POCZĄTKI GEOMETRYI

DLA SZKÓŁ POWIATOWYCH.

NA KLASSĘ TRZECIĄ.

Z TRZEMA TABLICAMI FIGUR.

Cena z oprawą w papier srebrem kop. dwadzieścia.

W WILNIE

NAKŁADEM I DRUKIEM A. MARCINOWSKIEGO.

1829.

Dozwala się drukować z warunkiem aby po wydrukowaniu złożone były trzy exemplarze w Komitecie Cenzury. Wilno 1829 d. 13 lipca.

Cenzor L. Borowski.

POCZĄTKI
GEOMETRYI.

XIĘGA CZWARTA.

WIELOBOKI FOREMNE, I MIARA KOŁA.

OPISANIE.

Wielobok, który jest razem równokątnym i równobocznym, nazywa się *wielobokiem foremnym*.

Wieloboki foremne są o wszelkiey liczbie boków. Troykąt równoboczny, jest wielobokiem foremnym o trzech bokach; kwadrat, jest wielobokiem foremnym o czterech bokach.

PODANIE PIERWSZE.

TWIERDZENIE.

Dwa wieloboki foremne o jedney liczbie boków, są figurami podobnemi.

Niech będą naprzykład dwa sześciokąty foremne ABCDEF, *abcdef*, (fig. 1); summa kątów w jedney i drugiey figurze jest taż sama, i równa się ośmiu kątom prostym (28,1); kąt A jest szóstą częścią tey summy, tak jak i kąt *a*; a zatém kąty A i *a* są równe sobie, i toż samo jest z kątami B i *b*, z kątami C i *c*, i t. d..

Nadto, ponieważ z natury wieloboków foremnych, boki AB, BC, CD i t. d., są równe sobie, oraz są równe sobie boki *ab*, *bc*, *cd*, i t. d.; przeto między niemi te proporcye zachodzą: AB: *ab* : : BC: *bc* : : CD: *cd* i t. d.; więc figury, o których mówimy, mają kąty równe i boki odpowiedne proporcyonalne, a zatém są podobne (opis. 2 xięg. 3).

Wniosek. Obwody dwóch wieloboków foremnych o jednakiey liczbie boków, mają się do siebie, jak ich boki odpowiedne, a powierzchnie zamknięte niemi, jak kwadraty z tychże boków (27,3).

Uwaga. Kąt wieloboku foremnego tak się oznacza przez liczbę jego boków, jak kąt wieloboku równokątnego (20,1).

Przestroga, liczby nawiasami objęte oznaczają podania do których się odwołuje. Jedna liczba w nawiasach, znaczy podanie tey xięgi która się traktuje: gdy zaś są dwie liczby komą oddzielone, tedy pierwsza oznacza podanie, a druga xięgę.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Każdy wielobok foremny może bydź wpisany w koło, i niém opisany.

Niech będzie ABCDE i t. d. (fig. 2), wielobok foremny: wyobraźmy sobie poprowadzony okrąg koła przez trzy punkta A,B,C; niech O, będzie środkiém jego, a OP prostopadła spuszczona na środek boku BC; daymy AO, i OD.

Czworoboki OPCD, OPBA, przystać mogą do siebie: jakoż bok OP jest wspólny, kąt OPC=OPB, jako proste; więc bok PC położy się na bok sobie równy PB, i punkt C, padnie na B; nadto z natury wieloboku, kąt PCD=PBA, a zatém CD weźmie kierunek BA; aże CD=BA, więc punkt D padnie na A, i dwa czworoboki całkiem do siebie przystaną. Odległość więc OD jest równa AO; a następnie okrąg koła przechodzącego przez trzy punkta A, B, C, przeydzie także przez punkt D. Podobnie rozumując dowiedziemy, że okrąg koła przechodzącego przez trzy wierzchołki B, C, D; przeydzie także przez wierzchołek następny E, i tak daley. Tenże sam więc okrąg koła, który przechodzi przez trzy punkta A, B, C, przeydzie przez wszystkie wierzchołki kątów wieloboku, a zatém wielobok będzie wpisany w ten okrąg.

Powtóre. Wszystkie boki AB, BC, CD, i t. d. dla tego okręgu, są cięciwami równemi; a zatém są równie oddalone od środka (8,2); jeżeli więc z punktu O, jako środka, promieniem OP, zakreśli się okrąg koła, ten dotknie bok BC, jako i wszystkie inne boki wieloboku w ich środkach, a zatém okrąg ten wpisany będzie w wielobok, czyli wielobok opisany będzie na okręgu koła.

Uwaga I. Punkt O, środek wspólny koła wpisanego i opisanego, może bydź uważany jako środek wieloboku, i dla tey to przyczyny, kąt AOB, utworzony przez dwa promienie, do końców jednego boku AB, poprowadzone, nazwano *kątem w środku.*

Ponieważ wszystkie cięciwy AB, BC i t. d. są równe; przeto wszystkie kąty w środku są równe sobie; a zatém wartość każdego z nich wynaydzie się, dzieląc cztery kąty proste przez liczbę boków wielokąta.

Uwaga II. Aby w dany okrąg koła wpisać wielobok foremny, o pewney liczbie boków, dosyć jest podzielić okrąg na tyle części równych, ile wielobok ma boków; także, ponieważ łuki są równe, cięciwy AB, BC, CD i t. d. (fig. 4) będą równe, a zatém troykąty ABO, BOC, COD, i t. d. jako równokątne, będą także równe, więc wszyskie kąty ABC, BCD, CDE i t. d. będą równe; a zatém figura ABCDE, będzie wielobokiem foremnym.

PODANIE III.

ZAGADNIENIE.

W dany okrąg koła wpisać kwadrat.

Poprowadźmy dwie średnice AC, BD, (fig. 3), przecinające się z sobą pod kątém prostym; połączmy końce A, B, C, D, a figura ABCD, będzie kwadratem wpisanym; jakoż, ponieważ kąty AOB, BOC i t. d. są równe, cięciwy AB, BC, i t. d. są także równe.

Uwaga. Ponieważ tróykąt BOC, jest prostokątny i równoramienny, przeto będzie (11,3) BC : BO : : $\sqrt{2}$: 1, azatém, *bok kwadratu wpisanego ma się do promienia, jak pierwiastek kwadratowy z 2, do jedności.*

PODANIE IV.

ZAGADNIENIE.

W dany okrąg koła wpisać sześciobok foremny, i troykąt równoboczny.

Przypuśćmy, że zagadnienie jest rozwiązane, i niech AB (fig. 4) będzie jednym bokiem sześcioboku wpisanego; jeżeli poprowadzimy promienie AO, OB, powiadam: że troykąt AOB, będzie równobocznym.

Jakoż, kąt AOB, jest szóstą częścią czteréch kątów prostych; wziąwszy więc kąt prosty za jedność, mieć będziemy $AOB = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: dwa inne kąty ABO, BAO, tegoż troykąta, ważą razem $2 - \frac{2}{3}$ czyli $\frac{4}{3}$; aże są równe, przeto każdy z nich $= \frac{2}{3}$, więc troykąt ABO, jest równoboczny; azatém bok sześciokąta wpisanego jest równy promieniowi.

Z tego wypada, że chcąc wpisać sześciobok foremny w dany okrąg koła, potrzeba promień sześć razy odciąć na tém okręgu, co przywiedzie do tego samego punktu, skąd zaczęliśmy odcinać. Gdy sześciobok ABCDEF, jest wpisany, jeżeli się połączą wierzchołki kątów naprzemian, utworzy się troykąt równoboczny ACE.

Uwaga. Figura ABCO, jest równoległobokiem, nawet jest kwadratem ukośnym, bo $AB = BC = CO = AO$; azatém (14,3), summa kwadratów z przekątnych to jest $\overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$, jest równa summie kwadratów z boków, którą tu jest $4\,\overline{AB}^2$ czyli $4\,\overline{BO}^2$; gdy od jedney i drugiey odciągniemy $\overline{BO}^2$, zostanie $\overline{AC}^2 = 3\,\overline{BO}^2$, a zatém $\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2 :: 3 : 1$, czyli $AC : BO :: \sqrt{3} : 1$, a zatém, *bok troykąta równobocznego wpisanego w koło, ma się do promienia, jak pierwiastek kwadratowy z 3, do jedności.*

PODANIE V.

