PERSPEKTYWA RZUTOWA

JAKO WYNIK

RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH

NA

PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.

PRZEZ

KAROLA MASZKOWSKIEGO

Profesora Akademii Technicznéj we Lwowie

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa d. 2 października 1873 r.).

Wyciąg z *Pamiętników Towarzystwa Nauk Ścisłych*, tom V, rok 1874.

PRZEDMOWA.

Z długoletniéj praktyki nauczycielskiéj przekonałem się, że dział Geometryi Wykreślnéj, który tu opracowałem, zdaje się najbardziéj, uczącemu się tych ćwiczeń, przyczyniać do przejrzenia przestrzeni i jéj utworów; gdyż wykreślenia metodą « perspektywy rzutowéj » wykonane, dają obrazy tych utworów w przestrzeni w formie dla oka daleko zrozumialszéj i do natury podobniejszéj, aniżeli rzuty prostokątne.

Konstrukcye, oparte na podstawach matematycznych tak samo jak konstrukcye rzutów prostokątnych, nie tylko że nie są trudniejsze ani zawilsze, lecz owszém, przy wynajdywaniu przecięć, przenikań, cieniów i t. p., są one bardzo często łatwiejsze i prostsze.

Chcąc więc z jednéj strony przyczynić się do rozpowszechnienia téj metody, dla technika tak ważnéj, umiejętnie interesującéj i mało znanéj, a z drugiéj, przyczynić się do wzbogacenia literatury naszéj ojczystéj, która, jakkolwiek szczyci się dziełami znakomitemi z Geometryi Wykreślnéj, w tym kierunku jednak nic nie posiada, skreśliłem ten *Kurs Perspektywy rzutowéj*, ułożywszy systematycznie, za pomocą téj metody, rozwiązanie zagadnień z pola Geometryi Wykreślnéj.

W przypuszczeniu, że czytelnik przynajmniéj w ogólnych zarysach jest obeznany z metodą rzutów prostokątnych (orthogonalnych), jak niemniéj z Planimetryą i Stereometryą, udowadniam tylko to, czego natura rzeczy koniecznie wymaga, zostawiając dowodzenie innych twierdzeń czytelnikowi. To pozwoliło mi ograniczyć się na małéj liczbie stronic, na których zebrałem dość obfity materyał.

Do użycia nazwy *perspektywa rzutowa* skłoniło mnie: 1° to, iż obrazy ciał wykonane za pomocą téj metody wiele podobieństwa mają do obrazów perspektywicznych, a 2°, że ta metoda rzeczywiście zasadza się na rzutach prostokątnych. Co do innych wyrazów, jak *tło*, *podstawa* i t. p., użyłem ich dlatego, że lepszych i prostszych wynaleźć nie byłem w stanie.

WSTĘP

Zadaniem Geometryi Wykreślnéj jest rysunkowe oznaczenie utworów znajdujących się w przestrzeni o tyle dokładne, by samo wykreślenie pozwoliło kształty ich odgadnąć, a niezawiłe konstrukcye rysunkowe zrobiły możliwém wyszukanie rzeczywistych rozmiarów tych utworów.

Temu zadaniu czynimy zadosyć, kreśląc zarysy utworów znajdujących się w przestrzeni, których ostateczną granicą jest punkt. Ostateczném więc zadaniem naszém będzie oznaczenie położenia punktu.

Położenie zaś punktu da się tylko wtedy oznaczyć, gdy znane jest miejsce, jakie on w przestrzeni zajmuje względem innych przedmiotów, których położenie jest znane.

Za przedmioty, względem których położenie danego punktu oznaczamy, służą nam trzy płaszczyzny *pod pewnymi kątami ku sobie nachylone*, z których jedna jest zarazem płaszczyzną rysunku.

Układ takich trzech płaszczyzn zowiemy układem *płaszczyzn rzutów*, gdyż spodki prostopadłych, wyprowadzonych z danego punktu na te trzy płaszczyzny zowiemy *rzutami* tegoż punktu.

Długości tych prostopadłych zawarte między punktem i każdym z jego rzutów dają odległości punktu od płaszczyzn rzutów.

Proste podług których przecinają się płaszczyzny rzutów zowiemy *osiami*.

§ 1

Przyjmujemy następujący układ płaszczyzn rzutów : ku pionowéj płaszczyznie T (fig. 1), zwanéj *tło*, nachyloną jest pod kątem φ płaszczyzna rzutów P, *podstawową* zwana; pod kątem prostym do tych dwóch płaszczyzn ustawiamy trzecią płaszczyznę K, tak zwaną *krzyżowa*. Tło z podstawą daje oś X, tło z krzyżową daje oś Z, a podstawa z krzyżową daje oś Y.

Obróciwszy cały układ tych płaszczyzn tak około osi Z, iżby K stanowiła płaszczyznę rysunkową, układ płaszczyzn rzutów i osi okaże się z fig. 2, gdzie oś Z jest zarazem tłem T, oś Y podstawą P, a wreszcie punkt a_x osią X ; kąt φ zawarty między osiami Z i Y jest rzeczywistém nachyleniem tła do podstawy.

Przyjąwszy taki układ płaszczyzn rzutów, oznaczamy miejsce punktu A (fig. 1) znajdującego się w przestrzeni, prowadząc przezeń Aa prostopadle do T, Aa' prostopadle do P, i Aa'' prostopadle do K, aż do spotkania się każdéj z tych prostopadłych z odpowiednią płaszczyzną rzutów. Kreśląc nadto z punktu a' prostą $a'\alpha$ prostapadłą do T, otrzymujemy na tle T punkt α jako rzut tłowy, czyli *perspektywę rzutową* rzutu podstawowego danego punktu A; na podstawie P punkt a' jako jego *rzut podstawowy;* na płaszczyznie krzyżowéj K, punkt a'' jako *rzut krzyżowy;* a wreszcie na tle punkt α jako *perspektywę rzutu podstawowego.*

Przesunięta przez Aa i Aa'' płaszczyzna Aaa_za''; będzie prostopadłą do T i K, zatém będzie ona prostopadłą do osi Z; przyczém Aa będzie równoległą do $a''a_z$; — Aa lub $a''a_z$ da nam odległość punktu A od tła — podobnież Aa'' będzie równoległą do aa_z, i każda z nich da nam odległość punktu A od płaszczyzny krzyżowéj K.

Przesunięta przez Aa' i Aa'' płaszczyzna A$a'a_ya''$ jest prostopadłą do podstawy i do płaszczyzny krzyżowéj, zatém jest ona prostopadłą do osi Y; a Aa' równoległa do $a''a_y$ da nam odległość punktu A od podstawy, $a'a_y$ równoległa do Aa'' da odległość punktu A od płaszczyzny krzyżowéj.

Przesunięta przez Aa i Aa' płaszczyzna A$a'a_xa$ będzie prostopadłą do tła i do podstawy, zatém będzie ona prostopadłą do osi X, a równoległą do K. Oa_x równoległa do a_ya' da nam, jako równoległa do Aa'', odległość punktu A od płaszczyzny krzyżowéj; Oa_y równoległa do a_xa' daje odległość rzutu podstawowego od osi X. Płaszczyzna A$a'a_xa$ prostopadła do osi X ma swój *ślad tłowy* (przecięcie się z tłem) w aa_x prostopadły do X; zatém punkt α musi leżeć na prostopadłéj poprowadzonéj z punktu a na oś X, ponieważ α jest śladem tłowym prostéj $a'\alpha$ równoległéj do Aa leżącej na tej płaszczyznie A$a'a_xa$.

Z powyższego dowodzenia wyprowadzić możemy prawo następujące: *perspektywa* (*) *a i perspektywa* α *rzutu podstawowego a' punktu* A *danego w przestrzeni, leżą zawsze na jednéj i téj saméj prostopadłéj do osi* X.

Dla ułatwienia czytelnikowi dodamy tutaj, iż w całym ciągu niniejszéj pracy używać będziemy zawsze do oznaczenia punktu znajdującego się w przestrzeni, głosek wielkich abecadła łacińskiego, do oznaczenia zaś rzutu tłowego czyli perspektywy tegoż punktu, tychże samych głosek małego abecadła; rzuty podstawowy i krzyżowy oznaczą się temiż samemi głoskami małemi z dodaniem jednéj, lub odpowiednio do potrzeby, dwóch kresek u góry; wreszcie perspektywę rzutu podstawowego oznaczać będziemy odpowiedniemi głoskami abecadła greckiego. Otóż, np. dla punktu M w przestrzeni, będzie oznaczać:

m jego perspektywę,

m' » rzut podstawowy,

m'' » » krzyżowy, a

μ perspektywę jego rzutu podstawowego.

Głoską φ raz na zawsze oznaczać będziemy kąt nachylenia płaszczyzny podstawowéj do tła.

Zadaniem więc naszém będzie: z perspektyw i z perspektyw rzutów podstawowych wyznaczyć stosunki, jakie zachodzić mogą w położeniu punktów, linij i t. d. znajdujących się w przestrzeni. Ku temu zaś niezbędny jest dowód, że położenia perspektywy i perspektywy rzutu podstawowego względem osi, wystarczą do oznaczenia miejsca, jakie punkt, oznaczony przez dwa rzuty, zajmuje w przestrzeni względem płaszczyzn rzutów, — jeżeli przytém kąt φ jest nam znany.

(*) Rozumie się samo przez się, że tu zawsze mowa o perspektywach *rzutowych.*

§ 2

Przyjąwszy a_x na osi X w odległości $0a_x$ równéj odległości danego punktu A (fig. 2) od płaszczyzny krzyżowéj, niech będą a i α dane. Wiemy że punkt A leży na prostopadłéj wyprowadzonéj z perspektywy a na tło, jako téż na prostéj poprowadzonéj z rzutu podstawowego a', prostopadle do podstawy. Przesunąwszy w myśli płaszczyznę krzyżową ku stronie lewéj tak, iżby oś Z przypadła na $a\alpha$, możemy zrobić kład jéj około téjże prostéj αa. W ten sposób otrzymamy prostą a_xY nachyloną pod kątem φ do aa_x; prosta ta będzie kładem śladu podstawowego przesuniętéj płaszczyzny krzyżowéj. Na téj prostéj a_xY leżeć będzie kład α'' rzutu podstawowego, który otrzymamy, kreśląc $\alpha\alpha''$ prostopadle do aa_x aż do przecięcia się z a_xY. Kreśląc an prostopadle do aa_x i $\alpha''m$ prostopadle do a_xY, otrzymamy dwie wspomniane prostopadłe do płaszczyzn rzutów (w kładzie), a w punkcie a'' jako w przecięciu się ich, kład żądanego punktu. Długość aa'' da nam odległość punktu A od tła, a długość $\alpha''a''$ odległość jego od podstawy. Widzimy zatém, że z danych a i α i kąta φ, odległości od trzech płaszczyzn rzutów punktu w przestrzeni leżącego (a zatém jego miejsce) dają się oznaczyć z całą ścisłością.

Idąc drogą wprost przeciwną poprzedzającéj, i biorąc pod uwagę wszystko, cośmy dopiero powiedzieli, przekonamy się, iż będziemy mogli z taką samą łatwością wynaleźć a i α punktu A, jeżeli tylko dane będą: jego odległość l od płaszczyzny krzyżowéj (na lewo), jego wzniesienie w (nad podstawą) i jego odległość g od tła (przed tłem) jako téż kąt φ.

Kreśląc (fig. 3) poziomą OX jako oś X, obieramy na niéj O za początek układu płaszczyzn rzutów. Odcinamy $0a_x = l$ na lewo od O i kreślimy a_xZ prostopadle do OX. Przez punkt a_x kreślimy a_xY pod kątem $90° - \varphi$ do osi X. Kreśląc następnie mn równolegle do a_xY w odstępie równym w, i pq równolegle do a_xZ w odstępie g, otrzymamy w przecięciu a'' tych dwóch prostych kład danego punktu. Kreśląc $a''a$ prostopadle do a_xZ, otrzymamy w punkcie a perspektywę, kreśląc zaś $a''\alpha''$ prostopadle do a_xY, otrzymamy α'' kład rzutu podstawowego, z którego $\alpha''\alpha$ równoległa do X, w przecięciu się z a_xZ w punkcie α da nam perspektywę rzutu podstawowego żądanego punktu A.

Początkujący powinien wszystkie przypadki położenia punktu w stosunku do płaszczyzn rzutów (przypadków tych jest ośm) sam narysować, gdyż to stanowi podstawę wszelkiego rysunku perspektywy rzutowéj i daje niezbędnie potrzebną ku temu wprawę.

Z powyższéj praktyki rysunkowéj okaże się, że jeżeli punkt A w przestrzeni leży za tłem i nad podstawą, jego a i α będą leżały nad osią X; jeżeli zaś punkt A leży przed tłem i pod podstawą, jego a i α leżeć będą poniżéj osi X. W każdém inném położeniu punktu A w przestrzeni względem tła i podstawy, nie można z góry powiedzieć czy jego a i α leżą nad, czy téż pod osią X.

Jeżeli punkt A (fig. 4) leży na tle, natenczas: on sam, jego perspektywa a i kład jego (biorąc aa_x prostopadłą do X za oś obrotową) przypadają w tym samym punkcie a. Chcąc wynaleźć perspektywę α jego rzutu podstawowego, rysujemy a_xY pod kątem φ do aa_x i wyprowadzamy na nią prostopadłę $a\alpha''$. α'' będzie kładem rzutu podstawowego, a kreśląc $\alpha\alpha''$ równolegle do X, otrzymamy perspektywę rzutu podstawowego na prostopadłéj aa_x do osi X.

Jeżeli punkt A leży na podstawie, natenczas jego perspektywa a i perspektywa α jego rzutu podstawowego będą tym samym punktem. Chcąc wynaleźć oddalenie punktu A od osi X i od tła, kreślimy (fig. 5) αa_x prostopadle do X, i a_xY pod kątem φ do téjże prostopadłéj; a przecinając tę ostatnią prostę linią $\alpha\alpha''$ równoległą do X, otrzymamy w punkcie α kład punktu danego. Długość αa_x będzie w tym przypadku oddaleniem punktu A od osi X, a długość $\alpha''\alpha$ oddaleniem danego punktu od tła.

Z figury 3, okazuje się, że:

$$a_x\alpha = a_x\alpha'' \cos\varphi \; ; \quad a_x\alpha'' = \frac{g - w\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$a_x a = w\sin\varphi - a_x\alpha''\cos\varphi = w\sin\varphi - (g - w\cos\varphi)\cot g\varphi,$$

$$a\alpha = w\sin\varphi.$$

§ 3

Dana w przestrzeni linia prosta l, ma na płaszczyznach rzuty proste, a zatém: tak jéj perspektywa l jako też jéj rzut podstawowy l' i perspektywa λ jéj rzutu podstawowego, będą również proste.

Do oznaczenia miejsca i kierunku danéj prostéj, dostateczném jest oznaczyć miejsce dwóch jéj punktów. Obierając więc na danéj prostéj L dwa punkta A i B, szukamy ich perspektywy a i b, również perspektywy α i β ich rzutów podstawowych, i otrzymamy (fig. 6) l (łącząc punkt a z punktem b) i $\alpha\beta$ jako perspektywę rzutu podstawowego danéj prostéj. Chcąc wynaleźć jakikolwiek punkt M téj prostéj, obieramy jego perspektywę m na l, a pionowo pod nim na λ perspektywę u jego rzutu podstawowego.

Wynaleźć kierunek l i λ danéj prostéj L, *która jest równoległą do tła a nachyloną do podstawy.*

Perspektywa l może mieć kierunek dowolny (fig. 7), ponieważ zaś L ma być równoległą do tła, więc odległość każdego z jéj punktów od tła będzie taż sama. Obierzmy na l dowolne dwa punkta a i b, i szukajmy (podług fig. 2) odpowiednich im α i β, jednakże tak, ażeby punkta dane przez a, α, i b, β miały od tła ten sam odstęp. Dlatego kreślimy aa'' równolegle do bb'' i dajemy im długość równą oddaleniu danéj prostéj L od tła, proste te będą równoległe do osi X, otrzymujemy zatém w a'' i b'' kłady dwóch punktów około prostych aa_x i bb_x prostopadłych do osi X. Chcąc wynaleźć α i β, kreślimy pod kątem $(90° - \varphi)$ do osi X dwie równoległe $a_x\alpha''$ i $b_x\beta''$ i prowadzimy na nie prostopadłe $a''\alpha''$ i $b''\beta''$. Punkta α'' i β'' są kładami rzutów podstawowych. Kreśląc zatém równolegle do X $\alpha''\alpha$ i $\beta''\beta$, aż do przecięcia się z pionami aa_x i bb_x, otrzymamy α i β, które połączone z sobą dają λ jako perspektywę rzutu podstawowego żądanéj prostéj.

Gdy zaś prosta jest daną przez l i λ, a chcemy znaleźć, czy ona jest równoległą do tła, musimy postępować odwrotną drogą, t. j. wynalazłszy (podług fig. 2) a'' i b'' jako kłady którychkolwiek dwóch punktów danéj prostéj, porównywamy aa'' i bb'' (odległości tych dwóch punktów od tła) między sobą. Jeżeli te dwie odległości są sobie równe, w takim razie będzie to dowodem, że prosta L dana przez l i λ jest równoległą do tła, gdyby przeciwnie te dwie odległości nie były równe, natenczas prosta L nie byłaby równoległą do tła.

Dana prosta L *jest równoległą do podstawy i dowolnie nachyloną do tła* (*fig.* 8); *jakie położenie będą miały l i λ?*

Jeśli prosta L jest równoległą do podstawy, to jéj rzut podstawowy l' jest równoległy do L. Te dwie proste równoległe L i l' rzucone na tło, dadzą rzuty również między sobą równoległe. Rzut tłowy prostéj L jest jéj perspektywą l; rzut zaś tłowy prostéj l' jest perspektywą λ rzutu podstawowego danéj prostéj L. Widzimy zatém, że jeżeli dana prosta jest równoległą do podstawy, w takim razie jéj perspektywa l jest równoległą do perspektywy λ jéj rzutu podstawowego.

Dana prosta L (*fig.* 9) *jest równoległą do osi* X.

Łatwo zrozumieć, że natenczas l będzie równoległą do λ i równoległą do X.

Prosta L (*fig.* 10) *jest prostopadłą do tła.*

W tym przypadku wszystkie jéj punkta rzucają się na tło w jeden punkt. Perspektywa l będzie więc punktem. Ponieważ zaś perspektywy rzutów podstawowych wszystkich punktów danéj prostéj muszą leżeć pionowo pod ich perspektywami, te ostatnie zaś przypadają w jednym punkcie, zatém λ będzie linią pionową, prostopadłą do osi X.

Prosta L (*fig.* 11) *jest prostopadłą do podstawy.*

Jeśli prosta L jest prostopadłą do podstawy, natenczas jéj rzut podstawowy l' jest punktem, a zatém i perspektywa λ tego rzutu jest także punktem. Perspektywa zaś l musi być prostą, prostopadłą do osi X, ponieważ perspektywa każdego punktu danéj prostéj znajduje swe miejsce pionowo nad λ.

Prosta L *jest prostopadłą do osi* X (*fig.* 12).

W tym przypadku prosta L jest zarazem równoległą do płasczyzny krzyżowéj; zatém wszystkie jéj punkta mają równą od téj płasczyzny odległość; zkąd wynika, że tak perspektywa l jako też i perspektywa λ jéj rzutu podstawowego, są prostopadłe do osi X i jedna jest przedłużeniem drugiéj.

Prosta L *leży na tle.*

Ta prosta L jest zarazem swą perspektywą l. Chcąc wynaleźć perspektywę λ jéj rzutu podstawowego, obierzemy na l dwa dowolne punkta a i b (wedle fig. 4) i wyznaczymy odpowiednie α i β.

Prosta leży na podstawie.

Ta prosta jest zarazem swoim rzutem podstawowym. Perspektywa l zatem i perspektywa λ rzutu podstawowego wypadną w tém samém miejscu.

Łatwo zrozumieć że l i λ prostéj L leżącéj na płasczyznie krzyżowéj, leżą na osi Z.

Wynaleźć prawdziwą długość i nachylenie ku osi X prostéj L *leżącéj na podstawie i danéj przez* λ, *któréj długość równa się* $\alpha\beta$ (*fig.* 13).

Około prostéj αa_x prostopadłéj do X szukamy (podług fig. 5) kładu α'' i takim samym sposobem około βb_x prostopadłéj do X, kładu β''. Długości $a_x\alpha''$ i $b_x\beta''$ dają oddalenie punktów A i B od osi X. Te oddalenia, kładąc podstawę około osi X na tło, będą do osi X prostopadłe; otrzymamy zatém punkta a', b' w tymże kładzie, odcinając $a_xd = a_x\alpha''$ i $b_xb' = b_x\beta''$. Połączenie tych dwóch punktów jest właśnie długością i kierunkiem linii AB, któréj perspektywa $\alpha\beta$ była już daną.

Uwaga I. — Prosta AB leżąca na podstawie i równoległa do osi X, będzie miała perspektywę $\alpha\beta$ równoległą do X tak długą jak AB.

Uwaga II. — Prosta AB prostopadła do osi X i leżąca na podstawie będzie miała prespektywę $\alpha\beta$ prostopadłą do X. Chcąc wynaleźć długość $\alpha\beta$ odpowiednią prawdziwéj długości odcinka AB, przesuwamy przez $\alpha\beta$ płasczyznę krzyżową i robimy jéj kład. W tym celu przedłużamy kierunek $\alpha\beta$ (fig.14) do punktu a_x na osi X, kreślimy przez a_x prostą y pod kątem φ, i odcinamy na téjże $\alpha''\beta''$ równe długości danéj AB. Z punktów α'' i β'' poprowadzone równoległe do osi X, dadzą nam α i β. $\alpha\beta$ będzie w perspektywie długością danego odcinku AB.

Przystąpić teraz możemy do rozwiązywania zadań, które w przyszłości będą nam użyteczne. I tak (fig. 15):

Wykreślić prespektywę kwadratu leżącego na podstawie, gdy dane są w perspektywie kierunek i długość $\alpha\beta$ *jednego boku.*

Robimy (podług fig. 13) około osi X kład $a'b'$ danego boku $\alpha\beta$, kreśląc $b'c'$ prostopadle do $a'b'$, odcinamy $b'c' = a'b'$. Wracając z kładu do pierwotnego położenia płaszczyzny podstawowéj, moglibyśmy wynaleźć perspektywę $\beta\gamma$ drugiego boku kwadratu (jak to widzimy z figury). Możemy postąpić jeszcze w sposób następujący : przedłużmy $c'b'$ aż do punktu m na osi X ; przy powrocie z kładu do pierwotnego położenia podstawy, punkt m nie zmienia swego położenia, zaś punkt b ma swój rzut w β ; więc $m\beta$ jest kierunkiem perspektywy drugiego boku kwadratu.

Koniec γ otrzymamy prowadząc $c\gamma$ prostopadle do X, aż do przecięcia się w γ z przedłużeniem $m\beta$. Kreśląc $\gamma\delta$ równolegle do $\alpha\beta$ i $\alpha\delta$ równolegle do $\beta\gamma$, otrzymamy w punkcie δ perspektywę czwartego wierzchołka kwadratu.

Wykreślić perspektywę sześcioboku foremnego, leżącego na podstawie, jeżeli daną jest perspektywa $\alpha\beta$ (*fig.* 16) *jednego boku.*

Robimy około osi X (podług fig. 13) kład $a'b'$ danego boku $\alpha\beta$, i na témże kładzie $a'b'$ jako na podstawie kreślimy sześciobok foremny $a'b'c'd'e'k'$. Przedłużamy $k'a'$ aż do punktu m na osi X, łączymy m z α, i szukamy w przedłużeniu tego $m\alpha$ punktu k, który otrzymamy prowadząc $k'k$ prostopadle do osi X. Przedłużamy $d'c'$ aż do n na osi X, i kreślimy $n\delta$ równolegle do ak. Proste prostopadłe z punktów c' i d', do osi X poprowadzone, dają w przecięciu się z $n\delta$ perspektywy γ i δ — $k\varepsilon$ równoległe do $\beta\gamma$ i $\delta\varepsilon$ równoległe do $\beta\alpha$, dadzą nam wreszcie perspektywę ostatnich boków szukanego sześcioboku.

Z wykreślenia tego widocznem jest, że tak kład $k'c'$ jak i perspektywa $k\gamma$ przekątnéj sześcioboku przecinają się w punkcie p na osi X.

Wykreślić perspektywę koła leżącego na podstawie, jeżeli są dane : promień r i perspektywa w środka O.

Perspektywa tego koła, jako leżącego na płaszczyznie do tła pod kątem φ nachylonéj, będzie elipsą dla wykreślenia któréj dostatecznem jest wyszukanie jéj osi głównych.

Weźmy dwie średnice tego koła, jednę równoległą a drugą prostopadłą do osi X. Perspektywa $\alpha\beta$ pierwszéj z tych średnic, przechodząc przez w będzie równoległą do osi X, a długość jéj będzie równa $2r$. Wystawmy sobie daléj drugą średnicę prostopadłą do X, obróconą około pionu w punkcie O wystawionego tak daleko, iż stanie się ona równoległą do tła ; wówczas perspektywa jéj $\gamma''\delta''$ będzie nachyloną do osi X pod kątem $(90° - \varphi)$, a długość jéj będzie równa $2r$. Średnica ta do pierwotnego swego kierunku sprowadzona będzie miała perspektywę $\gamma\delta$ prostopadłą do X, przechodzącą przez w. Końce jéj γ i δ otrzymamy kreśląc $\gamma''\gamma$ równolegle do $\delta''\delta$ i równolegle do X.

§ 4

PŁASCZYZNA.

Każda płaszczyzna E nachylona do płaszczyzn rzutów, w dostatecznem przedłużeniu przetnie tak tło jako téż i podstawę, i na każdéj z tych dwóch płaszczyzn pozostawi ślady. Dla oznaczenia śladu tłowego przyjmujemy głoskę którą nazwaliśmy płaszczyznę, dodając jéj znaczek t; tak np. ślad tłowy płaszczyzny E oznaczy się przez E_t. Dla innéj płaszczyzny F byłby więc ślad tłowy F_t i t. d. Ślad podstawowy będziemy oznaczać głoską mianującą płaszczyznę z dodatkiem znaczku p ; a zatem

E_p oznaczać nam będzie ślad podstawowy płaszczyzny E, a F_p tenże ślad płaszczyzny F i t. d. Perspektywę nareszcie śladu podstawowego, oznaczać będziemy używając głoski mianującéj płaszczyznę ze znakiem π, tak, że E_π lub F_π będą oznaczać perspektywy śladów podstawowych płaszczyzn E lub F. Dla oznaczenia położenia płaszczyzny E dostateczném jest użycie dwóch jej śladów, t. j.: śladu jéj tłowego E_t i perspektywy E_π jéj śladu podstawowego E_p; gdyż jeżeli mamy E_π, jedno tylko E_p temu odpowiada. Dlatego téż najczęściéj będziemy oznaczać płaszczyzny przez ślady tłowe i prespektywy ich śladów podstawowych.

