§. I.

Przéyście z Algebry do Geometryi.

Zadaiąc ſobie iakie pytanie w pierwſzym Tomie, potrafiliśmy wſzyſtkie okoliczności i warunki do niego przywiązane w zrównaniu zamknąć. Rozwiązawſzy potem to zrównanie, a maiąc przytomne na umyśle znaczenia nadane wyrazom i znakom użytym, odkrywaliśmy prawdy, którycheśmy ſię czaſem ani ſpodziewali, ani ie nawet ſądzili za związkowe s tem, czegośmy ſzukali. Iedno zrównanie dobrze obięte umyſłem, ſtało nam ſię xiążką do czytania nowych między ilościami związków. To ieſzcze przerobione w poſtać prościeyſzą, lub złączone zręcznie z innemi, pokazywało nam nowe prawdy i ſtoſunki, tak dalece, iż będąc ſzczęśliwym w kombinowaniu, zrównanie w ręku biegłego Analiſty ſtaie ſię ſkładem nayſkrytſzych prawd związkowych rozrzuconych po naturze. S tąd powinniśmy ſię przekonać, iż wſzyſtkie właſności iakieykolwiek ilości, wſzyſtkie kondycye do niey przywiązane, byleby nie były między ſobą przeciwné, wyrazić można przez Algebraiczné zrównanie. Idzie tylko o dwie rzeczy, naprzód: aby ilość przedſiewzięta nie była nad to zawikłana dla uwag geometrycznych; powtóre: aby doſtrzec związku zachodzącego między okolicznościami zadania: częſtokroć niedoſtatek tamtey kondycyi zaſłania przed rozumem naſzym tén oſtatni śrzodek wynalezieniá tego, cośmy ſobie zadali.

Linie Geometryczne ſą ilościami barzo proſtemi; wſzyſtkie więc ich właſności możemy wyrazić w zrównaniu algebraicznem. Wſzakże Geometrya początkowa porównywa iedne figury z drugiemi, s porównywania rodzi ſię zrównanie, które zawiera w krótkości te związki, któreśmy między figurami zważali. Kombinacya tych związków z innemi, odkrywa nowe inne, a te znowu oſtatnie odſłaniaią świeże prawdy wypadaiące s pierwſzych: tak dalece, iż przerabiaiąc, wiążąc własności linii, figur, i ciał geometrycznych, przyſzlibyśmy do wyrażenia wſzyſtkich prawd geometryi elementarney przez znaki ogólne, gdyby to nie było z więkſzym dla rozumu naſzego pożytkiem zoſtawić tak proſte ſtóſunki ſamemu działaniu duſzy, a rozumowanie przez znaki ſymboliczne zawikleyſzym związkom i dociekaniom zachować. Zgadzamy ſię więc s całą rzeſzą gorliwych o ćwiczenie rozumu ludzkiego Geometrów, że ſpoſoby uważania, dowodzenia i porównywania ilości rościągłey, w barzo gruntownem i ściſłem świetle podane od ſtarożytności należy przy ſwey całości w geometryi początkowey utrzymać. Ale chcąc naſze kombinacye do odległeyſzey ogólności wynieść, przedrzyć ſię w ſtraſznie zawikłane Figur trudnieyſzych związki, które w ſtarożytności ſamym tylko extraordynaryinym były doſtępne rozumom, chcąc ułatwić niezmiernie zawaloną drogę dociekań w głębſzey geometryi, i uczynić ſobie naywyżſze prawdy doſtępnieyſzemi; trzeba było koniecznie weſprzeć rozum ludzki ogólnemi znakami, natrafić na ſzczęśliwą zręczność ſtóſowania rachunku do Figur. Tę przyſługę winniśmy nieśmiertelney przenikłości *Des-Carta* która ſtała ſię razem zrzodłem rozległey ſławy dla ſwego wynalazcy, i nayſzczęśliwſzych dociekań dla iego naſtępców. Zapomniymy na moment o ſpoſobie *Des-Carta*, abyśmy ſię ſami poſtawili w okoliczności pierwſzych wynalazców.

Chcąc znaczenia algebraiczne do geometryi przenieść, roſtrząſnąć nam należy wſzyſtkie wyrazy w ſkład zrównania wchodzące, i ſzukać im odpowiadaiących w geometryi znaków. Zważaliśmy w algebrze różnego rodzaiu funkcye, s tych powſtaiące różnych ſtopni i gatunków zrównania. W funkcyach naprzód różniliśmy zawſze ilości znané od nieznanych: teraz chcąc rosſzerzyć daley ten podział dla tego, że naypierwſzą ieſt w geometryi rzeczą porównywanie między ſobą ilości, włożémy na mieyſce znanych i nieznanych, ilości ſtateczné i odmienné, które iako wiémy też ſamé maią znaki. Wziąwſzy więc linią proſtą pewney iakiey nieodmienney wielkości, możémy przez nię reprezentować iakąkolwiek ilość ſtateczną: ilości zaś odmienne wyrażémy barzo dobrze przez linią nieoznaczoną RS. od któréy taką możémy odciąć cząſtkę, iaka nam ſię tylko podoba, a zatém iako n. p. x może zawierać wſzyſtkie iakiekolwiek oznaczone wartości, tak linia RS, wyrażać może wſzyſtkie iakiekolwiek podziały. Takowe podziały nazywać będziémy ODCINKAMI (*Absciſsae*), które będa wyrażać pewne oznaczoné wartości ilości odmienney x. Aże linia RS nie ma żadney określoney wielkości, ucinki takowe brać ſię mogą od A na obydwie ſtrony. Mieyſce A nazywać będziemy POCZATKIEM ODCINKÓW (*Initium Absciſsarum*): odcinki zaś z iedney ſtrony A brać będziemy za *dodatne*, a z drugiey ſtrony za *odiemne*. Iako mieyſce A, tak ſtrona odcinków dodatnych zależy od upodobania, byleby obráwſzy iednę ſtronę za dodatną, drugą iey przeciwną wziąść za ſtronę odcinków odiemnych.

Znaczenia algebraiczne wyłożone w liniach geometrycznych.

Figura 1.

Odmieniwſzy funkcyą na zrównanie w któreyby nie było tylko x i ilości ſtateczne, x przeſtaie bydź ilością odmienną. Chcąc więc dochować x właſności odmienney, potrzeba koniecznie w zrównaniu mieć dwie ilości odmienne x,y; tak, żeby pewna funkcya x, była równą pewney funkcyi y. W ten czas bowiem obydwie zoſtaną ſię przy ſwym charakterze odmiennosci iako wiémy s teoryi pytań nieoznaczonych. Tu otwiera nam ſię niezmierne pole dociekań, ile bowiem wymyślić ſię może gatunków funkcyi x, y, tyle nam wypadnie kombinacyi. Każda s tych kombinacyi będzie zrzódłem nowych związków między ilościami, którym odpowiadaią nowe w geometryi znaczenia. Idzie tylko o ſpoſób wyrażenia tych znaczeń; zaczniymy od nayprościeyſzych. Ieżeli y będzie pewną funkcyą x; każdey wartości x, powinna odpowiadać pewna wartość na y. Wyrażémy tę wartość przez linią proſtą poſtawioną na ucinkach linii RS, tak n.p. że ieżeli $x=AP$, y będzie miało wartość wyrażoną przez PM; ieżeli $x=AQ$, $y=QN$, ieżeli $x=o$, $y=AB$. takowe linie AB, PM; i t.d. odpowiadaiące wartościom pewnym odcinków nazywać zawſze będziemy **PRZYSTAWAMI** (*Applicatae, ordinatae*); które będą równo-ległe linii proſtey AB, uważaiąc ią przeciągnioną na obydwie ſtrony RS, do iakieykolwiek bądź wielkości. Takowa linia będzie znowu linią przyſtaw; a iako pewne wielkości przyſtaw odpowiadaią pewney wartości odcinków z zrównania wyciągnionych, ſtawiane bydź powinny na tych mieyſcach linii RS, gdzie ſię kończą wartości nadane x. Ieżeli na y wypadać będą wartości dodatne, te będziemy kłaśdź nad linią RS; ieżeli zaś odiemne, te położemy pod linią AS. Może ſię zaś przytrafić, że odcinkom dodatnym będą odpowiadać przyſtawy dodatne albo przyſtawy odiemne: powtóre odcinki będąc odiemne, przyſtawy wypadną odiemne albo dodatne. W pierwſzym razie położémy ie nad AS, w drugim pod AS, w trzecim pod AR, a w czwartym nad AR, tak że n.p. PM ieſt przyſtawą dodatną, rb przyſtawą odiemną, należące obydwie do odcinków dodatnych: przeciwnie rn ieſt przyſtawą dodatną, a pm przyſtawą odiemną odpowiadaiące obydwie odcinkom odiemnym.

Nie potrzeba nam ſię o tem oſtrzegać, że ilość większa lub mnieyſza przyſtaw AB, PM, QN, i t.d. zawiſła od funkcyi y. Rzecz bowiem oczywiſta że zrównanie zawieraiące związek między x, y, zawierá razém ſtóſunek między odcinkami i przyſtawami, które odtąd razem brane nazywać będziemy WSPÓŁUSZYKOWANEMI (*Coordinatae*), ten ſtóſunek ieſt prawem, podług którego układaią ſię wartości przyſtaw z wartości odcinków tak, że ich wzroſt lub ubywanie, ieſt zawſze iednoſtaynym wypadkiem pewnego między x, y prawa w zrównaniu zawartego. Ciągnąc podług takowego prawa ſzereg przyſtaw odpowiadaiący ſzeregowi odcinków, a ścigaiąc punkt B, widzemy, że on przenoſząc ſię na różne mieyſca, zoſtawia po ſobie ślad nowey linii proſtey lub krzywey, którey natura i poſtać zawiſła od związku między x, y: i tak przypuśćmy że linia proſta na figurze 2. lub linia krzywa na figurze 3. ieſt odryſowana podług zrównania pierwſzego ſtopnia między dwiema odmiennemi x, y; w tem zrównaniu odmieniaiąc x, czyli AP, odmieniać ſię będzie y, czyli PM; i idąc po wſzyſtkich punktach linii RS, począwſzy od A, znaydziemy przyſtawy tym odcinkom odpowiadaiące i naznaczaiące mieyſce, przez które linia proſta BMN, lub krzywa EBM, przechodzi: właśnie iak gdyby punkt B, ruſzywſzy ſię ſzedł do M, prowadzony przez przyſtawę PM, odmieniaiąc na każdym mieyſcu ſwoie kierowanie tak, iak PM, ſwoię wielkość odmienia; w tym biegu opiſze punkt B linią proſtą lub krzywą BM, odmieniaiąc ſwoie położenie podług prawa zamkniętego w zrównaniu, którem ſię związek wſpół-uſzykowanych, w nim zaś natura linii krzywey wyraża. Widzemy więc że uwagi naſze zgadzaią ſię zupełnie s ſpoſobem dawnych Geometrów, którzy ſobie wyſtawiali linie krzywe, iako opiſane biegiem punktu w każdym momencie ſwe położenie odmieniaiącego; lubo uwagi naſze daleko ſą prościeyſze i ogólnieyſze, iak ſię niżey przekonamy.

Figura 2. 3.

Każdy pierwiaſtek zrównania wyrażaiącego linią EBM, daie nam ieden punkt linii krzywey, bo nam daie mieyſce, w którem przyſtawa też linią krzywą przecina: aże zrównanie pierwſzego ſtopnia, podług którégo wyſtawiliśmy ſobie linią *EBM* odryſowaną, powinno koniecznie mieć ieden pierwiaſtek rzetelny; nie może bydź żadney wartości na x, któreyby nie odpowiadała wartość na y; przeto na linii *RS*, niemaſz żadnego mieyſca, s któregoby wyſtawiona przyſtawa nie przecinała linii krzywey: a iako x naznaczać możémy nieſkończoną liczbę wartości, tak będzie nieſkończona liczba przyſtaw idących i przecinaiących raz linią krzywą; to ieſt *PM*, odmieniaiąc ſwoię wielkość póydzie po linii *RS* w nieſkończoną odległość, i linia krzywa rosciągnie ſwóy łuk bez końca, który nazywać będziemy ODNOGĄ NIESKONCZONĄ linii krzywey (*Ramus curvae infinitus*), rosciągnie ſię zaś bez końca na dwié ſtrony, to ieſt na ſtronę *AR* i na ſtronę *AS*, gdyż za x, możémy kłaśdź wartości dodatné i odiemne. Ieżeli na wſzyſtkie wartości dodatné x, będą wypadać przyſtawy dodatné; cała odnoga nieſkończona linii krzywey będzie leżyć nad linią *AS*: ieżeli zaś na wſzyſtkie wartości dodatne x, wypadać będą przyſtawy odiemne, ponieważ ułożyliśmy ie ſtawiać pod *AS*; cała odnoga linii krzywey będzie leżyć pod *AS*. Ieżeli zaś na odcinki dodatne x, wypadać będą wartości na y, naprzód dodatné a potem odiemné; ponieważ podług §. XVI. Algebry nie może $+y$ ſtać ſię $-y$, póki wprzód nie ſtanie ſię $y=o$, więc będzie między wartościami $+x$, iedna, która uczyni $y=o$, i w tém mieyſcu linia krzywa przetnie oś, iak n. p. w mieyſcu O, a przéſzedłſzy pod nię rosciągnie ſię bez końca, ieżeli iuż odtąd na $+x$, będą bez końca wypadać przyſtawy odiemné: ieżeli zaś znowu po pewney liczbie wartości, $-y$ ſtanie ſię $+y$, więc znowu linia krzywa przetnie drugi raz oś, i przenieſie ſię nad linią *RS*. To cośmy mówili o wartościach $+x$ ſłuży także na $-x$, to ieſt: że ieżeli z $-x$, wypadać zawſze będą y dodatne, cała odnoga nieſkończona linii krzywey leżyć będzie nad *AR*; będzie zaś leżyć pod *AR*, ieżeli $-x$ uczyni wſzyſtkie y odiemne: ieżeli nakoniec $-x$, czynić będzie

dzie *y* czaſém dodatne, a czaſem odiemne, linia krzywa przecinaiąc oś, przenoſić ſię będzie, raz nad, a drugi raz pod *AR*. Te wſzyſtkie właſności wyciągnyliśmy z uwag nad zrównaniem ſtóſowanych do znaczeń geometrycznych: inne iakiekolwiek zrównania podobnie roſtrząſaiąc wyciągniemy z nich różnego rodzaiu, i różney figury linie krzywé. Przeto każde zrównanie między dwiema iakiemikolwiek odmiennemi ilościami, uważać możemy, iako wyrażaiące naturę pewney linii proſtey lub krzywey przywiązaney do prawa między wſpół-uſzykowanemi w zrównaniu zamkniętego: i znowu przeciwnie każdą linią geometryczną proſtą lub krzywą odryſowana podług iakiego prawa, zważać możemy iako wyraz graficzny pewnego zrównania takowe prawo zamykaiącego. Ieżeli cała linia odryſowana ieſt podług iednego prawa, albo co na iedno wyńdzie podług tegóż ſamego zrównania, nazywa ſię linią CIĄGŁĄ (*Continua*), a prawo iey naturę wyrażaiące nazywa ſię PRAWEM CIĄGŁOŚCI (*Lex continuitatis*); ieżeli zaś linia ieſt tak odryſowaną, że iey porcye należą do różnych zrównań, iaką bydź może linia za poſunieniem piora odryta, złożona z ułomków częścią proſtych, częścią krzywych, takowa linia zowie ſię RÓŻNO-CIĄGŁĄ, NIEFOREMNĄ (*Diſcontinua, irregularis*). Wſzyſtkie linie, które w geometryi uważać ſię zwykły, ſą ciągłemi, odrytemi podług prawa ciągłości w zrównaniu wyrażonego, tak n.p. linia krzywa na figurze 3. *mEBMO*, ieſt linią ciągłą, ieżeli w niey każda przyſtawa ieſt funkcyą tąż ſamą odcinku wyrażoną przez iakie zrównanie. Prawda że J. P. Euler naypierwſzy wprowadził do geometryi linie nawet nieforemne, co wiele narobiło między Geometrami ſprzeczki, ale to ieſzcze nie czas dla nas o tym mówić. Doſyć nam teraz wiedziec, że wſzyſtkie linie, które będą przedmiotami naſzey uwagi w ciągu teraźnieyſzey nauki będą ciągłemi. Linią *RS*, na którey ſię rachuią odcinki nazywać będziemy OSIĄ albo

KIEROWNICĄ (*Axis, Directrix*). Mówiąc o odcinkach i przyſtawach razém, ułożyliśmy ſobie nazywać ié wſpół-uſzykowanemi: ieżeli przyſtawy będą ſtać proſto-padle na osi czyniąc kąt proſty z odcinkami, nazywać ié będziémy WSPÓŁ-USZYKOWANEMI PIONOWEMI (*Coordinatae orthogonales, normales*), ieżeli zaś ſtać będą pochyło czyniąc kąt ukośny, nazwiemy ié UKOŚNEMI (*Coordinatae obliquangulae*).

S tych ogólnych uwág wypáda ten ſám podział linii, na któryśmy rozebrali funkcye w pierwſzym Tomie. Ieżeli *y* będzie takową funkcyą *x*, którą można w zrównaniu algebraicznem zupełnie zawrzeć; linia takowém zrównaniem oznaczona zwać ſię będzie ALGEBRAICZNĄ (*Curva Algebraica*). Ieżeli zaś *y* będzie funkcyą *x* taką, iż iey pierwiaſtków i wartości niepodobna ieſt w zrównaniu ogarnąć, nazwiemy ią PRZESTĘPNĄ (*Curva Tranſcendens*). Pierwſzy rodzay nazywaią niektórzy GEOMETRYCZNYM, oſtatni MECHANICZNYM. (*Curvae Geometricae, Mechanicae*). Ten atoli ogólny linii podział, zawierać w ſobie będzie ſzczególnieyſzé rozłożenia, wypadaiące s podziału zrównań i funkcyi co do wymiarów, i co do liczby ilości odmiennych.

§. II.

Włáſności linii krzywych wyciągnioné z natury zrównán.

Wniydźmy iuż w ſzczegolnieyſzé rozbiory linii, i zrównań. Zważaliśmy w pierwſzey Części funkcye wyrażaiącé iednę tylko lub kilka na raz wartości ilości odmienney; to ieſt: że *y* może bydź taką funkcyą *x*, iż iey albo iedna tylko, albo kilka na ráz odpowiada wartości, podług znaku pierwiaſtkówego położonégo przed *y*: wiémy bowiem że znaki pierwiaſtkowé wyrażaiąc kilka na raz wartości ſą wątpliwemi. Nazwaliśmy takowé funkcye z J. P. Eulerem IEDNO-KSZTAŁTNE, DWÓ-KSZTAŁTNE, KILKO-KSZTAŁTNE, (*Functiones Uniformes, Biformes, Multiformes*), podług wykładnika znaku pierwiaſtkowego którym ieſt naznaczone *y*: a w znaczeniu Geometrycznem wypada, że ieżeli *y* będzie funkcyą iednó-

kſztaltną

kſztałtną x, na ten czas każdemu odcinkowi x, iedna tylko będzie odpowiadać przyſtawa: biorąc za x wſzyſtkie wartości dodatne i odiemne od 0 aż do $\pm\frac{1}{0}$, otrzymamy tyleż przyſtaw; zatem linia krzywa takowem zrównaniem wyrażona rosciągnie ſię bez końca na obydwie ſtrony osi RS: taką linią reprezentować może (Fig.3). właſność zaś ta ſłużyć będzie ogólnie wſzyſtkim liniom, których zrównania nie będą zawierać żadnego znaku pierwiaſtkowego, iakośmy to iuż w §. 1. obſzernie wyłożyli.

Fig. 4.

Ieżeli zaś y będzie funkcyą dwó-kſztałtną x, iaką zamyka zrównanie $y^2=2Py-Q$, czyli $y=P\pm\sqrt{(P^2-Q)}$ gdzie P i Q ſą funkcyami iedno-kſztałtnemi x; na ten czas każdey wartości x będą odpowiadać dwie przyſtawy, obydwie rzetelne ieżeli $P^2>Q$; lub obydwie uroione, ieżeli $P^2<Q$: tak n.p. biorąc $x=+AP$, otrzymamy na y PM, PM; znowu $x=-AP$, będzie $y=Pm$, Pm; ieżeli $P^2>Q$ linia krzywa takowem zrównaniem opiſana będzie przechodzić przez te przyſtawy; ieżeli zaś $P^2<Q$ linia tamtędy nie przeydzie. Ale będąc $P^2>Q$, nie może ſię odmienić na $P^2<Q$ póki wprzód nie przeydzie przez śrzodkuiący ſtan $P^2=Q$, i na ten czas $y=P\pm0$, a zatem obydwie przyſtawy na obydwóch ſtronach ſtaną ſię równemi, czyli zniydą ſię w iedno mieyſce, gdzie przyſtawa będzie ſtyczną linii krzywey, a punkt dotykania ſię będzie punktem dwoiſtym, iakim ieſt w mieyſcach n.p. C,G. Przechodząc iuż za ten ſtan, wſzyſtkie wartości y ſą uroionemi; więc za punkt dotykania ſię linia nie przeſtępuie, ale od niego zwraca ſię nazad. Ieżeli zaś za C znayduie ſię mieyſce przyſtaw uroionych; i znowu za G ku prawey idąc ſtronie, mieyſce przyſtaw rzetelnych; idzie zatem, że zmnieyſzaiąc wartość odcinku $-x$, czyli pomykaiąc ſię od G ku A, wpadniemy na krainę przyſtaw uroionych, gdzie ſię muſi ſkończyć odnoga linii krzywey idącey od G, a zacząć ſię granica uroionych przyſtaw, przez które linia krzywa nie przechodzi: przeto znowu w

tamtém mieyſcu, y będzie przechodzić s ſtanu rzetelnego na uroiony przez $P^2=Q$, i przyſtawa będzie ſtyczną, od którey linia krzywa cofnie ſię nazad. Na ten czas linia będzie miała dwie odnogi od ſiebie oderwane $MBDB$, $FmHm$, które będą należyć do iedney linii krzywey, ponieważ obydwie wypadaią z iedney funkcyi.

Takowe oderwane odnogi co do ſwéy poſtaci i liczby zawiſły od zrównania $P^2-Q=o$. Ile bowiem zrównanie to zamyka pierwiaſtków, tyle ieſt mieyſc na osi, gdzie przyſtawa dotyka ſię linii krzywey, i pokazuie, zwracanie ſię odnogi od ſwey ſtyczney. Te pierwiaſtki albo ſą równe albo nierówne: w pierwſzym przypadku pokazuią że dwie ſtyczne ſchodzą ſię; które ieżeli przedtem zamykały między ſobą odnogę linii krzywey iakie ſą na fig. 4. GH, FE; ſzedłſzy ſię razem, odnoga ta zamienia ſię w punkt nazwany PUNKTEM SPRZĘŻONYM (*Punctum conjugatum.*) Ieżeli zaś dwie takowe ſtyczne zamykały mieyſce przyſtaw uroionych, iakie ſą FE, DC; ſzedłſzy ſię razem, odnoga HmF oderwana, złączy ſię z odnogą BDB i powſtanie s tąd węzeł, iaki nam wyraża na figurze punkt I, i linia krzywa ſtanie ſię na ten czas LINIĄ WĘZŁOWĄ (*Curva nodata*). W drugim przypadku, to ieſt: kiedy zrównanie $P^2-Q=o$ ma pierwiaſtki nierówne, każdy pierwiaſtek takowego zrównania pokaże nam mieyſce na osi, gdzie przyſtawa ſtawſzy ſię ſtyczną, znaczyć będzie odwrot linii krzywey, i iey odnogi oderwane.

Niech będzie y funkcyą tróy-kſztaltną x, zamkniętą w zrównaniu $y^3-Py^2+Qy-R=o$, gdzie P, Q, R, zamykaią x bez żadnego znaku pierwiaſtkowego Ieżeli zrównanie to zamyka wſzyſtkie trzy pierwiaſtki rzetelne, każdey wartości x będą odpowiada. Fig. 5. trzy wartości na y, i linia krzywa będzie trzy razy przecięta od przyſtawy iak n.p. na fig. 5. w mieyſcach M, M, M, chyba że dwa punkta znidą ſię razem iak n.p. przy D, i na ten czas przyſtawa ſtawſzy ſię ſtyczną,

czną, naznaczy punkt dwoiſty *D*. Ieżeli zaś zrównanie *3go* ſtopnia zamykać będzie dwa pierwiaſtki uroione, na ten czas przyſtawa w iednym tylko mieyſcu przecinać będzie linią krzywą, iak nam wyraża fig. *6*. to atoli przecięcie nigdy nie może uſtać, Fig. 6. dla tego że trzeci pierwiaſtek ſtać ſię nie może uroionym, i linia krzywa rosciągnie ſię bez końca z obydwóch ſtron początku odcinków: ieżeli trzy wartości na *y* będąc s początku rzetelne, ſtaną ſię potem uroionemi na *x* dodatne lub odiemne; linia krzywa przy *A* na fig. *6*. iako przy początku odcinków może mieć odnogę oderwaną iaką ieſt *BBE*. Natura iednak i poſtać tey odnogi, a zatem i poſtać ſamey linii krzywey nie może bydź znaną tylko przez rozwiązanie zrównania *3go* ſtopnia i roſtrząſanie natury iego pierwiaſtków. Wiemy z §.20. Algebry że wartość na *y* muſi zamykać w ſobie prócz znaku $\sqrt[3]{}$, znak ieſzcze $\sqrt{}$; pod tym oſtatnim znakiem zawarta funkcya, może mieć albo trzech mnożników nierównych i na ten czas pokazuie nam trzy mieyſca na osi znaczące odnogi oderwane: albo dwa mnożniki równe, które wyrażaiąc zniyście ſię dwóch ſtycznych, odkryią nam węzeł lub punkt ſprzężony podług mieyſca przyſtaw uroionych lub rzetelnych, między temi ſtycznemi zawartego: albo nakoniec wſzyſtkie trzy mnożniki tey funkcyi pod znakiem $\sqrt{}$, będą równe, i na ten czas wyrażaią zniyście ſię trzech ſtycznych razem. W tym oſtatnim przypadku powſtaie w linii krzywey **KONCZYSTOŚĆ** (*Cuſpis*), iaką ſobie łatwo wyſtawiemy na fig. 4. ieżeli odnogę *BDB* zamieniemy przy *I* na punkt ſprzężony. Wſzyſtkie te własności obiaśnią nam przykłady w dalſzym ciągu naſzey nauki. Uczyniwſzy w zrównaniu *3go* ſtopnia podanem $y^3=o$, zoſtanie ſię $Py^2-Qy+R=o$, to zrównanie nie przeſtanie ieſzcze wyrażać linii *3go* porządku; ieżeli *P*, *Q*, *R*, zamykaią *x* w ſtopniu *3cim*; na ten czas linia krzywa nie będzie tylko dwa razy przecinaną od przyſtawy, ieżeli obie wartości na *y* ſą rzetelné, ale będzie mogła bydź trzy razy przeciętą od linii proſtey, i te przecięcia okażą ſię w trzech wartościach na x, o czem mowić będziemy niżey.

Fig. 7.

Niech będzie y funkcyą czteró-kſztałtną x wyrażoną n.p. przez zrównanie $y^4-Py^3+Qy^2-Ry+S=o$. To że zamykać może albo wſzyſtkié cztéry pierwiaſtki rzetelné, albo wſzyſtkié uroioné, albo dwa rzetelné, a dwa uroioné; liniá krzywá takiém zrównaniém opiſaná może bydź albo w czterech, albo w dwóch punktach przeciętą od przyſtawy, albo w żadnym; iako widzieć możemy na fig. 7. Ieżeli pierwiaſtki zrównaniá podanego zacząwſzy bydź rzetelné, ſtaną ſię potém na zawſze uroionemi; liniá krzywá nie będzie mieć żadney odnogi nieſkończoney, ale ſię zamknie między dwiema ſtycznemi w mieyſcach przeyściá pierwiaſtków rzetelnych na uroioné. Uważaiąc zrównanie moment ten przeyściá wyrażaiącé, a razem naznaczaiącé mieyſce przyſtawie ſtyczney, uważaiąc ié mowię co do ſwych pierwiaſtków, równych lub nierównych, podobnie iak w poprzedzaiących przykładach, znaydziemy mieyſca przecięć na osi RS, liczbę odnóg oderwanych, węzły lub kończyſtość linii krzywey, co wſzyſtko lubo niżey zechcemy obſzerniey wyłożyć, nie ieſt iednak od rzeczy namienić o tych prawdach, któré s teraźnieyſzych uwag wypadaią.

Naprzód: że poznanie figury czyli ryſunku linii krzywey zależy od rozwiązaniá zrównaniá ią wyrażaiącego, i od roſtrząśnienia natury iego pierwiaſtków. A zatem im zrównanie linią krzywą wyrażaiącé ieſt wyżſzego ſtopnia, tém ieſt zawikleyſzé i trudnieyſzé poznanie iey ryſunku. Owſzem takowe poznanie kończy ſię na tych liniach, których zrównaniá ieſteśmy w ſtanie rozwiązać. Doſkonałość zatém geometryi, zawiſła całkiem od doſkonałości teoryi zrównań.

Powtóre: ryſunek linii krzywey okazuie ſię s prze-

cięcia

cięciá iéy od linii proſtey, to zas przecięcie co do mieyſca, liczby, i gatunku, wypádá z liczby i gatunku pierwiaſtków. Ieżeli y ieſt funkcyą wielokſztáłtną x daną przez zrównanie ſtopnia n; każdey wartości x będzie odpowiadać wártości rzetelnych na y albo liczba n, albo $n-2$; $n-4$, - - - $n-k$; k będąc koniecznie liczbą párzyſtą. Każdá więc przyſtawa będzie przecinać linią krzywą w tylu punktach. Przypuśćmy n.p. że iedna przyſtawa przeciná linią krzywą w m mieyſcach; wſzyſtkié inné przyſtawy muſzą ią przecinać w tylu mieyſcach, ażeby liczba przecięć różniła ſię od m liczbą párzyſtą. Ieżeli więc raz liczba przecięć ieſt párzyſta, wſzyſtkié inné przecięciá linii krzywey od iakieykolwiek przyſtawy muſzą bydź w liczbie párzyſtey, gdzie rachowané bydź powinny punkta podwóyné, potroyne, i t. d.

Potrzecie. Przecięcie ciągłé i nieprzerwané nigdy linii krzywey od przyſtawy, pokazuie odnogi nieſkończoné. To zaś przecięcie ſkutkiem ieſt pierwiaſtków rzetelnych w zrównaniu nie mogących ſię nigdy ſtać uroionemi. Zrównaniá więc nie mogącé nigdy mieć wſzyſtkich pierwiaſtków uroionych, czyli zrównaniá ſtopni niepárzyſtych wyrażaią linie krzywé maiącé koniecznie przynaymniey dwie odnogi nieſkończoné, iednę na ſtronie odcinków dodatnych, drugą na ſtronie odcinków odiemnych; dodaię *przynáymniey*; ponieważ bydź może więcey takowych odnóg, ieżeli pierwiaſtki wſzyſtkié lub kilka z nich ſą ſtatecznie we wſzyſtkich wártościach x rzetelnemi. S czego ſię zaraz oczywiście pokazuie, że linie krzywé wyrażoné zrównaniem ſtopniá parzyſtego mogą nie mieć żadney odnogi nieſkończoney; albo maiąc ie, liczba tych odnóg bydź muſi koniecznie párzyſtá: ta oſtatniá włáſność ſłuży liniom krzywym ſtopni niepárzyſtych, to ieſt: że liczba wſzyſtkich odnóg muſi bydź párzyſtá: a przeto nie może bydź żadna liniá krzywá, ktoráby miała iednę tylko odnogę nieſkończoną,

czoną, to ieſt ciągnącą ſię z iedney tylko ſtrony początku odcinków.

Ieżeli wartość przyſtawy z rozwiązania zrównania wypadaiąca będzie wyrażona przez ułomek n.p. $y=\frac{P}{Q}$, takowa przyſtawa ſtanie ſię nieſkończoną tyle razy, ile razy Q bedzie zero, co nam pokazuie nowy przypadek, że nawet wartości ſkończoney na x, może odpowiadać przyſtawa nieſkończona, co będąc właściwe ſamym liniom krzywym maiącym odnogi nieſkończone, należyć będzie roſtrząſanie takowych przypadków tam, gdzie o odnogach nieſkończonych linii krzywych przypadnie nam mowić.

S tych pierwſzych uwag nad liniami krzywemi wydobytych z natury zrównań, powinniśmy ſobie wnieść łatwo gatunek dociekań, które nas w dalſzym ciągu tey nauki maią zaprzątnąć. Nim do tych przyſtąpiemy, ſtaraymy ſię wprzód lepiey zrozumieć naturę i odmiany znaczeń geometrycznych.

§. III.

Oddzielenie rzeczy iſtotnych od arbitralnych wchodzących w zrównanie na linią krzywą iakąkolwiek.

W wſzyſtkich tych roſtrząſaniach, to ieſt tylko liniom krzywym iſtotne, że ich natura wyraża ſię przez związek między dwiema wſpół-uſzykowanemi w zrównaniu zawarty. Oprócz tego wiele barzo rzeczy wchodzi od upodobania zawiſłych, iako to: oś; iey położenie, początek odcinków: mieyſce wſpół-uſzykowanych dodatnych lub odiemnych; kąt nakoniec który między ſobą czynią odcinki s przyſtawami. Te wſzyſtkie rzeczy iako arbitralne mogą różnym podpadać odmianom; a zatem dadź zrównaniu wyrażaiącemu linią iaką, niezliczoną liczbę poſtaci, które przecięż natury linii przez to nie mogą uczynić odmienney. Iakże ſię tedy znaleśdź rozumowi naſzemu w śrzód tylu odmian, i rozeznać czyli z wielu zrównań wyſtawionych pod różną poſtacią, każde z oſobna wyraża tę ſamę linią co i drugie, lub inną? Widzemy że to zawiſło od ogolnego ogarnienia rzeczy. Zatrzymaymy ſię w ſzczególnosci nad

każdą

każda s tych odmian arbitralnych, a może tą drogą doydziemy do iakiey cechy, ſłużącey nam do rozeznawania zrównań, a zatem do ułatwienia zachodzącey trudności.

Odmienia ſię początek odcinków.

Zaczniymy od początku odcinków, i dáymy n. p. że rachuiąc ie naprzód od A. (Fig. 8.) chcemy ie potem rachować od D, iakże ſię naſze zrównanie w tym razie odmieni? Nazwiymy $DP(t)$, $AD(f)$, a będzie $x+f=t$, czyli $x=t-f$, tę wartość x, ſtóſowną do nowego początku odcinków, włożywſzy w podane zrównanie, otrzymamy zamiaſt związku między x, y; ten ſam związek między t, y; aże f brać może nieſkończoną liczbę wartości; zrównanie naſze przez tę ſamę różność odmienić ſię w niezliczone ſpoſoby może: ieżeli iednak maiąc dwa zrównania między ſobą na pozór różne, włożywſzy w iedno z nich za x, $t \pm f$; odmienię ie na drugie; mam prawo bydź pewnym, że takie zrównania obydwa wyrażaią tę ſamę linią, ale w każdem z nich odcinki poczynaią ſię w innem mieyſcu. Położyłem $t \pm f$, ponieważ ieżeli początek odcinków poſuwa ſię ku lewey ſtronie, wypadnie $x=t-f$; ieżeli zaś ku prawey będzie $x=t+f$.

Fig. 8.

Odmienia ſię wielkość przyſtaw.

Wyſtawmy ſobie teraz, że ſię przyſtawy odmieniaią, to ieſt: że PM zamieni ſię na $P'M$, albo $P''M$; chcąc tę nową kondycyą wprowadzić w zrównanie między x, y; przez P', lub P'' prowadzę oś rs równo-odległą pierwſzey; nazywam $A'A$, różnicę między nowemi i dawnemi przyſtawami (g); nową zaś przyſtawę $P'M$, albo $P''M$, (u); wypadnie więc $y \mp g=u$; czyli $y=u \pm g$; znak wyżſzy należy do P', niżſzy do P''; włożywſzy tę wartość za y w zrównanie, otrzymamy nowe między u, x, zamiaſt pierwſzego między x, y; w tem zrównaniu można ieſzcze dla tey iedney kondycyi różne czynić odmiany; dla tego że g mieć może różne iakiekolwiek wartości, ale te wſzyſtkie odmiany zoſtawią tę ſamę naturę linii; tak dalece: że ieżeli z dwóch zrównań

różnych

różnych na pozór, iedno potrafię zamienić na drugie, kładąc w niem za y, $u\pm g$; pewien ieſtem, że obydwa iednę wyrażaią linią, lecz każda z nich bierze różney wielkości przyſtawy.

Odmiana początku odcinków i przyſtaw razém.

Ieżeli zaś iak przyſtawy tak początek odcinków odmienia ſię razem n.p. że nie tylko PM odmieni ſię na $P'M$, ale i A' przenieſie ſię na D', na ten czas wyrażemy obydwie te kondycye w zrównaniu, położywſzy za x, $(t\pm f)$; a za y, $(u\pm g)$, a tak zrównanie między x, y, przerobiemy na inne między t, u; które tę ſamę linią będzie wyrażać co i pierwſze.

Odmiana osi pionowéy,

Przypuśćmy teraz że oś RS odmieni ſwoie mieyſce, i przenieſie ſię na $R'S'$ pionowo do pierwſzey, na ten czas $R'Q=PM$, $QM=R'P$. ieżeli n.p. R' było początkiem odcinków, w téy nowey odmianie dawne odcinki ſtaną ſię teraz przyſtawami, a dawne przyſtawy odmienią ſię na odcinki. Położywſzy więc w zrównaniu naſzem x za y, i y za x; wprowadzemy tę nową kondycyą, która nic w naturze linii nie odmieni. Ieżeli ieſzcze ſtrony wſpół-uſzykowanych dodatnych i odiemnych chcemy odmienić, tak n.p. że przerabiaiąc zrównanie na t, u; tę ſtronę która przed tem naznaczona była dla linii dodatnych, weźmiemy za ſtronę odiemnych; a ſtronę odiemnych przenieſiemy na ſtronę dodatnych; w tym przypadku nie należy tylko za t położyć $-t$; a za u, $-u$, a wſpomniona kondycya będzie wyrażona.

Oś pionowa przemienia ſię na ukośną.

Fig. 9.

Poydźmy iuż do zawikleyſzych odmian, i daymy że oś RS na fig. 9. przenieſła ſię na rs, przecinaiąc pierwſzą w początku odcinków, i czyniąc z nią kąt PAs, który nazwiemy ϕ, a utrzymawſzy ieſzcze tę kondycyą że wſpół-uſzykowane ſą pionowémi, iakże wyrażemy tę nową odmianę? Przypatrzmy ſię uwaga, że w tym ſtanie dawne wſpół-uſzykowane AP, PM, przemieniaią ſię na $AQ(t)$, $QM(u)$, prowadzone od tegoż ſamego punktu M, pionowo do nowey osi. Należy więc wyrazić x, y, przez funkcyą kąta ϕ, i przez te przybyſze lub uimki, którémi ſię powiękſzyła

kſzyła

kſzyła lub zmnieyſzyła która s wſpół-uſzykowanych AP, PM. Na ten koniec nazwiymy Wſt. φ, (m). Doſt. φ, (n). a wziąwſzy iedność za promień podług naſzego zwyczaiu; wypadnie $mm+nn=1$. Od P, pociągniymy pionową Pp rowno-ległą QM, drugą Pq, rowno-odległą rs. Będzie $Pp=AP.\text{Wſt}.\varphi=xm$; $Ap=x.\text{Doſt}.\varphi=xn$. A ponieważ kąt $PAs=$ kątowi $PMq=\varphi$; będzie $Pq=PM.\text{Wſt}.\varphi=ym$; $Mq=PM.\text{Doſt}.\varphi=yn$. Aże $AQ(t)=Ap-Pq=nx-ym$; $QM(u)=Mq+Qq=Mq+Pp=yn+xm$; przeto mamy: $t=nx-ym$; $u=yn+xm$. A s tąd $nt+mu=x$, - - - $nu-mt=y$. Włożywſzy więc w podane zrównanie za x,$(nt+mu)$; a za y, $(nu-mt)$, przerobiemy ie na inne do osi rs. Ieżeli rs przenieſie ſię nad RS, na ten czas kąt φ, będzie odiemnym, a zatem i iego wſtawa.

Zebranie wſzyſtkich poprzedzaiących odmian.

Chcąc ieſzcze ogólniey rzecz uważać, daymy że oś RS przemienia ſię na rs iako nam fig. 10. pokazuie, i że z osią początek odcinków przenoſi ſię na D, chcąc te nowe kondycye wciągnąć w zrównanie: od D ciągnę linią DL równo-ległą osi RS, a pytanie naſze zamknie poprzedzaiące odmiany, to ieſt: że w poprzedzaiącem działaniu x powiękſzy ſię wielkością $AD(f)$, a y wielkością $OP(g)$, przeto włożywſzy w poprzedzaiący wynalazek za x, $x+f$; a za y, $y+g$, wynaydziemy $u=yn+gn+xm+mf$ - - $t=xn+nf-ym-gm$, a s tąd wyciągniemy $x=nt+mu-f$; - - $y=nu-mt-g$, które wartości włożywſzy w podane iakie zrównanie, przerobiemy ie na inne, którego oś będzie ſię nachylać do pierwſzey kątem φ; i w którem iak przyſtawy tak odcinki będą inney wielkości, to iednak zrównanie nic w naturze linii nie odmieni. Wnieśmy ſobie łatwo, że takowe linii wyrażenie ieſt barzo ogólne, przypuściwſzy wſpół-uſzykowane pionowe, ponieważ ono zamyka w ſobie wſzyſtkie inne, iako lekka uwaga każdego o tem przekona. Powtóre że takowe zrównania, s

fig. 10.

których iedno przerabia ſię na drugie, wyrażaią też ſamę linią lubo pod inną poſtacią.

Wſpół-uſzykowane pionowe odmieniaią ſię na ukośne.

Ale ieſzcze chcąc uwagi naſze do nayogólnieyſzych przywieśdź początków, odmieńmy nawet i tę kondycyą że wſpół-uſzykowane ſą pionowemi, i wyſtawmy ſobie, że one ſię nachylaią do ſiebie kątem ψ. s tym warunkiem, że ten kąt ieſt ieden dla wſzyſtkich.

Fig. 8.

Dla iaśnieyſzego poięcia rzućmy okiem na fig. 8. i zadaymy ſobie do wynalezienia związek między AL i LM, nakłonionemi kątem ALM (ψ), zamiaſt AP i PM pionowych. W tym przypadku $AL=t$; - - $LM=u=\frac{y}{\text{Wſt.}\psi}$; $PL=\frac{y.\text{Doſt.}\psi}{\text{Wſt.}\psi}=u\text{Doſt.}\psi$; a nazwawſzy $\text{Wſt.}\psi$, (p); $\text{Doſt.}\psi$, (q); będzie $u=\frac{y}{p}$; - - $t=x+uq$; zaczem $y=pu$; $x=t-uq$; włożywſzy te wartości na mieyſce x, y, w podane zrównanie, przerobiemy ie na inne, które wyrażać będzie naturę linii krzywey, przez wſpół-uſzykowane nakłonione do ſiebie kątem ψ. I przeciwnie: maiąc zrównanie między t, u, wſpół-uſzykowanemi nakłonionemi do ſiebie kątem ψ, włożywſzy na mieyſce t; $(x+\frac{yq}{p})$, a na mieyſce u, $(\frac{y}{p})$; przerobiemy ie na inne między x,y, wſpół-uſzykowanemi pionowo, zoſtawiwſzy tę ſamę oś i ten ſam odcinków początek.

S wſzyſtkich poprzedzaiących odmian wyciąga ſię zrównanie nayogólnieyſzé na linie.

Fig. 10.

Na koniec odmieńmy ieſzcze to wſzyſtko, i wziąwſzy na fig. 10. za początek odcinków D; oś iakąkolwiek rs; dwie wſpół-uſzykowane $DT(r)$, $TM(z)$ pochyłe kątem $DTM(\psi)$; ſzukaymy wartości x, y, w funkcyach dwóch kątow i nowych przybyſzów. Na ten koniec od D do osi RS, wynoſzę linią pionową DG, którą nazywam g; $AG(f)$. Od D wiodę linią DL równo-odległą RS: kąt QDL nazywam ϕ; iego

Wſtawę

Wſtawę (m), Doſtawę (n), *Wſt.* ψ, (a); *Doſt.* ψ, (b). Od M do nowey osi ſpuſzczam pionową $MQ(u)$, $DQ(t)$. Mamy s poprzedzaiących wynalazków - - $x=nt+mu-f$, - - $y=nu-mt-g$, teraz zaś $QT=\frac{ub}{a}$, $TM(z)=\frac{u}{a}$; $DT(r)=DQ+QT=t+\frac{ub}{a}=t+bz$. Więc $t=r-bz$ - - $u=az$. Włożywſzy te wartości na t,u, w zrównania wyżey wyrażone na x, y, wypada: - - $x=nr-(nb-ma)z-f$; - - $y=-mr+(na+mb)z-g$; gdzie $nb-ma=$ *Doſt.AVM*, $na+mb=$ *Wſt.AVM*; włożywſzy więc za x,y, te ich wartości w zrównanie podane, przerobiemy ie na zrównanie nayogólnieyſze linii krzywey, ponieważ to nie ieſt przywiązane do żadnego ſzczególnego warunku, ale ie wſzyſtkie w ſobie zawiera.

Te ſame ſpoſoby ſłużą nam do nayogólnieyſzego zrównania linii proſtey. Niech będą dwie linie proſte rownó-ległe na figurze 11. RS, MN, wſzyſtkie przyſtawy PM, będą ſobie równe, a zatem zrównanie $y=c$: chcąc ie przerobić na zrównanie ogólne do osi rs, mam s poprzedzaiących wynalazków $y=nu-mt-g$, czyli $nu-mt-g-c=0$. A chcąc ieſzcze wſpółuſzykowane mieć ukośne; kładę za t, $r-zb$; za u, az; i wypada $(na+mb)z-mr-g-c=0$, a rozmnożywſzy ie przez ilość ſtateczną k dla tym ogólnieyſzego wyrazu, i nazwawſzy $kna+kmb=a'$, $-mk=b'$; $-k(g+c)=c'$, otrzymam: Fig. 11.

$$a'z+b'r+c'=0.$$

Zrównanie nayogólnieyſze na linią proſtą, które że ieſt 1go ſtopnia, idzie za tem, że wſzyſtkie zrównania 1go ſtopnia oznaczaią linią proſtą.

Weźmy za drugi przykład koło iako linia krzywą wiadomą z geometryi początkowey, a chcąc wynaleśdź punkt M, fig. 12. ſzukaymy związku między $AP=x$, i $PM=y$. Ten związek poddaie nam Geometrya *Euklideſa*, która nas uczy że PM ieſt śrzednią Fig. 12.

proporcyonalną między AP i PB: nazwiymy $AB=g$, będzie $PB=g-x$, a przeto:

$AP:PM::PM:PB$ to ieſt: $x::y::y:g-x$ s kąd wypada zrównanie na koło:

$$y^2=gx-x^2 \quad - \; - \; - \quad (\alpha)$$

chcemy naprzód poznać, czyli zrównanie $y^2=a^2-x^2$ wyraża także naturę koła: przenieśmy początek odcinków z A do śrzodka C, tak że CP będzie odcinkiem, który nazwiemy z, PM przyſtawą y; ponieważ $CP=CA-AP=\frac{1}{2}g-x=z$, będzie więc $x=\frac{1}{2}g-z$ włożywſzy tę wartość w (α) przerobiemy to zrównanie na $y^2=\frac{1}{4}g^2-z^2$, które ieſt takiem iak - - $y^2=a^2-x^2$ gdzie $a=\frac{1}{2}g$; więc zrównanie $y^2=a^2-x^2$ ieſt także zrównaniem na koło, w którem a ieſt promieniem, a początek odcinków wzięty w śrzodku C. Trudność więc naſza iuż ſię doſtatecznie ułatwiła. Maiąc kilka zrównań, a chcąc ſię przekonać, czyli te wſzyſtkie iednę linią krzywą wyrażaią, biorę za x, y, wartości wyciągnione s poprzedzaiących odmian, za pomocą których otrzymam zrównania pod wielu poſtaciami; potem naypodobnieyſze między ſobą równam co do każdego terminu, a s tąd wypadną mi zrównania ſzczególne na oznaczenie ilości f, g, m, n, i t. d. ſłużące; ieżeli tyle ich otrzymam ile mam nieoznaczonych ilości, i ieżeli nowe wſpółuſzykowane ſą w tymże ſtopniu co i dawne; pewien ieſtem, że zrównania moie należą do tey ſamey linii krzywey: s tą różnicą że w nich zachodzą odmiany odpowiadaiące wartościom wziętym za x,y.

§. IV.

S poprzedzaiących odmian wyciąga ſię iſtotny charakter zrównań służący za grunt do podziału linii na różne klaſsy.

Nauczyliśmy ſię iuż, że zrównanie na iakąkolwiek linią może ſię zamienić w niezliczone poſtaci, które nic nie odmieniaią w naturze ſamey linii: ale ieſzcze nie znamy pewnego charakteru, któryby nam za pierwſzem rzuceniem oka dał ſię przekonać, że zrównania należą do różnych linii. Łącząc początki geometryczne s początkami myślenia, powinniśmy ſię zaraz domyślić, że takowego charakteru należy nam upatrować w naturze funkcyi iako iedynem zrzodle naſzych dociekań. *Powtore:* że ten charakter tak iſtotny powinien był zoſtać nienaruſzonym przechodząc przez wſzyſtkie odmiany, które dopuścić może iakiekolwiek zrównanie; ieżeli natura linii w tych wſzyſtkich różnościach ieſt zupełnie ocalona. Oświeceni temi dwiema prawdami, wróćmy ſię uwagą do działań § poprzedzaiącego, a tam wpadnie nam zaraz w oczy, że przerabiaiąc na różne poſtaci różne zrównania, otrzymaliśmy w tych wſzyſtkich przemianach zawſze tenże ſam ſtopień między wſpół-uſzykowanémi, tak dalece: że każde zrównanie przebrane w inſzą poſtać, ani ſię przez to zniżyło, ani podnioſło do wyżſzego ſtopnia. S kąd mamy prawo upewnić ſię, że ſtopień zrównań ieſt iſtotną cechą oddzielaiącą ie iedne od drugich, tak dalece; że zrównania różnego ſtopnia, należą koniecznie do różnych linii krzywych. Ten naypewnieyſzy charakter obieramy ſobie z J. P. Eulerem za zaſadę klaſs, na które linie dzielić będziemy. Podziały takowe nazwiemy PORZĄDKAMI (*Ordines*). Do pierwſzego porządku należyć będą wſzyſtkie linie oznaczone zrównaniem *1go* ſtopnia między dwiema wſpół-uſzykowanemi x, y; iakiem ieſt zrównanie ogólne:

$$a+bx+cy=o:$$

które wiemy, że należy do linii proſtey: a zatem linia proſta zamknięta będzie w pierwſzym porządku, o którey nauka należy do geometryi początkowey, a przeto od teraźnieyſzego naſzego zamiaru daleka.

W drugim porządku będą linie zamknięte w zrównaniu nayogólnieyſzem *2go* ſtopnia między x, y: iakiém ieſt:

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=o.$$

do którego należą ſławne linie krzywe pod imieniem UCINKÓW OSTRO-KRĄGOWYCH (*Sectiones Conicae*).

Trzeci porządek zamknie wſzyſtkie linie oznaczone zrównaniem nayogólnieyſzem *3go* ſtopnia między x,y.

$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+ixy^2+ky^3=0$.

W czwartym porządku umieſzczemy linie zawarte w zrównaniu nayogólnieyſzem 4go ſtopnia.

$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+ixy^2+ky^3+lx^4+mx^3y+nx^2y^2+pxy^3+qy^4=0$.

Idąc tym ſpoſobem do wyżſzych porządków, potrzeba nam na każdy z nich podadź zrównanie zamykaiące naprzód x, y, w potędze temu porządkowi właściwey: powtóre wſzyſtkie kombinacye między x, y, w tymże ſtopniu, i wſzyſtkich innych które go poprzedzaią. A co na iedno wynidzie, że każdy porządek powinien zamykać w ſwem zrównaniu całe zrównanie porządku poprzedzaiącego, i oprocz tego terminy ze wſzyſtkiemi które tylko powſtać mogą mnogościami x, y, ſkładaiącemi potęgę porządku danego: tak n. p. zrównanie na porządek piąty, zamykać powinno całe zrównanie porządku czwartego, i oprócz tego terminy z mnogościami.

$$y^5,\ x^5,\ y^4x,\ x^4y,\ y^3x^2,\ x^3y^2.$$

każda s tych mnogości iak widzemy czyni potęgę piątą. Takowych przybyſzowych terminów do zrównania porządku poprzedzaiącego, liczba ieſt $n+1$; gdzie n znaczy wykładnika porządku podanego. Przeto liczba terminów wchodzących w zrównanie na iakikolwiek porządek n, wyrazić ſię może przez liczbę terminów porządków poprzedzaiących. Takowy wyraz zamyka ſzereg poſtępu arytmetycznego.

$$(n+1)+n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)$$
$$+(n-6)$$ i t. d.

Zbiór więc czyli ſumma tego ſzeregu da nam liczbę terminów wchodzących w zrównanie na linie porządku n. Tę ſummę wynaydziemy łatwo za pomocą zrównań (A), (B), w §. 47. Algebry, uczyniwſzy $a=n+1$, $u=0$, $b=-1$. a zrównanie naprzód (A) da nam liczbę terminów w ſzeregu, czyli

$x=\dfrac{-(n+2)}{-1}=n+2$, s czego za pomocą zrównania

(B)

(B) znáydziémy ſummę $s=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Zrównanie więc na linie porządku n, zamykać powinno terminów $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Łatwo ſobie każdy bez oſtrzeżeniá wnieſie, że chcąc ſądzić o ſtopniu zrównaniá, a zatem o porządku linii, którą wyrażá, należy ie wprzód oſwobodzić od znaku pierwiaſtkowego, ieżeli iaki zamyká, n.p. $y^2=\sqrt{ax+x^2}$: zdaie ſię bydź drugiego porządku; w rzeczy atoli ſamey wyrzuciwſzy znak pierwiaſtkowy, ieſt czwartego: $y^4=ax+x^2$.

§. V.

Przeſtrogi na zrównanie złożone, wynikaiące z mnożenia zrównań niżſzych ſtopni.

Zaſtanowiwſzy ſię nad ſtopniami zrównań, wpadnie podobno nie ieden z nas na tę myśl, że zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia może ſię ſkładać z zrównań ſtopni niżſzych iako ſwych mnożników, na które w takim przypadku możná ie rozebrać. Znalazłſzy takowych mnożników iednó-kſztaltnych, każdy z nich oznaczać będzie linią tego porządku, do którego należy. Złożywſzy ich więc znowu w iedno zrównanie, możeż s takiego ſkładu powſtać nowá linia ciągła wyżſzego porządku? Teoryá generalná zrównań w pierwſzey Części Algebry wyłożona i dobrze rozumem obięta, uczy nas, że to bydź nie może: że ieżeli zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia powſtało z mnożenia zrównań niżſzych ſtopni, nie rodzi ſię s tąd żadná nowá linia, ale to zrównanie ieſt ſkładem wſzyſtkich linii, wyrażonych przez niżſzé zrównanie, s których tamto powſtało: tak n.p. zrównanie 3go ſtopnia ieżeli powſtało z mnożenia zrównania 2go ſtopnia przez zrównanie 1go, i ieżeli pierwiaſtki w pierwſzem nie ſą uroione; każdey wartości x, będą odpowiadać trzy przyſtawy, s których dwie będą należyć do linii 2go porządku, a trzecia do linii pierwſzego. Ieżeli zaś powſtało z mnożenia trzech zrównań 1go ſtopnia; wſzyſtkie trzy przyſtawy należyć będą do linii proſtych. S tąd wypadaią dwa wnioſki barzo oczywiſte: *Naprzód:* że każde zrównanie wyrażaiące linią iednę ciągłą pewnego porządku, nie powinno bydź rozbieralne na żadne mnożniki iedno-kſztałtne wymierne, któreby ſkładać mogły zrównania oſobne na linie innych porządków. *Powtóre*: ieżeli które zrównanie może ſię rozebrać na takowych mnożników; nie wyraża linii tego porządku, który ieſt prsywiązany do iego ſtopnia; ale ieſt ſkładem tych wſzyſtkich linii niżſzych ſtopni, które pokazuią iego mnożniki, i dla tegoć to taki gatunek zrównań nazywa ſię SKŁADANYM (*Aequationes complexae*). Dorozumiewa ſię każdy, że tylko pierwſzy rodzay zrównań należyć może do naſzego zamiaru. Nie potrzeba nam ſię zaſtanawiać nad różnemi kombinacyami zrównań niżſzych ſtopni, s których powſtać może iakiekolwiek zrównanie ſkładane; wiemy bowiem że n.p. zrównanie *4go* ſtopnia, może powſtać albo z dwóch zrównań *2go* ſtopnia, albo z zrównania *3go*, przez zrównanie *1go* ſtopnia, albo s czterech zrównań *1go* i t.d. każdey s tych kombinacyi odpowiada inny zbiór linii.

§. VI.

Wykładaią ſię własności ogólne Linii każdego porządku.

Maiąc w pamięci początki wytłómaczone w §. 2. wiemy doſtatecznie, że nayiſtotnieyſzą własnością każdey linii krzywey iakiegokolwiek porządku ieſt przecinanie iey od linii próſtey; liczba takowych przecięć uczyłaby nas zawſze o ſtopniu zrównania wyrażaiącego te linią; gdyby wſzyſtkie iey pierwiaſtki były rzetelne, co do ilosci odmienney naywyżſzego wymiaru. W tem bowiem przypuſzczeniu zawſzeby przyſtawa przecinała raz linią *1go*, dwa razy linią *2go*, trzy razy linią *3go*, *n* razy linią *ngo* porządku. Ale że w zrównania wchodzić mogą w liczbie parzyſtey pierwiaſtki uroione, przeto liczba przecięć nie uczy nas więcey, iak tylko, że linia nie może bydź niżſzego porzadku nad ten, który wyraża liczba przecięć; ale czy nie ieſt wyżſzego

porządku

porządku nic nás nie uczy. Wiedząc n.p. że linia iaka może bydź w dwóch mieyſcach przeciętą od proſtey; pewni ieſteśmy, że ona nie może należyć do *1go* porządku; ale może należyć do któregokolwiek z wyżſzych. S tąd ieſzcze i to wnieść możemy, że linia iakiegokolwiek porządku *n*, nie może bydź więcey nad *n* razy przecięta od linii proſtey. Liczba takowych przecięć zmnieyſzyć ſię może albo dla pierwiaſtków uroionych, albo dla terminów braknących w zrównaniu. Ieżeli zrównanie podane zamyka terminy naywyżſzego wymiaru co do każdey z oſobna ilości odmienney, w linii takowem zrównaniem opiſaney nie może braknąć liczba przecięć tylko parzyſta: bo ten niedoſtatek wypada s pierwiaſtków uroionych, które ſię nie mogą znaydować tylko w liczbie parzyſtey. Ale ieżeli w zrównaniu na linią krzywą braknie terminów naywyżſzego wymiaru iedney ilości odmienney, liczba przecięć w takowey linii może braknąć parzyſta lub nie parzyſta, i tak n.p. dwa zrównania $y^2+ay+bx^2+cx^3+d=o$. - - $y+ax^3+dx^2+e=o$. wyrażaią dwie linie *3go* porządku, s których pierwſza dwa razy tylko bydź może przeciętą od y, a trzy razy, lub raz od x. Druga zaś, raz tylko bydź może przecięta od przyſtawy y, a trzy razy lub raz od osi; w obydwóch liczba przecięć od x, nie może braknać tylko parzyſta, ale liczba przecięć od y, w pierwſzey nieparzyſtá, a w drugiey parzyſta braknie.

Liczbę przecięć linii każdego porządku od linii proſtey, wyciągnąć możemy z iey zrównania, położywſzy $y=o$; tym bowiem ſpoſobem otrzymamy zrównanie tegóż ſamego ſtopnia na x; którego pierwiaſtki ieżeli będą wſzyſtkie rzetelne, odkryią nam mieyſca, w których linia przecina oś: ieżeli zaś będzie zamykać niektóre pierwiaſtki uroione, liczba przecięć tyle razy będzie mnieyſzá, ile ieſt pierwiaſtków uroionych. Ze zaś oś ieſt linią proſtą, którey położenie ieſt arbitralné; kładąc $y=o$ w zrównanie, prowadzemy oś przez te wſzyſtkie mieyſca, w których linia krzywa bydź może przecięta od proſtey.