ZAGADNIENIE.

W koło dane wpisać dziesięciobok foremny, potym pięciobok i piętnastobok.

Dzieli się promień AO, (fig. 5) na średni i skrayny stosunek w punkcie M, (zagad. 4 xię. 3), bierze się cięciwa AB, równa większemu ucinkowi OM; a AB, będzie bokiem dziesięcioboku foremnego, który dziesięć razy przenieść potrzeba na okrąg koła.

Jakoż, daymy MB: z wykreślenia mamy AO: OM : : OM : AM; czyli, że AB = OM, mamy AO : AB : : AB : AM; a zatém, troykąty ABO, AMB, mają kąt wspólny A, zawarty między bokami proporcyonalnemi; więc są podobne (20,3); troykąt OAB, jest równoramienny, więc takim jest i troykąt AMB, i AB = BM: aże AB = OM, więc także MB = OM; azatém troykąt BMO, jest równoramienny.

Kąt AMB, zewnętrzny względem troykąta równoramiennego BMO, jest równy dwa razy wziętemu kątowi wnętrznemu O (19,1); aże kąt AMB = MAB, azatém troykąt OAB, jest takim, że każdy z kątów, na podstawie OAB, czyli OBA, jest równy dwa razy wziętemu kątowi w wierzchołku O, trzy więc kąty troykąta, ważą pięć razy wzięty kąt O: azatém kąt O, jest piątą częścią dwóch kątów prostych, czyli dziesiątą części czterech kątów prostych: łuk więc AB, jest dziesiątą częścią okręgu koła, a cięciwa AB, jest bokiem dziesięcioboku foremnego.

Wniosek I. Jeżeli się połączą po dwa wierzchołki kątów dziesięcioboku foremnego, utworzy się pięciobok foremny ACEGI.

Wniosek II. Gdy AB, jest bokiem pięcioboku, a AL bokiem sześcioboku, wówczas łuk BL będzie względem okręgu koła $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$ czyli $\frac{1}{15}$; azatém cięciwa BL, będzie bokiem piętnastoboku, czyli wieloboku foremnego o piętnastu bokach. Widzimy razem, że łuk CL, jest trzecią częścią CB.

Uwaga. Gdy wielobok foremny jest wpisany, jeżeli się podzielą łuki podparte przez jego boki, na dwie równe części, i gdy się dadzą cięciwy podpierajace te połowy łuków, cięciwy te utworzą nowy wielobok foremny o podwóyney liczbie boków. Widzimy przeto, że kwadrat użyty bydź może do wpisania koleją wieloboków foremnych o 8, 16, 32 i t. d. bokach. Podobnie sześciobok służy do wpisania wieloboków foremnych o 12, 24, 48 i t. d., bokach: dziesięciobok, do wpisania wieloboków o 20, 40, 80 i t. d., bokach: piętnastobok do wpisania wieloboku o 30, 60, 120, i t. d., bokach.

PODANIE VI.

ZAGADNIENIE.

Mając dany wielobok foremny wpisany ABCD *i t. d.* (fig. 6), *opisać tenże okrąg koła wielobokiem podobnym.*

Przez punkt T, środek łuku AB, daymy styczną GH, która będzie równoległą do AB, (10, 2), toż samo uczyńmy w środku każdego innego łuku BC, CD i t. d.; te styczne przez swe przecięcia się utworzą wielobok foremny, opisany GHIK i t. d., podobny wielobokowi wpisanemu.

Łatwo jest naprzód widzieć, że trzy punkta O,B,H, są w linii prostey; gdyż troykąty prostokątne OTH, OHN, mają przeciwprostokątną wspólną OH, i bok OT=ON, a zatém są one równe (18, 1.), kąt więc TOH=HON, a następnie linija OH przechodzi przez punkt B, środek łuku TN: dla teyże samey przyczyny punkt I, znayduje się na przedłużeniu OC; i t. d.. Ponieważ zaś GH, jest równoległa do AB, a HI do BC, kąt GHI=ABC (26 1), także HIK=BCD, i t. d.; przeto kąty wieloboku opisanego, są równe kątóm wieloboku wpisanego. Nadto, z przyczyny tychże równoległych, mamy GH : AB : : OH : OB, i HI : BC : : OH : OB, a zatém GH : AB : : HI : BC. Aże AB=BC, więc GH=HI.

Dla podobney przyczyny HI=IK, i t. d.; boki więc wieloboku opisanego, są równe sobie, a zatém ten wielobok jest foremny i podobny wielobokowi wpisanemu.

Wniosek I. Wzajemnie, gdyby był dany wielobok opisany GHIK i t. d., i gdyby potrzeba było, za pomocą jego narysować wielobok wpisany ABC i t. d., widzimy, iż dosyć byłoby do wierzchołków G,H,I, i t. d. wieloboku danego poprowadzić linije OG, OH, i t. d., które spotkają okrąg koła w punktach A,B,C, i t. d.; połączylibyśmy potém te punkta cięciwami AB, BC, i t. d., a te utworzyłyby wielobok wpisany. Moglibyśmy także w tymże przypadku wprost połączyć z sobą wszystkie punkta dotknięcia T,N,P, i t. d., cięciwami TN, NP, i t. d., które utworzyłyby równie wielobok wpisany podobny opisanemu.

Wniosek II. Azatém, można opisać na kole daném wszystkie wieloboki foremne, które tylko wpisać umiemy w koło, i wzajemnie.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Powierzchnia wieloboku foremnego jest równa jego obwodowi, rozmnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego.

Niech będzie naprzykład wielobok foremny

GHIK i t. d. (fig. 6); troykąt GOH, ma za miarę $GH \times \frac{1}{2} OT$; troykąt OHI ma za miarę $HI \times \frac{1}{2} ON$; aże $ON = OT$, więc dwa troykąty złączone razem mają za miarę $(GH + HI) \times \frac{1}{2} OT$. Ciągnąc tym sposobem wynaydowanie miary innych troykątów, znaydziemy że summa wszystkich troykątów, czyli wielobok cały, ma za miarę summę podstaw GH, HI, IK, i t. d., czyli obwód wieloboku, rozmnożony przez $\frac{1}{2}$ OT, połowę promienia koła wpisanego.

Uwaga. Promień OT koła wpisanego jest to prostopadła spuszczona ze środka na jeden z boków wieloboku; nazywają czasami ją *apotemą* (l'apathème) wieloboku.

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Obwody wieloboków foremnych o jedney liczbie boków mają się do siebie jak promienie kół opisanych, lub też jak promienie kół wpisanych: a zaś powierzchnie ich, jak kwadraty z tychże promieni.

Niech będzie AB (fig. 7) bok wieloboku o jakim jest mowa, O jego środek, a zatém OA, promień koła opisanego, a OD prostopadła do AB promień koła wpisanego; niech będzie podobnie, *ab* bok innego wieloboku podobnego piarwszemu, *o* jego środek, *oa*, i *od*, promienie kół opisanego i wpisanego. Obwody dwóch wieloboków mają się do siebie, jak boki AB i *ab*, aże kąty A i *a*, są równe, jako każdy z nich jest połową kąta wieloboku, i toż samo jest z kątami B i *b*; więc troykąty ABO, *abo*, są podobne, oraz tróykąty prostokątne ADO, *ado*; a zatém, AB : *ab* : : AO : *ao* : : DO : *do*, obwody więc wieloboków mają się do siebie, jak promienie AO, *ao*, kół opisanych, i także jak promienie kół wpisanych.

Powierzchnie tychże wieloboków mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednych AB, *ab*; a zatém mają się także do siebie jak kwadraty z promieni AO, *ao*, kół opisanych, albo jak dwa kwadraty z promieni OD, *od*, kół wpisanych.