Jeżeli pewna płaszczyzna E przecina tło i podstawę, to przetnie zarazem i oś X. Z tego punktu przecięcia się płaszczyzny z osią X wychodzi ślad tłowy E_t i ślad podstawowy E_p, a zatém i perspektywa tego ostatniego śladu, t. j. E_π. A więc płaszczyznę pod względem jéj położenia tak oznaczać możemy jak wskazuje figura 18.

Każda płaszczyzna zmieniając swe położenie sprowadzi zarazem i odmienne położenie swych śladów względem osi X; żądaniem więc naszém obecnie będzie wynaleźć położenia śladu tłowego i perspektywy śladu podstawowego, przy daném położeniu płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów.

Płaszczyzna E *nachylona dowolnie do tła i do podstawy.*

Taka płaszczyzna przetnie oś X, a z punktu przecięcia wychodzić będą obiedwie perspektywy jéj śladów dowolnie ku osi X nachylonych (fig. 18).

Płaszczyzna E *równoległa do podstawy* (*fig.* 19).

Taka płaszczyzna nie może mieć śladu podstawowego, a zatém nie będziemy mogli wykreślić perspektywy tegoż śladu. Ta płaszczyzna nie przetnie również osi X, zatém ślad jéj E_t będzie równoległym do osi X.

Płaszczyzna E *równoległa do tła* (*fig.* 20).

W tym przypadku z powodów podobnych jak w przypadku poprzedzającym, będziemy mieli tylko E_π równoległe do osi X.

Płaszczyzna E *równoległa do osi* X, *a dowolnie nachylona ku płaszczyznom rzutów* (*fig.* 21).

Taka płaszczyzna nie przecina osi X, ślad więc jéj tłowy E_t równie jak i ślad podstawowy E_p, a zatém i perspektywa jego E_π będą do osi X równoległe.

Płaszczyzna E *jest prostopadła do tła* (*rzucająca na tło*) *a nachylona dowolnie do podstawy* (*fig.* 22).

Oś X w tym przypadku zostanie przeciętą, a E_t otrzyma dowolny kierunek. Dla wynalezienia kierunku E_π zważyć musimy, że ślad jéj podstawowy E_p leży w płaszczyznie E, a zatém rzut jego tłowy czyli jego perspektywa E_π leżeć będzie w śladzie tłowym téj rzucającéj E_t, t. j. w E_t.

Płaszczyzna E *jest prostopadła do podstawy* (*rzucająca na podstawę*) *a do tła dowolnie nachylona* (*fig.* 23).

I tu oś X zostanie przeciętą, a E_π otrzyma kierunek dowolny. Chcąc wynaleźć E_t przyjmujemy w E_π punkt α i zastosujemy (fig. 4) by otrzymać odpowiedni jemu punkt na tle. Prosta a,α (w kładzie $\alpha''a$) jest prostopadłą do podstawy a punkt a jest jéj śladem tłowym. Każda, przez tę prostopadłą przesunięta płaszczyzna, będzie prostopadłą do podstawy, a jéj ślad tłowy E_t przechodzić będzie przez ten ślad a. Łącząc więc punkt przecięcia się E_π z osią X z punktem a, otrzymamy ślad szukany E_t.

Płaszczyzna E *jest prostopadłą do osi* X *czyli równoległą do krzyżowéj* (*fig.* 24).

Natenczas tak E_t jako téż E_π będą prostopadłe do osi X.

Dla początkującego korzystném będzie, jeżeli w każdym z danych przypadków położenia prostéj lub płaszczyzny, znajdzie ich rzut i odpowiedni temu rzutowi ślad krzyżowy w kładzie około dowolnéj osi Z.

§ 5

Podawszy sposoby oznaczenia położenia punktu, prostéj i płaszczyzny, jakiekolwiek byłoby ono w przestrzeni i względem płaszczyzn rzutów, przejdziemy teraz do niektórych zagadnień, tyczących się punktu, prostéj i płaszczyzny, jako téż wzajemnych ich do siebie stosunków.

Dane są dwa punkta A *i* B *przez* ($a\alpha$) *i* ($b\beta$), *wynaleźć odległość tych dwóch punktów* (*fig.* 25).

Podług fig. 2 wyszukane a'' dla punktu a i b'' dla punktu b, dadzą nam długości aa'' i bb'' przedstawiające odległości punktów A i B od tła, które to odległości w przestrzeni prostopadłe są do tła, a zatém prostopadłe i do ab.

Kreśląc dwie proste aA i bB prostopadłe do ab i robiąc $a\mathrm{A} = aa''$, tak jak $b\mathrm{B} = bb''$, otrzymamy w A i B kłady punktów danych około perspektywy ab. Długość prostéj AB daje nam szukane odległości tych dwóch punktów.

Dana jest prosta L *i punkt jéj* A *przez* ($a\alpha$); *od punktu* A *na téj prostéj oznaczyć w danéj odległości d punkt* B *przez* $b\beta$ (*fig.* 26).

Przyjmujemy na danéj prostéj jakikolwiek punkt (mu) i tak dla niego, jako téż i dla danego punktu ($a\alpha$) szukamy w sposób wyżéj wskazany kładów M i A. Odcinając $\mathrm{AB} = d$ otrzymamy w kładzie punkt żądany B. Wracając z kładu do pierwotnego położenia, dostateczném jest poprowadzić Bb prostopadle do am a otrzymamy w b perspektywę żądanego punktu B. Pionowo pod b na λ znajdujemy β, jako perspektywę jego rzutu podstawowego.

Dana jest prosta L *przez* ($l\lambda$); *wynaleźć ślad tłowy* l_t *i perspektywę* l_π *śladu podstawowego téj prostéj* (*fig.* 27).

Ślad podstawowy należy tak do prostéj L jako téż i do jéj rzutu podstawowego l'; l_π jako jego perspektywa, musi się znajdować tak na perspektywie l, jako téż i na perspektywie rzutu podstawowego, t. j. na λ, musi więc leżeć w przecięciu się l i λ. Chcąc wynaleźć ślad tłowy l_t, przesuńmy przez L płaszczyznę rzucającą na podstawę, dla któréj perspektywą śladu podstawowego E_π będzie λ, i dla któréj według (fig. 18) znajdziemy ślad tłowy E_t. Ślad szukany l_t będzie leżał w przecięciu się perspektywy l z śladem E_t.

Prosta L *dana jest przez* l *i* λ, *wyszukać kąty, które ta prosta tworzy z tłem i z podstawą* (*fig.* 28).

Szukamy najpierw perspektywy śladu podstawowego β na przecięciu się l i λ; następnie śladu tłowego α (według fig. 22). Pod kątem nachylenia prostéj danéj ku jakiéjś płaszczyznie, rozumiemy zawsze taki kąt, jaki tworzy taż prosta z swym rzutem na daną płaszczyznę. Kąt ten ma swój wierzchołek w śladzie prostéj na téj płaszczyznie, i jest kątem trójkąta prostokątnego, którego jednym bokiem kąta prostego jest rzut danéj prostéj, drugim zaś oddalenie dowolnego punktu téjże prostéj od płaszczyzny; a przeciwprostokątna, długością odcinka danéj prostéj, licząc od śladu aż do tego przyjętego punktu. Wielkość tego kąta wynajdziemy, robiąc około rzutu kład tego trójkąta.

Chcąc więc wynaleźć w naszym przypadku kąt nachylenia prostéj do tła, zrobimy kład śladu podstawowego około perspektywy (jako rzutu tłowego). W tym celu kreślimy βb_x prostopadle do X; pod kątem φ do téjże pionowéj prostą $b_x\beta''$ aż do przecięcia się jéj z prostą $\beta\beta''$ równoległą do X; zkąd otrzymamy kład śladu podstawowego. Długość $\beta\beta''$ daje nam oddalenie tego śladu o l tła.

Kreśląc βB prostopadle do βa i odcinając βB $= \beta\beta''$, mamy w punkcie B kład śladu podstawowego około βa. Punkt a podczas wykonywania kładu, nie zmienia swego położenia, a połączony z punktem B, daje aB równe długości L. Kąt t zatém, zawarty między L i l i mający wierzchołek w punkcie a, jest kątem szukanym. Chcąc teraz wynaleźć kąt nachylenia danéj prostéj do podstawy, obróćmy około osi X rzut podstawowy, którego perspektywą jest λ. W tym celu zauważmy, że przecięcie się m przedłużenia λ z osią X podczas obrotu nie zmienia swego położenia. Nakreślmy b_xb' prostopadle do X; odetnijmy na téj prostopadłéj $b_xb' = b_x\beta''$ odległość śladu podstawowego od osi X; w punkcie b' otrzymamy kład tegoż śladu około osi X. b' połączony z punktem m daje kierunek kładu rzutu podstawowego, a nań, prostopadle do osi, z punktu α odcięta część $b'a'$ daje prawdziwą długość rzutu podstawowego odcinku danéj prostéj, zawartego między tłem a podstawą. Poprowadźmy a'A prostopadle do $b'a'$ i przetnijmy tę prostą kołem wykreśloném ze środka b' promieniem b'A równym L, otrzymamy kąt p zawarty między l' a L z wierzchołkiem w b' jako kąt nachylenia danéj prostéj do podstawy (*).

Dana jest perspektywa ab odcinka prostéj L, *licząc długość od* ($a\alpha$) *jako śladu jéj tłowego, i nachylenie jéj do tła równe kątowi t; wynaleźć λ téj prostéj* (*fig.* 29).

Kreśląc z a pod danym kątem t prostą l aż do przecięcia się z bB prostopadłą do ab, otrzymamy aB równe długości danéj L i bB = odległości punktu B od tła. Obrócenie bB w kierunku poziomym da nam b'' jako kład punktu B około bb_x prostopadłéj do osi. Kreśląc przez b_x pod kątem $(90 - \varphi)$ do osi X prostą $b_x\beta''$, i prowadząc na nią z punktu b'' prostopadłą $b''\beta''$, otrzymamy kład rzutu podstawowego punktu B. $b''\beta$ równoległa do X daje nam w punkcie przecięcia się téj równoległéj z pionem bb_x, t. j. w β, perspektywę rzutu podstawowego punktu B, tak że łącząc β z punktem α otrzymamy szukane λ.

Dane są: perspektywa $\alpha\beta$ rzutu podstawowego części prostéj βA, licząc długość téjże prostej od śladu podstawowego b'; i kąt p, nachylenia téj części linii ku podstawie. Znaleźć odpowiednie l (*fig.* 30).

Szukając (podług fig. 23) długości rzutu podstawowego l', wykreślmy prostę b'A nachyloną do l' pod kątem równym kątowi p aż do przecięcia się jej z prostą a'A prostopadłą do $a'b'$; otrzymamy b'A = L, a a'A = odległości punktu A od podstawy. Chcąc znaleźć a perspektywę punktu A, poprowadźmy a''A'' prostopadłą do $\alpha''a_x$, weźmy a''A'' $= a'$A i nakreślmy A''a równoległą do X aż do przecięcia się jéj z pionową a_xa. Łącząc βa otrzymamy szukane l (**).

Zanim przystąpimy do rozwiązywania dalszych zagadnień, znajdźmy *najmniejszość i największość summy kątów, które dana prosta tworzy z płaszczyznami rzutów.*

(*) W podobny sposób postąpimy chcąc wynaleźć kąty nachylenia prostéj ku płaszczyznom rzutów, jeżeli danym jest jaki jéj odcinek, z tą tylko różnicą, że w tym przypadku szukać będziemy jedynie kładów tego odcinka około perspektywy danéj prostéj lub około osi X; długość l znajdziemy za pomocą L i kąta t, długość λ za pomocą L i kąta p. Całe przeprowadzenie i stosowne ułożenie kombinacyj zostawiamy czytelnikowi.

(**) Rzecz jasna, że w dwóch ostatnich zagadnieniach, moglibyśmy jeszcze znaleźć λ lub l, kreśląc jużto kąt t jużto kąt p w położeniach odwrotnych.

Przy rozwiązywaniu sposobem rysunkowym podobnych zadań i przy danych stosownych kombinacyach z L, λ, kątem t, kątem p i l, zwrócić należy na to uwagę, że w tych przypadkach :

1. Jeżeli prosta L leży w przestrzeni lub na któréj bądź z płaszczyzn rzutów równolegle do osi X, summa dwóch kątów : kąta t i kąta p będzie $=0$.

2. Jeżeli proste są równoległe do jednéj z płaszczyzn rzutów, to wówczas tworzą one z tą płaszczyzną kąt $=0°$; z drugą zaś płaszczyzną tworzą one kąty zawarte między $0°$ a φ; więc summa kątów nachylenia wynosi jako najmniejszość $0°$, a jako największość $\varphi°$.

3. Jeżeli prosta L prostopadła do tła T (fig. 31) daje rzut krzyżowy, natenczas summa kątów $t+p$ równa się $180°-\varphi$; a kąt $p=90°-\varphi$.

4. Jeżeli prosta L prostopadła do podstawy (fig. 32) daje rzut krzyżowy, natenczas summa kątów $t+p=180°-\varphi$; a kąt $t=90°-\varphi$.

5. W przypadku, gdy prosta L jest nachyloną do tła pod stałym kątem równym kątowi t, przyjmujemy (fig. 33 w rzucie krzyżowym) na podstawie punkt b, z którego wyprowadzamy takie proste jak L i L′. Najmniejszość summy kątów t i p zachodzi, gdy prosta leży na podstawie, i summa kątów $t+p$ równa kątowi t (albowiem wtedy $p=0$). Największość zaś téj summy kątów zachodzi wtedy, gdy taka prosta leży na płaszczyznie prostopadłéj do osi X i $t+p$ równać się będzie $180-\varphi$.

6. Jeżeli prosta L jest nachyloną pod stałym kątem p do podstawy, przyjmujemy (fig. 34a w rzucie krzyżowym) na tle punkt a, z którego prowadzimy proste L i L′ pod kątem p do podstawy. Najmniejszość summy kątów t i p wypadnie wtedy, gdy prosta leżeć będzie na tle, i summa kątów $t+p$ będzie równa p (gdyż kąt $t=0$); największość zaś téj summy kątów będzie wtedy gdy taż prosta leży na płaszczyznie prostopadłéj do osi X, albowiem $t+p$ będzie równe $180°-\varphi$.

Widzimy więc, że bezwzględna najmniejszość summy kątów nachylenia $=0$; bezwzględna zaś największość téj summy $=180°-\varphi$.

Mając dwa stożki (fig. 34b) o wspólnym wierzchołku s, i o równéj długości krawędzi, których podstawy A i B są kołami, spostrzegamy, że powierzchnie tych stożków przenikają się podług krawędzi sa i sb. Punkta a i b tych, obydwom stożkom wspólnych krawędzi, leżą na prostéj mn jako linii przecięcia się ich płaszczyzn. Do wynalezienia punktów a i b będzie zatém dostatecznem gdy dane zostanie jedno koło, np. A i miejsce prostej mn. Tych kilka uwag wystarczy, by rozwiązać zadanie następujące (fig. 35) :

Przez dany punkt A w przestrzeni poprowadzić prostą, którąby była nachyloną do tła pod kątem równym kątowi t, a do podstawy pod kątem równym kątowi p.

W celu otrzymania mniej zawiłego rysunku, weźmy rzut krzyżowy a'' punktu danego $(a\alpha)$ oddzielnie. W rzucie krzyżowym, jak wiemy, oś Z przedstawia tło, oś Y podstawę, a punkt O przedstawia oś X.

Poprowadźmy przez punkt a'' nachylone pod kątem $=t$ do osi Z, dwie proste $a''b$ i $a''b'$, to nam da kontury stożka, którego wierzchołkiem będzie a'', podstawa jego jest kołem mającym za średnicę bb' i spoczywającém na tle (Z), wszystkie krawędzie tego stożka z tłem tworzą kąt $=t$.

Kreśląc zaś z punktu a'' dwie proste $a''c$ i $a''c_1$ których nachylenia do osi Y są równe kątowi p, otrzymamy kontur drugiego stożka o tym samym wierzchołku, którego podstawą jest koło, na podstawie mające średnicę równą cc_1, a wszystkie krawędzie tworzą z podstawą kąty $=p$. Proste $a''b=a''b'$ dają długość krawędzi pierwszego stożka proste zaś $a''c=a''c_1$ długość krawędzi drugiego stożka.

Przedłużając $a''c$ tak by $a''c'=a''b$ i przesuwając Y' równolegle do pierwotnego położenia dopóty dopóki nie zajmie położenia Y' równoległego do Y przechodząc przez punkt c', otrzymamy stożek, którego podstawą będzie koło o średnicy $=c'c'_1$, spoczywające na płaszczyźnie Y', z nachyleniem krawędzi do téj płaszczyzny pod kątem równym p i którego długości krawędzi $a''c'$ będą równe długościom krawędzi stożka pierwszego. Płaszczyzny Z i Y', na których się znajdują podstawy tych stożków, przecinają się podług prostéj O' równoległéj do O. Chcąc więc rozwiązać powyższe zadanie zastosujmy uwagi dotyczące (fig. 34) i rzutu krzyżowego. Wracamy do perspektywy. Nakreślmy zatém z punktu a, jako środka, koło K średnicy równéj bb', otrzymamy perspektywę podstawy pierwszego stożka; daléj nakreślmy O'X' równolegle do OX; O'X' jest perspektywą przecięcia się płaszczyzn podstawowych dwóch uważanych stożków. Punkta m, n w których się koło K przecina z prostą O'X', będą punktami krawędzi wspólnych obydwom stożkom (odpowiadające punktom a i b fig. 34). Połączenia punktów m i n z punktem a, dadzą nam perspektywy l_1 i l_{11} a połączenia $m\alpha'$ i $n\alpha'$ perspektywy rzutów podstawowych, tych dwóch, obydwom stożkom wspólnych krawędzi, a zatém dwie proste, z których każda tworzy z tłem kąt równy t, a z podstawą kąt $=p$. Ale teraz podstawową płaszczyzną rzutów jest Y'. Chcąc więc rozwiązać nasze zadanie ze względu na daną płaszczyznę Y', przesuńmy przez dane α proste : λ_1 równoległą do $m\alpha'$ i λ_{11} równoległą do $n\alpha'$.

§ 6

Chcąc na płaszczyźnie E, danéj przez jéj ślady E_t i E_π, znaleźć punkt $d\delta$, wykreślmy najprzód na téj płaszczyźnie jakąkolwiek prostą $l\lambda$ i na téj prostéj weźmy punkt $d\delta$. Jeżeli prosta l leży na płaszczyźnie E, natenczas ślad tłowy l_t téj prostéj będzie leżał na śladzie tłowym E_t płaszczyzny, a perspektywa śladu podstawowego l_π prostéj, na perspektywie śladu podstawowego E_π płaszczyzny.

Niech będzie (fig. 36) płaszczyzna E dana przez E_t i E_π; weźmy na E_t punkt l_t a na ε_t punkt l_π. Łącząc te dwa punkta otrzymamy perspektywę l prostéj leżącéj na płaszczyźnie E. Znajdźmy obecnie (fig. 4) perspektywę l_τ rzutu podstawowego punktu l_t; połączmy ten punkt l_τ z punktem l_π a otrzymamy λ jako perspektywę rzutu podstawowego prostéj l leżącéj na płaszczyźnie E. Punkt jakikolwiek, którego perspektywa d leży na l, a pionowo pod nim δ, będzie punktem prostéj l, a zatém także punktem płaszczyzny E.

Płaszczyznę E (fig. 37) możemy sobie wystawić jako utworzoną w ten sposób, iż E_t posuwa się równolegle do siebie wzdłuż śladu podstawowego E_p.

Chcąc więc wynaleźć jakiekolwiek położenie L tak posuwającego się śladu E_t, uważmy l równoległą do E_t jako perspektywę żądanego położenia. Perspektywa l_π śladu podstawowego téjże prostéj będzie leżeć na E_π.

Przyjąwszy na E_t punkt a i szukając perspektywy α jego rzutu podstawowego, otrzymamy przez połączenie tego α z punktem w którym E_t przecina oś X, $E\beta$ jako perspektywę rzutu podstawowego śladu E_t. Ponieważ L ma być równoległą do E_t więc jego λ będzie równoległą do $E\beta$. Chcąc więc to λ otrzymać, dostateczném jest nakreślić przez punkt l_π równoległą do E_β.

Perspektywę $E\beta$ rzutu podstawowego śladu E_t raz na zawsze nazywać będziemy linią konstrukcyjną.

Chcąc więc wynaleźć punkt $d\delta$ danéj płaszczyzny E (fig. 37), nakreślmy l równolegle do E_t, a z punktu l_π leżącego na E_π poprowadźmy λ równolegle do linii konstrukcyjnéj $E\beta$; każdy punkt którego d leży na l, a pionowo pod nim δ na λ, będzie punktem płasczyzny E.

UWAGA. — *Jak widzimy* E_π *przechodzi przez punkt, w którym się* l i λ (równoległa *do* $E\beta$) *przecinają.* Jakże da się utworzyć płasczyzna w ten sposób, że ślad jéj podstawowy, równolegle do siebie, posuwa się wzdłuż śladu tłowego ?

Na danéj więc płasczyznie E_t E_π (*fig.* 38) *chcemy wyznaczyć punkt.* Dla wyznaczenia tego puntu obieramy na E_t punkt l_t jako ślad tłowy prostéj równoległéj do śladu podstawowego płasczyzny, t. j. ślad tworzącéj płasczyznę.

Oczywiście perspektywa l téjże tworzącéj będzie równoległą do perspektywy śladu podstawowego płasczyzny, t. j. do E_π. Chcąc wynaleźć λ téj prostéj, szukamy (wedle fig. 4) perspektywy l_π punktu l_t (na $E\beta$) i kreślimy przez ten punkt l_π prostę λ równoległą do E_π. Każdy punkt którego perspektywa d będzie leżeć na l, a pionowo pod nim δ na λ jako punkt tworzącéj, będzie punktem płasczyzny E.

§ 7

Z prostych nieleżących na płasczyznie, a zatém takich, któreby z płasczyzną tworzyły pewien kąt, są dla nas ważne te, które są prostopadłe do danéj płasczyzny.

Niech będzie P (fig. 39) płasczyzną podstawową, z którą przecina się płasczyzna E podług śladu podstawowego E_π. Dana jest przytém prosta L prostopadła do E. Przesuwając przez tę prostą L płasczyznę M prostopadłą do podstawowéj P, otrzymamy jéj ślad λ, a zarazem rzut podstawowy téjże prostéj L. Gdy M przechodzi przez L, wiemy że ona będzie prostopadłą do E (ponieważ L jest prostopadłą do E). Płasczyzna M jest zatém prostopadłą tak do płasczyzny E, jako też i do podstawy P, zatém M musi być prostopadłą do E_π, jako do prostéj wspólnego przecięcia się tych dwóch płasczyzn M i P. Czyli odwrotnie E_π musi być prostopadłą do M. E_π będzie zatém prostopadłą do każdéj prostéj na płasczyznie M leżącéj, więc E_π będzie prostopadłą do λ. Czyli streścić się to da słowami w sposób następujący :

Jeżeli prosta jest prostopadłą do płasczyzny, to rzut podstawowy λ *téj prostéj jest prostopadły do śladu podstawowego* E_π *płasczyzny.*

Z tych samych powodów twierdzić możemy, że :

Jeżeli prosta jest prostopadłą do płasczyzny, to rzut tłowy téj prostéj czyli perspektywa l *jest prostopadły do śladu tłowego* E_t *płasczyzny.*

W ogólności przyjąć możemy że : jeśli rzuty danéj prostéj są prostopadłe do śladów odpowiednich danéj płasczyzny, to prosta jest prostopadłą do płasczyzny i odwrotnie.

Niech więc będzie dana w perspektywie płasczyzna E przez swe ślady E_t i E_π (fig. 40) i na niéj (według fig. 37) punkt $d\delta$; *w punkcie tym chcemy poprowadzić prostopadłą do téj płasczyzny.* Według poprzedzającego, otrzymamy perspektywę téj prostéj kreśląc z punktu d prostą l prostopadłą do E_t. Chcąc wynaleźć λ téj prostopadłéj, obieramy sobie na E_π jakikolwiek punkt μ i robimy jego kład m' około osi X. Połączenie tego punktu m' z punktem przecięcia się E_π z osią X daje nam kład E_p śladu podstawowego. Kreślimy dalej $m'n$ prostopadłą do E_p; wracając z kładu napowrót do pierwotnego położenia E_π, prosta $n\mu$ da nam kierunek perspektywy takiéj prostéj, która jest prostopadłą do śladu podstawowego danéj płasczyzny. Kreśląc więc przez punkt δ prostą λ równoległą do $n\mu$, otrzymamy w λ perspektywę rzutu podstawowego szukanéj prostopadłéj.

Odwrotnie, niech będzie dana prosta $l\lambda$ i punkt $d\delta$ (fig. 41). Chcemy przez ten punkt przesunąć płaszczyznę E prostopadłą do téj prostéj.

Kierunek śladu tłowego będzie prostopadłym do l. Kreśląc w którémkolwiek miejscu et prostopadle do l, szukamy według fig. 37 $e\beta$ (jak to widać z rysunku). Ponieważ punkt $d\delta$ ma być punktem szukanéj płaszczyzny, więc kreślę $d\mu$ równolegle do et i $\delta\mu$ równolegle do $\epsilon\beta$, a przecięcie się tych dwóch linij da mi punkt, przez który przechodzić musi E_π (zob. uwagę przy figurze 37). Dla wynalezienia kierunku E_π szukamy kładu l', robiąc około osi X kład punktu ε. Kreśląc K' prostopadle do l' przez e', otrzymamy w kładzie kierunek śladu podstawowego płaszczyzny prostopadłéj do danéj prostéj. Powrót z kładu do pierwotnego położenia K, da nam ten kierunek dla żądanego. E_π.

Rysujemy więc z punktu μ prostą ε_π równoległą do K, aż do przecięcia się jéj z osią X, a ztąd prowadzimy E_t równoległą do e_t czyli prostopadłą do l. Przez E_t i E_π oznaczona płaszczyzna E będzie płaszczyzną żądaną prostopapłą do danéj prostéj l, λ przechodzącą przez punkt $d\delta$.