Zoſtaie nam teraz roſtrząſnąć ilości ſtateczne, które wchodzą w wſpół-czynniki zrównań iakiegokolwiek ſtopnia. Wyrażaią one pewne mieyſca przywiązane do ich wartości ſzczególnych, przez które linia krzywa ma przechodzić; §. bowiem 3. oświecił nas, że różne wartości ilości ſtatecznych odmieniaią wielkość i położenie wſpół-uſzykowanych, a zatem przenoſzą punkta linii krzywych z iednego mieyſca na drugie, zoſtawiwſzy ie tylko przy tym ſamym związku który ieſt iſtotny. Chcąc więc linią iakiegokolwiek porządku przez pewne iakie mieyſca prowadzić, i do pewney iakiey osi ſtóſować, należy w zrównaniu wſpół-czynnikom ſtatecznym nieoznaczonym *a*, *b*, *c*, i t.d. pewne nadadź wartości przywiązane do tych mieyſc przez które ma linia przechodzić. Ze zaś zrównanie na linią porządku *n*, zamyka . - - - $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ terminów, a zatem tyleż wſpół-czynników nieoznaczonych; nadawſzy pewne wartości terminom $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$, oſtatni iuż przez to ſamo ſtaie ſię oznaczonem dla związku koniecznego s pierwſzemi zawartego w zrównaniu. Tak n.p. linia proſta ma trzech wſpół-czynników nieoznaczonych, s których nadawſzy dwóm pewną iaką wartość, trzeci iuż przez to ſamo weźmie oznaczenie wypadaiące z związku, który między niemi zachodzi. Te dwie wartości, naznaczą dwa punkta, przez które linia ma przechodzić; przeto do oznaczenia pewney linii proſtey potrzeba koniecznie dwóch punktów; prawda, którey nas geometrya początkowa naucza. Nie maiąc tylko ieden punkt, czyli iednego tylko wſpół-czynnika oznaczonego, linia zoſtaie nieoznaczoną; to ieſt: że przez ten punkt nieskończona liczba linii bydź może prowadzonych.

Zrównanie na linie 2go porządku potrzebuie pięciu pewnych wartości, czyli do oznaczenia pewney linii 2go porządku trzeba koniecznie pięć punktów, przez które iedna tylko a nie inſza linia 2go porządku może przechodzić; maiąc ich mniey, linia będzie nieoznaczona, i przez te punkta nieſkończona liczba linii 2go porządku może bydź prowadzona. Chcąc linią 3go porządku tak oznaczyć, aby ona przechodząc przez pewne mieyſca, żadna inna przez te ſame mieyſca nie mogła przechodzić, potrzeba do tego 9. punktów: maiąc ich mniey, przez nie, nieſkończona liczba linii 3go porządku bydź może prowadzona. Toż ſamo mowić o innych porządkach. W znaczeniu atoli wſzyſtkich punktów, to ieſt ſzczególnego, że zrównania odkrywaiące wartości pewne na wſpółczynniki *a*, *b*, *c*, i t.d. wſzyſtkie ſą 1go ſtopnia. A zatem żaden punkt, gdziekolwiek go obierzémy, nie może wypaśdź niepodobném. Ieżeli atoli więcey punktów leżeć będzie w proſt, niżeli bydź może przeciec w linii pewnego porządku, na ten czas wpadniemy na zrównanie złożone; tak n. p. gdyby w zrównaniu 2go ſtopnia 3. punkta były wproſt; ponieważ linia 2go porządku nie może bydź w trzech mieyſcach przecięta od proſtey; zrównanie naſze zamieni ſię na zrównanie złożone z dwóch linii proſtych.

§. VII.

Podobieńſtwo linii krzywych.

Uważać tylko linią krzywą iako mogącą przechodzić przez różne mieyſca, ieſt to iedno co uważać dwie wſpół-uſzykowane co do rożney wielkości, i co do różnego względem ſiebie położenia; między któremi iednak zachodzący ſtóſunek, i całkiem zawiſły od związku ilości w zrównaniu zawartych zoſtaie tén ſam; ieżeli zrównanie ieſt co do związku ilości nieodmienné. Takowa uwaga różnych położeń iedney linii krzywéy ciągnie za ſobą odmiane ilości ſtatecznych, to ieſt: że chcąc w różnych położeniach linią krzywą uważać, muſzemy ilości ſtateczne odmieniać: ieżeli te ilości odmieniaią ſię przez nadanie im co raz różney wartości; linia krzywa s tąd wypadaiacá nie odmieni ſwego porządku, ale może odmienić ſwóy gatunek z odmianą położenia: ieżeli zaś te ilości ſtateczne odmieniaią ſwoię wielkość dla tego tylko, że ſię odmienia iedność, czyli linia wzięta za miarę porównywania; linia krzywa w tym przypadku odmienia tylko ſwoię wielkość nie odmieniaiąc gatunku. I dla tego kiedy zrównanie na linią krzywą zamyka iednę tylko ilość ſtateczną ſłużącą za miarę różnych odmian w wſpół-uſzykowanych, odmieniaiąc tę ſtateczną ilość, wypadaią linie krzywe nie różniące ſię od ſiebie tylko położeniem i wielkością, które nazywać będziemy LINIAMI PODOBNEMI (*Curvae ſimiles*), n. p. zrównanie na koło $y^2=2ax-x^2$, zamyka ſam tylko promień a, który odmieniaiąc, otrzymamy koła różnych promieni miedzy ſobą podobne. Zrównanie na linią krzywą 3go porządku $y^3-2x^3+ay^2-ay^2x+2a^2y=0$ (G) maiąc także iednę tylko ilość ſtateczną, wyrażać będzie nieſkończoną liczbę linii między ſobą podobnych odmieniaiąc w niem a. Do zrozumienia dokładnieyſzego tych podobnych linii wyſtáwmy ſobie że fig. 13, 14, wyrażaią dwie linie krzywe między ſobą podobne i zamknięte w zrównaniu (G), w których AB, CD, ſą ilościami ſtatecznemi, a to ieſt, że Fig. 13. 14. $AB=a$ odmieniło ſię na $CD=\frac{a}{n}$, nazwawſzy $AP=x$, $PM=y$, będzie $CL=\frac{x}{n}$, $LN=\frac{y}{n}$, będzie więc $AP:CL=AB:CD=PM:LN$, to ieſt że będą ſię miały wſpół-uſzykowane w obydwóch tych liniach, iako ſię maią ich ilości ſtateczne AB, CD: i wſzyſtkie linie iakiekolwiek pod iednym kątem w obydwóch tych liniach prowadzone iako to n.p. MQ, MO, będą ſię miały iako $AB:CD$; ich zaś płaſzczyzny iako potęgi drugie tychże ilości ſtatecznych $AB^2:CD^2$.

W iednym

W iednym więc zrównaniu uważać możemy nieſkończoną liczbę takowych linii krzywych biorąc ilość ſtateczną za odmienną. Takową ſtateczną ilość ſłużącą do porównywania odmian w ſpół-uſzykowanych przybraną nazywać będziemy odtąd Linią równania (*Parameter*).

Tu iuż powinniśmy poznać drogę, którey nám ſię trzymać należy w ciągu teraźnieyſzey nauki. Uważać naſamprzód będziemy zrównania *różnych* ſtopni w całey ſwey ogólności, i s tąd wyciągać właſności powſzechné linii różnych porządków. Wprowadzaiąc potem w te zrównania warunki ſzczególné, wypadną nám różné gatunki linii krzywych w tym porządku ogarnioné. Te znowu ſzczególné zrównania oſobno roſtrząſané, odkryią nám właſności każdému gatunkowi ſzczególne.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Z uwág ogólnych nad zrównaniem 2go ſtopnia między dwiema ilościami odmiennémi, wyciągaią ſię właſności Linii krzywych 2go porządku: ſzczególné przypuſzczenia w zrównanie wprowadzoné, odkrywaią nám ſzczególné gatunki linii krzywych 2go porządku i właſności każdému gatunkowi ſłużącé.

§. VIII.

właſności cięciw.

Zrównanie nayogólnieyſzé 2go ſtopnia między dwiema odmiennemi ilościami x, y, nie mogącé ſię rozebrać na dwa proſté 1go ſtopnia, a przeto zamykaiącé w ſobie wſzyſtkie linie krzywe 2go porządku ieſt:

$$y^2+\frac{ex+c}{f}y+\frac{dx^2+bx+a}{f}=0 \quad - \ - \ - \quad (\alpha)$$

które

które uważać będziémy *naprzód* co do terminów znakomitych funkcyą iaką pierwiaſtków; ſtóſuiąc ié zaś do linii krzywey 2*go* porządku, doſtrzegać właſności z natury tych terminów wypadaiących, wprowadzać nakoniec będziémy odmiany w §. 3. wyliczone, i s tych nowe wydobywadź właſności. A iako natura linii krzywych poznaie ſię s pewnych ſtóſunków i związków dwóch linii proſtych, tak właſności różne tychże linii krzywych zależyć będą równie na pewnych właſnościach linii proſtych różnym ſpoſobem prowadzonych do linii krzywych: co zawſze pokazuie drogę analityczną prowadzącą rozum od rzeczy znanych do nieznanych.

Przypuściwſzy że fig. 15. wyſtawia nám linią krzywą 2*go* porządku opiſaną zrównaniem (α). Dlá Fig. 15. ogólnego poznania właſności takowey linii niech A będzie początkiem odcinków na osi AS; kąt wſpół-uſzykowanych ukośny; $AP=x$, $PM=y$. Ponieważ wſpół-czynnik 2*go* terminu zrównania (α) ieſt ſummą pierwiaſtków; będzie $PM+PN=-\frac{ex+c}{f}=-\frac{eAP+c}{f}$; $P'M'-P'N'=-\frac{eAP'+c}{f}$, od tego oſtatniégo zrównania odciągnąwſzy pierwſzé; otrzymámy $\frac{NQ+RM}{PP'}=\frac{e}{f}$. Stóſuiąc podobnie tó działanie do fig. 16. gdzie przyſtawy pádaią z obydwóch ſtron Fig. 16 osi, znáydziémy $\frac{MR-NQ}{PP'}=\frac{e}{f}$ to ieſt: że w każdey linii 2*go* porządku poprowadziwſzy dwie cięciwy ſobie rownołegłe, i od dwóch punktów linii krzywey leżących na iedney cięciwie, pociągnąwſzy linie równoległe osi, *Summa albo rożnica odległości ſpacznych dwóch punktow linii krzywey na drugiey cięciwie leżących, od tych rownoległych osi; má ſię do odcinku osi między cięciwami zawartego w ſtoſunku*

zawſze

Piérwſa właſność wyciągnioná z 2go terminu zrównaniá.

zawſze nieodmiennym: ſumma, kiedy cięciwy nie padaią obydwie z obydwóch ſtron osi, różnica zaś, gdy obydwie cięciwy znayduią ſię z obydwóch ſtron osi. Daymy teraz że cięciwa ſtanie ſię ſtyczną linii krzywey w mieyſcu C; punkta M, N zniydą ſię razém u C, i będzie znowu $\frac{CK-CI}{CP}=\frac{e}{f}$, $\frac{CK'-CI'}{CP'}=\frac{e}{f}$, a przeto $(CK-CI)CP'=(CK'-CI')CP$: ieżeli więc uczyniemy $CK-CI=o$, czyli $CK=CI$, będzie koniecznie; $CK'=CI'$, to ieſt: ieżeli od ſtyczney prowadzona linia proſta dzieli cięciwę równoległą ſtyczney na dwie części równe; ta ſama linia dzielić będzie wſzyſtkie inne cięciwy równoległe pierwſzey na dwie części równe: linia taka dzieląca wſzyſtkie cięciwy między ſobą rownoległe na dwie części równe, nazywa ſię SRZEDNICĄ linii drugiego porządku *(Diameter)*. Linia więc proſta równoległa cięciwóm na dwie części równe od śrzednicy przeciętym, prowadzona przez punkt linii krzywey na śrzednicy leżący, ieſt zawſze ſtyczną linii krzywey. S tey właſności wypada nam barzo proſty ſpoſob prowadzenia ſtycznych i śrzednic do iakiegokolwiek punktu linii 2*go* porządku. Niech będzie n.p. punkt dany E na linii krzywey, do którego prowadzić mi potrzeba ſtyczną; naryſowawſzy cięciwę VL, dzielę ią na dwie części równe $FV=FL$, przez dwa punkta E, F, prowadzona linia proſta będzie śrzednicą, a przez punkt E pociągniona linia równoległa cięciwie VL będzie ſtyczną linii 2*go* porządku. Ta ieſzcze właſność przekonywa nas, że wziawſzy w linii 2*go* porządku śrzednicę za oś, przyſtawy na niey poſtawione będąc między ſobą równe, z nich zaś iedna dodatna, druga odiemna; zbiór takowych przyſtaw będzie zero, a przeto w zrównaniu na linie 2*go* porządku ile razy śrzednica ieſt osią, wſpół-czynnik 2*go* terminu a z nim termin zamykaiący y zniknie:

i przecii przeciwnie ile razy zrównanie na linią 2*go* porządku nie ma drugiego terminu; w linii tey śrzednica ieſt wziętą za oś, cośmy iuż widzieli w kole pod §. 3.

Weźmy teraz trzeci do roſtrząſania termin w zrównaniu (α) ten będąc zawſze mnogością z dwóch pierwiaſtków; uczy nas, że na fig: 15. $PM.PN = \frac{dx^2+bx+a}{f}$. Drugi członek tego zrównania może

Fig. 15.

ſię ſkładać albo z dwóch pierwiaſtków rzetelnych, albo z dwóch uroionych; pierwſzy przypadek ma mieyſce kiedy oś przecina linią krzywą w dwóch mieyſcach; iakie ſą F, G; w tych bowiem mieyſcach $y = o$, a zatem $\frac{dx^2+bx+a}{f} = o$, zrównania tego pierwiaſtki ſą AF, AG; a przeto $\frac{dx^2+bx+a}{f} = \frac{d}{f}(x-AF)(x-AG) = \frac{d}{f} PF.PG$, s kąd wypada znowu $\frac{PM.PN}{PF.PG} = \frac{d}{f}$ ſtóſunek nieodmienny w każdey linii 2*go* porzadku. Aże równie $\frac{P'M'.P'N'}{P'F.P'G} = \frac{d}{f}$, więc

$$PM.PN:PF.PG = P'M'.P'N':P'F.P'G$$

bedzie więc na fig: 17. gdzie PD ieſt osią iaką dopiero była PG, OQ zaś iey równo-legła, będzie mówię:

Fig. 17.

$$OT.TQ:TM.TN = GC.GD:GI.GH = FI.FH:FO.FQ,$$

to ieſt: że w każdey linii, drugiego porządku dwie cieciwy przecinaiące ſię, czynią ſtoſunek nieodmienny mnogości z dwóch odcinków, do mnogości z drugich dwóch odcinków.

Druga właſność cięciw wydobyta z oſtatniego terminu zrównania.

Wyſtawmy ſobie teraz że PM przenioſło ſię na PR, i punkta M, N, ſzedłſzy ſię razem uczyniły $PM = PN = PR$, z dopiero dowiedzioney właſności wypada że

$$PR^2:PC.PD = \frac{d}{f};\ SR^2:SL.SK = \frac{d}{f},$$ a zatem

PR^2:

$$PR^2:PC.PD=SR^2:SL.SK.$$

Przeciąwſzy dwie linie równo-ległé ſobie PD, i SK, w mieyſcach X, Z tak, żeby PX było śrzednią proporcyonalną między PC, i PD; SZ śrzednią proporcyonalną między SL i SK; podług tego warunku - - $PX^2=PC.PD$; $SZ^2=SL.SK$, a przeto

$$PR^2:PX^2=SR^2:SZ^2, \text{ czyli } PR:PX=SR:SZ$$

punkta więc X, i Z znayduią ſię na iedney linii RZ: co nam odkrywá nową właſność, to ieſt: ieżeli liniá od punktu dotknięciá R tak przetnie którą s cięciw, że PX będzie śrzednią proporcyonalną między PC i PD; wſzyſtkié inné cięciwy równo-ległé pierwſzey będą podobnie przecięté: znowu ieżeli PX, SZ będą śrzednie proporcyonalné między PC, PD; SL, SK; liniá przez dwa te mieyſca X, Z, przechodzącá przeydzie koniecznie przez punkt dotknięciá R.

Wróćmy ſię teraz do drugiey właſności cięciw, a ſtóſuiąc ią na fig. 16, do dwóch cięciw NM, CP, s których oſtatniá będąc śrzednicą, czyni $PM=PN$; będzie $PM^2:CP.PD=P'M'^2:P'C.P'D=\frac{e}{f}$; nazwáwſzy CD wziętą za oś, m; $CP=x$, $PM=y$; będzie Fig. 16.

$$PD=m-x; \text{ - - - } y^2=\frac{e}{f}(mx-x^2) \text{ - - - } (\beta)$$

nowé zrównanie na linie 2go porządku, w którém śrzednica ieſt osią, a punkt C początkiem odcinków.

Obierzmy ſobie teraz na fig: 18. cztery punkta, A, B, C, D, tak żeby cięciwy AB, CD, były równoległé, złączywſzy ié s ſobą, otrzymamy trapez $ABCD$. Weźmy do tego punkt piąty M, i przez ten prowadźmy cięciwę MN równo-ległą pierwſzym. Wiemy z geometryi początkowey, że gdyby śrzednica linii krzywey przecięła dwa boki trapezu AB, CD, na dwie części równe; będzie także podobnie przecinać im równo-legły PQ: powtóré taż śrzednica będzie także przecinać MN na dwie części równe, zaczem $MP=QN$, to ieſt: maiąc pięć punktów znanych w Fig. 18.

linii 2go porządku, mamy zaraz wiadomy ſzóſty. Prawda którąśmy iuż wyżey s kąd inąd poznali.

Druga właſność cięciw uczy nas: że $MP.MQ$ do $BQ.QD$ ieſt w ſtóſunku nieodmiennym: poprowadziwſzy więc przez punkt M,RS równo-ległą BD, będzie $MR=BQ$, $MS=QD$, a przeto $MP.MQ:MR.MS$ ſtóſunek nieodmienny na punkta przecięć P,Q,R,S, między równo-ległemi AB, MN, BD, RS. Obierzmy ieſzcze gdziekolwiek punkt O, a łącząc go s punktami A,B,D, otrzymamy trapez $ABDO$. Przez ten punkt poprowadzona GH równo-legła AB daie:

$$MP.MQ:MR.MS=OG.OH:BH.HD$$

S troykątów zaś podobnych APL, AGO, STD, DOH, i z właſności trapezu $ABGH$ mamy naſtępuiące proporcye:

$$AP:AG=PL:GO.$$

$AP:AG=BQ:BH$ z nich wypada $PL:BQ=GO:BH.$

MQ czyli $DS:ST=OH:DH.$

Przeto: $PL.MQ:ST.BQ=GO.OH:BH.HD.$

$$PL.MQ:ST.BQ=MP.QM:MR.MS.$$

$$(MP+PL)MQ:(MS+ST)MR=PM.MQ:MR.MS.$$

ponieważ, $MR=BQ$, $ML.MQ:MT.BQ=PM.MQ:MR.MS$

czyli $ML:MT=PM:MS.$

iakimkolwiek wiec ſpoſobem odmieniać ſię będzie punkt O, byleby punkt M był ſtały, i MQ, RS równo ległemi cięciwom AB, BD, będzie $ML:MT$ ſtóſunkiem nieodmiennym.

§. IX.

Wykładaią ſię właſności dalſzé śrzednic, i zrównaniá na ich oznaczenie.

Właſności cięciw przyprowadziły nas w §. poprzedzaiącym do poznania śrzednic w liniach 2go porządku. Użyimy teraz tych pierwſzych o śrzednicach wiadomości naprzod do wynaydowania zrównań oznaczaiących położenie i wielkość śrzednicy iakieykolwiek: powtóre do odkrycia ich właſności zawikleyſzych. Niech będzie na fig. 19. GI śrzednica linii 2go porządku, wziąwſzy AH za os będzie

Fig. 19.

$LM=LN$, a zatém $PL=\frac{PM+PN}{2}=\frac{-ex-c}{2f}=\frac{-eAP-c}{2f}$

$\frac{-eAP-c}{2f}$, nazwáwſzy $PL=z$; zrównanie między $AP=x$, i $PL=z$, będzie zrównaniém na ſrzednicę GI, to ieſt:

$$2fz+ex+c=0 \quad - \quad - \quad - \quad (A).$$

chcąc teraz oznaczyć wielkość GI, potrzeba nám wyrazić tę linią przez funkcyą ſamych ilości znanych wchodzących w zrównanie (α); ponieważ zaś - - $GI^2=KH^2+(GK-HI)^2$, ſtarać nam ſię potrzeba drugi ten zrównania członek przez ilości ſtateczne zrównania (α) wyrazić. Na ten koniec ſtóſuiąc zrównanie (A) do punktów G,I, będzie $GK=\frac{-eAK-c}{2f}$; $HI=\frac{-eAH-c}{2f}$, $GK-HI=\frac{e(AH-AK)}{2f}=\frac{eKH}{2f}$, a przeto $GI^2=\frac{e^2+4f^2}{4f^2}KH^2$. Nie zoſtaie nám iuż tylko wyrazić KH przez ſame ilości ſtateczne. Ażc KH, ieſt odcinkiem osi AH, czyli pewną funkcyą x; łatwo ſię przekonać że punkta K i H nie mogą bydź odkryte tylko za pomocą zrównania na oś: potrzeba nám zrównanie (α) przerobić na zrównanie oznaczaiące oś, a dopiero pierwiaſtki iego dadzą punkta, K, i H, a zatem i wartość ſzukana KH. Ta uwaga prowadzi nás do rachunku naſtępuiącego: $PM+PN=\frac{-ex-c}{f}$, $PM.PN=\frac{dx^2+bx+a}{f}$, $(PM-PN)^2=(PM+PN)^2-4PM.PN=\frac{(e^2-4df)x^2+2(ce-2bf)x+c^2-4af}{f^2}$.

Przy punktach G, I, $PM=PN$; drugi więc członek naſzego zrównania ſtaie ſię zero, i razem zrównaniem na AH, to ieſt:

$$x^2+\frac{2(ce-2bf)}{e^2-4df}x+\frac{c^2-4af}{e^2-4df}=0.$$

pierwiaſtki dwa tego zrównania ſą linie AK, AH, a przeto

$AK+AH=\frac{4bf-2ce}{e^2-4df}$; $AK.AH=\frac{c^2-4af}{e^2-4df}$; $(AH-AK)^2$ $=(AH+AK)^2-4AH.AK$ $=\frac{4(2bf-ce)^2-4(e^2-4df)(c^2-4af)}{(e^2-4df)^2}=KH^2$ co zupełnie rozwięzuie naſze zadanie. Zebyśmy ie ieſzcze ogólniey rosciagnęli; odmieńmy wſpół-uſzykowane pionowe na ukośne, $P'M$, $P'N'$, AP'; nazwiymy kąta $PP'M$ wſtawę g, doſtawę h; $AP'=t$, $P'M=u$, otrzymamy za pomocą trygonometryi $u=\frac{y}{g}$, $P'P=uh=\frac{yh}{g}$, $t=x-uh$, czyli $y=ug$, $x=t+uh$, włożywſzy té wartości za x, y, w zrównanie (α) zamieniemy ie na

$$u^2+\frac{egt+cg+2dht+hb}{fg^2+egh+dh^2}u+\frac{dt^2+bt+a}{fg^2+egh+dh^2}=0 \text{ - - } (B).$$

dwa pierwiaſtki tego zrównania ſą $P'M$, $P'N'$, które znowu nowa średnica EF przecina na dwie części równe: Zrównanie oznaczaiącé tę średnicę podobnie iak i pierwſzą ieſt: $P'L'=\frac{P'M+P'N'}{2}=-\frac{egt+cg+2dht+hb}{2(fg^2+egh+dh^2)}$, czyli nazwawſzy $P'L'=w$ - -

$$2(fg^2+egh+dh^2)w+(eg+2dh)t+cg+bh=0 \text{ - - } (C).$$

chcąc nową tę średnicę przywieśdź do wſpół-uſzykowanych pionowych iakie były na GI w zrównaniu (A), ſpuſzczam od L' pionową $L'Q=q$, $AQ=p$, będzie $w=\frac{q}{g}$, $P'Q=\frac{qh}{g}$, $t=p-\frac{qh}{g}$, włożywſzy za w, t, dopiero wynalezioné wartości w funkcyi p, q, otrzymamy:

$$(2fg+eh)q+(eg+2dh)p+cg+bh=0 \text{ - - } (D).$$

Zrownanie (D), oznacza położenie średnicy EF, którá średnicę GI przecina w punkcie C. Punkt ten przecięcia ieſtże punktem ſpólnym dlá innych średnic, których tyle bydź może prowadzonych, ile punktów linia krzywa zamyka? rozwiązanie tego zadania godne ieſt całą naſzę zaſtanowić uwagę. Ieżeli punkt C ieſt punktem ſpólnym dlá wſzyſtkich średnic w linii 2go porządku, powinien on bydź niezawiſłym od kąta między dwiema średnicami zawartego; potrzeba nam więc w rozwiązaniu tego pytania wiedzieć naturę kąta GCE czyli ten nie ieſt funkcyą kąta wſpół-uſzykowanych? ieżeli tak ieſt; należy nam dopiero ſzukać zrównania na oznaczenie punktu C dwom średnicom ſpólnego; w tym zrównaniu na punkt C, ieżeli znaydziem g, albo h; będziem mieli prawo ſądzić, że punkt C odmienia ſię na każde dwie średnice; ieżeli zaś wyraz na punkt C nie będzie zamykał żadney funkcyi kąta iakiegokolwiek $L'P'Q$, wnieſiémy że on ieſt zawſze ten ſam dla wſzyſtkich średnic linii krzywey. Idźmy za tą uwagą w ciągu całego rachunku ſzukaiąc naſamprzód wyrazu kąta ECG. Przedłużywſzy średnice GI, EF; pierwſza z nich przetnie oś w punkcie O, druga zaś w punkcie R: będzie więc przy O, $PL=o$ i zrównanie (A), położywſzy $z=o$, dá $AO=x=-\frac{c}{e}$; $PO=-\frac{c}{e}-x=\frac{-ex-c}{e}$, $\frac{PL}{PO}=\frac{ez}{-ex-c}=\frac{e}{2f}=Sty.AOL$; a przeto ſtyczná kątu $PLO=\frac{2f}{e}$. U punktu R na drugiey średnicy opiſaney zrównaniem (D'), $QL'=q=o$. s kąd wyciągamy $AR=p=\frac{-cg-bh}{eg+2dh}$; $QR=AR-AQ=$ - - $\frac{-cg-bh-p(eg+2dh)}{eg+2dh}$; ſtyczná kąta $ARL'=\frac{L'Q}{QR}$

$= \frac{q(eg+2dh)}{-cg-bh-p(eg+2dh)} = \frac{eg+2dh}{2fg+eh}$: kąt $RCO =$ $ARL' - AOL$; maiąc zaś tych dwóch oſtatnich kątów ſtyczné za pomocą wzoru $\text{ſty}.(a-b) = \frac{\text{ſty}.a - \text{ſty}.b}{1+\text{ſty}.a.\text{ſty}.b}$, znaydziemy $\text{ſty}.\ RCO = \frac{4dfh-e^2h}{4f^2g+2feh+2deh+e^2g}$, ponieważ w tém oſtatniem zrównaniu znayduie ſię f, g, pewni ieſteśmy, że kąt między dwiema śrzednicami zawarty ieſt funkcyą kąta, który czynią wſpół-uſzykowane $P'L'$, $P'Q$; nie zoſtaie nam więc, tylko znaleśdź zrównanie na oznaczenie punktu C. Ten punkt znayduiąc ſię równie na śrzednicy GI, i na EF, wyraża ſię przez przyſtawę pionową CD za pomocą zrównań (A), (D). Nazwawſzy $AD=r$, $CD=s$, i włożywſzy r, s, za x, z, w zrównanie A; potem za p, q, w zrównanie D; otrzymamy ich dwa; $2fs+er+c=0$ - - - -

$$(2fg+eh)s+(eg+2dh)r+cg+bh=0$$

z dwóch tych zrównań wypada:

$$r = \frac{2fb-ce}{e^2-4df},\quad s = \frac{2cd-be}{e^2-4df}.$$

Pierwſza własność śrzednic.

W obydwóch tych zrównaniach nie zamyka ſię żadna funkcya kąta między wſpół-uſzykowanemi zawartego, to ieſt ani g, ani h; przeto punkt C ieſt niezawiſły od kąta śrzednic, i ieſt ſpólny wſzyſtkim śrzednicom. Punkt takowy nazywać będziemy ŚRZODKIEM linii krzywey *(Centrum curvae)*. Wartość na r, ieſt połową wartości wynalezioney na $AK+AH$, przeto $AD = \frac{AK+AH}{2}$, przeto w każdey lini 2go porządku śrzednice przecinaiąc ſię w punkcie C, dzielą ſię w tém przecięciu na dwie części równe.

§. X.

Weźmy teraz śrzodek C za początek odcinków, śrzednicę zaś GI za oś, a obiąwſzy dobrze zrównanie

nie (β) pod §. 8 wynalezione, wyrazić ié możémy ogólniey:

$$y^2=n+px+qx^2 \quad - \quad - \quad - \quad (\beta)$$

Wynayduie ſię związek między śrzednicami iakiemikolwiek.

Fig. 20.

w niém $y=o$, zoſtawiá zrównanie na punkta G, I, $n+px+qx^2=o$. tak dalece: że $AG+AI=-\frac{p}{q}$, $AC=\frac{AG+AI}{2}=-\frac{p}{2q}$. Rachuiąc odcinki s śrzodka C, niech będzie $CP=t=-\frac{p}{2q}-x$, czyli $x=-\frac{p}{2q}-t$, włożywſzy tę wartość za x w zrównanie (β), przebiemy ié na - - $y^2=n-\frac{p^2}{4q}+qt^2$, którégo wyráz ogólny ieſt:

$$y^2=a'-b'x^2 \quad - \quad - \quad - \quad (\gamma).$$

Trzy zrównania (α), (β), (γ), na linie krzywe 2go porządku, znakomite ſą warunkami, s których wypadły. Pierwſze wyraża związek wſpół-uſzykowanych do iakieykolwiek osi odnoſzonych: drugié pokazuie śrzednicę wzięta za oś; trzecie nakoniec uczy, że śrzednica ieſt osią, a śrzodek linii krzywey początkiem odcinków. W tem oſtatniem biorąc x dodatne albo odiemne, nic ſię cale nie odmienia; co nas uczy, że kiedy $CP=CP'$, będzie także $PM=P'M'$, i linia MM' równo-legła osi GI, przecięta ieſt od BC na dwie części równe. BC więc ma tę ſamę właſność która ſłuży GI, iż cięciwy równo-ległe GI przecina na dwie części równe, tak iako GI przecina cięciwy równo-ległe BC. Przeto linia BE równo-legła przyſtawom przechodząca przez śrzodek C ieſt druga śrzednica. Dwie takowe śrzednice, s których iedna przecina cięciwy równo-ległe drugiey na dwie części równe, nazywaią ſię SRZEDNICAMI SPRZĘŻONEMI (*Axes conjugati*). Styczna więc linii krzywey prowadzona do punktu G, albo I, ieſt zawſze równo-ległą drugiey śrzednicy ſprzężoney BE, i znowu ſtyczná przy punkcie B, albo E ieſt równo-legła GI podług §. 8. W zrównaniu (γ) uczyniwſzy $x=0$, $y=\pm\sqrt{a'}=CB$, nazwawſzy $BC=k$, będzie $a'=k^2$, uczyniwſzy zaś $y=0$, mámy $x=\pm\sqrt{\frac{a'}{b'}}=CG$: niech będzie $CG=g$, wypadá $b'=\frac{k^2}{g^2}$; włożywſzy te wartości w zrównanie (γ), otrzymámy:

$$y^2=k^2-\frac{k^2}{g^2}x^2 \quad - \quad - \quad - \quad (C')$$

gdzie ſamé śrzednice ſprzężoné ſą ilościami ſtatecznemi.

W każdey linii 2go porządku maiącey śrzodek C, a przeto nieſkończoną liczbę śrzednic, iedney iakieykolwiek śrzednicy odpowiadá druga ſprzężoná; zoſtaie nam więc porownać między ſobą takowe śrzednice, przez wynalezienie związku zachodzącego między śrzednicami iakiemikolwiek, i miedzy śrzednicami ſprzężonemi: co nás wieśdź może do nowych własności śrzednic, i do ſpoſobu dokładnieyſzego na prowadzenie ſtycznych. Spoſób użyty na otrzymanie zrównania (C') ſłużyć nam powinien za wzór do teraźnieyſzego wynalazku; przezeń bowiem potrafiliśmy ilości ſtateczné zrównania (γ) przez śrzednice wyrazić. Gdybyśmy ieſzcze mogli za też ilości ſtateczne zrównania (γ) wprowadzić funkcye kątów między śrzednicami zawartych, mielibyśmy związek śrzednic przez kąty wyrażony, a przeto zupełne rozwiązanie pytania. Na ten koniec przypuśćmy, że zrównanie (γ) wyraża związek między wſpół-uſzykowanemi Fig. 21. $CP=x$, $PM=y$ nakłonionemi do ſiebie kątem $APM=q$, którego wſtawa m, doſtawa n; chcąc te wſpół-uſzykowane przerobić na inſze odnieſione do ſwoiey osi, poprowadźmy s punktu M cięciwę MO czyniącą kąt $AQM=p$, którego wſtawa r, doſtawa s; będzie więc RS osią nowey tey cięciwy, HK

osią ſprzężoną. Potrzeba nám teráz zrównanié (γ) przerobić na inné do osi *RS*, i wſpół-uſzykowanych *CD*, *DM*. Aże *CD* ieſt funkcyą *CQ*, i *DQ*; *DM* funkcyą *QM*, *DQ*; idzie zatém że muſzémy wprzód z zrównania (γ) wyciągnąć wártości na *CQ*, *QM*; to ieſt: trzeba nam naſamprzód wſpół-uſzykowané *CP*, *PM*, przerobić na $CQ=t$, $QM=u$, a dopiero s tych oſtatnich wyciągnąć wártości na *CD*, *DM*. Te wſzyſtkie rozumowaniá wyſzczególni rachunek naſtępuiący. Kąt $PMQ=p-q$, Wſt.$(p-q)=rn-sm$, przeto $PM=y=\frac{ru}{m}$, $PQ=\frac{rn-sm}{m}u$; $x=t-QP=t-\frac{rn-sm}{m}u$; włożywſzy té wártości za x, y, w zrównanie (γ), przerobiémy ié na

$$u^2-\frac{2b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}u+\frac{b'm^2t^2-a'm^2}{r^2+b'(rn-sm)^2}=0.$$

dwa piérwiaſtki tego zrównania ſą $QM-QO=\frac{2b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}$, ponieważ *D* ieſt w śrzodku cięciwy *MO*; $QD=\frac{QM-QO}{2}=\frac{b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}$; potrzeba nám teráz wynaleśdź kąty, *ACD*, *RDM*; dla łatwieyſzego linii między ſobą ſtóſowania przenieśmy té kąty na fig. 22. utrzymawſzy nazwiſka iuż kątom *AQM*, *APM*, nadane, i od *D* ſpuściwſzy proſto-padłą mamy $BD=QD.r$; $BQ=QD.s$; przeto ſtyczna kąta $ACD=\frac{BD}{BC}=\frac{QD.r}{CQ+QD.s}=\frac{b'm(rn-sm)}{r+b'n(rn-sm)}$; ſtyczna $BDC=\frac{CQ+QD.s}{QD.r}$; ſty.$BDQ=\frac{s}{r}$; więc ſty.$QDC=$ ſty.$(BDC-BDQ.)=\frac{r.CQ}{DQ+CQ.s}=$ ſty.RDM. S tych dopiero wynalezionych linii i kątów łatwo nám bę-

Fig. 22.

dzie znaleśdź CD: wiémy bowiem że $CD^2 = CQ^2 + 2s.CQ.DQ + QD^2 = t^2 + \frac{2b'mt^2s(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2} + \frac{b'^2m^2t^2(rn-sm)^2}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2}$. Drugi tén członek przywiódſzy do iednego mianownika, otrzymámy:

$$CD^2 = \frac{r^4+[2b'r^2ms+(2br^2+b^2m^2)(rn-sm)](rn-sm)t^2}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2} + \frac{[2b^2ms(rn-sm)^2+b^2(rn-sm)^3](rn-sm)}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2}t^2$$

ilości w liczniku między náwiaſami kwadratowémi zawarté rozebráwſzy, i zapomocą dwóch zrównań $m^2+n^2=1$, $r^2+s^2=1$, wyraziwſzy - - . . . .

$$b'^2m^3s^2 = b'^2m^3s - b^2r^2sm + b^2r^2n^2sm;$$

$$r^3n^3b^2 = r^3nb^2 - b^2m^2nr + b^2m^2s^2rn;$$

kilka terminów zniknie, i zoſtanie.

$$CD^2 = \frac{r^4+2b'r^3n(rn-sm)+b'^2r^2(nr-sm)^2}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2}t^2$$

$$CD = \frac{rt.\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(rn-sm)^2]}}{r^2+b'(rn-sm)^2}.$$

nazwiymy teráz nowe wſpół-uſzykowané $CD=w$, $DM=z$; wypadnie náprzód z oſtatniego zrównania na CD.

$$t = \frac{(r^2+b'(rn-sm)^2)w}{r\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(nr-sm)^2]}};$$

a ponieważ $u = QD+z = z + \frac{b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}$, włożywſzy w to zrównanié wártość znalezioną na t; otrzymámy:

$$u = z + \frac{b'mw(rn-sm)}{r\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(nr-sm)^2]}};$$ aże $x = t - \frac{(rn-sm)u}{m}$, $y = \frac{ru}{m}$, położywſzy za t, u, wártości dopiero odkryté, wypadnie:

$x=$

$$x = \frac{rw}{\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(nr-sm)^2]}} - \frac{(rn-sm)z}{m}$$

$$y = \frac{rz}{m} + \frac{b'w(rn-sm)}{\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(nr-sm)^2]}},$$

wártości té za x, y, położywſzy w zrównanie (λ), zamieniemy ié na inné wyrażaiącé związek między CD, i DM:

$$\frac{r^2+b'(rn-sm)^2}{m^2} z^2 + \frac{b'[r^2+b'(rn-sm)^2]}{r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(rn-sm)^2} w^2 - a' = o \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (D).$$

Dáymy teráz nazwiſka kątów zachodzącym między śrzednicami: $APM = ACE = q$, $AQM = ACH = p$, $GCR = A'$; $ECH = B'$; $p = q + B'$, $RCH = q + B' - A'$; $m = \text{Wſt}.q$, $n = \text{Doſt}.q$, $r = \text{Wſt}.(q+B')$, $s = \text{Doſt}.(q+B')$, $rn - sm = \text{Wſt}.B'$. Wynaleźliśmy iuż wyżey ſtyczną $ACD = \text{Sty}.A' = \frac{b'm(rn-sm)}{r+b'n(rn-sm)}$, s kąd wypádá

$$\text{Wſt}.A' = \frac{b'm(rn-sm)}{\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(rn-sm)^2]}},$$

$$r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(rn-sm)^2 = \frac{b'^2m^2(rn-sm)^2}{\text{Wſt}.A'^2},$$

włożywſzy tę wártość w mianownika *2go* członka zrównania (D); i przetłómaczywſzy litery wſzyſtkié na wſtawy i doſtawy kątów wprowadzonych, to zrównanie ſtanie ſię:

$$\frac{\text{Wſt}.(q+B')^2 + b'.\text{Wſt}.B'^2.}{\text{Wſt}.q^2} z^2 + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{(\text{Wſt}.(q+B')^2 + b'\text{Wſt}.B'^2)\text{Wſt}.A'^2}{b'\text{Wſt}.q^2.\text{Wſt}.B'^2} w^2 - a' = o \cdot \cdot (D).$$

pamiętávmy ieſzcze o wártościach wydobytych z zrównania (γ) na a', b', że na fig. 21. $a' = k^2 = CE^2$; Fig. 21.
$b' = \frac{k^2}{g^2} = \frac{CE^2}{CG^2}$. Zrównanié na $\text{ſty}.A'$, daie nam

$$b'=\frac{\text{Sty}.A'.\text{Wſt}.p.}{\text{Wſt}.B'(\text{Wſt}.q-\text{Sty}.A'\text{Doſt}.q)}=\frac{k^2}{g^2}=\frac{CE^2}{CG^2},$$ czyli

$$\frac{k^2}{g^2}=\frac{\text{Wſt}.A'.\text{Wſt}.(q+B')}{\text{Wſt}.B'.\text{Wſt}.(q-A')}\quad - \quad - \quad (L).$$

(*L*) zamyka w ſobie związek między dwiema.śrzednicami ſprzężonemi. Ieżeli w zrównaniu (*D*), $CD=w=o$; *DM* zamieni ſię na $CH=z$, i (*D*) da nam z

czyli $$CH=\frac{CE.CG.\text{Wſt}.q.}{\sqrt{[CG^2\text{Wſt}.(q+B')^2+CE^2.\text{Wſt}.B'^2]}};$$

II. Właſność ſrzednic. uczyniwſzy podobnie w (*D*) $z=o$, wypadnie wártośc na $w=CR$.

$$CR=\frac{CE^2.\text{Wſt}.q.\text{Wſt}.B'}{\text{Wſt}.A'\sqrt{[CG^2\text{Wſt}.(q+B')^2+CE^2.\text{Wſt}.B'^2]}};$$ więc

$$\frac{CR}{CH}=\frac{CE.\text{Wſt}.B'}{CG.\text{Wſt}.A'}\;\text{-\,-}\;CG.\text{Wſt}.A'.CR=CE.\text{Wſt}.B'.CH\quad (1).$$

to oſtatnie zrównanie nas uczy, że złączywſzy przez linią proſtą punkta *E*, *H*; podobnie znowu punkta *G*, *R*, troykat $GRC=$ troykątowi *ECH*.

$$\frac{CR}{CH}=\frac{CE^2.\text{Wſt}.B'}{CE.CG.\text{Wſt}.A'},$$ włożywſzy z zrównániá (*L*) w teraźnieyſze, wartość na - - $CE^2=k^2$

$$=\frac{CG^2.\text{Wſt}.A'.\text{Wſt}.(q+B')}{\text{Wſt}.B'\text{Wſt}.(q-A')};$$ wypadnie - - - $\frac{CR}{CH}$

III. Właſność ſrzednic. $$=\frac{CG.\text{Wſt}'(q+B')}{CE.\text{Wſt}.(q-A')}\;\text{-\,-\,-}\;CR.CE.\text{Wſt}.(q-A')=CH.\text{Wſt}.(q+B').CG\quad - \quad - \quad - \quad (2)$$

to ieſt: że złączywſzy znowu punkta *R*, *E*; tudzież punkta *G*, *H*, będzie w każdey linii 2go porządku troykat $RCE=$ troykątowi *GCH*.

Srzednice *CR*, *CH*, wyraziliśmy przez ułomek, którego mianownik $CG^2\text{Wſt}.(q+B')^2+CE^2\text{Wſt}.B'^2=$

$$\frac{CG^2.\text{Wſt}.(q+B')}{\text{Wſt}.(q-A')}[\text{Wſt}.(q+B')\text{Wſt}.(q-A')+\text{Wſt}.A'.\text{Wſt}.B']$$

$$=\frac{CG^2.\text{Wſt}.q.\text{Wſt}.(q+B').\text{Wſt}.(q+B'-A')}{\text{Wſt}.(q-A')};$$ drugi członek

członek tego zrównania wypádá, włożywſzy za CE^2 wártość wyciągnioną z (L); trzeci zaś, wykonáwſzy mnożenie funkcyi między nawiaſami kwadrátowemi, i położywſzy naprzód za $\mathit{Doſt}.q^2=1-\mathit{Wſt}.q^2$; powtòrc za $\mathit{Wſt}.q.\mathit{Doſt}.(B'-A')+\mathit{Doſt}.q\mathit{Wſt}.(B'-A')=\mathit{Wſt}.(q+B'-A')$: Oſtatnią tę mianownika wártość włożywſzy w CH, otrzymiámy:

$$CH=CE\sqrt{\left[\frac{\mathit{Wſt}.q.\mathit{Wſt}.(q-A')}{\mathit{Wſt}.(q+B')\mathit{Wſt}.(q+B'-A')}\right]}\cdot\cdot(Q).$$

włożywſzy ią zaś w CR, będzie $CR=\frac{CG.\mathit{Wſt}.(q+B')}{\mathit{Wſt}.(q-A')}.$
$\sqrt{\left[\frac{\mathit{Wſt}.(q-A').\mathit{Wſt}.q.}{\mathit{Wſt}.(q+B')\mathit{Wſt}.(q+B'-A')}\right]}$: s kąd wypádá

IV. 'włáſność ſrzednic.

$$CR.CH=\frac{.CG.CE.\mathit{Wſt}.q}{\mathit{Wſt}.(q+B'-A')}\text{ czyli}$$

$$CK.CH.\mathit{Wſt}.(q+B'-A')=CG.CE.\mathit{Wſt}.q\ \cdot\cdot\cdot\ (3).$$

to oſtatnie zrównanie nas uczy, że złączywſzy przez linie proſte punkta R, H; G, E; troykąt $RCH=$ troykątowi GCE. Mámy więc

z (1) Tróykąt $GCR=$ tróykątowi ECH.
(2) Tróykąt $RCE=$ tróykątowi GCH.
(3) Tróykąt $RCH=$ tróykątowi GCE.

Aże Trapez $RGCE=\triangle GCR+\triangle RCE$.
Trapez $EHCR=\triangle EHC+\triangle RCE$.

więc Trapez $GRCE=$ trapezowi $EHCR$. Oprócz tego trapez $EHCR-\triangle RCH=$ trapezowi $GRCE-\triangle GCE$; przeto troykąt $ERH=$ tróykątowi RGE, które maiąc ſpólną zaſadę RE, dowodzą, że cięciwa RE ieſt równoległą cięciwie GH i $\triangle RHG=\triangle EGH$. Ponieważ zaś

V. włáſność ſrzednic.

Trapez $RGCH=\triangle RHG+\triangle GCH$,
Trapez $GEHC=\triangle EGH+\triangle GCH$,
więc Trapez $RGCH=$ trapezowi $GEHC$.

Każde s tych zrównań pokazuie nam nową włáſność śrzednic ſprzężonych w liniach 2go porządku, i oraz związek iednych z drugiemi. Ten związek w funkcyach kątów między śrzednicami zawartych náylepiey nam tłomaczą zrównania (L),(Q). §.XI.

§. XI.

Spoſób prowadzenia ſtycznych wydobywa ſię z właſności śrzednic.

Fig. 23.

Zatrudniymy ſię ieſzcze roſtrząſaniém zrównań (L) i (Q), ſtóſuiąc ié do fig. 23, gdzie GC, CH, ſą dwie śrzednice ſprzężoné; CM, CK, dwie drugie, kąt $GCH=q$; $MCG=A'$; $HCK=B'$; $GCK=p=q+B'$; $MCH=q-A'$; $MCK=q+B'-A'$; zrównanié (Q) daie nám w teraźnieyſzéy figurze - - - $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\text{Wſt.}q.\text{Wſt.}(q+B')}{\text{Wſt.}(q-A').\text{Wſt.}(q+B'-A,)}$; zrównanie zaś (L) - - $\frac{HC^2}{GC^2} = \frac{\text{Wſt.}A'.\text{Wſt.}(q+B')}{\text{Wſt.}B'.\text{Wſt.}(q-A')}$; - - - $\frac{HC^2+GC^2}{GC^2} = \frac{\text{Wſt.}q.\text{Wſt.}(B'+A')}{\text{Wſt.}B'.\text{Wſt.}(q-A')}$: s tegóż ſamégo zrównaniá (L) wyciągámy $\frac{CK^2}{CM^2} = \frac{\text{Wſt.}A'.\text{Wſt.}(q-A')}{\text{Wſt.}B'.\text{Wſt.}(q+B')}$; $\frac{CK^2+CM^2}{CM^2} = \frac{\text{Wſt.}A'.\text{Wſt.}(q-A')+\text{Wſt.}B'.\text{Wſt.}(q+B')}{\text{Wſt.}B'.\text{Wſt.}(q+B')}$, chcąc oſtatniego ułomku licznika przerobić, przypomniymy ſobie z Algebry wzory pod §§.51, 54.

$$\text{Wſt.}a.\text{Wſt.}b = \tfrac{1}{2}\text{Doſt.}(a-b) - \tfrac{1}{2}\text{Doſt.}(a+b)$$

$$\tfrac{1}{2}\text{Doſt.}b - \tfrac{1}{2}\text{Doſt}a. = \text{Wſt.}\frac{a+b}{2}.\text{Wſt.}\frac{a-b}{2}$$

któré ſtóſuiąc do oſtatniego zrównaniá; otrzymámy:

$$\text{Wſt.}A'.\text{Wſt.}(q-A') = \tfrac{1}{2}\text{Doſt.}(q-2A') - \tfrac{1}{2}\text{Doſt.}q$$

$$\text{Wſt.}B'.\text{Wſt.}(q+B') = \tfrac{1}{2}\text{Doſt.}q - \tfrac{1}{2}\text{Doſt.}(q+2B).$$

przeto $\text{Wſt.}A'.\text{Wſt.}(q-A')+\text{Wſt.}B'.\text{Wſt.}(q+B') = \tfrac{1}{2}\text{Doſt.}(q-2A') - \tfrac{1}{2}\text{Doſt.}(q+2B') = \text{Wſt.}(q+B'-A').\text{Wſt.}(B'+A')$; $\frac{CK^2+CM^2}{CM^2} = \frac{\text{Wſt.}(q+B'-A').\text{Wſt.}(B'+A')}{\text{Wſt.}B'.\text{Wſt.}(q+B')}$, s kąd wypáda $\frac{HC^2+CG^2}{CK^2+CM^2} =$ - - - - - $\frac{GC^2}{CM^2}$. $\frac{\text{Wſt.}q.\text{Wſt.}(q+B')}{\text{Wſt.}(q-A')\text{Wſt.}(q+B'-A')}$, aże

Wſt.

$$\frac{\text{Wſt}.q.\text{Wſt}.(q+B')}{\text{Wſt}.(q-A').\text{Wſt}.(q+B'-A')}=\frac{CM^2}{CG^2},\text{ więc}$$

VI. Właſność śrzednic.

$$HC^2+CG^2=CK^2+CM^2.$$

to ieſt: że w każdey linii *2go* porządku ſumma kwadratów z dwóch śrzednic ſprzężonych ieſt nieodmienną. S tey właſności wypadá nám ſpoſób prowadzenia ſtycznych do iakiegokolwiek punktu linii krzywey. Chcąc n.p. prowadzić ſtyczną do punktu M, a maiąc dwie śrzednice ſprzężone CG, CH, wiadome; biorę linią CM za śrzednicę, którey odpowiadaiącá śrzednica ſprzężoná CK, ieſt równo-ległą ſtyczney MT: cały więc ſpoſób zawiſł od wynalezienia CK, którá z oſtatniego zrównania wypadá.

$$CK=\sqrt{[HC^2+CG^2-CM^2]}$$

Inny ieſzcze ſpoſób na wynalezienie CK podaie nám §. poprzedzaiący. Wiemy bowiem że cięciwa prowadzoná od H do M, ieſt równo-legła cięciwie KG, co nám pokazuie mieyſce na linii krzywey, od którego CK má bydź prowadzoná do śrzodka C.

§. XII.

Srzednice równaią ſię s ſtycznemi i stąd wyciągaią ſię dalſze właſności śrzednic.

Fig. 23.

Przeciągniymy śrzednicę CG póki nie przetnie ſtyczney w mieyſcu T, a poprowadziwſzy od M linią MN równo-legią HC, otrzymámy dwa tróykąty PMC, MTC: w pierwſzym kąt $MPC=180°-MPG$. Wſtawa więc kąta $MPC=\text{Wſt}.MPG=\text{Wſt}.HCG=\text{Wſt}.q$; $\text{Wſt}.CMP=\text{Wſt}.HCM=\text{Wſt}.(q-A')$, $\text{Wſt}.MTC=\text{Wſt}.TCD=\text{Wſt}.KCG=\text{Wſt}.(q+B')$; $\text{Wſt}.CMT=\text{Wſt}.KCM=\text{Wſt}.(q+B'-A')$; a przeto

$$MC:MP=\text{Wſt}.q:\text{Wſt}.A' \;\text{- -}\; \text{Wſt}.q=\frac{MC.\text{Wſt}.A'}{MP};$$

$$MP:CP=\text{Wſt}.A':\text{Wſt}.(q-A');\ \text{Wſt}.(q-A')=\frac{CP.\text{Wſt}.A'}{MP}$$

$$CM:CT=\text{Wſt}.(q+B'):\text{Wſt}.(q+B'-A');\ \text{Wſt}.(q+B'-A')=\frac{CT.\text{Wſt}.(q+B')}{CM}$$

$$CM:MT=\text{Wſt.}(q+B'):\text{Wſt.}A';\ \text{Wſt.}(q+B')=\frac{\text{Wſt.}A'.CM}{MT}$$

włożywſzy te wartości wſtaw w zrównanie (Q), otrzymamy:

$$\frac{CM^2}{CG^2}=\frac{CM^2}{CP.CT},$$ to ieſt $CG^2=CP.CT$, czyli

(1) $CP:CG=CG:CT$

$CP:CG-CP=CG:CT-CG$, czyli

(2) $CP:PG=CG:GT$

$CP:CP+CI=CG:CT+CG$, to ieſt:

(3) $CP:IP=CG:IT.$

więc wziąwſzy znowu BN, EF, za dwie śrzednice ſprzężone, i przeciągnąwſzy pierwſzą póki nie przetnie śrzednicy w mieyſcu A, a od M ſpuściwſzy MQ równo-legła CE, i tym do punktów N,B, poprowadziwſzy ſtyczne równo-ległe, trzy oſtatnie proporcye uczą nas, że:

(1) $CQ:CN=CN:CA.$

(2) $CQ:QN=CN:NA$ - - $NA=\dfrac{CN.QN}{CQ}$

(3) $CQ:BQ=CN:BA$ - - - $BA=\dfrac{CN.BQ}{CQ}$

s podobieńſtwa zaś tróykątów NTA, MQA, LBA, wypada:

$AN:QA=NT:QM$ - - - (δ).

$BA:QA=BL:QM$ - - - (ε):

$$QA=QN+NA=QN+\frac{CN.QN}{CQ}=\frac{BQ.QN}{CQ},$$ więc

$NA:QA=CN:BQ=NT:QM$ - - - z (2), (δ)

$BA:QA=CN:QN=BL:QM$ - - - z (3), (ε)

$$NT=\frac{CN.QM}{BQ}\text{ - - }BL=\frac{CN.QM}{QN};\text{ - - }NT.BL\,\frac{CN^2.QM^2}{BQ.QN};$$

VII. właſność śrzednic.

aże podług właſności drugiey w §. 8. $QN.BQ:QM^2=CN^2:CE^2$, s kąd $CE^2=\dfrac{QM^2.CN^2}{QN.BQ}$ $CE^2=NT.BL$

to ieſt:

NT

$$NT:CE=CE:BL.$$

w linii *2go* porządku śrzednica ieſt śrzednią proporcyonalna między dwiema ſtycznemi iey równo-ległemi. Z zrównań na NT, BL, CE^2, między ſobą kombinowanych wypada ieſzcze:

$$NT^2.BQ^2=CE^2.QN.BQ\ \text{- - -}\ NT=CE\surd\frac{QN}{BQ};$$

$$BL^2.QN^2=CE^2.QN.BQ\ \text{- - -}\ BL=CE\surd\frac{BQ}{QN},$$ a przeto

$QN:BQ=NT^2:CE^2=CE^2:BL^2=TM:ML=NT:BL$; i poprowadziwſzy do punktu V ſtyczną SR; przecinaiącą NT, BL, w punktach R, S; będzie także CE śrzednią proporcyonalną między NR, i BS.

Wſzyſtkie dotąd wyłożone właſności daią nám ſpoſób wyráženia śrzednic ukośnych iednych przez drugie; chcąc od nich przyiśdź do poznania śrzednic pionowych, potrzeba kąt MCK wziąść za kąt proſty, i do niego ſłóſownie odmieniwſzy inne kąty, wprowadzić im odpowiadaiące wſtawy w zrównania (L),(Q); będzie zaś kąt $MCK=q+B'-A'=90°$, iego wſtawa $=1$; czyli $B'=90°-(q-A')$; $Wſt.B'=Doſt.(q-A')$; $B'+q=90°+A'$; $Wſt.(B'+q)=Doſt.A'$; wprowadziwſzy te wartości wſtáw w zrównania (L), (Q), pierwſze z nich zamieni ſię na:

$$\frac{HC^2}{GC^2}=\frac{Wſt.A'.Doſt.A'}{Doſt.(q-A')Wſt.(q-A')}=\frac{Wſt.2A'}{Wſt.2(q-A')}=$$

$$\frac{1}{Wſt.2q.Doſty.2A'-Doſt.2q.};$$ zrównanie zaś (Q) ſtanie ſię $\frac{CM^2}{CG^2}=\frac{Wſt:q.Doſt.A'}{Wſt.(q-A')}=1-\frac{1}{Doſty.q.Sty.A'}$

$=1-\frac{Sty.q}{Sty.A'}$; aże zrównanie (2) pod §.10. daie nam $CM.CK=CG.CH.Wſt.q$; i znowu właſność VI śrzednic $CH^2+CG^2=CM^2+CK^2$; $(CM+CK)^2-2CK.CM=CH^2+CG^2$; $(CM-CK)^2+2CK.CM=CM^2+CK^2=CH^2+CG^2$ włoży-

włożywſzy za $CK.CM$. iego wartość, otrzymamy:

$$CM+CK=\surd[CG^2+CH^2+2CG.CH.\text{Wſt}.q]$$
$$CM-CK=\surd[CG^2+CH^2-2CG.CH.\text{Wſt}.q]$$

Fig. 20, te dwa zrównania daią nam CM, CK, w funkcyi CG, CH. Srzednice do ſiebie pionowe iakie ſą CM, CK, albo na fig. 20. GI, BE nazywaią ſię GŁÓWNEMI (*Diametri principales*). Zrównanie (C') w §. 10. właśnie ſłuży wſpół-uſzykowanym na takowych śrzednicach rachowanym $y^2=\frac{k^2}{g^2}(g^2-x^2)$; w niem x, y, bedac w ſamych potęgach drugich nie odmienią nic ſtawſzy ſię z dodatnych odiemnemi, i przeciwnie, co dowodzi, że linia krzywa przedzielona takiemi śrzednicami ieſt w ſwoim rysunku i wielkości ze wſzyſtkich ſtrón równa, czyli że odnoga nad GI równa odnodze pod GI, i odnoga położona z iedney ſtrony BE ieſt równa odnodze położoney z drugiey ſtrony BE; to ieſt: że dwie śrzednice główne linią krzywą opiſaną zrównaniem (C') rościnaią na cztery części równe i podobne. Tu pokazuie ſię ſpoſób dochodzenia w liniach iakichkolwiek porządków wyżſzych, czyli te maią śrzednice lub nie? o czem nam niżey mówić przypadnie. Pociągnąwſzy s śrzodka C do M linią CM, iey wartość będzie $\surd(x^2+y^2)=\surd[x^2+\frac{k^2}{g^2}.(g^2-x^2)]$, a położywſzy $k=g$, wypada $CM=g$, to ieſt że w linii 2go porządku maiącey dwie śrzednice ſobie równe, linia proſta s śrzodka do iakiegokolwiek punktu obwodu pociągniona, wyrazić ſię może wymiernie, i ieſt ilością ſtateczną, która to właſność ſłuży kołu. Ale kiedy dwie śrzednice główne ſą nierówne, linia prawda CM ieſt zawſze funkcyą niewymierną; ale niemaſzli na śrzednicy GI iakiego punktu tą właſnością znakomitego? Na rozwiązanie tego pytania, przypuśćmy że F ieſt takowym punktem, od którego linia prowadzona do M ieſt funkcyą wymierną: potrzeba nam więc wynaleśdź $CF=f$, ponieważ $CP=x$, $PM=y$, będzie $FP=f-x$; $FM^2=(f-x)^2+y^2=(f-x)^2+\frac{k^2}{g^2}(g^2-x^2)$, czyli - - - $FM^2=\frac{x^2(g^2-k^2)-2fg^2x+(f^2+k^2)g^2}{g^2}$, żeby więc FM było funkcyą wymierną, potrzeba żeby licznik oſtatniego ułomku był zupełną potęgą drugą, a przeto $\frac{f^2g^4}{(g^2-k^2)^2}=\frac{(f^2+k^2)g^2}{g^2-k^2}$, rozwiązawſzy to oſtatnie zrównanie znaydziemy $f^2=g^2-k^2$, $f=\pm\surd(g^2-k^2)$, ponieważ f ma dwie wartości równe, iednę dodatną a drugą odiemną; punktów takowych znayduie ſię dwa w równey odległości z obydwóch ſtron ſrzodka C. Ale że wartość na f nie może bydź rzetelną tylko kiedy $g>k$, punkta takowe nie mogą ſię znaydować tylko na ſrzednicy więkſzey, i ſą tem odlegleyſze od ſrzodka C, im różnica dwóch osi GC, BC ieſt więkſzą, to ieſt, im linia krzywa ieſt dłużſzą a wążſzą. Punkta te nazywaią ſię **OGNISKAMI** (*Foci curvae*). Ponieważ

Właſności ognisk i linii z nich wychodzących.

trafiamy na te punkta biorąc ſrzednicę GI za oś, dla tego ta nazywa ſię osią więkſzą albo osią **POPRZECZNĄ** (*Axis major, transverſus*), druga ſrzednica BC nazywa ſię **OSIĄ MNIEYSZĄ SPRZĘŻONĄ**, (*Axis minor, conjugatus*). Punkta G, I, nazywaią ſię **WIERZCHOŁKAMI** (*Vertices*) u których ſtyczne ſą zawſze równoległe BC. Włożywſzy wartość odkrytą na f w FM,

Fig. 20.

wypadnie $FM=g-\frac{x\surd(g^2-k^2)}{g}$; $GM=g+\frac{x\surd(g^2-k^2)}{g}$, weźmy teraz za odcinek $CF=x=\pm\surd(g^2-k^2)$, i włożywſzy tę wartość za x w zrównanie (C') wypadnie $y=\frac{k^2}{g}=FR$, to ieſt, że przyſtawa z ogniſka prowadzona pionowo ieſt iłością ſtateczną, i trzecią proporcyonalną między dwiema osiami głównemi. Podwóyna taka przyſtawa czyli cięciwa RS nazywa ſię MIARĄ albo LINIĄ RÓWNANIA (*Parameter, latus rectum*), dlá tego, że ſłużyć może za miarę porównywaniá, czyli za iedność wpſół-uſzykowanym. Nazwiymy teráz odległość ogniſka od wierzchołka $FG=d$, $FR=\frac{k^2}{g}=c$, mámy $f=g-d=\surd(g^2-gc)$, a przeto $g=\frac{d^2}{2d-c}$; $k=d\surd\frac{c}{2d-c}$; maiąc znane c, d, mámy wſzyſtko w linii krzywéy wiadomé.