PODANIE IX.

PODANIE PRZYBRANE.

Wszelka linija krzywa albo wielobok, obeymujący od jednego do drugiego końca, liniją wypukłą AMB, *jest dłuższy od linii objętey* AMB (fig. 8).

Powiedzieliśmy już byli, że przez liniją wypukłą rozumieć będziemy liniją krzywą albo wielobok, albo w części krzywą a w części wielobok, taką liniją, którą linija prosta niemoże przeciąć więcey jak w dwóch punktach. Gdyby linija

AMB, miała części wskakujące, czyli zakrzywienia, niebyłaby wypukłą; gdyż łatwo jest widzieć, że linija prosta mogłaby ją w więcey niż w dwóch punktach przeciąć. Łuki koła rzeczywiście są wypukłe; lecz podanie teraznieysze ściąga się do jakieykolwiek linii dopełniającey tego warunku.

To założywszy, uważam, iż gdyby linija AMB nie była mnieyszą od wszystkich tych, które ją obeymują, tedy pomiędzy temi ostatniemi byłaby linija krótsza od wszystkich innych, i ta byłaby mnieyszą od AMB albo przynaymniey jey równą. Niech będzie ACDEB tą liniją obeymującą; między dwiema linijami poprowadźmy w jakimkolwiek mieyscu liniją prostą PQ, którąby zgoła nie spotykała linii AMB, albo tylko jey dotykała. Linia prosta PQ jest krótszą od PCDEQ; a zatém gdy za część PCDEQ podstawi się linija prosta PQ, będzie linija obeymująca APQB krótsza od APDQB. Aże z założenia ta ostatnia powinna bydź krótką od wszykich, więc to przypuszczenie ostaćby się nie mogło; a zatém wszystkie linije obeymujące, są dłuższe od objętey AMB.

Uwaga. Podobnym zupełnie sposobem dowiedlibyśmy, że linija wypukła i zachodząca na siebie AMB (fig. 9), jest krótszą od wszelkiey linii którąby ją zewsząd obeymowała, bądź to linia obeymująca FHG dotyka AMB w iednym lub więcey punktach, bądź to że ją tylko obeymuje bez dotknięcia.

PODANIE X.

PODANIE PRZYBRANE.

Mając dane dwa okręgi współśrodkowe, można zawsze w większy wpisać wielobok foremny, któregoby boki niespotykały mnieyszego, i także opisać można na mnieyszym okręgu wielobok foremny, któregoby boki niespotykały większego; tak iż w obudwóch tych przypadkach, boki wieloboku opisanego i wpisanego, będą zamknięte między dwoma okręgami kół.

Niech będą CA, CB (fig. 10) promienie dwóch okręgow danych. Przez punkt A poprowadźmy styczną DE, kończącą się na większym okręgu w D i E: wpiszmy w większy okrąg koła jeden z wieloboków foremnych, co zrobić można zapomocą poprzedzających zagadnień; podzielmy potém łuki podparte przez boki na dwie części równe, i poprowadźmy cięciwy do tych połow łuku; tym więc sposobem mieć będziemy wielobok o podwóyney liczbie boków; ciągniymy ten podział łuku na połowy póty, aż nie przyydziemy do łuku mnieyszego od DBE. Niech tym łukiém będzie MBN (którego środek przypuśćmy że jest w B): jasno jest, że cięciwa MN, będzie bardziey oddaloną od środka niż DE, i że wielobok foremny, którego MN jest bokiém, nie może spotkać okręgu, którego promień jest CA.

Przy takiém założeniu poprowadźmy CM, i CN, które spotkają styczną DE w P i Q; PQ będzie bokiem wieloboku opisanego, na małym okręgu koła, podobnego wielobokowi wpisanemu w wielki, którego bokiém jest MN. Jasno więc jest, że wielobok opisany, mający za bok PQ, nie może spotkać wielkiego okręgu koła, bo CP jest mnieysze od CM.

A zatém przez podobne wykreślenie można nakreślić wielobok foremny wpisany w wielki okręg koła i wielobok podobny opisać na mnieyszym, a te wieloboki mieć będą swe boki zawarte między dwoma okręgami kół.

Uwaga. Gdy dane są dwa wycinki spółśrodkowe FCG, ICH, można podobnie wpisać w większy *część wieloboku foremnego*, albo opisać na mnieyszym część wieloboku podobnego; tak, że obwody tych dwóch wieloboków zawarte będą między dwoma okręgami kół: dosyć jest dzielić łuk FBG koleją na 2, 4. 8, 16 i t. d. części równe, aż nieprzyydzie się do części mnieyszey od DBE.

Tu nazywamy *część wieloboku foremnego*, figurę zakończoną szeregiem cięciw równych wpisanych w łuk FG, od jednego do drugiego jego końca. Ta część ma własności główne wieloboków foremnych, ma ona kąty równe i boki równe, i razém może bydź wpisaną i opisaną na kole; jednak nie jest ona częścią właściwie zwanego wieloboku foremnego, tylko wtenczas, gdy łuk podparty przez jeden z boków jego, jest wielokrotną częścią całego okręgu.

PODANIE XI.

TWIERDZENIE.

Okręgi dwóch kół mają się do siebie jak promienie, a powierzchnie ich jak kwadraty z promieni.

Oznaczmy dla skrócenia przez *okr.* CA. okrąg koła mający za promień CA (fig. 11): powiadam, że mieć będziemy *okr.* CA : *okr.* OB : : CA : OB.

Bo gdyby to podanie nie zachodziło, tedyby CA miało się do OB jak *okr.* CA do czwartego terminu większego lub mnieyszego od *okr.* OB: przypuśćmy, że jest mnieyszy i niech będzie, jeżeli to bydź może, CA : OB : : *okr.* CA : *okr.* OD.

Wpiszmy w okrąg koła, którego promień jest OB, wielobok foremny EFGKLE, tak, iżby boki zgoła nie spotykały okręgu koła, którego promień jest OD (10); wpiszmy także wielobok podobny MNPTSM w okrąg koła, którego promień jest CA.

Ponieważ te wieloboki są podobne, przeto obwody ich MNPSM, EFGKE, mają się do siebie jak promienie CA, OB kół opisanych (8); i mieć będziemy MNPSM : EFGKE : : CA : OB. Aże z założenia CA : OB : : *okr.* CA : *okr.* OD; azatém

MNPSM : EFGKE : : *okr*. CA : *okr*. OD. Ta proporcya jest niepodobna: bo obwód MNPSM jest mnieyszy od *okr*. CA (9); a przeciwnie EFGKE jest większy od *okr*. OD : więc niepodobieństwem jest, aby CA miało się do OB, jak *okr*. CA do okręgu mnieyszego, niż jest *okr*. OB; czyli mówiąc w wyrazach ogólnieyszych, niepodobieństwem jest, aby promień miał się do promienia, jak okrąg koła, nakreślony pierwszym promieniem, do okręgu koła mnieyszego od okręgu nakreślonego drugim promieniem.

Ztąd wnosimy także, iż bydź nie może CA do OB, jak *okr*. CA do okręgu większego od *okr*. OB; bo gdyby to było, mielibyśmy, przewracając stosunki, OB do CA jak okrąg koła większy od *okr*. OB, do *okr*. CA; albo co tož samo jest, jak *okr*. OB do okręgu mnieyszego od *okr*. CA; azatém promień miałby się do promienia, jak okrąg koła nakreślony pierwszym promieniem do okręgu koła mnieyszego od okręgu nakreślonego drugim promieniem : co dowiedliśmy że jest niepodobieństwem.

Ponieważ czwarty termin proporcyi CA : OB : : *okr*. CA : X, nie może bydź ani mnieyszy, ani większy od *okr*. OB, a zatém bydź musi równy *okr*. OB; przeto okręgi kół mają się do siebie jak ich promienie.

Zupełnie podobne rozumowanie i wykreślenie, posłużą do dowiedzenia, że powierzchnie kół mają się do siebie jak kwadraty z ich promieni.