Chcąc wyrysować prostą $l\lambda$ równoległą do danéj płaszczyzny E_tE_π (fig. 42), kreślimy na téj płaszczyznie prostą $m\mu$, przyjmując na niéj (według fig. 37) dwa punkta $a\alpha$ i $b\beta$. Prosta któréj l jest równoległe do m, a λ i równoległe do μ będzie równoległą do danéj płaszczyzny.

Odwrotnie, niech będzie dana prosta $l\lambda$, chcemy przez punkt $d\delta$ przesunąć płaszczyznę równoległą do danéj prostéj.

Kreśląc (fig. 43) m równolegle do l przez punkt d, a przez punkt δ, μ równolegle do λ, szukamy (według fig. 27) punktów m_t i m_π jako śladów téj równoległéj $m\mu$.

Każda płaszczyzna któréj E_t lub F_t przechodzi przez m_t, a któréj E_π lub F_π przechodzi przez m_π będzie równoległą do danéj prostéj $l\lambda$.

§ 8

Są dane: płaszczyzna E_tE_π i płaszczyzna F_tF_π, znaleźć przecięcie się tych dwóch płaszczyzn (fig. 44) (wspólną krawędź).

W miejscu gdzie się przecinają dwa ślady tłowe tych płaszczyzn, t. j. E_t i F_t jest jeden punkt wspólny obydwom płaszczyznom. W przecięciu zaś E_π i F_π, t. j. w punkcie μ jest perspektywa drugiego, obydwom płaszczyznom wspólnego punktu. Połączenie więc D tych dwóch punktów a i μ daje nam perspektywę linii przecięcia się tych dwóch płaszczyzn E i F.

Chcąc wynaleźć perspektywę rzutu podstawowego téj krawędzi, wynajdziemy (według fig. 4) perspektywę α punktu a, a połączywszy to α z punktem μ, otrzymamy szukane Δ téjże krawędzi.

Widzimy zatém, *że chcąc wynaleźć perspektywę krawędzi (przecięcia się) dwóch płaszczyzn, łączymy punkta przecięcia się śladów tłowych z punktem przecięcia się perspektyw dwóch śladów podstawowych.* Wynalezienie perspektywy rzutu podstawowego téj krawędzi nie podlega żadnéj trudności.

Jeżeli jedna z danych płaszczyzn F_t (fig. 45) jest równoległą do podstawy, natenczas otrzymamy perspektywę krawędzi D, kreśląc z punktu a równoległą do E_π (ponieważ punkt μ na E_π leży w odległości nieskończenie wielkiéj). Dla znalezienia α punktu a (jak to z wykreślenia widać) wykreślmy Δ równolegle do E_π; Δ będzie właśnie perspektywą rzutu podstawowego krawędzi D.

Jeżeli jedna z płaszczyzn F (fig. 46) jest równoległą do tła, otrzymamy perspektywę krawędzi D kreśląc z punktu μ równoległą do E_t (ponieważ punkt a na E_t leży w odległości nieskończenie wielkiéj). Perspektywa Δ rzutu podstawowego téj krawędzi będzie równoległą do $E\beta$.

Jeżeli dane płaszczyzny są położone w ten sposób, że E_t jest równoległą do F_t (fig. 47), natenczas perspektywa D będzie równoległą do E_t i F_t (punkt bowiem a leży w odległości nieskończenie wielkiéj) i wyjdzie z punktu μ. Chcąc znaleźć Δ, poprowadźmy z punktu μ równoległą do F_β, otrzymana perspektywa Δ będzie właśnie perspektywą rzutu podstawowego krawędzi szukanéj.

Jeżeli dane płaszczyzny są położone w ten sposób że E_π jest równoległą do F_π (fig. 48), natenczas, perspektywa krawędzi D, będzie równoległą do ε_π i wyjdzie z punktu a (albowiem punkt μ leży w odległości nieskończenie wielkiéj); Δ téj krawędzi równoległéj do E_π, znajdziemy szukając perspektywy α punktu a.

Chcąc znaleźć krawędź D (fig. 49) dwóch płaszczyzn, których E_t jest równoległy do E_π i równoległy do F_π przesuńmy przez oś Z płaszczyznę krzyżową i zróbmy kład około téjże osi Z, otrzymamy ślady krzyżowe E_k i F_k, przecinające się w punkcie c''. Szukając perspektywy c i perspektywy γ rzutu podstawowego tegoż punktu c'', i prowadząc przez punkt c, D równolegle do E_t i przez punkt γ, Δ równologle do E_π, otrzymamy krawędź dwóch danych płaszczyzn DΔ. Zdarzyć się może, iż E_t i F_t lub E_π i F_π (jakkolwiek nierównoległe) nie przecinają się w granicach papieru rysunkowego; w takich razach używamy *płaszczyzn pomocniczych*.

Na fig. 50 mamy dane dwie płaszczyzny w takiém położeniu, że ich ślady E_π i F_π, chociaż nie są względem siebie równoległe, przecinają się jednakże poza granicami papieru. Perspektywa D krawędzi przechodzić będzie przez punkt a, a perspektywa Δ rzutu podstawowego téjże krawędzi przez punkt α. Ażeby znaleźć kierunki tych D i Δ, przyjmijmy płaszczyznę pomocniczą M równoległą do tła, a zatém taką, ażeby ślad M_π był równoległy do osi X. Ta płaszczyzna M przetnie płaszczyznę E podług prostéj, któréj perspektywa μd będzie równoległą do śladu E_t, a płaszczyznę F podług prostéj, któréj perspektywa $\mu' d$ będzie równoległą do F_t. Dwie ostatnie proste leżące na płaszczyznie M, spotykają się w punkcie d wspólnym dwóm danym płaszczyznom E i F; łącząc więc punkt a z punktem d, otrzymamy perspektywę D krawędzi danych płaszczyzn. Chcąc wyszukać Δ, uważmy płaszczyznę M jako nasze tło nowe i jak przy dawnym tle dla punktu a znaleźliśmy α, tak samo znajdziemy δ dla punktu d (względem nowego tła). Połączenie punktów α i δ daje nam perspektywę Δ rzutu podstawowego krawędzi dwóch danych płaszczyzn E i F.

Figura 51 przedstawia nam dwie płaszczyzny E i F, których ślady tłowe E_t i F_t nie przecinają się w granicach papieru, podobnie do poprzedzających, chociaż ślady te nie są względem siebie równoległymi. Postępując w tym przypadku z pomocniczą płaszczyzną M, równoległą do tła, w sposób zupełnie podobny temu, któregośmy użyli poprzednio przy fig. 50, otrzymamy punkta d i δ, z których pierwszy połączony z punktem μ daje perspektywę D, a drugi połączony z punktem μ perspektywę Δ rzutu podstawowego krawędzi danych dwóch płaszczyzn.

Jeżeli dane płaszczyzny są tak względem siebie położone, że ani ślady ich E_π i F_π, ani też ślady ich E_t i F_t nie przecinają się w granicach papieru (fig. 52), natenczas obieramy dwie płaszczyzny pomocnicze M i N równoległe do tła, a postępując z każdą z nich jak w poprzednich przypadkach, otrzymamy punkta d i d_1, które w połączeniu dają perspetkywę D, i punkta δ i δ_1 dające w połączeniu pespektywę Δ rzutu podstawowego krawędzi dwóch danych płaszczyzn.

Przypadek zasługujący na bliższy rozbiór jest następujący (fig. 53): ślady E_t, ε_π i F_t, F_π danych płaszczyzn zchodzą się w jednym i tymże samym punkcie osi. Chcąc w tym przypadku wynaleźć krawędź dwóch płaszczyzn E i F, przyjmujemy płaszczyznę pomocniczą M równoległą do tła. Chcąc znaleźć przecięcie się danych płaszczyzn z tą płaszczyzną pomocniczą, kreślimy z punktu m (przecięcia się M_π z E_π) md równolegle do E_t, a z punktu n (przecięcia się M_π z F_π), nd równolegle do F_t.

Te dwie proste leżące na płaszczyznie M, przecinają się z sobą w punkcie, którego perspektywą jest punkt d. Szukając dla tego punktu d (względem M_π jako nowej osi) punktu δ, i łącząc c i d, otrzymamy perspektywę D, łącząc zaś c z δ otrzymamy Δ jako perspektywę rzutu podstawowego krawędzi szukanéj danych dwóch płaszczyzn.

§ 9

Rozbierzemy obecnie niektóre warunki, w których będziemy mogli oznaczać każdą płaszczyznę przez jéj ślad tłowy E_t i przez perspektywę jéj śladu podstawowego E_π.

1. *Dwie proste* L *i* M *przecinające się są dane* (*przez* $l\lambda$ *i* $m\mu$); *znaleźć płaszczyznę* E *przechodzącą przez te proste :*

Znajdziemy (jak na fig. 27) l_t i l_π prostéj L, podobnież znajdziemy m_t i m_π prostéj M. Łącząc punkta l_t i m_t linią prostą otrzymamy ślad E_t szukanéj płaszczyzny; a łącząc podobnież l_π i m_π linią prostą, otrzymamy drugi ślad E_π téjże płaszczyzny.

2. Gdy dane dwie proste L i M są równoległe, postępujemy zupełnie tak samo jak w przypadku poprzednim.

3. *Trzy punkta* a, α, b, β, c, γ *są dane. Chcemy przez te punkta poprowadzić płaszczyznę* E.

Łączymy punkt np. A z punktami B i C i przesuwamy (jak w przypadku 1) przez te dwie proste przecinające się w punkcie A płaszczyznę E, która będzie właśnie płaszczyzną szukaną.

4. *Dane są : prosta* L *przez* (l, λ) *i punkt* A (a, α) *; na zewnątrz téj prostéj leżący ; chcemy znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez* L *i* A.

Obieramy na prostéj L dowolny punkt M ($m\mu$), łączymy ten punkt M z danym punktem A; a następnie przesuwamy przez prostą daną L i prostę nowo nakreśloną płaszczyznę E, która jest właśnie płaszczyzną szukaną.

5. *Jest dana prosta* L *i kierunek drugiéj prostéj* M. *Znaleźć płaszczyznę* E, *przechodzącą przez prostą* L *i równoległą do* M.

Obieramy sobie na prostéj L punkt C i kreślimy przez ten punkt C prostą N równoległą do M.

Płaszczyzna przesunięta przez proste L i N (jak w przypadku 1) będzie płaszczyzną szukaną E.

6. *Dany jest punkt* A *i kierunki dwóch prostych* L *i* M, *znaleźć płaszczyznę* E *przechodzącą przez punkt* A *i równoległą do tych kierunków.*

Kreślimy przez dany punkt A proste, L' równoległą do L i M' równoległą do M i przesuwamy (jak w przypadku 1) przez L' i M' płaszczyznę E która jest płaszczyzną szukaną.

Pracujący na tém polu znajdzie bezwątpienia wiele innych warunków, dla których można oznaczyć miejsce i położenie płaszczyzn.

Zwracamy tylko na to uwagę, że płaszczyzny równoległe mają ślady tłowe i perspektywy śladów podstawowych równoległe. Co się łatwo da wytłomaczyć i uzasadnić.

§ 10

Chcąc wynaleźć punkt przecięcia się płaszczyzny E i linii prostéj L, szukamy najpierw l_t i l_π téjże prostéj, następnie przez tę prostę prowadzimy jakąkolwiek płaszczyznę M (taką, któréj M_t przejdzie przez l_t a M_π przez l_π) i wynajdujemy przecięcie się płaszczyzny danéj E z tą płaszczyzną M. Punkt w którym linia przecięcia się dwóch płaszczyzn spotka prostą L, będzie właśnie punktem przecięcia się prostéj L z płaszczyzną E.

Niech będą dane (fig. 54) : E_t i E_π dla płaszczyzny E i l,λ dla prostéj L. Szukamy (podług fig. 27) l_t i l_π i przesuwamy przez l_t prostę M_t równoległą do X, a przez l_π prostę M_π równoległą do X. Łącząc punkt a (przecięcia się E_t i M_t) z punktem μ (przecięcia się E_π i M_π) otrzymujemy prostę D, jako perspektywę krawędzi płaszczyzn M i E. Ta prosta D spotyka l w punkcie d, którego perspektywa δ rzutu podstawowego leży na λ. Punkt d,δ jest szukanym punktem przecięcia się prostéj L z płaszczyzną E.

Taką płaszczyzną pomocniczą M może być płaszczyzna rzucająca prostą L na podstawę. I tak :

Niech będzie (fig. 55) dana płaszczyzna E_t E_π i prosta l,λ.

Podług fig. 23 robimy kład płaszczyzny rzucającéj l_t,λ. Łącząc punkt a z punktem μ otrzymamy (według fig. 44) perspektywę D, krawędzi płaszczyzny E z płaszczyzną rzucającą. Punkt w którym krawędź D przecina l, będzie perspektywą, a pionowo pod d na λ punkt δ będzie perspektywą rzutu podstawowego szukanego punktu przecięcia się danéj prostéj z daną płaszczyzną.

Zdarza się często, że nie możemy dla danéj prostéj wynaleźć l_t i l_π w granicach rysunku, ani też wynaleźć punktu a (z fig. poprzedzającéj), wtedy postępujemy w sposób następujący :

Na prostéj l,λ obieramy sobie dwa dowolne punkta a,α i b,β (fig. 56).

Z tych punktów prowadzimy prostopadłe (według fig. 40) p i p' na daną płaszczyznę. Szukamy perspektywy g i h punktów przecięcia się tych prostopadłych z daną płaszczyzną (podług fig. 54 lub 55) i łączymy te dwa punkta g i h prostą D. (Ta prosta D jest perspektywą rzutu ortogonalnego danéj prostéj na daną płaszczyznę). Perspektywę d otrzymamy w punkcie przecięcia się prostych D i l. na λ, pod d pionowo znajdziemy punkt δ, który jest perspektywą rzutu podstawowego szukanego przecięcia się danéj prostéj z daną płaszczyzną.

Uwaga.—Nie zawsze z obranych punktów a i b prowadzi się prostopadłe na płaszczyznę E; niekiedy dogodniéj jest prowadzić te proste pod innym kątem, aniżeli pod kątem prostym, byleby przecięcia się tych prostych z daną płaszczyzną były łatwe do wynalezienia. W każdym jednak razie, obie proste z punktów a i b kreślone powinny być równoległe do siebie.

Jeżeli płaszczyzna dana jest nie przez perspektywę swoich śladów lecz przez dwie proste równoległe lub przecinające się, a mamy znaleźć przecięcie się trzeciéj prostéj z taką płaszczyzną, to postępujemy w sposób następujący :

Niech będą dane (fig. 57) dwie równoległe l,λ i m,μ, tworzące płaszczyznę i trzecia prosta s,σ. Chcemy znaleźć przecięcie się téj trzeciéj prostéj z płaszczyzną utworzoną przez dwie pierwsze.

Wyobraźmy sobie płaszczyzny rzucające (na podstawę) prostych l,λ i $s\sigma$, te płaszczyzny będą miały krawędź a,α prostopadłą do osi X; podobnież b,β będzie krawędzią płaszczyzn rzucających (na podstawę) proste m,μ i s,σ. Punkta a,α i b,β będą punktami przecięcia się prostych l,λ i m,μ z płaszczyzną rzucającą linię prostą s,σ. A zatém ab, $\alpha\beta$, będzie krawędzią dla płaszczyzny dwóch danych prostych i płaszczyzny rzucającéj trzecią prostę. Punkt d, w którym s przecina ab będzie perspektywą, a pionowo pod nim leżący punkt δ na $\alpha\beta$ perspektywą rzutu podstawowego szukanego punktu przecięcia się prostéj s,σ, z płaszczyzną utworzoną przez dwie proste l,λ i m,μ.

Zagadnienia powyżéj podane mają najobszerniejsze zastosowanie przy wynajdywaniu przenikania się ciał i przy konstrukcyi cieniów.

§ 11

Mając daną płaszczyznę E_t E_π (fig. 58) i punkt na niéj np. a,α (podług fig. 37). *Chcemy zrobić kład tego punktu na tło, około śladu tłowego* E_t. Chcąc zrobić kład tego punktu około E_t, musimy go obracać około E_t; zatem punkt a,α zakreśli w przestrzeni łuk koła, którego płaszczyzna będzie prostopadłą do E_t. Ślad więc téj płaszczyzny koła będzie aA prostopadły do E_t a punkt przecięcia się téj prostopadłéj z E_t, t. j. punkt o będzie środkiem obrotu.

Chcąc znaleźć miejsce tego kładu, oznaczmy (podług fig. 2) przez aa'' odległość danego punktu od tła. Otrzymamy zatém w przestrzeni trójkąt prostokątny, którego jednym bokiem jest o,a, drugim bokiem oddalenie punktu a,α od tła równe aa'', a przeciwprostokątnią połączenie danego punktu w przestrzeni z punktem o. Kreśląc linię aa' prostopadłą do oa, odcinając na téj prostopadłéj $oa' = aa''$ i łącząc a' z punktem o, otrzymamy ten trójkąt prostokątny w kładzie, około prostéj $o\delta a$. oa daje nam odległość danego punktu A od śladu E_t. Podczas ruchu o którym mowa punkt a,α dany w przestrzeni opisze koło promienia oa', którego kład będzie k. Przecięcie się tego koła z przedłużeniem ao daje nam A jako miejsce szukanego kładu punktu danego na płaszczyznie około E_t.

Mamy daną płaszczyznę E_tE_π *i na niéj dwa punkta* a,α *i* b,β (*fig.* 59), *które w połączeniu dają* ab, $\alpha\beta$, *jako bok kwadratu, który na téj płaszczyznie wykreślić chcemy*. Przedłużenie perspektywy ab daje ślad tłowy m, a jako perspektywę śladu podstawowego tego boku kwadratu λ. Chcąc wykreślić ów kwadrat, zróbmy (według fig. 58) kład A punktu $a\alpha$ około E_t; łącząc A z punktem m otrzymamy kierunek, a kreśląc bB prostopadle do E_t aż do przecięcia się z tym kierunkiem, otrzymamy w AB kład boku kwadratu. Kreśląc nC prostopadle do AB, i czyniąc AC = AB, mamy w kładzie drugi bok kwadratu. Wracając z kładu płaszczyzny E do pierwotnego jéj kierunku, dosyć jest połączyć punkt n z punktem a i tę łączącą przeciąć prostą Cc prostopadłą do E_t a ac da nam perspektywę drugiego boku kwadratu. Kreśląc cd równolegle do ab, i bd równolegle do ac uzupełnimy perspektywę żądanego kwadratu. Przedłużając bok cd aż do E_π, otrzymamy punkt μ z którego poprowadzona $\mu\delta$, równoległa do $\beta\alpha$, da nam kierunek perspektywy rzutu podstawowego boku cd, a długość jéj otrzymamy kreśląc $c\gamma$ równolegle do $d\delta$ i prostopadle do osi X.

W podobny sposób możemy wykreślić na danéj płaszczyznie każdą inną figurę prostolinijną, jak to okazuje fig. 60, która przedstawia perspektywę i perspektywę rzutu podstawowego sześcioboku foremnego na płaszczyznie E_tE_π, dla któréj dany był jeden bok ab, $\alpha\beta$.

Mamy (*fig.* 61) *daną płaszczyznę* E_tE_π, *i na niéj punkt* o,ω, *jako środek koła, które chcemy na téj płaszczyznie z tego punktu* o,ω *jako środka wykreślić.*

W tém kole możemy przypuścić dwie średnice, z których jedna jest równoległą a druga prostopadłą do E_t. Perspektywa pierwszéj z tych średnic ab równoległa do E_t będzie miała rzeczywistą długość

$2r$. Perspektywę jej rzutu podstawowego otrzymamy przedłużając ba aż do μ w E_π i łącząc μ z w; a długość jej $\alpha\beta$ otrzymamy kreśląc $a\alpha$ równolegle do $b\beta$ a prostopadle do osi X.

Chcąc wynaleźć drugą średnicę prostopadłą do E_t, robimy około E_t kład O punktu o (podług fig. 58). Z tego kładu O jako środka kreślimy koło ABCD średnicy równéj $2r$ i przyjmujemy średnicę CD za prostopadłą do E_t. Wracając z kładu do pierwotnego położenia płaszczyzny E dosyć jest obrócić punkt C około śladu E_t.

W tym celu robimy $mc' = mC$ i prowadzimy $c'c$ równolegle do E_t. Punkt c będzie perspektywą jednego końca średnicy prostopadłéj do E_t, robiąc $od = oc$ otrzymamy punkt d, który będzie perspektywą drugiego końca téjże średnicy. Perspektywę $\gamma\delta$ rzutu podstawowego téj średnicy otrzymamy podług fig. 37, albowiem dwa punkta $c\gamma$ i $d\delta$ muszą być punktami płaszczyzny. ab i cd dają nam dwie osie elipsy, która jest perspektywą koła szukanego; $\alpha\beta$ i $\gamma\delta$ są średnicami sprzężonemi elipsy, która jest perspektywą rzutu podstawowego tegoż koła.

§ 12

Z figury 58 łatwo można spostrzedz że kąt $a'oa = t$ jest kątem nachylenia płaszczyzny E do tła.

Daną jest płaszczyzna E_tE_π *(fig. 62), znaleźć jéj kąt nachylenia do podstawy.*

Przyjmujemy na danéj płaszczyznie (podług fig. 37) punkt $a\alpha$ i prowadzimy z α prostopadłą $\alpha\mu$ do E_π. Ta prostopadła $\alpha\mu$ będzie jedném ramieniem szukanego kąta, a drugie ramię znajdziemy łącząc punkt μ z punktem a. Chcąc wykreślić prostopadłę $\alpha\mu$ i znaleźć kąt nachylenia w rzeczywistéj wielkości robimy kład $E'p$ i kład a' punktu α. Prosta $a'm$ prostopadła do Ep daje nam w kładzie jedno ramię szukanego kąta, które w perspektywie przedstawia prosta $\mu'\alpha$. Znajdźmy teraz wysokość punktu $a\alpha$, t. j. $\alpha''a''$; nakreślmy więc a'A prostopadle do $a'm$ i odetnijmy $a'A = \alpha''a''$ i połączmy punkt A z punktem m', kąt p' otrzymany daje rzeczywistą wielkość kąta nachylenia płaszczyzny E do podstawy.

Dane są ślad E_π *(fig. 63) i kąt* p' *nachylenia płaszczyzny do podstawy, wynaleźć ślad* E_t *téjże płaszczyzny.*

Obieramy na śladzie E_π punkt μ i szukamy kładu jego m', otrzymamy zatém $E'p$. Prosta $a'n$ prostopadła do Ep, przesunięta przez punkt m' daje w kładzie jedno ramię kąta (w perspektywie $\mu\alpha$). Kreślimy teraz kąt $a'm'$A równy kątowi p' i z dowolnie obranego punktu a' na ramieniu $a'n$ kreślimy a'A prostopadle do an. Aa' daje nam wysokość dla punktu a,α (który podług fig. 2 wynajdujemy) znajdującego się na płaszczyznie. Kreślimy następnie tworzącą l równoległą do λ i równoległą do E_π i szukamy (podług fig. 27) l_t téjże tworzącéj. Łącząc punkt, w którym E_π przecina oś X z punktem l_t, otrzymamy szukane E_t.

Dane są E_t, E_β *(fig. 64) i kąt* p' *nachylenia płaszczyzny* E *do podstawy, wynaleźć* E_π.

Obieramy na E_t punkt a, którego perspektywą rzutu podstawowego będzie α, a prawdziwą wysokością prosta $a\alpha''$. Punkt a może być uważany jako wierzchołek stożka kołowego, którego tworzące mają być nachylone do podstawy pod danym kątem p'; a każda płaszczyzna styczna do tego stożka będzie miała takie same nachylenie p'. Chcąc wynaleźć promień koła podstawowego dla tego stożka, kreślimy $a\mu''$ tak, ażeby kąt $a\mu''a_x$ był równy kątowi p'.

Prosta $\mu''\alpha''$ będzie właśnie promieniem r tego koła.

Robiąc kład a' punktu α, zakreślamy z punktu a' jako środka, koło promienia r a z punktu n, w którym E_t przecina oś X, kreślimy do tego koła dwie styczne $E'p$ i $E'_t p$. Punkta c i d styczności sprowadzając do pierwotnego położenia podstawy, otrzymamy perspektywy γ i δ, które połączone z punktem n dadzą w końcu E_π i E'_π.

Dane są E_t, E_β (*fig.* 65) *i kąt t nachylenia płaszczyzny* E *do tła, wynaleźć* E_π.

Obrawszy dowolny punkt a, kreślimy ad prostopadle do E_t, i opisujemy kąt adA równy kątowi t.

Prosta aA równoległa do E_t daje (podług fig. 58) oddalenie punktu a danéj płaszczyzny od tła. Rzut krzyżowy a'' punktu a, otrzymamy kreśląc aa'' równolegle do X i robiąc $aa'' = a$A. Chcąc dla tego punktu a wynaleźć α, kreślimy aa_x prostopadle do X, i pod kątem φ prostą Y, następnie prowadzimy $a''\alpha''$ prostopadle do Y, a w końcu $\alpha''\alpha$ równolegle do X. Kreśląc następnie $a\mu$ równolegle do E_t i $\alpha\mu$ równolegle do E_β, otrzymamy punkt μ, który połączony z punktem n daje szukane E_π.

Dane są (*fig.* 66) E_π, *punkt* a, α *i kąt t; wynaleźć* E_t.

Punkt a, α będziemy uważali jako wierzchołek stożka, którego tworzące mają być nachylone do tła pod kątem t, a którego wysokością będzie odległość punktu $a\alpha$ od tła. Każda płaszczyzna styczna do tego stożka będzie nachyloną do tła pod kątem t. Szukamy więc a'' tego punktu (podług fig. 2). Kreślimy $a''m$ prostopadle do aa'', a z punktu a prowadzimy prostą am pod kątem t do téj prostopadłéj. Długość $a''m$ będzie promieniem r koła służącego za podstawę stożka i leżącego na tle. Kreślimy więc z punktu a jako środka tym promieniem r koło, a z punktu n prowadzimy dwie styczne E_t i E'_t a otrzymamy szukane ślady tłowe płaszczyzn wziętych pod uwagę.