Zrównanie biegunowe na linie 2go porządku.

Maiąc iuż obydwie osi wyrażoné, przez odległość ogniſka od wierzchołka d, i przez miarę równaniá c, łatwo nám ieſt barzo linią iakąkolwiek FM przez c i d wyrazić, a wciągnąwſzy ieſzcze kąt GFM, który ta liniá czyni z osią, odkryć zrównanie między FM, i tymże kątem; a naprzód ponieważ $FM=g-\frac{x\surd(g^2-k^2)}{g}=g-\frac{x(g-d)}{g}$, kładąc za g, wartość znalezioną $\frac{d^2}{2d-c}$; będzie $g-d=\frac{dc-d^2}{2d-c}$; $FM=\frac{d^2}{2d-c}-\frac{(c-d)x}{d}$, nazwawſzy $FP=z$, będzie $x=CF-z=\frac{(c-d)d}{2d-c}-z$, włożywſzy w FM tę wártość za x, otrzymámy $FM=c+\frac{(c-d).z}{d}=c-\frac{(d-c)z}{d}$. Niech teráz będzie kąt $GFM=v$, przeto $z=-FM.\,Doſt.v.$ włożywſzy tę wártość za z w FM, i nazwáwſzy $FM=r$, otrzymámy zrównanie:

$$r=\frac{dc}{d-(d-c)Doſt.v.}\quad . \; . \; . \; . \quad (Aa).$$

to zrównanie zamyká dwié ilości r, kąt v; które wziąwſzy za ilości odmienné, wyrażemy nowym ſpoſobém wſzyſtkié gatunki linii 2go porządku. Na-

leży

leży nam tu oſtrzéc, że (*Aa*) ieſt zrównaniém nayważnieyſzém, i nawiękſzego użycia w Aſtronomii, gdzie ie nazywać zwykli ZRÓWNANIEM BIEGUNOWEM (*Aequatio Polaris.*)

I téc to ſą własności powſzechné wſzyſtkim liniom 2go porządku, których użył Newton do rachowania biegu ciał Niebieſkich, w ſwém nieśmiertelnem dziele: *Philoſophiae Naturalis Principia Mathematica*, a które J. P. Euler wyciągnął z uwag ogólnych zrównania 2go ſtopnia między dwiema odmiennemi x, y, ſpoſobem tu od nas użytym.

§. XIII.

Gatunki linii krzywych 2go porządku.

Po wyłożonych ogólnych właſnościach wſzyſtkich linii 2go porządku, przypada nam poznać różné ich gatunki za pomocą ſzczególnych warunków wprowadzonych w zrównanie (*β*). §. 10. $y^2=n+px+qx^2$. Aże natura i ryſunek linii krzywych zawiſł od natury pierwiaſtków zrównania (*β*); te zaś pierwiaſtki od ſtanu i wartości ilości ſtatecznych n, p, q; idzie za tém, że warunki pewné przywiązané do tych ilości ſtatecznych, dadzą początek różnym gatunkóm linii 2go porządku. Nie zapominaymy ieſzcze o tém, że px bydź może wyrzuconé, bez naruſzenia natury zrównania; że n w ſwym znaku zawiſło od q, iako dzielnika, że na koniec x odmieniaiąc ſię doſiąc może iakichkolwiek wartości nadanych n, q: a przeto że gatunków różnych linii krzywych nie należy nam upatrywać tylko w różnych znakach q, albo w iego zniſzczeniu. Biorąc więc q za odiemné, dodatné, lub zero; wypadać nam powinny linie krzywe 2go porządku, każdemu warunkowi odpowiadaiącé. Zaczniymy od q odiemnego, a odnioſſzy początek odcinków do śrzodka, czyli uczyniwſzy $x=x+\frac{p}{2q}$, otrzymamy zrównanie

$$y^2=b-qx^2$$

Ellipſa i iéy włáſności.

gdzie $b=n+\frac{p^2}{4q}$; chcąc poznać ryſunek linii tém zrównaniem opiſaney, uważáymy náprzód czyli má odnogi nieſkończone lub nie? to ieſt, czyli przeſzedłſzy przez wſzyſtkie wzroſty x, wártości na y wypadną rzetelne lub uroione. Ponieważ q ieſt odiemnem, $-qx^2$ nieprzeſtanie nigdy bydź odiemnem; a przeto y nie będzie rzetelnem, tylko kiedy $b>qx^2$, czyli $x<\sqrt{\frac{b}{q}}$, liniá więc krzywá ſkończy ſię na odcinku równym $\sqrt{\frac{b}{q}}$ wziętym z obudwóch ſtron osi, a przeto nie má żadney odnogi nieſkończoney. Wziąwſzy więc na fig. 24. S za śrzodek linii krzywey i początek odcinków razem, $SA=\sqrt{\frac{b}{q}}$, $SB=-\sqrt{\frac{b}{q}}$; ponieważ na $x=\pm\sqrt{\frac{b}{q}}$, $y=0$, liniá krzywá przeciąwſzy oś w punktach A, B, ſkończy ſię na nich. Uważmy ieſzcze iak daleko u S przyſtawy ſię rościągną: w mieyſcu S, $x=0$, $y=\pm\sqrt{b}$, to ieſt że przyſtawa u S ieſt ilością ſtateczną ſkończoną, a przeto wziąwſzy $CS=SD=\sqrt{b}$, liniá krzywá zamknie ſię między cztéremá punktami A, B, C, D, czyli między dwiema śrzednicami AB, CD, którą nazwano **Ellipsa** (*Ellipſis*). Widzieliśmy dopiero że SA, SC, ſą funkcyami ilości ſtatecznych b, q, wchodzących w zrównanie: niech będzie $SA=g=\sqrt{\frac{b}{q}}$, $SC=k=\sqrt{b}$, przeto $b=k^2$, $q=\frac{k^2}{g^2}$, i zrównanie na Ellipſę zamieni ſię na inne:

Fig. 24.

$$y^2=\frac{k^2}{g^2}(g^2-x^2) \quad - \quad - \quad - \quad (A).$$

gdzie SA, SC, które odtąd nazywać będziemy półosiami Ellipſy, będą ilościami ſtatecznemi zrównania.

W §. 12. znaleźliśmy dwa ogniſka na linie 2go porządku, czyli $f=\pm\sqrt{(g^2-k^2)}$ które znayduią ſię w każdey linii maiącey dwie śrzednice nierówne, a przeto w Ellipſie: im g więkſze będzie od k, tem SF czyli f będzie dalſze od śrzodka; a przeto Ellipſa dłużſza: im zaś g będzie ſię barziey zbliżać do k, tem punkta F, G, padną bliżey śrzodka, i kiedy $g=k, f=0$, zrównanie zaś (A) ſtanie ſię $y^2=g^2-x^2$ zrównaniem na koło; podług więc więkſzey lub mnieyſzey odległości punktów F, G, od śrzodka S, którą to odległość nazywać będziemy MIMO-ŚRZÓD (*Excentricitas*); Ellipſa oddala ſię lub zbliża do koła. Staraymy ſię naſamprzód poznać właſności Ellipſy przez linie wychodzące z iey ogniſk i śrzodka. Ponieważ $SF=\sqrt{(g^2-k^2)}$, $PF=\sqrt{(g^2-k^2)}-x$, $FM^2=y^2+[\sqrt{(g^2-k^2)}-x]^2$, gdzie za y włożona wartość z zrównania (A), uczyni $FM=g-\frac{x\sqrt{(g^2-k^2)}}{g}$;

$GM=g+\frac{x\sqrt{(g^2-k^2)}}{g}$, a przeto $FM+GM=2g=AB$; to ieſt: *Że ſumma linii z ogniſk do iakiegokolwiek punktu Ellipſy prowadzonych, ieſt równa osi więkſzey.* PIERWSZA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Poprowadźmy do tego ſamego punktu M ſtyczną MT: §. 12. nauczył nas, że $SP:SA::SA:ST$, to ieſt, $ST=\frac{g^2}{x}$; $GT=\frac{g^2+x\sqrt{(g^2-k^2)}}{x}$, $FT=\frac{g^2-x\sqrt{(g^2-k^2)}}{x}$, ſtoſuiąc wartości na FT, FM; GT, GM, otrzymamy:

$FT:FM=g:x$ - - $GT:GM=g:x$ więc

$FT:FM=GT:GM$ to ieſt: $\frac{Wſt.FMT}{Wſt.FTM}=\frac{Wſt.GMQ}{Wſt.FTM}$,

$Wſt.FMT=Wſt.GMQ$: czyli *dwie linie proſte z ogniſk do któregokolwiek punktu Ellipſy prowadzone, równo ſą nachylone do ſtyczney tego punktu.* DRUGA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Aże znowu $GT:GM=g:x$; $ST:SA=g:x$ - - - $GT:GM=ST:SA$, poprowadziwſzy zaś z śrzodka S,

SR równo-ległą GM, tróykąty GMT, SRT, dadzą $GT:GM=ST:SR$, a przeto $SR=SA$, znaydziemy przez podobne rozumowanie $SQ=SR=SA$, to ieſt: *że linie s śrzodka do ſtyczney prowadzone równo-legle liniom wychodzącym z ogniſk, ſą ſobie, i połowie osi więkſzey równe: tak dalece: że* $FM+GM=SR+SQ=AB$. TRZECIA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Staraymy ſię teraz wynaleśdź wartość na TM przez funkcyą ilości wchodzących w zrównanie na Ellipſę. Ponieważ $ST=\frac{g^2}{x}$, $PT=\frac{g^2-x^2}{x}$; włożywſzy wartość licznika wyciągnioną z (A), otrzymamy $PT=\frac{y^2g^2}{k^2x}$, a przeto $TM=\sqrt{(TP^2+PM^2)}=\frac{y\sqrt{(k^4x^2+g^4y^2)}}{k^2x}$; zrównanie zaś (A) na Ellipſę daie $g^4y^2=k^2g^4-k^2g^2x^2$; co włożywſzy w wartość na ſtyczną; otrzymamy $TM=\frac{y}{kx}\sqrt{[g^4-x^2(g^2-k^2)]}=\frac{y}{k}\sqrt{(FT.GT)}$; s kąd $GT=\frac{TM^2.k^2}{FT.y^2}$; $PT=\frac{y^2.ST}{k^2}$; przeto $GT=\frac{TM^2.ST}{PT.FT}$: mamy zaś s podobieńſtwa tróykątów $TG:TS=TM:TR$ - - $TR=\frac{TM.TS}{GT}$, włożywſzy za GT wartość dopiero znalezioną, wypadnie - - $TR=\frac{FT.PT}{TM}$, to ieſt: $TM:PT=FT:TR$, więc tróykąty PMT, RFT, ſą ſobie podobne, i kąt FRT ieſt kątem proſtym: przez tenże ſam ſpoſób doydziemy że i kąt GQT ieſt proſtym. Ta właſność uczy nas wynaydować geometrycznie obydwa ogniſka w Ellipſie maiąc śrzodek i ſtyczną: poprowadziwſzy bowiem z śrzodka S, do ſtyczney linie SR, SQ, ſobie i połowie

osi

osi więkſzéy równe, potém s punktów R, Q, ſpuściwſzy dwie pionowe, te przeydą koniecznie przez ogniſka F, G; co czyni CZWARTĄ WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Równaymy teraz tróykąty podobné FRT; PMT, SQT; dla wynalezienia wartości na FR, GQ, będzie naprzód:

$$TM:PM=FT:FR \text{ - - } FR=\frac{FT.y}{TM}$$

$$TM:PM=TG:GQ \text{ - - } GQ=\frac{TG.y}{TM}$$

w te oſtatnie zrównania włożywſzy wartość wyżey znaleziona na TM, wypadnie $FR=k\sqrt{\frac{FT}{GT}}$ - - - - - - $GQ=k\sqrt{\frac{GT}{FT}}$, a przeto $FR.GQ=k^2=CS^2$ to ieſt: *że oś mnieyſzá Ellipſy ieſt śrzednią proporcyonalną między dwiema pionowémi ſpuſzczonemi s ſtyczney do ogniſk.* PIĄTA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Ieżeli ieſzcze s śrzodka ſpuſzczemy na ſtyczna, pionową SL, ta naprzód rozdzieli tróykąt SRQ na dwa równo-boczne, i równo-kątné podług właſności III: powtóre uczyni tróykąt STL podobny każdemu s trzech uważanych w poprzedzaiącey właſności: przeto

$$FT:FR=ST:SL \text{ - - } SL=\frac{ST.FR}{FT}=\frac{k.ST}{\sqrt{FT.GT}},$$

poprzedzaiąca zaś właſność dała $FR=\frac{k.FT}{\sqrt{FT.GT}}$, przeto $SL-FR=\frac{k.SF}{\sqrt{FT.GT}}=SN$, s kąd otrzymamy:

$$SL+SN=\frac{k.GT}{\sqrt{(FT.GT)}};\quad SL-SN=\frac{k.FT}{\sqrt{(FT.GT)}},$$

a przeto $SL^2-SN^2=k^2=SC^2$, - - $SN=\sqrt{(SL^2-SC^2)}$, zrównanie na wynalezienié punktu N, s którego ſpuſzczona linia pionowa FN, przeydzie przez ogniſko.

Gdybyśmy punkt P przenieśli do ogniſka; a punkt M, na przyſtawę pionową wychodzącą z F; byłoby $x=\sqrt{(g^2-k^2)}$; $x^2=g^2-k^2$; co włożywſzy w zrównanie (A) na Ellipſę, otrzymamy $y=\frac{k^2}{g}$, wartość na LINIĄ RÓWNANIA (*Parameter*). Ta linia daie nam związek obydwóch osi w Ellipſie, które łą iey śrzednicami razem: właſność II. Ellipſy odkryła nam znowu związek między AS, FM, GM; maiąc zaś na pamięci §§. 10. 11. możemy ten związek przenieść do innych śrzednic iakichkolwiek. A naprzód wiémy z właſności ogólnych linii 2*go* porządku, że pociągnąwſzy z śrzodka do punktu M linią SM, i tę wziąwſzy za śrzednicę; linia SK równo-legła ſtyczney TM, będzie iey śrzednica ſprzężoną: Nazywam $SM=p$, $SK=q$, kąt $KSM=\varphi$, mamy s §. 11. - - $p^2+q^2=g^2+k^2$; z §. 10. zró. (3) - - $gk=pq.$*Wſt.* Φ aże $p^2=x^2+y^2=k^2+\frac{(g^2-k^2)x^2}{g^2}$; $q^2=g^2+k^2-p^2=g^2-\frac{x^2(g^2-k^2)}{g^2}=FM.GM$, znáydziémy przez podobne rozumowania że $p^2=FK.GK$, to ieſt: *że śrzednica każda w Ellipſie, ieſt śrzednią proporcyonalną między dwoma liniami wychodzącemi z ogniſk do punktu iey śrzednicy ſprzężoney na Ellipſie.* SZOSTA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Aże pod właſ. I. II. $FM.GM=\frac{x^2}{g^2}FT.GT$, przeto $SK=q=\frac{x}{g}\sqrt{(FT.GT)}$. Związek wſpół-uſzykowanych w zrównaniu na Ellipſę (A), wyrażony ieſt przez funkcyą dwóch osi SA, SC; maiąc teraz wyraz osi nowych SM, SK, przez pierwſze; nie będzie nam trudno wynaleśdź wartości x, y, przez funkcyą SM, SK; stąd zaś wyciągnąć wartość na KI rownóleglą

leglą

ległą MP. Pamiętáymy łylko że $TM = \frac{y}{k}\sqrt{FT.GT}$; $PT = \frac{y^2g^2}{k^2x}$; i że tróykąty TMP, SKI, ſą ſobie podobne: przeto

$$TM:MP = SK:KI \text{ - - } KI = \frac{SK.y}{TM} = \frac{kx}{g}$$

$$TM:TP = SK:SI \text{ - - } SI = \frac{SK.TP}{TM} = \frac{gy}{k}$$

skąd wypádá. $KI.SI = xy = SP.PM$: to ieſt: *że do dwóch punktów Ellipſy leżących na śrzednicach ſprzężonych poprowadziwſzy wſpół-uſzykowane, mnogość iednych, ieſt równa mnogości drugich,* czyli *przyſtawy ſą w ſtoſunku ſpacznym do odcinków.* Siodma własność Ellipsy.

Wróciwſzy ſię do zrównań pod włáſnością VI, $p^2 = k^2 + \frac{(g^2-k^2)x^2}{g^2}$; $p^2 = x^2+y^2$; wyciągniemy s pierwſzego $x = \frac{g\sqrt{(p^2-k^2)}}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$; z drugiego $y = \frac{k\sqrt{(g^2-p^2)}}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$; a przeto $KI = \frac{kx}{g} = \frac{k.\sqrt{(p^2-k^2)}}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$; $SI = \frac{gy}{k} = \frac{g\sqrt{(g^2-p^2)}}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$, skąd poznamy kąty PSM, KSI, w funkcyach ſamych osi.

Zrównanie biegunowe na Ellipſy.

Zoſtawiliśmy na końcu §. 12. zrównanie (*Aa*) na wſzyſtkie linie *2go* porządku, chcieymy ie teraz przyſtóſować do Ellipſy, tak aby w nie żadne inne ilości ſtateczne nie wchodziły prócz osi więkſzey g, i mimo-śrzodu FS, który nazwiemy m, należy nam więc c, d, w zrównaniu (*Aa*) będące wyrazić przez g, m; aże $c = \frac{k^2}{g}$, $m^2 = g^2-k^2$; przeto $c = \frac{g^2-m^2}{g}$, $d = g-m$, włożywſzy te wartości za c, d, w zrównanie (*Aa*), wypadnie:

$$r=\frac{g^2-m^2}{g-m\text{Doſt.}v} \quad . \ . \ . \ . \quad (Ab)$$

Zrównanie (*Ab*) na Ellipſę zamyka dwie ilości odmienne, *r* i kąt *v*; co nas prowadzi do rozległyſzégo poznawania linii krzywych, w których nie tylko dwie linie proſté któreśmy wſpół-uſzykowanemi nazwali, bydź mogą ilościami odmiennémi i wyrażać naturę linii krzywey; ale nawet i kąty. Takowa linii krzywych uwaga wielkiego w mechanice użycia, odmienia całe poſtać zrównania, i wyciągać po nas będzie oſobnego roſtrząſania.

Wróćmy ſię ieſzcze do dawnego ſtanu Ellipſy, a chcąc początek odcinków s śrzodka *S* przenieść do wierzchołka *A*, potrzeba nam położyć w zrównaniu (*A*), $g-x$ za x; a przez tę ſztukę zamieniemy ie na $y^2=\frac{k^2}{g^2}(2gx-x^2)$, nazwiymy linią równania $\frac{k^2}{g}=f$, odległość $AF=d$, będzie $d=g-\surd(g^2-gf)$, rozwiązawſzy to zrównanie otrzymamy $g=\frac{d^2}{2d-f}$; . . $k=\surd fg=d\frac{\surd f}{\surd(2d-f)}$; gdzie $2d>f$, z natury Ellipſy; włożywſzy za *g*, *k*, dopiero znalezione wartości, otrzymamy zrównanie na Ellipſę.

$$y^2=2fx-\frac{(2d-f)f.x^2}{d^2} \quad . \ . \ . \quad (A').$$

gdzie wierzchołek linii krzywey ieſt początkiém odcinków.

§. XIV.

Parabola i iey właſności.

Przyſtąpmy iuż do wprowadzenia nowego warunku w zrównanie $y^2=n+px+qx^2$, to ieſt uczyńmy $q=0$, a zrównanie $y^2=n+px$, wyrazi nowy gatunek linii 2go porządku; którego chcąc poznać ryſunek wyrzućmy *n*, czyli położmy za *x*, $x-\frac{n}{p}$; a

zamie-

zamieniemy ie na $y^2=px$, $y=\pm\sqrt{px}$, ponieważ x ieſt ſtopnia nieparzyſtego, wſzyſtkie iego wartości dodatne uczynią y rzetelnem, to ieſt wſzyſtkie wzroſty x, które ſię tylko pomyślić mogą, byleby były dodatne, dadzą na y dwie wartości rzetelne równe; linia więc tem zrównaniem opiſana rościągnie dwie odnogi bez końca w tę ſtronę, gdzie odcinki przypadaią dodatne, i oś przedzielać ią będzie na dwie części równe. Taką linią wyſtawia nam fig. 25. gdzie Fig. 25. oś AB pociągnie ſię z odnogami linii krzywey w odległość nieſkończoną: biorąc zaś w zrównaniu $y=\pm\sqrt{px}$, x odiemnie; y na każdą takową wartość będzie uroionem, przeto linia krzywa od początku odcinków A, ku T nigdzie ſię nie pociągnie, a ieżeli oś większa ieſt nieſkończoną, mimo-śrzód, który ieſt funkcyą tey osi podług §. 12, będzie także nieſkończenie odległy, i oś mnieyſza przechodząca przez śrzodek także nieſkończona. Linia ta krzywa nazywa ſię PARABOLA *(Parabola)* maiąca dwie odnogi nieſkończone na ſtronie odcinków dodatnych, śrzodek, a przeto osi obydwie bez końca.

Ieżeli w zrównaniu (A') na Ellipſę, uczyniemy $2d-f=o$, to zamieni ſię na zrównanie $y^2=2fx$ wyrażaiące Parabolę: uczyniwſzy zaś $2d-f=o$, wprowadzamy kondycyą iſtotną Paraboli, to ieſt $2d=f$, czyli: *że w Paraboli przyſtawa przechodząca przez ogniſko, czyli miara równania ieſt dwa razy więkſza iak odległość tegoż ogniſka od wierzcholka.* Aże drugie ogniſko przypadaćby powinno z drugiey ſtrony śrzodka, który ieſt nieſkończenie odległy, Parabola więc nie ma tylko iedno ogniſko, i w niem $FL=2AF$. PIERWSZA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Ieżeli $AP=x$, $PM=y$, $y^2=2fx=2FL.AP$; $FP=x-\frac{1}{2}f$; więc $FM^2=y^2+x^2-fx+\frac{1}{4}f^2$; $FM=x+\frac{1}{2}f=AP+AF$. DRUGA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Ta własność Paraboli podaie nam barzo łatwy ſpoſób znalezienia iey punktów geometrycznie: ieżeli

bowiem

bowiem $FM=AP+AF$, na osi AB poprowadziwſzy równo-ległe MPM', i na każdy odcinek ryſuiąc łuk koła którego promień $=AP+AF$, gdzie te łuki przetną linie równo-ległe MPM' tam będą punkta Paraboli.

Poprowadziwſzy do punktu M, ſtyczną MT, punkt T oznaczemy z właſności ogólney na linie 2go porządku, ieſt bowiem $BT=\frac{g^2}{x}$ rachuiąc odcinki s śrzodka; biorąc ie zaś u wierzchołka A, trzeba za x położyć $g-x$; więc $BT=\frac{g^2}{g-x}$, $AT=\frac{g^2}{g-x}-g=\frac{gx}{g-x}$; aże $g=\frac{1}{0}$, $g-x=g$, więc $AT=x=AP$.

Trzecia własność Paraboli.

Ponieważ $FT=AT+AF=AP+AF=FM$, tróykąt FTM ieſt równo-ramienny, i kąt $TMF=$ kątowi MTF przeto $MFP=2MTF$; $Sty.MTP=\frac{y}{2x}$; $Sty.2.MTP=Sty.MFP=\frac{y}{2x-f}=\frac{\sqrt{2fx}}{2x-f}$; i znowu FT będąc $=FM$, proſto-padła FS z ogniſka na ſtyczną rozdzieli TM na dwie części równe: powtóre AT będąc równé AP, pionowá AS rozdzieli także TM na dwie części równe, więc punkt S ieſt ſpólny dwóm pionowym AS, FS. S tych właſności wypadá; $TM=\sqrt{(4x^2+2fx)}=2\sqrt{[x(x+\frac{1}{2}f)]}=2\sqrt{(AP.FM)}$, $TS=\sqrt{(AP.FM)}=\sqrt{(AT.FT.)}$ z właſności zaś tróykątów mámy:

$AS:TS=AF:FS$ - - - $AF:AS=AS:AP$.

$FS=\frac{AF.TS}{AS}=\frac{AF.TS}{\sqrt{(AF.AP)}}=\sqrt{(AF.FM)}$. Czwarta własność Paraboli.

Spuściwſzy na ſtyczną proſto-padłą MW, mámy

$PT:PM::PM:PW$ - - $PW=\frac{y^2}{2x}=\frac{2fx}{2x}=f$, więc $PW=FL=2AF$, a przeto $FW=AP-AF+AF=AP+$

AF=

$AF=FM=FT$; PIĄTA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Prowádźmy od M równo-ległą osi MN, i przeciągnimy ſtyczna do X, ponieważ właſność V. uczy nás że kąt $FMW=$ kątowi FWM; $PMN=TNW=90°$. odciągnąwſzy od każdego WMN, wypada kąt $NMX=$ katowi FMT. wſzyſtkie więc linie równo-ległe osi pádaiąc na Parabolę i odbiiaiąc ſię pod kątem równym do ſtyczney, zniydą ſię w ogniſko.

Przyſtóſuymy teraz zrównanie Biegunowe (Aa) do Paraboli, którego iuż niemożemy przez funkcyą osi i mimo-śrzodu wyrazić, dla tego że obydwie te linie ſą nieſkończone w Paraboli, możemy ie atoli wyrazić albo przez linią równania, albo przez odległość ogniſka od wierzchołka. Ze zaś w paraboli

$d=\frac{c}{2}$ zrównanie biegunowe będzie:

$$r=\frac{2d^2}{d+dDoſt.v}, \text{ albo } r=\frac{c^2}{c+cDoſt.v} \text{ - - } (Ac).$$

§. XV.

Hyperbolá i iéy właſności.

Zoſtaie nám ieſzcze ieden warunek do wprowadzenia w zrównanie $y^2=n+px+qx^2$, to ieſt żeby q było ilością koniecznie dodatną, skąd nám wypaśdź powinien trzeci gatunek linii 2go porządku. Dla poznania ryſunku tey nowey linii krzywey, wyrzućmy drugi termin s tego zrównania, czyli odnieśmy odcinki do śrzodka, wziąwſzy $x=x-\frac{p}{2q}$, a za $n-\frac{p^2}{4q}=-a$, zrównanie podane ſtanie ſię:

$$y^2=qx^2-a.$$

pierwſzá uwagá nad tém zrównaniem przekonywá nás, że a będąc odiemnem, uczyniwſzy $x=0$, y ſtanie ſię uroionem, to ieſt że linia krzywá, nie przeydzie tam, gdzie przypadá iey śrzodek: biorąc potem za x wartości mnieyſze od $\sqrt{\frac{a}{q}}$, ieſzcze y nie prze-

ſtanie

ſtanie bydź uroionem: kiedy $x=\pm\sqrt{\frac{a}{q}}$, $y=0$, to ieſt że dopiero w odległości $\sqrt{\frac{a}{q}}$ od śrzodka, linia krzywa przeciąwſzy oś, zacznie ſię z dwóch ſtron, to ieſt w ſtronie odcinków dodatnych i odiemnych; będzie ſię więc znaydować rozerwana w dwóch mieyſcach, tak dalece: że obrawſzy na fig. 26 *C* za śrzodek, uczyniwſzy $CA=CB=\sqrt{\frac{a}{q}}$, linia krzywa zacznie ſię przy *A*, i *B*, w żadnem zaś mieyſcu przy linii *AB*, nie będzie przechodzić: przeſzedłſzy za *A* i *B* wſzyſtkie wartości na x będą większe od $\sqrt{\frac{a}{q}}$, aże takie wartości bądź dodatne bądź odiemne, uczynią pierwiaſtki zrównania zawſze rzetelnemi, i nie odmienią nic w ich wyrazie dla potęgi x parzyſtey, przeto linia krzywa począwſzy ad *A* i odwróciwſzy ſię od śrzodka rościągnie dwie odnogi bez końca: toż ſamo przytrafi ſię u *B*; na każdą bowiem wartość dodatną x, będą odpowiadać dwie wartości y równe, i na każdą wartość odiemną, dwie takież: linia więc krzywa będzie miała cztéry odnogi nieſkończone, to ieſt dwie na odcinki dodatne odpowiadaiące przyſtawom dodatnym i odiemnym; i dwie na odcinki odiemne, naznaczone także dwoiakiemi przyſtawami. Iedna para takowych odnóg będzie oddzielona od drugiey linią *AB*; ieżeli tę linią weźmiemy za oś, a razem za śrzednicę iako przechodzącą przez śrzodek, będzie $CA=\sqrt{\frac{a}{q}}=g$; $a=qg^2$, i zrównanie na linią którą nazwano *Hyperbola* będzie: Fig. 26.

$$y^2=q(x^2-g^2).$$

Zatrzymaymy ſię teraz nad pierwiaſtkowém przypuſzczeniem, zbliżywſzy te rozumowania, które nam ſłużyły do poznania ryſunku w Ellipſie. Wzięliśmy

w pierwſzem

w pierwſzém zrównaniu *a* za odiemné, i uczyniwſzy $x=0$, wypadło *y* uroioné, ale że w Ellipſie i w każdey linii 2go porządku biorąc śrzodek za początek odcinków, na $x=0$, otrzymaliśmy zawſze wartość drugiey śrzednicy czyli osi mnieyſzey, takowa oś iak widzemy ieſt uroioną w Hyperboli, czyli przez te mieyſca gdzie oś poprzeczna przypada, Hyperbola nie przechodzi; gdybyśmy byli wzięli *a* za dodatné; na $x=0$, otrzymalibyśmy byli *y* rzetelné, ale na $y=0$, byłoby wypadło *x* uroioné, to ieſt Hyperbola znaydowałaby ſię była na linii *RS*, a oś *AB* byłaby była zoſtała uroioną. S tey uwagi wypada: *naprzód* że w Hyperboli iedna oś ieſt koniecznie uroioną: *powtóre*, że którąkolwiek s tych osi weźmiemy za uroioną, linia krzywa odmieni ſwoie położenie, ale nic nie odmieni w ſwoiey naturze i właſnościach: *potrzecie* że to położenie Hyperboli zawiſło od *a*, biorąc ie za dodatne lub odiemne.

Wprowadziwſzy tę właſność ſłużącą ſamey Hyperboli, to ieſt: że oś mnieyſza *k*, ieſt uroioną $k\sqrt{-1}$, w zrównanie na Ellipſę; kładąc $-k^2$ za k^2, zamieniemy ie na zrównanie wyrażaiące Hyperbolę:

$$y^2 = \frac{k^2}{g^2}(x^2 - g^2) \quad . \quad . \quad (B)$$

co właśnie zgadza ſię s tem pierwiaſtków uroionych tłómaczeniem, któreśmy w Algebrze pod §. 15 wyłożyli: oś bowiem uroioná, pokazuie nam tylko, że żaden iey punkt nie należy do linii krzywey, ale będąc linią oderwaną od odnogi, wyrażać może barzo dobrze ſtoſunki i właſności linii na tych odnogach zoſtaiących, a przeto może zaſtępować w zrównaniu mieyſce ilości ſtatecznych. Iakoż przez ten wprowadzony warunek, możemy wſzyſtkie właſności Ellipſy przerobić na właſności Hyperboliczné, byleby te były funkcyami osi. Odległość n.p. ogniſk w Hyperboli $=\pm\sqrt{(g^2+k^2)}$, będąc wyrazem rzetelnym, dowodzi że w Hyperboli ſą dwa ogniſka *F*, *G*, tak iak w Ellipſie: to ieſt prowadziwſzy przez śrzodek linią pod kątem, którego doſtawa równa ieſt pół-osi g, i na tę z ogniſka ſpuściwſzy pionową, przeciw-proſto-kątna tego tróykąta wyrazi nam geometrycznie odległość ogniſka od śrzodka $CF=\sqrt{(g^2+k^2)}$; ponieważ $CP=x$, $PM=y$, $FP=x-\sqrt{(g^2+k^2)}$, $GP=x+\sqrt{(g^2+k^2)}$; $FM^2=FP^2+PM^2=\frac{(g^2+k^2)x^2}{g^2}$ $\frac{-2g^2x\sqrt{(g^2+k^2)}+g^4}{g^2}$, czyli $FM=\frac{x\sqrt{(g^2+k^2)}}{g}-g$; podobnie znaydziemy $GM=\frac{x\sqrt{(g^2+k^2)}}{g}+g$, a przeto - - $GM-FM=2g$, to ieſt: *iak w Ellipſie ſumma, tak w Hyperboli rożnica linii z ogniſk do iakiegokolwiek punktu M prowadzonych, ieſt wyrazem ſtatecznym i równym osi więkſzey AB.* PIERWSZA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI.

Chcąc prowadzić ſtyczną MT, a przeto oznaczyć punkt T, mámy naprzód z §. 12. $CT=\frac{g^2}{x}$, $PT=CP-CT=\frac{x^2-g^2}{x}=\frac{y^2g^2}{k^2x}$; $FT=\frac{x\sqrt{(g^2+k^2)}-g^2}{x}$; $GT=\frac{x\sqrt{(g^2+k^2)}+g^2}{x}$; przypatrzywſzy ſię wartościom wyżey znalezionym na FM, GM, i porównawſzy ie z FT, GT; wypadnie:

$FT:FM=g:x$ - - $GT:GM=g:x$ - - $FT:FM=GT:GM$: to ieſt: *Wſt.FMT:Wſt.FTM=Wſt.GMT.Wſt FTM*, więc *Wſt.FMT=Wſt.GMT.* czyli: *ſtyczná do iakiegokolwiek punktu M, dzieli kąt zawarty miedzy dwiema liniami z ogniſk do tegoż punktu prowadzonemi, na dwa kąty równe.* DRUGA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI.

Wartość znaleziona na PT; i wyciągniona z (B) na PM, da nam poznać MT iako przeciw-proſto-kątną tróy-kata TPM:. otrzymamy bowiem

$$MT=\frac{y\sqrt{(k^4x^2+y^2g^4)}}{k^2x}=\frac{y\sqrt{[(k^2+g^2)x^2-g^4]}}{kx}=\frac{yg}{kx}.$$

√ (FM.

$\sqrt{(FM.GM)}$. Poſpuſzczáwſzy na ſtyczną MT przeciągnioną z śrzodka i obudwóch ogniſk pionowe CQ, FH, GK, podobieńſtwo tróy-kątów daie nám:

$$TM:TP::CT:TQ \text{ - - } TQ = \frac{TP.CT}{TM} = \frac{g^3y}{kx\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:MP::CT:CQ \text{ - - } CQ = \frac{CT.y}{TM} = \frac{gk}{\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PT::FT:TH \text{ - - } TH = \frac{FT.PT}{TM} = \frac{g^2y.FM}{kx\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PM::FT:FH \text{ - - } FH = \frac{FT.PM}{TM} = \frac{k.FM}{\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PT::GT:TK \text{ - - } TK = \frac{GT.PT}{TM} = \frac{g^2y.GM}{kx\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PM::GT:GK \text{ - - } GK = \frac{GT.PM}{TM} = \frac{k.GM}{\sqrt{(FM.GM)}};$$

ſkad wypáda $FH.GK = k^2$ tak iak w Ellipſie pod właſn. §. powtóre $TH.TK = \frac{g^4y^2}{k^2x^2} = CT.TP$, to ieſt: $TH:CT::TK:TP$. Pociągnąwſzy linią CH, i podobną ſobie wyobraziwſzy CK, znáydziem że $QH = QK = \frac{TH+TK}{2} = \frac{gy\sqrt{(g^2+k^2)}}{k\sqrt{(FM.GM)}}$, ſtąd zaś $CH^2 = CQ^2 + QH^2 = g^2$, $CH = g$, znowu iak w Ellipſie pod właſn. III. to ieſt: $CH + CK = GM - FM = AB$, znaydziemy ieſzcze $CQ + HF = \frac{kx\sqrt{(g^2+k^2)}}{g\sqrt{(FM.GM)}}$; a przeto $(CQ+FH)^2 - CQ^2 = k^2$, to ieſt: $CX = \pm\sqrt{(k^2+CQ^2)}$ na oznaczenie ogniſk w Hiperboli.

Widzemy więc oczywiście, iż uważane dotąd własności Hiperboli ſą iey z Ellipſą ſpólne, tak dalece, że Hyperbola uważać ſię może iako Ellipſa rozerwana i odwrócona od osi mnieyſzey. Nim przyſtąpiemy do właściwſzych charakterów tey linii krzywey, przeróbmy do niey zrównanie biegunowe §. 12. Mamy zaś my zaś w Hyperboli odległość wierzchołka od ogniſka $d=m-g$; linią porównaniá $c=\frac{k^2}{g}=\frac{m^2-g^2}{g}$, a włożywſzy te wártości w zrównanie (Aa) §. 12. wypadnie na Hiperbolę.

$$r=\frac{m^2-g^2}{g+m Doſt.v} \quad . \quad . \quad . \quad (Ad).$$

§. XVI.

Hiperbola między ledwo-nie ſtycznemi, i iey właſności

Kiedy linie proſte z ogniſk Hiperboli wychodzące przywiodły nas do właſności takich, iakieśmy doſtrzegli w Ellipſie; zaſtanówmy ſię nad właſnościami iey ſtycznych, które nas może nauczą znakomitſzych charakterów Hyperboli. Odległość od tego punktu, gdzie ſtyczna przeciná oś wypadła nam z §. 12. $CT=\frac{g^2}{x}$, CT będąc całkiem zawiſłé w ſwych odmianach od x, nie może ſię inaczéy zmniéyſzać, tylko kiedy ſię x powiękſza, to ieſt punkt T na fig. 26. nie może ſię zbliżać do śrzodka, tylko kiedy ſię odcinek CP od niego oddala, poluwaiąc P, a z niem punkt M przez wſzyſtkie odmiany wzraſtaiące x, iakóżkolwiek zmnieyſzać ſię będzie CT, nigdy punkt T nie padnie na C, i nigdy TM nie przeſtanie bydź ſtyczną, poki linia krzywa zoſtawać będzie przy ſwoich iſtotnych właſnościach, to ieſt póki zrównanie na Hyperbolę nic nie odmieni w ſwoim związku iſtotnego. Tu pamiętni na początki §. 16. Algebry, widzemy oczywiście, ze CT ubywaiąc zbliża ſię do ſwoiey granicy o, a z niem $CP=x$ wzraſtaiąc do granicy ∞, ale obydwie te iłości nigdy ſwych granic nie doſięgną, poki natura linii krzywey zoſtanie ta ſama. Wyſtawić ſobie CT, i CP u ſwoich granic, ieſt to iedno co wyſtawić ſobie że linia krzywa, i iey ſtyczna TM odmieniły ſwóy iſtotny charakter, i przeſtały bydź tem, czem ſą teraz; ale razem ieſt to ſobie wyſtawić że linia krzywa i iey ſtyczna maią za granice ſwych odmian inne linie, do których ſię

Fig. 26.

coraz

coraz barziey zbliżaią, i w które ſię zamieniaią, kiedy punkt *T* padnie w śrzodek, chcąc takowe granice poznać, wprowadźmy warunek, na to potrzebny, to ieſt: że $x = \frac{1}{0}$, czyli że x doſzło do tego ſtanu, w którym żadna ilość ſkończona nie może go ani zmnieyſzyć ani powiękſzyć, *CT* będzie $= 0$, a linia *TM* ciągnąć ſię nad odnogą Hyperboli, i zbliżaiąc ſię coraz barziey do niey, nigdy ſię linii krzywey nie dotknie, chyba w odległości nieſkończoney, to ieſt kiedy Hyperbola przeſtanie bydź Hyperbolą, i zamieni ſię na linią inney natury do którey ſię iako do ſwey granicy zbliżała. Takową linią ciągnącą ſię bez końca nad odnogą Hyperboli maluie nam *CX* na fig. 27. którą nazywać będziemy **Ledwo-niestyczną** linii krzywey (*Aſymptota curvae*). Naturę takowey ledwo-nieſtyczney *CX* wyciągniemy z zrównania (*B*) na Hyperbolę, uczyniwſzy w niem $x = \frac{1}{0}$, a przeto zmazawſzy wſzyſtkie ilości ſtateczne dodane lub odciągnione, które przed x nikną. Tym ſpoſpobem zrównanie (*B*) zamieni ſię na $\frac{y}{x} = \frac{\pm k}{g}$, które wyrażą dwie linie proſte *CX*, *CZ*, to ieſt na y dodatnę i odiemne odpowiadaiące odcinkóm dodatnym; i znowu *CW*, *CU* odpowiadaiące x odiemnym, ciągnące ſię po nad drugiemi dwiema odnogami Hyperboli. Aże wprowadziwſzy $x = \frac{1}{0}$ w zrównanie (*B*), odnieśliśmy Hyperbolę do tego mieyſca, w którem ſię linia *CX* zetknie z Hyperbolą, to ieſt gdzie punkta Hyperboli zmieſzaią ſię s punktami linii proſtey *CX*, i linia krzywa zamieni ſię na ledwo-nieſtyczną wyrażoną zrownaniem $\frac{y}{x} = \pm \frac{k}{g}$. Przypadek ten ſzczególny, na który nas włáſności Hyperboli naprowadziły, ogarniaiąc ogólnieyſzym ſpoſobem, widzemy, *naprzód*: że linie krzywe maiąc odnogi nieſkończone zbliżaią ſię ſwym wzroſtem do innego rodzaiu linii iako do ſwych granic; *powtóre* że takowe granice

Fig. 27.

linii krzywych wypadaią z ich zrównań, uczyniwſzy wſpół-uſzykowane nieſkończonemi; przez co zmnieyſzywſzy liczbę terminów w zrownaniu podanem, zamieniamy związek ſłużący linii krzywey, na związek wyrażaiący naturę ledwo-nieſtyczney. Linie więc krzywe naturą między ſobą różne, różnić ſię ieſzcze mogą przez granice, do których ſię zbliżaią, a przeto nowe ich właſności wypaśdź mogą s porównania ich co do granic. Nim nową tę teoryą ogólniey roſtrząſać nam przyidzie, zatrymaymy ſię nad właſnościami Hyperboli położoney między ledwo-nieſtycznemi, a uwagi teraźnieyſze ſłużyć nam będą za wzór do przyſzłych dociekań.

Kiedy zrównanie (B), zamieni ſię na $\frac{y}{x}=\frac{k}{g}$, punkt M fig. 27. zniydzie ſię s punktem X, i $\frac{y}{x}$ wyrażać będzie ſtyczną kąta PCX: u wierzchołka więc A poſtawiwſzy pionową AD, będzie ſtyczna $ACD=\frac{AD}{CA}=\frac{k}{g}=\frac{y}{x}$, a przeto $k=AD$, $CD=\sqrt{(g^2+k^2)}=CF$; ſtyczna $2ACD=Sty.DCE=\frac{2kg}{g^2-k^2}$, (§. 54. Alg.), gdyby więc było $AD=AC$, $Sty.ACD=1=Sty.45°$; $Sty.DCE=\frac{1}{0}$, to ieſt, kąt między ledwo-nieſtycznemi zawarty byłby kątem proſtym, i takowa Hyperbola nazywa ſię RÓWNO-BOCZNĄ (*Hyperbola Aequilatera*), na którą zrównanie $y^2=x^2-g^2$; $CD=CF=k\sqrt{2}$. Wróćmy ſię do pierwſzego gatunku Hyperboli między ledwo-nieſtycznemi, gdzie $g>k$, ponieważ $PX=\frac{kx}{g}$, $CP=x$, $CX=\frac{x\sqrt{(g^2+k^2)}}{g}=FM+AC=GM-AC$; będzie $MX=PX-PM=ZN=\frac{kx-gy}{g}$; $NX=PX+PM=\frac{kx+gy}{g}=MZ$; $XM.XN=\frac{k^2x^2-g^2y^2}{g^2}$, włożywſzy

za

za g^2y^2 wartość wyciagnioną z zrównania (B), otrzymamy $XM.XN = ZN.ZM = k^2 = AD^2$. PIERWSZA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Poprowadziwſzy s punktu M, ML równo-ległą ledwo-nieſtyczney CZ; kąt $LXM =$ kątowi LMX, przeto $LM = LX$, i tróykąt $LXM \backsim$ tróykątowi DCE; skąd $DE:CE = XM:LM$ - - $LM = \frac{CE.XM}{DE} = \frac{(kx-gy)\surd(g^2+k^2)}{2kg}$, $CL = CX - LM = \frac{(kx+gy)\surd(g^2+k^2)}{2gk}$; $CL.LM = \frac{(k^2x^2 -- g^2y^2)(g^2+k^2)}{4k^2g^2} = \frac{k^2+g^2}{4}$. to ieſt: że wziąwſzy iednę ledwo-nieſtyczną za linią odcinków, i na tey prowadząc przyſtawy do iakiegokolwiek punktu Hyperboli równoległe drugiey ledwo-nieſtyczney, mnogość dwóch takowych wſpół-uſzykowanych ieſt funkcyą nieodmienną. Z wierzchołka więc A, pociągnąwſzy AH ró-wnoległą CD, z właſności tróykątów wypada $CH = AH$; aże $CL.LM = CH.AH = AH^2$, linia AH będzie niby linią porównania, której potęga druga równa ſię wſpół-uſzykowanym wſpomnionym na iakikolwiek punkt Hyperboli. DRUGA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Ponieważ $CH = HE = \frac{1}{2}\surd(g^2+k^2) = AH$, nazwawſzy tę linią iako ſtateczną a, przytym $CP' = x$, $P'M' = y$; z właſności drugiey wypada nam zrównanie na Hyperbolę między ledwo-nieſtycznemi $yx = a^2$ -- - (C). gdzie przyſtawa będąc równo-legią CX, nie przecina tylko w iednem mieyſcu linią krzywą. Chcąc ieſzcze doſtąpić ogólnieyſzego zrównania na Hyperbolę między ledwo-nieſtycznemi, czyli chcąc przyſtaw nie przywięzywać do żadnego warunku, biorę linią iakąkolwiek IK, i tey przez M' poprowadziwſzy równo-ległą $Q'M'$ przecinaiącą linią krzywą w dwóch punktach, nazywam $CQ' = t$, $Q'M' = u$, a podobieńſtwo tróykątów $P'M'Q'$, CIK daie mi naſtępuiące proporcye:

$$KI:CI::Q'M':P'Q' \quad - - - \quad P'Q'=\frac{u.CI}{KI};$$

$$KI:CK::Q'M':P'M' \quad - - - \quad P'M'=\frac{u.CK}{KI}=y.$$

Aże $CQ'=t=CP'+P'Q'$ - - mamy $x=t-\frac{u.CI}{KI}$, włożywſzy te wartości za x, y, w zrównanie (C), otrzymamy:

$$u^2-\frac{KI.t}{CI}u+\frac{a^2.KI^2}{CK.CI}=0 \quad - \quad - \quad (D).$$

pierwiaſtki tego zrównania ſą dwa przecięcia Hyperboli w punktach M', M; aże linia KI ieſt nieodmienną równie iak CK, KI, bo nie leży na żadnym punkcie linii krzywey, idzie zatem, że mnogość dwóch przyſtaw należących do iednego odcinku zawarta w oſtatnim terminie zrównania, ieſt funkcyą ſtateczną, czyli $Q'M'.Q'M=\frac{a^2.KI^2}{CK.CI}$, TRZECIA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Drugi termin zrównania (D) będąc równy ſummie pierwiaſtków daie nam $Q'M'+Q'M=\frac{KI.t}{CI}=Q'O$, s kąd $OM=Q'M'$, gdy więc cięciwa $M'M$ ſtanie ſię ſtyczną linii krzywey, n.p. VS punkt dotykania ſię Y, przypadnie w ſamym śrzodku linii VS: aże podług właſnosci III. mnogość dwóch przyſtaw do tegóż ſamego odcinku należących ieſt nieodmienna; równaiąc takowe mnogości s ſtyczną do linii krzywey równo-ległą wſzyſtkim innym przyſtawom, wypadnie nam zrównanie $Q'M'.Q'M=b^2$, gdzie b, znaczy przyſtawę dotykaiąca ſię linij krzywey, co nam pokazuie CZWARTĄ WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Te oſtatnie właſności uczą nas ſpoſobu prowadzenia ſtycznych do Hyperboli między ledwo-nieſtycznemi.

mi. Punkt bowiem dotykania ſię leży zawſze w śrzodku linii do ledwo-nieſtycznych prowadzoney, s takiego punktu Y pociągnąwſzy YT równo-ległą ledwo-nieſtyczney CW, podobieńſtwo tróykątów nas przekonywa, że ieżeli $VY=\frac{1}{2}VS$, muſi także bydź $YT=\frac{1}{2}CV$, i $CT=\frac{1}{2}CS$, s kąd łatwy ſpoſób znalezienia punktu V, albo S, a przeto oznaczenia ſtyczney. A ieżeli podług właſn. II. $CT.TY=\frac{g^2+k^2}{4}$, kładąc za CT, $\frac{1}{2}CS$; za TY, $\frac{1}{2}CV$; wypada $CS.CV=g^2+k^2=CD^2$, to ieſt:

$$CS:CD::CE:CV,$$

równaiąc te boki z wſtawami kątów im przeciwległych, znaydziém, że kąt $CSD=$ kątowi CEV, i kąt $CDS=$ kątowi CVE, a przeto linie SD, VE ſą ſobie równo-ległe.

PIĄTA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Krótki zbiór nauki całégo rozdziáłu odkrywá nám pozoſtałé ieſzcze o liniach krzywych dociekaniá.

Stawiwſzy ſobie przed umyſł cały zbiór uwag teraźnieyſzego rozdziału, i upowſzechniwſzy niektóre doſtrzeżone właſności, poznamy łatwo, co nam ieſzcze do uważania w liniach krzywych pozoſtaie. Uwagi ogólne nad zrównaniami 2*go* ſtopnia poſłużyły nam ſzczęśliwie do poznania wſzyſtkich właſności linii 2*go* porządku. Te właſności należą do trzech rodzaiów linii proſtych maiących ſwe punkta położone na linii krzywey, to ieſt: do *cięciw*, *śrzednic*, i *ſtycznych*, s których dwie pierwſze przecinaiąc linie krzywe umieścić ſię mogą w iedney kłaſsie, przywodząc wſzyſtkie właſności do przecięć i ſtycznych. Chcąc ſię trzymać tey ſamey drogi w dociekaniu przymiotów linii wyżſzych porządków, potrzebaby nam bydź w ſtanie rozwiązania tak dokładnie zrównań wyżſzych ſtopni, iak ſtopnia 2*go*. od czego ieſteśmy ieſzcze dalekiemi przez niedoſkonałość Algebry. Nie zoſtaie nam więc inna droga do przeniknienia w rozległéyſze właſności linii iakichkolwiek porządków, iak tylko upowſzechnić tak daleko naſze myśli i uwági nad liniami krzywemi, aby ie uczynić niezawiſłemi od rozwiązania zrównań. Potrzeba nam więc teoryą śrzednic i ſtycznych do takiey wynieść ogólności, aby ta niepotrzebowała innych pomocy Algebry, prócz ogólnych właſności zrównań w Rozdziale III. Pierwſzey Części Algebry wyłożonych. A ponieważ otrzymaliśmy dwoiakiego rodzaiu ſtyczne; iedne należące do punktów linii krzywey w odległości ſkończoney, drugie do punktów w odległości nieſkończoney; te zaś oſtatnie ſłużąc tylko ſamym liniom krzywym odnogi bez końca maiącym, mogą nas nauczyć o iſtotnym charakterze i podziale linii krzywych na te, które ſię w pewney rozległości zamykaią, i te które ſię rościągaią bez końca, wypadá nam naprzód ſtóſować linie krzywe do ledwo-nieſtycznych, i wyciągnąć ogólne ſpoſoby poznaniá ich odnóg. po czem przyſtąpiemy do poznania rozległeyſzego teoryi ſtycznych w odległości ſkończoney, i wſzyſtkich właſności od niey zawiſłych. Nakoniec zatrudniemy ſię roſtrząſaniem przecięć w liniach iakichkolwiek porządków.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Granice ilości CIĄGLE WZRASTAIĄCYCH odmieniaiąc związki zrównań, prowadzą nás do poznania ODNÓG NIESKONCZONYCH w liniach krzywych, skąd wypádá podział linii w każdym porządku na rodzaie i gatunki: granice zaś ilości CIĄGLE UBYWAIĄCYCH odkrywaią znakomitſze cechy ODNÓG SKONCZONYCH, i ſpoſób równania wſzyſtkich linii krzywych s kołem.

§. XVII.

Idąc za ciągiem uwág wyłożonych w poprzedzaiących rozdziałach; nie możemy nie przyznać, że rozeznanie linii krzywych maiących odnogi nieſkończoné, od tych któré ſię w odległości ſkończoney zamykaią, ieſt naygłównieyſzem znamieniem do poznania ich ryſunku. To zaś rozeznanie chcąc ſobie doſtępne uczynić we wſzyſtkich porządkach, to ieſt chcąc ie mieć niezawiſłé od rozwiązaniá zrównań; potrzeba nam ſię zagłębić w teoryą granic, do których ſię odnogi nieſkończoné linii krzywych zbliżaią. Granice té, któreśmy ledwo-nieſtycznemi nazwali, muſzą mieć także ſwoie podziały i gatunki podług różnych wymiarów ilości odmiennych w zrównaniu. Wyſtawmy ſobie różné potęgi ilości odmienney x, lub kilku na raz; odſunąwſzy myślą takowe ilości odmienné do oſtatnich granic ich wzroſtu lub ubywaniá, i poznawſzy ſtan x w takowey granicy względem ilości ſtatecznych i ſkończonych, poznać nam go ieſzcze potrzeba względem innych ilości odmiennych, i względem różnych wymiarów teyże ſamey ilości. Wielcy Geometrowie naſzego wieku począwſzy od Newtona, podzieliwſzy ſię naprzód na zdania, zgodzili ſię potem na różné ſtopnie ilości nieſkończenie wielkich, któré im otworzyły niezmiernie rozległą drogę wynalazków w Matematyce wyżſzéy. Zapatrzywſzy ſię na tyle nieprzepartych prawd przez nich odkrytych, nie można było z wypadków wątpić o pewności wprowadzonych początków. Ale tłómaczenie takowych początków tak zoſtało ciemné i niezrozumiane w ich dziełach; iż zazdroſzcząc ich przenikłości, trzeba było ubolewać nad loſem prawdy, że wydobytá z głębi trudności, małey liczbie rozumów ſtawała ſię doſtępną; a co nayżałośnieyſzá, że Geometryá będąc zawſze ſtolicą oczywiſtości, pokrywać ſię zaczęła zaſłoną, za którą ciężko ſię było przedrzeć rozumowi. Któż bowiem mógł kiedy zrozumiéć ilości nieſkończenie wielkie i nieſkończenie małé podzielone na różne ſtopnie, nieſkończenie większé względem drugich nieſkończonych i t.d? A przecież ten był ięzyk wprowadzony w dziéła wielkich

Ledwo-nieſtyczne linii krzywych prowadzą nás do teoryi granic. Wytyka ſię nie dokładne téy teoryi tłómaczenie.

ludzi, a znaczenie takowych ſłów zoſtało w ciemności ſwoiey aż do czaſów dwóch Geometrów Paryzkiey Akademii d' Alembert i Couſin, s których pierwſzy trafiwſzy ſzczęśliwie na drogę prawdziwego znaczenia; zoſtawił drugiemu chwałę wyłożenia w całey mocy i świetle naytrudnieyſzych początków Matematyki wyżſzey. Obydwa atoli zoſtawili ieſzcze wiele do czynienia w iaſnem wyłożeniu różnych ſtopni ilości nieſkończenie wielkich. Spodziewam ſię że to, co mi długa uwaga podała, będzie miłą dla czytelnika rzeczą, bo go przyprowadzi naprzód do wyſtawienia ſobie w ogólnym obrazie prawd matematyki wyżſzey; powtóre: że teoryą odnóg nieſkończonych w liniach krzywych znaydzie daleko iaśniey i mocniey wyłożoną, niż dotąd była.

Znaczenie i początki teoryi granic.

Przeprowadziwſzy myślą ilość iakąkolwiek odmienną x, przez wſzyſtkie wzroſty lub ubywania aż do ſwoiey granicy (§. 16. Algebry); wiemy tylko z właſnych naſzych przypuſzczeń i natury ſamych granic, że ią potem żadna ilość ſkończona nie może powiękſzyć ani zmnieyſzyć: ale o naturze i innych właſnościach takowey do granic odnieſioney ilości nic ſobie iaſnego i oznaczonego nie możemy wyſtawić, ieżeli tę ilość uważamy ſamotną i oderwaną od wſzelkiego związku; bo poznawania ilości nie mogą bydź tylko względne, to ieſt przez porównanie iey odmian z innemi ilościami: maiąc zaś związek ilości odmienney z innemi ilościami wyrażony przez zrównanie, i w niem odnioſſzy tę odmienną ilość do granicy ſwego wzroſtu lub ubywania, wſzyſtkie ilości ſtateczne i ſkończone które ſą do niey dodane lub odciągnione nie mogąc iey więcey zmnieyſzyć ani powiękſzyć, zniknąć przed nią muſzą, i bydź powinny wymazane z zrównania: to zrównanie ſtraciwſzy niektóre terminy odmieni związek, a z nim całą wartość i naturę ilości odmienney. Nowa ta wartość cale różna od przeſzłey, uczy nas dopiero o właſnościach granicy, do którey ſię ilość w

ſwych

ſwych odmianach zbliżała. Niech będzie zrównanie $Ax+By+C=o$, w którem x, y, ſą odmiennemi; A, B, C, zaś funkcyami ilości ſtatecznych; odnióſſzy x, y, do ſwych granic, czyli iak mowić zwykliśmy uczyniwſzy ie nieſkończonemi, C w porównaniu ich zniknie, i zrównanie ſię zamieni na $Ax+By=o$, daiące nam związek dwóch odmiennych x, y, cale inſzy od przeſzłego, to ieſt związek ten, do którego ſię pierwſze zrównanie przy uſtawicznym wzroście ilości zbliżało. To co mowiemy o ilościach wzraſtaiących, ſłuży równie ilościom ubywaiącym czyli zbliżaiącym ſię do drugiey granicy zero; s tą różnicą, że iako w pierwſzym przypadku terminy złożone s funkcyi ſtatecznych nikną przed odmiennemi, tak w oſtatnim, terminy ilości odmiennych niſzczeią przed ſtatecznemi. S tych uwag wypadaią naſtępuiące prawdy: *Naprzód:* że odnoſzenie ilości odmiennych do ſwych granic nic nas nie uczy w funkcyi, zoſtawuiąc w nas wyobrażenie ciemne i obłąkane o naturze takowych odmian; a przeto że takowy ſpoſób poznawania ieſt właściwy ſamym związkom i zrównaniom. *Powtóre:* że ſpoſób takowy uważania, nic innego nie ieſt, tylko ſztuką rozumu barzo ſzczęśliwą do przerabiania iednych związków ilości na drugie, ſztuką wyciągnioną z głębokich uwag nad właſnościami ilości odmiennych.