Nie będziemy wchodzili w inne szczegóły tego podania, bo jest ono tylko wnioskiem następnego.

Wniosek. Łuki podobne AB, DE (fig. 12), mają się do siebie jak ich promienie AC, DO, a wycinki podobne ACB, DOE, mają się do siebie jak kwadraty z tychże promieni.

Jakoż, ponieważ łuki są podobne, kąt C jest równy kątowi O (*opis.* 3 *xięg.* 3); aże kąt C ma się do czterech kątów prostych jak łuk AB do całego koła nakreślonego promieniem AC (7, 2,); a kąt O, ma się do czterech kątów prostych, jak łuk DE do okręgu nakreślonego promieniem OD; a zatém te łuki AB, DE, mają się do siebie jak okręgi kół których one są częścią: że zaś te okręgi mają się jak promienie AC, DO, przeto *łuk* AB : *łuk.* DE : : AC : DO.

Dla teyże samey przyczyny wycinki ACB, DOE, mają się do siebie jak całe koła, te zaś jak kwadraty z promieni; azatém *wyci.* ACB : *wyci.* DOE : : $\overline{AC}^2 : \overline{DO}^2$,

PODANIE XII.

TWIERDZENIE.

Powierzchnia koła jest równa mnogości z okręgu jego, przez połowę promienia.

Oznaczamy przez *pow.* CA, powierzchnią koła, którego promień jest CA, (fig. 13); powiadam że mieć będziemy *pow.* CA $= \frac{1}{2}$ CA $\times$ *okr.* CA.

Bo, gdyby $\frac{1}{2}$ CA$\times$*okr.* CA, nie była powierzchnią koła, którego promieniem jest CA, tedy ta ilość byłaby miarą koła większego lub mnieyszego; przypuśćmy naprzód że jest miarą koła większego, i niech będzie, jeżeli to bydź może, $\frac{1}{2}$ CA$\times$*okr.* CA$=$*pow.* CB.

Koło, którego promieniem jest CA, opiszmy wielobokiem foremnym DEFG i t. d., któregoby boki nie spotykały okręgu koła, mającego za promień CB (10); powierzchnia tego wieloboku równać się będzie jego obwodowi DE$+$EF$+$FG$+$ i t. d., mnożonemu przez $\frac{1}{2}$ CA, (7); aże obwód wieloboku jest większy od okręgu koła wpisanego, bo ten obeymuje go ze wszystkich stron, a zatém powierzchnia wieloboku DEFG i t. d., jest większą od $\frac{1}{2}$ AC$\times$*okr.* AC, która to ilość przez założenie, jest miarą koła promienia CB; wielobok więc byłby większy od koła; aże przeciwnie jest on mnieyszy, bo w nim jest zawarty, przeto niepodobieństwém jest, żeby $\frac{1}{2}$ CA$\times$*okr.* CA, była większa od *pow.* CA: czyli inaczey mówiąc, niepodobieństwém jest, aby okrąg koła, mnożony przez połowę jego promienia, był miarą koła większego.

Powiadam powtóre: że taż sama mnogość, niemoże bydź miarą koła mnieyszego. Aby zaś nieodmieniać figury, przypuśćmy, że idzie rzecz o koło, którego promieniem jest CB; dowieść więc potrzeba, że $\frac{1}{2}$ CB$\times$*okr.* CB, nie może bydź miarą koła mnieyszego, naprzykład koła, którego promień jest CA: jakoż niech będzie, jeżeli to bydź może, $\frac{1}{2}$ CB$\times$*okr.* CB$=$*pow.* CA.

Gdy zrobimy to samo wykreślenie co i wyżey, powierzchnia wieloboku DEFG i t. d., mieć będzie za miarę (DE + EF + FG + i t. d.) × ½ CA; ażc obwód DE + EF + FG + i t. d., jest mnieyszy od *okr.* CB, obeymującego wielobok ze wszystkich stron, a zatém powierzchnia wieloboku jest mnieysza od ½ CA × *okr.* CB, a tym bardziey mnieysza od ½ CB × *okr.* CB; ta ostatnia ilość przez założenie jest miarą koła, którego promień jest CA, wielobok więc byłby mnieyszy od koła wpisanego, co jest niedorzecznością; przeto niepodobieństwém jest, aby mnogość z okręgu koła przez połowę promienia, była miarą koła mnieyszego.

Azatém, nakonicc okrąg koła, mnożony przez połowę jego promienia, jest miarą tegoż koła.

Wniosek I. Powierzchnia wycinka równa się łukowi tegoż wycinka, mnożonemu przez połowę promienia.

Bo, wycinek ACB (fig. 14), tak się ma do całego koła, jak łuk AMB do całego okręgu koła ABD (17, 2.); albo jak AMB × ½ AC do ABD × ½ AC. Ażc koło całe = ABD × ½ AC; przeto wycinek ACB, ma za miarę AMB × ½ AC.

Wniosek II. Nazwiymy π, okrąg koła, którego średnicą jest jedność; ponieważ okręgi kół mają się do siebie jak ich promienie lub jak ich średnice, przeto ułożyć możemy tę proporcyą: średnica 1, do okręgu π, jak średnica 2CA do okręgu promienia CA; (fig. 11) tak iż mieć będziemy $1:\pi::2CA:okr.CA$; azatém $okr.CA = 2\pi \times CA$. Pomnożywszy obie strony tey równości przez $\frac{1}{2}CA$, mieć będziemy $\frac{1}{2}CA \times okr.CA = \pi \times \overline{CA}^2$, czyli $pow.CA = \pi.\ \overline{CA}^2$; azatém: *powierzchnia koła jest równa mnogości z kwadratu jego promienia przez liczbę stałą* π, *wyrażającą okrąg koła, którego średnicą jest 1, czyli wyrażającą stosunek okręgu koła do średnicy.*

Podobnym sposobém powierzchnia koła, mającego za promień OB, będzie równa $\pi \times \overline{OB}^2$; aże $\pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{OB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2$; azatém *powierzchnie kół mają się do siebie jak kwadraty z ich promieni:* co się godzi z poprzedzającém twierdzeniem.

Uwaga. Powiedzieliśmy już byli, że *kwadratura* koła, zależy na wynalezieniu kwadratu równego co do powierzchni kołu, którego promień jest znany; teraz zaś dowiedliśmy, że koło jest równoważne prostokątowi wystawionemu na okręgu koła, a mającemu za wysokość połowę promienia; ten zaś prostokąt zamienia się na kwadrat, biorąc średnią proporcyonalną między dwoma jego wymiarami (pod. 6 xięg. 3); azatém, podanie tyczące się kwadrowania koła, przywodzi się do znalezienia okręgu jego, gdy znany jest promień; na to zaś potrzeba poznać stosunek okręgu koła do promienia albo do średnicy.

Dotychczas ten stosunek oznaczano tylko sposobém przybliżonym; lecz to przebliżenie tak posunione było daleko, że wiadomość nawet dokładnego stosunku, nieprzyniosłaby zgoła większey rzetelnie korzyści, nad wiadomość stosunku przybliżonego. To zagadnienie, które tak wielu zatrudniało Geometrów, wtenczas, gdy sposoby przybliżenia były mniey znane, dzisiay policzone jest do rzędu zagadnień próżnych i jałowych, któremi tylko zatrudniają się ci, którzy zaledwo pierwsze mają wiadomości Geometryi.

Archimedes dowiódł, że stosunek okręgu koła do średnicy, zawarty jest między $3\frac{1}{7}$ i $3\frac{10}{71}$; a tak $3\frac{1}{7}$ czyli $\frac{22}{7}$ jest wartością już bardzo przybliżoną do liczby, którąśmy przez π mianowali. To pierwsze przebliżenie jest częstego użycia dla swojey prostości. *Meciusz* na tęż samę liczbę znalazł wartość $\frac{355}{113}$, daleko bardziey przybliżoną. Wreszcie wartość π rozwiniona aż do pewnego porządku ułamków dziesiętnych, znaleziona była przez innych Rachmistrzów 3,14159265358979 32 i t. d.; i mieli nawet cierpliwość przedłużyć te dziesiętne aż do stodwódziestego siódmego, owszem nawet aż do sto czterdziestego rzędu liczb dziesiętnych: Oczywiście, takie przybliżenie wyrównywa rzeczywistey wartośli, i nieznamy lepiey pierwiastków potęg niedokładnych.