§ 13

Dla ćwiczeń podajemy niektóre zagadnienia :

1. Wynaleźć odległość danego punktu A od danéj płaszczyzny E.

2. Wynaleźć punkt A w pewnéj odległości od punktu danego C na danéj płaszczyznie E.

3. Dane są : płaszczyzna E i punkt A leżący na zewnątrz ; wynaleźć na téj płaszczyznie punkt odległy od punktu A o pewną długość. (Rozwiązanie tego zagadnienia sprowadza się do wykreślenia koła o pewnym promieniu na płaszczyznie E.)

4. Dane są trzy punkta A, B i C, wynaleźć punkt czwarty D, któryby od trzech danych punktów był jednakowo oddalony. (Jestto prosta, prostopadła do płaszczyzny koła przechodzącego przez te trzy punkta, ze środka jego wyprowadzona).

5. Jest dany punkt A i prosta L; wynaleźć na téj prostéj punkta leżące w pewnéj oznaczonéj odległości od punktu A.

6. Dane są dwie proste L i M, nierównoległe i nieprzecinające się; znaleźć najkrótszą odległość w naturalnéj wielkości tych prostych od siebie. (Przesuwamy przez M płaszczyznę e równoległą do L; szukamy rzutu Le prostéj L na tę płaszczyznę. W przecięciu się M z Le prowadzimy prostą N prostopadle do e aż do spotkania się z prostą L.)

7. Dane są : dwie proste L i M, nierównoległe i nieprzecinające się, płaszczyzna F, i pewna długość D. Chcemy wstawić tę długość D między L i M równolegle do F.

(Przesuwamy przez M płaszczyznę E równoległą do L; obrawszy na L jakikolwiek punk A, przesuwamy przezeń płaszczyznę f równoległą do F i szukamy krawędzi K płaszczyzn E i f. Na krawędzi K znajdujemy dwa punkta C i C′ odległe od punktu A na długość D; z tych punktów C i C′ kreślimy dwie proste R S równolegle do L, które przetną prostą M w punktach D i D′. W tych ostatnich punktach poprowadzimy dwie proste P i Q tak, że P będzie równoległe do AC, a Q równoległe do AC′).

8. Dane są dwie płaszczyzny E i F; wynaleźć ich wzajemne nachylenie.

(Szukamy krawędzi D dwóch danych płaszczyzn i przesuwamy płaszczyznę M prostopadle do D. Krawędzie K i K tej płaszczyzny M z płaszczyznami E i F dadzą ramiona kąta nachylenia, którego prawdziwą wielkość otrzymamy robiąc kład wierzchołka jego około M_t).

§ 14

Pod jakim kątem φ jest nachylona podstawa do tła, jeżeli mamy daną oś X (fig. 67) *i wiemy że kąt* $m\alpha n$ *jest perspektywą kąta prostego leżącego na podstawie?*

Robiąc kład tego kąta około osi X, wiemy, że kład a' wierzchołka α leżeć będzie na $\alpha a'$ prostopadłej do X.

Kreślimy więc półkole K na średnicy mn. Przecięcie się tego koła z prostopadłą do osi X da nam a' jako kład wierzchołka kąta prostego $ma'n$. Chcąc więc wynaleźć kąt φ, kreślimy $\alpha\alpha''$ równolegle do X, a ze środka α_x promieniem równym $a_x a_1$ koło K′ aż do punktu α''. Prosta $\alpha'' a_x$ da nam ramię kąta $\alpha a_x \alpha'' = \varphi$.

W jakim kierunku mamy kreślić oś X, jeżeli jest dany kąt φ i wiemy, że (fig. 68) kąt s jest perspektywą kąta prostego, leżącego na podstawie?

Dla rozwiązania tego zagadnienia obieramy sobie punkt o wewnątrz ramion danego kąta. Przez punkt o kreślimy w kierunku dowolnym oś X_1 i względnie niej robimy kład wierzchołka s. Oś X_1 przetnie ramiona kąta danego w punktach m_1 i n_1. Na prostej $m_1 n_1$, jako średnicy, kreślimy koło przecinające linię pionu ss_1 w punkcie k_1. Następnie prowadzimy przez ten sam punkt o inną oś X_2. Względnie tej nowej osi robimy kład s_2 wierzchołka s. Oś X_2 przecina ramiona danego kąta w punktach m_2 i n_2. Na m_2 i n_2, jako średnicy, kreślimy półkole przecinające ss_2 w punkcie k_2. W ten sam sposób postępując z osiami dowolnie obranemi X_3, X_4,... otrzymamy $s_3 s_4$... i k_3, k_4... Krzywa łącząca punkta s_0, s_1, s_2, s_3... przecina krzywą łączącą punkta k_1, k_2, k_3, k_4... w punktach a i b. Łącząc punkta a i b z punktem s otrzymamy kierunki do których proste X i X′, prostopadle przez punkt o poprowadzone, dadzą właśnie szukane osie.

§ 15

Chcemy wykreślić (fig. 69) perspektywę kostki stojącej na podstawie tak aby szerokość jednej z bocznych ścian miała się do szerokości drugiej (mierząc te szerokości w kierunku równoległym do osi X) *i do pionowego odstępu punktów* α *i* γ *(jako wierzchołków kątów przeciwległych podstawy) jak* $m : n : p$.

W tym celu odcinamy $\alpha b_x = m$, $\alpha d_x = n$, następnie kreślimy $b_x b' = n$ prostopadle do X i $d_x d = m$ także prostopadle do X. Kąt $b'\alpha d'$ będzie kątem prostym a $\alpha b' = \alpha d'$. Możemy więc wykreślić kwadrat $\alpha b'c'd'$, który będzie kładem kwadratu służącego za podstawę kostki której perspektywy szukamy. Z punktu c_x promieniem $c_x c'$ nakreślmy łuk koła cko i poprowadźmy $kl = p$ prostopadle do X; lo

równolegle do X przecina koło w punkcie o, który połączony z punktem c_x daje prostę nachyloną do linii pionu pod kątem φ. Przedłużając lo, otrzymamy perspektywę γ. Pod tym kątem φ obracając tak samo punka b' i d otrzymamy perspektywy β i δ tak, że równoległobok $\alpha\beta\gamma\delta$, będzie perspektywą podstawy kostki w żądaném położeniu. Chcąc górną podstawę tějże kostki wynaleźć, kreślimy oq prostopadle do oc_x i robimy oq równém bokowi kwadratu ab'. Z punktu q kreślimy qc równolegle do X aż do przecięcia się z γc prostopadłą do X. Daléj kreśląc cb równolegle do $\gamma\beta$, ba równolegle do $\beta\alpha$, ad równolegle do $\alpha\delta$ i dc równolegle do $\delta\gamma$, otrzymamy $abcd$, perspektywę górnéj podstawy.

Jeżeli liczby (albo odcinki prostych) m, n, p są nierówne, otrzymamy kostkę w trójwymiarowém wykreśleniu (trymetryczny). Moos w swojéj *Krystalografii* użył stosunku $m : n : p = 3 : 2 : 1$.

Jeżeli zaś $m = n$ a p odmienne, natenczas otrzymamy kostkę w dwuwymiarowém wykreśleniu (bimetryczny).

Gdy $m = n = p$, natenczas będziemy mieli kostkę w wykreśleniu jednowymiarowém (isometryczny).

Wykreślenie któregośmy użyli, daje możność obliczania matematycznego tak długości jako téż nachylenia ku osi X perspektyw krawędzi kostki, wyrażonych przez ilości dane m, n i p.

§ 16

Mamy (fig. 70) wyrysować graniastosłup prosty, którego podstawą jest sześciobok foremny spoczywający na płaszczyźnie $E_t E_\pi$.

Według figury 60 kreślimy na téj płaszczyźnie perspektywę $abcdek$ i perspektywę rzutu podstawowego $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varkappa$ sześcioboku foremnego. Krawędzie ścian bocznych $aa_1, bb_1 \ldots$ w perspektywie stoją prostopadle do E_t i będą między sobą równéj długości. Chcąc wynaleźć perspektywę rzutów podstawowych $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1 \ldots$ musimy (według fig. 15) wynaleźć kierunek λ tak, ażeby kład jego l' był prostopadły do E_p śladu podstawowego płaszczyzny E.

Jeżeli podstawa graniastosłupa prostego leży na płaszczyźnie podstawowéj rzutów, w takim razie jako perspektywa podstawy graniastosłupa $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varkappa$ (fig. 71) jest zarazem perspektywą rzutu podstawowego całego graniastosłupa. Dla znalezienia perspektywy $\alpha\beta\gamma\ldots$ należy zastosować figurę 16.

Podobnie postępujemy (fig. 72) chcąc znaleźć perspektywę $abcdef$ i perspektywę rzutu podstawowego $\alpha\beta\delta\gamma\vartheta\varphi\sigma$ ostrosłupa prostego, którego podstawa leży na płaszczyźnie $E_t E_\pi$. Zauważymy tylko, że oś ostrosłupa $os, \omega\sigma$ powinna być prostopadłą do płaszczyzny E. Zastosujemy więc co do téj osi figurę 40.

Figura 73 przedstawia nam perspektywę $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varkappa s$ i perspektywę $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varkappa\sigma$ rzutu podstawowego ostrosłupa prostego, którego podstawa leży na płaszczyźnie podstawowéj rzutów.

Tym sposobem postępując, jesteśmy w stanie wykreślić kontury wszelkich brył ograniczonych płaszczyznami, w perspektywie rzutowéj, czego przykłady mamy na figurach 74 i 75.

§ 17

Dane są: graniastosłup leżący na płaszczyźnie $E_t E_\pi$ *i płaszczyzna* $M_t M_\pi$ (fig. 76). *Chcemy znaleźć perspektywę linii przecięcia się tego graniastosłupa z daną płaszczyzną.*

Możemy to uskutecznić w sposób dwojaki: A) Szukając (według fig. 54 lub 56) perspektywy przecięcia się każdéj krawędzi graniastosłupa z daną płaszczyzną M i łącząc te punkta w porządku odpowiednim liniami prostemi; albo B) szukając przecięcia się płaszczyzny E i jednéj tylko krawędzi ee_1 z daną płaszczyzną M, t. j. punktu E a następnie (podług fig. 44) szukajac perspektywy HH krawędzi dwóch płaszczyzn E i M. Przedłużając ac aż do punktu m na krawędzi H i łącząc punkt m z punktem E, otrzymamy ET jako perspektywę przecięcia się ściany ace_1a_1, z płaszczyzną M. Przedłużając następnie ed aż do punktu n na krawędzi H i łącząc punkt E z punktem n otrzymamy perspektywę ED, przecięcia się ściany edd_1e_1 z daną płaszczyzną M. Przedłużywszy cd aż do punktu o na krawędzi H, i połączywszy punkt o z punktem D, otrzymamy perspektywę DM przecięcia się ściany $cdd'c'$ z daną płaszczyzną M. W końcu przedłużmy bc aż do punktu p na krawędzi H, połączmy p z otrzymanym poprzednio punktem M, a otrzymane MS będzie perspektywa przecięcia się ściany bcc_1b_1 z płaszczyzną M. Połączenie punktów T i S daje perspektywę przecięcia się drugiéj podstawy graniastosłupa z daną płaszczyzną M.

Dana jest (fig. 77) perspektywa $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon s$ ostrosłupa znajdującego się na płaszczyznie podstawowéj rzutów i płaszczyzna $M_t M_\pi$; wynaleźć perspektywę przecięcia się tego ostrosłupa z daną płaszczyzną M.

Szukamy w sposób znany perspektywy A przecięcia się krawędzi αs z daną płaszczyzną. Przedłużamy $\beta\alpha$ aż do m na M_π i łączymy punkt m z punktem A; prosta BA przedstawia perspektywę przecięcia się ściany $\alpha\beta s$ z płaszczyzną M. Następnie przedłużywszy $\gamma\beta$ aż do n na M_π, otrzymamy łącząc punkt n z punktem B poprzednio otrzymanym, perspektywę BC przecięcia się ściany $\beta\gamma s$ z daną płaszczyzną M. W ten sposób postępując daléj, jak to widzimy z wykreślenia, otrzymamy szukaną perspektywę ABCDE.

Chcąc wynaleźć perspektywę przecięcia się linii prostéj ls ze ścianami graniastosłupa lub ostrosłupa, najlepiéj będzie używać sposobu podanego na figurze 57.

Figury 78 i 79 podają zastosowanie powyższego sposobu.

Figura 80 przedstawia perspektywę przecięcia się łączenia drzewa leżącego na podstawie z płaszczyzną M, prostopadłą do podstawy któréj perspektywą śladu podstawowego jest M_π. To przecięcie jak widzimy z wykreślenia, otrzymaliśmy szukając przecięcia się szczególnych krawędzi ciała z płaszczyzną M.

§ 18

CIENIE RZUCONE NA PŁASCZYZNY DANE.

Z punktu świecącego S wychodzą promienie światła w kształcie ostrokręgu, cała więc płaszczyzna M (fig. 81), z wyjątkiem jednego punktu D, który leży na promieniu SD, przechodzącym przez punkt a nieprzezroczysty, materyalny, jest oświeconą.

Promienie światła wychodzące z punktu świecącego S w kierunku Sa; natrafiając na ten punkt materyalny a zatrzymują się, a zatém wszystkie punkta płaszczyzny M, z wyjątkiem punktu D, będą oświetlone bez przeszkody. Ten punkt D zowiemy *cieniem rzuconym* punktu a na płaszczyznę M.

Chcąc więc znaleźć cień jakiegokolwiek punktu a na daną płaszczyznę, prowadzimy z punktu świecącego przez punkt a promień *światła* i szukamy przecięcia się tego promienia z daną płaszczyzną. Jeżeli punkt świecący S leży bardzo blizko płaszczyzny, natenczas oświetlenie takie nazywamy: *oświetleniem centralném*.

Jeżeli zaś punkt świecący leży w odległości nieskończenie wielkiéj od płaszczyzny lub przynajmniéj bardzo od niéj daleko; przypuścić możemy, że wszystkie promienie na tę płaszczyznę padające są do siebie równoległe.

Przy centralném oświetleniu, siła oświetlenia każdego punktu płaszczyzny będzie zawisłą, od oddalenia tego punktu od punktu S, i od kierunku pod jakim promień światła pada na ten punkt płaszczyzny.

Znajdzie się więc na płaszczyznie taki punkt, na który promień światła pada pod kątem prostym. Ten punkt jako najbliższy punktu S, będzie najsilniéj oświetlony. Jeżeli z tego punktu jako środka nakreślimy okrąg koła na danéj płaszczyznie jakimkolwiek promieniem, punkta leżące na okręgu koła będą jednakowo oświetlone, albowiem dla wszystkich punktów tego okręgu koła oddalenie od S jako też i nachylenie promieni światła ku płaszczyznie jest też same. Taką linię łączącą punkta jednakowo oświetlone zowiemy *linią równéj siły światła*

Punkta leżące na okręgach kół o których mówimy, są tém słabiéj oświetlone im promienie służące do ich zakreślenia są większe.

Jeżeli promienie światła są równoległe, siła oświetlenia zależy jedynie od kąta pod którym promienie światła padają na płaszczyznę.

W zastosowaniach używamy prawie zawsze tego ostatniego rodzaju oświetlenia.

Niech będzie więc (*fig.* 82) *dany punkt* $a\alpha$ *i kierunek światła* $S\Sigma$. *Chcemy znaleźć perspektywę cienia rzuconego z tego punktu na podstawę.*

Dla dowiedzenia tego przesuńmy przez dany punkt prostą $s\sigma$, i szukajmy perspektywy przecięcia się prostej z podstawą. Punk ta będzie perspektywą żądanego cienia.

Niech będzie dana prosta $ab\alpha\beta$ *i kierunek światła* $S\Sigma$ (*fig.* 83); *wynaleźć perspektywę cienia téj prostéj na podstawę.*

Z punktów $a\alpha$ i $b\beta$ nakreślmy proste równoległe do kierunku światła, otrzymamy perspektywę $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ śladów podstawowych tych dwóch równoległych. Prosta łącząca punkta $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ będzie perspektywą szukanego cienia.

Jeżeli dana prosta ab równoległa do $\alpha\beta$ (fig. 84) jest równoległą do płaszczyzny podstawowéj, to perspektywa $\mathfrak{ab}$ jéj cienia na podstawę będzie równoległą do ab i równoległą do $\alpha\beta$, co widzimy z wykreślenia. Gdy zaś prosta ab, $\alpha\beta$ (fig. 85) jest prostopadłą do podstawy, to perspektywa $\mathfrak{ab}$ jéj cienia na podstawę ma kierunek równoległy do Σ. Chcąc wynaleźć cień danéj prostéj na jakąśkolwiek płaszczyznę, obieramy dwa punkta téj prostéj, przesuwamy przez nie promień światła, szukamy przecięcia się tych promieni z płaszczyzną i łączymy tak otrzymane punkta przecięcia linią prostą.

Niech będzie dana płaszczyzna $E_I E_{II}$ (fig. 86) *prosta* $ab,\alpha\beta$, *i kierunek światła* $S\Sigma$.

Przesuwamy przez punkta $a\alpha$, $b\beta$ promienie światła $s\sigma$; $\mathfrak{ab}$ będzie perspektywą cienia téj prostéj na podstawę. Lecz będzie widoczną tylko jéj część $\mathfrak{am}$.

Szukamy następnie (podług fig. 57), perspektywy b' przecięcia się promienia światła $s\sigma$ przesuniętego przez punkt $b\beta$ danéj prostéj z daną płaszczyzną, i łączymy punkt b' z punktem m; $b'm$ będzie perspektywą cienia danéj prostéj na płaszczyznę E.

Niech będzie dana płaszczyzna nie przez swe ślady lecz przez dwie proste równoległe abαβ, i cdγδ (fig. 87), niech będzie nadto prosta mnμν i kierunek światła SΣ. Znaleźć perspektywę cienia rzuconego przez prostą mnμν na tę płaszczyznę.

Szukajmy perspektywy cieniu trzech prostych, na podstawę 𝔞𝔟, 𝔠𝔡 i 𝔪𝔫, które przecinają się w punkatch 𝔯 i 𝔱. Z tych punktów 𝔯 i 𝔱 poprowadźmy proste 𝔯*r*, 𝔱*t* równoległe do S i połączmy *r* z punktem *t*. Prosta *rt* będzie perspektywą szukanego cienia.

§ 19

Zasadzając się na wzorach podanych fig. : 70, 71, 72, 73, 74, 75, 78, 79, służących do wynajdywania cieni, możemy użyć dwóch sposobów do znalezienia perspektywy linij przenikania się ciał, to jest : linij w których ściany jednego ciała przecinają ściany drugiego ciała. Rozwiniemy te dwa sposoby na dwóch następujących przykładach :

I. — *Mamy jeden graniastosłup sześcioboczny (fig. 88), którego podstawa abcdef leży na płasczyznie podstawowéj rzutów ; i drugi, którego podstawa* 1,2,3,4, *leży na płasczyźnie* $E_t E_\pi$ *prostopadłéj do podstawy. Znaleźć linię przenikania się tych dwóch graniastosłupów.*

Ażeby rozwiązać to zagadnienie używamy płaszczyzn równoległych do krawędzi obu graniastosłupów. Szukamy kierunku wzajemnego przecięcia się tych płaszczyzn z płaszczyznami podstawowemi obu graniastosłupów i przez szczególne krawędzie jednego i drugiego graniastosłupa przesuwamy płaszczyzny. Każda pomocnicza płaszczyzna przesunięta przez krawędź jednego graniastosłupa, przetnie drugi graniastosłup podług prostéj równoległéj do jego krawędzi, a punkt w którym ta równoległa spotka krawędź, przez którą płaszczyzna pomocnicza przesuniętą została, tam będzie przeniknienie się téj krawędzi ze ścianą drugiego graniastosłupa,

W naszych graniastosłupach płaszczyzny pomocnicze przetną płaszczyznę podstawy graniastosłupa pionowego podług prostych równoległych do perspektyw rzutów podstawowych krawędzi graniastosłupa poziomego; płaszczyznę zaś E podług linii pionowych. Przesuńmy więc przez *a* płaszczyznę pomocniczą, perspektywa jéj śladu podstawowego będzie *aa'*, a perspektywa przecięcia się jéj z płaszczyzną E będzie pion *a'a''*. Graniastosłup poziomy będzie więc przecięty tą płaszczyzną podług prostéj, któréj perspektywa jest *a''*A. Krawędź *a* wnika więc w ścianę graniastosłupa poziomego w punkcie, którego perspektywą jest punkt A na płaszczyznie 1,4. W ten sam sposób postępując z krawędzią *b*, otrzymamy punkt B jako perspektywę punktu wnikania krawędzi *b* w ścianę 4, 3. Kreśląc *bb'*, następnie *b'b''* a nakoniec *b''*B.

Ponieważ punkt A leży na ścianie 1,4; a punkt B na ścianie 4,3, nie możemy więc ich z sobą połączyć, albowiem krawędź 4 (wspólna tym ścianom) przeszkadza temu. Ażeby zatem połączenie to stało się możliwém, przesuwamy płaszczyznę pomocniczą przez krawędź 4 kreśląc linie 4,4'*m*, 4'*m'* i *m'm*, dotąd dopóki nie będziemy mogli połączyć punktu A z *m*, a punktu *m* z B; linie A *m* i *m* B dadzą właśnie część linii przenikania się graniastosłupów.

Postępując w podobny sposób od krawędzi do krawędzi otrzymamy perspektywę całéj linii przeniknienia, przedstawionéj na figurze.

II. — Zastosowanie figury 57.

Niech będzie dany ostrosłup sześcioboczny abcdefs (fig. 89) którego podstawa leży na podstawie rzutów, i *poziomy graniastosłup* 1,2,3,4, *leżący na płaszczyźnie* E_t E_π *prostopadłéj do podstawy, wynaleźć linię przenikania się tych dwóch ciał.*

Płaszczyzna rzucająca krawędź *bs* na podstawę, przecina ścianę graniastosłupa 1,2 podług prostéj, któréj perspektywa jest *e″d″*. Punkt B w którym się *bs* i *e″d″* przecinają, jest perspektywą punktu wnikania krawędzi *bs* w ścianę 1,2.

Przejdźmy do innéj krawędzi *cs*. Płaszczyzna rzucająca tę krawędź na podstawę przecina ścianę 2,3 podług prostéj, któréj perspektywą jest *f″c″*. W przecięciu się téjże prostéj z krawędzią *cs*, to jest w punkcie C znajduje się perspektywa wnikania krawędzi *cs* w ścianę 2, 3.

Punktów B i C nie możemy bezpośrednio połączyć, bo każdy z nich leży na innéj ścianie. Szukamy więc wniknięcia wspólnéj krawędzi dwóch tych ścian w ścianę *bcs*. Płaszczyzna rzucająca krawędź 2 przecina ścianę ostrosłupa podług prostéj, któréj perspektywą jest *ig″*.

Punkt *m*, w którym ta perspektywa *ig″* przecina się z krawędzią, jest perspektywą punktu wniknienia krawędzi 2 w ścianę *bcs*, i. t. d,

§ 20

POWIERZCHNIE KRZYWE I CIAŁA OGRANICZONE TAKIEMIZ POWIERZCHNIAMI.

Jak przy graniastosłupach i ostrosłupach tak téż i przy walcach i stożkach, weźmiemy pod uwagę tylko te z nich, których osie są prostopadłe do płaszczyzn podstawowych, t. j. walce i stożki *proste*. Rysując w perspektywie rzutowéj walce lub stożki, kreślimy tylko linie podstawowe i najskrajniejsze krawędzie w perspektywie, czyli tak zwane *kontury*, a w pewnych tylko razach, najczęściéj z potrzeb konstrukcyjnych wynikłych, zmuszeni jesteśmy kreślić inne jeszcze krawędzie.

Zamierzamy wyrysować walec, mający za podstawę koło na płaszczyźnie $E_t E_\pi$ *którego środkiem jes o,w* (*fig.* 90).

Rysujemy więc koło K,*k* w sposób podany na fig. 61 w perspektywie i w perspektywie rzutu podstawowego. Kreślimy oś walca *oo′ww′* prostopadle do płaszczyny E *w*, i elipsy K′*k*′ jako perspektywę i perspektywę rzutu podstawowego drugiéj podstawy walca. Te elipsy K′*k*′ będą przystające do elips K i *k*, a poprowadziwszy równolegle do osi walca dwie styczne do obydwóch elips KK′ i *kk*′, otrzymamy perspektywę konturów walca, jako téż i kontury perspektywy rzutu jego podstawowego.

Chcąc na powierzchni tego walca wynaleźć punkt, którego perspektywa np. rzutu podstawowego jest μ, kreślimy przez punkt μ równoległą do *ww′* która przetnie elipsę *k* w punktach $\nu\nu'$, których perspektywy leżą na elipsie K w punktach *n* i *n′*.

Z tych punktów prowadząc *nm* równoległą do *n′m′* i równoległą do *oo′*, otrzymamy perspektywę takich dwóch krawędzi walca, których perspektywą rzutów podstawowych była prosta $\mu\nu$. Pionowo więc nad μ, na tych krawędziach znajdować się będą perspektywy *m* i *m′*, a zatem leżą one na powierzchni walca.

§ 21

Dany jest walec W *i płaszczyzna* E, *znaleźć perspektywę linii przecięcia się walca z płaszczyzną.*

Dla rozwiązania tego zagadnienia szukamy przecięcia się krawędzi walca z daną płaszczyzną i łączymy tak znalezione punkta linią krzywą ciągłą. Jeżeli walec ma za podstawę koło (a zatém elipsę w perspektywie), dostatecznêm będzie obrać cztery krawędzie wychodzące z punktów końcowych dwóch osi lub dwóch średnic sprzężonych téjże elipsy.

Dany jest walec kołowy prosty i płaszczyzna $E_t E_\pi$ *(fig.* 91). *Znaleźć przecięcie się tego walca z daną płaszczyzną.*

Obierzmy na elipsie podstawowéj walca cztery punkta α, β, γ, δ (końce osi téj elipsy) i szukajmy przecięcia się krawędzi walca wychodzących z tych czterech punktów z daną płaszczyzną. Poprowadźmy więc przez punkt α w dowolnym kierunku prostą e_π i przyjmijmy ją za perspektywę śladu podstawowego płaszczyzny rzucającéj krawędź αa na podstawę (a zatém do podstawy prostopadłéj), podług fig. 23 znajdziemy ślady tej płaszczyzny. Ta płaszczyzna pomocnicza przecina daną płaszczyznę podług prostéj, któréj perspektywą jest prosta $o'\mu a$. W punkcie przecięcia się prostéj z perspektywą krawędzi, znajdzie się perspektywa punktu w którym krawędź walca przecina daną płaszczyznę E.