Pamiętni o początku wyłożonym w §. 27. Algebry, że natura ilości zależy na iednoſtayności wymiaru, wnieść powinniśmy, że w zrównaniu zamykaiącem ilości odmienne różnego wymiaru, każdy ſtopień mieć powinien inną granicę, do którey ſię w ſwych odmianach zbliża: iakże te granice rozróżnić i znaleśdź w zrównaniu iakiegokolwiek ſtopnia - - $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+$ i t. d. - - $+H=o$. Na rozwiązanie tey trudności przypomniymy ſobie początki §. 19. Algebry, rożdzieliwſzy pytanie teraźnieyſze na dwa przypadki: to ieſt kiedy w zrównaniu podanem wſpół-czynniki A, B, C, i t. d. ſą funkcyami ſamych

mych

mych ilości ſtatecznych; powtóre: kiedy też wſpółczynniki zamykaią drugą ilość odmienną y. Co do pierwſzego: zrównanie podane ſtopnia m, zamyka m pierwiaſtków, s których każdy daie wartość x przez ſunkcyą ilości ſtatecznych. Tyle wiec s tego zrównania wypadnie zrównań pierwſzego ſtopnia, ile m ma iedności. Wyſtawmy ſobie takowe zrównania wyrażaiące pierwiaſtki x, $\alpha x+a=o$, $\beta x+b=o$, - - $\gamma x+c=o$. i t. d. Gdybyśmy teraz w każdem s takowych zrównań, x odnieśli do ſwey granicy; ilości ſtateczne a, b, c, i t. d. caleby znikły, nie zoſtawiwſzy tylko ſamę odmienną x: te ilości odmienne mnożac przez ſię, wypadłby nam tylko ſam naywyżſzy termin zrównania podanego $Ax^m=o$; wſzyſtkie zaś terminy inne caleby odpadły, bo te terminy powſtały w zrównaniu przez mnożenie ilości odmiennych s ſtatecznemi, które w granicach nikną. Więc w zrównaniu zawieraiącem ilości odmienne różnych wymiarów, odnoſzac te ilości odmienne do ſwych granic, wſzyſtkie terminy niżſzych wymiarów nikną przed wyżſzemi. Oſtrzegamy ſobie, że ten przykład wzięliśmy tylko dla obiaśnienia barziey niż dowodu, żeby nam kto przeciwieńſtwa w naſzych rozumowaniach nie zarzucił, na które my mamy pilną uwagę. Poydźmy iuż do drugiego przypadku, wyſtawiwſzy ſobie że w zrównaniu podanem A, B, C, i t. d. ſą ſunkcyami drugiey ilości odmienney w tymże ſamym wymiarze: gdybyśmy byli w ſtanie rozwiazać takowe zrównanie, i wyrazić x przez ſunkcyą y i przez ilości ſtateczne, w każdem zaś takowem pierwiaſtku odnióſſzy x, y, do ſwych granic; otrzymalibyśmy terminy zamykaiące x wymierne, i ſunkcyą y z znakiem pierwiaſtkowym tego ſtopnia, w którym ſię x znaydowało: rozebrawſzy ieſzcze terminy pod znakiem pierwiaſtkowym na ſwe mnożniki, i w nich wymazawſzy ilości ſtateczne dodane lub odciągnione, przyſzlibyśmy do pierwiaſtków,

które

które przez mnożenie wydadzą ſame terminy wymiaru naywyżſzego. Weźmy za przykład zrównanie 2go porządku $y^2+\frac{ex+c}{f}y=-\frac{dx^2+bx+a}{f}$ $y+\frac{ex+c}{2f}=\pm\sqrt{\left[\frac{(ex+c)^2}{4f^2}-\frac{dx^2+bx+a}{f}\right]}$, uczyniwſzy $x=\frac{1}{0}$, $y=\frac{1}{0}$, zoſtaie ſię $y+\frac{ex}{2f}=\pm$ - - - $\sqrt{\left[\frac{e^2x^2}{4f^2}-\frac{x[dx+b]}{f}\right]}$, gdzie ieſzcze i b zniknie, zoſtawiwſzy $y+\frac{ex}{2f}=\pm x\sqrt{\left(\frac{e^2-4fd}{4f^2}\right)}$; pierwiaſtek ten ſam, który wypada s terminów naywyżſzego wymiaru $fy^2+exy+dx^2=0$. Gdyby prawda ta nie iaśniey ſię wydawała w ogólnym widoku właſności zrównań, moglibyśmy ią do nayściśleyſzego dowodu przyprowadzić, który każdy łatwo ogarnie wyſtawiwſzy ſobie, że funkcya pod znakiem pierwiaſtkowym zamykaiąc ſame terminy z ilością odmienną n.p. y, po zniknieniu wſzyſtkich innych terminów ſtatecznych, nie może bydź innego wzoru tylko $Ay^m+By^{m-1}+Cy^{m-2}$ - - $+Ey=y(Ay^{m-1}+By^{m-2}+Cy^{m-3}$ - - $+E)$, w którey znowu E w porównaniu innych zniknie, zoſtawiwſzy funkcyą $y^2(Ay^{m-2}+By^{m-3}+Cy^{m-4}$ - - $+D)$ gdzie znowu D zniknie; i tak to niſzczenie terminów ciągnąć ſię będzie póty, póki wſzyſtkie niżſzych wymiarów terminy odpadłſzy, nie zoſtawią ſamego naywyżſzego wymiaru Ay^m. Aże zrównanie podane iakiegokolwiek ſtopnia, powinno takowe zoſtać przy oſtatnich granicach odmian, iakieby wypadło s pierwiaſtków ie ſkładaiących i odnieſionych do tych oſtatnich granic; przeto w zrównaniu iakiegokolwiek ſtopnia odnióſłſzy ilości odmienne do óſtatnich granic wzroſtu, wſzyſtkie terminy niżſzych wymiarów nikną przed terminami wymiaru naywyżſzego: odnióſłſzy zaś te ilości odmienne do né do oſtatnich granic ubywaniá, terminy wyżſzych wymiarów nikną przed terminami wymiaru náyniżſzego. Drugą tę część teraźnieyſzego twierdzeniá łatwo ieſt barzo s tych ſamych początków dowieśdź. Zagłębiwſzy zaś myśl w ſame metafizykę granic, łatwo poymiemy różné ich ſtopnie i porządki tak, iak i w ilościach ſkończonych; co nám bárzo dobrze obiaśniaią linie krzywé: ieżeli bowiem granica ilości odmiennych wprowádza nowy związek w zrównanie, a przez to pokazuie nową linią krzywą, do któréy ſię liniá podaná zbliżała; ta nowá liniá będąc granicą pierwſzéy, może mieć także za granicę inną linią, a przeto odnioſſzy ią znowu do ſwéy granicy, ilości odmienné ſtaną ſię powtornie nieſkończenie wielkiémi, a czém były w pierwſzey granicy ilości ſtateczné względem odmiennych, tem będą w granicy drugiey ilości odmienné pierwſzego ſtopnia względem ſtopnia wyżſzego: tak dalece, że iako nie ieſt żadną nieprzyzwoitością wyſtawić ſobie ſzereg granic, przez który linie krzywe zniżaiąc ſię w porządkach, przechodza, owſzem zdaie ſię bydź konieczną właſnością rozlegle ogarnionych odmián, wnoſić, że liniá krzywá która była granicą pewnéy linii, może mieć także ſwoię granicę, i ta nowá także ſwoię, tak nie ieſt żadną nieprzyzwoitością wyſtawić ſobie różné porządki ilosci nieſkończenie wielkich.

$$A, \infty, \infty^2, \infty^3, \infty^4, \infty^5, \infty^6 \cdot\cdot \infty^\infty .$$

ten poſtęp zaczyná ſię od ilości ſtateczney A, i każdy termin poſtępu niknie przed naſtępuiącym w zrównaniu. Skąd łatwo nám ieſt zrozumieć co znaczą w dziełach Geometrów ilości nieſkończenie wielkié, nieſkończenie większé od innych nieſkończonych: Zaiſte ięzyk naſz na iaſnych zaſadzony obrazach te ſamé znaczeniá w innych zamyká ſłowach; i co GeoGeometrowie mówią, że ∞^2 ieſt nieſkończenie większém od ∞; ∞^3 ieſzcze nieſkończenie większém od ∞^2: i t. d. to my wyráżamy, że granice drugié ilości odmiennych przeſzedłſzy wſzyſtkie wzroſty

ſkończone

ſkończoné, i wſzyſtkié wzroſty granic piérwſzych, nie mogą bydz powiękſzoné ani zmnieyſzoné żadną ilością ſkończoną, ani żadną ilością s piérwſzych granic; a przeto iak ilości ſkończoné, tak ilości granic pierwſzych nikną przed niemi: toż ſamo twiérdzić powinniśmy o granicach drugich względem trzecich, o trzecich względém czwartych, i ogólnie względem granicy m, o wſzyſtkich ią poprzédzaiących. Té atoli właſności nie ſłużą tylko różnym potęgom teyże ſamey ilości: bo ieżeli n.p. zrównanie zamyka w ſobie różné potęgi x, i oprócz tego potęgi y, z, i innych więcey ilości odmiennych; wſzyſtkie potęgi niżſze nikną przed potęgą naywyżſzą x, w ſwoiey granicy; tak iako potęgi y przed naywyżſzą potęgą y; ale żadna potęga niżſza y nie może niknąć przed potęgą wyżſzą x, ani potęga z przed potęgami wyżſzemi x albo y. Potęga bowiem pierwſza y albo z, może bydź równą wyżſzym potęgom x, a przeto w granicy wzroſtu zniknąć przed niemi nie może.

Wyſtawmy ſobie teraz ułomek $\frac{A}{B}$ będący funkcyą ilości odmiennych wzraſtaiących: ieżeli w nim A zamyka wyżſzą potęgę ilości odmiennych iak B, w porównaniu tego ułomku ilości ſkończoné niknąć będą w granicy wzroſtu; ieżeli zaś B zamyka wyżſzą potęgę iak A, ułomek taki zniknie przy ilościach ſkończonych, a maiąc ſzereg ułomków, których mianowniki roſną w potęgach ilości odmiennych n.p. $\frac{A}{Bx} + \frac{C}{Dx^2} + \frac{E}{Fx^3} + \frac{G}{Hx^4}$ - - $\frac{U}{Wx^n}$; ieżeli liczniki ſą iednego wymiaru z wſpół-czynnikami mianowników, przy granicy wzroſtu x, wſzyſtkie ułomki znikną przed pierwſzym $\frac{A}{Bx}$, iako przed nayniżſzą potęgą mianownika: tak właśnie iak maiąc ſzereg potęg wzraſtaiących w iakiemkolwiek zrównaniu $Ax+By+Cxy+Dx^2+Ey^2+Fx^3+$ i t. d. $=o$, gdzie ilości odmienne x, y, ubywaią; odnioſſzy ie do oſtatniey granicy ſwego ubywania, wſzyſtkie potęgi wyżſze tego zrównania znikną przed nayniżſzą, zoſtawiwſzy $Ax+By=o$.

§. XVIII.

Stoſówanie po przedzaiącey teoryi do linii krzywych.

Te początki prowadzą nas do barzo ważney i rozległey teoryi linii krzywych. Maiąc zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia $P+Q+R+S$ - - - $+V=o$. w którem P ieſt funkcyą dwóch ilości odmiennych wymiaru n; Q funkcyą tychże ilości wymiaru $n-1$; R wymiaru $n-2$; S wymiaru $n-3$; i t. d. te ilości wzraſtaiąc lub ubywaiąc zbliżaią ſię do iedney z dwóch granic, i poddaią nam dwa gatunki dociekań cale różne i oddzielne: zaſtanówmy ſię teraz nad pierwſzym wypadaiącym z wzroſtu tychże ilości. Scigaiąc myślą takowe wzroſty ilości odmiennych aż do oſtatnich granic, terminy niżſzych wymiarów znikną przed terminami wymiarów wyżſzych, a zrównanie podane wyrażaiąc linią krzywą, odmieni ſię w tey granicy na zrównanie całe inſze, wyrażaiące naturę linii próſtey lub krzywey, do którey ſię linia podana zbliżała. Nowa ta linia, którąśmy ledwonieſtyczną nazwali, zawarta ieſt w terminie naywyżſzego wymiaru. A iako natura linii zawiſła od natury pierwiaſtków, roſtrząſaiąc pierwiaſtki lub mnożniki terminu wymiaru naywyżſzego, dowiemy ſię naprzód s pierwiaſtków rzetelnych lub uroionych czy takowa linia ieſt podobna lub nie: powtóre, iakiego ieſt porządku i natury. A iako ciąg linii krzywey zawiſł od ciągłych wzroſtów wſpół-uſzykowanych maiących zawſze wartosć rzetelną aż do oſtatnich ſwoich granic; przy tych zaś granicach te wſpół-uſzykowane zoſtaią ſię przy wartościach zawartych w ſamym terminie naywyżſzego wymiaru; ieżeli te wartości w terminie naywyżſzego wymiaru ſtaią ſię

uroione,

uroioné, wnoſi ſię oczywiście, że té wzroſty rzetelné w pewnéy odległości ſkończonéy uſtały, a z niemi ciąg linii krzywéy; a przeto że liniá krzywá nie maiąc żadnych granic i ledwo-nieſtycznych podobnych, nie má odnóg nieſkończonych. Podobieńſtwo więc lub niepodobieńſtwo ledwo-nieſtycznych nauczy nás, czy liniá krzywá má odnogi nieſkończoné lub nie: to zaś podobieńſtwo zawarté ieſt w naturze pierwiaſtków lub mnożników terminu wymiaru náywyżſzego. Cała więc uwagá naſza zatrzymać ſię powinna nad mnożnikami terminu P náywyżſzego wymiaru w zrównaniu náyogólnieyſzém $P+Q+R+S$ - - $+V=o$; ieżeli P zawierá wſzyſtkich mnożników uroionych, co bydź nie może tylko kiedy zrównanie ieſt ſtopnia párzyſtego; wzroſty ilości odmiennych nie maiąc żadnych granic, uſtały w odległości ſkończoney; i liniá krzywá takowém zrównaniem opiſaná nie má żadnych ledwo-nieſtycznych, ale cała ſię zamyká w odległości ſkończoney.

Przypuśćmy że P zawierá iednégo mnożnika rzetelnego $p=ay-bx$, wſzyſtkich zaś innych uroionych, które wyrażémy przez M; M będąc wymiaru $n-1$: zrównanie więc podané będzie:

$$pM+Q+R+S+\quad V=o;\ p=\frac{-Q}{M}-\frac{R}{M}-\frac{S}{M}\ \text{- - -}-\frac{V}{M}.$$

podług pierwſzych warunków przywiązanych do każdégo terminu zrównaniá podanego, M będąc iednego wymiáru z Q; ułomek $\frac{Q}{M}$ nie má żadnego wymiaru: we wſzyſtkich zaś innych ułomkach $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$ i t.d; wymiár mianownika tém ieſt większy od wymiaru licznika, im terminy ſą odległeyſze: więc odnióſſzy ilości odmienné do oſtatnich granic podług wyżſzych początków; terminy wſzyſtkie znikną, zoſtawiwſzy $p=-\frac{Q}{M}$ - - - (α), a przeto zrównanié (α) wyrázá ledwo-nieſtyczną, do którey ſię linia podaná w takim przypadku zbliżá, i w którą ſię przy oſtatniey granicy zamieni. Ale kiedy dwie ilości odmienne x, y, ſtaną ſię u oſtatnich granic nieſkończonemi, ſtóſunek ich będzie koniecznie ſtóſunkiem ſkończonym, zawieraiącym w ſobie kondycyą do wprowadzenia w Q, M, ażeby té funkcye należące przedtem do linii krzywey podaney, przywiązać teraz do iey ledwo-nieſtyczney. Stóſunek ten wyciągnąć nam potrzeba z zrównania $p=ay-bx$, które rozdzieliwſzy przez ax, otrzymamy $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}+\frac{p}{ax}$, odnioſſzy x do ſwey granicy, $\frac{p}{ax}$ zniknie; a ſtóſunek ilości odmiennych będzie $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$: należy więc w Q, M, włożyć b za y, a za x; a tym ſpoſobem zrównanie (α) wyrazi linią proſtą będącą ledwo-nieſtyczną linii krzywey podaney.

Przykład: Niech będzie zrównanie na linią krzywą $y^3-x^3-2ax^2-c^2=0$; znoſząc ie z zrównaniem ogólnem, mamy $y^3-x^3=P$, $2ax^2=-Q$, $c^2=-R$; ponieważ $y^3-x^3=(y-x)(y^2+yx+x^2)$ przeto $M=y^2+yx+x^2$, $ay-bx=y-x$, to ieſt $a=b=1$: $p=\frac{-Q}{M}=\frac{2ax^2}{y^2+yx+x^2}$, $\frac{y}{x}=1$, włożywſzy więc w $\frac{2ax^2}{y^2+yx+x^2}$, $y=1$, $x=1$, wypádá $y-x=\frac{2a}{3}$, czyli $3y-3x-2a=0$. zrównanie na linią proſtą która ieſt ledwo-nieſtyczną linii krzywey podaney.

Ledwo-nieſtyczne proſte będąc granicami pewnych linii krzywych, nie tak nam dokładnie daią poznać ich naturę, iak inne linie krzywe, iuż nam zkąd inąd znane. Tamté bowiem nie uczą nás dokładnie o liczbie odnóg nieſkończonych linii podaney; gdybyśmy

zaś

zaś wiedzieli że linia krzywa ma za granicę inną linią krzywą prościeyſzą; znaiąc tey oſtatniey właſności i liczbę odnóg nieſkończonych, przyſzlibyśmy łatwo do poznania odnóg nieſkończonych linii podaney. Potrzeba nam więc od ledwo-nieſtycznych proſtych przyiśdź do poznania ledwo-nieſtycznych krzywych, to ieſt znalazłſzy linią proſtą iako ledwo-nieſtyczną linii podaney, ſzukać nam ieſzcze potrzeba inney linii krzywey, którąby miała też linią proſtą za ledwo-nieſtyczną, a tak maiąc dwie linie krzywe maiące iednę ſpólną granicę, wnieść możemy, że iedna s tych linii krzywych ieſt granicą drugiey: zawſze zaś linia prościeyſza lub niżſzego porządku ieſt granicą linii zawikleyſzey. Przekonywa nas o tey oſtatniey prawdzie teorya granic, biorąc bowiem ilości odmienne za nieſkończone, w porównaniu ich terminy niektóre odpadaią w zrównaniu, i zniżaią ie o pewny ſtopień; i lubo ta prawda znayduie ſwoie wyięcia, iednakowóż okazuie ſię w więkſzey liczbie linii krzywych: a rozumuiąc z ogólney uwagi i z właſności zrównań w §. 20. Algebry wyłożoney; twierdzić można, że linia krzywa iakiegokolwiek porządku może mieć za granice linie krzywe wſzyſtkich porządków niżſzych.

Iakimże zaś ſpoſobem od ledwo-nieſtycznych proſtych przyiśdź do krzywych? zależy to od przerobienia zrównania podanego na inne, w któremby u oſtatnich granic ilości odmiennych więkſza liczba terminów ocalała. Ieżeli bowiem dwa pozoſtałe terminy $P+Q=o$ zrównania podanego dały ledwo-nieſtyczną proſtą; zoſtawiwſzy ich n.p. trzy;. otrzymamy linią krzywą, która będzie ledwo-nieſtyczną linii podaney. Na ten koniec przenieśmy oś na ſamę ledwo-nieſtyczną proſtą: na czem zyſkamy naprzód, że w granicy linii krzywey nie obie razem wſpół-uſzykowane ſtaną ſię nieſkończonemi, a przeto nie wſzyſtkie terminy niżſzych wymiarów znikną przed terminem wymiaru naywyżſzego: powtóre że oś ta będąc razem zém osią linii krzywéy ſzukanéy, a zamkniętéy w zrównaniu $P+Q+R+S$ - - $+U=o$ - - (X), potrafiémy za pomocą rachunku i rozumowania przenieść wſpół-uſzykowané do iéy odnóg. Chcąc nowé té wſpół-uſzykowané wyrazić przez funkcyą dawnych; weźmy na fig. 28. fig. 28. linią AB za oś nową, czyniącą z osią przeszłą AL kąt LAB, którego $Stycz.=\frac{b}{a}$, a przeto

$W\text{ſ}tawa=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $Do\text{ſ}tawa=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Idzie nam teraz o zamianę wſpół-uſzykowanych $AP=x$, $PM=y$, na $AB=t$, $BM=u$. Poprowadziwſzy DP równo-ległą MB; PC równo-ległą AS; mamy $DP=AP.W\text{ſ}t.PAD=\frac{xb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $AD=\frac{xa}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $PC=PM.W\text{ſ}t.PMC=\frac{yb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $MC=\frac{ya}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; a przeto $t=AB=\frac{xa+yb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $u=MC-PD=\frac{ya-xb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; z dwóch tych zrównań za pomocą eliminacyi otrzymamy $x=\frac{at-bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $y=\frac{au+bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; kładąc więc w zrównanié (X), za x, y, dopiéro znalezioné wartości, przerobiémy ié na inne między t, u. Zebyśmy zaś to przerobioné zrównanie w całéy wyſtawili ogólności, należy nam w wartościach każdego terminu zamknąć wſzyſtkié mnogości z t, u, ſkładaiącé potęgę każdemu terminowi właściwą. Dla uproſzczenia iednak rachunku wſzyſtkié wſpół-czynniki P wyrażémy przez α; wſpół-czynniki Q przez β; R przez γ, S prze δ; co nic nie naruſzy ogólności dociekań; będzie przeto:

$P=\alpha t^{n-1}u+\alpha t^{n-2}u^2+\alpha t^{n-3}u^3+\alpha t^{n-4}u^4+$ i t. d.

$Q=\beta t^{n-1}+\beta t^{n-2}u+\beta t^{n-3}u^2+\beta t^{n-4}u^3+$ i t. d.

$R=$

$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 +$ i t.d. - - - (Y).
$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 +$ i t. d.
$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5}u + \varepsilon t^{n-6}u^2 + \varepsilon t^{n-7}u^3 +$ i t. d.

w używaniu tych wartości potrzeba nam mieć wzgląd na liczbę mnożników uważanych w P: té mnożniki wyrażać będzie ilość odmienna u; tak dalece, że ieżeli P zamyka iednego mnożnika rzetelnego, weźmiemy z wartości na P termin pierwſzy $\alpha t^{n-1}u$, gdzie u wyraża nam tego mnożnika; i dla tey ci to przyczyny w P nie wchodzi termin αt^n. Ieżeli w P uważać będziemy dwóch mnożników równych, weżmiemy z P termin $\alpha t^{n-2}u^2$; ieżeli trzech mnożników równych, termin $\alpha t^{n-3}u^3$, i t. d. co ſamo ma ſię rozumieć o ſunkcyach Q, R, S, i t. d. ieżeli takowé mnożniki zamykać będą.

Wróćmy ſię teraz do pierwſzego przypuſzczenia w zrównaniu (X); uważaliśmy w iego terminie P naywyżſzego wymiaru, iednego mnożnika rzetelnego, i otrzymaliśmy zrównanie na ledwo-nieſtyczną $P+Q=o$, to zrównanié w nowych wſpół-uſzykowanych wypada $\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} = o$, t bowiem ſtawſzy ſię nieſkończonym, wſzyſtkié terminy w P znikną przed pierwſzym; i wſzyſtkie także w Q przed βt^{n-1} znikną, zoſtawiwſzy $\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} = o$, czyli - -

$u = -\frac{\beta}{\alpha} = c$, zrównanié na linią proſtą równo-ległą osi. S tego trzeba nam przyiśdź do zrównania na linią krzywą przez naſtępuiące rozumowanie: terminy w P, Q, i terminy niżſzych wymiarów R, S, T, i t. d. dla tego powinny były zniknąć w granicach ilości odmiennych, że nie należą do natury ledwo-nieſtyczney próſtey, ale tylko do punktów linii krzywéy podaney. Ieżeli niknące te terminy utrzymamy, wprowadziwſzy na u taką wartość, iaka mu w granicy ſłuży; zamieniemy zrównanie (X), na takie, iakie bydź powinno przy oſtatniey granicy, co do u; a wprowadziwſzy znowu kondycyą náleżytą na t, ieżeli to zrównanié będzie wyrażáć linia krzywą, ta będzie granicą linii zamknięt'ey w zrównaniu (X), kładąc więc we wſzyſtkie niknące terminy za u, c; za $\alpha t+\beta=u-c$, otrzymamy: $(u-c)t^{n-1}+t^{n-2}(\alpha c^2+\beta c+\gamma)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)$ $+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+$ i t. d.$)$ $+$ i t. d. $+V=o$, V będąc funkcyą ſamych ilości ſtatecznych - - (Z). Zrównanié (Z) iuż nie ieſt na linią krzywą podaną, ale na inną linią krzywą maiącą ledwo-nieſtyczną ſpólną z linią podaną. Rozdzielmy ie całe przez t^{n-1}, i wſzyſtkie wſpół-czynniki ſtateczne wyraźmy przez A', B', C', i t. d. wypadnie nam:

$$u-c+\frac{A'}{t}+\frac{B'}{t^2}+\frac{C'}{t^3}+\frac{D'}{t^4}\cdot\cdot\cdot\frac{V}{t^{n-1}}=o \qquad (Z').$$

odniósſzy teraz t do ſwéy granicy, wſzyſtkie potęgi t wyżſze w mianownikach, zniſzczą terminy naſtępujące po $\frac{A'}{t}$ iako potędze náyniżſzey, i zoſtanie ſię zrównanié na ledwo-nieſtyczną $u-c+\frac{A'}{t}=o$. które że należy do Hyperboli między ledwo-nieſtycznémi, uczy nás tego §. 16; aże zrównanie $u-c+\frac{A'}{t}=o$ wyrażá tylko dwie odnogi nieſkończoné w Hyperboli, dowodzi nám, że linia iakiegokolwiek porządku opiſaná zrównaniem (X), maiąc tylko iednego mnożnika rzetelnego w P; ma dwie odnogi nieſkończoné mieſzaiące ſię z dwiema odnogami Hyperboli w granicach ilości odmiennych: znaiąc więc położenie odnóg hyperbolicznych, widzemy zaraz iakie także mieć powinny położenie odnogi nieſkończoné linii podaney. Gdyby drugi termin w zrównaniu (Z') nie znaydował ſię, co ſię przytrafi kiedy $\alpha c^2+\beta c+\gamma=o$, na ten czás termin $\frac{B'}{t^2}$ będzie náywiękſzym, przed którym wſzyſtkié naſtępuiące znikną, zoſtawiwſzy zrównanie na ledwo-nieſtyczną $u-c+\frac{B'}{t^2}=o$; a ieżeli ieſzcze $B'=o$, zrównanié na ledwo-nieſtyczną będzie $u-c+\frac{C'}{t^3}=o$, to ieſt: w przypádku zniknienia których terminów, brać potrzeba zawſze naſtępuiący, który z $u-c$ dá zrównanié na ledwo-nieſtyczną; a gdyby wſzyſtkié po piérwſzym znikły, zoſtanie ſię $u-c=o$ na linią proſtą równo-ległą osi, która w odległości nieſkończoney zmięſzá ſię z linią krzywą podaną. S czego ſię pokazuie, że im niedoſtatecznieyſzé ieſt zrównanié (Z') co do liczby terminów, kiedy cale wſzyſtkié nie znikną; tem linia krzywá będącá ledwo-nieſtyczną linii podaney, ieſt wyżſzego porządku.

Przykład. Szukaymy ledwo-nieſtyczney krzywey, linii zamkniętey w zrównaniu $y^3-x^3-2dx^2-c^2=(y-x)(y^2+yx+x^2)-2dx^2-c^2=o$: ponieważ w teraźnieyſzym przykładzie $a=1$, $b=1$; ſtyczná kątá LAB na fig. 28. $=1$, to teſt kąt nowey osi s przeſzłą ieſt Fig. 28.
$45°$. a przeto $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}$; włożywſzy za x, y, te wártości w zrównanié podané, zamieniémy ié na $\frac{6t^2u+2u^3}{2\sqrt{2}}-\frac{2dt^2-4dtu+2du^2}{2}-c^2=o$.
w oſtatniey granicy $2u^3$ zniknie przed $6t^2u$, i zoſtanie ſię $\frac{3t^2u}{\sqrt{2}}-dt^2=o$. - - $u=\frac{d\sqrt{2}}{3}$, włożywſzy za u tę wártość w terminy niknącé zrównaniá przedoſtatniégo; i rozdzieliwſzy całé przez t^2, otrzymámy

$$3u-d\sqrt{2}+\frac{4d^2}{3t}-\frac{2d^3}{9t^2}+\frac{d^3.2.\sqrt{2}-2c^2.\sqrt{2}}{27t^3}=o.$$

a odnióſſzy t do oſtatniey granicy, wypadá $3u-d\sqrt{2}+\frac{4d^2}{3t}=o$. Zrównanié na Hyperbolę, którey dwie odnogi nieſkończone mięſzaią ſię z dwiema odnogami linii podaney w oſtatniey granicy ilości odmiennych.

§. XIX.

Ledwo-nieſtyczne na dwa mnożniki rzetelne w terminie naywyżſzego wymiaru.

Niech termin naywyżſzego wymiaru P zamyka dwóch mnożników rzetelnych; te mogąc bydź równe, lub nierówne, rozdzielą uwagę naſzę na dwa przypadki. Niech naſamprzód dwa te mnożniki będą nierówne $p=ay-bx$, $q=cy-dx$, $P=(ay-bx)(cy-dx)M$, M będąc wymiaru $n-2$, idąc za tem ſamem rozumowaniem na każdego w ſzczególności mnożnika, iakiegośmy użyli w §. poprzedzaiącym, znaydziemy na ledwo-nieſtyczną odpowiadaiącą p, zrównanie, $p=\frac{-Q}{(cy-dx)M}$, aże w oſtatnich granicach wzroſtu $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$; przeto $p=\frac{-Q}{(cb-da)M}$, gdzie ieſzcze w Q, M, kłaść należy b za y, a za x: tym ſpoſobem przyidziemy do ledwo-nieſtyczney próſtey, s którą ſię linia krzywa w odległości nieſkończoney zmięſza; przerobiwſzy wſpół-uſzykowane x, y, na t, u; i ſzukaiąc ledwo-nieſtyczney krzywey tym ſamym ſpoſobem iak w §. poprzedzaiącym, znaydziemy zrównanie na dwie odnogi Hyperboli wzoru $u-c+\frac{A'}{t}=0$. Drugi mnożnik $q=cy-dx$ przyprowadzi nas do zrównania na ledwo-nieſtyczną $q=\frac{-Q}{(ay-bx)M}$, aże $\frac{y}{x}=\frac{d}{c}+\frac{q}{cx}$, w oſtatniey zas granicy $\frac{y}{x}=\frac{d}{c}$, przeto $q=\frac{-Q}{(ad-bc)M}$, gdzie w Q, M, włożyć należy d za y, c za x, co nas przyprowadzi naprzód do drugiey ledwo-nieſtyczney proſtey; ta zaś, przerobiwſzy wſpół-uſzykowane x, y, na t, u; do drugich dwóch odnóg Hyperboli: przeto linia krzywa opiſana zrównaniem $P+Q+R+S \dots +U=0$.

$+U=o$. w ktorem termin P naywyżſzego wymiaru zamyka dwóch mnożników rzetelnych nierównych; ma cztery odnogi nieſkończone, mięſzaiące ſię s czterema odnogami Hyperboli w oſtatnich granicach ilości odmiennych.

Niech iuż P zamyka dwóch mnożników rzetelnych równych, czyli niech będzie $p=q$, a zrównanie na linią podaną wyrazi ſię: $(ay-bx)^2M+Q+R+S+T$ . . $+U=o$; czyli $(ay-bx)^2+\frac{Q}{M}+\frac{R}{M}+\frac{S}{M}+$ i t. d. $+\frac{U}{M}=o$; M będąc wymiaru $n-2$, widzemy oczywiście że $\frac{R}{M}$ zoſtawſzy bez żadnego wymiaru, należy do ledwo-nieſtyczney; lubo zaś w $\frac{Q}{M}$ licznik przewyżſza iednym wymiarem mianownika, nie może iednak $\frac{Q}{M}$ u oſtatnich granic ſtać ſię nieſkończonem, bo gdyby tak było, wſzyſtkie terminy zrównania znikłyby przed nim, zoſtawiwſzy $\frac{Q}{M}=o$, byłoby więc $\frac{Q}{M}$ razem granicą roſnących i ubywaiących ilości, co ieſt przeciwne wſzyſtkim rozumowaniom. Nie tylko zaś ta rażąca nieprzyzwoitość, ale nawet pierwſze początki teraźnieyſzey teoryi przekonywaią nas, że $\frac{Q}{M}$ należąc równie do ledwo-nieſtyczney, iako i $(ay-bx)^2$, ieden mnożnik zbywaiący w $\frac{Q}{M}$, będzie funkcyą x, y, na wſpół-uſzykowane nowey linii rodzącey ſię z linii podaney w granicach. Zrównanie na tę nową linią $(ay-bx)^2+\frac{Q}{M}+\frac{R}{M}=o$, ieżeli ſię nie będzie mogło rozebrać na dwa wymierne pierwſzégo ſtopnia, wyraża linią krzywą drugiego porządku, która ſię zmięſza w granicy wſpół-uſzykowanych, z linią podaną. Zebyśmy tę linią w prościeyſzym otrzymali wyrazie, i wſzyſtkie ſzczególności do teraźnieyſzego przypuſzczenia przywiązane poznali, odmieńmy znowu wſpół-uſzykowane x, y, na t, u, kładąc $x = \cdot\ \cdot$ $\frac{at-bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $y = \frac{au+bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, i wſzyſtkie § poprzedzającego warunki utrzymáwſzy, będzie:

$$P = \alpha t^{n-2}u^2 + \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 + \text{ i t. d.}$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \text{ i t. d.}$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \text{ i t. d.}$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \text{ i t. d.}$$
$$+ \text{ i t. d.}$$

ieżeli P zamyka dwóch mnożników równych, wſzyſtkie zaś terminy naſtępuiących wymiarów Q, R, S, znayduią ſię, i żadnego takiego mnożnika nie zawieraią; wypada zrównanie na ledwo-nieſtyczną - -

$\alpha t^{n-2}u^2 + \beta t^{n-1} + \gamma t^{n-2} = 0$. czyli $\alpha u^2 + \beta t + \gamma = 0$. które wyraża Parabolę: w niey na $t = \infty$, u ſtaie ſię także ∞, i linia podana ma dwie odnogi nieſkończone mięſzaiące ſię z dwiema odnogami Paraboli w granicy ilości odmiennych. Ieżeli zaś Q zamyka iednego takiego mnożnika iakich zamyka P, zrównanie na ledwo-nieſtyczną ieſt - - - -

$\alpha t^{n-2}u^2 + \beta t^{n-2}u + \gamma t^{n-2} = 0$, czyli $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$ - - (B'') które wyraża dwie linie proſte równo-ległe ieżeli γ ieſt odiemnem, albo będąc dodatnem, $\beta\beta > 4\alpha\gamma$; ale ieżeli $\beta\beta < 4\alpha\gamma$; linia podana nie ma żadney ledwo-nieſtyczney, a przeto żadney odnogi nieſkończoney. Zrównanie ieſzcze (B'') złożone z mnożników rzetelnych równych lub nierównych poſłużyć nam może do wynalezienia ledwo-nieſtyczney krzywey, kładąc wartości z niego wyciągnione w terminy niknące zró-

wnania

wnania podanégo: na pierwiaſtki dwa nierówné, znaydziemy takié ſamé wypadki, iakie ſię pokazały na początku teraźnieyſzego §. uważaiąc takowych mnożników w P. Na pierwiaſtki zaś równe w (B''), wyraziwſzy ie przez $(u-c)^2$ otrzymamy zrównania $(u-c)^2+\frac{A}{t}=0$, albo $(u-c)^2+\frac{A'}{t^2}=0$, albo $(u-c)^2+\frac{A''}{t^{n-2}}=0$, ieżeli terminy zawieraiącé t^{n-3}, t^{n-4}, t^{n-5} i t. d. nie znayduią ſię w zrównaniu. A gdyby ieſzcze w zrównaniu $(u-c)^2t^{n-2}+At^{n-3}+A't^{n-4}+A''t^{n-5}+$ i t.d. $=0$. gdzie A, A', A'', i t. d. ſą funkcyami ſamych ilości ſtatecznych, dla wprowadzonéy wartości c za u w terminy niknącé, gdyby mowię ieſzcze w tem zrównaniu wſpół-czynnik t^{n-3} zamykał mnożnika $u-c$; przybyłby ieſzce ieden termin na ledwo-nieſtyczną, i zrównania któreby na ten czas wypadły, ſą $(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{A'}{t^2}=0$, lub $(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{A''}{t^3}=0$ - - i ogólnie $(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{A'}{t^{n-2}}=0$, a gdyby ieſzczé drugi takowégo zrównania termin był zero, a trzeci zawierał mnożnika $u-c$, potęga t w mianowniku terminu drugiego powiękſzyłaby ſię, biorąc termin następuiący. Zgoła uważaiąc w zrównaniu na ledwo-nieſtyczną termin oſtatni zero, a biorąc zań terminy naſtępuiącé, potęga tego oſtatniego terminu powiękſzy ſię aż do $n-2$; uważaiąc zaś naſtępnie termin śrzedni zero, a w naſtępuiącym mnożnika $u-c$; wpadamy na zrównanie wzoru $(u-c)^2+$ - - $\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{A'}{t^q}=0$. Podobné wypadki znaydziemy, uważaiąc w zrównaniu $P+Q+R+S$ i t. d. $+V=0$, i przerobionem na wſpół-uſzykowané t, u, $Q=0$, lub $R=0$, i t. d. a biorąc zaraz naſtępuiący termin na mieyſce niknącego.

Ułatwienie trudności zachodzącey w tym rachunku.

Ktokolwiek nie przywykł ieſzcze do tych delikatnych rozumowań, s których teraźnieyſza wypada teorya, mogłby znaleśdź trudność w poięciu, czemu $u-c=o$ wypadłſzy z zrównania pierwiaſtkowego na ledwo-nieſtyczną; w zrównaniu powtórnem iakié ſą $(u-c)+\frac{A}{t}=o$, §. poprzedzaiącego; lub teraz $(u-c)^2+\frac{A}{t}=o$ i t. d. traci tę pierwſzą wartość, i nie ſtaie ſię zero? Ta trudność ułatwia ſię piérwſzą uwagą nad naſzemi działaniami. Uważaiąc ſamé tylko terminy pierwſzé zrównania $P+Q+K+S$ - - $+V=o$, otrzymaliśmy $u-c=o$, to ieſt tego mnożnika rzetelnego w P, Q, którego zrównanie podane zawiéra w terminach náywyżſzych wymiarów, ten mnożnik $u-c$ byłby zawſze zero, gdyby żaden termin prócz naypierwſzych, w zrównaniu nie ocalał. Ale iak prędko uwagi inſzé, i natura ſamych ilości odmiennych zoſtawuią więcey terminów w zrównaniu podanem, iuż na ten czas $u-c=o$. nie może mieć mieyſca. Wſzakże gdybyśmy mieli zrównanie algebraiczne $(u-c)M=o$, mamy prawo twierdzić że $u-c=o$ ieſt pierwiaſtkiém tego zrównania; ale gdyby w tem zrównaniu przybył termin L, $(u-c)M+L=o$, L nie zamykaiąc $u-c$; poznaie każdy że iuż w tem oſtatniém zrównaniu $u-c$ nie może bydź zero. Gdybyśmy zaś chcieli na drugą iaką iłość odmienną t, wyciągnąć wartość zawartą w zrównaniu $(u-c)M+L=o$, i w tey wartości ocalić kondycyą na u, zrównania $(u-c)M=o$; nie moglibyśmy w pierwſzym terminie kłaśdź c za u, ale tylko w terminie L; inaczey zrównanie $(u-c)M+L=o$ uczynilibyśmy iak toſamem. To rozumowanie przenióſłſzy do teoryi ledwo-nieſtycznych nie gubiąc z myśli całego łańcucha rozumowań, ſzukaliśmy naprzód iakiby wypadł związek wſpół-uſzykowanych, gdyby ſię tylko ſam pierwſzy termin zoſtał w zrównaniu podanem; ten związek wypadł nam w zrównaniu na linią proſtą: ſzukaliśmy potem linii krzywey, któraby miała za ledwo-nieſtyczną

czną

czną też linią proſtą; to ieſt, któreyby zrównanie w terminie náywyżſzego wymiaru zawierało tego ſamego mnożnika 1go ſtopnia: dla czego podług kondycyi założoney, pierwſzego mnożnika $u-c$, w terminie P nie należało nam naruſzać, ale wſzyſtkie odmiany wprowadzać w ſame tylko terminy niknące. Iakież miały bydź te odmiany? oto żeby związek na linią podaną całe w inny zamienić, tak iak ſię linia krzywa s całemi własnościami odmienia w granicach: więc należało nadadź którey wſpół-uſzykowaney taką wartość, iaka linii podaney nie może ſłużyć: powtóre żeby ten związek zamieniony nie wyrażał inney linii, tylko maiącey ledwo-nieſtyczną proſtą zamkniętą w zrównaniu $u-c=o$, a przeto należało nam w te niknące terminy kłaśdź c za u. To rozumowanie dobrze obięte obiaśnić powinno náymnieyſzą ciemność naſzych myśli, ieżeliby ſię s poprzedzaiących działań ieſzcze zoſtała. Przyſtąpmy do przykładu.

Zrównanie náyogólnieyſze na linie 2go porządku ieſt

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=o.$$

w niem termin náywyżſzego wymiaru $fy^2+exy+dx^2=o$, może zamykać albo obydwa mnożniki uroione, albo obydwa rzetelne nierówne, albo nakoniec dwa rzetelne równe: w pierwſzym przypadku linia krzywa nie ma odnóg nieſkończonych, i ieſt *Ellipſą*: na którą warunek, że $e^2<4f^2d$ w pewney ſkończoney odległości. Nie mowiemy nic o kole, bo iuż wiemy, że koło wypada s ſzczególnego warunku na Ellipſę, to ieſt kiedy mimo-śrzód położemy zero, a przeto iego własność w teraźnieyſzey uwadze ieſt ta ſama co i Ellipſy.

Ieżeli termin náywyżſzego wymiaru ſkłada ſię z dwóch mnożników rzetelnych nierównych, to ieſt: $fy^2+exy+dx^2=(my-nx)(py-qx)$, otrzymamy dwa zrównania:

$$my-nx+\frac{cy+bx}{py-qx}+\frac{a}{py-qx}=o.$$

$$py—qx+\frac{cy+bx}{my—nx}+\frac{a}{my—nx}=o.$$

w pierwſzém z nich w granicy x, y, będzie $\frac{y}{x}=\frac{n}{m}$, kładąc więc n za y, m za x; i oſtatni termin iako niknący opuściwſzy, otrzymámy zrównanié na ledwo-nieſtyczną odpowiadaiącą mnożnikowi $my—nx$,

$$my—nx+\frac{cn+bm}{pn—qm}=o \quad - \; - \; - \quad (G).$$

w drugiém ponieważ $\frac{y}{x}=\frac{q}{p}$, kładąc q za y; p za x, wypadnie zrównanié na ledwo-nieſtyczną odpowiadaiącą mnożnikowi $py—qx$:

$$py—qx+\frac{cq+bp}{mq—np}=o \quad - \; - \; - \quad (H).$$

Obydwa té zrównaniá na linią proſtą: przeto liniá krzywá takowém zrównaniém opiſaná má cztéry odnogi nieſkończoné mięſzaiącé ſię z dwiema liniami proſtémi w ſwoich granicach: cośmy właśnie widzieli w Hyperboli. Chcąc od tych ledwo-nieſtycznych przyiśdź do linii krzywey, odmieńmy oś, położywſzy $y=\frac{mu+nt}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, $x=\frac{mt—nu}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, tym ſpoſobém przerobiemy zrównanie (G) na $u+\frac{cn+bm}{(pn—qm)\sqrt{(m^2+n^2)}}=o$ - - - - - - (G'). zrównanié zaś podane na linie 2go porządku, będzie

$$[(pn—qm)u+\frac{cn+bm}{\sqrt{(m^2+n^2)}}]t+\frac{(cm—bn)u}{\sqrt{(m^2+n^2)}}+(pm+qn)u^2+a=o.$$

włożywſzy we wſzyſtkie terminy prócz pierwſzégo za u, wártość wyciągnioną z (G'), i rozdzieliwſzy potém całe zrównanié przez t, otrzymámy:

$$(pn—pm)u+\frac{cn+bm}{\sqrt{(m^2+n)^2}}+ \quad . \quad . \quad .$$

(bn—

$$\frac{(bn-cm)(cn+bm)+(pm+qn)(cn+bm)^2}{t.(pn-qm)(m^2+n^2)}+\frac{a}{t}=o.$$

któré iak widzémy ieſt wzoru $u+s+\frac{A}{t}=o$, na dwie odnogi Hyperboli. Chcąc wynaleśdź podobné zrównanié odpowiadaiącé mnożnikowi $py-qx$; kładę náprzód $y=\frac{pu+qt}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$; $x=\frac{pt-qu}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$; przez co náprzód zrównanié (H) zamieni ſię na - - - -

$$u+\frac{cq+bp}{(mq-np)\sqrt{(p^2+q^2)}}=o \quad - - - - - - \quad (H').$$

Zrównanié zaś na linie 2go porządku:

$$[(mq-np)u+\frac{cq+bp}{\sqrt{(p^2+q^2)}}]t+\frac{(cp-bq)u}{\sqrt{(p^2+q^2)}}+(mp+nq)u^2+a=o;$$

w któré włożywſzy za u wártość wyciągnioną z (H'), przerobiemy ie na zrównanié wzoru $u+r+\frac{A}{t}=o$, wyrážaiącé drugié dwie odnogi Hyperboli.

Ieżeli nakoniec termin naywyżſzégo wymiaru ſkłádá ſię z dwóch mnożników rzetelnych równych, czyli $fy^2+exy+dx^2=(my-nx)^2$, odmieniwſzy wſpółuſzykowané x, y, na t, u; $y=\frac{mu+nt}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$; $x=\frac{mt-nu}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$; zrównanié podané zamiéni ſię na

$$(m^2+n^2)u^2+\frac{(cn+bm)t}{\sqrt{(m^2+n^2)}}+\frac{(cm-bn)u}{\sqrt{(m^2+n^2)}}+a=o.$$

a odnióſſzy t do oſtatniey granicy, wypádá na ledwo nieſtyczną - - $(m^2+n^2)u^2+\frac{(cn+bm)t}{\sqrt{(m^2+n^2)}}=o$ - - -

Zrównanié wyrážaiącé Parabolę, gdzie $t=\infty$, czyni także u nieſkończoném. Parabola więc ieſt ſaméy ſiebie ledwo-nieſtyczną, czyli w oſtatniey granicy z żadną ſię inną linią, któráby była iey granicą, nie mięſza.

ſza. W przypadku $cn+bm=o$, zrównanie wyraża dwie linie proſte: i na ten czas zrównanie podane już nie będzie na linię 3go porządku, ale zrównaniem ſkładanem na dwie linie proſte.

§, XX.

Ledwo-nieſtyczne na trzy mnożniki rzetelne.

Kiedy termin P naywyżſzego wymiaru zamyka trzech mnożników rzetelnych nierównych, każdy z nich przyprowadzi nas do ledwo-nieſtyczney proſtey opiſaney zrównaniem wzoru $p=\frac{-Q}{M}$; każda zaś ledwo-nieſtyczna proſta przez ſpoſób już wyłożony w §§. poprzedzaiących, przyprowadzi nas do zrównania wzoru $u-c+\frac{A}{t}=o$, wyrażaiącego dwie odnogi nieſkończone Hyperboli; przeto linia krzywa zamknięta w zrównaniu $P+Q+R+S$ - - $+V=o$, w teraźnieyſzym przypadku, będzie mieć ſześć odnóg nieſkończonych, mięſzaiących ſię s ſześcią odnogami Hyperbolicznemi w granicach ilości odmiennych. Jeżeli zaś P zawiera dwa mnożniki rzetelne równe, a trzeci nierówny; pierwſze dadzą za ledwo-nieſtyczną Parabolę; oſtatni naprzód linią proſtą, a s tey dopiero wypadaiące dwie odnogi Hyperboli: i linia krzywa podana będzie mieć cztery odnogi nieſkończone, s ktorych dwie mięſzaią ſię s Parabolą, dwie zaś s Hyperbolą w granicach ilości odmiennych: co wſzyſtko s poprzedzaiących wypływa początków. Uważaymy już w P trzy mnożniki rzetelne równe $(ay-bx)^3$: i żebyśmy wſzyſtkie ſzczególne przypadki łatwiey mogli roſtrząſać, odmieńmy wſpół-uſzykowane, biorąc $y=\frac{au+bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $x=\frac{at-bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; terminy różnych wymiarów zrównania podanego będą miały wartość:

$P=$ - - - - $\alpha t^{n-3}u^2+\alpha t^{n-4}u^4+\alpha t^{n-5}u^5+$ i t. d.

$Q=\beta t^{n-1}+\beta t^{n-2}u+\beta t^{n-3}u^2+\beta t^{n-4}u^3+\beta t^{n-5}u^4$

$R=$

$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4$ + i t. d.

$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 +$ i t. d.

Ieżeli ſamo tylko P zamyka trzech mnożników równych; zrównanie na ledwo-nieſtyczną ieſt - - - $\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-1} = o$, czyli

$$(I.)\quad \alpha u^3 + \beta t^2 = o,$$

które ieżeli nie może ſię rozebrać na zrównania wymierne ſtopni niżſzych, wyraża linią krzywą 3go porządku, która ieſt ledwo-nieſtyczną linii podaney. Ta ledwo-nieſtyczna może mieć dwie albo ſześć odnog nieſkończonych podług iednego lub wſzyſtkich pierwiaſtków rzetelnych, a przeto tyleż odnóg pokazuie w linii podaney.

Kiedy P zamyka trzech mnożników równych; Q może zamykać iednego takiegoż mnożnika; na ten czas żeby zrównanie całe nie było rozdzielne przez u, i warunek naſz ocalony; przybędzie do ledwo-nieſtyczney termin R: to ieſt $\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-2}u +$ - - $\gamma t^{n-2} = o$, czyli

$$(II.)\quad \alpha u^3 + \beta tu + \gamma t = o.$$

znowu na linią krzywą 3go porządku: w obydwóch zrównaniach położywſzy t nieſkończonem, u ſtaie ſię takiém: a ieżeli w drugiem tem zrównaniu uważać będziemy γt niknące przed potęgami wyżſzemi, zoſtanie ſię $\alpha u^3 + \beta tu = o$; to ieſt $u = o$, $\alpha u^2 + \beta t = o$, s których pierwſze wyraża linią proſtą która ieſt oſią; drugie Parabolę: będzie więc mieć w takowym przypadku linia podana cztery odnogi nieſkończone, s których dwie zmieſzaią ſię z linią proſtą, dwie zas s Parabolą w granicy ilości odmiennych.

Kiedy P zamyka trzech mnożników równych, niech Q zawiera dwa takie mnożniki; będzie zrównanie na ledwo-nieſtyczną $\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{-3}u^2 + \gamma t^{n-2} = o$, czyli - - $(III.)\quad \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma t = o$.

gdzie t, u, ſtaią ſię nieſkończone w granicy ſwoiey: a zniſzczywſzy βu^2 iako niknące przy αu^3, otrzymamy $\alpha u^3 + \gamma t = o$.

Niech nakoniec R zamyka iednego mnożnika takiego, iakich P zamyka trzech, i iakich Q zamyka dwa. Dla wyłożoney iuż przyczyny przybędzie nam w zrównaniu na ledwo-nieſtyczną termin z S, a przeto $\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-3} u + \delta t^{n-3} = o$, czyli

$$(IV.)\quad \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = o.$$

Zrównanie to wyraża trzy albo iedne tylko ledwo-nieſtyczną proſtą, ieżeli ieden lub trzy pierwiaſtki ſą rzetelne nierówne: oſtatni przypadek zgadza ſię zupełnie s tym któryśmy na ſamym początku tego §. roſtrząſali: skąd ſię wnoſi, że ledwo-nieſtyczna wypada ta ſama, uważaiąc albo w ſamym tylko P trzy mnożniki rzetelne nierówne; albo razem w P trzy, w Q dwa, a w R iednego takiego mnożnika. Ale że zrównanie IV. rozlegleyſzym podpada uwagom iak przypadek naypierwſzy tego §: roſtrząśniymy ie wſzyſtkie porządnie. Ieżeli to zamyka ieden tylko pierwiaſtek rzetelny $u - c = o$, to ieſt $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u - c)(mu^2 + nu + p) = o$, kładąc c za u; we wſzyſtkie niknące terminy, odmieniemy zrównanie na

$(u - c)t^{n-3} + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + Dt^{n-7} +$ i t. d. $= o$, a rozdzieliwſzy całe przez t^{n-3}, i odnióſłſzy potem t do oſtatniey granicy; otrzymamy na ledwo-nieſtyczną - - $u - c + \frac{A}{t} = o$, albo $u - c + \frac{B}{t^2} = o$, albo $u - c + \frac{C}{t^3} = o$, - - albo nakoniec $u - c + \frac{V}{t^{n-3}} = o$, podług przypadku, że wſzyſtkie terminy zoſtaną, albo że $A = o$, albo że $A = o$, $B = o$; albo $A = o$, $B = o$, $C = o$; albo że nakoniec wſzyſtkie terminy prócz oſtatniego, będą zero; a gdyby nawet było $V = o$, zoſtanie ſię $u - c = o$, co nas uczy, że linia proſta która ieſt granicą

nicą linii podaney, nie ieſt żadney inney linii krzywey granica, a przeto i linia podana nie mięſza ſię w odległości nieſkończoney z żadną linią krzywą.

Ieżeli zrównanie IV. zamyka dwa pierwiaſtki rzetelne równe, to ieſt $\alpha u^2+\beta u^3+\gamma u+\delta=(u-c)^2$ $(mu+n)$, i ieżeli zaden inny wſpół-czynnik takowych mnożników nie zawiera, włożywſzy za u, c; w wſzyſtkie terminy niknące, przyidziemy znowu na ledwo-nieſtyczną do iednego s takich zrównań $(u-c)^2+\frac{A}{t}=0$, $(u-c)^2+\frac{B}{t^2}=0$, $(u-c)^2+\frac{C}{t^3}=0$ - - - $(u-c)^2+\frac{V}{t^{n-3}}=0$.

Gdyby zaś wſpół-czynnik t^{n-4} zamykał iednego takiego mnożnika $u-c$, na ten czas trafilibyśmy na ledwo-nieſtyczną zamkniętą w iednem z naſtępuiących.

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^2}=0,$$ albo $$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{C}{t^3}=0,$$ albo na koniec na $$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{V}{t^{n-3}}=0.$$

a gdyby ieſzcze $A=0$, B zaś zamykało iednego takiego mnożnika; albo B będąc zero, C zamykało $u-c$, i tak daley poſtępuiąc w przypuſzczeniu; trafiemy koniecznie na zrównanie wzoru $(u-c)^2+\frac{A'(u-c)}{t^p}+\frac{B'}{t^q}=0$, wyrażaiące ledwo-nieſtyczną; gdzie $q<n-2$; $p<q$.

Przypuscmy nakoniec że zrównanie IV. zamyka trzech mnożników równych $(u-c)^3=0$. kładąc c za u, we wſzyſtkie terminy niknące zrównania podanego między t, u; ieżeli żaden inny termin prócz pierwſzego nie zamyka mnożnika $u-c$, trafiemy na zrównanie do ledwo-nieſtyczney wzoru $(u-c)^3+\frac{A'}{t^q}=0$, $q<n-2$,

$q<n-2$, a ieżeli ieſzcze wſpół-czynnik t^{n-4} zamyka $u-c$; na zrównanie wzoru - - $(u-c)^3+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B'}{t^q}=0$. uważaiąc zaś drugi termin naſtępnie zero, a w tuż naſtępuiącym mnożnika $u-c$; trafiemy na zrównanie wzoru - - $(u-c)^3+\frac{A'(u-c)}{t^p}+\frac{B'}{t^q}=0$.

Ieżeli zaś oprócz pierwſzego terminu zamykaiącego trzy mnożniki równe, inny który z naſtępnych zamykać będzie $(u-c)^2$, znaydziemy na ledwo-nieſtyczną zrównanie wzoru $(u-c)^3+\frac{A'(u-c)^2}{t^p}+\frac{B'}{t^q}=0$. Nakoniec ieżeli który s terminów zrównania zamykać będzie dwa, trzeci zaś iaki iednego takiego mnożnika, iakich termin pierwſzy zamyka trzech; przyidziemy do zrównania na ledwo-nieſtyczną, którego wzór ieſt: $(u-c)^3+\frac{E(u-c)^2}{t^p}+\frac{M(u-c)}{t^q}+\frac{O}{t^r}=0$. gdzie $r<n-2$; $q<r$, $p<q$.

Te wſzyſtkie uwagi teraźnieyſzego §. przyſtoſowawſzy do zrównania na linie *3go* porządku, znaydziemy ſzeſnaście przypadków różnych mogących mieć mieyſce iuż to w mnożnikach ſamych pierwſzego terminu, iuż w kombinacyach z nim innych terminów zrównania. Skąd J. P. Euler wyciągnął ſzeſnaście rodzaiów linii *3go* porządku co do liczby i różney natury ledwo-nieſtycznych. Każdy zaś takowy rodzay maiąc właściwy wzór ſwego zrównania, dzielić ſię może na różne gatunki wypadaiące s kondycyi wprowadzonych na wſpół-czynniki terminów, tak iakeśmy widzieli w porządku drugim. Newton który w dziele ſwoim *Enumeratio Linearum tertii ordinis* uważał właſności i różnice linii krzywych w odległości ſkończoney, naznaczył ich ſiedmdzieſiąt i dwa gatunki: Teorya J. P. Eulera będąc daleko pro-

scieyſza

ścieyſzą i ogólnieyſzą, nie tylko większą miała u Geometrów pomyślność, ale nawet daie widzieć, że liczba gatunków przez Newtona podana ieſt niedokładna. Roſtrząſanie wſzyſtkich tych rodzaiów linii, będąc tylko przyſtósowaniem początków teraźnieyſzego §. do przykładu ſzczególnego, nie uczyni żadney trudności, ktokolwiek w całey ogólności teoryą tę ogarnął, i przypatrzył ſię działaniom na linie 2go porządku. Przydadź nam tu tylko należy iednę właſność ledwo-nieſtycznych ſzczególnie z uwag nad liniami 3go porządku wypadaiącą, która ieſt wielkiey wagi i na wyżſze porządki.

Uwága nad ledwo-nieſtycznemi wyliczonemi.

Fig. 29.

Wyſtáwmy ſóbie na fig. 29. linią krzywą 3go porządku maiącą ſześć odnóg nieſkończonych, a przeto trzy ledwo-nieſtyczne proſte wypadaiące s trzech mnożników rzetelnych nierównych, w terminie naywyżſzego wymiaru zawartych. Ponieważ te ledwo-nieſtyczne proſte wyrażaią ſię zrównaniami wypadaiącemi z dwóch pierwſzych terminów zrównania podanego, idzie za tem że dwa te terminy P, Q, ſą ſpólne zrównaniu 3go ſtopnia na linią krzywą, i zrównaniu tegóż ſtopnia ſkładanemu, które wyraża trzy linie proſte. Wſpół-czynnik zaś iedney ilości odmienney w Q, będąc równy ſummie pierwiaſtków; wyrażać będzie razem przyſtawy do linii proſtey, i przyſtawy do linii krzywey należące. Z równości tych przyſtaw zaſtanówmy ſię, czy iaka ważna właſność nie wypadnie. Na ten koniec wyſtáwmy ſobie dwa zrównania 3go ſtopnia.

$$y^3+(bx+e)y^2+(cx^2+fx+h)y+dx^3+gx^2+ix+k=o \quad - - - (A').$$

$$z^3+(bx+e)z^2+(cx^2+fx+H)z+dx^3+gx^2+Ix+K=o \quad - - (B').$$

s których pierwſze (A') wyraża linią krzywą 3go porządku maiącą ſześć odnóg nieſkończonych: drugie zaś (B') wyraża trzy linie proſte: dla tego wſpółczynniki H, I, K, wyſtawmy ſobie takie; żeby to zrównanie mogło ſię rozebrać na trzy pierwſzego ſtopnia; będzie więc na fig. 29. $PL+PM+PN=-bx-e$; $PF+PG+PH=-bx-e$; a przeto $PL+PM+PN=PF+$

Fig. 29.

$PG+PH$, czyli przywiódłſzy ie do zero:

$FL-GM+HN=0$, i podobnie $fn-gm+hl=0$.

Fig. 29.

każdé s tych zrównań zamyka kondycyą wyrażaiącą iſtotną cechę ledwo-nieſtycznych, to ieſt: ieżeli przyſtawa czyli linia proſta iakakolwiek przecina we trzech miéyſcach odnogi krzywé i ledwo-nieſtyczné; dwa odcinki téy linii proſtey między ledwo-nieſtycznémi i odnogami krzywémi zawarté, równé ſą trzeciému odcinkowi idącemu w ſtronę przeciwną. W liniach więc 3*go* porządku gdzie trzy zachodzą ledwo-nieſtyczné, trzy odnogi linii krzywéy nie mogą zmierzać ku iedney ſtronie z ledwo-nieſtycznemi, ale ieżeli dwie wykierowane ſą względem odnogi ku pewnéy iakiey ſtronie, trzecia muſi bydź wykierowana przeciwnie: i tak n.p. na fig. 29. odnoga SM nie może przechodzić za G, żeby ſię ſtała wklęſłą do ledwo-nieſtycznéy BG; boby zrównanie $FL-GM+HN=0$ nie miało miéyſca w takowém przypadku. Stąd ſię wnoſi iż nie może bydź żadnego rodzaiu w liniach 3*go* porządku maiącego dwie ledwo-nieſtyczné wzoru $u=\frac{A}{t^2}$, a iednę tylko wzoru $u=\frac{A}{t}$, bo $u=\frac{A}{t^2}$ będąc nieſkończenie mnieyſzém od $u=\frac{A}{t}$; bydź nigdy nie może, aby dwie takie wyrównać miały iedney ledwo-nieſtycznéy $u=\frac{A}{t}$: ale ieżeli ſię iedna $u=\frac{A}{t}$ znayduie przy innych wzoru $u=\frac{A}{t^2}$; druga takaż znaydować ſię także muſi. A ieżeli niemaſz żadnéy ledwo-nieſtycznéy $u=\frac{A}{t}$; ledwo-nieſtyczna $u=\frac{A}{t^2}$ nie może ſię nigdy ſama znaydować

dować przy innych $u = \frac{A}{t^3}$, i ogólnie żádná ledwo-nieſtyczna niżſzego porządku, nie może ſię znaydować ſama przy ledwo-nieſtycznych porządków wyżſzych.