W następnych podaniach wyłożymy dwa nayprostsze początkowe sposoby na otrzymanie tych przybliżeń

PODANIE XIII.

ZAGADNIENIE.

Mając dane powierzchnie wieloboku foremnego wpisanego i wieloboku podobnego opisanego, znaleść powierzchnie wieloboków foremnych wpisanego i opisanego o podwóyney liczbie boków.

Niech będzie AB (fig. 15), bok wieloboku danego wpisanego; EF równoległe do AB, bok wieloboku podobnego opisanego; C środek koła: gdy damy cięciwę AM, i styczne AP, BQ, cięciwa AM będzie bokiem wieloboku wpisanego o podwóyney liczbie boków, a zaś PQ podwóyne względem PM, będzie bokiem wieloboku podobnego opisanego (6). Ponieważ toż samo wykreślenie zachodzić będzie we wszystkich kątach równych kątowi ACM, przeto dosyć jest rozważyć sam tylko kąt ACM, a troykąty w nim zawarte, będą się miały do siebie, jak wieloboki całkie. Niech będzie A powierzchnią wieloboku wpisanego, którego bokiem jest AB; B, powierzchnią wieloboku podobnego opisanego; A′ powierzchnią wieloboku, którego AM, jest bokiem; B′, powierzchnią wieloboku podobnego opisanego: A i B są znane, chodzi nam teraz o wynalezienie A′ i B′.

1• Troykąty ACD, ACM, których wierzchołek wspólny jest w A, mają się do siebie jak ich podstawy CD, CM, aże te troykąty mają się także do siebie jak wieloboki A i A′ których są częściami, azatém $A : A' :: CD : CM$. Troykąty CAM, CME, których wierzchołek wspólny jest M, mają się do siebie jak ich podstawy CA, CE; też same zaś troykąty mają się do siebie jak wieloboki A′ i B, których są częściami; azatém $A' : B :: CA : CE$. Aże z przyczyny równoległości liniy AD, ME, mamy $CD : CM :: CA : CE$; azatém $A : A' :: A' : B$; więc wielobok A′ jeden z szukanych, jest średnio proporcyonalnym między dwoma wielobokami znanemi A i B; a następnie $A' = \sqrt{A \times B}$.

2° Z przyczyny wspólnej wysokości CM, troykąt CPM ma się do troykąta CPE, jak PM do PE; aże linija CP dzieli kąt MCE na dwie równe części, przeto mamy (17. 5), $PM : PE :: CM : CE :: CD : CA :: A : A'$; azatém $CPM : CPE :: A : A'$, a następnie $CPM : CPM + CPE$ czyli $CME :: A : A + A'$. Aże CMPA czyli 2CMP i CME, mają się do siebie jak wieloboki B′ i B, których są częścią; azatém $B' : B :: 2A : A + A'$ Już zadeterminowaliśmy A′, to nowe podanie zadeterminuje B′, i będzie $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$; za pomocą więc wieloboków A i B łatwo jest znaleść wieloboki A′ i B′, które mają dwa razy więcey boków.

PODANIE XIV.

ZAGADNIENIE.

Znaleść stosunek przybliżony okręgu koła do średnicy.

Niech będzie promień koła $=1$, bok kwadratu wpisanego będzie $\sqrt{2}$ (3), bok zaś kwadratu opisanego będzie równy średnicy 2; powierzchnia więc kwadratu wpisanego $=2$, a powierzchnia kwadratu opisanego $=4$. Jeżeli teraz położymy $A=2$, $B=4$, znaydziemy przez poprzedzające zagadnienie ośmiobok wpisany $A'=\sqrt{8}$ $=2,8284271$, a ośmiobok opisany $B'=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=$ 3,3137085. Mając tym sposobem znane ośmioboki wpisany i opisany, znaydziemy za pomocą nich wieloboki o podwóyney liczbie boków; należy znowu założyć $A=2,8284271$, $B=3,3137085$, a mieć będziemy $A'=\sqrt{A\times B}=3,0614674$, a $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}=3,1825979$; Te potym wieloboki 16 bokowe, posłużą do poznania wieloboków o 32 bokach, i tak daley pociągniemy, aż póki rachunek nie przestanie dawać różnicy, między wielobokami wpisanym i opisanym, przynaymniey w porządku liczb dziesiętnych na jakim przestajemy, a który w tym przykładzie jest siódmy. Gdy przyydziemy do tego punktu, wniesiemy, że koło jest równe ostatniemu wypadkowi, gdyż koło zawsze jest zawarte między wielobokiem wpisanym i opisanym; azatém, jeżeli te wieloboki nie różnią się zgoła od siebie, aż do pewnego rzędu liczb dziesiętnych, tedy i koło, aż do tegoż rzędu liczb nie będzie się różniło.

Podajemy tu rachunek tych wieloboków, posuniony tak daleko, iż nieróżnią się zgoła w siódmym rzędzie dziesiętnych.

Liczba boków.	*Wieloboki wpisane.*	*Wieloboki opisane.*
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926.

Zkąd wnosimy, że powierzchnia koła = 3,1415926. Mogłaby wątpliwość zachodzić w ostatniey liczbie dziesiętney, z przyczyny części zaniedbanych; lecz tu rachunek robiony był jedną liczbą więcey dziesiętnych; ato dla tego, aby bydź pewnym o wypadku, teraz znalezionym, aż do ostatniey liczby dziesiętney.

Ponieważ powierzchnia koła jest równa półokręgowi koła mnożonemu przez promień; gdy zaś promień jest 1; pół okręgu koła jest 3,1415926; albo raczey gdy średnica jest 1, okrąg koła jest 3,1415926; przeto stosunek okręgu koła do średnicy oznaczony wyżey przez $\pi = 3{,}1415926$.

*PODANIE XV.

TWIERDZENIE PRZYBRANE.

Troykąt CAB (fig. 16), *jest równoważny tróykątowi równoramiennemu* DCE, *mającemu tenże sam kąt* C, *i którego bok* CE *równy bokowi* CD, *jest średnio-proporcyonalny między* CA *i* CB. *Nadto, jeżeli kąt* CAB *jest prosty, prostopadła* CF, *spuszczona na podstawę tróykąta równoramiennego, będzie średnio-proporcyonalną między bokiem* CA *i pół summą boków* CA, CB.

Jakoż 1°, z przyczyny kąta wspólnego C,

Przestroga. Podania, gwiazdeczką naznaczone, w pierwszém wykładzie tey nauki, bez przerwania ciągu opuszczone bydź mogą: po przeyściu jednak wszystkich xiąg, w czasie powtarzania wyłożone bydź mają.

troykąt ABC ma się do troykąta równoramiennego DCE, jak $AC \times CB : DC \times CE$ czyli $\overline{DC}^2$ (24, 3); te więc troykąty będą równoważne, jeżeli $\overline{DC}^2 = AC \times CB$, czyli jeżeli DC, jest średnio-proporcyonalnym między AC i CB.

2° Ponieważ prostopadła CGF, dzieli kąt ACB, na dwie części równe, przeto mamy (17, 3), $AG : GB :: AC : CB$, skąd składając otrzymamy, $AG : AG + GB$ czyli $AB :: AC : AC + CB$; aże AG ma się do AB, jak troykąt ACG do troykąta ACB, czyli 2CDF, nadto jeżeli kąt A jest prosty; tedy troykąty prostokątne ACG, CDF będą podobne i dadzą $ACG : CDF :: \overline{AC}^2 : \overline{CF}^2$, przeto

$$\overline{AC}^2 : 2\overline{CF}^2 :: AC : AC + CB.$$

Pomnożywszy drugi stosunek przez AC, poprzedniki staną się równe, a następnie mieć będziemy $2\overline{CF}^2 = AC \times (AC + CB)$; czyli $\overline{CF}^2 = AC \times \left(\frac{AC + CB}{2}\right)$; azatém 2° jeżeli kąt A jest prosty, tedy prostopadła CF jest średnią proporcyonalną między bokiem AC i pół summą boków AC, CB.