Dla krawędzi δd obierzmy za płaszczyznę rzucającą, płaszczyznę f równoległą do e, nakreślmy zatém f_π równoległą do e_π, a z punktu μ' w którym E_π i f_π przecinają się poprowadźmy $\mu' d$ równoległą do μa; ponieważ nadto e jest równoległą do f, a zatém perspektywy przecięć tych dwóch płaszczyzn z daną płaszczyzną E będą równoległe. W ten sposób otrzymamy punkt d, jako perspektywę przecięcia się krawędzi $d\delta$ z płaszczyzną E. W podobny sposób możemy otrzymać punkta b i c jako perspektywy przecięcia się następnych dwóch krawędzi walca z daną płaszczyzną.

Przez te punkta a, b, c, i d które są końcami dwóch osi sprzężonych elipsy, możemy nakreślić szukaną elipsę.

Jeżeli dany jest walec i prosta $l\lambda$ *(fig.* 92) *znajdziemy wniknienie téj prostéj w powierzchnię walca sposobem następującym :*

Obieramy na danéj prostéj punkt $s\sigma$, i kreślimy przezeń prostą p,π, równoległą do krawędzi walca. Szukamy następnie perspektywy m przecięcia się prostéj $l\lambda$ i perspektywy n przecięcia się prostéj p,π z daną płaszczyzną E (podstawową walca). Prosta mn jako krawędź płaszczyzny E i (mns) przecina elipsę w dwóch punktach a i b; a zatem płaszczyzna (mns) przecina walec podług dwóch krawędzi, których perspektywy przecinając l, dadzą perspektywy d i d' punktów wnikania danéj prostéj w powierzchnię walca.

§ 22

Jeżeli mamy jakąkolwiek powierzchnię krzywą (fig. 93) i na niéj punkt a, możemy przez ten punkt a przesunąć dwie płaszczyzny, z których jedna przetnie daną powierzchnię krzywą podług linii krzywéj man, a druga podług krzywéj m_1an_1 przecinających się w punkcie a.

Przez punkt a do krzywéj mna możemy zawsze poprowadzić styczną T_1, do krzywéj m_1an_1

w tymże samym punkcie a styczną T_2. Płaszczyzna przesunięta przez te dwie styczne, będzie płaszczyzną styczną do powierzchni krzywéj w punkcie a.

Zadaniem naszém jest wynajdywanie na danych powierzniach takich linii krzywych, które są najłatwiejsze do wykreślenia na tychże powierzchniach.

Tak np. jeżeli mamy powierzchnie krzywe, które powstały z poruszania się prostéj, jak walce, stożki, powierzchnie wichrowate i t. p., powinniśmy obierać proste tworzące za krzywe, które jak się wyżéj rzekło, są nam potrzebne do oznaczenia płaszczyzny stycznéj. Naturalnie że jeżeli jedna z tych, na powierzchni wykreślić się mających krzywych, jest prostą, tedy będzie ona zarazem przedstawiać odpowiednią styczną.

Stosując to do płaszczyzn stycznych i do walców, będziemy mogli rozwiązać następujące zagadnienie:

Dany jest walec W (w perspektywie) i na powierzchni jego punkt a (fig. 94), chcemy w tym punkcie poprowadzić płaszczyznę styczną do powierzchni tego walca.

Przez punkt a nakreślmy krawędź walcową któréj perspektywą jest prosta na równoległa do oo. Następnie wykreślmy przecięcie tego walca płaszczyzną przechodzącą przez punkt a, t. j. elipsę k' przystającą do elipsy podstawowéj k walca, i do téjże elipsy k' poprowadźmy styczną t. Płaszczyzna przesunięta przez krawędź na i styczną t będzie płaszczyzną styczną szukaną; a krawędź na będzie krawędzią, podług któréj ta płaszczyzna dotyka walca. Zważywszy że elipsa k' przystaje do elipsy k, styczna T w punkcie n do elipsy k poprowadzona jest równoległą do t, wnosić możemy że kreśląc przez na i F płaszczyznę, płaszczyzna ta będzie właśnie płaszczyzną styczną. Ponieważ zaś styczną do elipsy nie tak łatwo wyrysować można, zrobimy więc kład K koła podstawowego walca, i kład μ punktu n (podług fig. 61) i wykreślimy w tym punkcie μ styczną Z do koła, aż do przecięcia się w punkcie m z E_t.

Punkt m połączony z punktem n daje perspektywę żądanéj stycznéj T.

Dany jest walec W i punkt aα (fig. 95), przesunąć przez ten punkt płaszczyznę styczną do walca.

Prowadząc z punktu α styczne αn i αm, a z punktów m i n krawędzie nn i mm otrzymamy te właśnie krawędzie, w których szukane płaszczyzny styczne dotykają powierzchni walca. Chcąc punkt n i m dokładnie oznaczyć, robimy kład a' punktu α i kład koła K (którego perspektywą jest elipsa k).

Kreśląc styczne $a'n'$ i $a'm'$ obracamy punkta zetknięcia się na powrót w dawne położenia a otrzymamy punkta n i m.

Chcemy wykreślić walec, któryby leżał jedną ze swoich krawędzi na płaszczyźnie podstawowéj rzutów.

Płaszczyzna podstawowa tego walca $E_t E_\pi$ (fig. 96) będzie prostopadłą do płaszczyzny podstawowéj rzutów. Obieramy więc na téj płaszczyźnie punkt $o\omega$ za środek a długość $o\omega$ za perspektywę promienia koła. Robiąc $o\omega' = o\omega$, otrzymamy ztąd daną perspektywę téj średnicy koła, która jest prostopadłą do podstawy. Druga średnica cd prostopadła do wyżéj wykreślonéj, będzie w perspektywie równoległą do E_π.

Chcąc wynaleźć jéj długość w perspektywie, szukamy rzeczywistéj długości $\omega''o''$ promienia $o\omega$; następnie robimy kład punktu ω czyli kład E_p' śladu podstawowego około osi X i odcinamy $o'c' = o'd' = o''\omega''$. Punkta c' i d' rzucone pionowo odetną perspektywę cd téj drugiéj średnicy. Perspektywy $\omega\omega'$ i cd dają parę osi sprzężonych elipsy podstawowéj perspektywy walca. Krawędzie konturu walca będą styczne do téj elipsy i prostopadłe do E_t.

Niech będzie dany punkt $a\alpha$ przez który chcemy przesunąć płaszczyzny styczne do tego walca.

Przez punkt $a\alpha$ poprowadźmy prostę $D\lambda$ równoległą do krawędzi walca i szukajmy perspektywy a_e przecięcia się jéj z płaszczyzną E. Z tego punktu a_e poprowadzone styczne stykają się z elipsą w punktach m i n; a zatém mm i nn będą perspektywami tych krawędzi, w których płaszczyzny dotykają walca.

Daną jest perspektywa walca wystawionego na płaszczyźnie podstawowéj rzutów i kierunek prostéj $s\sigma$. Chcemy poprowadzić płaszczyzny styczne do tego walca i równoległe do $s\sigma$ (fig. 97).

Na danéj prostéj obierzemy dowolnie punkt $o\omega$, prosta $o\omega$ będzie prostopadłą do podstawy a zatém równoległą do krawędzi walca. Płaszczyzna trójkąta $s\sigma\omega$, któréj perspektywa śladu podstawowego e_π jest w σ, będzie także równoległą do krawędzi walca. Posuwajac ją tak, ażeby E_π stała się równoległą do E'_π i równoległą do σ i zetknęło się z elipsą $\alpha\beta\gamma\delta$ w punktach m i n, otrzymamy perspektywy krawędzi mm' i nn', w których płaszczyzny styczne równoległe do $s\sigma$ dotykają walca.

Gdyby kierunek $s\sigma$ był kierunkiem światła; część powierzchni walca $n\delta mm'adn'$ byłaby oświetloną, druga zaś jéj część w *cieniu własnym*; a krawędzie mm' i nn' byłyby krawędziami odgraniczającemi cień od światła. Chcąc wynaleźć perspektywę cienia rzuconego na podstawę, szukamy perspektywy cieni $\mathfrak{abcd}$ punktów $abcd$ górnéj podstawy i kreślimy elipsę $\mathfrak{abcd}$. Kontury tego cienia będą proste, styczne do dwóch elips $\alpha\beta\gamma\delta$ i $\mathfrak{abcd}$, i równoległe do σ. Pomijamy dalsze zagadnienia dotyczące warunków w jakich płaszczyzny styczne mogą być prowadzone do powierzchni walcowych, oznaczymy tylko warunki w których można wykreślić płaszczyznę styczną wspólną do dwóch walców.

Obydwa walce mają swe podstawy k i k' na jednéj płaszczyźnie.

Kreślimy na téj płaszczyznie styczne wspólne do k i k' i wystawiamy w punktach zetknięcia się tych stycznych z k i k' tworzące każdego z walców. Jeżeli te tworzące są równoległe, zlewające się z sobą lub téż przecinają się, natenczas mogą istnieć wspólne płaszczyzny, w przeciwnym zaś razie, nie ma płaszczyzn stycznych wspólnych dwom walcom. Chcąc wykreślić walec W któryby się stykał z danym walcem W', wzdłuż jednéj tworzącéj tego ostatniego, dostatecznèm jest narysować na płaszczyznie podstawowéj danego walca, linię krzywą stykającą się z linią podstawową danego walca i uważać tę krzywą za linię podstawową szukanego walca.

Tworzące walca W muszą być równoległe do tworzących danego walca i płaszczyzny styczne do tych dwóch walców są wspólne. Niech będzie walec wyrysowany w perspektywie (fig. 98) różniący się od poprzedzających tylko tém, że jest próżny, nie ma podstaw i części powierzchni z przodu, t. j. że część $a\alpha d\delta$ jest wyjętą.

Przy kierunku światła $s\sigma$ otrzymamy cienie w sposób następujący:

Podług figury poprzedzającéj, otrzymamy cień rzucony na podstawę i tworzące odgraniczające cień i światło mm i nn. Przesuwając płaszczyznę rzucającą światło przez prostą $a\alpha$, otrzymamy $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_x$ na perspektywę przecięcia się téj płaszczyzny z powierzchnią walca. Koniec $\mathfrak{a}$ téj prostopadłéj do osi X, otrzymamy prowadząc $a\mathfrak{a}$ równolegle do s, tak żeby punkt $\mathfrak{a}$ był perspektywą cienia punktu a na wnętrze walca. Postępując w ten sposób z dowolnie obranymi tworzącemi $b\beta$, $c\gamma$,... otrzymamy $\mathfrak{bc}$... na perspektywy cieniów rzuconych, punktów bc... na wnętrze walca.

§ 23

Na płaszczyznie $E_t E_\pi$ (fig. 99) kreślimy perspektywę K k, koła i z jego środka $o\omega$ proste os, $\omega\sigma$ prostopadle do płaszczyzny E. Obrawszy dowolnie na téj prostopadłéj punkt $s\sigma$, kreślimy z punktu s i σ styczne do elipsy K, a z punktu σ styczne do elips. Otrzymamy tym sposobem perspektywę i perspektywę rzutu podstawowego (w konturach) stożka prostego kołowego, spoczywającego swą podstawą na płaszczyznie E. Chcąc oznaczyć, że punkt, którego dana jest perspektywa a, jest punktem powierzchni stożka, kreślimy perspektywę sam tworzącéj stożka, przechodzącéj przez a. Rzucamy punkt m na elipsę k w μ, a łącząc ten punkt z punktem σ otrzymujemy w $\mu\sigma$ perspektywę rzutu podstawowego téjże krawędzi, w któréj się pionowo pod a znajdować musi perspektywa α rzutu podstawowego punktu a.

§ 24

Dany jest stożek kołowy prosty leżący na podstawie rzutów i płaszczyzna $E_t E_\pi$ *(fig. 100), chcemy znaleźć perspektywę linii przecięcia się stożka z daną płaszczyzną.*

Poprowadźmy przez oś stożka płaszczyznę $F_t F_\pi$ prostopadłą do płaszczyzny E (a zatém płaszczyznę rzucającą taką, iżby F_π w perspektywie prostopadłe było do E_π). Te dwie płaszczyzny E i F przecinają się podług prostéj, któréj perspektywą jest mn. Płaszczyzna zaś F przecina stożek podług tworzących których perspektywy są γs i δs. Część ab linii przecięcia się dwóch płaszczyzn, zawarta między temi dwiema tworzącemi, daje perspektywę wielkiéj osi elipsy, podług któréj stożek przecięcina się z płaszczyzną E; a punkt o środek linii ab, będzie środkiem téjże elipsy. Perspektywa cd małéj osi téj elipsy będzie równoległą do E_π . Aby wynaleźć długość dc, łączymy punkt s z punktem o i przedłużamy linię os aż do punktu ξ leżącego na F_π . Przez ξ kreślimy $\zeta\eta$ równoległą do E_π , a następnie tworzące ζs, ηs. Te dwie tworzące odetną cd w rzeczywistéj długości. Proste ab i cd dają średnice sprzężone elipsy.

Wiemy że przecięcie powierzchni stożka kołowego płaszczyzną równoległą do osi stożka daje hiperbolę, dla któréj otrzymamy blizko-styczne na konturze tego stożka, orthogonalnie rzuconego na płaszczyznę sieczną.

Niech będzie dany stożek $\alpha\beta\gamma\delta s$ *(fig. 101) i płaszczyzna* E_t *równoległa do* E_π *równoległa do* X, *i równoległa do osi stożka, jak to widzimy na rzucie krzyżowym gdzie* E_k *jest równoległą do* $\sigma''s''$. *Znaleźć przecięcie się tego stożka z daną płaszczyzną. Punkta b i c w których elipsa* $\alpha\delta\beta\gamma$ *przecina się z* E_π , *będą perspektywami punktów hiperboli.*

Chcąc wynaleźć perspektywę a wierzchołka hiperboli, szukamy za pomocą rzutu krzyżowego przecięcia się płaszczyzny z tworzącą któréj perspektywą jest δs. Rzucając orthogonalnie punkta α i β na E_π w α_1 i β_1 (tak jak za pomocą rzutu krzyżowego), wierzchołek stożka na płaszczyznę E, co nam da w perspektywie punkt o; otrzymamy proste $o\alpha_1$, i $o\beta_1$ na perspektywy blizkostycznych, za pomocą których możemy wykreślić perspektywę bac hiperboli szukanéj.

Niech będzie dana (fig. 102) perspektywa stożka kołowego prostego i płaszczyzna E_t *równoległa do* E_π *równoległa do* X, *równoległa do tworzącéj któréj perspektywą jest* $s\gamma$ *(co wskazuje rzut krzyżowy, ponieważ* E_k *jest równoległą do* $\gamma''s''$); *chcemy znaleźć perspektywę paraboli, podług któréj płaszczyzna* E *przecina dany stożek.*

Dla rozwiązania tego zadania szukamy (za pomocą rzutu krzyżowego) perspektywy o przecięcia się płaszczyzny E z tworzącą, któréj perspektywą jest $s\delta$. Ten punkt o będzie perspektywą wierzchołka, a punkta a i b (w których E_π przecina elipsę $\alpha\delta\gamma\beta$) końcami jednéj cięciwy paraboli. Te trzy punkta wystarczają do wykreślenia szukanéj paraboli *dob*.

§ 25

Są dane: stożek leżący na podstawie i prosta $l\lambda$ (*fig.* 103), *znaleźć perspektywy przecięcia się téj prostéj z powierzchnią stożka.*

Obierzmy na danéj prostéj dowolny punkt $m\mu$ i połączmy m z s a μ z σ. Przez dwie proste $l\lambda$ i $p\pi$, przesuńmy płaszczyznę, która przetnie powierzchnię stożka podług dwóch tworzących. Chcąc wynaleźć te ostatnie, przedłużmy płaszczyznę aż do przecięcia się z płaszczyzną podstawową. W naszym więc przypadku znajdziemy $l\pi$ i $p\pi$; i łącząc te dwa punkta otrzymamy E_π płaszczyzny, który to E_π przetnie elipsę w punktach α i β. Perspektywami więc tworzących podług których płaszczyzna dana przecina powierzchnię stożka, będą proste αs i βs; a zatém punkta d i d_1 będą perspektywami punktów w których prosta $l\lambda$ wnika w powierzchnię stożka.

§ 26

Płaszczyzna $E_t E_\pi$ (*fig.* 104) *jest płaszczyzną podstawową stożka kołowego prostego, na którego powierzchni mamy dany punkt* $a\alpha$; *wynaleźć płaszczyznę styczną przechodzącą przez punkt* $a\alpha$ *i tworzącą podług której ta płaszczyzna styczna dotyka stożka.*

Łącząc wierzchołek stożka z danym punktem, otrzymamy żądaną tworzącą K*k*. Ta tworząca przecina linię podstawową stożka w punkcie $m\mu$. Jeżeli wykreślimy w tym punkcie styczną $t\tau$ do téj linii podstawowéj, to płaszczyzna przesunięta przez K*k* i $t\tau$ będzie płaszczyzną styczną szukaną.

Fig. 105 *przedstawia perspektywę stożka kołowego prostego opierającego się wierzchołkiem o podstawę rzutów, i którego podstawa jest równoległą do podstawy rzutów. Dany jest nadto punkt* $a\alpha$; *chcemy przez ten punkt poprowadzić płaszczyzny styczne do powierzchni tego stożka.*

Łącząc wierzchołek stożka z danym punktem; otrzymamy prostą $l\lambda$. Kreśląc l_1 równolegle do λ przez środek podstawy, otrzymamy w punkcie l_a perspektywę przecięcia się prostéj $l\lambda$ z płaszczyzną podstawową, z którego to punktu możemy poprowadzić dwie styczne $l_a m$ i $l_a n$ do elipsy. Punkta m i n połączone z punktem s dadzą nam perspektywy tych krawędzi, w których szukane płaszczyzny przez $l\lambda$ poprowadzone dotykają powierzchni stożka.

Gdyby punkt dany $a\alpha$ był punktem świecącym, proste ms i ns byłyby perspektywami tworzących odgraniczających cień własny od światła na powierzchni stożka; a perspektywa musiałaby być tak wycieniowaną jak to wskazuje wykreślenie.

Mamy daną perspektywę stożka kołowego prostego, którego podstawa leży na podstawie rzutów i kierunek prostéj $S\Sigma$ (*fig.* 106), *poprowadzić płaszczyzny styczne do stożka równolegle do danéj prostéj.*

Nakreślmy $s\mathfrak{z}$ równolegle do S i $\sigma\mathfrak{z}$ równolegle do Σ, a otrzymawszy w punkcie $\mathfrak{z}$ perspektywę śladu podstawowego téj równoległéj; poprowadźmy przez ten punkt dwie proste E_π i F_π styczne do elipsy w punktach *a* i *b*. Proste *sa* i *sb* będą perspektywami krawędzi, w których płaszczyzny styczne (o perspektywach śladów podstawowych E_π i F_π) przylegają do stożka.

Gdyby kierunek SΣ był kierunkiem padającego światła stożek musiałby być tak wycieniowanym jak to wskazuje wykreślenie. Chcąc dokładnie wynaleźć punkta *a* i *b*, robimy kład koła i kład $\mathfrak{s}_1$ punktu $\mathfrak{s}$, z którego to punktu $\mathfrak{s}_1$ prowadzimy styczne E′*p* i F′*p*, które wyznaczą punkta *a*′ i *b*′ kłady punktów *a* i *b*.

Mamy płaszczyznę E_t, E_π (*fig.* 107) *prostopadłą do podstawy rzutów za podstawę stożka kołowego prostego abcds αβγδσ, chcemy znaleźć cień własny, rzucony przez tenże stożek na podstawę przy danym kierunku światła* SΣ.

Z punktów *a*α, *b*β, *c*γ, *d*δ także z *s*σ, nakreślmy promienie równoległe do kierunku światła. Perspektywy śladów podstawowych tych promieni, t. j. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ i $\mathfrak{s}$ będą perspektywami cieniów rzuconych tych punktów. Kreśląc więc elipsę $\mathfrak{abcd}$, a do niéj z punktu $\mathfrak{s}$ dwie styczne $\mathfrak{s}\mu$ i $\mathfrak{s}\nu$, otrzymamy (rzucając punkta μ i *l* w kierunku S na elipsę *abcd*) na elipsie dwa punkta *m* i *n*, które połączone z punktem *s* dają perspektywy *ms* i *ns* krawędzi odgraniczających na powierzchni stożka jego własny cień od światła.

Dany jest stożek kołowy prosty, leżący na podstawie, którego część przednia asb (*fig.* 108) *jest wyrzucona; wynaleźć cień rzucony.*

Szukamy cienia $\mathfrak{s}$ wierzchołka *s* na podstawę, i kreślimy styczne do elipsy $m\mathfrak{s}$ i $n\mathfrak{s}$; również prostę $a\mathfrak{s}$. Część *ao* téj ostatniéj jest cieniem krawędzi *as* na podstawę. Prosta *os* jest zaś cieniem rzuconym krawędzi *as* na wnętrze stożka.

Dane są: stożek kołowy prosty stojący na podstawie αβγδs, prosta xy i kierunek światła SΣ (*fig.* 109); *znaleźć perspektywę cienia rzuconego przez tę prostą na powierzchnię stożka.*

Szukamy (jak na fig. 106) perspektywy cienia rzuconego przez stożek na podstawę i perspektywy krawędzi odgraniczających światło od cienia własnego, t. j. μ*s* i ν*s*. Szukamy również perspektywy $\mathfrak{yx}$ cienia rzuconego przez daną prostą na podstawę. Z punktów $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$ i $\mathfrak{m}$ w których cień prostej danéj przecina cienie krawędzi μ*s*, α*s*, δ*s* i ν*s*, prowadzimy w kierunku równoległym do S proste przecinające te krawędzie w punktach *n*, *a*, *d* i *m*. Te punkta połączone dają część elipsy *nadm*, jako perspektywę cienia danéj prostéj na powierzchnię stożka.

§ 27

Wynajdując perspektywę linij, podług których stożki lub walec przecinają się lub przenikają, postępuje się zupełnie tak samo jak przy wyszukiwaniu przenikania się ostrosłupów i graniastosłupów.

Fig. 110 daje przenikanie się dwóch walców,

Fig. 111 » » » stożków,

Fig. 112 » » stożka i walca.

§ 28

Jeżeli jakakolwiek krzywa obraca się około prostéj, to tworzy ona powierzchnię, którą nazywamy *powierzchnią obrotową* albo *rotacyjną*.

Prosta około której krzywa się obraca zowie się *osią powierzchni obrotowéj*. Każdy punkt danéj krzywéj opisuje podczas obrotu koło, którego środek znajduje się na osi, a którego płaszczyzna jest prostopadłą do osi. Takie koła zowiemy *równoleżnikami*; największy z tych równoleżników ma miano *równika*. Przesunąwszy przez oś płaszczyznę otrzymamy linię przecięcia się téj płaszczyzny z powierzchnią obrotową, linię tę nazywamy *południkiem*.

Chcąc więc wyrysować w perspektywie rzutowéj powierzchnię obrotową, kreślimy dostateczną liczbę równoleżników, tak w perspektywie jako téż w perspektywie ich rzutów podstawowych, i łączymy perspektywy tych równoleżników linią krzywą ciągłą, dotykającą wszystkich perspektyw równoleżników, co nam daje *kontur* powierzchni obrotowéj.

Obieramy więc $o\omega$ (w rzucie krzyżowym $\omega''o''$ prostopadle do Y, fig. 113) prostopadłą do podstawy w punkcie o, i w rzucie krzyżowym linię krzywą k'' jako rzut krzyżowy téj krzywéj, która obracając się około osi ma utworzyć powierzchnię obrotową. Obierając na $\omega''o''$ punkta $1''$, $2''$, $3''$, $4''$..., kreślimy z tych punktów linie prostopadłe do $\omega''o''$ aż do k''. Każda z tych linii pionowych daje nam promień odpowiedniego równoleżnika. Kreślimy zatém perspektywy każdego z tych równoleżników, i perspektywy ich rzutów podstawowych a otrzymamy elipsy $1, 1'$; $2, 2'$; $3, 3'$; $4, 4'$; i 5. Obwodząc wszystkie elipsy należycie krzywą ciągłą, otrzymamy kontur perspektywy powierzchni obrotowéj.

Przyjmując płaszczyznę przesuniętą przez oś której E_π ma dowolny kierunek, otrzymamy w punktach α, $(\beta,\beta')(\gamma,\gamma')(\delta,\delta')$ ... przecięcia się równoleżników z tą płaszczyzną; a łącząc $\alpha\beta\gamma\delta$... otrzymamy perspektywę południka.

Chcąc na powierzchni obrotowéj oznaczyć perspektywę danego punktu, wykreślimy perspektywę równoleżnika i na téj perspektywie oznaczymy punkt szukany.

Niech będzie w rzucie krzyżowym (fig. 114) dana oś $\omega''o''$ psostopadła do Y *i elipsa* k'', *tworząca elipsoidę obrotową; zarazem jest dana płaszczyzna* $E_t\ E_\pi$ *przesunięta przez środek o elipsoidy. Chcemy znaleźć perspektywę linii przecięcia się powierzchni obrotowéj z daną płaszczyzną.*

Kreślimy (tak jak na fig. 113) perspektywy kilku równoleżników, perspektywy ich rzutów podstawowych i kontur powierzchni. Płaszczyzna E przetnie tę powierzchnię podług elipsy, któréj perspektywę mamy wykreślić.

Dla wykreślenia téj perspektywy poprowadzimy przez oś płaszczyznę F_tF_π któréj F_p jest prostopadłe do E'_p. Wykreślmy perspektywę m południka leżącego na płaszczyźnie F (zgodnie z fig. 113) i perspektywę linii przecięcia się płaszczyzn E i F. Część ab téj linii wspólnego przecięcia leżąca na perspektywie południka, daje nam perspektywę wielkiéj osi szukanéj elipsy. Czyniąc $aO = bO$, rysujemy perspektywę r równoleżnika przechodzącego przez punkt O a w téj elipsie cięciwę cd równoległą do E_π. Prosta cd będzie perspektywą małéj osi żądanéj elipsy; ab i cd będą średnicami sprzężonemi elipsy dającéj perspektywę téj elipsy, podług któréj płaszczyzna E przecięta jest powierzchnią obrotową.