Ciągnąc daley teoryą ledwo-nieſtycznych na cztery mnożniki rzetelné w terminie *P* naywyżſzego wymiaru, i tę ſtóſuiąc do zrównania na linie *4go* porządku, uważaćby nám przyſzło w niém naſtępuiącé przypádki. *Náprzód:* kiedy termin naywyżſzego wymiaru zamyká wſzyſtkie cztery mnożniki uroioné. *Powtóre:* kiedy zamyká dwa rzetelné nierówné, a dwa uroioné. *Potrzecie:* dwa mnożniki rzetelné równé, a dwa uroioné. *Poczwárte:* wſzyſtkie cztery mnożniki rzetelné i nierówné. *Popiąte:* mnożniki rzetelné dwa równé, a dwa nierówné. *Poſzoſte:* dwa mnożniki równé, i dwa drugié równé, ale każdá para od ſiebie różná. *Poſiodme:* kiedy trzy mnożniki rzetelné równé, a czwárty nierówny. *Poóſme:* kiedy wſzyſtkie cztery mnożniki rzetelné między ſobą równé. W każdym s takowych przypádków uważaiąc terminy niknącé, a biorąc inné na ich mieyſce; powtóre rościągaiąc mnożniki do dalſzych terminów, wynaleźlibyśmy wiele rodzaiów linii krzywych: a przeſzedłſzy przez wſzyſtkie, pokazałoby nám ſię 146 rodzaiów linii krzywych 4go porządku różniących ſię ledwo-nieſtycznemi, czyli odmianami, którym podlegaią w oſtatnich granicach wſpół-uſzykowanych. Każdy zaś takowy rodzáy uważaiąc w odległości ſkończoney, odkrylibyśmy gatunki do niego należącé. Idąc do wyżſzych porządków liczba rodzaiów wzráſtać będzie co raz barziey, dlá tego że ſię liczba kombinacyi w mnożnikach znacznie powiękſza.

§. XXI.

Granice ilości wzraſtaiących odkryły nám tylé znakomitych cech i właſności w liniach krzywych: obiecywać ſobie można, że ſą ieſzcze inné przymioty, któré od granic ilości ubywaiących zawiſły. A iako

O granicach ilości ubywaiących, i od nich zawisłych włáſnościach linii krzywych.

tamté wypłynąwſzy ze ſtycznych prowadzonych do odległości nieſkończoney należały do odnóg bez końca ſię ciągnących; tak teraźnieyſze ſtóſuiąc do ſtycznych pewnych łuków, odkryć nam mogą charaktery linii krzywych w odległości ſkończoney. Potrzebaby nam więc do ninieyſzych uwag, w zrównaniu na linie iakiegokolwiek porządku, ilości odmienne przywieśdź do ſtanu ciągłego i nieprzeſtannego ubywania. Stan takowy ubywania wſpół-uſzykowanych zmnieyſza łuk linii krzywey, a w oſtatniey granicy przywodzi go do punktu, lub do ſtyczney mięſzaiący ſię z dwiema przyległemi punktami linii krzywych. Skąd nam łatwo przewidzieć, że właſności punktów różno-rodnych iakiemi ſą punkta podwóyne, potróyne, poczwórne i t. d. powtóre, ſpoſob oznaczenia i prowadzenia ſtycznych, zawiſły od teoryi granic ilości ubywaiących. A iako w granicach wzroſtu z ledwo-nieſtycznych proſtych wynaydowaliśmy inne linie krzywe mięſzaiące ſię w odległości nieſkończoney z linią podaną; tak doświadczać będziemy, ieżeli teorya granic ilości ubywaiących nie nauczy nas o zamianie łuków iedney linii krzywey na drugą, a przeto ieżeli nie odkryie nam ſpoſobu równania linii zawikleyſzych s prościeyſzemi. Zagłębmy ſię we wſzyſtkie te uwagi, maiąc na pamięci te wſzyſtkie początki, któreśmy o oſtatnich granicach wzroſtu lub ubywania ilości odmiennych na początku tego rozdziału wyłożyli.

Wiemy że ilości odmienne maią (*o*) za granicę ciągłego ubywania: niech będzie zrównanie $W=o$ nayogólnieyſzé między dwiema ilościami odmiennemi x, y, iakiegokolwiek ſtopnia; $y=o$ daie nam zawſze przecięcia linii krzywey od osi; zaś $x=o$ przecięcia teyże linii krzywey od przyſtawy wychodzącey s początku odcinków: ieżeli więc w liniach krzywych znayduią ſię takie właſności przywiązane do dwóch granic, te wypaśdź nam koniecznie muſzą s teraźnieyſzey teoryi: a iako $x=\infty$, $y=\infty$ granicach

cach wzroſtu dały nám ſtóſunek $\frac{y}{x}$ ſkończony; tak i teráz $x=o$, $y=o$, dadzą nám także ſtóſunek $\frac{y}{x}$ ſkończony, wyráżaiący tę właſność od granic zawiſłą. Albowiem podług §. 16. Algebry wyráz $\frac{o}{o}$ pokazuie wartość ſkończoną. Fig. 30. Ieżeli więc na fig. 30 odcinkowi $AP=x$ odpowiadá przyſtawa $PM=y$ taka, iaką wyráżá zrównanie $W=o$, nazwáwſzy té wártości punktowi M odpowiadaiącé $x=p$. $y=q$; p, q uczynić powinny zadoſyć zrównaniu (§. 5. Algeb.) a przeto włożywſzy p za x, q za y, wſzyſtkié terminy zniſzczyć. Poprowadziwſzy teráz przez M równo-ległą osi MS, i nazwáwſzy $MS=t$, $SN=u$, $x=p+t$, $y=q+u$, i té wártości włożywſzy w zrównanié $W=o$, oś zaś AP przenióſzy na MO, początek odcinków na M; ponieważ p, q, były pierwiaſtkami do punktu M, i tam całé zrównanié przywiodły do zero, ten zaś punkt M ieſt teráz początkiem odcinków na osi MO, więc u niego wſpół-uſzykowané p, q, znikną, i niezoſtaną ſie w zrównaniu $W=o$, tylko terminy będącé funkcyą t, u; to ieſt, zrównanie $W=o$ kładąc $x=p+t$, $y=q+u$ ſtanie ſię:

$$o=At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2+Gt^3+Ht^2u+Itu^2+Ku^3+Lt^4 + \text{i t. d.}=o \quad - \quad - \quad - \quad - \quad (\lambda).$$

gdzie A, B, C, D, i t. d. ſą ilościami ſtatecznemi: to zaś zrównanié wyráża tę ſamę linią krzywą, którą wyrażało $W=o$, ale wſpół-uſzykowané które przedtem należały do osi AQ, teráz należą do MS, i p, q, ſą teráz nieodmienné. Im punkt N zbliża ſię barziey do punktu M, tem t czyli MS, co raz barziey maleie, tem punkt N linii krzywey, zbliża ſię barziey do punktu L linii proſtey; a przeto łuk MN do linii ML: linia więc proſta ML ieſt granicą łuku MN, do którey ſię ten łuk coraz barziey zbliża, ale którey nigdy nie może doſiąc, nie odmieniwſzy ſwey natury. Odnioſłſzy w zrównaniu (λ) ilości ubywaiącé t, u, do ſwych oſtatnich granic, wſzyſtkie potęgi wyżſze znikną przed nayniżſzą, i zoſtanie ſię $At+Bu=o$; aże wſpół-uſzykowane MS, NS, doſiągłſzy oſtatnich granic ſwego ubywania łuk MN zamienia ſię na ſtyczną ML, przeto $At+Bu=o$ ieſt zrównaniem na ſtyczną ML. Każda więc ſtyczna ieſt granicą łuku niknącego; ma bowiem dwa punkta ſpólne z linią krzywą: zmnieyſzaiąc co raz barziey łuk linii krzywey, zbliżamy ſię do tych punktów tuż przyległych, ale tych dwóch punktów nie możemy doſiąc, chyba że linia krzywa całą naturę odmieni. Dwa bowiem punkta tuż przyległe, czyli mowiąc ięzykiem geometrycznym, dwa punkta nieſkończenie bliſkie nie czynią linii krzywey; bo wiemy z Rozd. I. że tylko ſama linia proſta oznacza ſię dwiema punktami, ale linia krzywa nayprościeyſza potrzebuie ich więcey. Ieżeli do poznania natury linii krzywey ſzukamy tylko iednego punktu, i ten wyraziwſzy zrównaniem, czyli iak ſię tłómaczyli dawni Geometrowie znalazłſzy *mieyſce geometryczne* tego punktu, mamy zrównanie na linią krzywą, przeſtaiemy na iednym punkcie dla tego, że wſzyſtkie inne punkta uważamy takiem prawem opiſane do iakiegośmy przyſzli w zrównaniu, i że ten punkt przez funkcyą ilości odmiennych, wyraziwſzy, to ſamo prawo odmiany rościągamy do wſzyſtkich innych punktów. Powtóre do oznaczenia linii krzywey potrzeba nam koniecznie wiedzieć prawo, podług którego odmienia ſię punkt tę linią krzywą opiſuiąc; ieżeli mamy zadanie i kondycye iakie do niego przywiązane, i ieżeli te kondycye ſą wyſtarczaiące, zamykaią w ſobie ukryte prawo ciągłości, które my tylko tłómaczemy na znaki ſzukaiąc zrównania, a przeto doſyć nam ieſt takowe prawo znane s kondycyi pytania do iednego punktu przywiązać, aby całą linią poznać. Ale wyſtawmy ſobie że mamy łuk iakiey linii krzywey z nikąd nieznaney, a chcąc doyśdź prawa podług którego taka linia ieſt opiſana, muſielibyśmy prowadzić wſpół-uſzykowane przez wielką liczbę punktów, a znacząc ich odmiany, trzebaby nam w tych odmianach iakiegoś upatrywać prawa i związku, a ten doſtrzegłſzy, dopierobyśmy przyſzli do poznania linii podaney. W takim przypadku poſtawiwſzy ſię myślą, nigdyby nam dwa, ani trzy, ani nawet cztery punkta tuż przyległe nie wyſtarczyły do poznania linii krzywey, co nie tylko należałoby przypiſać ſłabości naſzego umyſłu, ale nawet naturze rzeczy. Idąc bowiem od punktu linii krzywey do tuż przyległego, różnica dwóch położeń ieſt tak mała, że iey z żadną ſkończoną ilością porównać niepodobna, i póty nie może bydź doſtrzeżona, póki ſkończoney iakiey nie doydzie miary; to ieſt póki pewnego łuku linii krzywey nie przeydziemy; łuku zaś takiego, który iſtotnie do tey a nie inſzey linii należy. Na łuk zaś taki trzeba nam pięć punktów w linii *2go* porządku, *9* w linii *3go* i t.d. podług §. VI. Ieżeli więc dwa punkta tuż przyległe nie czynią nigdy linii krzywey, poznamy łatwo że uważać linią krzywą iako złożoną z linii proſtych nieſkończenie małych, prowadzonych do każdych dwóch punktów przyległych, nie ieſt to uważać ią geometrycznie, bo taka uwaga ieſt przeciwna pierwſzym początkom Geometryi. Możemy iey użyć kiedy idzie o iaki wymiar n.p. płaſzczyzny linią krzywą zamkniętey, lub o iaki praktyczny rachunek, nie mogąc tego rachunku drogą ściſłości geometryczney doſtąpić, iak przymuſzeni ieſteśmy czynić prawie we wſzyſtkich zadaniach fizyki, ſtóſuiąc Geometryą do ſkutków Przyrodzenia: ale to ieſt tylko droga zbliżania podobna do tey, iakąśmy ſzli w ſzeregach nieſkończonych. Nigdy zaś nie można tych przypuſzczeń używać do dowodu iakiey prawdy ogólney, boby te naprzód przy czyſtem rozumowaniu nigdy nas do prawdy ściſłey nie przywiodły, a przy nieoſtrożności ſtaią ſię źrzodłem przeciwnych wypadków, lub fałſzywego dowodu. S tych uwag których dotąd nie ſtarano ſię w ſwem świetle

wyſtawić,

wyſtawić, rozſądzemy łatwo tyle błędnych dowodów, rossianych między nayściśleyſze Geometryi prawdy od wielu Autorów.

Spoſób wynaydowaniá podſtycznych w liniach krzywych.

Dwa punkta tuż przyległe w linii krzywey oznáczáią położenie ſtyczney, która przeciągniona pokazuie na tym mieyſcu kierowność punktu opiſuiącego linią krzywą: gdyby ta kierowność zoſtała nieodmienną, punkt opiſałby linią proſtą: ale że ta kierowność odmieniá ſię idąc od każdego punktu do tuż przyległego, powſtaie stąd linia krzywá, którą można uważać opiſaną od punktu odmieniaiącego w każdem mieyſcu ſwoię kierowność, tę zaś kierowność pokazuie ſtyczná u każdych dwóch punktów przyległych linii krzywey. Przenióſſzy oś linii krzywey i początek odcinków do tego ſamego punktu dotykaniá ſię, a odnióſſzy ilości odmienne do ſwych granic ubywaniá, zrównanie na ſtyczną ieſt $At+Bu=o$, skąd

Fig. 30.

$\frac{u}{t}=\frac{-A}{B}$; s podobieńſtwa tróykątów LSM, MPT mamy $LS:MS=MP:PT=-A:B$, przeto $PT=\frac{-Bq}{A}$ zrównanie ogólne na wynalezienie PT, którą nazwano PODSTYCZNĄ *(Subtangens)*, a przeto na prowadzenie ſtyczney do iakieykolwiek linii krzywey: ſpoſób ten ogólny prowadzeniá ſtycznych zamyká ſię w naſtępuiącem prawidle.

,, Maiąc zrównanie podane na linią krzywą, położ
,, naprzód q za y, p za x; skąd powſtanie związek
,, na p, q, czyniący zadoſyć zrównaniu w punkcie M:
,, powtóre w toż zrównanie podane położ powtór-
,, nie $x=p+t$, $y=q+u$; wymaż naprzód té terminy,
,, które wypadły na zadoſyć uczynienie w pierwſzem
,, przerábianiu zrównaniá, potem opuść wſzyſtkie
,, potęgi wyżſze t, u, i zoſtanie ſię $At+Bu=o$, skąd
,, $\frac{-Bq}{A}$ daie podſtyczną, a przeto położenie ſtyczney
,, do punktu danego,,

Przykład

Przykład na Parabolę: Zrównanie na linią krzywą $y^2 = 2ax$ kładąc naprzód p za x, q za y, zamienia ſię na $q^2 = 2ap$; powtóre kładąc $x = p + t$, $y = q + u$; zamienia ſię na $q^2 + 2qu + u^2 = 2ap + 2at$, aże $q^2 = 2ap$, opuſzczam te terminy w oſtatniem zrównaniu, potem u^2; i zoſtaie mi ſię $at - qu = 0$. skąd $\frac{u}{t} = \frac{a}{q} = \frac{-A}{B}$, $PT = \frac{-Bq}{A} = \frac{q^2}{a}$, aże $a = \frac{q^2}{2p}$, więc $PT = 2p$: podſtyczna więc ieſt dwarazy większa od odcinku.

Przykład na Hyperbolę: Niech będzie zrównanie na linią krzywą $y^2 = \frac{k^2}{g^2}(x^2 - g^2)$, czyli $y^2 g^2 = k^2 x^2 - k^2 g^2$, kładąc p za x, q za y; zamienia ſię na $q^2 g^2 = k^2 p^2 - k^2 g^2$ - - - (α); kładąc powtóre $x = p + t$, $y = q + u$, zamienia ſię na $g^2 q^2 + 2g^2 qu + g^2 u^2 = k^2 p^2 + 2k^2 pt + k^2 t^2 - k^2 g^2$; wymazawſzy naprzód terminy zamknięte w zrównaniu (α), powtóre potęgi wyżſze t, u, zoſtanie ſię $k^2 pt - g^2 qu = 0$; przeto $A = k^2 p$, $B = -g^2 q$; $PT = \frac{-Bq}{A} = \frac{g^2 q^2}{k^2 p}$, aże z zrównania ($\alpha$) mam $k^2 = \frac{q^2 g^2}{p^2 - g^2}$, więc $PT = \frac{p^2 - g^2}{p}$, co ſię właśnie zgadza z wypadkami Rozdziału 2go. Tym ſpoſobem na wſzyſtkie linie krzywe, których zrównania przywieść ſię mogą do wyrazu całkowitego zniſzczywſzy ułomki; i do wyrazu wymiernego zgubiwſzy znaki pierwiaſtkowe; mamy ſpoſób ogólny prowadzenia ſtycznych. Lubo zaś teraźnieyſzy ſpoſob ſtóſowaliśmy do wſpółuſzykowanych pionowych, ma on iednak to ſamo użycie i w ukośnych, które możemy łatwo za pomocą trygonometryi przerobić.

§. XXII.

Znaleźliśmy dopiero podſtyczną $PT = \frac{-Bq}{A}$, A, B,

będąc

Spoſób rozeznawania punktów dwoiſtych, i troiſtych w liniach krzywych

Fig. 30.

będąc wſpół-czynnikami zrównania $At+Bu=o$; gdyby w tym wyrazie podſtyczney było $A=o$, PT wypada nieſkończona, i na ten czas kąt PTM zniknąwſzy, ſtyczna ſtaie ſię równo-ległą oſi TQ: gdyby zaś było $B=o$, PT ſtaie ſię także $=o$; co nas uczy, że punkt T przypada w ſamym początku odcinków, skąd wychodząca przyſtawa ieſt ſtyczną linii krzywey. S tych dwóch uwag wypada nauka barzo wielkiey wagi w Matematyce wyżſzey o przyſtawach NAYWIĘKSZYCH I NAYMNIEYSZYCH (*De maximis & minimis*). Zaiſte weźmy ſobie za przykład Ellipſę lub koło, w nich kiedy ſtyczna ſtaie ſię równo-ległą osi, pokazuie mieyſce przyſtawy naywiękſzey, po którey idące inne zmnieyſzaią ſię, a przeto pokazuie razem naywiękſze wznieſienie ſię linii krzywey nad oś: kiedy zaś ſtyczna ſtanie ſię równo-ległą przyſtawóm, pokazuie odwrot linii krzywey i przyſtawę naymnieyſzą. Te zaś poznawania zwrotu lub wynioſłości linii krzywych ſą wielkiego barzo użycia do poznania ich ryſunku w odległości ſkończoney. Szukaiąc przez ſpoſób §. poprzedzaiącego podſtyczney na Ellipſę, którey zrównanie $y^2g^2+k^2x^2=k^2g^2$, kładąc naprzód p za x, q za y; wypada - - - $g^2q^2+k^2p^2=k^2g^2$ - - (β). powtóre kładąc $x=p+t$, $y=q+u$, znaydziemy na $At+Bt=o$, $g^2qu+k^2pt=o$. gdzie $A=k^2p$, $B=g^2q$. Podſtyczna $PT=\frac{-Bq}{A}=\frac{-g^2q^2}{k^2p}$, kiedy w Ellipſie ſtyczna ieſt równo-ległą osi $PT=\frac{1}{0}$, bo $A=o$, czyli $k^2p=o$. gdzie k nie mogąc bydź zero, wypada $p=o$: wprowadziwſzy w zrównanie (β) kondycyą $p=o$; wypada $q=\pm k$, to ieſt że przyſtawa naywiękſza ieſt równa pół-osi mnieyſzey. Kiedy zaś w Ellipſie ſtyczna ſtaie ſię równoległą przyſtawom, na ten czas $B=o$, czyli $g^2q=o$, gdzie znowu nie może bydź tylko $q=o$: wprowadziwſzy

wſzy tę kondycyą w zrównanie, otrzymamy $p=\pm g$; to ieſt że odcinek naywiękſzy, ieſt równy pół-osi więkſzey, a iako na każda s tych naywiękſzych ilości dwie wypadły wartości, przeto dwie ſą przyſtawy naywiękſzé w Ellipſie pokazuiące dwa podnieſienia ſię linii krzywey iedno nad, drugie pod osią; powtóre dwa odwroty teyże linii krzywey na obydwoch końcach osi więkſzey. W tych zas przypadkach widzemy, że w Ellipſie takiem zrównaniem opiſaney odcinkowi naymnieyſzemu odpowiadá przyſtawa naywiękſza, a przyſtawie naymnieyſzey odcinek naywiękſzy. Ponieważ więc w tey teoryi wypadaią razem rzeczy naymnieyſze i naywiękſze, chcąc ią do zupełney ogólności i doſkonałości przywieśdź, potrzebaby wynaleśdź prawidło na rozeznanie w każdym przypadku kiedy i co wypadá naymnieyſze, a kiedy i co naywiękſzé. Bo ieſzcze należy nam oſtrzec, że nie zawſze wypadá przyſtawa linii krzywey naywiekſza, kiedy ſtyczna ieſt równo-ległą osi; i nie zawſze naymnieyſza, kiedy ieſt równo-legła przyſtawom: ale w pierwſzym przypadku bydź może naymnieyſza, w drugim naywiękſzą. Wyſtawmy ſobie że linia krzywa ma taki ryſunek iaki nam pokazuie fig. 31. w punkcie *A* przyſtawa będzie naymnieyſza, chociaż tam ſtyczna *LM* ieſt równo-ległą osi; a w punkcie *O* może bydź naywiekſza, albo ani naywiękſza ani naymnieyſza, chociaż ſtyczna ieſt równo-ległą przyſtawie *PA*. Te wſzyſtkie przypadki potrzebuią nayogólnieyſzych prawideł na rozeznanie iednych od drugich: i czynią tę teoryą iedne z nayobſzernieyſzych w rachunku Differencyalnym, do którego ią odkładamy. Będzie nam miło w obſzernem tam wyłożeniu tey nowey teoryi, i iey użyciu dadź poznać wyſokie wynalazki Wielkich wieku naſzego Geometrów Mac-laurin, dela Grange, Eulera. Wróćmy ſię do pierwſzych uwag nad ſtycznemi.

Fig. 31.

Widzieliśmy iuż wypadaiące wartości ſtycznych, czyniąc w zrównaniu $PT=\frac{-Bq}{A}$, $A=o$ ſamo, potem B ſamo $=o$. uczyńmy teraz razem $A=o$, $B=o$; zrównanie na podſtyczną ſtaie $\frac{o}{o}$, i zrównanie na ſtyczną $\frac{u}{t}=\frac{-A}{B}=\frac{o}{o}$. Wyraz ten $\frac{o}{o}$ podług §. 16. Algebry ieſt wyrazem nieoznaczonym oſtrzegaiącym nas, że po wynalezieniu ſtycznych wrócić nam ſię potrzeba do pierwſzego zrównania (λ) §. 21: tam uczyniwſzy $A=o$, $B=o$, dwa terminy nayniżſzego wymiaru nie będą ſię znaydować w zrównaniu, ale na ich mieyſce $Ct^2+Dtu+Eu^2$ ſą terminami wymiaru nayniżſzego, przed któremi inne potęgi nikną, a które przeto dadź nam powinny wartość ſtyczney. Zrównanie więc na ſtyczną ieſt $Ct^2+Dtu+Eu^2=o$ - - (γ). to zrównanie rozebrać ſię może na dwa pierwſzego ſtopnia rzetelne lub uroione, równe lub nierówne. Ieżeli $D^2>4CE$, dwa pierwiaſtki zrownania (γ) ſą rzetelne nierówne, każdy z nich wyraża ſtyczną do punktu M; więc do punktu M należą dwie ſtyczne Fig. 30. oſobne i rożne, a przeto muſzą bydź dwa łuki linii krzywey przecinaiące ſię w punkcie M, iakie nam Fig. 32. N°. 1mo maluie fig. 32. N°. 1°. VM, NM, do których prowadzone ſtyczne LM, HM, pokazuią kierowność każdego łuku w punkcie M, który ieſt punktem dwoiſtym.

Ieżeli $D^2=4CE$ zrównanie (γ) zamyka dwa pierwiaſtki równe rzetelne, co nas uczy, że obydwie ſtyczne LM, HM, zeſzły ſię razem, i odnogi dwie linii krzywey w punkcie M wzięły iednę kierowność, czyli te odnogi dotykaią ſię s ſobą w punkcie M.

Ieżeli zaś $D^2<4CE$ dwa pierwiaſtki zrównania (γ) ſą uroione, co nas uczy że M znaczy odnogę iaykowatą zamienioną w punkt dwoiſty ſprzężony §. 2. Każda więc linia krzywa w którey zrównanie (γ) ma mieyſce, zamyka punkt dwoiſty, w którym albo ſię dwie odnogi przecinaią i czynią węzeł; albo

ſię

ſię dotykaią: albo nakoniec tén punkt dwoiſty ieſt punktem ſprzężonym: podług troiakiego gatunku pierwiaſtków (γ).

Gdyby ieſzcze w zrównaniu (γ) nie tylko A, B, ale C, D, E, były $=o$, na tén czás terminy $Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3$ byłyby wymiarem nayniżſzym przed którym wſzyſtkie inne wyżſze zniknąwſzy, mielibyśmy $Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3=o$ - - - (δ) to zrównanie mogąc ſię rozebrać na trzy pierwſzego ſtopnia, odkryie nám punkt troiſty w M; to ieſt albo taki, przez który przechodzić będzie iedna odnoga linii krzywéy, i gdzie razém drugá zamieniła ſię w punkt ſprzężony, ieżeli zrównanie (δ) má ieden pierwiaſtek rzetelny a dwa uroione; albo punkt taki, w którym ſię trzy odnogi linii krzywey przecinaią, ieżeli trzy pierwiaſtki ſą rzetelne nierówne; albo punkt w którym ſię trzy odnogi dotykaią, ieżeli pierwiaſtki rzetelne ſą wſzyſtkie równe: albo na koniec punkt, w którym ſię dwie odnogi dotykaią, a trzecia ie przecina, ieżeli dwa pierwiaſtki rzetelne ſą rowne, a trzeci nierówny. Zawſze zaś linia proſta przechodząc przez punkt M troiſty przecina linią krzywą w trzech mieyſcach, tak iak przecinaiąc ią w punkcie dwoiſtym uważana bydź ma iak gdyby w dwóch mieyſcach też linią krzywą przecięła. Idąc daley za tem rozumowaniem, możemy ſobie ieſzcze wyſtawić, że wſzyſtkie terminy zrównania (δ) ſą zero, a na tén czás przypadnie nám wziąść na ſtyczną z zrównania (λ) terminy ſkładaiące czwarty wymiar: takowe czwartego ſtopnia zrównanie roſtrząſaiąc, znaydziemy mu punkt odpowiadaiący poczwórny, powſtaiący albo z dwóch punktów ſprzężonych, albo czterech odnóg ſię przecinaiących lub dotykaiących, albo s czterech odnóg s których dwie ſię dotykaią, a dwie inne ie przecinaią w tymże ſamym punkcie. Przeciawſzy linią krzywą w takowym poczwórnym punkcie, uważać w tem przecięciu należy, że linia proſtá w czterech punktach przecięła krzywą. Stąd łatwo nam barzo ułożyć żrównania ogólne na linie krzywe maiące punkta poiedynczé, dwoiſte, poczworné, i t. d. Zaiſte żeby zrównanie wyrażało linią krzywą maiącą punkt poiedynczy, potrzeba naprzód, żeby to mogło bydź przywiedzione do zero, położywſzy p za x, q za y: powtóre żeby kładąc za x, $p+t$, za y, $q+u$; odmieniło ſię na zrównanie między t, u, takie, któreby w oſtatnich granicach ilości ubywaiących zamienić ſię mogło na $At+Bu=o$, a przeto wyraziwſzy takie zrównanie przez $P(x-p)+Q(y-q)=o$, P i Q bydz powinny funkcyami x, y, i całe zrównanie nie powinno bydź rozdzielne przez $x-p$, ani przez $y-q$; potrzeba bowiem zawſze aby to zrównanie przerobioné na t, u, wzięło wzór zrównania (λ). Podobnie zrównanie na linią krzywą maiącą punkt dwoiſty wyrazić możemy przez $P(x-p)^2+Q(x-p)(y-q)+R(y-q)^2=o$, w którem P, Q, R, bydź powinny koniecznie funkcyami x, y, całe zaś zrównanie nie powinno bydź rozdzielne ani przez $x-p$, ani przez $y-q$. Skąd łatwo poznaiemy że linie 2go porządku nie mogą mieć punktu dwoiſtego, w nich bowiem P, Q, R, muſiałyby bydź funkcyami ſtatecznémi; a przeto zrównanie podane nie na linią krzywą, ale byłoby na dwie linie proſte. Ieżeli ieſzcze linią krzywą maiącą punkt troiſty opiſzemy zrównaniem - - - $P(x-p)^3+Q(x-p)^2(y-q)+R(x-p)(y-q)^2+S(y-q)^3=o$; P, Q, R, S, bydź powinny funkcyami ilości odmiennych; powtóre całe zrównanie nie powinno bydź rozdzielne przez $x-p$, ani przez $y-q$; dla czego linie 3go porządku nie mogą mieć punktu troiſtego; ale iako porządek trzeci ieſt nayniżſzy, który mieć może punkt podwóyny; tak porządek czwarty nayniżſzy, który mieć może albo ieden punkt troiſty albo dwa dwoiſte. Co nam łatwo ieſt rościągnąć do linii krzywych porządków wyżſzych, to ieſt: że linia porządku n nie może mieć punktów mnogości większey od $n-1$.

§. XXIII.

§. XXIII.

Równaią ſię linie krzywe s kołem,

Uważaiąc odnogi nieſkończone w liniach krzywych przez granice ilości wzraſtaiacych doświadczyliśmy, iż zrównanie podane zniſzczywſzy w niem wſzyſtkie terminy niżſzych wymiarów, procz dwóch pierwſzych dały nam ledwo-nieſtyczną proſtą: ocaliwſzy zaś w niem więkſzą liczbę terminów, wypadła ledwo-nieſtyczna krzywa mięſzaiąca ſię w odległości nieſkończoney z linią podaną. Te zaś ledwo-nieſtyczne krzywe daleko nam lepiey wydawały właſności linii podaney iak ledwo-nieſtyczne proſte. Podobnie w teraźnieyſzych dociekaniach ocaliwſzy więcey terminów w zrównaniu

$$o = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Iu^3 + Kt^4 + \text{i t. d.} \quad - \quad - \quad - \quad (\lambda).$$

zrównanie pozoſtałe wyrazi nam linią krzywą, którey więkſza liczba punktów przyſtanie do linii podaney. Kiedy bowiem linii iakiey krzywey odnoga dotknie ſię odnogi inney linii krzywey, dwa małe łuczki tych linii zmięſzaią ſię tak, iż ich krzywizna a przeto kierowność punktu opiſuiącego takie łuczki, ſtanie ſię ta ſama; podzieliwſzy przeto linią krzywą podaną na takie łuczki tuż ſobie przyległe, uważać ią możemy iako złożoną z elementow drugiey linii krzywey odmieniaiącey ſwoie położenie na każdy takowy łuczek, to ieſt odmieniaiącey ilość ſtateczną, którąśmy linią porównania nazwali w §. 7. Aże z odmiany takowey ſtateczney ilości rodzą ſię linie krzywe podobne, przeto każdą linią iakiegokolwiek badź porządku równaiąc ią ſpoſobem opiſanym z inną linią krzywą, uważać możemy iako złożoną z łuczków podobnych tey oſtatniey. Do takowego równania obrać nam naprzód należy linią krzywą, w którey zrównanie nie wchodzi tylko iedna ilość ſtateczna, powtore którey właſności ſą nam znane naylepiey, i którey nakoniec odryſowanie ieſt łatwe. Wſzyſtkie te korzyści zawiera koło, s którem równaiąc inne linie krzywe, uważać ie możemy iako złożone

złożone z łuczków kół podobnych, czyli kół odmieniaiących zawſze ſwoie promienie. A ponieważ wiemy z Geometryi początkowey, że obwód czyli **Krzywizna koła** (*Curvatura*), ieſt w ſtóſunku ſpacznym promienia, znalazłſzy na każdy łuczek linii podaney odpowiadaiący promień koła, będziem wiedzieli krzywiznę linii podaney w każdem mieyſcu. I ten to wynalazek promienia odmiennego zawiera w ſobie całe rozwiązanie ninieyſzego zadania. Koło takowe którego łuki odmiennych promieni przyſtaią do łuków linii podaney nazywa ſię (*Circulus oſculator*) **Kołem ściskaiącem**, a promień iego odmienny ma imie **Promienia ściskania**, albo **Promien koła przystaiącego** (*Radius oſculi*; *Radius Curvedinis*). Przenieśmy te uwagi do zrównania (λ) i do ſamey teoryi granic. Kiedyśmy zmnieyſzali na
Fig. 30. fig. 30. łuk *MN* aż do oſtatniego zniſzczenia i zamienienia go na ſtyczną, wſpół-uſzykowane t, u, takowemu zmnieyſzaniu odpowiadaiące powinny były przywieśdź zrównanie (λ) do zrównania na ſtyczną *ML*, czyli wſzyſtkie terminy powinny były zniknąć przed $At+Bu$: kiedy zaś łuk *MN* zmnieyſzać będziemy nie aż do zamienienia go na linią proſtą, ale na łuczek inney linii krzywey, granice ubywania ſtaią ſię mniey odległe, bo ſię u nich więcey punktów zoſtaie z linii podaney; zoſtanie ſię bowiem cały element, czyli łuczek mały tey linii; a przeto w tych granicach zoſtać ſię także powinno więcey terminów z zrównania (λ), i ieżeli potęgi naywyżſze znikną, tuż naſtępuiąca potęga po pierwſzey powinna ocaleć; tu bowiem linia krzywa zamieni ſię w małym łuczku na inną linią, ale nie przeſtanie bydź krzywą; przeto zrównanie (λ) powinno ſię także odmienić na inne zrównanie, ale nie powinno przeſtać wyrażać linii krzywey. S czego przekonać ſię muſzemy, że zrównanie (λ) odnoſząc do tych bliżſzych granic ilości odmienne; powinno nam zoſtawić dwie

naybliżſze ſiebie potęgi tychże ilości, to ieſt:

$At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2=o$, albo $Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3=o$, gdyby pierwſza potęga nie znaydowała ſię w zrównaniu. i t. d.

Chcąc zaś tym ſpoſobem iednę linią krzywą zamieniać na łuki inney linii krzywey n. p. koła; muſzemy oś przenoſić na linią ſpólną obydwóm krzywym. Mieyſce to wſpoł-uſzykowanych nayprzyzwoiciey ſłuży promieniowi koła, s którem linią podaną zakładamy ſobie równać: promień koła, wiemy że ieſt zawſze pionowy na iego ſtyczną: a ieżeli łuk koła zmięſza ſię z łukiem linii krzywey podaney, linia podana będzie miała s kołem ſpólną ſtyczną, a przeto na ten czas pionowa do ſtyczney będzie razem promieniem koła mięſzaiącego ſię w małym łuczku z linią podaną. Naypierwſzą więc ieſt rzeczą oznaczyć położenie linii MQ pionowey na ſtyczną TL, do każdey linii krzywey. Maiąc zaś na linią MQ ieden punkt zawſze dany M, całe iey oznaczenie zawiſło od wynalezienia drugiego punktu Q, w którym oś przecina, czyli od znalezienia odległości PQ, którą nazwano Pod-pionową (*Subnormalis*). Potrzeba więc wartość na PQ wyciągnąć z zrównania (λ), co ieſt barzo łatwo za pomocą ſtyczney ML, na którą zrównanie $At+Bu=o$; tróykąty bowiem TMP, PMQ, MSL, będąc podobne prowadzą nas do naſtępuiącey proporcyi:

Fig. 10.

$$MS:SL::MP:PQ, \text{ aże } MS:SL=\frac{t}{u}=\frac{-B}{A}; \ MP=q;$$

$$\text{więc } -B:A=q:PQ \text{ - - } PQ=\frac{-Aq}{B}.$$

Przykład na Parabolę. Wynaleśdź podpionową na linią krzywą opiſaną zrównaniem $y^2=2ax$; kładąc q za y, p za x, mamy $q^2=2ap$: kładąc powtóre $y=q+u$, $x=p+t$, mamy zrównanie $q^2+2qu+u^2=2ap+2at$, skąd $qu+at=At+Bu=o$, a przeto $PQ=-a$, to ieſt pod-pionowa ieſt linią nieodmienną w Paraboli i równą połowie linii równania, cośmy iuż znaleźli w §. XIV.

Maiąc w każdey linii krzywey PQ; mámy razem $MQ=\sqrt{(MP^2+PQ^2)}$, aże $TM=\sqrt{(PT^2+PM^2)}$ - - $PT:TM=PM:MQ$ - - $MQ=\frac{PM}{PT}\sqrt{(TP^2+PM^2)}$.

Przenieśmy wſpół-uſzykowane $MS=t$, $SN=u$, na linią pionowa MQ, i nazwiymy $MR=z$, $RN=w$: zrównanie $At+Bu=o$ odkryło nám ſtyczną kąta $LMS=\frac{u}{t}=\frac{-A}{B}$, iego więc wſtawa $=\frac{-A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$. Doſtawa $=\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$; od R ſpuściwſzy pionową RO na nową oś, i RH równo-ległą MS, mámy $MC=\frac{-Az}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $RO=\frac{Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $NH=\frac{-Aw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $RH=\frac{Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$; a przeto $t=MO+RH=\frac{-Az+Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $u=\frac{-Aw-Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, skąd otrzymámy za pomocą eliminacyi $z=\frac{-At-Bu}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$; $w=\frac{Bt-Au}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$; aże zrównanie ($\lambda$) daie nam

$-At-Bu=Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3+$ i t.d

widzemy że z ieſt ilością daleko mnieyſzą od w; albowiem w ieſt wyrażone przez t, u; z zaś przez potęgi wyżſze tychże odmiennych ilości: potrzeba nám więc pamiętać o tych wártościach z, w, odnoſząc ich ubywania do oſtatnich granic.

Użyimy teraz wſzyſtkich uwag wyłożonych na początku tego §. s których náprzód wypadá; że uważaiac linią krzywą podaną zamkniętą w zrównaniu (λ), iako maiącą za granicę łuk inney linii krzywey, wſzyſtkie potęgi znikną w (λ) przed pierwſzą i drugą, zoſtawiwſzy

$-At$

$$-At-Bu=Ct^2+Dtu+Eu^2 \quad - \quad - \quad (\Lambda)$$

poznamy naſamprzód naturę tey linii, a dopiero równać ią będziemy s kołem, abyśmy wſzyſtkie linie krzywe przywiedli do łuków koła. Przeto odmienić nam potrzeba wſpół-uſzykowane zrównania (Λ) kładąc $t=\frac{-Az+Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $u=\frac{-Aw-Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, przez co zrównanie (Λ) zamieni ſię na

$$z\sqrt{(A^2+B^2)}=\frac{(A^2C+DAB+EB^2)}{A^2+B^2}z^2+$$

$$\frac{(A^2D-B^2D-2ABC+2ABE)}{A^2+B^2}wz+$$

$$\frac{(CB^2-ABD+A^2E)}{A^2+B^2}w^2$$

widzieliśmy zaś, że z ieſt niezmiernie małem w porównaniu w, więc w granicy, z^2, zw, znikną przy z, w^2; a zrównanie pozoſtałe będzie wyrażać Parabolę

$$w^2=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}z}{[CB^2-ABD+A^2E]} \quad - \quad - \quad (L).$$

Linia więc podana zmięſza ſię w małym łuczku s Parabolą, którey miarą równania ieſt wſpół-czynnik z w zrównaniu (L). Przeſtaiąc na tym oſtatnim wynalazku, moglibyśmy wſzyſtkie linie krzywe uważać iako złożone z łuków Parabolicznych. Ale łubo Parabola ieſt linią nayprościeyſzą 2go porządku co do zrównania, nie ieſt iednak taką co do ryſunku. Znalazłſzy związek między linią równania w Paraboli, i między promieniem koła, dalekobyśmy ſzczęśliwiey równać mogli łuki iakichkolwiek linii krzywych s kołem, bobyśmy za iego pomocą przyſzli do odryſowania łatwo iakieykolwiek linii. Cała zaś ta ſztuka zależy od poznania promienia koła odpowiadaiącego każdemu łukowi linii podaney. Weźmy więc zrównanie na koło, którego promień $=a$, to ieſt

$y^2=$

$y^2=2ax-x^2$, kładąc w nie naprzód p za x, q za y; otrzymamy $q^2=2ap-p^2$; powtóre kładąc $x=p+t$, $y=q+u$; wypadnie $q^2+2qu+u^2=2ap+2at-p^2-2pt-t^2$; ażc $q^2-2ap+p^2=0$ - - zoſtaie ſię

$$2qu+u^2-2at+2pt+t^2=0.$$

znoſząc wſpół-czynniki tego zrównania z (Λ), znaydziemy $A=2p-2a$, $B=2q$, $C=1$, $D=0$, $E=1$, $A^2+B^2=4(p^2-2pa+a^2+q^2)=4a^2$, gdyż $q^2-2pa+p^2=0$; $\surd(A^2+B^2)=2a$, $(A^2+B^2)\surd(A^2+B^2)=8a^3$; $CB^2-ABD+A^2E=4(p^2+q^2-2pa+a^2)=4a^2$, a zrównanie (L) zamieni ſię na - - $w^2=2az$, które nas uczy, że linia równania w Paraboli mieſzaiącey ſię z linią

Promień koła przyſtaiącégo do linii krzywéy. krzywą podaną przy M, ieſt tey ſamey wielkości, którey śrzednica koła mieſzaiącego ſię z tąż linią krzywą, czyli

$$2a=\frac{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}{(CB^2-ABD+A^2E)},\ a=\frac{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}{2(CB^2-ABD+A^2E)}\quad(R'')$$

zrównanie (R'') wyraża promień ściſkania, czyli promień koła maiącego taką krzywiznę, iaką ma linia podana w łuczku małym przy M. Szukaiąc takiego promienia na każdy łuk linii podaney, znaydziemy w każdem mieyſcu inną iego wartość, a przeto linią iakiegokolwiek porządku iako złożoną z łuków kół różnych. Promień ten odmieniać będzie ſwoie położenie tak, iż raz przypaśdź może wewnątrz, a drugi raz zewnątrz linii krzywey, to ieſt z drugiey ſtrony punktu M n. p. MV: w pierwſzym przypadku linia krzywa będzie wklęſłą do pionowey MQ; w drugim zaś będzie wypukłą; co nam właśnie wytyka zrównanie (R'') przez znak pierwiaſtkowy, który w ſobie zamyka, i przez który pokazuie dwie wartości na promień ściſkania: Iakże każdy s takowych przypadków rozróżnić? Trudność tę obiaśnia

Fig. 32. No.2d. nam ſamo porównanie fig. 32. z fig. 30: kiedy bowiem pionowa MQ pada zewnątrz linii krzywey NM, zawſze $SL<SN$, kiedy zaś $SL>SN$ iak na fig.

Fig. 30. 30. linia krzywa NM ieſt wklęſłą do pionowey MQ;

w pierw pierwſzym razie LN ieſt odiemne; w drugim zaś dodatne, a przeto cała ta trudność ułatwi ſię wynalazłſzy zrównanie warunkowe, na LN dodatne łub odiemne. Nazwiymy $LN=s$, ponieważ $SN=u$, a s poprzedzaiacych przypuſzczeń $SL=\frac{-At}{B}$, będzie na fig. 30. $u=\frac{-At}{B}-s$, włożywſzy tę wartość za u w zrównanie $(\wedge)$, otrzymamy - - - -

Fig. 30.

$$-B^3s+B^2Ct^2-ABDt^2-B^2Dts+A^2Et^2+2ABEts+B^2Es^2=0.$$

Rozeznanie położenia linii krzywey względem ſtyczney.

s ieſt ilością niezmiernie małą, która niknie przy zbliżaniu ſię linii krzywey do łuku koła, przeto opuściwſzy terminy zawieraiące s^2, ts, zoſtanie ſię

$$s=\frac{(A^2E-ABD+B^2C)t^2}{B^3} \quad - \ - \ - \ - \quad (P'')$$

ilekolwiek więc wyráz $\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$, będzie odiemny, odnoga linii krzywey będzie wypukłą do pionowey iak na fig. 32. N°. 2d°, będzie zaś odnoga wklęſłą do pionowey MQ, ilekolwiek wyráz wſpomniony będzie dodatny iak na fig. 30, czego łatwo nam zawſze doświadczyć na iakąkolwiek linią krzywą, maiąc wſpół-czynniki A, B, C, D, E, znane z zrównania $(\wedge)$.

Fig. 32. N°. 2d°.

Fig. 30.

Zrównanie (R'') może nam dadź na promień ściſkania albo wartość ſkończoną, albo zero, albo nieſkończenie wielką: każdemu s tych przypadków odpowiadaią pewne odmiany w krzywiznie linii. Ieżeli promień ściſkania ieſt zawſze ilością ſkończoną, odnoga linii krzywey ciągnie ſię bez żadney przerwy i zwrotu: ale ieżeli promień ściſkania wypadnie nieſkończony, ponieważ łuk koła na takowy przypadek zamienia ſię na linią proſtą, linia krzywa będzie miała odnogę złożoną z łuczku tak niezmiernie małey krzywizny, iż ten ledwo do linii proſtey nie przyſtanie. Wyſzczególniymy dokładniey ten przypadek, który ilekolwiek razy ma mieyſce, zawſze $CB^2-ABD+A^2E=o$: warunek ten zmaże bez wątpienia niektóre terminy w zrównaniu (Λ), tak dalece, że pozoſtała ich reſzta nie nauczy nas o gatunku linii krzywey w tem mieyſcu przyſtaiącey do linii podaney: potrzeba więc przybrać więcey terminów z zrównania (λ), iako to $Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3+$ i t.d. i w nie kładąc $t=\frac{-Az+Bw}{\surd(A^2+B^2)}$, $u=\frac{-Aw-Bz}{\surd(A^2+B^2)}$, odmieniemy zrównanie na inne wzoru

$$z\surd(A^2+B^2)=aw^2+bw^3+cw^4+dw^5+ \text{ i t.d. - - } (Q'')$$

gdzie wyżſzé potęgi z ſą odrzucone iako niknące. S tego zrównania $z\surd(A^2+B^2)=aw^2$ wyraża nam naturę łuku mięſzaiącego ſię z linią podaną, promień zaś sciſkania do tego łuku ieſt $=\frac{\surd(A^2+B^2)}{2a}$, położywſzy $a=o$, ten promień ſtanie ſię nieſkończony, czyli łuk mały zmięſza ſię z linią proſtą: w takowym razie chcąc poznać dalſzy ciąg linii krzywey brać nam potrzeba z (Q'') naſtępuiący termin bw^3 skąd $z\surd(A^2+B^2)=bw^3$, wyraża krzywiznę łuku naſtępuiącego. Aże z, w, będąc w potęgach nieparzyſtych, na z dodatne wypada w dodatne; w zaś odiemne, kiedy z ieſt odiemnem; idzie za tem, że linia krzywa muſi mieć taki ryſunek iaki nam pokazuie fig. 33. gdzie $+MR$ odpowiada $+RS$; a na $-MR'$, $-R'S'$: przy punkcie więc M odwraca ſwoię odnogę i bierze poſtać wężykowatą: kſztałt takowy przy M nazywa ſię PRZEGIĘCIEM (*Inflexio*) albo punktem ZWROTU PRZECIWNEGO (*Punctum flexus contrarii*), gdzie krzywizna ieſt nieſkończenie mała, i prawie przyſtaiąca do linii proſtey.

Podział linii krzywych na odnogi różnych porządków: i cechy każdey z oſobna.

Fig. 33.

Ieżeli b byłoby $=o$, na ten czas wziąć należy naſtępuiący termin z (Q''), $z\surd(A^2+B^2)=cw^4$, w tem zrównaniu ponieważ w tak dodatne iak odiemne czyni zawſze z dodatnem, linia krzywa w tym przypadku nie ma punktu zwrotu przeciwnego: ieżeli

$c=o$;

$t=o$; wypada zrównanie $z\sqrt{(A^2+B^2)}=dw^5$, i linia krzywa ma przegięcie, czyli punkt zwrotu przeciwnego: zgoła ile razy z będzie dane przez funkcyą w ſtopnia nieparzyſtego, zawſze linia krzywa ma punkt zwrotu przeciwnego, nie ma zaś nigdy takiego punktu, kiedy z będzie funkcyą w ſtopnia parzyſtego. Wſzyſtkie takowe odnogi uważane iakoby ſię ſkładały z łuczków kół różnych, a dane przez zrównanie zamykaiące z w pierwſzym ſtopniu nazywać będziemy ODNOGAMI PIERWSZEGO PORZĄDKU (*Rami primi ordinis*), na które zrównanie wzoru $z=\alpha w^n$.

Może ſię atoli przytrafić że w zrównaniu (λ) $A=o$, $B=o$, i terminy $Ct^2+Dtu+Eu^2$ rozbieraiąc ſię na dwa mnożniki nierówne pokażą punkt dwoiſty, w którym ſię dwie odnogi przecinaią; na ten czas ſzukać nam potrzeba promienia ściſkania na każdą z oſobna odnogę: to ieſt przypuściwſzy że dwa mnożniki $Ct^2+Dtu+Eu^2=o$, ſą $a't+b'u=o$, $c't+d'u=o$, położywſzy na pierwſzy $t=\frac{-a'z+b'w}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$, $u=\frac{-a'w-b'z}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$, na drugi zaś mnożnik $t=\frac{-c'z+d'w}{\sqrt{(c'^2+d'^2)}}$, - - - - $u=\frac{-c'w-d'z}{\sqrt{(c'^2+d'^2)}}$ w zrównanie (λ), przerobiemy ie na każdy z oſobna - - $zw=\alpha w^3+\beta w^4+\delta w^5+\varepsilon w^6$ + i t. d. a gdyby punkt był troiſty na zrównanie wzoru $zw^2=\alpha w^4+\beta w^5+\delta w^6+$ i t. d. każde z nich będzie wzoru

$$z=\alpha w^2+\beta w^3+\delta w^4+ \text{ i t. d.}$$

ieżeli α nie ieſt $=o$, promień ſzukany będzie $=\frac{1}{2\alpha}$; a gdyby było $\alpha=o$, na ten czas zrównanie na linią krzywą mięſzaiącą ſię s podaną, będzie $z=\beta w^3$ i t. d. wſzyſtkie te odnogi będą 1go porządku

rządku, i liniá krzywá będzie miała punkt zwrotu przeciwnégo, ieżeli wykładnik w będzie nieparzyſty, ale ieżeli tén wykładnik będzie parzyſty, żadnégo takiego punktu nie będzie.

Inné zaś będą wypadki kiedy będąc $A=o$, $B=o$, $Ct^2+Dtu+Eu^2=(a't+b'u)^2$, to ieſt że będzie zamykała funkcyá ta, dwa mnożniki równé, i dwie odnogi linii krzywey będą ſię dotykać; włożywſzy więc $t=\frac{-a'z+b'w}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$, $u=\frac{-a'w+b'z}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$ w zrównanié (λ), zamieniemy ié na inné wzoru

$$z^2=\beta w^3+\delta w^4+\varepsilon w^5+\text{ i t. d.} \quad - \; - \quad (S'')$$

gdzie inné terminy zamykaiącé z ſą opuſzczoné iako niknącé. S tych zaś linią krzywą mięſzaiącą ſię w małym łuczku z linią podana wyrażać będzie zrównanié $z^2=\beta w^3$, albo $z^2=\delta w^4$, kiedy $\beta=o$; albo $z^2=\varepsilon w^5$ kiedy $\beta=o$, $\delta=o$, i t. d. Wſzyſtkié té zrównania wyrażaią *Odnogi 2go porządku*, na któré zrównanie ogólné ieſt $r^2=A'w^n$, gdzie $n>2$. Ieżeli takowá odnoga będzie daná przez zrównanié $z^2=\beta w^3$, gdzie $n=3$, $z=w\sqrt{(\beta w)}=w^2\sqrt{(\frac{\beta}{w})}$, a przeto $w^2=\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{\beta}}z$, promień zaś ściſkaniá $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{\beta}}$, który będzie zero, ieżeli $w=o$, to ieſt krzywizna linii w tym punkcie ieſt nieſkończenie wielka: aże w tę ſamę má wartość, kiedy z ieſt dodatnem lub odiemnem, przeto liniá krzywá nie má punktu zwrotu przeciwnégo, ale Konczystość (*Cuſpis*) przy M (fig. 34.) gdzie koło zamieniło ſię w punkt, i odnogi linii krzywey MS, MS' ſtały ſię obydwie wypukłé do ſtyczney ML, w obydwóch tych odnogach na z dodatne lub odiemné odpowiadá $w=RS$ dodatné, albo $=R'S'$ także dodatné. Ieżeli za n brać będziemy liczby nieparzyſté w zrównaniu $r^2=A'w^n$, wſzyſtkié odnogi 2go porząd-

Fig. 34.

ku

ku będą miały kończyſtości przy M s tą różnicą, że iako na $n=3$ wypadł nam promień ściſkania nieſkończenie mały, tak na $n=5$, $n=7$, $n=9$, i t. d. wypadnie tenże promień nieſkończenie wielki, ponieważ zrównanie n.p. $z^2=\varepsilon w^5$, daie $z=w^2\sqrt{u\varepsilon}$, promień ściſkania $=\frac{1}{2\sqrt{w\varepsilon}}$, gdzie uczyniwſzy $w=0$, promień ten będzie $=\frac{1}{0}$.

Należy nám tu iednak oſtrzec, że w zrównaniu (S'') wzięliśmy tylko ſame funkcye w, opusciwſzy inne terminy zamykaiące z, ieżeli atoli wrócemy ſię do ſtanu zrównania (S'') kiedy w niem przynaymniey pierwſze potęgi z ocalaią; będzie:

$$z^2=\alpha zw^2+\beta w^3+\gamma zw^3+\delta w^4+ \text{ i t. d.}$$

gdzie lubo dla wyliczonych iuż przyczyn αzw^2 możemy opuścić dla βw^3, tak iako γzw^3 dla δw^4, iednak $\beta=0$, αzw^2 niezniknie przed δw^4, i zrównanie ſię pozoſtanie $z^2=\alpha zw^2+\delta w^4$, które rozwiązawſzy co do z, ieżeli w niem $\alpha\alpha<-4\delta$, punkt M, będzie punktem ſprzężonym, ieżeli zaś $\alpha\alpha>-4\delta$, odnoga *2go* porządku będzie ſię ſkładać z dwóch odnóg porządku pierwſzego, i linia krzywa będzie miała dwie odnogi dotykaiące ſię zewnątrz iak na fig. 35, albo dwie dotykaiące ſię wewnątrz iak na fig. 36. Fig. 35, 36.

Gdyby punkt do którego ſzukamy koła przyſtaiącego, był troiſtym, odnogi iemu odpowiadaiące mogą bydź trzy *1go* porządku, albo iedna *1go*, a druga *2go*, albo nakoniec iedna *3go* porządku, na którą wypadłoby zrównanie albo $z^3=\alpha w^4$, albo $z^3=\alpha w^5$, albo $z^3=\alpha w^7$, albo ogólnie $z^3=A'w^n$, gdzie $n>3$, i toż n ieſt cale nierozdzielne przez 3; te odnogi będą miały punkt zwrotu przeciwnego, ieżeli n będzie liczbą nieparzyſtą; ieżeli zaś n będzie liczbą parzyſtą, taki punkt nie będzie ſię znaydował w linii krzywey. Aże w zrównaniu $z^3=\alpha w^5=\frac{\alpha w^6}{w}$ - - -

$z=$

$z = w^2 \sqrt[3]{\frac{a}{w}}$, ſkąd wypádá promień ściſkaniá $= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{w}{a}}$, to ieſt $= 0$, kiedy $w = 0$; biorąc zaś wyżſze potęgi od otéy n.p. $z^3 = aw^7$ - - $z = w^2 \sqrt[3]{aw}$, ſkąd promień ściſkania wypádá $= \frac{1}{2\sqrt[3]{a'w}}$, przeto w odnogach 3go porządku kiedy $n < 6$, promień koła przyſtaiącego ieſt nieſkończenie mały; ieſt zaś nieſkończenie wielki kiedy $n > 6$. Znáydziemy podobnie w odnogach 4go porządku że w nich promień ieſt nieſkończenie wielki, kiedy $n > 8$; ieſt zaś nieſkończenie mały, kiedy $n < 8$. wyraziwſzy takie odnogi zrównaniem $z^4 = A'w^n$, gdzie $n > 4$. a ieżeli n ieſt liczbą nieparzyſtą, wſzyſtkie te odnogi daią kończyſtość, tak iak odnogi 2go porządku. Więc ogólnie mówiąc: odnogi porządku m wyraziwſzy zrównaniem $z^m = A'w^n$, gdzie $n > m$, ieżeli m będzie parzyſte, n zaś nieparzyſte dadzą konczyſtość, czyli PUNKT ODBICIA *(Punctum reflexionis)*, któremu będzie odpowiadał promień ściſkania nieſkończenie mały, ieżeli $n < 2m$, albo nieſkończenie wielki kiedy $n > 2m$. A ieżeli w zrównaniu ogólnem $z^m = A'w^n$, m, n, będą obydwa nieparzyſte, na ten czas odnogi porządku m, będą miały punkt zwrotu przeciwnego, któremu tak iak kończyſtości powinien odpowiadać promień ściſkania o, albo $\frac{1}{0}$. Mamy więc trzy odmiany w odnogach linii krzywey, te bowiem odnogi iakiegokolwiek bądź porządku albo będą nieprzerwanie ciągłe kiedy promień koła przyſtaiącego będzie miał wartość ſkończoną, albo maiąc wartość nieſkończenie wielką lub małą, kiedy zrównanie na łuki mięſzaiące ſię $z^m = A'w^n$ ieſt takie iż będąc $n > m$, m ieſt liczbą nieparzyſtą, n zaś parzyſtą. Albo te odnogi będą zamykać punkt odbicia czyli kończyſtość, albo nakoniec punkt zwrotu przeciwnego czyli przegięcia podług

chara-

charakterów dopiero od nas wyliczonych, dwa atoli te oſtatnie przypadki to maią iſtotnego, że w obydwóch promień koła przyſtaiącego, czyli ściſkania musi bydź nieſkończenie wielki albo nieſkończenie maly.

Ciſsois i iey właſności.

Przykład. Niech będzie zrównanie na linią *3go* porządku $x^3+xy^2-ay^2=0$, - - (L) wynaleśdź liczbę odnog nieſkończonych przez ledwo-nieſtyczną tey linii krzywey? powtóre: czy ma punkt dwoiſty? w tym punkcie czy ma przegiętość czy kończyſtość? Co do pierwſzego - - $x(x^2+y^2)-ay^2=0$: ponieważ termin naywyżſzego wymiaru zamyka tylko iednego mnożnika rzetelnego x, a dwóch uroionych - - $(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})$, przeto podług §. 18. $a=0$, $b=-1$, $y=-t$, $x=u$: włożywſzy te wartości w zrównanie (L), zamieniám ie na $u^3+ut^2-at^2=0$, uczyniwſzy $t=\frac{1}{0}$, otrzymuię $u=a$, a przeto $(u-a)t^2+a^3=0$, zrównanie na ledwo-nieſtyczną hyperboliczną, czyli $u-a=\frac{-a^3}{t^2}$; linia więc krzywa opiſaná zrównaniem (L) należy do *2go* rodzaiu linii *3go* porządku maiących ledwo-nieſtyczną wzoru $u=\frac{A}{t^2}$, i taż linia krzywa ma dwie odnogi nieſkończone między ſobą równe, ponieważ na t dodatne lub odiemne, odpowiada ta ſama wartość u.

Chcąc teraz wiedzieć czy ta linia krzywa ma przegięcie lub punkt zwrotu przeciwnego, czynię naprzód $x=p$, $y=q$, zrównanie podane zamienia ſię ſię na - - $p^3=aq^2-pq^2$ - - (L'), powtóre kładę w (L) $x=p+t$, $y=q+u$, a odrzuciwſzy terminy zamknięte w zrównaniu (L') wypada mi

$$(3p^2+q^2)t-(2aq-2qp)u+3pt^2+2qtu-au^2+t^3+tu^2+pu^3=0 \quad (L'').$$

znoſzę to zrównanie z (λ) §. 23, i otrzymuię wartość wſpół-czynników - - $A=3p^2+q^2$; $B=2qp-2aq$; $C=3p$; $D=2q$; $E=-a$, $F=1$, $G=0$, $H=1$, $I=p$, kładę te wartości za A, B, C, i t. d. w zrownanie

(R''), i otrzymuię promień ściſkania, . . .

$$=\frac{q^3(pa+p^2+q^2+4a^2)^{\frac{3}{2}}}{6p(2pq-2aq)^2-4q(3p^2+q^2)(2pq-2aq)-2a(3p^2+q^2)^2}$$

czynię mianownika tego ułomku zero, to ieſt $p=o$, $q=o$, przez co zrównanie (L'') zamieni ſię na - - $-t^3-tu^2+au^2=o$ - - (N), termin drugiego wymiaru au^2 tego zrównania ma dwóch mnożników równych, to ieſt $(u\sqrt{a})^2$ skąd otrzymuiemy $t=w$, $u=-z$, włożywſzy te wartości za t, u, w (N), zamieniamy ié na $-w^3-wz^2+az^2=o$ - - (N'). gdzie podług wyłożonych przyczyn $-wz^2$ zniknie, zoſtawiwſzy $w^3=az^2$, czyli - - $w^2=z\sqrt{wa}$, promień koła przyſtaiącego $=\frac{1}{2}\sqrt{aw}$: więc linia krzywa opiſaná zrównaniem (L), ma kończyſtość w punkcie dwoiſtym, gdzie koło przyſtaiące zamienia ſię na punkt, bo promień iego ieſt nieſkończenie mały. S tych właſności łatwo nám ieſt widzieć, że ta linia krzywá ma ryſunek taki, iaki nam pokazuie fig. 37, gdzie od punktu odbicia M roſchodzą ſię dwie odnogi nieſkończone MS, MR, do których NO ieſt ledwo-nieſtyczną proſtą; co ſię właśnie pokazuie s ſamego zrównania (L), gdzie $y^2=\frac{x^3}{a-x}$, $y=\pm x\sqrt{[\frac{x}{a-x}]}$; $ML=a$; M będąc początkiem odcinków, ieżeli $a=x$, $y=\infty$; ieżeli $x=o$, $y=o$; na x odiemne wſzyſtkié wartości y ſtaią ſię uroione, i linia krzywa za punkt M nie przechodzi: linia ta uważána ieſzcze od dáwnych Geometrów, nazwana ieſt *Ciſſois.*

Fig. 37.

Krótki zbiór nauki całego rozdziału.

Linie krzywe iakożkolwiek naturą między ſobą różne potrafiliśmy między ſobą równać i ſtóſować za pomocą granic ilości wzraſtaiących i ubywaiących. Związki różne ilości odmiennych w zrównaniu, wyrażaiąc zbiór cale innych właſności, oddzielały każdą linią krzywą od innych: tak dalece, że przeſtawſzy na ſamem roſtrząſaniu pierwiaſtków zrównania, poznanie linii krzywych wyżſzych porządków nad drugi, zoſtałoby było zakryte przed rozumem naſzym

aż do

aż do większey doſkonałości Algebry; powtóre wſzyſtkie różnice linii krzywych tego ſamego porządku nie ſtoſowane do ogólnieyſzego początku, włożyłyby były prawo na rozum naſz i pamięć, zatrzymania ſzczególnych charakterów i właſności każdey linii, aby ią rozeznać od innych: zrównania nakoniec iedney linii krzywey brać mogące różne poſtaci bez odmienienia iey natury, wyciągałaby zawſze po nas tyle ſzczególnego roſtrząſania do wydobycia właſności w nich zawartych. Kiedy teorya granic ſkazuiąc nam nayogólnieyſze linii cechy, uwalnia nas od tych ſzczególnych i zawikłanych doſtrzeżeń, i poddaie ſpólne właſności i podobieńſtwa iednych do drugich ſłużące za grunt do podziału nowego linii w każdym porządku na ſwe rodzaie. Granice ilości odmiennych odciąwſzy wſzyſtkie ſzczególności każdey linii krzywey, odkryły nam przez dwoiakiego rodzaiu ſtyczne to, co może bydź ſpólnego iedney linii z drugą, i to co ie iſtotnie od ſiebie oddziela: a zamieniaiąc iedne związki na drugie prościeyſze, w kombinacyach tych zamian teorya ta wytknęła nam nayodległeyſze cechy zró-wnań. Każde bowiem zrównanie zamienić ſię może na innych barzo wiele przez niſzczenie niektórych w ſobie terminów; w tych atoli zamianach zoſtanie coś ſpólnego lub iſtotnie różniącego to zrównanie od innych w tym ſpoſobie uważanych, co nam odkrywa piętno oddziału, lub podobieńſtwa tego zrównania do drugich, a przez to i linii krzywych w nich zawartych. Korzyść ieſzcze naycelnieyſza która nam s takich wypadła uwag, ieſt porównanie linii krzywych z innemi prościeyſzemi. Oderwiymy na moment umyſł od Geometryi, i wynieśmy do powſzechnieyſzych obrazów ten początek granic, a znaydziemy w nim cale nowe ſpoſobu Analitycznego prawidło.

Uważaiąc dwie rzeczy wſzyſtkiemi właſnościami od ſiebie różne, a nie mogąc dla iakichkolwiek przy-

Wykłada ſię drugi początek Analityczny, który ieſt wypadkiem uwag teraźnieyſzego rozdziału.

czyn doſtrzec związku między niemi, gubię w umyśle wſzyſtkie te różnice: a przez to zamieniam rzecz na inną cale różney natury, i cale do ſiebie niepodobną; to ſamo działanie wykonywam i w drugiey rzeczy: a tak obie przetworzywſzy na nowe iſtoty, równam te że tak rzekę nowe ſtworzenia umyſłu s ſobą, umieſzczaiąc w iedney klaſsie te, w których coś ſpólnego upatrzyłem, a oddzielaiąc od ſiebie te w których mi ſię pokazała różnica. Nowe te iſtoty ſą granicami rzeczy przetworzonych, do których one ſię zbliżaią tracąc s ſwoich właſności, ale których doſiąc nie mogą chyba odmieniwſzy całkiem ſwoię naturę. Wracam ſię potem do pierwſzych obrazów, i ieżelim nic ſpólnego nie widział w tem czem ſą, nauczyłem ſię tey ſpólności w tem, na co ſię mogą zamienić. I ten to ſpoſób myślenia ieſt iak widzemy naydelikatnieyſzą ucieczką porównywania, który iak ſzczęśliwie Geometryi poſłużył, nawet w poznawaniu przypadków natury, świadkiem ieſt cała Fizyka matematyczna. Widzemy iuż, że pierwſzy początek analityczny w całem świetle od nas w Algebrze wyſtawiony, zależy na upatrywaniu związku między rzeczami przez porównywanie tego, co ieſt rzeczom przy ſwey naturze zoſtawionym ſpólnego; drugi zaś na doſtrzeganiu i porównywaniu tego, co im zoſtanie ſpólnego odmieniwſzy ich naturę. Tamten ieſt ſpoſobem Matematyki początkowey, ten zaś Matematyki wyżſzey. Cały ciąg prawd teraźnieyſzego rozdziału dał nam uczuć, iak ieſt wielka rozległość tego oſtatniego ſpoſobu, którego dokładnieyſze wyłożenie i rozebranie ſkłada część barzo obſzerną Matematyki wyżſzey nazwaną RACHUNKIEM DYFFERENCYALNYM i INTEGRALNYM. Właſności ſtycznych iako były dla nas pierwſzem źrzodłem s którego ten ſpoſób wypłynął, tak dały początek dopiero wzwiankowanemu rachunkowi.

Wſzyſtkie właſności linii krzywych zawiſłe od ſtycznych i doſtępne Algebrze zamknęliśmy w tym rozdziale:

zdziale: zoſtaie nam ieſzcze roſtrząſnąć wſzyſtkie przecięcia zachodzące w liniach krzywych iakiegokolwiek porządku, co będzie przedmiotem Rozdziału naſtępuiącego.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Roſtrząſaią się wſzyſtkie PRZECIĘCIA linii krzywych od proſtych lub innych krzywych: które prowadzą nas do innego ieſzcze ſpoſobu wyrażania linii iakiegokolwiek porządku, i do poznania SKŁADNI zrównań.

§. XXIV.

Linia krzywa przeciętą bydź może od proſtey tak, iż płaſzczyzna między obwodem linii krzywey położona rozdzieli ſię na części równe i podobne, i takowe przecięcie ſłuży śrzednicom: albo też linia proſta prowadzona zewnątrz lub wewnątrz linii krzywey przecina ią tak, iż s tego przecięcia nic więcey nie wynika, prócz że linia proſta ma ieden lub kilka punktów ſpólnych z linią krzywą: i takowe przecięcie ſłużyło nam do wyrażania linii krzywych przez zwiazek linii przecinaiącey z inną linią proſtą, któreśmy wſpół-uſzykowanemi nazwali. Uważaliśmy iuż w liniach 2go porządku oba te gatunki przecięcia, które nam teraz roſtrząſać należy we wſzyſtkich porządkach wyżſzych ſpoſobem cale różnym. Tam bowiem zrównanie 2go ſtopnia prowadziło nas przez uwagę iego właſności do właſności cięciw lub śrzednic; tu zaś od właſności nadanych śrzednicom lub iakimkolwiek liniom proſtym przecinaiącym, przyiśdź nam potrzeba do zrównań ogólnych takowe właſności wyrażaiących; a w tych dopiero doſtrzegać któremu porządkowi linii te właſności ſłużą. Spoſób takowy dociekania wypada s ſpoſobu uwa-

Właſność śrzednic rozciągniona do linii krzywych iakiegokolwiek porządku.

żania linii krzywych; chcemy bowiem poznać ich właſności, nie rozwięzuiąc ich zrównań. Zaczniymy od śrzednic: ponieważ śrzednica dzielić powinna linią krzywą na części równe i podobne, liczba takowych części zawiſła od liczby śrzednic, i tak na fig. 38. ieżeli linia krzywa iednę ma tylko śrzednicę AB, połowa iey położona nad AB, bydź powinna równa i podobna drugiey połowie leżącey pod AB: maiąc zaś dwie śrzednice AB, CD przecinaiące ſię pionowo w punkcie S'; linia krzywa rościęta ieſt na 4 części P, Q, R, S: s których mogą bydź albo wſzyſtkie między ſobą podobne i równe, albo dwie którekolwiek. Zebyśmy każdą parę takowych części rozeznać mogli, nazywać będziemy części leżące z dwóch ſtron $S'C$, albo $S'D$, czyli P, R, lub S, Q; częściami *przyległemi*, w których różnica zachodzi wyrażona przez znak dodatny lub odiemny odcinków x; części leżące z dwóch ſtron linii $S'B$, czyli P, Q, nazywać będziemy częściami *przeciw-ległemi*, których cechą ſą znaki dodatne i odiemne przyſtaw y, biorąc zawſze S' za początek odcinków: części nakoniec leżące między kątami wierzchołkowemi, iako to $CS'A$, $BS'D$, czyli R, Q; lub dwie inne P, S nazywać będziemy częściami na *przemian przeciw-ległemi*, w których znaki obydwóch wſpół-uſzykowanych zachodzą przeciwne.

Fig. 38.

Cechy na rozeznanie śrzodka w linii krzywey, wyrażone przez zrównaniá.

Kiedy linia krzywa ma części przyległe, albo części przeciw-ległe między ſobą równe, chcąc każdą s takowych części rozdzielić na części znowu równe tak, aby każda s takowych mnieyſzych części była równą drugiey w ſtronie odpowiadaiącey równey; takowe podziały albo niemogą bydź czynione w dwóch razem ſtronach przez iednę linią proſtą, n.p. w ſtronach przeciw-ległych P, Q, albo nawet mogąc takowe różne przedziały czynić, iakby ſię zdawało naypodobniey w ſtronach przyległych P, R; Q, S, linia proſta dzieląca takowe ſtrony nie będzie koniecznie w ſamym śrzodku przecięta od drugiey AB; bo ieże-

li n.p.

li n.p. ſtrona P ieſt równá ſtronie R, i znowu ſtrona Q równa ſtronie S, nie idzie zatem koniecznie, żeby ſtrony $P+R$ były równe ſtronóm $Q+S$; ale tylko wypadá s tego koniecznie, że ſtrony $P+Q=$ ſtronom $R+S$, i że linia CD ieſt prawdziwą śrzednicą linii krzywey: oddzieliwſzy przeto ſtrony równe R, P, od innych równych Q, S, przez linią AB; ta liniá nie przetnie koniecznie śrzednicy CD w ſwoim śrzodku. Podobnie rozumuiąc na ſtrony przeciw-legle $P, Q; R, S$; znaydziem że kiedy $P=Q$, i znowu $R=S$; nie idzie zatem że $P+Q=R+S$; ale tylko s tego wypádá, że $P+R=Q+S$, a przeto że w tym razie AB ieſt śrzednicą linii krzywey; ale linia CD nie koniecznie przetnie AB w ſamym śrzódku. Kiedy zaś liniá krzywá má części na *przemián przeciw-legle* między ſobą równe, to ieſt $P=S$; $R=Q$; wypadá stąd koniecznie że nie tylko $P+R=Q+S$; ale ieſzcze że $P+Q=R+S$, więc część linii krzywey leżąca nad linią AB, ieſt równá i podobná części leżącey pod AB; i znowu część leżącá z iedney ſtrony CD ieſt równá i podobná części położoney z drugiey ſtrony CD; a stąd wypadá że liniá AB dzieląc na dwie połowy linią krzywą, i CD dzieląc ią także na dwie połowy, AB, CD przecinaią ſię w ſamym śrzodku S'; liniá przeto krzywá maiąc ſtrony na przemian-przeciw-legle równe, má razem śrzodek S' w którym ſię iey śrzednice przecinaią i dzielą na dwie części równe: linie zaś krzywe maiące tylko ſtrony przyległe, lub ſtrony przeciw-legle ſobie równe, maią tylko śrzednicę CD w pierwſzym; śrzednicę zaś AB w drugim przypadku. Zebyśmy więc mogli z zrównania rozeznać kiedy linia krzywá ma śrzodek, a kiedy má śrzednicę, potrzeba nam wyrazić znamiona takowych właſności przez ogólne zrównania, a z nich dopiero będziemy w ſtanie ſądzić o ieſteſtwie śrzodka lub śrzednicy linii krzywey.

Zeby w linii krzywey ſtrona P, była równá i podobna ſtronie Q; potrzeba żeby przyſtawy na ſtronie

P, były równé przyſtawom leżącym na ſtronie Q, to ieſt wziąwſzy S' za początek odcinków, potrzeba aby w zrównaniu na linią krzywą nic ſię nie odmieniło, kładąc w niém $-y$ na mieyſce $+y$; więc potrzeba żeby w tém zrównaniu linia krzywa była wyrażona przez x, i przez ſamé potęgi parzyſté y, czyli aby to zrównanié powſtało s funkcyi x, y^2; zrównanié więc $Z=o$, na linią krzywą maiącą ſtrony przeciw-ległé równé i podobné, a przeto śrzednicę AB, powinno bydź wzoru.

$$o=a+bx+cy^2+dxy^2+ex^2+fy^4+gy^6+ \text{ i t. d.}$$

takiemi ſą wſzyſtkié linie 2go porządku, i s trzeciégo *Ciſsois* uważana od nas pod §. 23.

Zeby linia krzywa miała ſtronę $P=$ ſtronie R, potrzeba aby w iey zrównaniu nic ſię nie odmieniło przenoſząc wſpół-uſzykowane s ſtrony P na R, czyli kładąc $-x$ na mieyſce $+x$; a przeto potrzeba aby w zrównaniu $Z=o$, Z było funkcyą y i ſamych potęg parzyſtych x, czyli żeby było funkcyą y, xx. Zaczem linia krzywa będzie miała ſtrony przyległé równé i podobne, a przez to śrzednicę CD, ieżeli będzie wyrażona przez zrównanie wzoru:

$$o=a+by+cx^2+dyx^2+ex^4+fy^2x^2+gx^6+ \text{ i t. d.}$$

Strony na przemian przeciw-ległe będąc równé i podobné iako to $R=Q$, $P=S$, wyciągaią, aby zrównanié zoſtało w niczém nieodmienné przenoſząc wſpół-uſzykowané s ſtrony R na ſtronę Q; aże w ſtronie R znaki wſpół-uſzykowanych ſą $+y$, $-x$; w ſtronie zaś Q, $-y$, $+x$; więc w zrównaniu $Z=o$ nie powinno ſię nic odmienić, kładąc $-y$ za $+y$; $+x$ za $-x$, a przeto Z powinno bydź funkcyą ſamych potęg parzyſtych x, y; czyli Z powinno bydź funkcyą x^2, y^2, a przeto zrownanié wzoru:

$$o=a+bx^2+cy^2+dx^2y^2+ex^4+fy^4+gx^2y^4+ \text{ i t.d. } (A).$$

gdyby ieſzcze Z było funkcyą ſamych potęg nieparzyſtych x, y; odmiéniwſzy do teraźnieyſzego przypadku $+x$ na $-x$, $+y$, na $-y$ całe zrównanie byleby nie zamykało żadnego terminu ſtatecznego, z $Z=o$

zamieni

zamieni ſię na $-Z=o$, co iak wiemy wſzyſtko iedno znaczy; więc ieſzcze kiedy Z będzie zamykało ſamé potęgi lub mnogości nieparzyſte, x, y, bez żadnego terminu ſtatecznego, to ieſt kiedy będzie zrównanié wzoru

$$o=ax+by+cz^3+dx^2y+cxy^2+fy^3+gx^5+hyx^4+ \text{ i t. d.} \quad - - (A').$$

linia krzywa takowém zrównaniem opiſana ma ſtrony na przemian przeciw-ległe równé i podobné, a przeto śrzodek S'. Pierwſze zrównanié (A) na teraźnieyſzą właſność, zamykaiąc potęgi párzyſte y, pokazuie ieſzcze ſtrony przeciw-ległé równé i śrzednicę AB w linii krzywey: to ſamo zamykaiąc wſzyſtkie potęgi párzyſte x, wyraża ſtrony przyległé P, R, równé, i śrzednicę CD; więc zrównanié A wyraża wſzyſtkie cztéry ſtrony równé i podobné w linii krzywéy, na które ią rozdzielaią dwie śrzednice AB, CD, do ſiebie pionowé. Skąd ſię oczywiście wnoſi, że ſamé tylko linie krzywé porządków párzyſtych mogą mieć cztéry odnogi równé i podobné, i dwie śrzednice pionowé przecinaiące ſię w śrzodku S'. Zrównanié (A') wyraża także śrzodek w liniach krzywych, który może ſię znaydować w porządku párzyſtym lub niepárzyſtym; ale nie wyraża srzednic pionowych. Zatrzymáymy ſię nad rozległeyſzém poznaniem właſności w zrównaniu (A') zawartych, kiedy śrzednice przecinaiące ſię w śrzodku ſą nachylone do ſiebie kątem ukośnym.

Fig. 39.

O śrzednicach ukośnych i ich liczbie.

Ieżeli linie proſte AB, CD na fig. 39 ſą śrzednicami linii krzywey; część leżąca nad CD ieſt równa i podobna części leżącey pod CD, i znowu część leżąca pod AB ieſt równa i podobna części leżącey nad AB, i oprócz tego ſtrony na przemian przeciw-ległé ſą także równé i podobné. Nazwiymy część leżącą nad AB, P; część pod AB, Q; część między $AS'C$, niech będzie R, część między $BS'D$, S; ponieważ $P=Q$; $R=S$; $P-R=Q-S$, a przeto $P-2R=Q-2S$, wziąwſzy więc kąt $CS'E=$ kątowi $AS'C$; EF będzie także śrzednicą przeciętą w S' na dwie części równé:

aże ieſzcze $P-3R=Q-3S$, - - $P-4R=Q-4S$ - - i ogólnie $P-nR=Q-nS$, idzie zatem że prowadząc linie proſte przez śrzodek S' tak, aby czyniły między ſobą kąty równe kątowi $AS'C$; trafiemy na linią AB, ieżeli ſtóſunek kąta $AS'C$ do kąta proſtego ieſt wymierny; i wſzyſtkie te linie będą śrzednicami linii krzywey: podług więc wielkości kąta $AS'C$ między dwoma pierwſzemi śrzednicami, linia krzywa maiąc ſtrony na przemian przeciw-ległe równe, mieć może dwie, trzy, cztery, n śrzednic: to ieſt, biorąc zawſze ten kąt $AS'C$ iako maiący ſtóſunek wymierny do kątu proſtego, im kąt ten ieſt więkſzy, tem mnieyſza liczba wypadnie śrzednic, im zaś kąt ten ieſt mnieyſzy, więcey śrzednic ukośnych linia krzywa zamyka: to ieſt że liczba śrzednic w linii krzywey ieſt w ſtóſunku ſpacznym wielkości kąta między dwiema pierwſzemi śrzednicami zawartego: ieżeli więc kąt $AS'C$ ieſt nieſkończenie mały, czyli kiedy linia CD ieſt równo-legła linii AB, linia krzywa ma nieſkończoną liczbę śrzednic między ſobą równo-odległych, a przeto przyſtawa przecina takową linią krzywą w nieſkończoney liczbie punktów, co nie może ſłużyć żadnym liniom Algebraicznym, ale tylko liniom krzywym przeſtępnym. Zadna więc linia krzywa Algebraiczna nie może mieć dwóch śrzednic między ſobą równo-ległych. Gdyby zaś ſtóſunek kąta $AS'C$ do kąta proſtego był niewymierny, linia krzywa miałaby nieſkończoną liczbę śrzednic przecinaiących ſię w punkcie S': co ſłuży kołu iak wiemy z Geom: począt:

To zaś ieſt o tych śrzednicach uwagi godnego, że ponieważ z obydwóch ſtron śrzednicy linia krzywa mieć powinna równy kſztałt i ułożenie; ieżeli na fig: 39 nad CD linia krzywa takiego ieſt kſztałtu iak i pod CD, i ieżeli pod CS' znayduie ſię śrzednica AB maiąca z obydwóch ſtron iednym kſztałtem ułożoną linią krzywą; idzie zatem że przy EF taka ieſt poſtać linii krzywey iak przy AB, czyli ze śrzednice na

Fig. 39.

przemian

przemian iakie ſą AS', ES'; potem CS' GS' ſą iednego gatunku, i zrównanie na linią krzywą powinno bydź takie biorąc EF za oś, iakiem ieſt odnoſząc wſpół-uſzykowane do osi AB: i znowu to zrównanie bydź powinno takie do GH, iakiem było do osi CD. Własność ta śrzednic na przemian idących ſłużyć nam może za grunt dochodzenia liczby śrzednic w liniach krzywych iakiegokolwiek porządku. Zaiſte, ieżeli AB, EF n.p. ſą śrzednicami iednego gatunku, naprzód zrównanie bydź powinno nieodmienne wyrażaiąc linią krzywą nad, i pod śrzednicą AB; powtóre to zrównanie ieſzcze powinno zoſtać to ſamo przenoſząc ie z osi AS' na oś ES': które to przypadki nie mogą bydź znaczone tylko przez funkcyą kąta branego naprzód z różney ſtrony tey ſamey osi AS', a przeto dodatnie lub odiemnie: powtóre, przez funkcyą kąta przenoſzonego z osi AS' na oś ES'.

Chcąc przeto wiedzieć kiedy linia krzywa ma pewną liczbę śrzednic, potrzeba nam na każdą liczbę znaleśdź cechę wyrażoną przez zrównanie pewnego wzoru: ten zaś wzór zoſtać powinien nienaruſzony ſtóſuiąc go do funkcyi kątów dopiero opiſanych. Weźmy ſobie na to linią SM z śrzodka do obwodu linii krzywey pociągnioną, przez którą znaczyć będziemy różne położenie wſpół-uſzykowanych $S'P=x$, $PM=y$, względem śrzednic iednego gatunku za pomocą kąta $PS'M=\phi$: linia $S'M=z=\sqrt{}(x^2+y^2)$. Przypuśćmy naprzód że linia krzywa ma tylko dwie śrzednice AB, GH: ponieważ ułożenie linii krzywey takie bydź powinno nad AS' iak i pod AS', i znowu to ułożenie zoſtać powinno takie przy $S'B$, iakie ieſt przy AB; więc zrównanie na linia krzywą maiącą dwie śrzednice bydź powinno takie, aby w niem $S'M=z$ zoſtało nieodmienne, biorąc kąt ϕ dodatny i odiemny, i oprocz tego kąt $MS'B=P-\phi$, (tu P wyraża pół-obwodu koła;) więc z bydź powinno funkcyą taką, któraby była nieodmienna na kąty ϕ, $-\phi$,

$P-\phi$; wiemy z Rozd. 4. Algebry Części II. że doſtawa ieſt ta ſama na kąt wzięty dodatnie lub odiemnie, wſtawa zaś na kąt dodatny, dodatna; na odiemny ſtaie ſię odiemną: ale doſtawa poiedyncza na kąt $P-\phi=-\text{Doſt.}\,\phi$, Doſtawa zaś na kąt $2(P-\phi)=\text{Doſt.}\,2\phi$: aże znowu $\text{Doſt.}\,2\phi=\text{Doſt.}-2\phi$, więc Doſtawa 2ϕ ieſt funkcyą taką, która na kąty $\phi, -\phi$; $P-\phi$; zoſtaie nieodmienną. Przeto żeby linia krzywa miała dwie śrzednice, powinno zrównanie $Z=0$, bydź takie, aby Z było funkcyą z i $\text{Doſt.}\,2\phi$: aże $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$ - - $\text{Doſt.}\,\phi=\frac{x}{z}$, $\text{Wſt.}\,\phi=\frac{y}{z}$, $\text{Doſt.}\,2\phi=\frac{x^2-y^2}{z^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, przeto na dwie śrzednice w zrównaniu $Z=0$ linią krzywą wyrażaiącem, Z bydź powinno funkcyą x^2-y^2, x^2+y^2, czyli funkcyą x^2, y^2, iakośmy iuż wynaleźli.

Ieżeli linia krzywa ma trzy śrzednice AB, EF, IK; ponieważ śrzednica IS' ieſt tego ſamego gatunku co i AS', zrównanie linią tę krzywą wyrażaiące bydź powinno nieodmienne, biorąc wſpół-uſzykowane z iedney i drugiey ſtrony lnii AS' i znowu przenoſząc ie z śrzednicy AS' na śrzednicę IS'; aże kąt który czynią między ſobą te tzy śrzednice, ieſt $=\frac{1}{2}P=60°$. kąt zaś $AS'I=2.60°=\frac{2}{3}P$, kąt $MS'I=\frac{2P}{3}-\phi$, więc w zrównaniu $Z=0$. wyrażaiącem linią krzywą s trzema śrzednicami, Z bydź powinno funkcyą nieodmienną na kąty $+\phi$, $-\phi$, $\frac{2}{3}P-\phi$; co ſłuży tylko Doſtawie $3\phi=\text{Doſt.}-3\phi=\text{Doſt.}(2P-3\phi)$: aże podług § 51. zrównań (x) w Algebrze, $\text{Doſt.}\,3\phi=2.\text{Doſt.}\,\phi\,\text{Doſt.}\,2\phi-\text{Doſt.}\,\phi.=\frac{x^3-3y^2x}{z^3}$, więc Z powinno bydź funkcyą x^2+y^2, x^3-3y^2x, ieżeli zrównanie $Z=0$ ma

wyrażać

wyrażać linią krzywą trzy śrzednice maiącą. To ſamo rozumowanie ciągnąc daley, znaydziemy; że w zrównaniu $Z=o$ na linią krzywą maiącą cztery śrzednice, Z bydź powinno ſunkcyą z czyli x^2+y^2, i Doſtawy, 4ϕ. i ogólnie: na linią krzywą maiącą n śrzednic, Z bydź powinno ſunkcyą x^2+y^2, i Doſt.$n\phi$, wiedząc z §. 54. Algebry, że

$$\text{Doſt}\,1\,\phi=x^n-\frac{n(n-1}{1.2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$$

$x^{n-4}y^4-$ i t. d.

podobnym ſpoſobem wynaleśdź byśmy mogli zrównania na linie krzywe maiące części równe i podobne.

Inny ſpoſób wynaydowania śrzednic w liniach krzywych.

Inne ieſzcze właſności śrzednic doſtrzeżone w Rozdziale II. a zręcznie rościągnione do wyżſzych porządków linii, ſłużyć by nam mogły do wynaydowania cech pokazuiących śrzednice w iakichkolwiek liniach krzywych. Widzieliśmy n.p. w §. 8. że śrzednice przedzielaią cięciwy rowno-ległe na dwie części równe, czyli ogólniey: że przyſtawa należąca do śrzednicy ieſt równa ſummie pierwiaſtków przez 2 rozdzieloney: *Powtore* że mnogość dwóch przyſtaw do tego ſamego odcinku należących, ieſt do mnogości dwóch przecięć linii krzywey od osi, w ſtoſunku nieodmiennym, Te dwa początki rościągaiąc do wyżſzych porządków linii, wyſtawmy ſobie zrownanie iakiegokolwiek ſtopnia, w którem y ieſt tylko wymiaru drugiego, wſzyſtkie zaś potęgi x temu ſtopniowi należyte, to ieſt: $y^2-Py+Q=o$, gdzie P, Q, ſą funkcyami x; linia takiem zrównaniem opiſana dwa razy tylko przeciętą bydź może od przyſtawy PM, PN, na fig. 40: rozdzieliwſzy każdą z cięciw równo-ległych MN na dwie części równe przy O, O', O'', punkta te przedziału O, O', O'', leżyć mogą na linii proſtey lub krzywey: w pierwſzym przypadku wypadnie śrzednica na linią podaną takiego rodzaiu jak na linie krzywe drugiego porządku: całe więc pytanie zawiſło od wynalezienia czyli punkta O, O',

Fig. 40.

O'' należą

O'' należą do linii proſtey lub krzywey, o czém nás nauczyć powinien wſpół-czynnik 2go terminu P: wiemy bowiem że $MP—PN=P$, a przeto $—PO=\frac{P}{2}$; ieżeli to oſtatnie zrównanie ieſt na linią proſtą, linia krzywa iakiegokolwiek porządku opiſana zrównaniem $y^2—Py+Q=o$, będzie miała śrzednicę taką, iakąśmy w drugim porządku widzieli. Weźmy ſobię n.p. zrównanie na linie 3go porządku s §. IV uczyniwſzy w niem $k=o$, i ułożywſzy ie potem co do y; będzie

$$y^2+\frac{hx^2+ex+c}{ix+f}\,y+\frac{gx^3+dx^2+bx+a}{ix+f}=o.$$

gdzie $P=—\frac{hx^2+ex+c}{ix+f}$, $Q=\frac{gx^3+dx^2+bx+a}{ix+f}$, nazwawſzy $PO=z$, zrównanie na śrzednice będzie

$2z=\frac{hx^2+ex+c}{ix+f}$: ieżoli licznik tego ułomku ieſt zupełnie rozdzielny przez mianownika $ix+f$; zrównanie to wyrażać będzie linią proſtą, i linia 3go porządku będzie miała śrzednicę: ale kiedy hx^2+ex+c, będzie rozdzielne przez $ix+f$, uczyniwſzy $ix+f=o$, wypada koniecznie $hx^2+ex+c=o$, czyli włożywſzy w to oſtatnie zrównanie $x=—\frac{f}{i}$, wypadnie

$hf^2—efi+ci^2=o$ zrównanie warunkowe, któremu trzeba żeby ſię ſtało zadoſyć, aby linia 3go porządku miała śrzednicę proſtą; do tego zaś przydadź ieſzcze należy $k=o$. Ieżeli zaś hx^3+ex+c, nie będzie rozdzielne zupełnie przez $ix+f$, punkta O, O′ O″ będą leżyć na linii krzywey 2go porządku opiſaney zrównaniem $x(2iz—hx)+2fz—ex—c=o$; aże termin naywyżſzego wymiaru w tem zrównaniu, zamyka dwa mnożniki rzetelne nierówne; punkta O, O′, O″, i t. d. leżą na Hyperboli.

Ile razy więc w zrównaniu $y^2—Py+Q=o$, $P=a+bx$,

linia

liniá krzywá má śrzednicę: takowá śrzednica przedzielaiąc wſzyſtkie przyſtawy ma dwie części równé, czyni ieſzcze *P* iako ſummę wſzyſtkich pierwiaſtków ilością ſtateczną: ſkąd wypadaią dochodzenia linii krzywych, w którychby ſumma pierwiaſtków, lub funkcya iaka takowey ſummy była ilością ſtateczną. Toż ſamo wynayduiąc na *Q*, iako na mnogość wſzyſtkich pierwiaſtków, przyſzlibyśmy do wielu prawd o liniach krzywych na iakiekolwiek porządki.

§. XXV.

Przypádki ieſzcze zachodzące w przecięciach linii krzywych od proſtych.

Powiedzieliśmy że wſzyſtkie włáſności w liniach krzywych należą albo do ſtycznych, albo do śrzednic albo do cięciw: i ta prawda doſtrzeżona w porządku drugim a upowſzechniona w Rozdziale poprzedzaiącym, i na początku teraźnieyſzego, przywiodła nas na porządki niżſzé linii do rozległeyſzych prawd, które od ſtycznych i śrzednic zawiſły. Nie zoſtaie nam tylko roſtrząſnąć ogólniey przecięcia linii krzywych od cięciw, albo raczey włáſności linii proſtych maiących punkta ſwoié ſpolne z linią krzywą. W czem rozróżnić nam potrzeba dwa przypadki. *Pierwſzy:* kiedy linia proſtá przecinaiąc krzywą odmienia ſwoie położenia i znaczy punkta linii krzywey; iaką była zawſze przyſtawa odnoſzona do pewnych odcinków: takowá linia proſtá nie ieſt wyrażona oſobnem zrównaniem, ale tylko ieſt funkcyą odmienną wchodzącą w zrównanie. *Drugi przypadek:* kiedy linia proſta przeciąwſzy linią krzywą ma położenie nieodmienne, i ieſt wyrażona właściwem zrównaniem: i na ten czas punkt przecięcia będąc ſpólny dwóm liniom wyraża ſię przez dwa zrównania.

Spoſób wyrázaniá linii krzywych przez zrównania, kiedy kąty ſą iłościami odmiennemi.

Zatrzymaymy ſię nad dwiema temi przypadkami porządnie. Co do pierwſzego: każdá odmiana linii proſtey przecinaiącey, idąca za odmianą punktów linii krzywey ſłużyć może do wyrażenia przez zrównanie natury tey oſtatniey linii. Przyſtawy iakieśmy dotąd uważali odmieniały tylko ſwoię wielkość zoſtawſzy między ſobą równo-legle. Wyſtawmy

ſobie

Fig. 41.

ſobie teraz inną odmianę na fig. 41. kiedy linia *CM* przecinaiac linią krzywą u *M*, *N*, odmienia nie tylko ſwoię wielkość, ale i położenie względem linii *CP*, cała takowa odmiana zawiſła od odmiany kąta *PCN*, który ſwoim wzroſtem lub ubywaniem oznacza pierwiaſtki rzetelne lub uroione w zrównaniu, daiąc położenie linii *CM* takie, iakie ieſt potrzebne żeby linia krzywa była przeciętą albo chybioną od proſtey: ieżeli więc przecięcia *CM*, *CN*; bydź mogą tem, czem były przyſtawy równo-ległe, te przecięcia będąc całkiem zawiſłe od kąta *PCN*, uczą nas; że drugą ilością odmienną bydź powinien kąt *PCN*. Owóż nowy ſpoſób wyrażania linii krzywey przez zrównanie, w którem kąt, i linia pod tym kątem prowadzona, ſą ilościami odmiennemi. Trafiliśmy iuż na ten ſpoſób ſzukaiąc zrównania biegunowego w liniach 2go porządku pod § XII. i znowu w §. poprzedzaiącym wynayduiąc liczbę śrzednic.

Zrównania na linie krzywe raz przecięte od proſtey.

Zrównanie któreby opiſywało linią krzywą tym ſpoſobem wypaśdź powinno s funkcyi ilości odmienney $z=CM$, i s funkcyi kąta $p=PCN$. Chcąc poznać liczbę pierwiaſtków rzetelnych w zrównaniu, czyli liczbę przecięć linii krzywey od proſtey, wiedzieć nam potrzeba iaka funkcya kąta wyraża dwa, trzy, cztery, *n* przecięć. Ale liczba przecięć iedna zależyć może od wielorakich wartości *CM*, kiedy *z* dane będzie przez zrównanie złożone z wielu pierwiaſtków, czyli przez funkcyą wielo-kſztałtną *z*; druga liczba przecięć zawiſnąć może od wielorakich wartości na funkcyą kąta *p*: potrzeba nam wſzyſtkie te ſzczególności iak naydokładniey poznać. Funkcye kąta nie mogą bydź tylko Wſtawy, Doſtawy, albo Styczne, Doſtyczne, Sieczne, Doſieczne, które ſą funkcyami Wſtaw i Doſtaw. Zeby więc iedna funkcya kąta wyrażała wiele przecięć, potrzeba żeby iedna n.p. Wſtawa miała wiele kątow do których należy. Obracaiąc linią *CN* około punktu *C* trafiemy prawda na wiele takich kątów przez dorzucanie powtarzane

pół-

pół-obwodu koła P; ale tu nie idzie o wieloraką wartość odpowiadaiącą różnemu położeniu i różney wielkości linii CN, ale o wartość odpowiadaiącą iednemu tylko na każdy raz położeniu. W tym przypadku widzemy że iedna ta ſama wſtawa ſłuży kątowi $PCN=p$, i kątowi $DCR=180°+p$, którego wſtawa i doſtawa ieſt odiemna; wſzyſtkie inne katy maiące tę ſamę wſtawę i doſtawę padną na te ſame punkta linii krzywey, które należą do kątów p, $180°+p$. Te ieſzcze dwa kąty mogą wyrażać dwie odnogi różne należące do tey ſamey linii krzywey; albo mogą ryſować dwie linie krzywe, teyże ſamey natury i kſztałtu, s których iedna będzie położona na ſtronie CP, druga na ſtronie CD. Pierwſzy przypadek ma mieyſce, kiedy na wſtawy lub doſtawy ſłużące kątowi p, wypadną wartości na CM, różne od wartości odpowiadaiących kątowi $180°+p$: drugi zaś przypadek, kiedy na obydwa te kąty otrzymamy te ſame wartości CM, s których iedne będą dodatne, a drugie odiemne; co ieſzcze zależy od różnego położenia punktu C iako początku odcinków. Ieżeli ten punkt będzie zewnętrzny linii krzywey iak na fig. 41, widzemy że to ſamo zrównanie wyrażać może linią krzywą leżącą na ſtronie CP, albo na ſtronie CD: ieżeli zaś ten punkt bedzie leżał wewnatrz; funkcye s ſtrony CM, i s ſtrony CR nie wypadną te ſame, chyba że linie KCM, PCD, ſą dwie śrzednice, s których każda dzieli linią krzywą na części równe, podobne, i iednako około ſiebie roſporzadzone; i w których punkt C ieſt śrzodkiem. Ieżeli zaś punkt C leżyć będzie na punkcie linii krzywey, to przecięcie przy C będąc ſpólne wſzyſtkim kątom nie należy do rachunku przecięć odpowiadaiących różnym pierwiaſtkom zrównania, co także trzymać należy o przecięciach należących do dwóch tych ſamych linii krzywych. Te uwagi daią nam poznać, że liczbę przecięć potrzeba nam wyciągać s funkcyi kilko-kſztałtnych z, do których łączyć powinniśmy uwagę ką-

Fig. 41.

tów p, $180°+p$: tak iako przecięcia linii krzywéy od przyſtaw wyciagaliśmy s funkcyi y, biorąc na każdy pierwiaſtek, x dodatnie i odiemnie. Ieżeli linia krzywa raz tylko bydź może przeciętą od linii proſtey, potrzeba naprzód, aby z było funkcyą iedno-kſztałtną: powtóre żeby to z było wyrażoné przez funkcyą taką kąta, którąby dawſzy iedno przecięcié na kąt p, iuż innego nie wydała na $180°+p$; chyba żeby to drugié przecięcie nie różniło ſię od pierwſzego tylko ſamym znakiém i wprowadziło ten ſam znak w z. n.p. ieżeli $z=P$, gdzie P wyraża pewną funkcyą kąta p; kładąc za p, $180°+p$, z ſtanie ſię $=Q$; ieżeli $Q=-P$, i z na $180°+p$ ieſt odiemném, będzie $-z=-P$, czyli $z=P$: takowa więc wartość żadnego nowego przecięcia nie wprowadza. Zeby zaś P miało wſpomnioną właſność, potrzeba aby było funkcyą nieparzyſtą wſtawy p, albo doſtawy p: niech będzie $CM=z$, $CP=x$, $PM=y$, będzie $\frac{y}{z}=Wſt.p$, $\frac{x}{z}=Doſt.p$: ieżeli $z=P$, ieſt zrównaniém na linią krzywą raz tylko przeciętą od proſtey; P bydź powinno funkcyą nieparzyſtą $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}$, czyli funkcyą nieparzyſtą x, y, z, nie maiącą żadnego wymiaru. Do tey kłaſsy należą linie krzywé zamknięte w zrównaniach.

$$z=\frac{ay}{z}+\frac{bx}{z}+\frac{cz}{x}+\frac{dz}{y}; \; \cdot \; \cdot \; z=\frac{ay}{z}+\frac{bx}{z}+\frac{cz}{x}+\frac{dz}{y}$$
$$+\frac{ey^3}{z^3}+\frac{fx^3}{z^3}+\frac{gz^3}{x^3}+\frac{hy^2x}{z^3}+ \text{i t. d.}$$

$$\text{czyli } 1=\frac{ay}{z^2}+\frac{bx}{z^2}+\frac{c}{x}+\frac{d}{y}+\text{i t.d.} \quad 1=\frac{ay}{z^2}+\frac{bx}{z^2}+\frac{c}{x}$$
$$+\frac{d}{y}+\frac{ey^3}{z^4}+\frac{fx^3}{z^4}+\frac{gz^2}{x^3}+\frac{hy^2x}{z^4}+\text{i t. d.}$$

wſzyſtkie potęgi z będąc parzyſtemi w takowych zrównaniach, ſtaną ſię funkcyami wymiernemi x, y, położy-

położywſzy $z^2=x^2+y^2$, oprócz tego cały drugi członek tych oſtatnich zrównań ieſt wymiaru -1, i równa ſię iedności, czyli ogólniey mowiąc ilości ſtateczney; więc każde zrównanie, w którem funkcya x, y, wymiaru -1, równa ieſt ilości ſtateczney, wyraża linią krzywą raz tylko przeciętą od linii proſtey. Niech będzie R funkcyą wymiaru n, S funkcyą wymiaru $n+1$, a ilością ſtateczną; wſzyſtkie linie krzywé raz przecięte od proſtey zamknięte ſą w zrównaniu ogólném - - $\frac{R}{S}=a$, aże $\frac{S}{R}=\frac{1}{a}$, gdzie $\frac{1}{a}$ ieſt ieſzcze ilością ſtateczną, którą wyrazić możemy przez α, więc ieſzcze zrównania w których funkcya x, y, wymiaru pierwſzego ieſt równa ilości ſtateczney, opiſuia linią krzywą raz przeciętą od proſtey. Wſzyſtkie takowe linie krzywe wyrażaią ſię zrownaniem ogólnem - - $\frac{S}{R}=\alpha$ - - czyli $S=\alpha R$, czyli

$$ax^{n+1}+bx^ny+cx^{n-1}y^2+dx^{n-2}y^3+ex^{n-3}y^4+ \text{ i t. d.}$$
$$=\alpha(Ax^n+Bx^{n-1}y+Cx^{n-2}y^2+Dx^{n-3}y^3+\text{ i t. d.})\ (M).$$

Fig. 41.

Do tego więc rodzaiu należy naprzód linia proſta, na którą $n=0$: powtóre linie 2go porządku na które $n=1$: ale w tych liniach punkt C na fig. 41 leżyć muſi na ſamey linii krzywey, a przeto w rachunek przecięcia nie wchodzi iako ſpólny wſzyſtkim kątom. Potrzecie linie 3go porządku gdzie $n=2$: ale punkt C leżyć muſi na punkcie dwoiſtym i t.d. Linie więc 3go porządku maiące tylko w ſwem zrównaniu ieden pierwiaſtek rzetelny, terminy zaś naywyżſzego wymiaru w x, y; oprócz tego linie 3go porządku dwa razy przecinane od linii proſtey, byleby punkt C leżał na punkcie linii krzywey; linie ieſzcze krzywe 3go porządku maiące punkt dwoiſty, byleby w tym punkcie znaydowało ſię C, uczynią zadoſyć zrównaniu (M). Podobnym ſpoſobem rozumować można o liniach porządków wyżſzych.

Wyſtawmy ſobie teraz że linia CM na fig. 41 przecina

Zrównania na linie krzywe dwa razy przecięte od proſtey.

cina we dwóch punktach linią krzywą, a przeto że ta linia krzywa wyraża ſię zrównaniem

$z^2 - Pz + Q = 0$ - - $z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(\frac{P^2 - 4Q}{4}\right)}$, gdzie P, Q, ſą funkcyami kąta p. Zeby wprowadzonemu warunkowi zadoſyć ſię ſtało, potrzeba żeby każdy z dwóch pierwiaſtków na z, iedno tylko przecięcie wydał, a przeto trzeba żeby kątowi $180° + p$ iuż żadna inſza nie odpowiadała wartość na z: czego nie można inaczey otrzymać tylko ieżeli P ieſt funkcyą nieparzyſtą, Q zaś funkcyą parzyſtą wſtawy lub doſtawy kąta p, czyli P funkcyą nieparzyſtą $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; Q zaś funkcyą parzyſtą tychże ilości. Aże podane zrównanie na linią krzywą wyrazić ſię może $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz} = 0$; niech będzie R funkcyą wymiaru n, S funkcyą wymiaru $n+1$, T funkcyą wymiaru $n+2$; ponieważ $\frac{P}{z}$ ieſt wymiaru -1, wyrazić ie możemy przez $\frac{S}{T}$, tak dalece że $\frac{P}{z} = \frac{S}{T}$; $\frac{Q}{z^2}$ ponieważ ieſt wymiaru -2, będzie $\frac{Q}{z^2} = \frac{R}{T}$, i zrównanie ogólne na linie krzywe dwa razy przecięte od proſtey ieſt - - $1 - \frac{S}{T} + \frac{R}{T} = 0$, czyli $T - S + R = 0$. tu znowu należyć mogą linie krzywe ze wſzyſtkich porządków czyniąc $n = 0$ na drugi, $n = 1$ na trzeci, $n = 2$ na czwarty porządek i t. d. i biorąc za T terminy wymiaru $n+2$ dodatnie, za S terminy wymiaru $n+1$ odiemnie, za R terminy wymiaru n znowu dodatnie podług zrównania - - $T - S + R = 0$, w porządku więc trzecim termin zawieraiący

raiący ilości ſtateczné nie wniydzie, w porządku *4tym* terminy wymiaru pierwſzego, ani termin ſtateczny; w porządku *5tym* terminy wymiaru *2go*, *1go* ani termin ſtateczny nie będą wchodzić w oznaczenié takowych linii krzywych: co podobnie łatwo ieſt rościągnąć do porządków wyżſzych. Kondycyi więc założoney uczynią zadoſyć linie *2go* porządku, wyſtawiwſzy ſobie iedno przecięcié w odległości nieſkończoney, kiedy w Hyperboli liniá proſtá przecinaiąca ſtanie ſię ledwo-nieſtyczney, w Paraboli zaś osi równo-ległą. Linie z *3go* porządku uczynią także zadoſyć, położywſzy punkt C na punkcié linii krzywey; z *4go* porządku linie maiącé punkt dwoiſty, w którym znaydować ſię będzie C: zgoła linie s porządku n będą mogły uczynić zadoſyć zrównaniu $T-S+R=o$, ieżeli będą mieć punkt tyle-krotny, ile $n-2$ zamyká iedności, i ieżeli w takowym punkcie znaydować ſię będzie C. Gdybyśmy ieſzcze mieli uwágę na pierwiaſtki uroione zrównań, znaleźlibyśmy ieſzcze w wyżſzych porządkach wiele linii krzywych nie maiących takiego punktu, iakiego wyciągamy, a iednak zadoſyć czyniących zrównaniu i warunkowi założonému.

Liniá krzywá Muſzlowá.

Fig. 41.

Nim poſtąpiémy daley rozwiążmy tu ſobie naſtępuiącé zadanié. Wynaleśdź zrównanie na wſzyſtkie linie krzywé, które tak ſą przecięté we dwóch mieyſcach M, N, od linii proſtey, iż cięciwa MN, czyli różnica dwóch przecięć $CN-CM$, ieſt zawſze ilością ſtateczną. Ponieważ linie krzywé dwa razy przecięté od proſtey, zawieraią ſię wſzyſtkie w zrównaniu - - $z^2-Pz+Q=o$, s którego potem to ogólne powſtało $T-S+R=o$, ieſt więc $CM+CN=P$, $CM.CN=Q$, aże $[CN-CM]^2=(CN+CM)^2-4CM.CN=P^2-4Q$, podług kondycyi więc zadania ieſt $CN-CM=\sqrt{}(P^2-4Q)=a$, gdzie a wyraża ilość ſtateczną - - $P^2-4Q=a^2$ - - (α). chcąc tę kondycyą w zrównaniu (α) zawartą wprowadzić w $T-S+R=o$, przypomniéymy ſobie że

$\frac{P}{z}=\frac{S}{T}$, $\frac{Q}{z^2}=\frac{R}{T}$, czyli $P=\frac{Sz}{T}$, $Q=\frac{Rz^2}{T}$, włożywſzy te wartości za P, Q, w (α), wypadnie

$$\frac{S^2z^2}{T^2}-\frac{4Rz^2}{T}=a^2,\text{ skąd } R=\frac{S^2}{4T}-\frac{a^2T}{4z^2}$$

włożywſzy znowu tę wartość na R w zrównanie $T-S+R=0$, odmieni ſię na $T-S+\frac{S^2}{4T}-\frac{a^2T}{4z^2}=0$,

czyli na - - $z^2(2T-S)^2=a^2T^2$ - - (β).

(β) ieſt zrównaniem na wſzyſtkie linie krzywe tę właſność maiące, że $CN-CM=a$, i dwa razy tylko przecięte od proſtey: ponieważ T ieſt wymiaru $n+2$, S wymiaru $n+1$; porządek czwarty ieſt nayniżſzym porządkiem zawieraiącym linie ciągłe tą właſnością znakomite. W nim $n+1=0$, a przeto T ieſt wymiaru 1go, S ilością ſtateczną: połóżmy $T=x$, $S=2b$, zrównanie (β), będzie 4go porządku:

$a^2x^2=(x^2+y^2)(2x-2b)^2$ - - - (A).

aże $\frac{x}{z}=\text{Doſt.}p$, $\frac{y}{z}=\text{Wſt.}p$, będzie $x=z\text{Doſt.}p$, $y=z\text{Wſt.}p$, Przez użycie tych wartości na x, y; (A) ſtanie ſię

$a^2z^2\text{Doſt.}p^2=z^2(2z\text{Doſt.}p-2b)^2$, czyli

$z=\frac{b}{\text{Doſt.}p}\pm a$ - - - (A').

zrównanie (A') złożemy naſtępuiącym ſpoſobem; Fig. 42. wziąwſzy na fig. 42. linią przecinaiącą CN, którey dwa punkta M, N, leżą na linii krzywey, od C prowadzę CB czyniącą z CN kąt $BCN=p$, potem prowadzę GH pionową do CB, i nazywam $CD=b$, $DA=DB=a$, będzie $CL=\frac{b}{\text{Doſt.}p}$, a ponieważ $LM=LN=a$, będzie $CM=\frac{b}{\text{Doſt.}p}-a$, $CN=\frac{b}{\text{Doſt.}p}+a$,

CN—

$CN-CM=2a$, czyli równe iłości ſtateczney. Linia wiec krzywa maiąca dwie odnogi nieſkończone XBZ, $X'AZ'$, i ledwo-nieſtyczną proſtą GH, wyraża ſię zrównaniem (A'), albo (A); Dawni ieſzcze Geometrowie uważali właſności tey linii krzywey, którą nazwali Linią Muszlową (*Conchois*) złożoną z dwóch części podobnych: odnogę XBZ nazywali Muszlową zewnętrzną (*Conchois exterior*), odnogę zaś $X'AZ'$ Muszlową wewnętrzną (*Conchois interior*), iey bowiem ryſunek podobny ieſt do konchy. Chcąc od zrównania (A') przyiśdź do (A), biorę CB za oś, C za początek odcinków, od N ſpuſzczam pionową NP, będzie $CP=x$, $PN=y$, $CD=b$, a z warunku pytania $NM=a$, tróykąty podobne CPN, NLF, daią mi naſtępuiącą proporcyą:

$CP:CN::NF:LN$ - - czyli $x:\surd(x^2+y^2)::x-b:\frac{1}{2}a::2x-2b:a$ $ax=(2x-2b)\surd(x^2+y^2)$, a znióſſzy znak pierwiaſtkowy, $a^2x^2=(x^2+y^2)(2x-2b)^2$; $y^2=\dfrac{a^2x^2}{(2x-2b)^2}-x^2$, kiedy $x=b$, $y=\frac{1}{0}$, i linia krzywa zamienia ſię na ledwo-nieſtyczną.

Ieżeli linia krzywa ma bydź trzy razy przecięta od proſtey, powinna naprzód bydź wyrażona zrównaniem $z^3-P'z^2+Q'z-R'=0$, ponieważ na każdą wartość z, iedno tylko powinno wypadać przecięcie, a przeto kąt $180°+p$ powinien nie wydadź innego iak kąt p: dla ocalenia tego warunku, P' iako ſumma; R' iako mnogość wſzyſtkich pierwiaſtków bydź powinny funkcyami nieparzyſtemi wſtawy lub doſtawy kąta p: Q' zaś iako mnogość z dwóch naraz pierwiaſtków, bydź powinno funkcyą parzyſtą teyże wſtawy lub doſtawy kąta. Chcąc te kondycye rościągnąć do iakichkolwiek porządków linii, zrównanie podane wyſtawiam ſobie pod wzorem - -

$1-\dfrac{P'}{z}+\dfrac{Q'}{z^2}-\dfrac{R'}{z^3}=0$, gdzie $\dfrac{P'}{z}$ ieſt wymiaru -1; $\dfrac{Q'}{z^2}$

Zrównanie na trzy przecięcia linii krzywey od proſtey.

wymiaru -2; $\frac{R'}{z^3}$ wymiaru -3; niech teráz T będzie wymiaru $n+3$; S wymiaru $n+2$, R wymiaru $n+1$, nakoniec Q wymiaru n; będzie - - $\frac{P'}{z}=\frac{S}{T}$, $\frac{Q'}{z^2}=\frac{R}{T}$, $\frac{R'}{z^3}=\frac{Q}{T}$, i zrównanié podané zamieniá ſię na to ogólné:

$$1-\frac{S}{T}+\frac{R}{T}-\frac{Q}{T}=0,\text{ czyli } T-S+R-Q=0.$$

linie więc s porządku *3go* mogą uczynić zadoſyć temu zrównaniu, wziąwſzy punkt C zewnątrz linii krzywéy: linie z *4go* porządku także, byleby punkt C leżał na linii krzywéy: linie z porządku *5go* maiące punkt dwoiſty uczynią także zadoſyć, byleby w tym dwoiſtym punkcie znaydowało ſię C, i ogólnie linie porządku n, maiąc punkt mnogości $n-3$, i w tym punkcie $n-3$ oſadziwſzy C. S tych uwág łatwo nám ieſt teraźnieyſzą teoryą rościągnąć do linii przeciętych cztery, pięć, n razy od linii proſtey. Gdybyśmy taki ſpoſób obrali byli do wyrażania natury linii krzywéy, widzeimy oczywiście; że podział linii krzywych cale wypadá różny od tego, któryśmy przyięli. Łatwo nám ieſt atoli linią iakąkolwiek krzywą wyrażoną przez wſpół-uſzykowané x, y, przywieśdź do wyrazu, gdzie funkcyá kąta wchodzi za ilość odmienną. Tén ſpoſób uważaniá i wyrażaniá linii krzywych wiele nám poſłuży w Mechanice i Aſtronomii.

§. XXVI.

Przecięciá linii krzywey od proſtéy maiac dwa zrównania.

Zoſtał nám ieſzcze ieden przypádek do roſtrząſaniá, kiedy liniá proſtá przecinaiąc krzywą, ieſt wyrażoná ſwem właściwém zrównaniem: na ten czás mamy dwa zrównaniá, iedno na linią proſtą $ay+bx-c=0$, drugié na linią krzywą $Ay^m+By^{m-1}x+Cy^{m-2}x^2+Dy^{m-3}x^3+$ i t. d. $+A'y^{m-1}+B'y^{m-2}x+C'y^{m-3}x^3+$ i t.d. $+A''y^{m-2}+B''y^{m-3}x+$ i t. d. - -

+

$+\alpha y+\beta x+\gamma=0$. gdzie m ieſt liczbą taką, do iakiego porządku należy linia krzywa. Chcąc w tym przypadku roſtrząſać przecięcia linii krzywey od proſtey, rzućmy okiem na fig.43. Każda s tych dwóch linii ma ſwoie wſpół-uſzykowane, które odnoſząc do iedney teyże ſamey osi AS, widzemy, że w punkcie przecięcia przyſtawa linii proſtey równą ieſt przyſtawie należącey do linii krzywey, czyli że PM, $P'M'$, ſą ſpólne obydwóm liniom: więc wyciągnąwſzy wartość na y z zrównania na iednę s tych linii, i tę wartość włożywſzy w zrównanie na drugą linią; otrzymamy zrównanie na ſamo x, które wyrażać będzie odcinki AP, AP' znowu ſpólne i należące do przyſtaw ſpólnych PM, $P'M'$. Liczba takowych odcinków zależy od liczby pierwiaſtków rzetelnych w zrównaniu na ſamo x, i ta liczba nauczy nas zaraz w wielu punktach linia krzywa ieſt przecięta od proſtey. Zaiſte zrównanie na linią proſtą nie mogąc dadź żadnego przecięcia niepodobnego, wyraża nam wſzyſtkie przyſtawy rzetelne; te przyſtawy wprowadzaiąc w zrównanie na linią krzywą nadaiemy pewne wartości y, które ieżeli ſą zgodne z związkiem ilości w zrównaniu zawartym, wydadź powinny x rzetelne; ieżeli zaś nie ſą, x wypaśdź powinno uroione, pokazuiąc że linia krzywa nie ma żadnych wſpół-uſzykowanych ſpólnych z linią proſtą. Aże przez tę ſztukę nic innego nie czyniemy, tylko za pomocą dwóch zrównań między dwiema ilościami odmiennemi x, y, wyrzucamy iednę, i przerabiamy dwa zrównania na iedno oznaczone, gdzie ſamo x, albo ſamo y ieſt funkcyą ilości ſtatecznych i znanych; więc wyrzucać ilość odmienną za pomocą dwóch zrównań, czyli przerabiać dwa zrównania nieoznaczone na iedno oznaczone, ieſt to ſzukać przecięć dwóch linii temi zrównaniami wyrażonych, odnoſząc wſpół-uſzykowane obydwóch tych linii do iedney osi i do tegóż ſamego początku odcinków. Skad widzemy znaczenie eliminacyi wyłożoney w §. 26. Algebry ſtóſuiąc ią do Geometryi: powtóre: że to

Fig. 43.

cośmy dopiero mówili o linii proſtey i krzywey, rościąga ſię do iakichkolwiek dwóch linii krzywych.

Przecięcie linii krzywych od innych krzywych.