§ 29

Dana jest w konturach powierzchnia obrotowa przez perspektywy równoleżników i przez perspektywy rzutów podstawowych r_1, ρ_1; $r_2\ \rho_2$; $r_3\ \rho_3$ *tych równoleżników i prosta* $D\lambda$ *(fig. 115); mamy znaleźć perspektywę punktów, w których ta prosta przenika daną powierzchnię obrotową.*

Przesuwamy w myśli płaszczyznę przez prostą $D\lambda$ rzucającą na podstawę, dla któréj więc λ będzie perspektywą śladu jéj podstawowego. Ta płaszczyzna przecina równoleżniki w punktach których perspektywy są m, n, o, p, q i s. Linię krzywą łączącą te punkta przecina l w punktach a i b. Te punkta zatém będą perspektywami szukanych punktów przenikania.

§ 30

Daną jest perspektywa powierzchni obrotowéj (samo przez się rozumie się, że perspektywa kuli, t. j. rzut orthogonalny kuli jest kołem) i na niéj punkt $a\alpha$ (fig. 116) chcemy poprowadzić płasczyznę styczną, przez ten punkt przechodzącą.

Skoro daną być ma perspektywa punktu powierzchni obrotowéj, musimy mieć równoleżnik r,ρ i południk m,μ, przecinające się w punkcie a,α. Kreślimy styczną do równoleżnika Tr, $T\rho$, w danym punkcie, równie jak styczną Tm, $T\mu$ do południka w tym samym punkcie. Płasczyzna przez te dwie styczne przesunięta będzie żądaną płasczyzną styczną.

Dana jest powierzchnia obrotowa tak w perspektywie jako też w rzucie krzyżowym, punkt $a\alpha$, i jego rzut krzyżowy a'' (fig. 117). Chcemy przez ten punkt poprowadzić płasczyzny styczne do powierzchni obrotowéj.

Obieramy sobie którykolwiek równoleżnik r_1, r''_1. Styczna $t''_1 s''_1$ w punkcie t'' do krzyżowéj danéj poprowadzona, przetnie oś powierzchni w punkcie s_1, s''_1. Ta prosta utworzy stożek obwiedni danéj powierzchni.

Tak ją obracać będziemy, ażeby punkt s stale miejsce swe zatrzymał, a prosta zawsze dotykała równoleżnika. Łącząc następnie punkt s_1 (perspektywę wierzchołka stożkowego) z punktem danym a, otrzymamy w punkcie d perspektywę przecięcia się téj prostéj s_1a z płasczyzną E_t równoleżnika r_1 (za pomocą rzutu krzyżowego d''). Z tego punktu d poprowadźmy do elipsy r_1 dwie styczne, otrzymamy punkta m_1 i n_1, w których płaszczyzny przesunięte przez a,α, dotykać będą powierzchni obrotowéj. W ten sposób postępując z różnymi równoleżnikami, otrzymamy szereg punktów takich jak m, które dają łącząc je ze sobą, krzywę M jako perspektywę linii zetknięcia się wszystkich przez punkt a,α, dających się poprowadzić płasczyzn stycznych do powierzchni obrotowéj.

Gdyby punkt $a\alpha$, był punktem świecącym, natenczas krzywa M byłaby perspektywą linii odgraniczającéj cień własny od świałła na danéj powierzchni obrotowéj.

Dane są: perspektywa, rzut krzyżowy (fig. 118) powierzchni obrotowéj, nadto kierunek promienia $S\Sigma$, światła; znaleźć perspektywę linii odgraniczającéj cień własny od światła na danéj powierzchni.

W tym przypadku obieramy sobie różne równoleżniki np. r_1, r''_1; w punkcie t''_1, prowadzimy styczną t''_1 s''_1 do konturu krzyżowego aż do przecięcia się téj stycznéj z osią $\omega''o''$, w ten sposób otrzymamy perspektywę s_1 wierzchołka stożka stycznego do danéj powierzchni podług równoleżnika r_1. Prowadząc S_1 równolegle do S i σ_1 równolegle do Σ, otrzymamy punkt t_1, perspektywę przecięcia się promienia przechodzącego przez wierzchołek stożka z płaszczyzną podstawową stożka. Z punktu t_1 poprowadzone styczne do elipsy r_1 dają na perspektywy tych punktów punkta m_1 i n_1, w których płaszczyzny równoległe do promienia światła dotykają powierzchni obrotowéj podług równoleżnika r_1. W ten sposób postępujemy z każdym innym równoleżnikiem (jak to wskazuje wykreślenie tyczące się równoleżnika r_2). Na równiku r otrzymamy podobne punkta m i n prowadzące do r dwie styczne równoległe do Σ (albowiem dla równika powierzchnią obwiednią jest walec prostopadły do podstawy). Punkta tak wyszukane i w należytym porządku z sobą połączone wydadzą nam szukaną linię M.

Chcąc znaleźć perspektywę cienia powierzchni obrotowéj, rzuconego na podstawę, szukamy perspektywy cienia rzuconego przez linię M.

Jeżeli dana jest perspektywa kuli (fig. 119) *i kierunek światła,* SΣ, *otrzymamy perspektywę linii odgraniczającéj cień własny od światła na powierzchni kuli.* Kreśląc przez środek kuli O,ω, płaszczyznę $E_t E_\pi$ prostopadłą do kierunku światła (podług fig. 114) kreśląc elipsę M przedstawiającą perspektywę linii, podług któréj płaszczyzna ta przecina kulę. Szukamy cienia rzuconego $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ przez punkta a, b, c, d, a w ten sposób otrzymana elipsa m będzie właśnie perspektywą cienia rzuconego przez daną kulę na podstawę.

§ 31

Niech będzie dana kula leżąca na podstawie, którego środkiem w perspektywie jest punkt θ *(fig.* 120) *i perspektywa* E *koła równoległego do podstawy nakreślonego ze środka kuli na wysokości punktu* θ.

Jeżeli tę kulę tak będziemy poruszać że jéj środek będzie się posuwał po kole E, to powierzchnie wszystkich tych położeń kuli będziemy mogli obwieść wspólną powierzchnią, którą nazywamy *powierzchnią pierścieniowatą* lub *pierścieniem.* Taki pierścień dotyka kuli w każdém położeniu wzdłuż jednego z południków, a mianowicie wzdłuż tego równoleżnika, którego płasczyzna przechodzi przez środek θ koła E i przez środek odpowiedniego położenia téj kuli.

Chcemy znaleść cień własny pierścienia przy danym kierunku SΣ *światła.* Dla znalezienia tego cienia nakreślmy na kuli środkowéj perspektywę m jéj własnego cienia i cień μ rzucony na podstawę. Prócz tego wykreśliwszy na téj kuli perspektywę r równika, na którym obieramy dowolnie punkta $\alpha, \beta \ldots$ przez które przechodzą perspektywy południków m_1 $m_2 \ldots$ Widzimy iż południk m_1 przecina granicę światła w punkcie a, południk m_2 w punkcie $b \ldots$ Postępując tak daléj w kierunku promienia $o\alpha$, natrafimy na punkt o_1, leżący na elipsie E. Możemy więc kulę środkową (nie zmieniając jéj położenia względem światła) przesunąć tak, ażeby środek przypadł w punkcie o_1; w tém położeniu pierścień dotknie kulę wzdłuż południku m_1.

Kreślimy więc z punktu α_1 (dla którego $o_1\alpha_1 = o\alpha$) południk $\alpha_1 c_1 = m_1$ i odcinamy na nim $\alpha_1 a_1 = \alpha a$. Punkt a_1 będzie perspektywą punktu cienia własnego na pierścieniu. Idąc następnie w kierunku $o\beta$ trafiamy na punkt o_2 elipsy E, robiąc $O_2\beta_2 = o\beta$, kreślimy południk $\beta_2 C_2 = m_2$; a odcinając na nim $\beta_2 b_2 = \beta b$, otrzymamy w punkcie b_2 perspektywę punktu własnego cienia na pierścieniu. Tak wyszukane punkta jak a_1, b_2 i t. d. dadzą w połączeniu na perspektywę linii odgraniczającéj światło od cienia własnego na pierscieniu, krzywą M.

Łącząc s z s_1 (perspektywy rzutów podstawowych środków kul o i o_1) prostą, która przecina cień rzucony m kuli danéj w punkcie $\mathfrak{m}_1$; robiąc $s\mathfrak{s} = sm$, otrzymamy w punkcie $\mathfrak{s}_1$ perspektywę punktu cienia rzuconego przez pierścień na podstawę. Tak samo otrzymamy podobny punkt rzuconego cienia w $\mathfrak{s}_2$, łącząc s z $\mathfrak{m}_2$ i odcinając $s_2\mathfrak{s}_2 = s\mathfrak{m}_2$. Łącząc te punkta, otrzymamy krzywą $\mathfrak{M}$ na perspektywę granicy cienia rzuconego przez pierscień na podstawę.

§ 32

Dane są: perspektywa powierzchni obrotowéj (fig. 121), *kierunek światła* SΣ *i punkt* a,α; *chcemy znaleźć perspektywę cienia, ktory ten punkt* a,α *rzuca na daną powierzchnię.*

Przesuwamy przez dany punkt płaszczyznę rzucającą światło na podstawę, kreślimy z punktu α prostę λ równoległą do Σ, ta prosta przedstawi perspektywę śladu podstawowego płaszczyzny. Nadto λ przecina perspektywy ρ_2, ρ_3, ρ_1 rzutów podstawowych równoleżników r_2, r_3, r' w punktach μ i ν, które to punkta rzucone na perspektywy równoleżników w kierunku prostopadłym do osi X dają n_1, n_2, n_3. Punkta powyższe połączone z sobą dają krzywę $n_1 n_2 n_3$ na perspektywę linii przecięcia się powierzchni obrotowéj z płaszczyzną rzucającą. Kreśląc zatém z punktu a prostę l równoległą do S, która tę krzywę przecina w punkcie $\mathfrak{a}$, otrzymamy punkt $\mathfrak{a}$ na perspektywę cienia rzuconego na powierzchnię obrotową przez dany punkt a,α.

§ 33

Chcąc wynaleźć perspektywę cienia rzuconego przez daną prostę l,λ na daną powierzchnię obrotową, możemy postąpić w dwojaki sposób, jako to :

1) albo obierając na danéj prostéj dowolnie punkta a,α, b,β... szukając (podług fig. 121) perspektywy $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$... cieniów tych punktów na daną powierzchnię ; albo też :

2) przesuwając przez daną prostę równolegle do światła płaszczyznę P i szukając perspektywy przecięcia się téj płaszczyzny z daną powierzchnią obrotową (podług fig. 114).

Używając pierwszego sposobu, otrzymamy na figurze 122 perspektywę własnego cienia m, i cienia rzuconego $abb's$ konturów ćwiartki kuli na jéj wnętrze.

§ 34

POWIERZCHNIE SKOŚNE (WICHROWATE).

Powiemy tu tylko o niektórych z tych powierzchni. Nawiasowo czynimy uwagę, że każdą powierzchnię wichrowatą tworzy linia *prosta*, chociaż i linie *krzywe* tworzyć je mogą.

Niech będzie (fig. 123) dana perspektywa $\mathfrak{K}$ jakiejkolwiek krzywéj leżącéj na podstawie, i prosta l,λ. Aby utworzyć powierzchnię skośną, trzeba żeby inna prosta poruszała się w każdém położeniu dotykając tak krzywéj $\mathfrak{K}$ jak i prostéj l,λ, zostając zawsze równoległą do danéj płaszczyzny $E_l E_\pi$.

Nakreślmy płaszczyznę $E'_l E'_\pi$ równolegle do $E_{1l}E_{1\pi}$ tak, ażeby $E_{1\pi}$ było styczne do krzywéj K w punkcie m_1; szukajmy następnie perspektywy d_1, przecięcia sie danéj prostéj $l\lambda$ z tą płaszczyzną E_1, a prosta $m_1 d_1$ przedstawi nam pierwsze położenie tworzącéj w danych warunkach. Następnie nakreślmy płaszczyznę $E_{2l}E_{2\pi}$ równoległą do $e_l e_\pi$, któréj E^2_π przecina krzywę K w punktach m_2 i m'_2; i szukajmy perspektywy d_2 przecięcia się prostéj $l\lambda$ z tą płaszczyzną E^2, proste $m_2 d_2$ i $m'_2 d_2$ dadzą nam perspektywy dwóch następnych tworzących. W ten sposób postępując możemy wynaleźć nieskończoną liczbę takich tworzących, które razem dają powierzchnię skośną, zwaną *konoidą*. Chcąc znaleźć punkt powierzchni takiéj konoidy, obierzemy go na któréjkolwiek z wykreślonych albo dopiero wykreślić się mających tworzących.

Jedną z ważnych dla nas konoid jest powierzchnia śruby płaskiéj, która powstaje, ruchem prostéj posuwającéj się po osi walca i po linii śrubowéj (zostającéj na powierzchni tegoż walca [kołowego i prostego] wykreślonéj) równolegle do płaszczyzny jego podstawy.

Chcąc wynaleźć szczególne położenia tworzącéj w perspektywie, nakreślmy za pomocą kładu koła perspektywę walca (fig. 124) i jego krawędzi 0, I, II, III, IV,.,. rozłożonych regularnie na powierzchni; odetnijmy na krawędzi I część 11′, na krawędzi II część 22′, dwa razy tak wielką i t. d., na każdéj następnéj krawędzi część o jedną cząstkę większą, a łącząc te punkta otrzymamy perspektywę 0, 1′, 2′, 3′, 4′, 5′... linii śrubowéj. Ten sam odcinek kładąc na osi w punkta 0, 1″, 2″, 3″, 4″, 5″... i łącząc punkta 00, 1′1″, 2′2″, 3′3″, 4′4″,... otrzymamy tworzące powierzchni śrubowéj w perspektywie.

Chcąc wynaleźć cień punktu a linii śrubowej na powierzchnię śrubową, przesuńmy przez *a* płaszczyznę rzucającą światło, dla któréj np. E′p jest kładem śladu podstawowego przecinającego kłady tworzących w punktach *m′*, *n′ r′ s′*. Te punkta sprowadzone na perspektywy odpowiednich tworzących, dają nam w połączeniu linię *mnrs* która jest perspektywą przecięcia powierzchni śrubowéj z tą płasczyzną. *aa* równoległa do S daje w miejscu *a* cień na powierzchnię śrubową.

Figura 125 daje nam perspektywę śruby płaskiéj wycieniowanéj.

Kreśląc jak przedtém tak i w tym przypadku na walcu perspektywę linii śrubowéj 0,1,3,4... (fig. 126) a od jakiegokolwiek punktu *o* na osi odcinki 01 = 12 = 23 = 34... podobne tym któreśmy obrali do kreślenia linii srubowéj; proste 11, 22, 33, 44... dadzą nam perspektywy szczególnych tworzących *powierzchni śruby ostréj*. Wszystkie tworzące czynią z osią walca jednakowe kąty. Z punktów linii srubowéj możemy kłaść proste na dół po osi walca pod tym samym kątem, a otrzymamy drugą powierzchnię śrubową. Te dwie powierzchnie przetną się podług linii srubowéj, i utworzą *śrubę ostrą*, któréj perspetywa przedstawioną jest na figurze 127.

§ 35

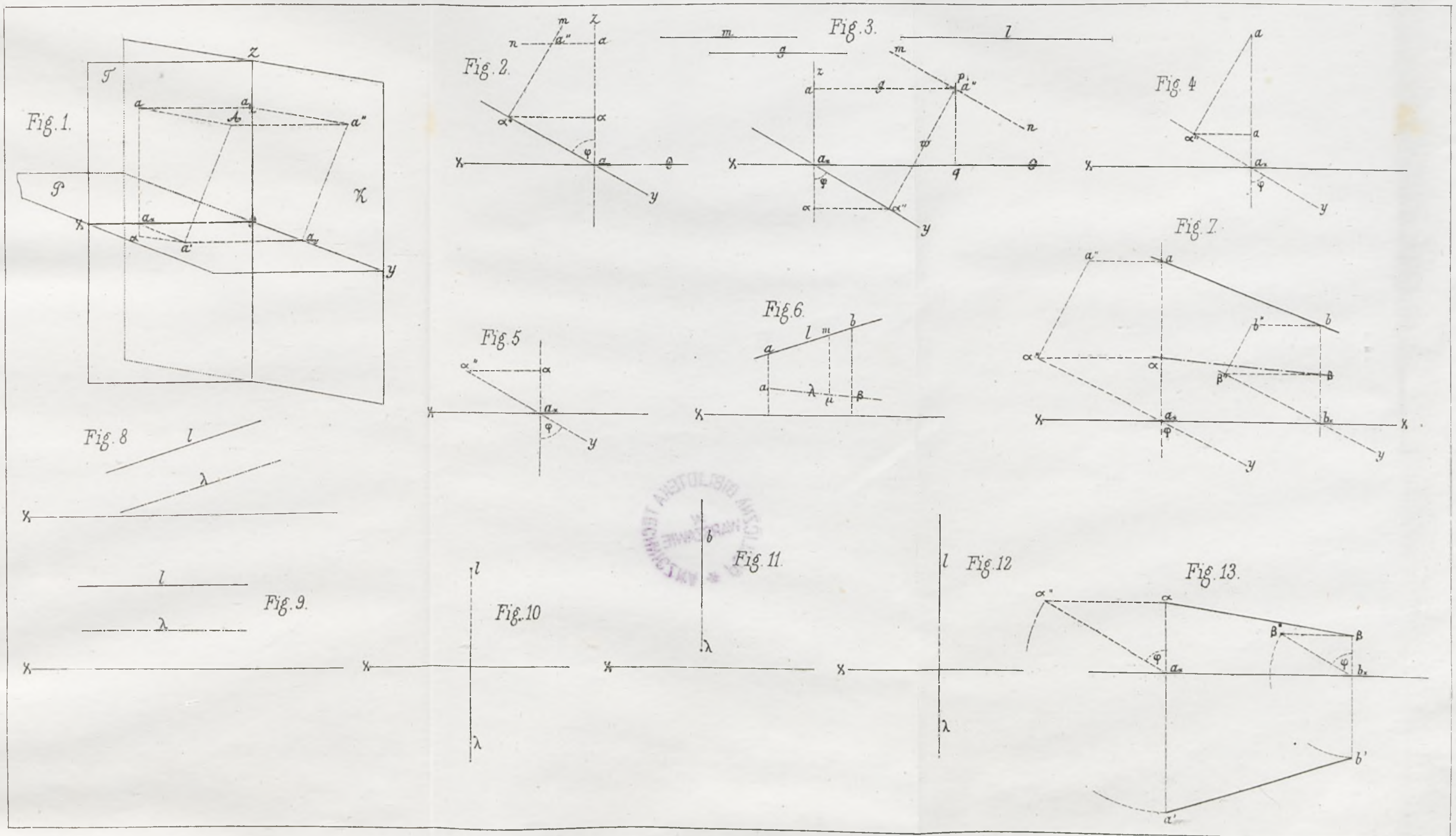
Jeżeli przetniemy parę prostych nierównoległych i nieprzecinających się szeregiem płaszczyzn do siebie równoległych, i połączymy na każdéj takiéj płaszczyznie punkta przecięcia się danych prostych, otrzymamy szereg prostych, tworzących krawędzie powierzchni *paraboloidy hiperbolicznéj* czyli tak zwanej *powierzchni siodełkowéj*.

Jeżeli zaś prosta tak się porusza, że w każdém położeniu dotyka się trzech prostych nierównoległych i nieprzecinających się, to utworzy powierzchnię skośną zwaną *hiperboloidą eliptyczną*. Przy pewnych warunkach może się utworzyć hiperboloida obrotowa.

Każda płaszczyzna przesunięta przez tworzącą powierzchni skośnéj jest płaszczyzną styczną.

Chcąc wynaleźć punkt ściślejszego a raczéj właściwego zetknięcia się, szukamy przecięcia się wszystkich innych tworzących z tą płaszczyzną i łączymy je linią krzywą. Gdzie ta krzywa przetnie krawędź, przez którą płaszczyzna przesunietą została, tam będzie się znajdować szukany punkt ściślejszego zetknięcia się.

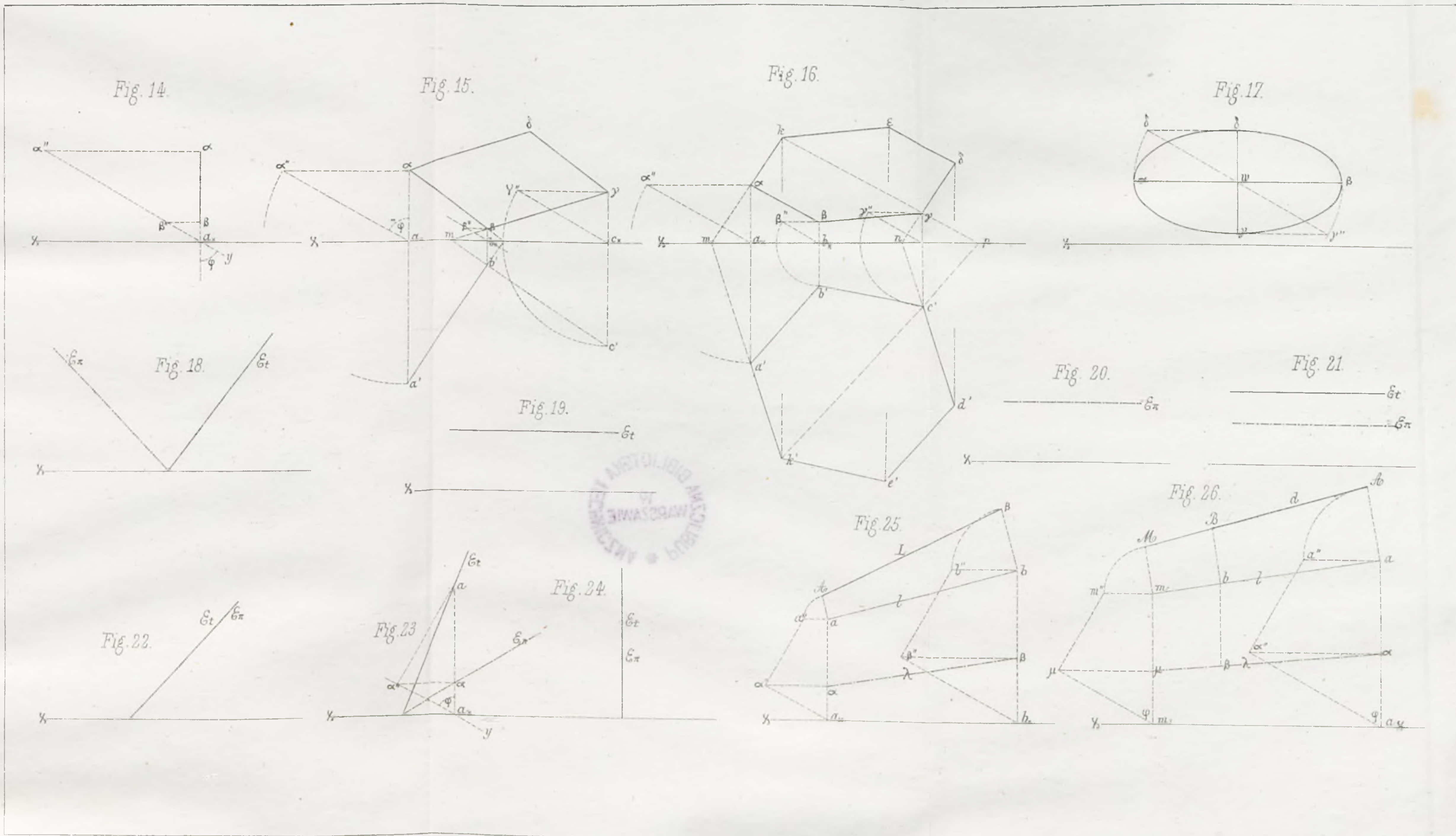
PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK
RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



Autog. Broise, Rue de Dunkerque 43 à Paris.

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK

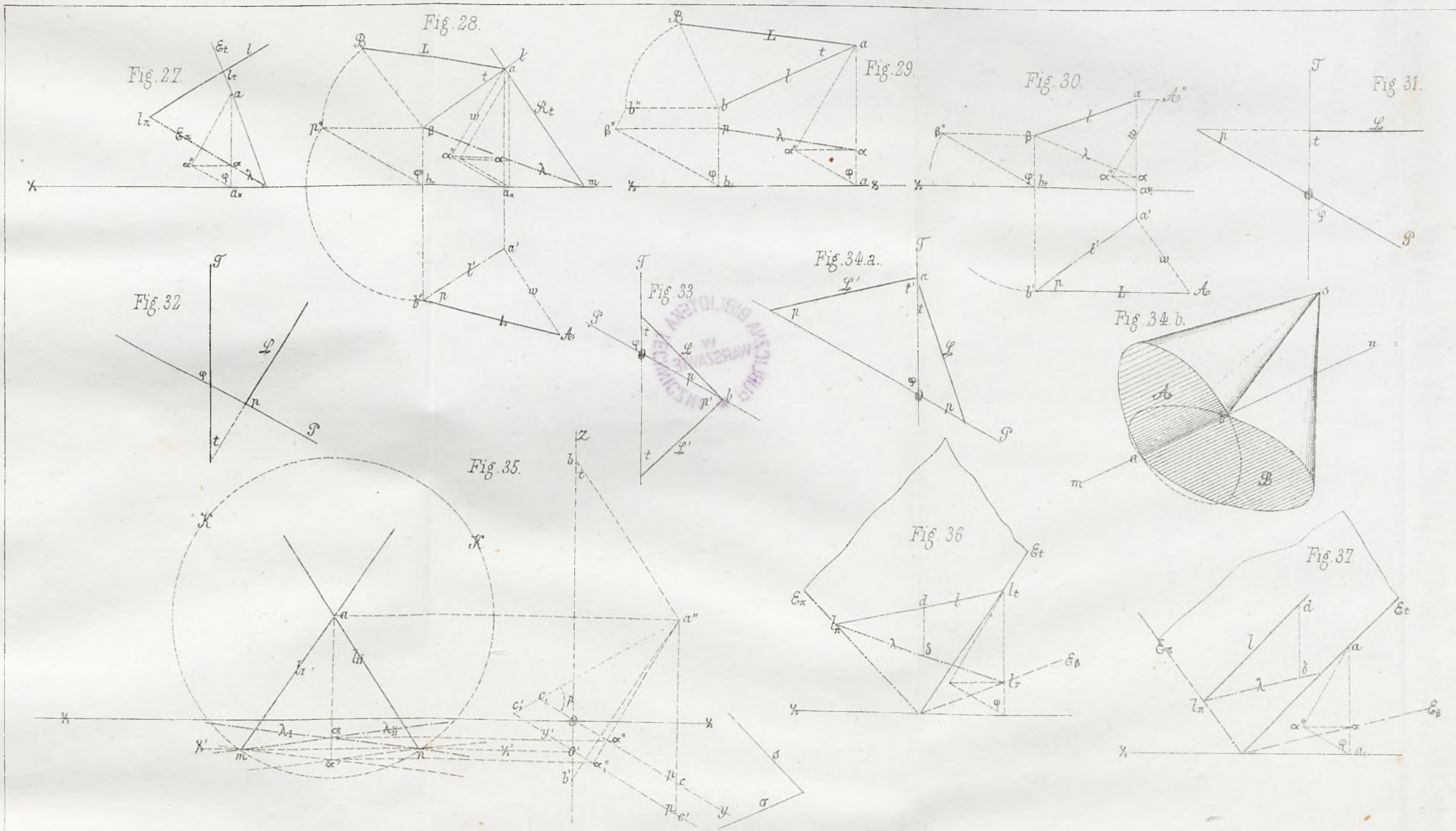
RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



Autog. Broise, Rue de Dunkerque. 43 à Paris.