Maiąc zrównania na dwie linie krzywe $A=o$, $B=o$; i przerobiwſzy ie przez wyrzucenie y, na zrównanie oznaczone $C=o$, gdzie C ieſt funkcyą x i ilości ſtatecznych; to oſtatnie zrównanie albo będzie zamykać wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne, albo rzetelne zmięſzane z uroionemi. Ieżeli $C=o$ zamyka wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne; żeby każdy z nich wyrażał przecięcie linii krzywey od drugiey, potrzeba aby takiemu pierwiaſtkowi odpowiadała wartość na y rzetelna w $A=o$, i równa wartości rzetelney drugiego zrównania $B=o$; ponieważ w tem przecięciu przyſtawy obydwóch linii krzywych ſą równe. Aże bydź może, że wartość na x rzetelna wyciągniona z $C=o$, uczyni y uroionem w $A=o$, albo w $B=o$; oprócz tego może ſię przytrafić, że x rzetelne wypadaiące z $C=o$, nie wyda wartości na y równych w obydwóch zrównaniach $A=o$, $B=o$; bo wiemy s teoryi eliminacyi §§. 9. 26. Algeb. że w oſtatnie zrównanie $C=o$ wkrada ſię mnożnik zbytni nie należący ani do $A=o$, ani do $B=o$; więc pierwiaſtki nawet rzetelne zrównania $C=o$, nie zawſze wyrażaią prawdziwe przecięcia dwóch linii krzywych. Zeby ſię o takowych przecięciach przekonać, potrzebaby każdey wartości na x, wydobytey z zrównania $C=o$ doświadczać, czyli ta nie uczyni y uroionem w $A=o$, albo w $B=o$; co tem ieſt trudnieyſze do wykonania, im zrównania $A=o$, $B=o$; ſą wyżſzych ſtopni. Oprócz tego potrzeba nam bydź pewnemi, że każdy pierwiaſtek rzetelny $C=o$, daie równe wartości na y w obydwóch zrównaniach $A=o$, $B=o$: tym trudnościom zaradza ſię naſtępuiącym ſpoſobem: ieżeli wyrzucaiąc y z $A=o$, $B=o$, trafiamy w tem działaniu na zrównanie zamykaiące y w pierwſzym ſtopniu wzoru $y=X$, gdzie X ieſt funkcyą x i ilości ſtatecznych; takowe zrównanie pokazuie, że wartości rzetelne x zrównania $C=o$ wyrażaią prawdziwe wdziwé przecięciá: n.p. gdybyśmy mieli dwa zrównaniá na linie krzywé - - $y^2+Dyx+E=o$, - - - - $y^2+Fxy+G=o$, wyrzucaiąc y trafilibyśmy naprzód na zrównanié (α) - - $y=\frac{G-E}{x(D-F)}$; gdzie G, E, ſą funkcyami x; tę dopiéro wartość na y włożywſzy w iedno z zrównań podanych, otrzymalibyśmy nowé zrównanié na ſamo x. Zrównanié (α) wypadło s kombinacyi dwóch podanych zrównań $A=o$, $B=o$, więc muſi mieć w ſobie coś ſpólnego obydwóm podług §. 26. Algeb. Ta ſpólná właſność ieſt w wartości na y, którá nie może ſię na żadné x rzetelné ſtać uroioną; więc zrównanié (α) uczy nas, że wſzyſtkié wartości na x rzetelne, ieżeli daią y rzetelné w zrównaniu $A=o$, dadza ié także w zrównaniu $B=o$, i że té wartości rzetelné y w obydwóch zrównaniach bedą równé; ponieważ zrównanié (α) na każdé x nie daie tylko iednę wartość y, ſpólną obydwóm zrównaniom $A=o$, $B=o$. Skąd ſię wnoſi, że ile razy dwa zrównaniá podané na linie krzywé przyprowadzą nas do takiego, iakiem ieſt (α) w eliminacyi; wſzyſtkié wartości rzetelné na x wyciagnioné z $C=o$, wyrażać będą przecięciá linii krzywych. Ale zrównanié (α) byłoby nie wypadło, gdyby podané $A=o$, $B=o$, zamykały ſamé potęgi parzyſté y, to ieſt: gdyby śrzednica linii krzywych była wziętą za oś; więc chcąc bydź pewnym że wſzyſtkié wartości rzetelné na x zrównaniá $C=o$, wyrażaią przecięcié, śrzednica nie powinna bydź osią. Oprócz tego nie zapominaymy, że zrównanié (α) może bydź takié, iż przywiódſzy ié do zero, będziemy ié mogli rozebrać na inné prościeyſze, iako to $(y-ax)(b+cx)(d-ex)=o$, gdzié $y-ax=o$ da nam przecięciá: inné zaś $b+cx=o$ $d-ex=o$, mogą ich nie dadź uczyniwſzy y uroionem w $A=o$, albo w $B=o$; w takowym przypadku potrzeba nam wſzyſtkié proſté zrównaniá zamknięté

w (α) poczynić zero, s każdego wydobytą wartość na x, kłaśdź w iedno z zrównań podanych $A=o$, $B=o$: ieżeli y na taką wartość wypadnie uroionem, pokaże nam przecięcie niepodobne. Skąd znowu rodzi ſię trudność naprzód w rozbieraniu (α) na ſwoie mnożniki: powtóre w doświadczaniu każdego s tych mnożników czyli mu ſłuży przecięcie podobne lub niepodobne? Trudność ta upadłaby, gdyby (α) nie mogło ſię na takie mnożniki rozbierać, to ieſt, gdyby wyrażało iednę linią krzywą ciągłą przeciętą raz tylko od przyſtawy, nie zaś zbiór linii proſtych lub krzywych prościeyſzych. Więc żeby eliminacya prowadzić nas mogła do prawdziwych przecięć linii krzywych, to ieſt żeby zrównanie oznaczone $C=o$, wypadaiące z dwóch nieoznaczonych $A=o$, $B=o$, przez ſwoie pierwiaſtki rzetelne wyrażało zawſze przyſtawy ſpólne dwom liniom krzywym; potrzeba aby iedno s tych nieoznaczonych zrównań na linią krzywą ciągłą n.p. $A=o$, było wzoru $P+Qy=o$: gdzie P, Q, prócz ilości ſtatecznych zamykaią x w iakimkolwiek ſtopniu, a przeto zrównanie $P+Qy=o$ wyraża linią krzywą iakiegokolwiek porządku raz tylko przeciętą od przyſtawy; drugie zaś zrównanie $B=o$ zamykać może y w iakimkolwiek wymiarze, a przeto wyrażać linią krzywą ilekolwiek razy przecięta od przyſtawy. Tym ſpoſobem wydobyta wartość z $A=o$ na $y=\frac{-P}{Q}$, i włożona w $B=o$, zrodzi zrównanie na ſamo x $C=o$, którego wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelne wyrażać będą prawdziwe przecięcia dwóch linii krzywych. Gdzie ieſzcze mamy i tę korzyść, że zrównanie $y=\frac{-P}{Q}$ ſłuży nam do upewnienia ſię, która wartość zrównania na x, do którey przyſtawy należy. Zaiſte wyſtawmy ſobie że $C=o$
Fig. 45. ma dwa pierwiaſtki rzetelne oznaczaiące na fig. 45. dwa przecięcia M, N; każdy s takowych pierwiaſtków

n.p.

n.p. $x=a$, nie wiemy ieſzcze czyli ieſt AP, czyli AQ, a przeto czyli należy do przecięcia N, czyli do M: maiąc zaś zrównanie $y=\frac{-P}{Q}$, i w nie każdą s takowych wartości na x kładąc, otrzymamy na y pewney wielkości wartość; ieżeli to $y=+PM$, na $x=a$; należy do przecięcia M: ieżeli na x wypadną dwie wartości równe, z $C=0$; pokażą nam, że tam dwa punkta zeſzły ſię razem, czyli że ieſt punkt dwoiſty, a zrównanie $y=\frac{-P}{Q}$ pokáże nám mieyſce tego dwoiſtego punktu.

Do wynalezienia przecięć linii krzywych iakiegokolwiek porządku nie zoſtaie nam iuż tylko z dwóch zrównań podanych n.p. $P+Qy=0$, - - (A) $y^m+Ay^{m-1}+By^{m-2}$ - - $+V=0$ - - (B). gdzie P, Q, A, B, C, i t.d. ſą funkcyami x, i ilości ſtatecznych; wyrzuciwſzy y za pomocą prawideł §. 26. Algeb: wynaleśdź trzecie $x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}+$ i t. d. $+V'=0$ - - (C) oznaczone; gdzie A', B', C', D', i t. d. ſą funkcyami ilości znanych i ſtatecznych. To oſtatnie zrównanie rozwiązawſzy, wypadnie nam tyle odcinków AP, AP', AP'', i t. d. ile x ma wartości rzetelnych: te pokażą liczbę punktów, w których linia krzywa - - $P+Qy=0$, przecina drugą $y^m+Ay^{m-1}+By^{m-2}+$ i t. d. $+V=0$. Każdy więc pierwiaſtek rzetelny zrównania (C) będzie dany przez linią proſtą: i ieżeli dwie linie krzywe nie maią śrzednicy wziętey za oś, ſtopień zrównania (C) będzie miał za wykładnika liczbę powſtaiącą z rozmnożenia wykładników nayważſzych zrównania (A), i (B), ale ieſzcze dodadź należy kondycyą, że (C) ieſt oſwobodzone od mnożników obcych, któreby ſię mogły przymięſzać w działaniu.

§. XXVII.

Widzieliśmy dopiero, że z dwóch zrównań nieoznaczonych na linie krzywe wynaleśdź można trzecie

Użycié przecięć linii krzywych do poznania składni zrównań.

oznaczoné, którego pierwiaſtki rzetelné wyrażaią odcinki prowadzoné do przecięć linii krzywych. Więc każdé zrównanie)oznaczoné $ax^m+bx^{m-1}+dx^{m-2}+ex^{m-3}+$ i t.d. - - $+k=o$ - - (C). w którem a, b, c, d, i t. d. ſą ilościami znanémi, uważać można iako powſtaiącé z dwóch nieoznaczonych przez wyrzucenie y, i iako mieć mogącé pierwiaſtki rzetelné wyrażoné przez linie proſté. Wynaleśdź dwa nieoznaczoné zrównania takie, z iakichby przez eliminacyą wypaśdź mogło (C), ieſt to wynaleśdź dwie linie proſté lub krzywé przecinaiącé ſię, maiącé oś ſpólną i początek odcinków, a oraz ſpólné odcinki należącé do przecięć; a przeto ieſt to wynaleśdź pierwiaſtki zrównania (C) przez linie. Spoſób ten rozwiązania zrównań za pomocą linii proſtych lub krzywych nazywa ſię SKŁADNIĄ ZRÓWNAN (*Conſtructio Aequationum*). *Złożyć* bowiem *zrównanié*, znaczy w Geometryi odrysować linią proſtą lub krzywą, w któréy związek wſpół-uſzykowanych rodzi zrównanié podané, i to znaczenie należy do zrównań nieoznaczonych: *złożyć* zaś *zrównanié oznaczoné*, ieſt to odryſować dwie linie przecinaiącé ſię tyle razy, i w taki ſpoſób, aby odcinki do przecięć należące wyrażały wſzyſtkie pierwiaſtki rzetelné zrównania podanego. Co nam nie będzie trudno wykonać i zrozumieć w przykładach. A naprzód każde zrównanié oznaczoné pierwſzego ſtopnia $Ax-B=o$, uważać ſię może, jakoby powſtało z dwóch nieoznaczonych $ay=c(x+a)$ (1). - - $by=d(b-x)$ - - (2), s których wyrzuciwſzy y, wypadnie $x=\frac{(d-c)ab}{bc+da}$ - - (3), które ieſt wzoru $Ax-B=o$: żeby więc znaleśdź wartość na x wyrażoną przez linie, potrzeba złożyć zrównaniá (1), (2), s których powſtało (3). Aże zrównanie nieoznaczoné (1), (2) każdé z oſobna rozebrać ſię może na cztery proporcyonalne terminy, które możemy dobrze wyrazić przez 4 linie proporcyonalne zawarte w dwóch Fig. 44. tróykątach podobnych; przeto nazwawſzy na fig. 44. $AB=a$,

$AB=a$, $AD=c$, $AP=x$, $PM=y$, $CA=b$, $AE=d$, mamy naprzód $AB:AD::BP:PM$, czyli $a:c=a+x:y$ - - - $ay=c(a+x)$, więc zrównanie (1) ieſt na linią BS; powtóre, $CA:AE::CP:PM$ to ieſt $b:d=b-x:y$; - - - $by=d(b-x)$ zrównanie na linią CE: przeto pierwiaſtek zrównania (3) ieſt AP, należący do przecięcia ſpólnego M obydwóch linii proſtych. Wſzyſtkie zatem zrównania oznaczone pierwſzego ſtopnia złożyć ſię mogą przez dwie linie proſte.

Zrównanie nayoglnieyſzé 2go ſtopnia $Ax^2+Bx+C=o$, ponieważ uważać ſię może iako wypadłe z dwóch zrównań nieoznaczonych $ay=c(a+x)$, $y^2+a'xy+b'x^2+d'x+e'y+f=o$, s których drugie wyrażaiąc linią krzywą drugiego porządku, uczy nas; że do złożenia zrównań oznaczonych 2go ſtopnia potrzeba użyć linii proſtey, i linii któreykolwiek 2go porządku. Iakóż linia 2go porządku mogąc bydź przecięta we dwóch mieyſcach od linii proſtey, okazać powinna w tych przecięciach dwa pierwiaſtki zrównania podanego $Ax^2+Bx+C=o$. Użyimy do tego koła iako linii krzywey nayłatwieyſzey do ryſunku, na którą zrównanie $d^2=(x-f)^2+(y-g)^2$; z dwóch tych zrównań na linią proſtą i na koło wyrzuciwſzy y, wypadnie zrównanie oznaczone;

$$(a^2+c^2)x^2+(2c^2a-2fa^2-2acg)x+a^2f^2-2ca^2g+a^2g^2+a^2c^2=o \quad - \quad - \quad - \quad (C').$$

porównawſzy to zrównanie s podaném co do wſpółczynników A, B, C, i wprowadziwſzy ieſzcze kondycye na oznaczenie innych ilości znanych w zrównaniach na linią krzywą i na koło, czyli raczey na wyrażenie a, c, f, g, d, przez A, B, C; przyidziemy do naznaczenia dwóch nayogólnieyſzych zrównań na linią proſtą i na koło, które uważać możemy iako mogące wydadź s ſiebie każde iakiekolwiek zrównanie 2go ſtopnia oznaczone $Ax^2+Bx+C=o$: nie zoſtaie nam więc tylko złożyć dwa zrownania - - -

$$ay=c(a+x), \quad - \quad - \quad (\alpha) \quad - \quad - \quad d^2=(x-f)^2+(y-g)^2 \quad - \quad - \quad (\beta)$$

tego dokażemy na figurze 45. nazwawſzy $AR=a$, Fig. 45.

$AB=c$,

$AB=c$, $AD=f$, $CD=g$, $CM=d$, $AP=x$, $PM=y$, $LM=y-g$, $LC=x-f$, mamy naprzód $AR:AB::RP:PM$ $a:c=a+x:y$ - - $ay=c(a+x)$ - - $CM^2=LC^2+LM^2$ - - $d^2=(x-f)^2+(y-g)^2$; zrównanie więc (β) ieſt na koło promienia $CM=d$, zrównanié zaś (α) na linią proſtą RM przecinaiącą koło w dwóch mieyſcach N, M, przeto AQ, AP, ſą prawdziwemi pierwiaſtkami zrównania (C'). Podobnym ſpoſobem złożyćby można zrównanié 3go ſtopnia za pomocą linii proſtey z linią krzywą 3go porządku, którą proſta w trzech punktach przecina: zrównanie 4go ſtopnia za pomocą dwóch linii 2go porządku iakié ſą nayprościeyſzé koło i Parabola, które ſię w czterech punktach mogą przecinać: zgoła za pomocą dwóch linii krzywych porządków, m, n, można złożyć zrównanié ſtopnia mn.

Spoſób takowy rozwięzywania zrównań za pomocą linii krzywych, użyty od Des-Carta był ledwo nie powſzechnym, póki Geometrowie nie rozſzerzyli granic Algebry i nie wprowadzili użycia Tablic Trygonometrycznych. Za pomocą niego Des-Cartes rozwiązał zaraz wielkie owo w ſtarożytności zadanie o dwóch śrzednich proporcyonalnych liniach: i innych wiele w ſwoiey Geometryi o naturze linii krzywych. Dawni Geometrowie nie mieli innego ſpoſobu uważania linii krzywych tylko przez takowé przecięcia, które w niedoſtatku rachunku Algebraicznego wyrażali przez ſame proporcye barzo zawikłane; a chcąc przeniknąć w zawikleyſze linii krzywych właſności, powynaydowali do tego linie krzywe wyżſzych porządków: tak Nicomedes wynalazł linią Muſzlową §. 25: Diokles, Ciſsoidę §. 23. iako widzieć można Pappum. Colle. Math. Lib. III. Des-Cartes wynalazłſzy ſpoſób wyrażania linii krzywych przez rachunek, wſzyſtkie te dawnych zadania barzo ſzczęśliwie rozwiązał. Poſzedł za nim Newton w ſwoiey Arytmetyce powſzechney, i wiele ſkładni

zró-

zrównań w Des-Carcie uprościł, innych wielé przydał. Nie można nie wyznać że ſpoſób rozwięzywania zrównań przez linie krzywé ieſt barzo dowcipny, i wprawiaiący w rozumowanie; ale do użyciá cale trudny. Wyciągá bowiem práwdziwie geometrycznégo ryſunku linii krzywych, w którym chybiwſzy, błądzemy wielé w wártościach ſamych piérwiaſtków. Ryſować zaś linie krzywé wyżſzych oſobliwie porządków geometrycznie przez punkta, ieſt rzeczą niezmiernie zmudną i zawikłaną, iako każdy s pierwſzéy uwági może ſię przekonać. Dlá tey ci to przyczyny ſkładnia zrównań przez linie krzywé ieſt cale zaniedbaná w dziſieyſzym Matematyki ſtanie, którąśmy tu krotko wyłożyli, aby ieſzcze zoſtawić ślad pierwſzego Geometryi ſtanu w ſtarożytności, i za czaſów Des-Carta. Ktoby iednak dokładnieyſzéy chciał w tém wiadomości, odſyłamy go do dzieł DES-CARTA: Marquis de l' HOPITAL: *Traité Analytique des Sections Coniques-Liure ix,x.*

ROZDZIAŁ PIĄTY.

Zrównaniá między TRZEMA ODMIENNEMI ILOŚCIAMI tłómaczą ſię przez POWIERZCHNIE CIAŁ, i przez linie proſté lub krzywé na powierzchniach leżącé: podaie ſię ſpoſób wyráżániá różnych powierzchni krzywych, i linii na wielu płaſzczyznach zoſtaiących.

§. XXVIII.

Zrównaniá nie oznaczoné między trzema odmiennemi ilościami tłómaczą ſię na linie

Wſzyſtkié własności linii krzywych, które nas dotąd zaprzątały, wydobyté ſą z uwági nad zrównaniami nieoznaczonémi miedzy dwiema odmiennémi ilościami: skąd nám ieſt łatwo uczuć, iak teorya takowych zrównań ieſt rozległá i obſita, gdzie rozum ludzki zoſtawił náyſzczęśliwſze pamiątki ſwoiey dzielności, i gdzie zawſze niewyczerpane zrzodło nowych prawd znayduie. Pamiętaymy tylko, żeśmy dopiero ieden rodzay zrównań nieoznaczonych potrafili przetłómaczyć na linie, to ieſt kiedy zrównanie dwie tylko odmienne ilości zamyka. Wſzakże iednak zrównanie Algebraiczne zawierać może *n* ilości odmiennych, s których chcąc na iednę mieć wartość oznaczoną i pewną, potrzeba nam wprowadzić $n-1$ warunków dla nadania wartości tyluż niewiadomym: Coż więc znaczyć będą zrównania trzy odmienne ilości zawieraiące naſtępuiąc zaraz po tych, s których Teorya linii krzywych wypadła? Wyſtawmy ſobie z nich iedno nayprościeyſze $Ax+By+Cz+D=o$: w niem każda ilość odmienna ieſt funkcyą dwóch innych, więc naprzód chcąc takowe zrównanie przez linie wytłómaczyć, potrzeba nam trzech wſpół-uſzykowanych: każdey s tych wſpół-uſzykowanych oddzielić potrzeba dwie ſtrony, iednę na wartości dodatne, na wartości odiemne drugą; a przeto całe mieyſce na któremby leżała linia takowem zrównaniem opiſana, rościąć na ſześć części od ſiebie różnych i oddzielnych. Tego dokazać nie potrafiemy na iedney płaſzczyznie, bo tey wſzyſtkie wymiary dwie wſpół-uſzykowane ſwem położeniem zabrały: odcinki bowiem x zabrały całą ſzerokość; przyſtawy y całą długość płaſzczyzny na którey linia krzywa leżała: więc trzecia ilość odmienna z mieć powinna wymiar trzeci, czyli głębokość: a zatem ogólnie mowiąc: zrównanie nieoznaczone między trzema odmiennemi, ilościami nie może wyrażać tylko albo płaſzczyznę odnoſzoną do drugiey płaſzczyzny, albo powierzchnią krzywą ciała, albo co na iedno wyńdzie, linią krzywą leżącą na różnych płaſzczyznach, do którey oznaczenia potrzebuiemy koniecznie dwóch płaſzczyzn na wyſtawienie trzech wſpół-uſzykowanych x, y, z: i s tey to podobno przyczyny takowe linie krzywe uważane od W. Ge-

ometry

Fig. 46. ometry *Clairaut* (a) nazwane były **DWOISTEY KRZYWIZNY** (*Curvae duplicis Curvaturae*). Wyſtawmy ſobie (*fig.* 46.) na płaſzczyznie gruntowey, którą zawſze będzie płaſzczyzna papieru, dwie linie nieoznaczoney wielkości do ſiebie pionowe, *RS* na odcinki, *CD* na rachowanie przyſtaw y; powtóre trzecią linią *GH* pionową do płaſzczyzny papieru, i przechodzącą przez punkt *A* wzięty za początek odcinkow: ta linia ſłużyć będzie do znaczenia przyſtaw z, które nazywać będziemy *Przyſtawami wyſokości*: punktą więc linii krzywey na różnych płaſzczyznach leżącéy, czyli powierzchnie ciał proſte lub krzywe odnoſić zawſze będziemy do płaſzczyzny gruntu zą pomocą trzech wſpół-uſzykowanych *AP*, *MP*, *MZ*, (fig. 47), s których każda będzie równo-ległą ſwéy linii główney na fig. 46; takowe linie główne *RS*, *CD*, *GH*, nazywaią ſię OSIAMI (*Axes*). A iako ſtrona *AS* będzie mieyſcem odcinków dodatnych, ſtrona *AR* odiemnych; powtóre, ſtrona *AC* mieyſcem przyſtaw dodatnych, *AH* przyſtaw odiemnych; tak ſtrona *AG* nad płaſzczyzną gruntu, będzie wyrażać przyſtawy wyſokosci dodatne, ſtrona zaś *AH* też przyſtawy odiemne. Zebyśmy ſię łatwiey znaleśdź mogli w takowych odmianach położenia, wygodniey nam ieſzcze będzie wyſtawić ſobie trzy płaſzczyzny do ſiebie pionowe, przecinaiące ſię w liniach głównych: to ieſt płaſzczyznę gruntu; powtóre płaſzczyznę przecinaiacą grunt w linii *RS*; na koniec płaſzczyznę przecinaiącą tenże grunt w linii *CD*: obie te oſtatnie płaſzczyzny przecinać ſię będą w linii *GH*, a przeto będą do ſiebie i do gruntu pionowe. Trzy takowe płaſzczyzny przechodzące przez punkt *A*, a rosciągnione do odległości nieoznaczoney, rozetną całą pełność mieyſca na ośm przedziałów odpowiadaiących tyluż położeniom wſpół-uſzykowanych; *pierwſzy* przedział *CGS* ſłuży wſzyſtkim wſpół-uſzykowanym dodatnym, to ieſt: na $+x$, $+y$, $+z$; *drugi* przedział

(a) Traité des Courbes à double Courbure.

CGR ſłuży na $-x$, $+y$, $+z$. *trzeci* przedział *DGS* ieſt na $+x$, $-y$, $+z$: *czwarty* przedział *RGD* ieſt na $-x$, $-y$, $+z$: *piąty* przedział *SHC* na $+x$, $+y$, $-z$; *ſzóſty* przedział *CHR* na $-x$, $+y$, $-z$: *ſiodmy* przedział *SHD* na $+x$, $-y$, $-z$: *oſmy* przedział *RHD* na $-x$, $-y$, $-z$: s tych przedziałów iedne zamykaią dwie wſpół-uſzykowane s temiż ſamemi znakami, drugie iednę tylko wſpół-uſzykowaną ſpólną, co do znaku: trzecie nakoniec wſzyſtkie trzy wſpół-uſzykowane co do znaków rożne. A maiąc zrównanie na iakąkolwiek powierzchnią do trzech takowych płaſzczyzn odnoſzoną, łatwo nam ieſt przez to ſamo rozumowanie, któregośmy w §. 24 użyli, rossądzić czyli które przedziały ſą między ſobą równe i podobne: i tak n.p. ieżeli zrównanie zawierać będzie ſame potęgi parzyſte z, powierzchnia leżąca nad płaſzczyzną gruntową *RCGS*, będzie równa i podobna powierzchni pod tym gruntem położoney; i płaſzczyzna gruntowa będzie tem, czem były śrzednice w liniach krzywych; czyli będzie PŁAŚZCZYZNĄ ŚRZODKOWĄ *(Planum diametrale)*: ieżeli zaś w zrównaniu na powierzchnią, x albo y będą ſię znaydować w ſamych wymiarach parzyſtych; w pierwſzym razie płaſzczyzna *CGDH*, w drugim zaś przypadku płaſzczyzna *SGRH* będzie płaſzczyzną śrzodkową.

Wyrazić linią iakąkolwiek leżącą na powierzchni ciała, przez zrównanie Algebraiczne; ieſt to ogarnąć wſzyſtkie odmiany punktu tę linią opiſuiącego: takowe odmiany względem płaſzczyzny gruntowey pokażą nam przyſtawy wyſokości z; odmiany względem płaſzczyzny *SGRH* pokażą nam wartości y; odmiany nakoniec względem płaſzczyzny *CGDH* odkryią nam odcinki x: ſkąd nam łatwo poznać, że odmiany iedney wſpół-uſzykowaney ſą zawiſłe od drugich; a przeto że w zrównaniu na powierzchnią, każda ilość odmienna ieſt funkcyą dwóch innych. Tu iuż łatwo poymiemy, że ieżeli powierzchnia ciała iakiego ieſt opiſana obwodem linii ciągłey proſtey

lub

lub krzywey, cała iey rozległość zawarta będzie w iednem zrównaniu, i będzie Powierzchnią ciągłą (*Superficies continua*): ieżeli zaś opiſana ieſt tak, iż każda iey część wypadła z obrotu innego gatunku linii, będzie także każda takowa część należała do innego zrównania, ſkąd powſtaie Powierzchnia nieforemna (*Superficies diſcontinua*), która do teraźnieyſzych uwag nie będzie należyć. W zrównaniu na powierzchnie ciągłe, z bydź może funkcyą iednokſztaltną y, x; a przeto na każdą wartość x, y, iedna tylko będzie odpowiadać przyſtawa wyſokosci, i takowe powierzchnie będziemy znowu nazywać Pierwszego porządku (*Superficies primi ordinis*): ieżeli zaś będzie funkcyą dwó-kſztaltną x, y; na każdą wartość x, y, dwie będą odpowiadać przyſtawy wyſokości, i takowe powierzchnie będą Drugiego porządku (*Superficies ſecundi ordinis*), co ieſzcze rościągnąwſzy do wyżſzych wymiarów z, wynaydziemy dalſzy podział powierzchni tak, iak na linie krzywe, gdzie należy nam oſtrzec że wymiary ilości odmiennych nie ſą tak beſpieczną cechą do rozeznawania powierzchni, iak do linii krzywych: czego będziemy mieć przykład na powierzchi walca i oſtrokrąga.

S tych pierwſzych obrazów, któreśmy ſobie o zrównaniach nieoznaczonych między trzema ilościami odmiennemi wyſtawili, domyślemy ſię łatwo, iż nam wypadaią dwoiakiego rodzaiu dociekania: to ieſt ſpoſób wyrażenia zrównaniem powierzchni iakiegokolwiek ciała: i ſpoſób wyrażenia linii na powierzchni ciała leżącey: przypatrzmy ſię iak iedno s tych zagadnień ieſt od drugiego zawiſłe.

Poznanie powierzchni iakiego ciała nabywa ſię przez poznanie wielu barzo punktów na tey powierzchni leżących, a przeto przez znalezienie prawa, podług którego te punkta ſię odmieniaią. Do poznania wielu na raz takowych punktów ieſt iedyny ſpoſób poznać linie różne na takowey powierzchni

leżące; te linie uważać ſię mogą iako ryſy zoſtawione od płaſzczyzn przecinaiących ciało; a przeto poznanie powierzchni, zawiſło od poznania linii na niey zoſtaiących; poznanie zaś takowych linii, nabywa ſię przez uwagę różnych przecięć takowey powierzchni od płaſzczyzn. Weźmy ſobie za przykład kulę, przeciąwſzy ią w iakiemkolwiek mieyſcu płaſzczyzną, linia krzywa tem przecięciem na powierzchni odryta będzie koło, więc na fig. 47. punkt Z będzie
Fig. 47. leżał zawſze na kole; niech będzie $AP=x$, $PM=y$, $MZ=z$, przez punkt Z i przez śrzodek kuli, czyli przez punkta Z, A, P, przeciąwſzy kulę, mamy naprzod $AM^2=x^2+y^2$; $AZ^2=AM^2+MZ^2= x^2+y^2+z^2$; aże AZ ieſt promień kuli; więc $a^2=x^2+y^2+z^2$ ieſt zrównaniem na kulę. Chcąc teraz od zrównania na kulę przyiśdź do poznania linii wypadaiącey s przecięcia kuli przez płaſzczyznę gruntową; ta kondy-
Fig. 46. cya uczy nas, że $z=o$, a przeto zrównanie na linią ſzukaną ieſt $a^2=x^2+y^2$, ieżeli uczynię w zrównaniu na kulę $x=o$, otrzymam $a^2=y^2+z^2$ na linią s przecięcia kuli płaſzczyzną SGRH: ieżeli zaś $y=o$, wypadnie mi $a^2=x^2+z^2$, zrównanie na linią, którą płaſzczyzna CGHD ſwem przecięciem zoſtawia.

Powierzchnie więc ciał uważać będziemy przez różne przecięcia tychże ciał od płaſzczyzn, i przez linie takowem przecięciem zrodzone. Ponieważ zaś przytrafić ſię może, że linia krzywa na powierzchni zoſtaiąc, leży na wielu płaſzczyznach, i wypaśdź nie może s przecięcia ciała iedną płaſzczyzną; ale tylko s przecięcia powierzchni przez drugą powierzchnią; przeto rozdzielemy uwagę naſzę na dwa przypadki: w pierwſzym poznamy linie na powierzchniach ciał zoſtaiące, które wypaśdź mogą s przecięcia ciała od płaſzczyzny: powtóre uważać będziemy linie krzywe zoſtaiące na powierzchni, ale razem znayduiące ſię na wielu płaſzczyznach.

§. XXIX.

Ponieważ zamierzyliśmy ſobie uważać ſame po-

wierzchnie

wierzchnie ciągłe, będą do uwagi naſzey należyć ſame tylko ciała Okrągłe toczone (*Corpora tornata*), których powierzchnia wyrobiona ieſt podług pewnego prawa, czyli raczey opiſana linią krzywą ciągłą przez ſwóy obrot, iakiemi ſą Kula (*Globus*), Walec (*Cylindrus*), i Ostrokrąg (*Conus*). Przez ciała takowe przechodząc płaſzczyzna przecinaiąca, zoſtawia różnego gatunku linie krzywe podług różnego ſwego położenia.

Roſtrząſaią ſię powierzchnie ciał okrągłych i linie różne wypádaiące z przecięciá ich płaſzczyzną.

A naprzód odnoſząc punkta powierzchni takiego ciała do trzech płaſzczyzn głównych, wyſtawmy ſobie powierzchnią przeciętą równo-legle płaſzczyznie gruntowey *SCRD* (fig. 46.); tem przecięciem zoſtawione linie na powierzchni bydź mogą równe, tak dalece że do iakieykolwiek wyſokości podnieſiemy płaſzczyznę przecinaiącą; linia krzywa będzie ta ſama, a przeto w takowey powierzchni linia s przecięcia równo-ległego gruntowi zrodzona, ieſt niezawiſła od przyſtaw wyſokości, i zrównanie na takową powierzchnią nie powinno zamykać z, ale bydź powinno takiem, iakiem ſię wyraża linia krzywa będąca zasadą ciała. Wyſtawmy ſobie Walec prosty (*Cylindrus rectus*), którego Zasadą (*Basis*) ieſt Koło: albo Walec pociągły (*Cylindrus ſcalenus*), gdzie Ellipſa ieſt zaſadą; przecinaiąc ciało takie płaſzczyzną równo-ległą zaſadzie, a razem pionową do osi walca, wypadać będą s takowych przecięć ſame koła między ſobą równe na walec proſty, i zrównanie na powierzchnią takiego walca ieſt $a^2=x^2+y^2$: na walec zaś pociągły ſame będą Ellipſy między ſobą równe, przeto zrównanie $g^2y^2+k^2x^2=g^2k^2$, będzie wyrażać powierzchnią walca pociągłego. Właſność ta ſłuży wſzyſtkim ciałom Walczastym i graniasto-słupowym (*Corpora Cylindrica, priſmatica*), i zrównania na powierzchnią takowych ciał nie zamykaią z, bo w nich przecięcia równo-ległe zasadzie rodzą linie proſte lub krzywe między ſobą równe.

Fig. 46.

Powtóre przecinaiąc ciała płaſzczyzną równo-ległą gruntowi, linie na powierzchni takowem przecięciem zrodzone bydź mogą podobne §. VII. to ieſt tego ſamego porządku i gatunku, ale mnieyſze lub większe, i na każde takowe przecięcie z ſtaie ſię ilością ſtateczną. Wyſtawmy ſobie oſtrokrąg okrągły, którego zaſadą ieſt koło (*Conus rectus*), lub pociągły, którego zaſadą ieſt Ellipſa (*Conus ſcalenus*); przecinaiąc od wierzchołka płaſzczyzną równo-ległą zasadzie taki oſtrokrąg, ryſować ſię będą na powierzchni takowem przecieciem ſame koła na oſtro-krągu okrągłym; ſame zaś Ellipſy na oſtro-krągu pociągłym: te zaś koła i Ellipſy nie będą równe, ale będąc roſnąć podług odległości płaſzczyzny przecinaiącey, i ich obwody będą proporcyonalne wyſokości $=a$, tak dalece że linia przez punkta te proporcyonalne prowadzona ieſt proſta: ciała takowe nazywaią ſię OSTRO-KRAGOWE, albo ogólniey OSTRO-GRANIASTE (*Corpora conica, pyramidalia*); przeto zrównanie na te ciała bydź powinno takie, iż na przecięcie ich płaſzczyzną przez punkta te proporcyonalne, rozebrać ſię powinno na zrównania wyrażaiące linie proſte. Takową zaś właſność maią wſzyſtkie ZRÓWNANIA IEDNO-RODNE (*Æquationes homogeneae*), czyli zawieraiące we wſzyſtkich terminach równe wymiary ilości odmiennych, x, y, z; tak dalece, że ſumma wymiaru w iednym terminie, ieſt równa ſummie wymiarów terminu innego któregokolwiek.

A naprzód mieliśmy iuż przykład pod §. 22. że zrównania iedno-rodne między ilościami odmiennemi iakiem ieſt n. p. $Ax^{m-n}y^n+Bx^{m-p}y^p+$ i t. d. $=o$, rozbierać ſię mogą na zrównania proſte 1go ſtopnia. Zebyśmy ſię zaś o tem barziey przekonali w teraźnieyſzych zrównaniach, wyſtawmy ſobie zrównanie iedno-rodne $z^m=az^{m-n-p}x^ny^p$, którego wſzyſtkie terminy ponieważ tę ſamę potęgę ilości odmiennych razem wziętych zamykaią, doſyć nam na iednym przeſtać. Teraz przypuśćmy na fig.47. że płaſzczyzna przecinaiąca przechodząc przez punkt A ieſt pio-

nową

nową do płaſzczyzny gruntu *APM*, która przecina w linii *AM*, nazwawſzy $AP=x$, $PM=y$, $MZ=z$ ponieważ kąt *PAM* płaſzczyzny przecinaiącey z linią *AP*, ieſt nam znany; będzie nam także znany ſtóſunek $AM:AP$, i $AM:MP$, a przeto będzie $y=hx$, gdzie h ieſt funkcyą tego kąta: włożywſzy więc w zrównanié iednorodne za y wartość hx, będzie - - - $z^m=az^{m-n-p}.h^px^{n+p}$, zrównanie takiego wzoru iak $Ax^{m-n}y^n+Bx^{m-p}y^p+$ i t. d. $=o$. więc każda powierzchnia wyrażona zrównaniem iednorodnem między trzema odmiennemi ilościami x, y, z, przecięta płaſzczyzną pionową na grunt, i przechodzącą przez środek *A*, wyda linią proſtą. Iakoż przeciąwſzy oſtrokrąg iakikolwiek pionowo na grunt tak, aby płaſzczyzna przecinaiąca przeſzła przez oś oſtrokrąga; linie s tego przecięcia zrodzone będą proſté przecinaiące ſię w wierzchołku. Co ſłuży także wſzyſtkim ciałom graniaſto-ſłupowym, w których zrównaniu iedna z ilości odmiennych ſtaie ſię albo zero, albo ilością ſtateczną, podług położenia płaſzczyzny przecinaiącey względem płaſzczyzn głównych: a przeto zrównanie na ciało graniaſto-ſłupowe w tem przecięciu będzie tylko iednę ilość odmienną zamykać, którego pierwiaſtki wyrażaią linie proſte między ſobą równo-ległe, S tych uwag łatwo nam będzie wynaleśdź zrównanie na powierzchnią oſtro-kręga iakiegokolwiek. Niech będzie na fig. 47. oſtro-krąg Fig. 47. pociągły *ADKEL*, którego zaſadą ieſt Ellipſa wyrażona zrównaniém $g^2y^2+k^2x^2=k^2g^2$, odnióſſzy iego powierzchnią do trzech płaſzczyzn głównych przez wſpół-uſzykowane $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, tak aby płaſzczyzna gruntowa była równo-ległą zaſadzie *DKEL*, i *AP* równo-legła osi większey *DE*; *KL* równo-legła *PQ*, wyſokość *QM* równo-legła osi oſtrokrąga *CA*; ponieważ przecięcia równo-ległe płaſzczyznie gruntowey rodzą Ellipſy podobne, których średnice $DE=g$, $KL=k$, będą miały ſtóſunek ſtateczny do wyſokości z; to ieſt $g=mz$, $k=nz$; włożywſzy te wartości w zrównanié na Ellipſę; otrzymamy - - $m^2y^2+n^2x^2=m^2n^2z^2$. zrównanié na powierzchnią ſzukaną. W oſtro-krągu proſtym czyli okrągłym, ponieważ obydwié ſrzednice ſą równe; mamy $m=n$, a przeto zrownanié $y^2+x^2=m^2z^2$ na powierzchnią oſtro-krąga proſtego.

Linie krzywé s przecięcia kuli wypadaiące. Zoſtaie nam teraz po przecięciach równo-ległych i pionowych na grunt przez ſrzodek A, roſtrząſnąć inné przecięcia iakiekolwiek trzech tych ciał, i wynaleśdź linie krzywé, które ſię ſtąd na powierzchni rodzą. Całe to działanié zawiſło od przenieſienia wſpół-uſzykowanych s płaſzczyzny gruntu na płaſzczyznę przecinaiącą, i od wyrażenia iedney przez funkcye dwóch drugich, tak aby zrównanié między trzema odmiennemi ilościami na powierzchnią, przerobić na zrównanie do dwóch wſpół-uſzykowanych na linią krzywą przecięciem zrodzoną. Zaczniymy od kuli, na którą zrównanié $a^2=x^2+y^2+z^2$, między trzema wſpół-uſzykowanemi na fig. 49. $AP=x$, $QP=y$, $QM=z$. Fig. 49. Poprowadźmy płaſzczyznę przecinaiącą przez powierzchnią kuli tak, aby przecięła płaſzczyznę gruntową w linii TL, uczyniwſzy z oſią AR kąt $TSR=ASL=p$. Na linią TL przecięcia, ſpuśćmy z Q, M, dwie pionowé QT, MT; będzie więc kąt $QTM=q$ wyrażał pochyłość płaſzczyzny przecinaiącey do płaſzczyzny gruntowey. Od początku odcinków A ſpuśćmy na linią przecięcia pionową AL: chcąc wyrazić linią krzywą tem przecięciem na powierzchni kuli zoſtawioną, potrzeba mi zrównanié między x, y, z, przerobić na inné między $ST=t$, i $TM=u$. Nazwiymy AS, m; będzie $AL=m\,\text{Wſt}.p$, $LS=m.\text{Doſt}.p$, od T na oś przeſzłą AS ſpuſzczam pionową $TR=t.\text{Wſt}.p$, $SR=t.\text{Doſt}.p$; a ponieważ kąt $QTS=90^\circ$, kąt $PQT=TSR=p$; $QM=u.\text{Wſt}.q$, $QT=u.\text{Doſt}.q$; $PR=u.\text{Doſt}.q.\text{Wſt}.p$, $PQ-TR=u.\text{Doſt}.q.\text{Doſt}.p$: a zatem $x=AP=AS+SR-PR$, $y=TR+PQ-TR$, czyli - - - $x=m+t.\text{Doſt}\,p-u.\text{Doſt}.q.\text{Wſt}.p$; - - - $y=t.\text{Wſt}.p+u.\text{Doſt}.q.\text{Doſt}.p$; $z=QM=u.\text{Wſt}.q$; włożywſzy

wſzy te wartości w zrównanie na kule $a^2=x^2+y^2+z^2$; otrzymamy inne między t, u, na koło leżące na płaſzczyznie przecinaiącey. Zebyśmy to zrównanie uczynili prościeyſzem, wyſtawmy ſobie że kąt $TSR=90^\circ$ czyli że płaſzczyzna przecinaiąca pada pionowo do osi AS; będzie więc $\text{Wſt}.p=1$, $\text{Doſt}.p=0$, a przeto $x=m-u.\text{Doſt}.q$, $y=t$; $z=u.\text{Wſt}.q$, włożywſzy te wartości w zrównanie na kulę, zamieniemy ie na

$$a^2=m^2-2mu.\text{Doſt}.q+u^2\text{Doſt}.q^2+t^2+u^2\text{Wſt}.q^2$$

czyli na $a^2=m^2-2mu.\text{Doſt}.q+t^2+u^2$ - - położywſzy $u-m.\text{Doſt}.q=s$, - - $u^2-2m\text{Doſt}.q=s^2-m^2\text{Doſt}.q^2$, $1-\text{Doſt}.q^2=\text{Wſt}.q^2$, wypadnie

$$t^2+s^2=a^2-m^2\text{Wſt}.q^2.$$

Zrównanie na koło, którego promień $=\sqrt{(a^2-m^2\text{Wſt}.q^2)}$, wſzyſtkie więc przecięcia kuli płaſzczyzną wydaią koło.

Przecięcia walca i linie ſtąd zrodzone.

Te ſame wartości nowych wſpół-uſzykowanych ſłużyć nam będą do innych ciał. Mamy naprzód zrównanie na walec proſty $a^2=x^2+y^2$: wyſtawmy ſobie że ten tak ieſt przecięty od płaſzczyzny, iż TS pada pionowo na AR, a przeto $p=90^\circ$, mamy więc $x=m-u.\text{Doſt}.q$, $y=t$; włożywſzy te wartości w zrownanie $a^2=x^2+y^2$ przerobiemy ie na - - $a^2=(m-u.\text{Doſt}.q)^2+t^2$, czyli - - -

$$t^2=a^2-m^2+2mu.\text{Doſt}.q-u^2\text{Doſt}.q^2 \quad - \quad - \quad (\alpha)$$

zrównanie (α) ieſt na Ellipſę podług cechy wyłożoney w §. XIII; chcąc tę Ellipſę lepiey poznać odnieśmy wſpół-uſzykowane do śrzodka, położywſzy $u=s+\frac{m}{\text{Doſt}.q}$, zrównanie ſię zamieni na

$$t^2=a^2-s^2\text{Doſt}.q^2 \quad - \quad - \quad - \quad (\beta)$$

Ellipſa więc s tego przecięcia zrodzona, leży na płaſzczyznie przecinaiącey, maiąca ſwóy śrzodek na osi walca; oś mnieyſza tey Ellipſy ieſt $t=a$, równa promieniowi koła gruntowego; oś zaś większa ieſt równa $\frac{a}{\text{Doſt}.q}$: ponieważ $a<\frac{a}{\text{Doſt}.q}$, im Doſtawa q ieſt ilością mnieyſzą, to ieſt, im pochyłość płaſzczyzny przecinaiącey do płaſzczyzny gruntowey, ieſt mnieyſza, tem oś więkſza wypada dłużſza; a przeto i Ellipſa: co nam daie widzieć, że przecięcie walca proſtego płaſzczyzną nachyloną do gruntu, zawſze rodzi Ellipſę: im kąt q ieſt więkſzy, tem ta Ellipſa ieſt dłużſza; kiedy $q=90°$, oś ta ſtaie ſię nieſkończoną, bo $\text{Doſt}.q=o$; czyli oś ta ſtaie ſię linią równoległą osi walca, a przeto przecięcie pionowe na grunt walca rodzi linie proſte między ſobą równo-ległe: im zaś q ſtaie ſię mnieyſzem, tem oś więkſza Ellipſy zbliża ſię do równości z osią mnieyſzą; i kiedy $q=o$, $\text{Doſt}.q=1$, a zrównanie (β) ſtaie ſię zrównaniem na koło, więc wſzyſtkie przecięcia walca równo-ległe gruntowi wydaią koło.

Przyſtóſuymy te ſamé rozumowania do walca podłużnego, którego zaſada ieſt Ellipſa. Zrównanie na taki walec ieſt $g^2y^2+k^2x^2=k^2g^2$, kładąc $x=m-u\,\text{Doſt}.q$, $y=t$; przerobiemy ie na

$$t^2=\frac{k^2}{g^2}[g^2-m^2+2mu\text{Doſt}.q-u^2\text{Doſt}.q^2] \quad \cdot\ \cdot \quad (\gamma).$$

(γ) ieſt znowu zrównaniem na Ellipſę: niech będzie $u=s+\frac{m}{\text{Doſt}.q}$, ta wartość włożona w (γ), zamieni zrównanie na

$$t^2=\frac{k^2}{g^2}(g^2-s^2\text{Doſt}.q^2) \quad \cdot \quad \cdot \quad (\delta).$$

oś mnieyſza tey Ellipſy uczyniwſzy $s=o$, wypada $t=k$, to ieſt ta ſama co i Ellipſy gruntowey; oś zaś więkſza kiedy $t=o$, wypada $s=\frac{g}{\text{Doſt}.q}$, aże $\cdot\ \cdot$ $\frac{g}{\text{Doſt}.q}>g$, więc Ellipſa s tego przecięcia pochyłego do gruntu ieſt dłużſza iak zaſada. Nazwiymy tę oś mnieyſzą Ellipſy s przecięcia wypadłey, daną przez t,

nazwiymy

nazwiymy ią mowię φ; oś większą daną przez s, nazwiymy ψ, mamy $\varphi.\psi = \frac{kg}{\text{Doſt}.q}$, czyli $\varphi\psi : k.g = \frac{1}{\text{Doſt}.q} : 1$. Aże $\frac{1}{\text{Doſt}.q} = \text{Sieczna}.q$. §. 51. Algebry, przeto mamy w oſtatniey proporcyi tę barzo piękną prawdę zamkniętą,, że przeciąwſzy wałec podłużny ,,płaſzczyzną pochyłą do gruntu, otrzymuiemy s tego ,,przecięcia Ellipſę, w którey mnogość dwóch osi ma ,,ſię do mnogości osi zaſady, iako ſię ma Sieczna po- ,,chyłości płaſzczyzny do wſtawy proſtey.,,

Przecięcia oſtrokrąga, i linie krzywé ſtąd wypádaiące.

Zoſtaią nam ieſzcze do roſtrząſania różne przecięcia oſtro-krąga: żebyśmy tę rzecz nayogólniey ogarnęli, weźmy do tego oſtro-krąg podłużny, z niego bowiem łatwo nam będzie przyiśdź do oſtro-krąga proſtego czyli okrągłego. Wynaleźliśmy prawda na powierzchnią oſtro-krąga zrównanie $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. ponieważ nam iuż wchodzi m w x, y, na przecięcia; wyraźmy raczey tę powierzchnią zrównaniem - - - $g^2k^2z^2 = g^2y^2 + k^2x^2$. wyſtawiwſzy ſobie że zaſada oſtro-krąga leży na płaſzczyznie gruntowey APQ fig. 49. którey śrzednice ſą g, k. Przeciąwſzy ten oſtro-krąg płaſzczyzną tak, iak nam fig. 49. pokazuie, kładąc $x = m + t.\text{Doſt}.p - u.\text{Doſt}.q.\text{Wſt}.p$; - - - $y = t.\text{Wſt}.p + u.\text{Doſt}.q.\text{Doſt}.p$. $z = u.\text{Wſt}.q$; zrównanie $g^2k^2z^2 = g^2y^2 + k^2x^2$ na oſtro-krąg podłużmy, wypadnie:

Fig. 49.

$$\begin{aligned}
&g^2k^2.\text{Wſt}.q^2u^2 - 2g^2.\text{Wſt}.p.\,\text{Doſt}.q,\text{Doſt}.p.tu \\
&- g^2.\text{Doſt}.q^2.\text{Doſt}.p^2.u^2 + 2k^2.m.\text{Wſt}.p.\text{Doſt}.q.\text{Doſt}.p.tu \\
&- k^2.\,\text{Doſt}.q^2.\,\text{Wſt}.p^2u^2 \\
&+ 2k^2m\text{Doſt}.q\text{Wſt}.p.u - 2k^2m\text{Doſt}.pt \quad - \quad - \\
&- g^2.\text{Wſt}.p^2.t^2 - k^2m^2 = 0 \quad - \; - \; - \quad (A''). \\
&- k^2\text{Doſt}.p^2.t^2;
\end{aligned}$$

Na oſtro-krąg zaś proſty gdzie $g = k$, $g^2z^2 = y^2 + x^2$ zamieni ſię zrównanie na

$g^2.\text{Wſt}.$

$$\begin{aligned} &g^2.\mathit{Wſt}.q^2.u^2 - 2(1-m)\mathit{Wſt}.p.\mathit{Doſt}.q.\mathit{Doſt}.p.tu-t^2\\ &-\mathit{Doſt}.q^2.u^2\\ &\quad + 2m\mathit{Doſt}.q.\mathit{Wſt}.p.u-m^2=0 \quad - \; - \; - \quad (B'').\\ &\quad - 2m\mathit{Doſt}.p.t \end{aligned}$$

to zrównanie wyraża linie krzywe drugiego porządku tak, iak i (A''): dla tego żebyśmy na wypadki trafili prościeyſze, obieramy ſobie do roſtrząſania zrównanie (B''), a przeto odcinki różne oſtro-krąga proſtego. A naprzód przetniymy oſtro-krąg proſty tak, aby płaſzczyzna przecinaiąca była proſto-padła do gruntu, będzie więc $MTQ=q=90^\circ$, $\mathit{Wſt}.q=1$, $\mathit{Doſt}.q=0$. wprowadziwſzy ten warunek w zrównanie (B''), zamieniemy ie na

$$g^2u^2=t^2+2m\mathit{Doſt}.p.t+m^2 \quad - \quad - \quad (C'').$$

podług prawideł podanych w §. XIII. i innych w Rozdziale III. §. XIX. rozſądzić nam łatwo, że zrównanie (C'') ieſt na Hyperbolę, którey ledwo-nieſtyczne proſte zamykaią ſię w zrównaniach - - - $gu+t+m\mathit{Doſt}.p=0$, - - - $gu-t-m\mathit{Doſt}.p=0$. Znaydziemy tę ſamę linią krzywą na przecięcie pionowe do gruntu oſtro-krąga podłużnego, wprowadziwſzy w (A'') kondycyą, że $\mathit{Wſt}.q=1$, $\mathit{Doſt}.q=0$. przeto oſtro-krąg iakikolwiek przecięty pionowo do gruntu i zaſady ſwoiey, wydaie Hyperbolę.

Niech teraz płaſzczyzna przecinaiąca padnie pochyło na grunt tak aby iey przecięcie TL było pio-
Fig. 49. nowe do osi AR na fig. 49. będzie więc $TSR=p=90^\circ$, $\mathit{Wſt}.p=1$, $\mathit{Doſt}.p=0$, wprowadziwſzy te warunki w zrównanie (B'') zamieniemy ie na

$$t^2=(g^2\mathit{Wſt}.q^2-\mathit{Doſt}.q^2)u^2+2m\mathit{Doſt}.q.u-m^2 \quad - \; - \quad (D'')$$

gdyby przecięcie albo pochyłość płaſzczyzny przecinaiącey, do gruntowey była taka, iż $g^2\mathit{Wſt}.q^2=\mathit{Doſt}.q^2$, czyli $\frac{1}{g}=\mathit{Sty}.q$. linia krzywa s takiego przecięcia zrodzona byłaby Parabola opiſana zrównaniem - - -

$$t^2=2m\mathit{Doſt}.q.u-m^2$$

ieżeli

ieżeli zaś $g^2Wſt.q^2-Doſt.q^2$ nie będzie zero, żebyśmy dokładniey tę linią przecięciem zrodzoną poznali, odnieśmy wſpół-uſzykowane do śrzodka położywſzy $u=s-\frac{m.Doſt.q}{g^2Wſt.q^2-Doſt.q^2}$, zrównanié (C'') zamieni ſię na

$$t^2=(g^2Wſt.q^2-Doſt.q^2)\left[s^2-\frac{g^2.Wſt.q^2m^2}{(g^2Wſt.q^2-Doſt.q^2)^2}\right]\ .\ .\ (E'').$$

gdzie widzémy oczywiście, że ieżeli $g^2Wſt.q^2>Doſt.q^2$, liniá krzywá odrytá płaſzczyzną przecinaiącą będzie Hyperbola; ieżeli zaś - - - $g^2Wſt.q^2<Doſt.q^2$, liniá krzywá będzie Ellipſa: na Ellipſę więc $Sty.q<\frac{1}{g}$, na Hyperbolę $Sty.q>\frac{1}{g}$, na Parabolę zaś $Sty.q=\frac{1}{g}$; poniéważ g wyraża promień koła gruntowego niech będzie $g=1$: wypada na Parabolę $Sty.q=1=Sty.45^\circ$. Na Ellipſę $Sty.q<Sty.45^\circ$. na Hyperbolę $Sty.q>Sty.45^\circ$. Wyſtawmy ſobie na fig. 50. przecięcié oſtro-krąga przez wierzchołek D i śrzodek C proſtopadle na grunt; wypadnie tróykąt DAB równo-ramienny, linie DB, DA, będą bokami oſtro-krąga, CA promień koła gruntowego, DC oſią oſtrokrąga: poprowadziwſzy linią proſtą EC s śrzodka tak, aby był kąt $ACE=45^\circ$; będzie EC równo-legła DB, więc kiedy płaſzczyzna przecinaiąc oſtro-krąg będzie równo-ległą do iego boku DB, liniá krzywá s tego przecięcia zrodzoná będzie *Parabola*; kiedy zaś ta płaſzczyzna padnie na grunt pod kątem mnieyſzym od 45°, iakim ieſt n. p. LCA; to ieſt kiedy przeciągniona za linią CL co raz barziey od BD oddalać ſię będzie ku ſtronie D, liniá krzywá ſtąd zrodzoná będzie *Ellipſa*: kiedy nakoniec płaſzczyzna przecinaiącá padłſzy pod kątem więkſzym od 45° na grunt, w przeciągnieniu ſchodzić ſię będzie z bokiem ku ſtronie BD, a oddalać ſię coraz barziey od tegóż boku ku ſtronie DB, liniá krzywá

Fig. 50.

s takiego

s takiego przecięcia zrodzona będzie *Hyperbola*. Przecięcie więc oſtro-krąga wydaie wſzyſtkie linie krzywe 2go porządku, które ſtąd wzięły imie ODCINKÓW OSTRO-KRĄGOWYCH (*Sectiones Conicae.*)

§. XXX.

Wyrażaią ſię przez zrównania powierzchnie ciał powſtaiące z obrotu ſamych linii krzywych 2go porządku.

Wſzyſtkie powierzchnie ciał dotąd od nas uważane, będąc wyrażone zrównaniem zawieraiącem trzy wſpół-uſzykowane x, y, z, w drugim ſtopniu, ſą powierzchniami 2go porządku; te przecięte płaſzczyzną nie wydały linii krzywych wyżſzego porządku nad ten, do którego ſame należą: nie mogą bowiem takowe powierzchnie powſtać tylko z obrotu linii 2go porządku. I tak powierzchnia *kuli* powſtaie z obrotu obwodu koła około ſwey ſrzednicy: walec z obrotu linii proſtey leżącey na obwodzie koła lub Ellipſy; i proſto-padłey do płaſzczyzny gruntu. Oſtrokrąg s podobnego obrotu linii proſtey przecinaiącey wyſokość oſtro-krąga w iego wierzchołku, a zatem nachyłoney do płaſzczyzny gruntu pod tym ſamym kątem. Wſzyſtkie te powierzchnie 2go porządku wyrazić możemy zrównaniem ogólnem $Z^2 = x^2 + y^2$, gdzie Z^2 ieſt ilością ſtateczna na ciała graniaſto-ſłupowe, których boki ſą ſobie równo-legle: ieſt zaś Z^2 funkcyą wyſokości z na ciała oſtro-graniaſte. Zebyśmy nic nie opuścili co do wiadomości innych ieſzcze powierzchni 2go porządku należy, rodzących ſię z obrotu ſamych linii krzywych 2go porządku, tak iak kula rodzi ſię s ſamego obrotu koła; pomyślmy, że na fig. 8. Tabl: II. linia krzywa $R'BM$ ieſt 2go porządku, którą oś $R'S$ dzieli na dwie części równe i podobne: obrociwſzy takową linią około ſwey ſrzednicy $R'S$, obwód icy opiſze powierzchnią krzywą: iakże takową powierzchnią wyrażemy zrównaniem? łatwo każdy poymuie, że natura takowey powierzchni zależy od oznaczenia funkcyi należytey Z. Na ten koniec odnieśmy tę powierzchnią do trzech płaſzczyzn głównych wyrażonych na fig. 51. przez trzy wſpół-uſzykowane pionowe $RP = x$, $PQ = y$, $QM = z$,

Fig. 8.

Fig. 51.

$QM=z$, przez punkt M, i początek odcinków R ſpuśćmy płaſzczyznę przecinaiącą, pionowo do płaſzczyzny gruntowey RQP, tak, że linia RQ będzie linią przecięcia; ta płaſzczyzna odetnie linią krzywą takiey natury, z iakiey obrotu powſtała powierzchnia, i ta linia krzywa będzie cała leżyć na płaſzczyznie przecinaiącey, którey zrównanie wyrazi ſię przez dwie wſpół-uſzykowane RQ, QM. Daymy że ta powierzchnia powſtała z obrotu Ellipſy; więc punkt M leży na Ellipſie, na którą mamy na końcu §. XIII. zrównanie (A') $RQ^2=fz-\frac{f}{g}z^2$; gdzie f znaczy linią równania całą, g oś większą Ellipſy; będzie więc funkcya Z, $fz-\frac{f}{g}z^2$ na teraźnieyſzy przypadek; aże $RQ^2=x^2+y^2$, przeto

$$fz-\frac{f}{g}z^2=x^2+y^2 \quad . \quad . \quad . \quad (M').$$

ieſt zrównaniem na powierzchnią opiſaną przez obrot Ellipſy około ſwoiey śrzednicy, czyli na powierzchnią *Sferoidy*.

Fig. 51.

Gdyby linia opiſuiąca powierzchnią była Parabola; punkt M na fig. 51. będzie punktem należącym do Paraboli, gdzie $g=\infty$; wprowadziwſzy tę kondycyą w zrównanie (M'), wypadnie zrównanie na powierzchnią Paraboliczną;

$$fz=x^2+y^2 \quad . \quad . \quad . \quad (M'').$$

gdyby zaś powierzchnia krzywa opiſana była obrotem Hyperboli; gdzie oś większa ieſt zewnętrzna linii krzywey, wprowadziwſzy $-g$, za g w (M'); otrzymamy zrównanie na powierzchnią Hyperboliczną:

$$fz+\frac{f}{g}z^2=x^2+y^2 \quad . \quad . \quad (M''').$$

Spoſób ten wyrażania linii krzywych rodzących ſię s przecięcia powierzchni krzywey płaſzczyzną, nie może ſłużyć tylko kiedy linia krzywa tak leży na

Spoſób przenoſzeniá linii krzywych z wielu płaſzczyzn na iednę

powierzchni, że ią całą płaſzczyzna przecinaiącá zaiąć może: to ieſt, kiedy ią za pomocą przecięciá z niezliczonych płaſzczyzn możemy przenieść na iednę: ale kiedy liniá krzywá tak leży na powierzchni, iż iey płaſzczyzna przecinaiąca nie może zagarnąć, ſpoſób dopiero wyłożony nie może ſłużyć. Linii bowiem krzywey nie możná poznać tylko przez zrównanie między dwiema odmiennemi ilościami, do którego nám łatwo było przyiśdź rachuiąc linią krzywą całą położoną na płaſzczyznie przecinaiącey, gdzie trzy wſpół-uſzykowane x, y, z, do powierzchni, potrafiliśmy za pomocą Trygonometryi wyrazić przez dwie t, u, do linii krzywey. Zaſtanówmy ſię z uwagą nad tą nową trudnością. Nie możemy poznać linii krzywey tylko przez zrównanie między dwiema wſpół-uſżykowanemi; więc nám koniecznie potrzeba linią krzywą przenieść z niezliczonych płaſzczyzn na iednę, i zrównanie na powierzchnią między x, y, z, przerobić na inne między dwiema tylko odmiennemi ilościami. A przeto trzeba nam koniecznie mieć dwa zrównaniá na powierzchnią, za pomocą których wyrzuciwſzy iednę odmienną n.p. z, wypadnie zrównanie między x, y, na linia krzywą. Tu uważmy naprzód, że dwa te zrównaniá bydź powinny różne, więc każde wyrażać będzie inną powierzchnią; z nich nie możemy wyrzucać żadney ilości odmienney, ieżeli iey wartość nie będzie ſpólná obydwom powierzchniom, a przeto ieżeli wſpół-uſzykowane iedney powierzchni nie będą do tey ſamey osi, i do tego ſamego początku odciuków odnoſzone co i drugie; i ieżeli punkta iedney powierzchni nie znidą ſię s punktami drugiey, w linii krzywey ſzukaney: to ieſt, takiey linii krzywey nie możemy poznać, tylko przez przecięcie powierzchni od drugiey powierzchni takie, aby powierzchniá przecinaiącá przeſzła przez wſzyſtkie punkta linii ſzukaney. Iako więc linie krzywe leżące na iedney płaſzczyznie, poznaiemy za pomocą

prze-

przecięcia powierzchni płaſzczyzną; tak linie krzywe leżące na różnych płaſzczyznach poznać możemy przez przecięcie powierzchni drugą powierzchnią. To zaś powtórne poznawanie dzieie ſię przez Eliminacyą; gdzie znowu widzemy podobieńſtwo teraźnieyſzego ſpoſobu s tym, któregośmy użyli na ſkładnią zrównań pod §§. XVI. XVII. Przypomniymy ſobie tamto działanie, abyśmy lepiey zrozumieli teraźnieyſze. Od dwóch zrównań wyrażaiących dwie linie odnoſzone do tey ſamey osi i do tego ſamego początku odcinków na punkta N, M, (fig. 45.) przyſzliśmy do zrównania na punkta Q, P; więc tem wyrzucaniem iedney ilości odmienney, punkt N przenieśliśmy na punkt Q, punkt zaś M, na punkt P, przez pionowe NQ, MP, to ieſt punkta z iedney linii przenieśliśmy na drugą; podobnie i teraz maiąc dwa zrównania między $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, (fig. 52), na dwie powierzchnie przecinaiące ſię, i te przerabiaiąc na iedno między y, x; punkt M przez pionową przenoſzemy na punkt Q, i całą linią krzywą RMN, przenoſzemy tym ſamym ſpoſobem na SQT, czyli na płaſzczyznę BAD; linia SQT nazywa ſię Rzutem, albo Przeniesieniem linii RMN. (*Projectio curvae*); a iako pod §. XVI. poznaliśmy oczywiście że nie zawſze pierwiaſtki rzetelne w zrównaniu oznaczonem pokazuią przecięcia, tak i tu trzeba nam pamiętać, że lubo zrównanie na rzut linii będzie mieć wartości rzetelne, i wyrażać prawdziwe linii krzywey przeniesienie; nie zawſze iednak z rzetelności rzutu należy wnoſić o rzetelności linii na powierzchni ciała zoſtaiącey: bo do tego ieſzcze należy ſię przekonać, że pionowe przenoſzące linią s powierzchni na płaſzczyznę, ſą także rzetelne; do czego pomóc nam powinny wſzyſtkie rozumowania pod §. XVI. wyłożone. Pamiętaymy ieſzcze i o tem, że odnoſząc powierzchnią do trzech płaſzczyzn głównych, możemy na którąkolwiek z nich ciſnąć linią krzywą, co zawiſło od ilości

Fig. 45.

Fig. 52.

odmienney którą wyrzucamy. Ieżeli z dwóch zrównań wyrzucamy z, otrzymuiąc inne między x, y; ciſkamy na ten czas linią krzywą na płaſzczyznę BAD: kiedy zaś wyrzucamy y, zoſtawuiąc z, x, ciſkamy ią na płaſzczyznę CAD: nakoniec ciſkamy linią krzywą s powierzchni na płaſzczyznę CAB, wyrzucaiąc x. A iako na ciſkanie linii krzywych na płaſzczyznę potrzebuiemy dwóch zrównań do powierzchni; tak też chcąc z rzutu poznać linią krzywą na powierzchni leżącą, ieden rzut nigdy nam nie wyſtarczy, ale ich trzeba koniecznie dwa: co oczywiście wypada s ſamey natury powierzchni, na którą potrzebuiemy zrównania między trzema odmiennemi ilościami. Weźmy za przykład kulę przeciętą od płaſzczyzny pochyłey do gruntu, i ſzukaymy rzutu linii krzywey tem przecięciem zrodzoney. Mamy dwa zrównania na powierzchnią kuli - - $x^2+y^2+z^2=a^2$; i na powierzchnią płaſką $Ax+By+Cz=D$; wyrzuciwſzy z, otrzymamy zrównanie na rzut koła.

$$D^2-D^2a^2-2DBy-2ADx+(A^2+C^2)x^2+(B^2+C^2)y^2 +2Bxy=0.$$

które wyraża Ellipſę. Każde więc koło nachylone do iakiey płaſzczyzny, i ciśnione na nię, wydaie Ellipſę; tak iako każda linia krzywa rzucona przez pionowe na tę ſamę płaſzczyznę gdzie leży, daie linią proſtą, czyli linia proſta ieſt zawſze rzutem linii krzywey, na tey ſamey płaſzczyznie leżącey.

Tłómaczy ſię użycie ciſkania ciał i linii na powierzchnia w ſztuce ryſunków.

Sztuka ta przenoſzenia linii, z iedney płaſzczyzny na drugą przez linie pionowe, będąc prawem dla oka naſzego w wiedzeniu ciał odległych, zrodziła naukę oſobną nazwaną *Perſpektywa*, która ieſt gruntem ryſunku i malarſtwa. Oko naſze nie widzi ciał tylko przez linie proſte, przez które światło ſię roſchodzi: nie mogąc ſądzić z oka o odległości rzeczy, wiemy tylko że ciało ſprawuiące w nas czucie, znayduie ſię na linii proſtey od ſiebie do oka prowadzoney, ale nie wiemy na którym punkcie tey linii leży: ieżeli to ciało ieſt niezmiernie od nás oddalone, i má cząſtki iedné mniey, drugié więcey od nás odległé; wſzyſtkié té różnice odległości przed okiém naſzym nikną, tak dalece że ié wſzyſtkié do iedney odległości odnoſzémy: i tak ciała Niebieſkié, iako to n.p. Xiężyc lub Słońce będąc okrągłe, i kuliſte, widzémy płaſkie; bo wſzyſtkié punkta ich powierzchni wypukłey, odnoſzémy przez linie pionowé do płaſzczyzny przez śrzodek ciała przechodzącey i pionowey na linią od śrzodka ciała do oka naſzégo prowadzoną. Spoſób wyrażenia ciała tak, iak by ſię oku naſzému pakazało, gdyby to s pewney iakiey odległości na nie patrzało, wypada s teoryi dopiéro wyłożoney: i tak koło lub iakakolwiek liniá krzywá oddaloná od nás, ale położoná na tey ſaméy płaſzczyznie z okiém, i do niégo obwodem obróconá, widzianá będzie iak liniá proſtá; bo wſzyſtkie punkta iey obwodu oko odnoſić będzie do linii proſtey prowadzoney przez śrzodek linii krzywey, tak iak koło ukośnie od oka w wielkiey odległości widziané, zamieni ſię w Ellipſę. S tego prawa ſztuka ryſunku ciał różnych zależy na tem; iż obierá ſię naprzód pewné położenie i mieyſce dlá oka: między niem i ciałem kładzie ſię płaſzczyzna przeźroczyſtá, czyli Tablica; linie od ciała do oka prowadzone przechodzą przez tę płaſzczyznę, i gdzie każdá Tablicę przecina, tám ieſt mieyſce punktu, s którego liniá wychodzi. Weźmy ſobie za przykład ſpoſób ryſowania Mapp, czyli kart Geograficznych, gdzie ieſt cała kula lub część powierzchni ziemi odmalowaná. Te karty różné mieć mogą poſtaci podług różnego położenia oka względem kuli ziemſkiey. Ieżeli oko położemy w śrzódku ziemi, Tablica będzie dotykać ſię kuli, na którey ſię każdy punkt koła odmaluie tam, gdzie ſię kończy ſtyczna iego łuku; ſtyczne roſnąc znacznie, rościągną powierzchnią pół-kuli do odległości nieſkończoney; i dlá tego na takich kartach nie maluią ſię większé części powierzchni od 45°.

Aże oko znayduiąc ſię w śrzodku, znayduie ſię razem na płaſzczyznach wſzyſtkich południków i kół większych; te koła ryſuią ſię iak linie proſte. Takowe położenie oka daie ſię w kartach kuli niebieſkiey. *Powtóre* oko położyć możemy w biegunie kuli; Tablica na ten czas będzie w ſamym śrzedniku, na którą ciſka ſię cała powierzchnia pół kuli leżącą na ſtronie drugiego bieguna. Ponieważ w biegunach znowu ſię wſzyſtkie Południki przecinaią, oko znayduie ſię na wſzyſtkich tych płaſzczyznach, przeto południki na takowych kartach wyrażaią ſię przez linie proſte, koła zaś równoległe zoſtawſzy przy ſwoiey figurze roſną od bieguna tak, iako ſtyczne łuków zabieraiących połowę ſzérokości geograficzney. Ciſkanie takowe powierzchni kuli nazywa ſię Biegunowem *(Projectio polaris)*, tak iak pierwſze nazywa ſię Srzodkowem *(Projectio centralis)*. Użycie ciſkania biegunowego ma mieyſce w ryſowaniu pół-kuli ziemſkiey lub niebieſkiey. Nakoniec położyć możemy oko na ſamey powierzchni kuli, Tablicę zaś na Horizoncie mieyſca przechodzącym przez śrzodek kuli. Koło to równo-ległe gdzie ſię oko znayduie, wyraża ſię zawſze przez linią proſtą; czego mamy przykład w dziſieyſzych kartach ziemſkich, kiedy połowę kuli na płaſzczyznę południka ciſkamy, położywſzy oko w ſamym śrzedniku. Dawni Geografowie ryſuiąc nawet kray iaki, obierali śrzednik na położenie oka; i dla tego ich karty wyrażały mieyſca ziemi nadto ukośno i od podobieńſtwa dalekie. W dziſieyſzych kartach chcąc ryſować kray iaki, bierze ſię mieyſce między dwiema południkami i dwiema równo-ległemi kołami zawarte, gdzie ſię kray ten zamyka; z śrzodka tego kraiu prowadzi ſię linia proſta przez śrzodek kuli aż na ſtronę przeciwległą, gdzie ſię oko znayduie patrzące na kray przez Tablicę umieſzczona w śrzodku kuli, i proſtopadłą do linii proſtey dopiero opiſaney; południk tego mieyſca śrzedniego na przeciwko któremu oko leży, będąc na iedney płaſzczyznie z okiém, zamienia ſię na linią proſtą, inné zaś południki wypadaiąc z przecięcia ukośnego kuli, ſą porcyami Ellipſy: bo ogólnie mowiąc: wſzyſtkié południki zboczne dla oka, kiedy ſię to znayduie na powierzchni kuli, zamieniaią ſię w Ellipſy, podług teoryi wyżey wyłożoney. Gdyby ta nauka ryſowania kart, nie była nad to rościągła i obca dla celu, któryśmy ſobie założyli; weszlibyśmy we wſzyſtkié iey ſzczególnosci; ale ponieważ nam wypadnie w częściach Fizyczno-Matematycznych pokazać użycié tych ogólnych początków rachunku, któreśmy w tem dziele rzucili, znaydziemy tam przyzwoitſze mieyſcé dla materyi teraz wſpomnioney.

ROZDZIAŁ SZOSTY.

O właſnościach linii krzywych Przestępnych i ich znakomitſzych gatunkach.

§. XXXI.

Linie krzywé będąc całkiem zawiſłé od funkcyi w ich zrownania wchodzących, mieć powinny naprzód ten ſam podział, który ſłuży funkcyom, i takie właſnosci, iakich w zrównaniach ich, funkcye wyciągaią. We wſzyſtkich dotąd uwagach naſzych ſame zrownania i funkcye Algebraiczne były zrzodłem wyłożonych właſnosci na linie krzywe: gdzie ſama natura Rozciągłosci (*Extenſio*) położyła granice badaniom naſzym; ponieważ ſtanąć muſieliśmy na zrównaniach nieoznaczonych między trzema odmiennemi ilościami, dla tego, że każda z nich potrzebuiąc innego wymiaru, nie mamy w naturze więcey wymiarów nad trzy, które wſpół-uſzykowane zabrały. Zoſtaie nam ieſzcze poznać linie krzywe wyrazone zrównaniem, w które funkcye przeſtępne wchodzą. Dwa ſą rodzaie funkcyi przeſtępnych, któreśmy w drugiey części wyłożyli, to ieſt Logarytmy i Łuki kół. Każdy z nich ma tę ogólną cechę, że do rozwiązania zrównania takową funkcyą zawieraiącego, potrzebuiemy działań cale różnych od działań algebraicznych; że wartości czyli pierwiaſtki takowych zrównań zawiſły iſtotnie od ſzeregów nieſkończonych których zrównaniem algebraicznem ogarnąć nie podobna. Ten oſtatni charakter ieſt iſtotnieyſzy od pierwſzego, bo do funkcyi algebraicznych możemy działań użyć przeſtępnych, które cale natury funkcyi nie zamienią. Wſzakże Teorya granic w Rozd. III. wyłożona, ieſt działaniem przeſtępnym; która przecie ani zrównań ani linii krzywych tam wyłożonych nie uczyniła przeſtępnemi: i cała Matematyka wyżſza używaiąc takowych działań na funkcye nawet Algebraiczne, wzięła imie Geometryi przeſtępney, lubo funkcye takowemi działaniami w ſwey naturze zoſtawia nienaruſzone co do teraźnieyſzego podziału.

Wſzyſtkie funkcye maiące albo ilość odmienną, albo niewymierną rzetelną za wykładnika, zawiſły od Logarytmów; tak, iak funkcye z wykładnikami uroionemi zawiſły od łuków koła: pierwſze wyrażaią ſię zrównaniem $y=a^x$ albo ogólniey $y=Aa^{x:ſ}$; drugie zrównaniem $y=Ł.Wſt.x$ albo $y=Ł.Doſt.x$, albo $y=Ł.Wſt.l.x$, gdzie $Ł$ znaczy łuk koła, $l.$ logarytm, podług §§. 48. 51. Alg. Mogą ieſzcze znaydować ſię zrównania inne przeſtępne, których przez Algebrę nie bylibyśmy w ſtanie poznać, i dla tego ie do inney nauki odkładamy. Uważmy naprzód iakie właſności mieć powinna linia krzywa wyrażona zrównaniem $y=a^x$. Nadaiąc ciągle x wartości dodatne, y rośnie, i nigdy nie przeſtaie bydź dodatnem i rzetelnem; kładąc znowu za x, wſzyſtkie wartości odiemne całkie, y coraz barziey ubywa, ale nie przeſtaie bydź ieſzcze rzetelnem i odmiennem, to ieſt:

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ---\ m\ ----$$

na $$y=1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ ---\ a^m\ ---$$

$$-1,$$

$-1,\ -2,\ -3,\ -4\ \ .\ .\ -m$

$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3};\ \frac{1}{a^4}\ \ \ \ \ \frac{1}{a^m}.$

więc linia krzywa wyrażona zrównaniem $y=a^x$ z iedney ſtrony początku odcinków A na fig. 51, powinna roſnąć w przyſtawach bez końca; z drugiey ſtrony powinna bez końca ubywać; a przeto oś QC, ieſt iey ledwo-nieſtyczną. Cała zaś ta linia leżyć będzie nad osią, gdzie mieyſce przyſtaw dodatnych przypada. Kiedy x równie rośnie lub ubywa, przyſtawy ſobie przyległe maią ten ſam nieodmienny ſtóſunek, i kiedy odcinki wzraſtaią lub ubywaią przez poſtęp Arytmetyczny, przyſtawy roſną lub ubywaią przez poſtęp Geometryczny: a przeto odcinki ſą logarytmami przyſtaw; każda przyſtawa ieſt śrzednią proporcyonalną między dwiema odcinkami iey przyległemi, i równo od niey odległemi. Linia krzywa na fig. 51. tém ieſt naprzód znakomita, że maiąc iednę ledwo-nieſtyczną, ma tylko iednę nieſkończoną odnogę: kiedy w liniach Algebraicznych każda ledwo-nieſtyczna miała dwie odnogi bez końca ſię ciągnące. Tu widzemy oczywiście, że na przyſtawę zero, odpowiada odcinek nieſkończony odiemny; tak iak na przyſtawę nieſkończoną dodatną, odcinek nieſkończony dodatny; i z iedney ſtrony linia krzywą zbliżą ſię do oſi, z drugiey ſtrony od niey ſię bez końca oddala. Aże podług wyłożonych dopiero właſności $AP=log.PM=log.(1.PM)=log.1+log.PM$: dowiedliśmy zaś pod §. 55. Algeb. że iedność ma nieſkończoną liczbę logarytmów, s których tylko ieden o ieſt rzetelny, a wſzyſtkie uroione; więc każdemu odcinkowi będzie odpowiadać nieſkończona liczba przyſtaw, s których iedna ieſt tylko rzetelna, a wſzyſtkie inne uroione: to ieſt, linia krzywa nie będzie tylko w iednem mieyſcu od przyſtawy przeciętą. Ieżeli iednak za x brać będziemy ułomki z mianownikami parzyſtemi n.p. $x=\frac{3}{2}$, będzie

Fig. 51.

$y=\sqrt{a^3}$; znak pierwiaſtkowy maiąc koniecznie dwa znaki ± do ſiebie przywiązane, pokazuie ieſteſtwo przyſtaw w linii krzywey pod osią PQ, te atoli dwoiſte przyſtawy nie wypadaiąc na każdą wartość x, nie uczynią pod PQ odnogi ciągłey, ale tylko zoſtawią punkta oderwane pod osią. Będzie więc linia krzywa miała znaczną liczbę punktów pod CQ od ſiebie cale oddzielnych i oderwanych, które żadnego łuku ciągłego linii krzywey nie złożą: co ieſt znowu ſzczególnieyſzą właſnością, iakieyśmy w żadney linii Algebraiczney nie doſtrzegli.

Chcąc prowadzić ſtyczną do iakiegokolwiek punktu M tey linii krzywey, potrzeba nam znaleśdź podſtyczną PT, użyimy do tego ſpoſobu podanego w §. XXI: w zrównanie naprzód na linią krzywą $y=a^x$ czyli $log.y=x.log.a$, połóżmy p za x, q za y; otrzymamy $l.q=p.log.a$: powtóre $x=p+t$, $y=q+u$; wypadnie $l.(q+u)=(p+t)l.a$ - - $l.(q+u)-l.q=(p+t)l.a-p.l.a$, czyli $l.(\frac{q+u}{q})=t.l.a$; $1+\frac{u}{q}=a^t$. Aże dowiedliśmy w Algebrze pod §. 49. w zrównaniu (A), że $a^t=1+kt+\frac{k^2t^2}{1.2}+\frac{k^3t^3}{1.2.3}+$ i t.d. więc $\frac{u}{q}=kt+\frac{k^2t^2}{1.2}+\frac{k^3t^3}{1.2.3}+$ i t. d. - - - (ψ). odrzuciwſzy wſzyſtkie potęgi wyżſze t, i porównawſzy (ψ) z (λ) w §. XXI; mamy $A=k$, $B=-\frac{1}{q}$, $PT=-\frac{Bq}{A}=\frac{1}{k}$; aże $\frac{1}{k}$ w §. 49. Alg. ieſt liczbą nazwaną *zamiennikiem*, ſłużącą do przerobienia logarytmow iednego układu na drugi; więc w linii krzywey teraźnieyſzey, którą nazywaią LOGARYTMICZNĄ (*Curva Logarithmica*) Podſtyczna ieſt linią nieodmienną, równą właśnie tey liczbie, od którey każdy układ Logarytmów zależy. I tak podſtyczna w Logarytmach

garytmach

garytmach Briggiuſza ieſt *0,4342944819* i t.d. w Logarytmach zaś hyperbolicznych taż podſtyczna równa ieſt iedności. I tać to ieſt naygłównieyſza własność linii Logarytmiczney: że w niey podſtyczna będąc nieodmienną, ieſt razem LINIĄ RÓWNANIA *(Perameter)* iednego układu Logarytmów z drugim.

§. XXXII.

Linie krzywe przeſtępne zawiſłe od łuków koła.

Drugi rodzáy linii krzywych przeſtępnych zawiſł od łuków koła: na który obierzmy ſobie za przykład zrównanie náyprościeyſze $y=m\text{Ł.}W\text{ſt.}x$, gdzie przyſtawa ieſt proporcyonalna łukowi maiącemu $W\text{ſt.}x$; aże wiemy z §. 52. Algebry, że $W\text{ſt.}x$ ma nieſkończoną liczbę łuków do których należy, będzie także y miało nieſkończoną liczbę wartości, i linia krzywa takiem zrównaniem opiſana będzie w nieſkończoney liczbie punktów przecięta od linii proſtey. Niech będzie u náymnieyſzy takowy łuk, którego wſtawa x, P niech wyraża pół-obwodu koła; wiemy z §. 52. Algebry że do wſtawy x należą łuki,

u, $P-u$, $2P+u$, $3P-u$, $4P+u$, $5P-u$ - - -
$-P-u$, $-2P+u$, $-3P-u$, $-4P+u$, + i t. d. - - -

$2nP+u$, $(2n+1)P-u$
$-2nP+u$ $-(2n+1)P-u$

Przypatrzmy ſię ſkładni takiego zrównania, s którego mamy proporcyą; $1:m=\text{Ł.}W\text{ſt.}x:y$, to ieſt odryſowawſzy koło na fig. 54. którego promień $AB=1$, i wziawſzy $AP=x$, będzie $EF=\text{Ł.}W\text{ſt.}x$, będzie $1:m=EF:PM$, ale oprócz tego będą proporcye $1:m=P-EF:PM'$ - - $1:m=2P+EF:PM''$ i t. d. to ſamo wypadnie nam na przeciwney ſtronie śrzednicy BC, i linia krzywa opiſana zrównaniem $y=m.\text{Ł.}W\text{ſt.}x$ rościągnie ſię w nieſkończoną odległość z obydwóch ſtron śrzednicy BC, i przyſtawa y mieć będzie wartości bez końca: każda więc linia proſta równo-legła linii BC, będzie śrzednicą linii krzywey; co ieſt właſnością ſzczególnie liniom krzywym przeſtępnym ſłużącą. To cośmy dopiero widzieli na linią krzywą

Fig. 54.

zamkniętą w zrównaniu $y=m.Ł.Wſt.x$, ſłuży na linią krzywą $y=m.Ł.Doſt.x$, $y=m.Ł.Sty.x$, $y=m.Ł.Siec.x$ i t.d. położywſzy bowiem $x=\frac{1}{2}P-z$, będzie $Wſt.x=Doſt.z$, $y=m.Ł.Doſt.z$, które ieſt tego ſamego wzoru co $y=m.Ł.Wſt.x$. Wſzyſtkie zaś inne linie Trygonometryczne ſą funkcyami Wſtaw i Doſtaw.

Do tego rodzaiu należą linie krzywe, które nazwano KOŁOWE (*Cycloides*, *Trochoides*), i linie SLIMAKOWE (*Spirales*): pierwſze maią ſwoie nazwiſko od koła będąc opiſane od punktu na iego obwodzie położonego: drugie od ſwey figury podobney do ſkorupy ślimaka. Włáſności takowych linii krzywych ſą barzo rozległego w Mechanice użycia, do których wyłożenia potrzebuiemy wyżſzey teoryi nad tę, którą nam Algebra tłómaczy. Oprócz tego rozmaite gatunki tych linii krzywych wypadaią z rożnego prawa biegu, które punktowi opiſuiącemu nadaiemy, a przeto podpadać ieſzcze nie mogą w tém dziele naſzym uwagóm. Zebyśmy ſobie iednak potrafili wyſtawić obraz takowego rodzaiu linii namieniemy przynaymniey o nich, ile nam teraźnieyſze pozwolą
Fig. 55. początki. Wyſtawmy ſobie na fig. 55. że koło CMB toczy ſię po linii proſtey BP', w tym obrocie punkt A śrzednicy przedłużoney, kiedy ta zoſtanie nieodmienną, opiſze linią krzywą AFA', którą nazwano KOŁOWĄ (*Cyclois*), iakaż będzie natura tey linii? Widziemy oczywiście że obwód koła tocząc ſię po linii proſtey BP' rozwinie ſię na nię, czyli obwód koła będzie równy całey linii proſtey prowadzoney od B aż do tego punktu, gdzie po obrocie ſkończonym punkt B powtórnie padnie na BP', i każdy łuk koła równy będzie tey części, po którey ſię przetoczył. Ieżeli więc łuk $B'G$ przetoczył ſię przez linią BG, nazwawſzy łuk $B'G$, z, będzie $z=BG$, a że ten łuk ieſt miarą kąta $B'S'G$, więc kąt $B'S'G=\frac{z}{a}$; gdzie a wyraża promień $S'G=SB$, przeto kąt $GS'A'=150^\circ-\frac{z}{a}$,

$-\frac{z}{a}$; nazwiymy $S'A' = SA = b$, będzie $A'Q = b.\text{Wſt}.\frac{z}{a}$, $S'Q = -b.\text{Doſt}.\frac{z}{a}$, $AP = x$, $PA = y$, mámy $y = z + b\text{Wſt}.\frac{z}{a}$, $x = b - b.\text{Doſt}.\frac{z}{a}$, czyli $b.\text{Doſt}\frac{z}{a} = b - x$, potrzeba nám za pomocą oſtatniego zrównania wyrazić z przez x, abyśmy y wyrazili przez x: $\text{Doſt}.\frac{z}{a} = 1 - \frac{x}{b}$ - - więc $\text{Wſt}.\frac{z}{a} = \frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b}$, a przeto $z = a.\text{Ł}.\text{Wſt}.\frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b}$, włożywſzy té wártości w zrównanie $y = z + b.\text{Wſt}.\frac{z}{a}$; otrzymamy na linią kołową:

$$y = \sqrt{(2bx - x^2)} + a.\text{Ł}.\text{Wſt}.\frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b} \quad - - (\alpha).$$

albo rachuiąc odcinki od środka S, i biorąc $t = b - x$, $b^2 - t^2 = 2bx - x^2$.

$$y = \sqrt{(b^2 - t^2)} + a.\text{Ł}.\text{Doſt}.\frac{t}{b} \quad - - - (\beta).$$

ponieważ $\text{Doſt}.\frac{t}{b}$ ma nieſkończoną liczbę łuków; y má nieſkończoną liczbę wártości, które ſobie łatwo wyobrażemy, uważaiąc linią proſtą BP' pociągnioną w odległość nieſkóńczoną, i po niey toczące ſię bez końca koło CMB, które opiſze ſwym obrotem nieſkończoną liczbę Cykloid ſobie przyległych, zamkniętą w zrównaniu (β). Ieżeli położemy $b = a$, iuż nie punkt A, ale punkt C będzie punktem opiſuiącym, ſkąd wypadnie linia kołowá krótſza. Różne gatunki tey linii krzywey wyniknąć mogą z różney wielkości linii SA, albo z różnego obrotu koła CMB, które ſię nazywa KOŁEM RODZĄCYM (*Circulus generator*),

rator), tocząc n.p. koło po obwodzie innego koła, albo po odnodze inney iakiey linii krzywey, otrzymamy różne figury linii krzywey ſtąd zrodzoney, których uwaga, że ieſt nadto zawikłana dla rachunku algebraicznego, odkładamy ią do Mechaniki, gdzie nam ſię pokaże użycie iey w zegarach. Przyſtąpmy iuż do uważania drugiego rodzaiu linii przeſtępnych zawiſłych od łuków koła.

Fig. 56. Na fig. 56. pomyślmy ſobie, że punkt B promienia SB obraca ſię około śrzodka S biegiem iednoſtaynym, i opiſuie obwód koła $BANB$, kiedy zaś promień SB zaczyna taki obrot, wyſtawmy ſobie, że w tym ſamym czaſie punkt ruchomy z śrzodka S bieży po promieniu SB, s taką ſamą chyżością, z iaką ſię promień opiſuiący obwód koła obraca; i kiedy punkt B opiſze obwód koła, punkt wychodzący z śrzodka S przeydzie przez promień cały SB, w tym dwoiakim biegu punkt wychodzący z śrzodka opiſze linią krzywą SMB, którą nazwano SLIMAKOWĄ ARCHIMEDESA *(Spiralis Archimedea)*, dla tego, że ią Archimedes naprzód w oſobney xiążce uważał. Ponieważ w tym ſamym czaſie punkt śrzodkowy obieży promień, kiedy punkt B obieży obwód koła; przypuśćmy, że punkt śrzodkowy przebiegł linią SM, kiedy punkt B opiſał łuk BAN, nazwawſzy $SM=z$, $SB=a$, łuk $BAN=s$, obwód cały koła $=P'a$; będzie - - $a:z=P'a:s$, czyli $s=P'z$, zrównanie na linią ślimakową. W niem $z=SM$, ieſt funkcya łuku s, czyli kąta tym łukiem zawartego; a że bydź może nieſkończona liczba kątów odpowiadaiacych temu ſamemu położeniu linii SM względem AB; z ma nieſkończoną liczbę wartości, i linia ślimakowa ma nieſkończoną liczbę zakrętów i wirów, w których ſię rościąga z obydwóch ſtron śrzodka bez końca. Wprowadzaiąc różne ſtóſunki między chyżością punktu bieżącego po promieniu, i chyżością punktu idącego po obwodzie koła, wypadną różne wzory zrównań wyrażaiące różne gatunki linii ślimakowych, które

będziemy

będziemy dopiero w ſtanie w wyżſzych Matematyki częściach uważać. Tu łatwo nam poznać przyczynę dla czego linie krzywe przeſtępne nazwano mechanicznemi: wyciągaią ſię bowiem ich własności s praw biegu punktowi opiſuiącemu nadanych, które raczey do Mechaniki niż do Geometryi należą.

Krótki wykład całego dziełá, s którego ſię opis Algebry wyciągá.

Uczyńmy ſobie teraz obraz ogólny całey nauki z łańcucha prawd w tem dziele przebieżonych. Uważaiąc ſpoſób poznawania umyſłowi naſzemu zoſtawiony, i ten do natury ilości ſtóſuiąc, trafiliśmy na ięzyk proſty i ogólny do wyrażania różnych ſtanów i związków ilości. Aże te związki wypadaią s pewnych ſtóſunków rzeczy, które rozum doſtrzega; weszliśmy w poznanie ogólne zagadnień, które ſię mogą uwadze naſzey nadarzyć, i w poznanie potrzeb rozumu do rozwiązania takowych zagadnień; a znoſząc pierwſze z drugiemi, odkryliśmy naygłownieyſzy podział zrównań na oznaczone, i nieoznaczone. Widzieliśmy, że pierwſze ſą wyſtarczaiące do odkrycia prawdy, byleby znaleśdź prawidła na oddzielenie rzeczy nieznaney zawikłaney między znane, s któremi ſię w zrównaniu wiąże: ſzukaliśmy takowych prawideł, łącząc razem uwagę różnych wyrazów ilości, czyli ſunkcyi wchodzących w takowe zrównania i onym różne nadaiących nazwiſka. I to było rzeczą pierwſzego Tomu.

Zrównania nieoznaczone wyrażaiąc wartości wielu nieznanych od ſiebie ſpólnie zawiſłych, poddały nam ſpoſób poznawania odmian iednych ilości przez odmianę drugich, i zrodziły całą Geometryą linii krzywych. Biorąc iednę s takowych odmiennych ilości za główną, przywodziliśmy zrównania niby do rodzaiu oznaczonych, gdzie nam łatwo było ogólne prawidła w pierwſzym Tomie wyłożone ſtóſować do zrównań teraźnieyſzych, i z nich wyciągać linii krzywych własności i podziały. Uważaiąc wſzyſtkie odmiany zachodzić mogące w ilościach, doſtrzegliśmy, że te odmiany kończyć ſię mogą, albo też ciągnąc gnąć bezprzeſtannie: ten oſtatni rodzay odmiany ſkazał nam pewne granice, do których ſię ilości wzraſtaiąc lub ubywaiąc zbliżaią, a w niektórych przykładach linii krzywych naprowadził nas na pierwſze początki całey Matematyki wyżſzey. Rachunek więc Algebraiczny *ieſt ięzyk rozumowań o różnych ſtanach, związkach, i odmianach ſkończonych, ilości.* Potrzeba nam ieſzcze innego ięzyka do wyrażania rozumowań na odmiany ilości w ſwoich granicach: i takiem ieſt Rachunek Dyfferencyalny i Integralny, do któregośmy iuż krok w tym Tomie uczynili.

Koniec Drugiego Tomu.

BIBLIOTEKA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa

WYPIS

WYPIS

Materyi w drugim Tomie zawartych.

ROZDZIAŁ I.

Ilości i funkcye w zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia wchodzace wyrażaią ſię przez linie geometrzyczne: z różnych odmian tym ilościom lub funkcyom nadanych, tłomaczą ſię odmiany, które odpowiadaią liniom.

ROZDZIAŁ II.

Z uwag ogólnych nad zrównaniem 2go ſtopnia tłómaczą ſię właſności linii krzywych 2go porządku: wyciagaią ſię potem s ſzczególnych kondycyi gatunki tychże linii.

ROZDZIAŁ III.

Ilości odmienne zrównania nieoznaczonego odnoſzą ſię do oſtatnich granic ſwego wzroſtu lub ubywania: s pierwſzych granic tłómaczy ſię ſpoſób poznawania odnóg nieſkończonych i równania iednych linii krzywych z drugiemi; i z drugich granic wyciągaią ſię właſności odnóg ſkończonych, i ſpoſób równania wſzyſtkich linii krzywych s kołem.

§. 18.

ROZDZIAŁ IV.

O przecięciach linii krzywych od proſtych lub innych krzywych; i właſnościach od tych przecięć zawiſłych.

ROZDZIAŁ V.

Tłomaczą ſię powierzchnie ciał przez zrównania nieoznaczone między trzema odmiennemi ilościami.

Linie

ROZDZIAŁ VI.

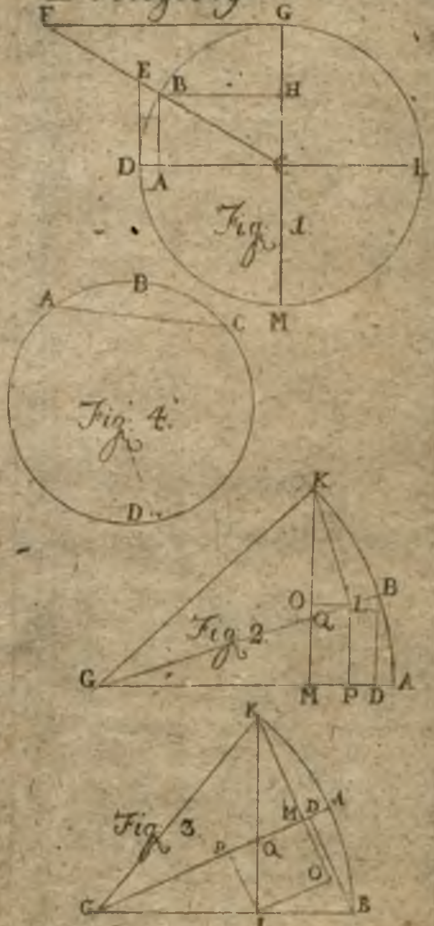
Właſności linii krzywych PRZESTĘPNYCH i ich znakomitſze gatunki.

* * *

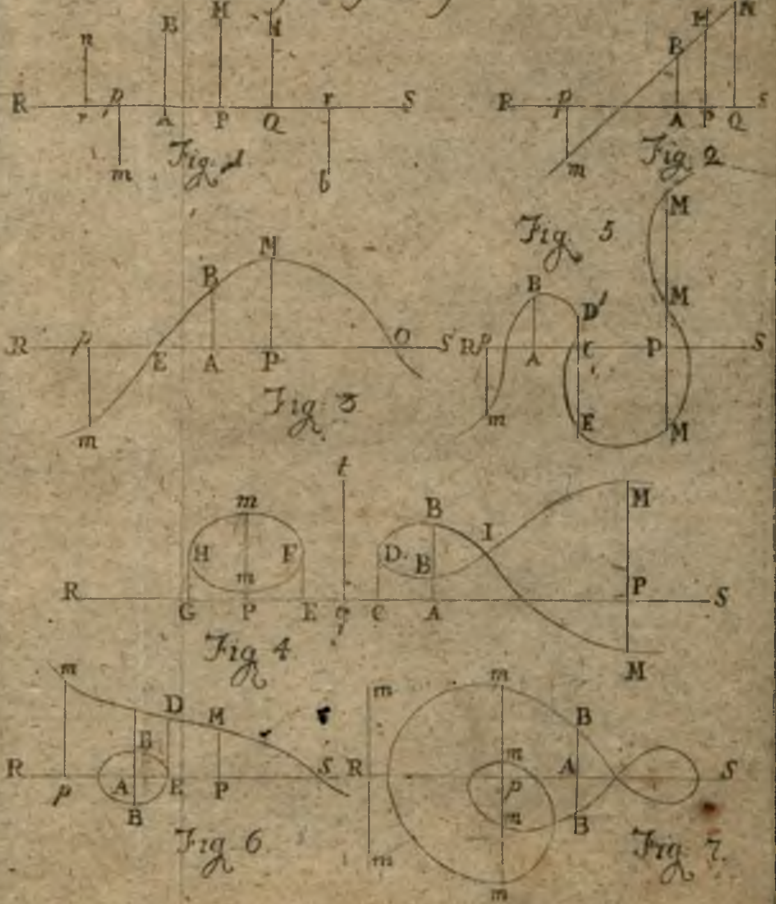
B.
P.W.

Tablica I

Do Algebry



Do Geometryi Wyzszey



Tablica 2.

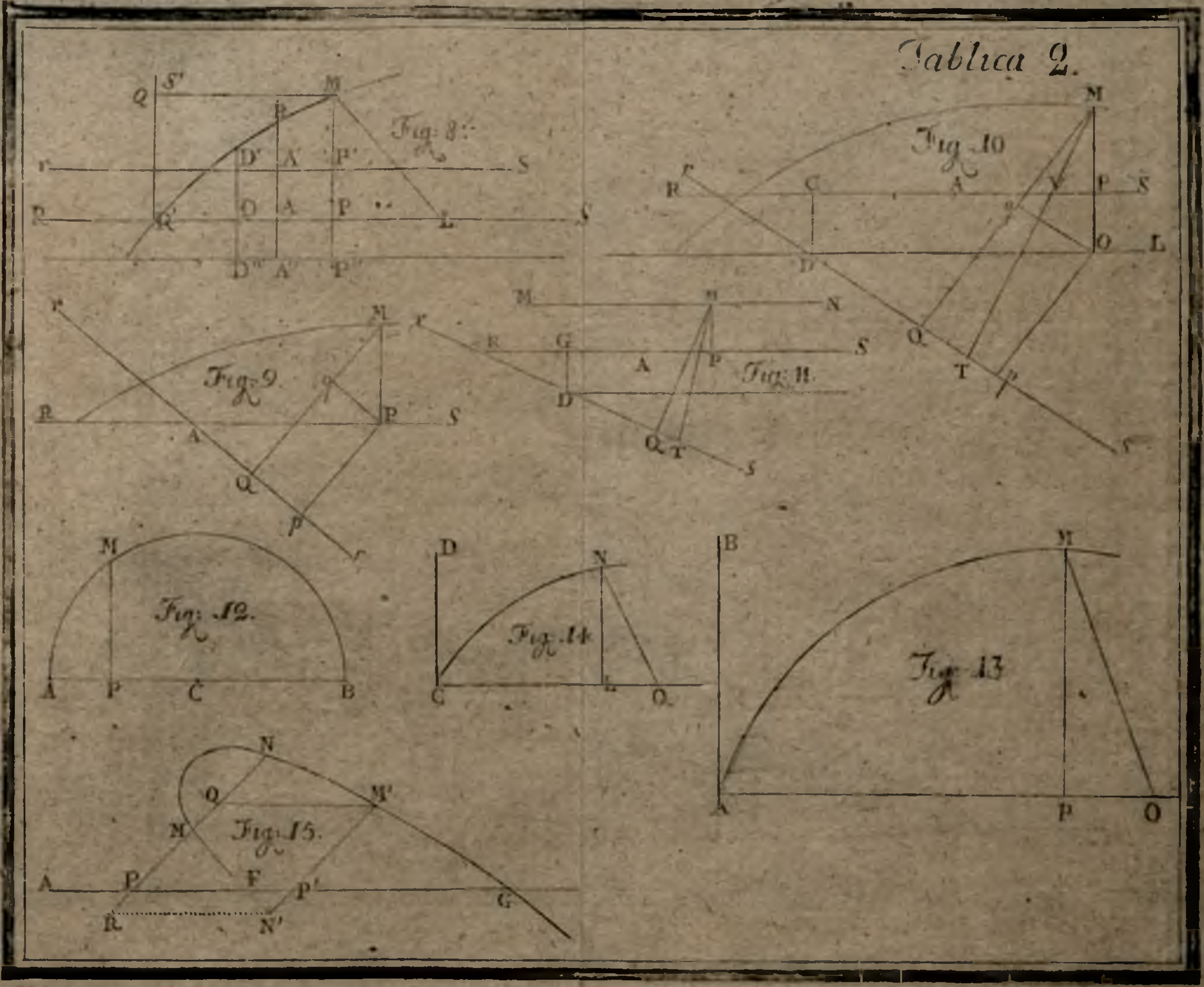


Fig. 8.
Q
S'
M
R
D'
A'
P'
r
S
O
A
P
L
C
Q'
D''
A''
P''
Fig. 10
M
r
R
C
A
V
P
S
D'
O
L
Q
T
p
s
Fig. 11
M
N
r
R
G
S
A
P
D
Q
T
s
Fig. 9
r
M
R
A
P
S
Q
p
s
Fig. 12.
M
A
P
C
B
Fig. 14
D
N
G
L
O
Fig. 13
B
M
A
P
O
Fig. 15.
N
Q
M'
M
A
P
F
P'
G
R
N'

Tabula 3

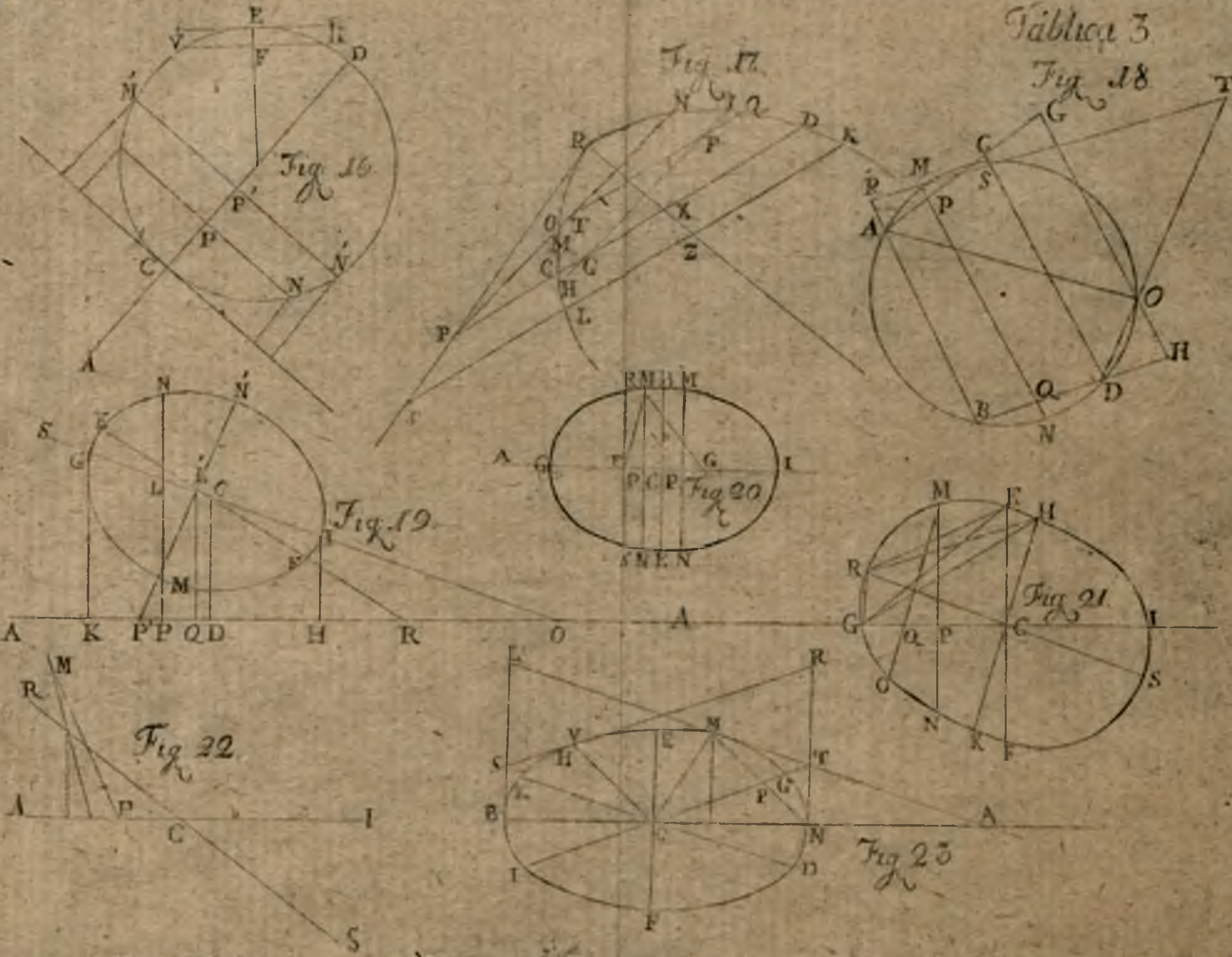


Fig 16
E
V
R
F
D
M
P
P
C
N
N
A
Fig 17
N
D
K
R
F
O
T
X
M
C
G
Z
H
L
P
Fig 18
T
G
C
M
S
R
P
A
O
H
Q
D
B
N
S
N
N
E
G
L
C
Fig 19
M
A
K
P
P
Q
D
H
R
O
A
R
M
H
M
A
G
G
I
P
C
P
Fig 20
S
N
E
N
M
F
H
R
Fig 21
G
Q
P
C
I
O
N
K
S
M
R
Fig 22
A
P
C
I
S
E
R
V
M
H
E
T
C
G
P
B
C
N
A
I
D
F
Fig 23

Táblica 4.

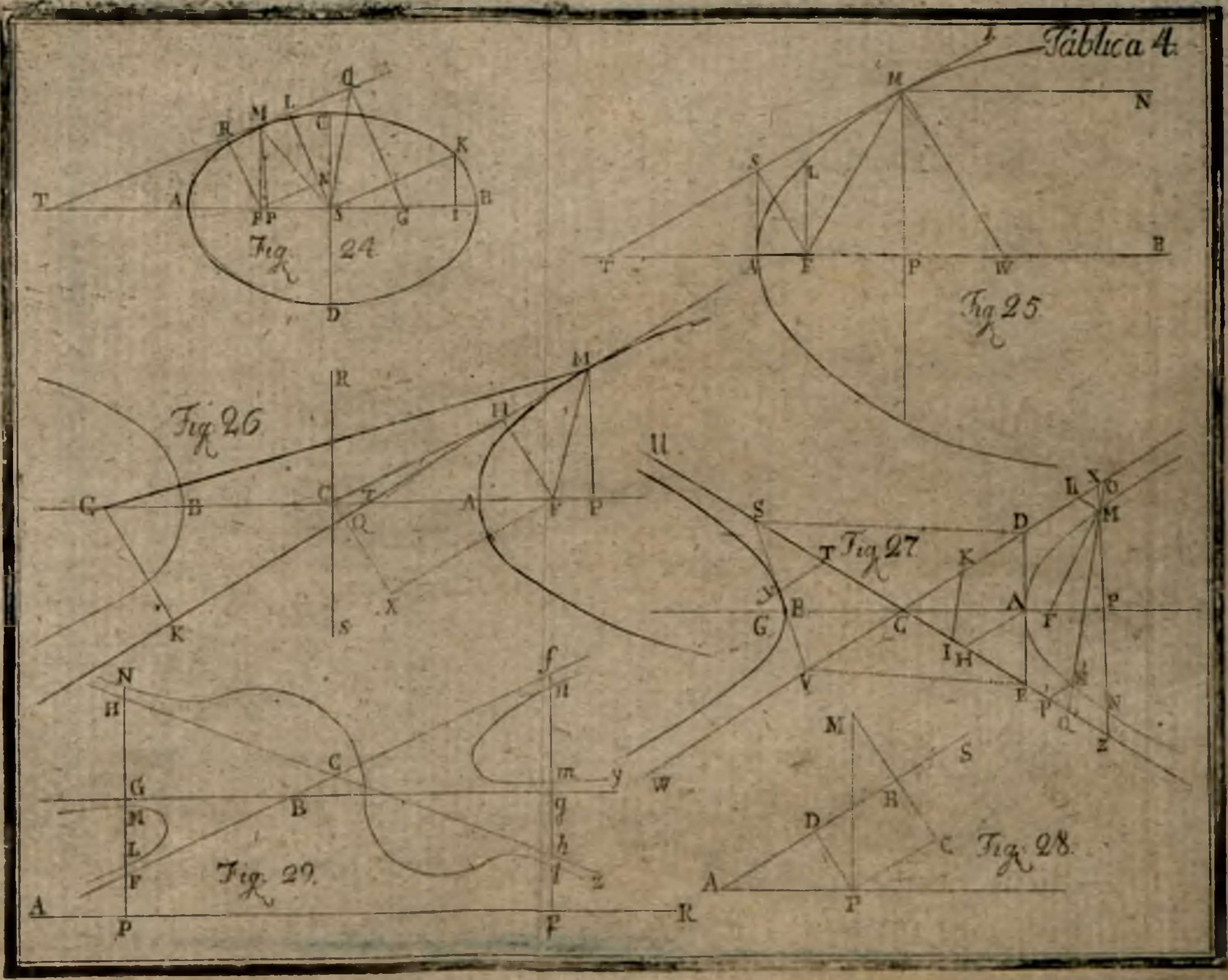


Fig. 24
T
A
R
M
L
Q
C
K
N
B
F
P
S
G
I
D
Fig. 25
I
M
N
S
L
T
A
F
P
W
B
Fig. 26
R
M
H
G
B
C
T
A
F
P
Q
X
K
S
Fig. 27
H
S
D
T
K
L
X
O
M
y
B
G
C
A
P
I
H
F
V
E
Q
N
Z
W
Fig. 28
M
S
R
D
C
A
P
Fig. 29
N
H
f
n
C
m
y
G
B
q
M
L
h
F
l
z
A
P
F
R

Táblica 5

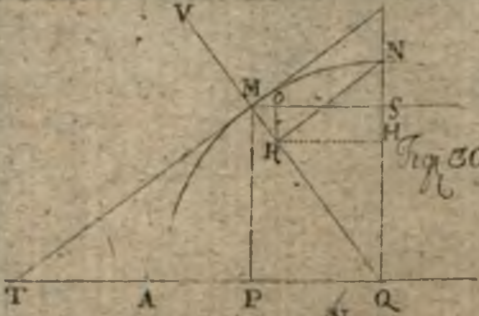


Fig. 30

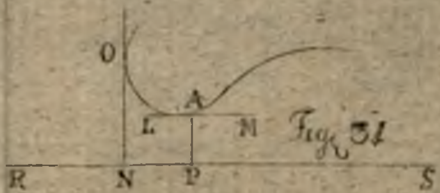


Fig. 31

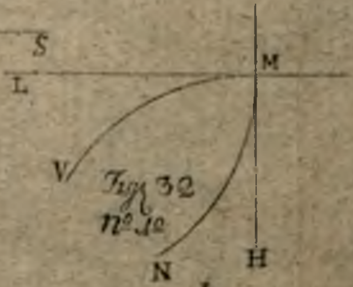


Fig. 32
nº 1º

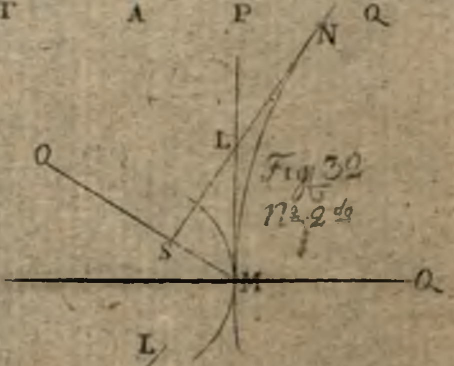


Fig. 32
nº 2do

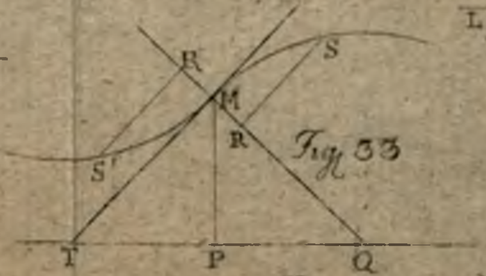


Fig. 33

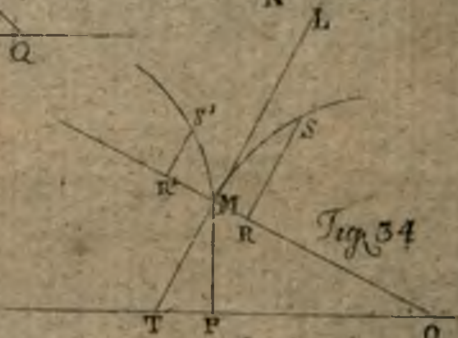


Fig. 34

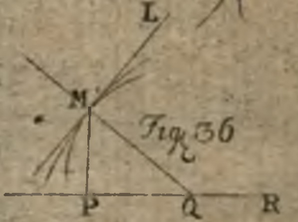


Fig. 36

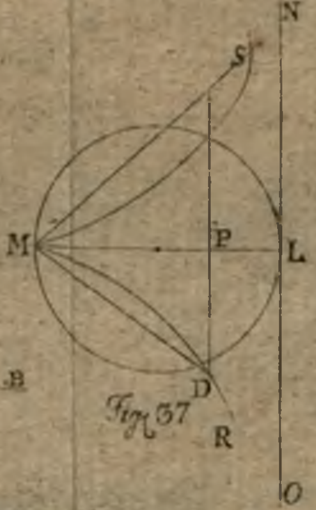


Fig. 37

Fig. 35

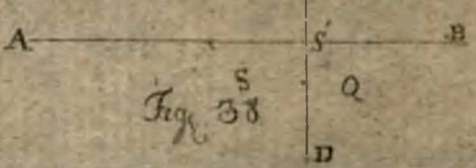


Fig. 38

Táblica 6.

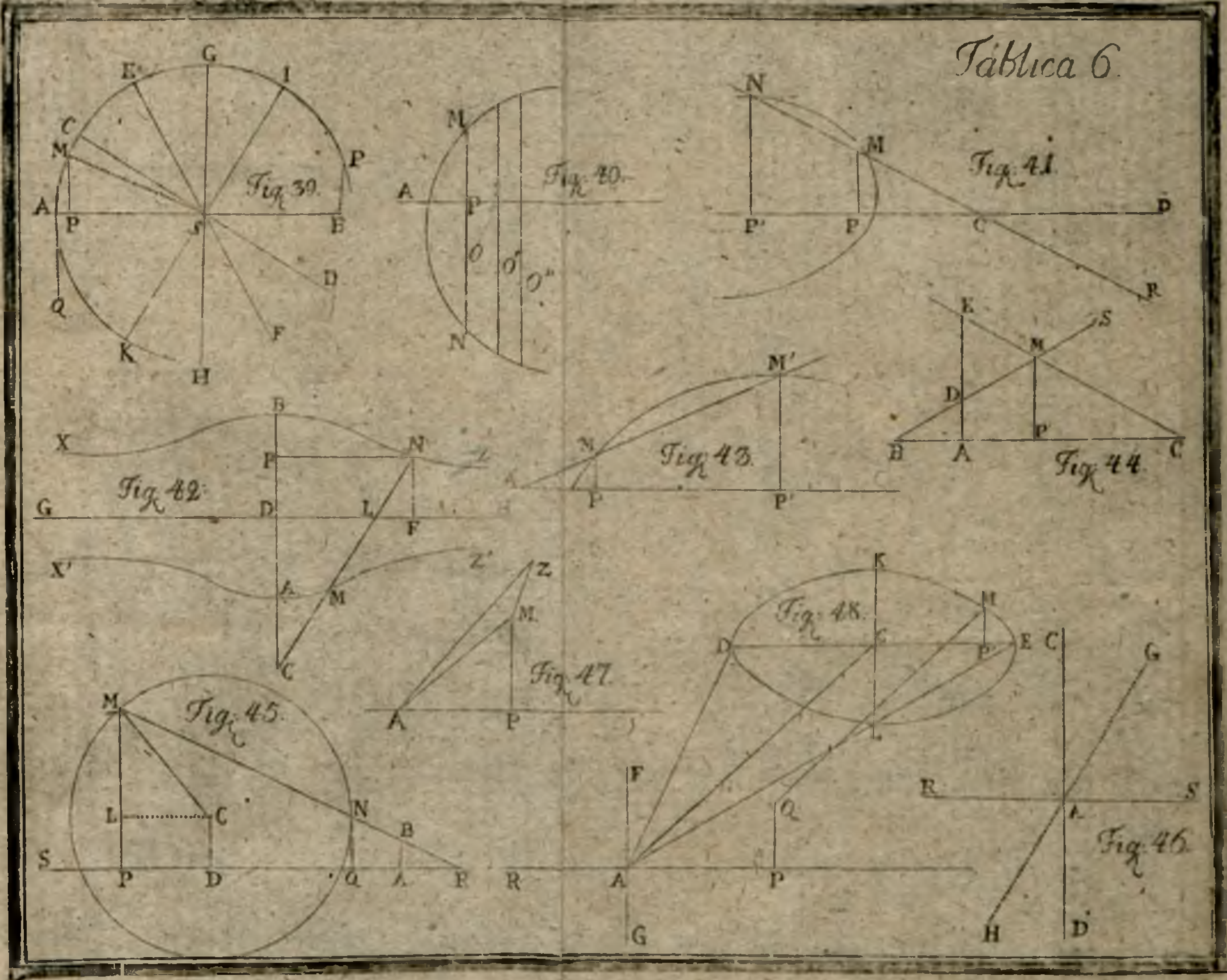


Fig. 39.
G
E
I
C
M
P
A
P
S
B
D
Q
K
H
F
Fig. 40.
M
A
P
O
O'
O''
N
Fig. 41.
N
M
P'
P
C
D
R
Fig. 42.
B
X
P
N
Z
G
D
L
F
X'
A
M
Z'
C
Fig. 43.
M'
N
A
P
P'
Fig. 44.
E
S
M
D
P
B
A
C
Fig. 45.
M
L
C
N
B
S
P
D
Q
A
R
Fig. 47.
Z
M
A
P
Fig. 48.
K
M
D
C
P
E
L
F
Q
R
A
P
G
Fig. 46.
C
G
R
S
A
H
D

Táblica 7

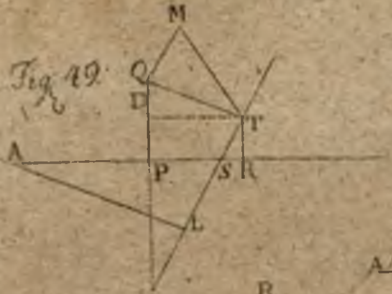


Fig. 49.

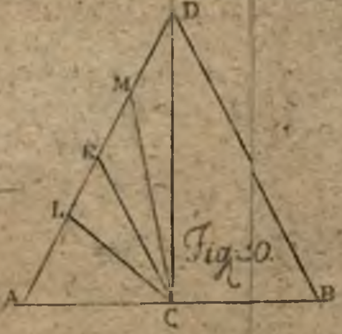


Fig. 50.

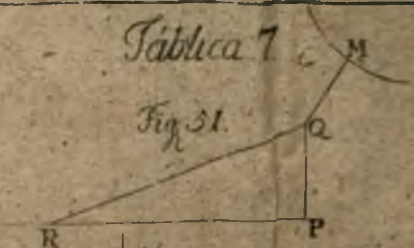


Fig. 51.

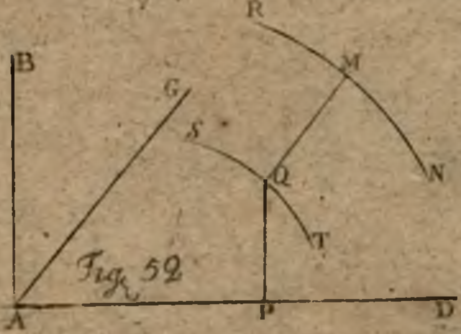


Fig. 52.

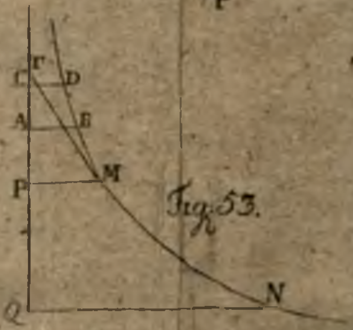


Fig. 53.

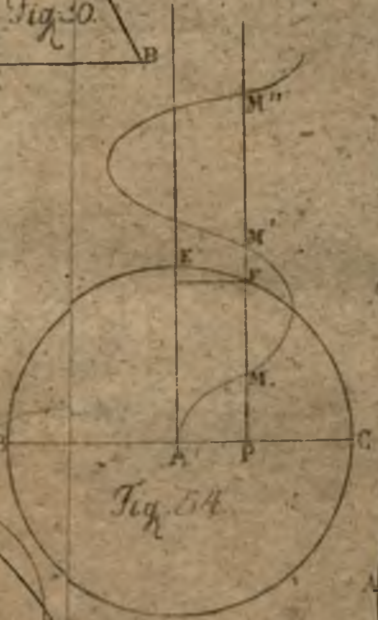


Fig. 54.

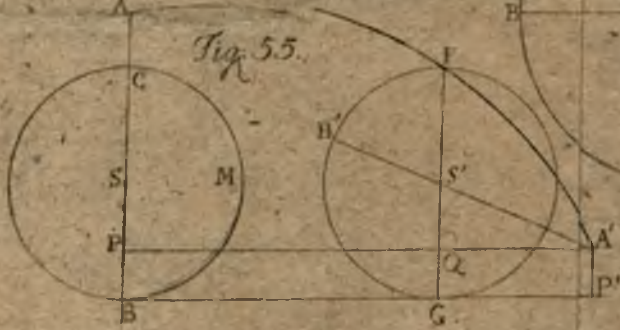


Fig. 55.


Fig. 56.