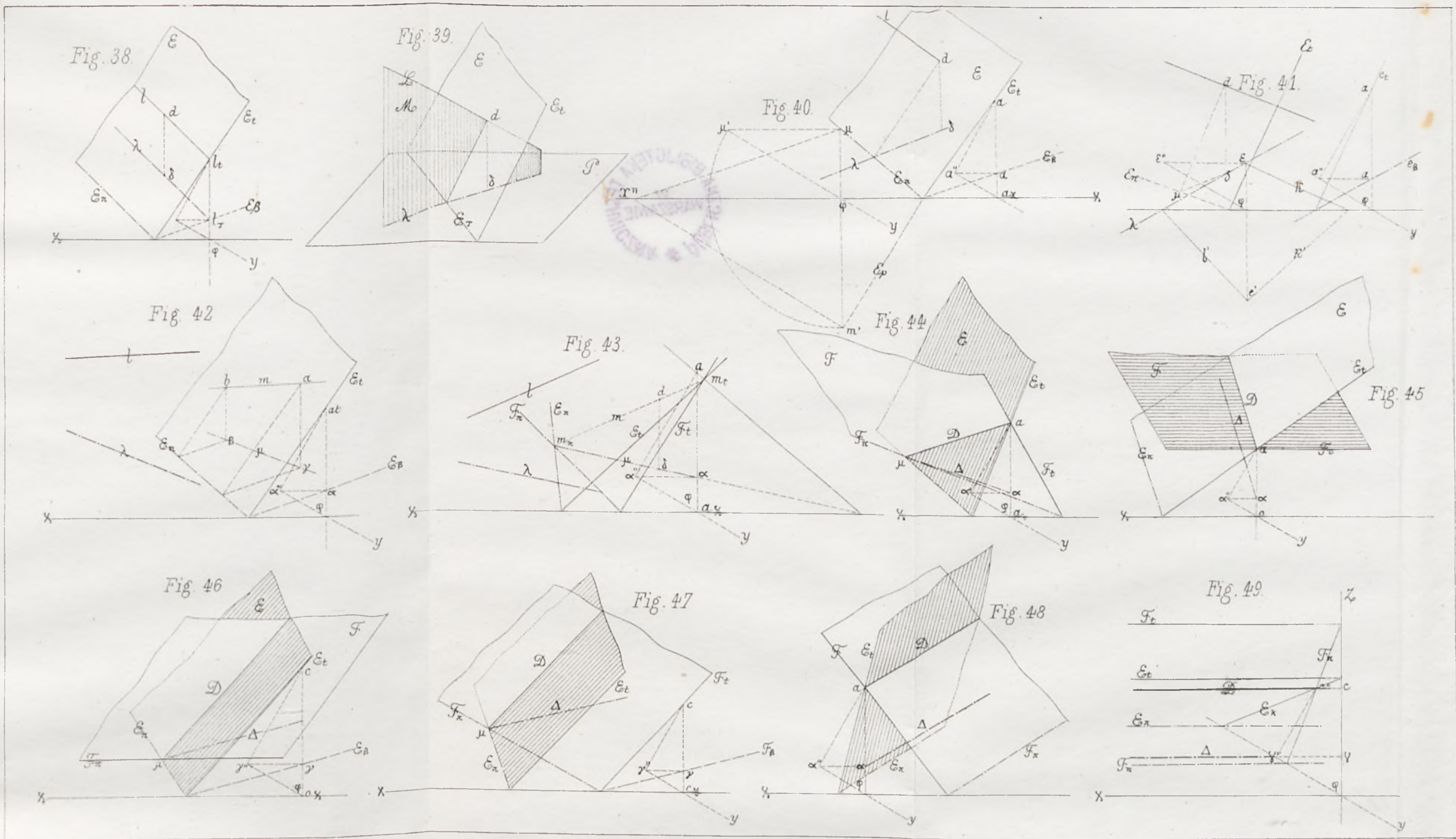
PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK

RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



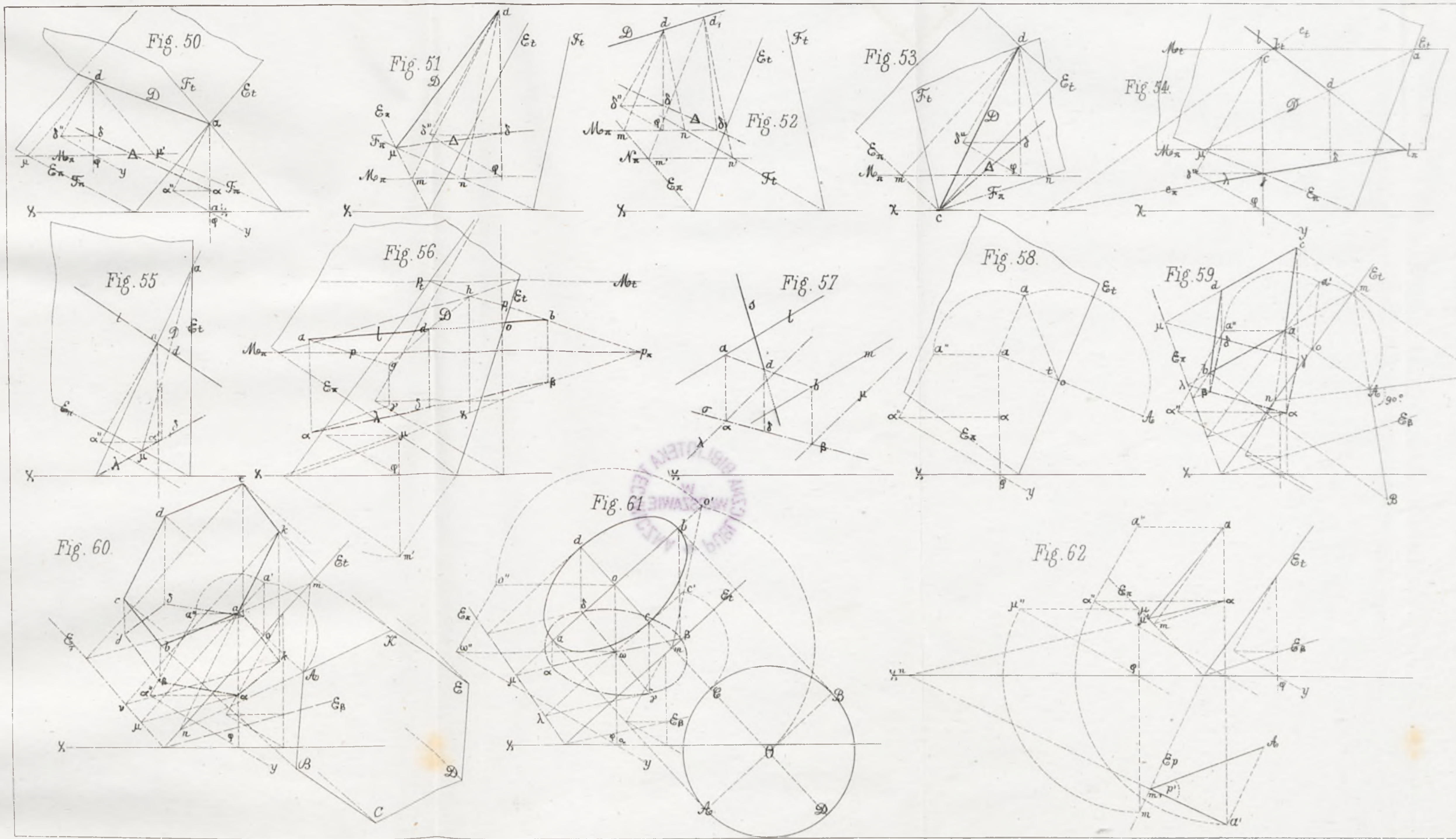
Autog. Broise, Rue de Dunkerque 43 Paris

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



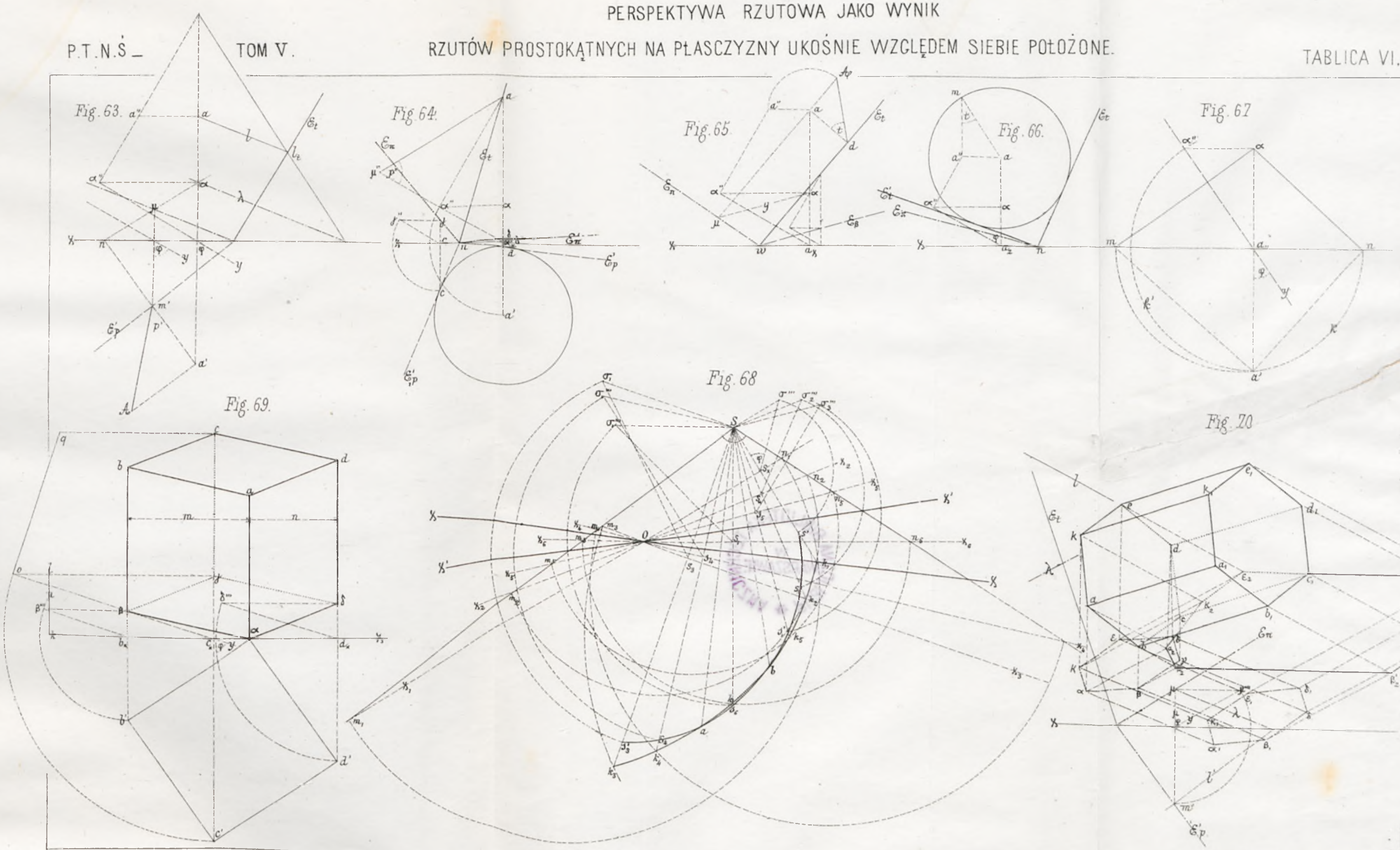
Autog. Broise, R. de Dunkerque 43 à Paris.

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE



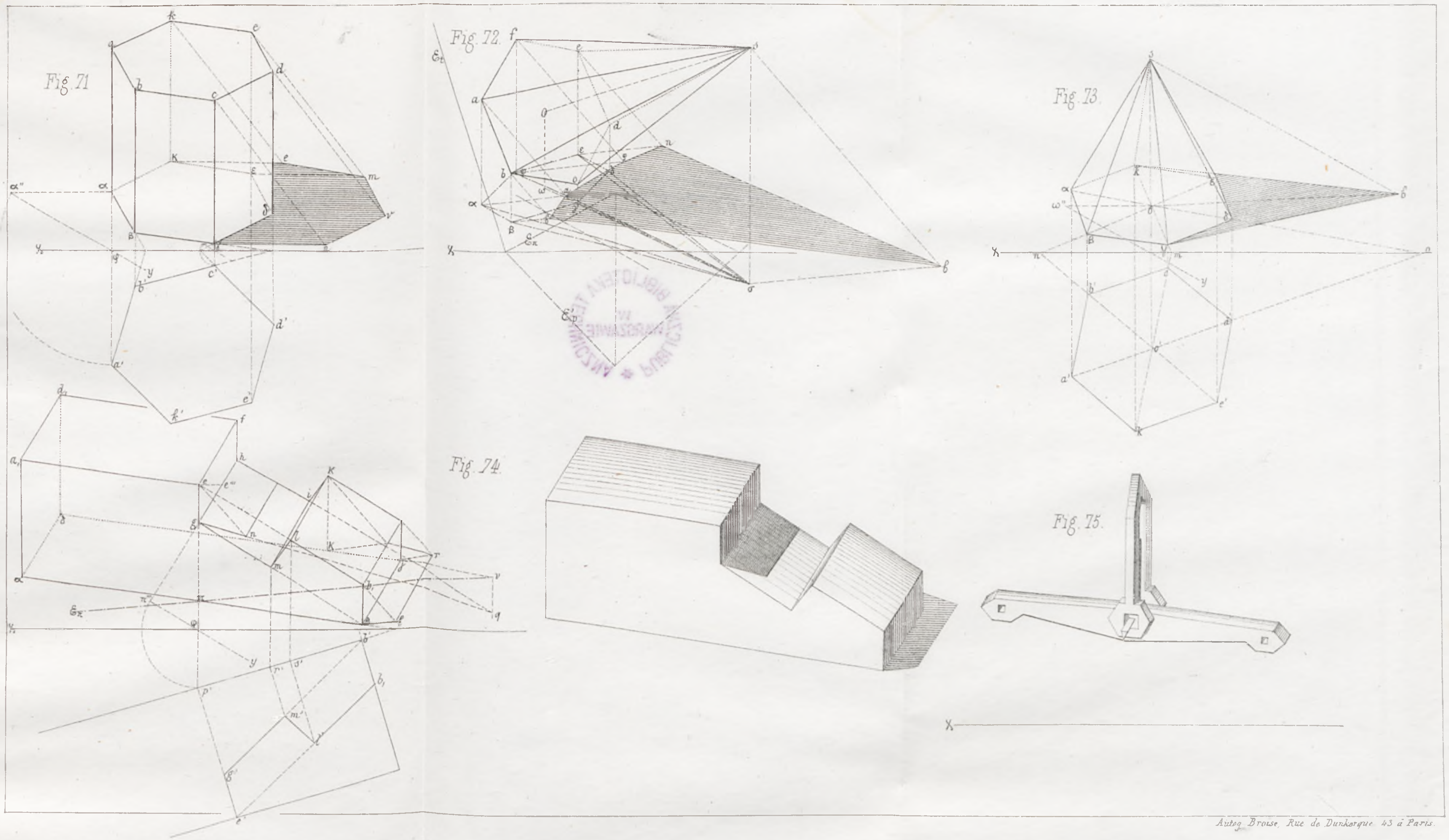
Autog. Broise, R. de Dunkerque. 43. Paris.

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK
RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



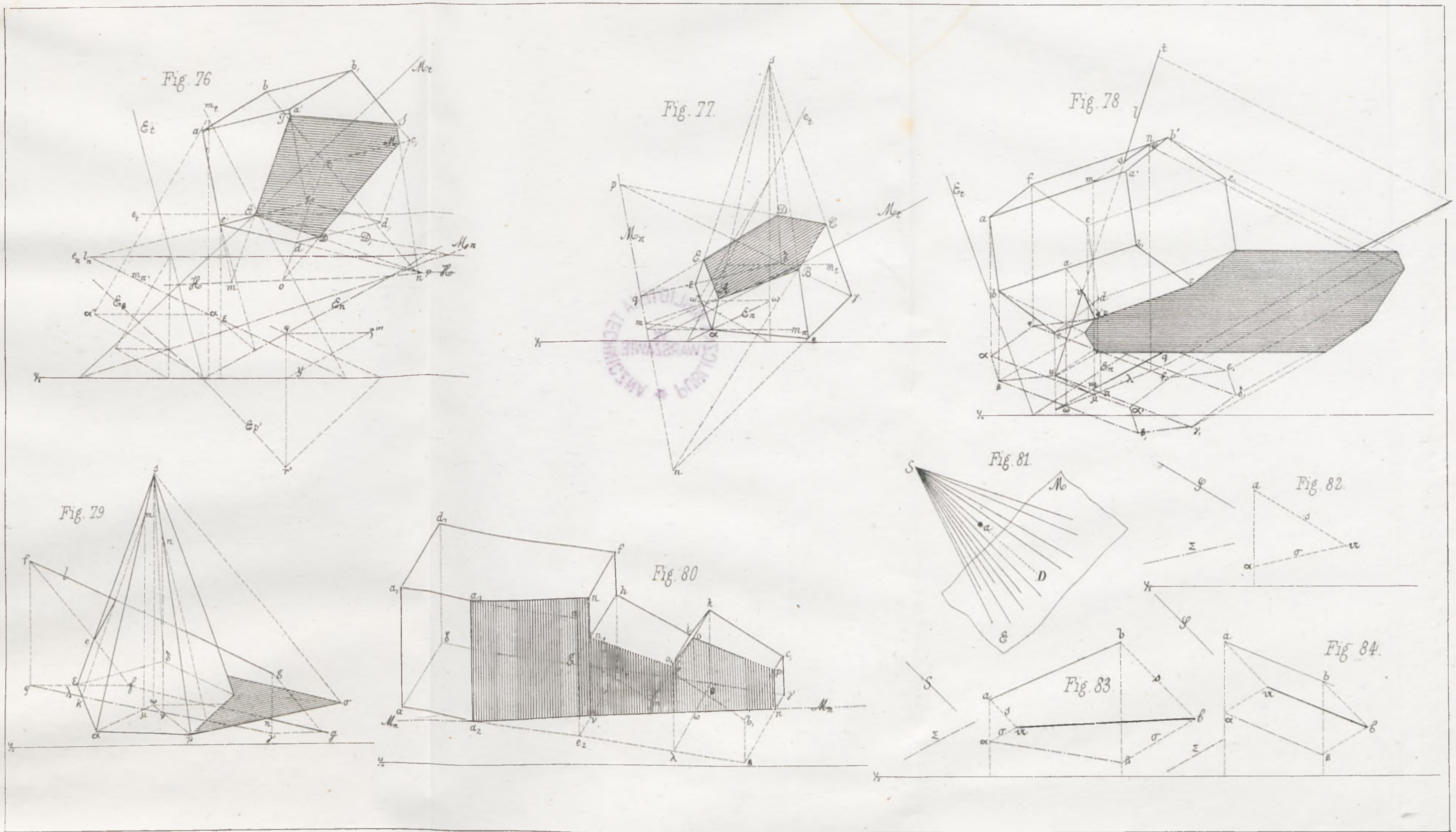
Autog. Broise, Rue de Dunkerque. 43 Paris

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK
RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



Autog. Broise, Rue de Dunkerque, 43 à Paris.

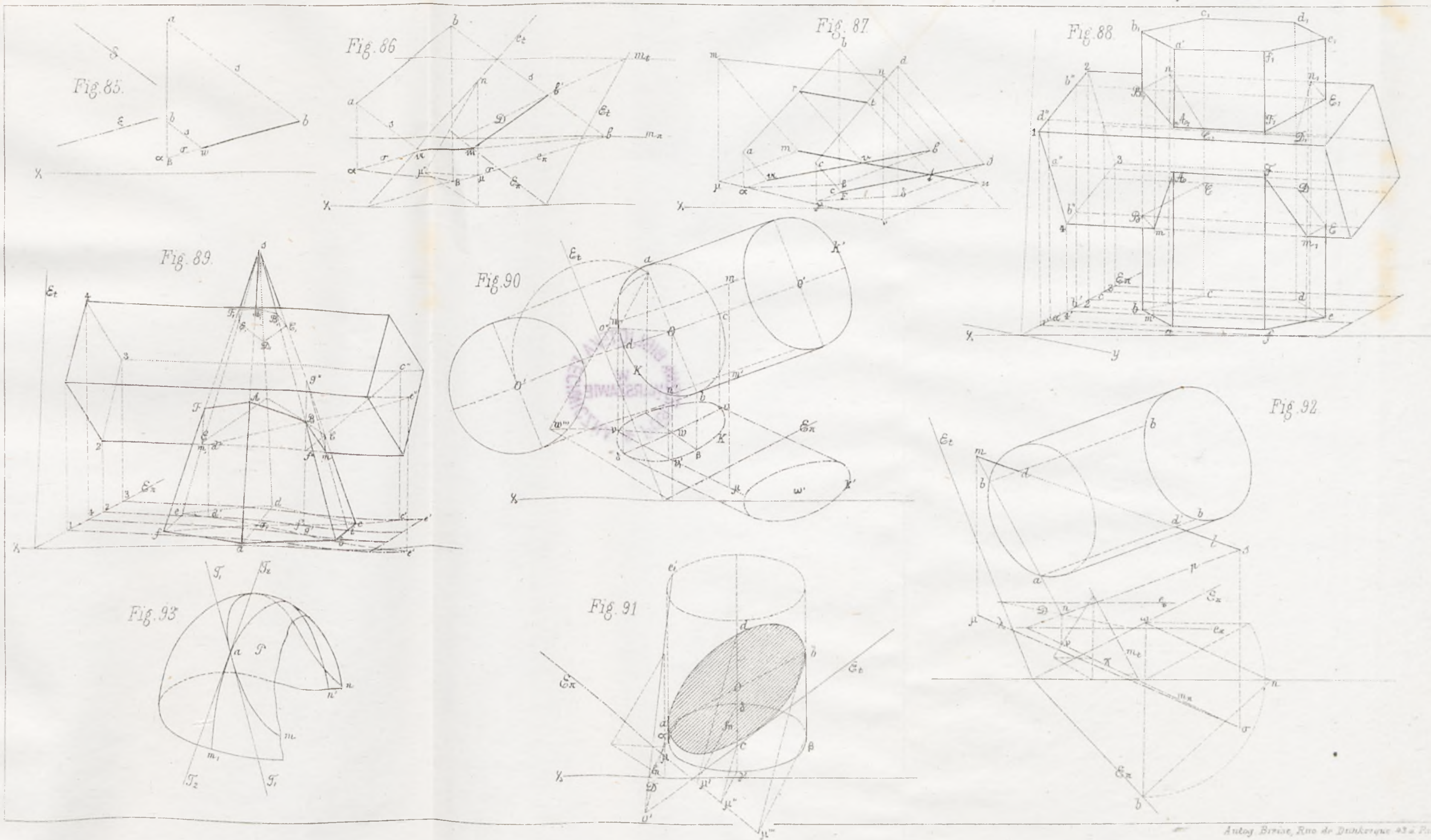
PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK
RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



Autog. Broise, R. de Dunkerque 43 à Paris.

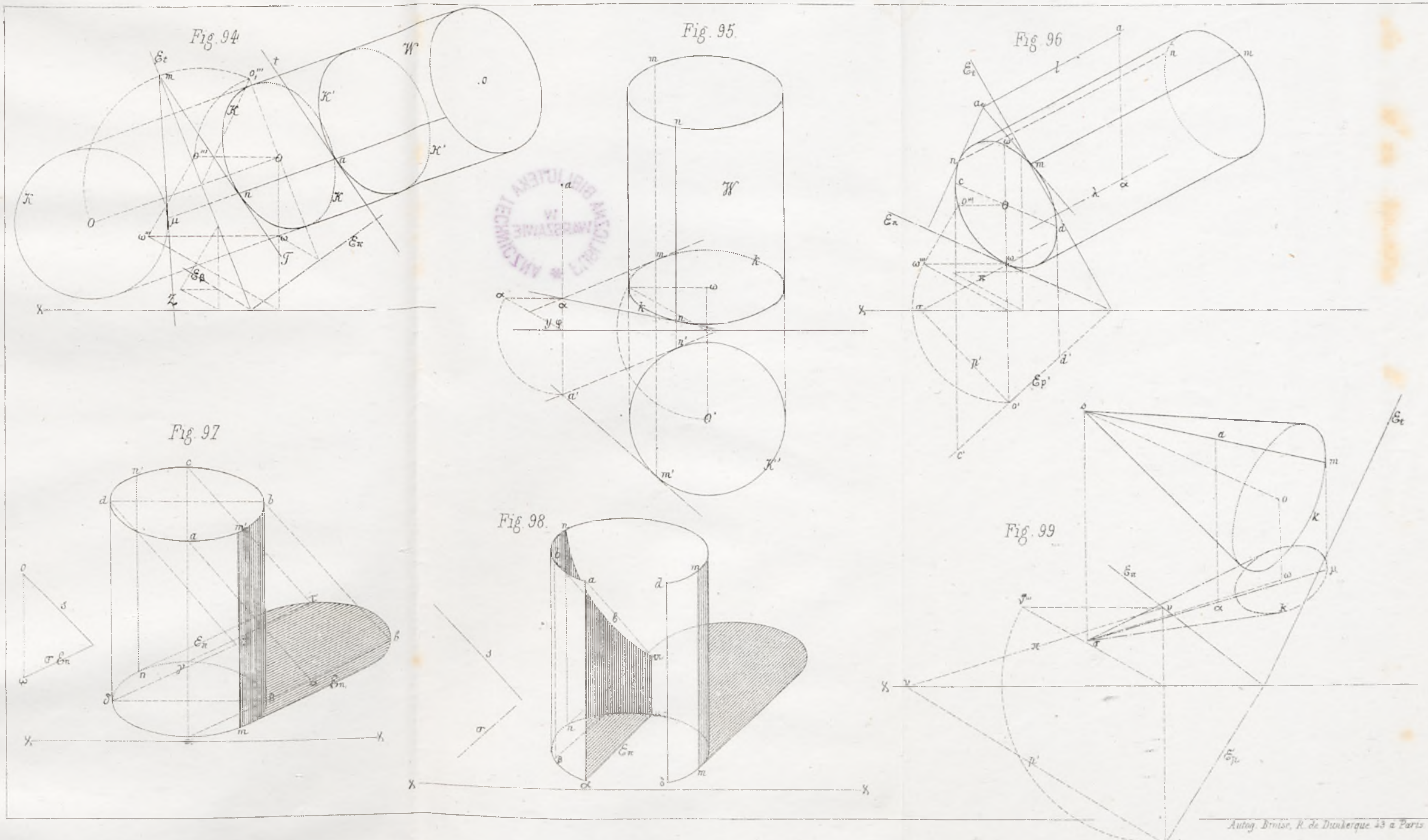
PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE

TABLICA IX



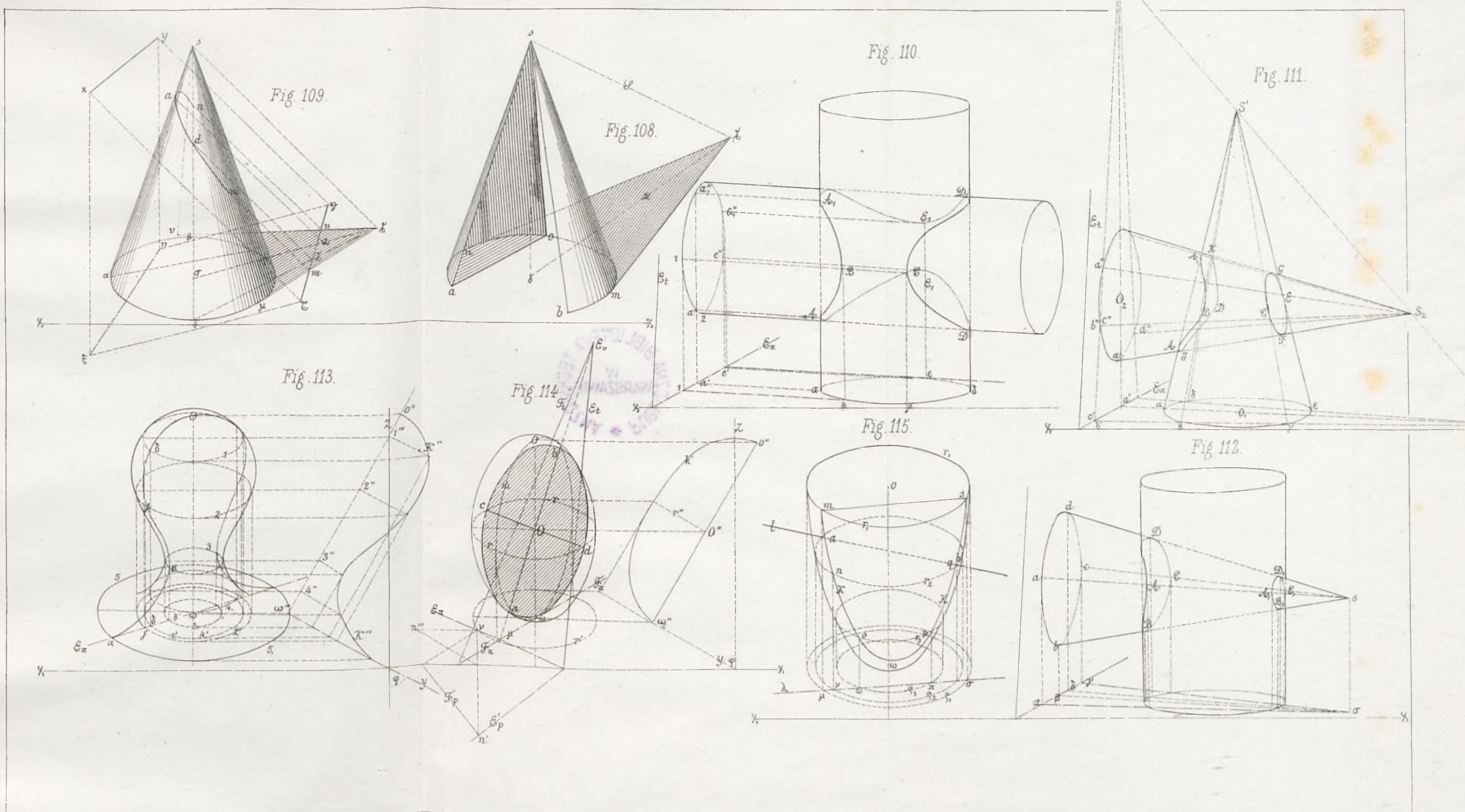
Autog. Bivise, Rue de Dunkerque 43 à Paris.

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK
RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



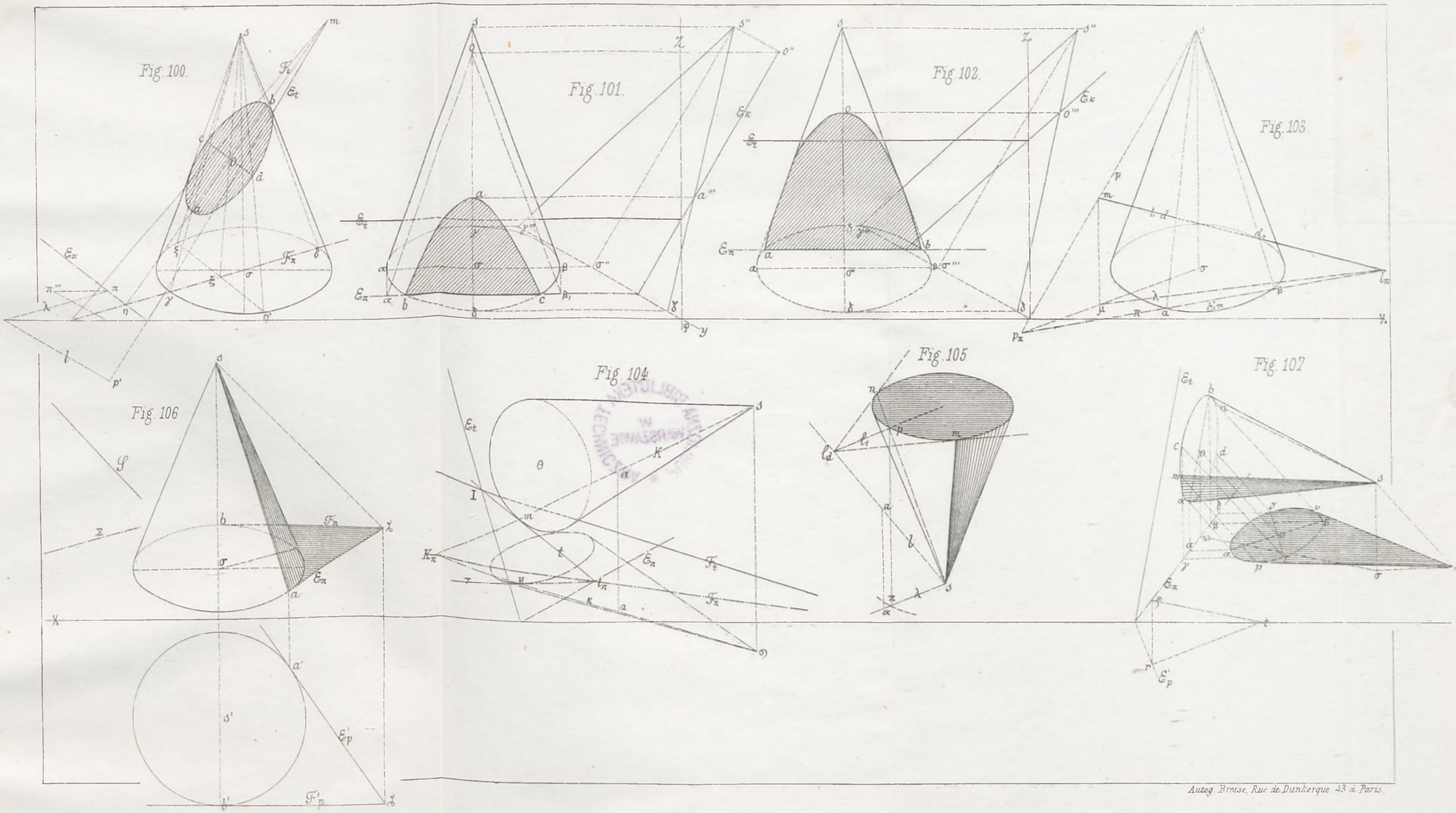
Autog. Broise, R. de Dunkerque 23 à Paris

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



Autog. Broise, Rue de Dunkerque 43 à Paris.

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK
RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.



Autog. Broise, Rue de Dunkerque 43 à Paris.

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASZCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.

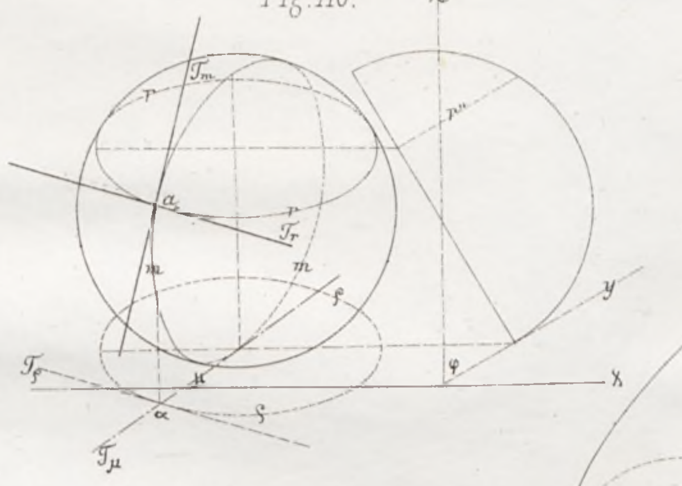


Fig. 116.

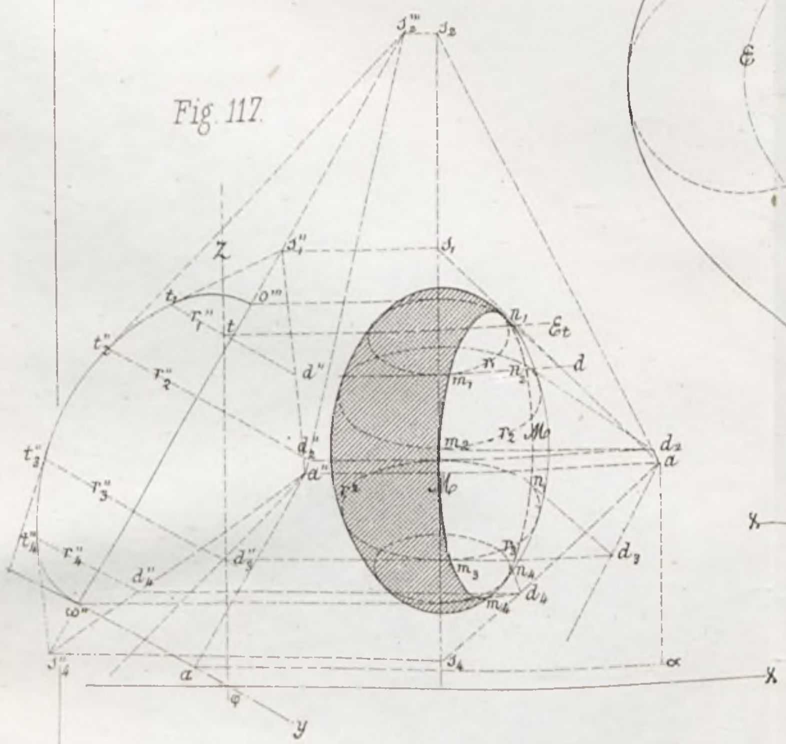


Fig. 117.

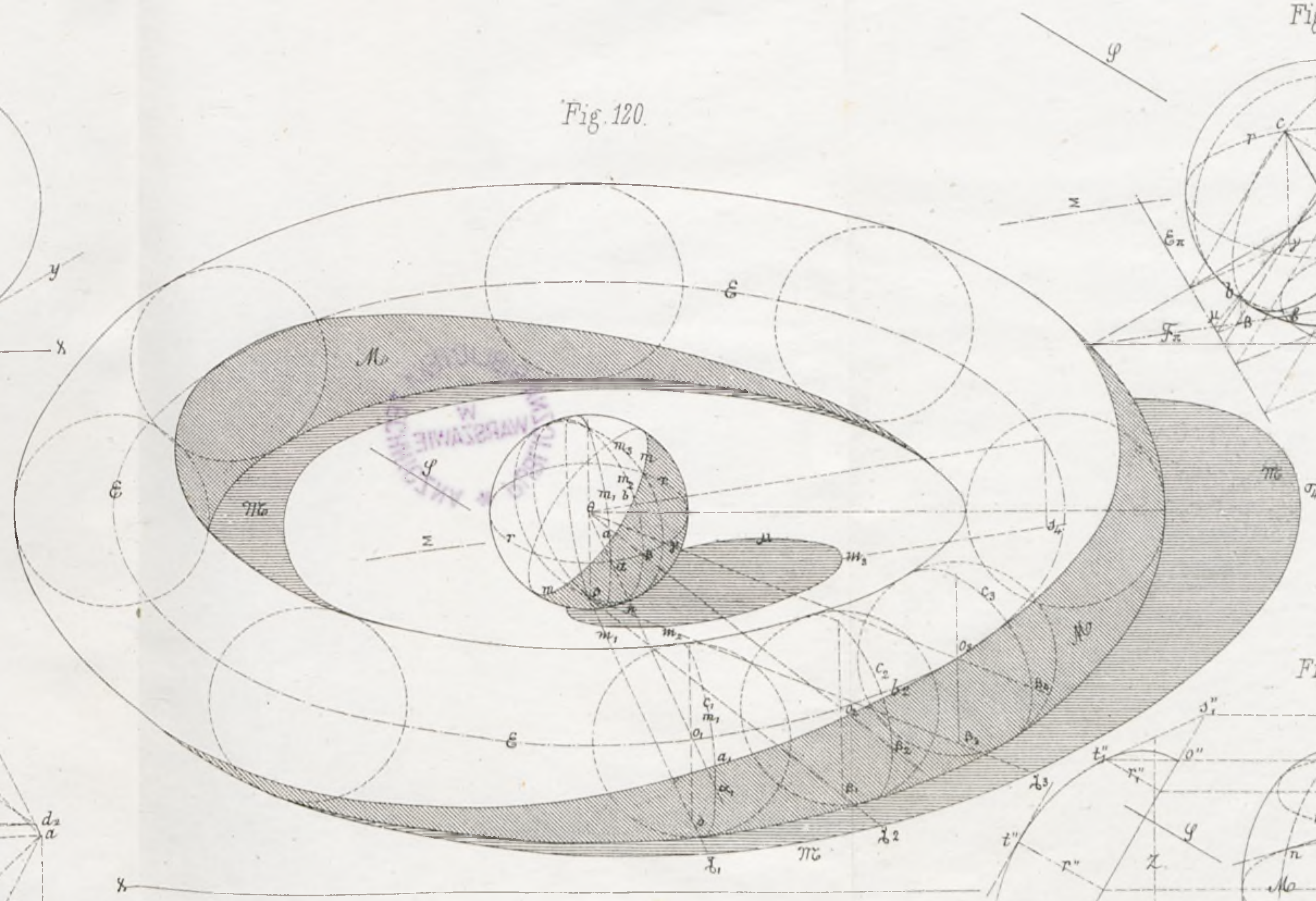


Fig. 120.

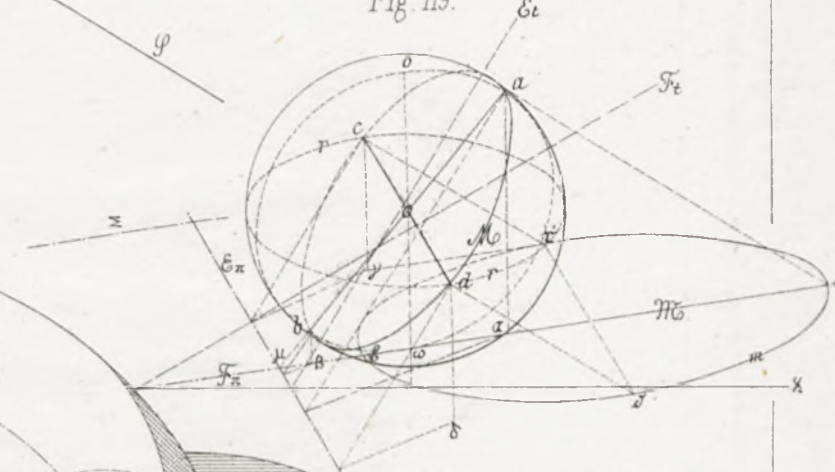


Fig. 119.

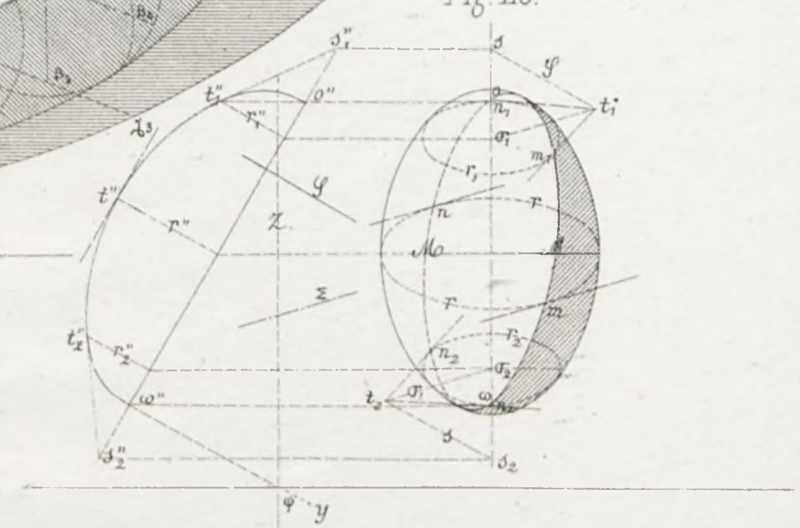


Fig. 118.

Autog. Broise, Rue de Dunkerque 43 à Paris.

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE

Fig. 121.

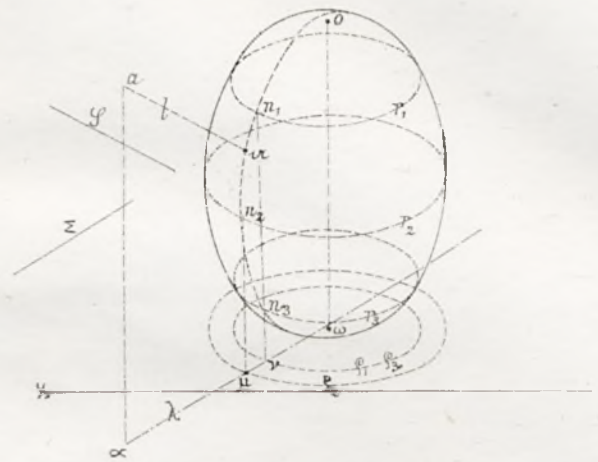


Fig. 122.

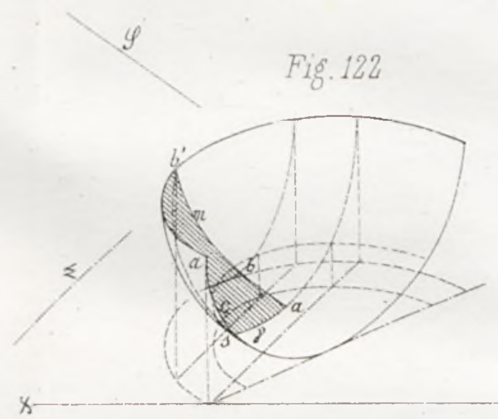


Fig. 123.

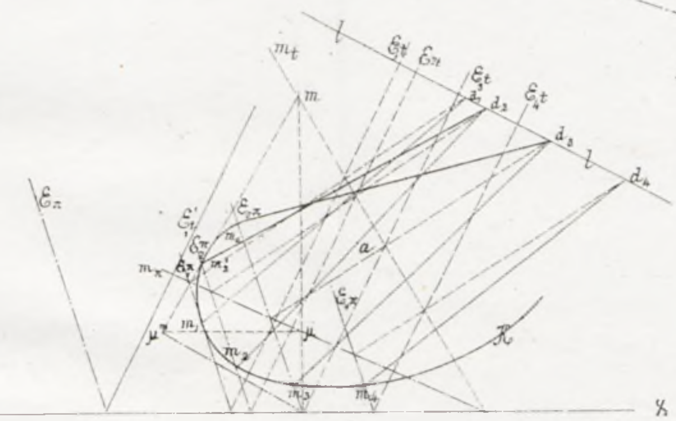


Fig. 124.

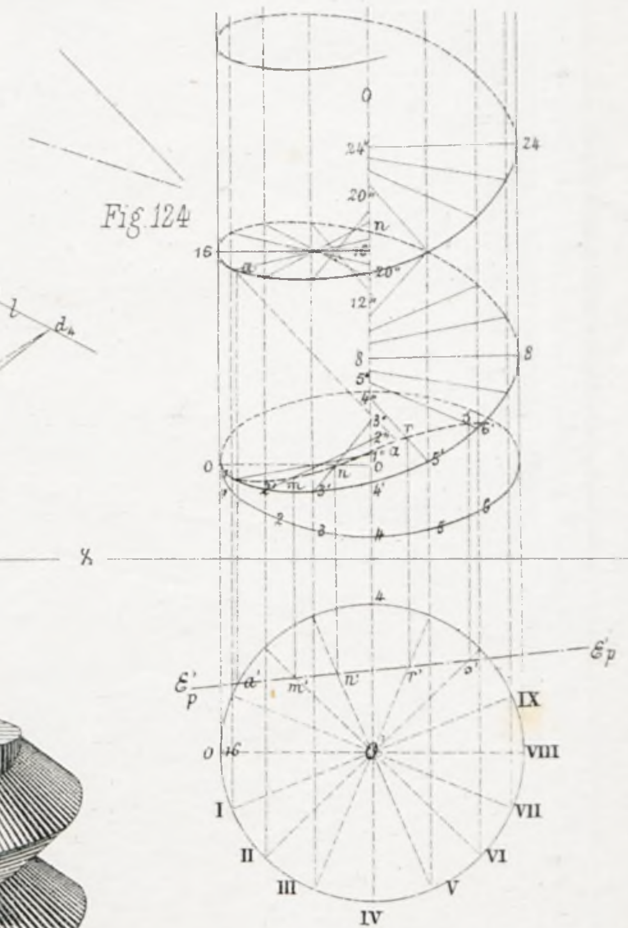


Fig. 125.

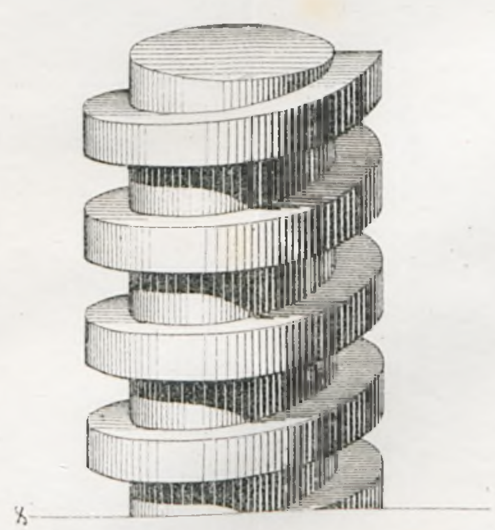


Fig. 126.

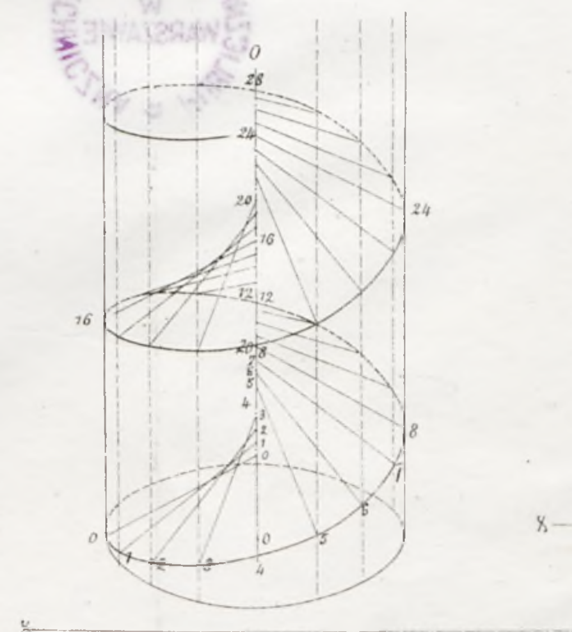
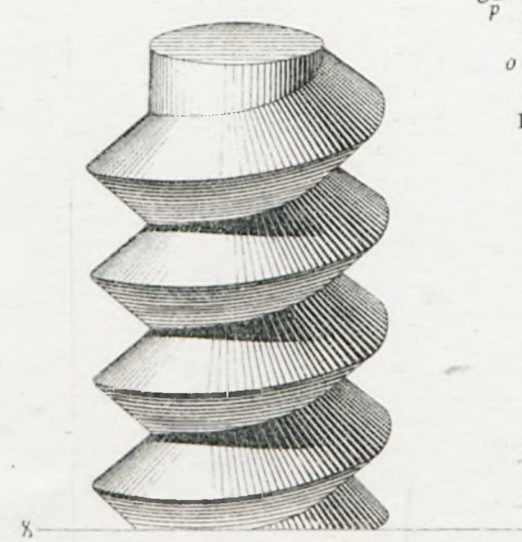


Fig. 127.



Autog. Broise, Rue de Dunkerque, 43 à Paris.

PERSPEKTYWA RZUTOWA JAKO WYNIK
RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA PŁASCZYZNY UKOŚNIE WZGLĘDEM SIEBIE POŁOŻONE.