* PODANIE XVI.

ZAGADNIENIE.

Znaleść koło tak mało się różniące od wieloboku danego foremnego, ile sami tylko zechcemy.

Niech będzie naprzykład dany (fig. 17) kwadrat BMNP; ze środka jego C, spuśćmy prostopadłą CA na bok MB, i daymy CB.

Koło zakreślone promieniem CA, będzie wpisane w kwadrat, a koło zakreślone promieniem CB opisane będzie na tymże kwadracie: pierwsze jest mnieysze, a drugie większe od kwadratu: chodzi nam teraz o ścieśnienie tych granic.

Weźmy CD i CE, równe każda w szczególności średniey proporcyonalney między CA i CB, i poprowadźmy ED. Troykąt równoramienny CDE będzie równoważny troykątowi CAB (3,1); toż samo zróbmy z każdym z ośmiu troykątów składających kwadrat; tym sposobem utworzymy ośmiobok foremny równoważny kwadratowi BMNP. Koło zakreślone promieniem CF, średnim proporcyonalnym między CA i $\frac{CA+CB}{2}$ będzie wpisane w ośmiobok, a koło zakreślone promieniem CD, będzie na nim opisane. A tak pierwsze będzie mnieysze, a drugie większe od kwadratu danego. Jeżeli podobnym sposobem zamienimy troykąt prostokątny CDF na troykąt równoramienny jemu równoważny, utworzymy przez to wielobok foremny o szesnastu bokach, równoważny kwadratowi danemu. Koło wpisane w ten wielobok, będzie mnieysze od kwadratu, a opisane na tym wieloboku, będzie większe od kwadratu.

Można tym sposobém ciągnąć daley dopóty, aż póki stosunek między promieniem koła wpisanego i promieniem koła opisanego, nie będzie się tak mało różnił od równości, ile sami zechcemy. A wówczas oba te koła uważane bydź mogą, jako równoważne kwadratowi podanemu.

Uwaga. Szukanie koleynych promieni do tego się sprowadza. Niech a będzie promieniem koła wpisanego w jeden z wieloboków znalezionych; b, promieniem koła opisanego na tymże wieloboku: niech podobnie będą a' i b' promienie tyczące się wieloboku następnego, mającego dwa razy większą liczbę boków. Podług tego, cośmy dowiedli, b' jest średnio-proporcyonalném między a i b, a zaś a' jest średnio-proporcyonalném między a i $\frac{a+b}{2}$; tak iż mieć będziemy $b' = \sqrt{a \times b}$, a zaś $a' = \frac{\sqrt{a \times a+b}}{2}$. Mając więc znane promienie a i b wieloboku, łatwo znaydziemy promienie a' i b' wieloboku następnego: i tak daley pociągniemy, aż póki różnica między promieniami stanie się niewidoczną, a wówczas, którykolwiek z tych promieni, będzie promieniem koła równoważnego kwadratowi, albo wielobokowi podanemu.

Ten sposób łatwo użyty bydź może w liniiach, gdyż zasadza się on na wynaydowaniu średnich proporcyonalnych koleynych między liniiami znanemi; lecz nie równie lepiey się używa w liczbach, i jest jeden ze sposobow naydogodnieyszych, jakie geometrya początkowa podać nam może do prędkiego wynalezienia stosunku przybliżonego okręgu koła do średnicy. Niech będzie bok kwadratu $=2$; pierwszy promień wpisany CA będzie 1, a pierwszy promień opisany CB będzie $\sqrt{2}$ czyli 1,4142136. Uczyniwszy więc $a=1$, $b=1{,}4142136$, znaydziemy $b'=1{,}1892071$, a $a'=1{,}0986841$. Te liczby posłużą do wyrachowania następnych promieni podług tegoż prawa.

Przytaczamy tu wypadek rachunku wykonanego aż do 7 lub 8 cyfer przez zwyczayne tablicy logarytmowe.

Promienie kół opisanych.	*Promienie kół wpisanych.*
1,4142136	1,0000000
1,1892071	1,0986841
1,1430500	1,1210863
1,1320149	1,1265639
1,1292862	1,1279257
1,1286063	1,1282657

Ponieważ pierwsza połowa cyfer jest taż sama w obudwóch stronach, przeto zamiast średnich geometrycznych, można brać średnie arytmetyczne, które się tylko w ostatnich znakach dziesiętnych różnić będą. Tymsposobém działanie znacznie się skraca, i wypadki są:

1,1284360	1,1283508
1,1283934	1,1283721
1,1283827	1,1283774
1,1283801	1,1283787
1,1283794	1,1283791
1,1283792	1,1283792.

Azatém 1,1283792 jest prawie promieniem koła, równego co do powierzchni kwadratowi, którego bok jest 2. Ztąd łatwo jest znaleść stosunek okręgu koła do średnicy, gdyż mamy dowiedziono, że powierzchnia koła jest równa kwadratowi z jego promienia, mnożonemu przez liczbę π; gdy więc podzielimy powierzchnią 4, przez kwadrat z liczby 1,1283792, mieć będziemy wartość π, która z tego rachunku wypadnie taką 3,1415926 . . . . ; jest to liczba taż sama jakąśmy innym sposobém otrzymali.

* DODATEK DO KSIĘGI IV.

OPISANIE.

I. Nazywamy *naywiększość* (maximum), ilość naywiększą między wszystkiemi tegoż gatunku ilościami; *naymnieyszość* zaś (minimum), naymnieyszą.

I tak średnica koła jest naywiększość czyli *maximum*, między wszystkiemi linijami łączącemi dwa punkta okręgu koła; a prostopadła jest naymnieyszość czyli *minimum* między wszystkiemi linijami prostemi z jednego punktu danego poprowadzonemi do linii prostey daney.

II. Nazywami figurami *równo-obwodowemi* czyli *isoperymetricznemi* (isopérimetres), te, które mają obwody równe.

* PODANIE PIERWSZE.

TWIERDZENIE.

Między wszystkiemi troykątami jedney podstawy i jednego obwodu, troykąt maximum *jest ten, w którym dwa boki niedeterminowane są równe.*

Niech będzie $AC=CB$, $AM+MB=AC+CB$ (fig. 18); powiadam, że troykąt równoramienny ACB jest większy jak troykąt AMB, mającego też samę podstawę i tenże sam obwód co i troykąt ACB.

Z punktu C, jako środka promieniem $CA=CB$, zakreślmy okrąg koła, który spotka CA przedłużone w D; daymy DB; kąt DBA wpisany w półkole, będzie prosty (15, 2). Przedłużmy prostopadłą DB ku N, zróbmy $MN=MB$, i daymy AN.

Nakoniec z punktów M i C, spuśćmy MP i CG, prostopadłe do DN. Ponieważ $CB=CD$, a $MN=MB$, przeto $AC+CB=AD$, $AM+MB=AM+MN$. Aże $AC+CB=AM+MB$, azatém $AD=AM+MN$; więc $AD>AN$: jeżeli zaś pochyła AD jest większa od pochyłey AN, tedy pierwsza musi bydź bardziey oddaloną od prostopadłey AB; azatém $DB>BN$; azatém BG połowa BD (12, 1), będzie większa od BP połowy BN. Lecz troykąty ABC, ABM, mające tęż samę podstawę AB, mają się do siebie jak ich wysokości BG, BP; więc ponieważ $BG>BP$, przeto troykąt równoramienny ABC jest większy od troykąta nierównoramiennego ABM teyże podstawy i tegoż obwodu.

* PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Między wielobokami równoobwodowemi o jednakiey liczbie boków, wielobok maximum *ma boki równe.*

Jakoż niech będzie ABCDEF, (fig. 19), wielobok *maximum*; jeżeli bok BC nie jest równy bokowi CD, zróbmy na podstawie BD, troykąt równoramienny BOD równoobwodowy z troykątém BCD. Troykąt BOD będzie większy od BCD (pod. 1); a następnie wielobok ABODEF będzie większy od ABCDEF, azatém ten ostatni nie będzie *maximum* między temi wszystkiemi wielobokami, które mają tenże sam obwód, i tęż samę liczbę boków, co się sprzeciwia założeniu. Więc bydź powinno BC=CD: przez podobne rozumowanie mieć będziemy CD=DE, DE=EF i t. d.; azatém wszystkie boki wieloboku *maximum*, są równe sobie.

* PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Ze wszystkich troykątów utworzonych z dwóch boków danych, czyniących między sobą jakikolwik kąt dowolny, maximum *jest ten, w którym dwa boki dane czynią kąt prosty.*

Niech będą dwa troykąty BAC, BAD (fig. 20), mające bok AB wspólny, a bok AC=AD; jeżeli kąt BAC jest prosty, powiadam że troykąt BAC będzie większy od troykąta BAD, mającego kąt w A ostry albo rozwarty.

Jakoż, ponieważ podstawa AB jest wspólna, przeto dwa troykąty BAC, BAD, mają się do siebie jak ich wyśokości AC, DE; aże prostopadła DE jest krótszą od pochyłey AD albo jey równey AC, azatém troykąt BAD jest mnieyszy od BAC.

* PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Ze wszystkich wieloboków utworzonych z boków danych, a ostatniego tylko dowolnie branego, wielobok maximum *jest taki, że wszystkie jego kąty wpisane bydź mogą w pół okrąg koła, w którym bok nieznany jest średnicą.*

Niech będzie ABCDEF (fig. 21), wielobok naywiększy, z wieloboków utworzonych z bokow danych AB, BC, CD, DE, EF i boku ostatniego AF, dowolnie wziętego. Poprowadźmy przekątne AD, DF. Jeżeli kąt ADF nie jest prosty, można zachowując części ABCD, DEF, takiemi jakiemi są, powiększyć troykąt ADF, a następnie cały wielobok, czyniąc kąt ADF prostym, stosownie do podania poprzedzającego; lecz ten wielobok nie może bydź powiększony, gdyż zakładamy, że przyszedł do swojego *maximum*; azatém kąt ADF jest kątém prostym. Tożsamo jest z kątami ABF, ACF, AEF; azatém wszystkie kąty A, B, C, D, E, F, wieloboku *maximum*, są wpisane w półokrąg koła, w którém bok nieoznaczony AF jest średnicą jego.

Uwaga. To podanie nastręcza nam pytanie, to jest: azali jest wiele sposobów utworzenia wieloboku z boków danych, i jednego nieznanego, któryby był średnicą półokręgu koła, w które inne boki są wpisane. Nim rozwiążemy to pytanie, uważać potrzeba, że gdy jedna cięciwa AB (fig. 22), podpiera łuki zakreślone różnemi promieniami AC, AD, kąt w środku, wsparty na tey cięciwie, będzie naymnieyszy w kole, którego promień jest naywiększy; tak $ACB < ADB$. Jakoż kąt $ADO = ACD + CAD$ (27,1); azatém $ACD < ADO$; a podwajając obie strony, mieć będziemy $ACB < ADB$.

* PODANIE V.

TWIERDZENIE.

Jeden jest tylko sposob utworzenia wieloboku ABCDEF (fig. 21), *z boków danych i ostatniego nie znanego, będącego średnicą półokręgu koła, w które inne boki są wpisane.*

Przypuśćmy bowiem że znaleźliśmy koło, zadosyć czyniące temu pytaniu: jeżeli weźmiemy koło większe, cięciwy AB, BC, CD, i t. d. odpowiedzą kątóm w środku mnieyszym. Summa tych kątów w środku, będzie mnieyszą od dwóch kątów prostych; azatém końce boków danych nie padną już na końce średnicy. Nieprzyzwoitość przeciwna zaydzie, gdy weźmiemy koło mnieysze; azatém wielobok, o jakim jest mowa, tylko w jedno koło wpisany bydź może.

Uwaga. Dowolnie odmieniać można porządek boków AB, BC, CD, i t. d., a średnica koła opisującego zawsze będzie taż sama tak jak i powierzchnia wieloboku: bo jakikolwiek będzie porządek boków AB, BC, i t. d., dosyć jest, aby ich summa składała półokrąg koła, a wielobok zawsze mieć będzie tęż samę powierzchnią: gdyż ta równa się półokręgowi koła mniey ucinkami AB, BC, i t. d., których summa zawsze jest taż sama.

* PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Ze wszystkich wieloboków utworzonych z boków danych, naywiększy czyli maximum *jest ten, który wpisany bydź może w koło.*

Niech będzie ABCDEFG (fig. 25), wielobok wpisany, i *abcdefg* wielobok niedający się wpisać, utworzone z boków równych, tak, że AB = *ab*, BC = *bc*, i t. d., powiadam, że wielobok wpisany jest większy od drugiego.

Daymy średnicę EM, poprowadźmy AM, MB; na *ab* = AB, wystawmy troykąt *abm* = ABM, i poprowadźmy *em*.

Na mocy podania IV, wielobok EFGAM jest większy od wieloboku *efgam*; przynaymniey gdy ten ostatni nie może bydź podobnie wpisany w półokrąg koła, któregoby bok *em* był średnicą: w takim przypadku, na mocy podania v, dwa wieloboki byłyby równe. Dla podobney przyczyny wielobok EDCBM jest większy od wieloboku *edcbm*, wyjąwszy tenże przypadek równości: bo jeden jest wpisany w koło, a drugi przez założenie nie daje się wpisać. Azatém cały wielobok EFGAMBCDE jest większy od *efgambcde*, gdy te nie są całkowicie równe sobie: lecz takiemi nie są, bo jeden jest wpisany w koło, a drugi przez założenie nie daje się wpisać, azatem wielobok wpisany jest większy. Odciągnąwszy od obudwóch tych wieloboków troykąty równe ABM, *abm*: pozostanie wielobok wpisany ABCDEFG większy od wieloboku niedającego się wpisać *abcdefg*.

Uwaga. Podobnie się dowiedzie jak w podaniu v, że jedne tylko koło tu bydź może, a następnie, że jeden tylko wielobok jest *maximum*, który zadosyć czyni pytaniu, i ten wielobok będzie jeszcze teyże samey powierzchni, jakimkolwiek bądź sposobém odmieni się porządek boków.

* PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Wielobok foremny jest naywiększy czyli maximum, *między wszystkiemi wielobokami równoobwodowemi o równey liczbie boków.*

Jakoż podług podania II, wielobok *maximum* ma wszystkie boki równe, a podług podania poprzedzającego, taki wielobok daje się wpisać w koło, azatém jest on foremny.

* PODANIE VIII.

ZADANIE PRZYBRANE.

Dwa kąty w środku, mierzone łukami dwóch różnych kół, mają się do siebie jak łuki między niemi zawarte, dzielone przez ich promienie.

To jest, że kąt C (fig. 24), ma się do kąta O, jak stosunek $\frac{AB}{AC}$ do stosunku $\frac{DE}{DO}$.

Promieniem OF, równym AC, nakreślmy łuk FG, zawarty między ramionami przedłużonemi OD, OF. Z przyczyny promieni równych AC, OF, mieć będziemy: $C : O :: AB : FG$ (17) czyli $:: \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Z przyczyny zaś łuków podobnych FG, DE, mamy (11), $FG : DE :: FO : DO$; azatém stosunek $\frac{FG}{FO}$ jest równy stosunkowi $\frac{DE}{DO}$, i mamy następnie $C : O :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$.

* PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Z dwóch wieloboków foremnych równoobwodowych, ten jest naywiększy który ma naywiększą liczbę boków.

Niech będzie DE (fig. 25), połową boku jednego z wieloboków, O jego środek, OE *apothema* czyli prostopadła spuszczona ze środka wieloboku na bok jego: niech AB będzie połową boku drugiego wieloboku, którego środkiem jest C, a zaś CB *apothemą*. Przypuszczamy, że środki O i C położone są w jakieykolwiek odległości OC, a zaś *apothemy* OE, CB są w kierunku OC; a tak DOE i ACB, będą połowy kątów w środku wieloboków; a ponieważ te kąty nie są równe, przeto linije CA, OD, przedłużone spotkają się z sobą w punkcie F; z tego punktu spuśćmy na OC prostopadłą FG; z punktów O i C, jako środków zakreślmy łuki GI, GH kończące się na bokach OF, CF.

To założywszy, mieć będziemy, przez poprzedzające podanie przybrane, $O : C :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$, aże DE, ma się do pierwszego obwodu wieloboku, jak kąt O, do czterech kątów prostych, i AB do obwodu drugiego wieloboku, jak kąt C do czterech kątów prostych; azatém, ponieważ obwody wieloboków są równe, DE : AB :: O : C czyli DE : AB :: $\frac{GI}{OG}:\frac{GH}{CG}$. Pomnożywszy poprzedniki przez OG a następniki przez CG, mieć będziemy DE×OG : AB×CG :: GI : GH. Tróykąty podobne ODE, OFG dają OE : OG :: DE : FG; skąd wypada DE×OG=OE×FG; podobnie mieć będziemy AB×CG=CB×FG; azatém OE×FG : CB×FG :: GI : GH, czyli OE : CB :: GI : GH. Jeżeli więc pokażemy że łuk GI jest większy od łuku GH, stąd wypadnie, że apothema OE jest większa od apothemy CB.

Z drugiey strony boku CF zrobmy figurę CKx całkiem równą figurze CGx, tak, że CK=CG, kąt HCK=HCG, i łuk Kx=xG; linija krzywa KxG obeymie łuk KHG, i będzie większa od tego łuku (9); azatém Gx, połowa linii krzywey, jest większa od GH połowy tego łuku; a tym bardziey GI jest większe od GH.

Z tego wypada, że apothema OE, jest większa od CB: ażc dwa wieloboki, jednego obwodu mają się do siebie jak ich apothemy (7), azatém wielobok mający DE za połowę swego boku, jest większy od wieloboku mającego AB za połowę boku. Pierwszy wielobok ma więcey boków, gdyż kąt jego w środku jest mnieyszy; azatém z dwóch wieloboków równoobwodowych, ten jest większy który ma większą liczbę boków.

* PODANIE X.

TWIERDZENIE.

Koło jest większe od wszelkiego wieloboku równo-obwodowego.

Dowiedliśmy już, że ze wszystkich wieloboków równoobwodowych o jednakiey liczbie boków, wielobok foremny jest naywiększy; przeto chodzi nam tylko o porównanie koła z jakimkolwiek wielobokiem foremnym równoobwodowym. Niech będzie AI (fig. 26), połową boku tego wieloboku, którego C niech będzie środkiem. Niech będzie w kole równoobwodowym kąt $DOE = ACI$, a następnie łuk DE równy połowie boku AI. Wielobok P ma się do koła C, jak troykąt ACI do wycinka ODE; a tak mieć będziemy, $P : C :: \frac{1}{2} AI \times CI : \frac{1}{2} DE \times OE :: CI : OE$. Niech będzie poprowadzona do punktu E, styczna EG, która spotka OD przedłużone w punkcie G, a troykąty podobne ACI, GOE dadzą proporcyą, $CI : OE :: AI$ czyli $DE : GE$; azatém $P : C :: DE : GE$ czyli jak $DE \times \frac{1}{2} OE$, co jest miarą wycinka DOE, do $GE \times \frac{1}{2} OE$, co jest miarą troykąta GOE; aże wycinek iest większy od troykąta, przeto P jest większe od C, azatém koło jest większe od wszelkiego wieloboku równoobwodowego.

XIĘGA V.

PŁASZCZYZNY I KĄTY BRYŁOWE

OPISANIE.

I. Linija prosta jest *prostopadłą do płaszczyzny*, gdy jest prostopadłą do wszystkich liniy prostych, przechodzących przez jey *spodek* na płaszczyznie (pod. 4): wzajemnie, płaszczyzna jest prostopadłą do linii.

Spodek prostopadłey jest to punkt, w którym ta linija spotyka płaszczyznę.

II. Linija prosta jest *równoległą płaszczyznie*, gdy przedłużone obie naydaley, nie mogą się z sobą spotkać. Wzajemnie, płaszczyzna jest równoległą do linii.

III. Dwie *płaszczyzny* są *równoległe* sobie, gdy będąc przedłużone naydaley, nie mogą się z sobą spotkać.

IV. Dowiedziemy (pod. 3), że wspólne przycięcie się dwóch płaszczyzn, z sobą się spotykających, jest linija prosta; *kąt* więc, czyli wzajemna *pochyłość dwóch płaszczyzn*, jest ilością mniey lub bardziey wielką, na którą się one oddalają: ta ilość mierzy się (pod. 7) kątem, jaki czynią z sobą dwie prostopadłe, poprowadzone na każdey z tych płaszczyzn, do jednego punktu przecięcia się wspólnego.

Ten kąt może bydź ostry, prosty lub roz-warty.

V. Jeżeli jest prosty, dwie *płaszczyzny* są *prostopadłe* do siebie.

VI. *Kątem bryłowym* nazywamy przestrzeń kątową, zawartą między kilku płaszczyznami, w jednym punkcie się łączącemi.

I tak: kąt bryłowy S (fig. 45) jest utworzony przez połączenie się płaszczyzn ASB, BSC, CSB, DSA.

Do utworzenia kąta bryłowego naymniey trzech płaszczyzn potrzeba.

PODANIE PIERWSZE.

TWIERDZENIE.

Linija prosta nie może bydź w części na płaszczyznie, a w części za płaszczyzną.

Gdyż podług opisania płaszczyzny, skoro linija prosta ma dwa punkta wspólne z płaszczyzną, tedy leży ona całkiem na tey płaszczyznie.

Uwaga. Chcąc poznać czy powierzchnia jest płaską, potrzeba w rozmaitych kierunkach tey powierzchni, przykładać liniją prostą, i uważać, czyli ta w całey jey rozciągłości dotyka.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Dwie linije proste przecinające się, są na jedney płaszczyznie i determinują jey położenie.

Niech będą AB, AC, (fig. 27) dwie linije proste przecinające się w A. Wyobrazić sobie możemy płaszczyznę, przechodzącą przez liniją prostą AB; jeżeli potém obracać będziemy tę płaszczyznę około AB aż nie naydzie na punkt C; wówczas linija AC, mająca dwa swoje punkta A, C, na tey płaszczyznie, całkiem na niey znaydować się będzie: położenie więc tey płaszczyzny jest determinowane przez ten jeden warunek, iż płaszczyzna ta zawiera dwie linije proste AB, AC.

Wniosek I. Troykąt ABC czyli trzy punkta A,B,C nie w linii prostey, determinują położenie płaszczyzny.

Wniosek II. A zatém także, dwie linije równoległe AB, CD (fig. 28) determinują położenie płaszczyzny; bo gdy poprowadzimy liniją przecinającą EF, tedy płaszczyzna dwóch liniy prostych AE, AF, będzie płaszczyzną liniy równoległych AB, CD.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie płaszczyzny przecinają się z sobą, spólne ich przecięcie się będzie liniją prostą.

Bo gdyby w liczbie punktów, wspólnych tym płaszczyznom, znalazły się trzy takie, które nie są w linii prostey, tedy dwie płaszczyzny o których mówimy, jako przechodzące każda przez te trzy punkta, uczyniłyby jednę i tęż samę płaszczyznę (2); co jest przeciwnem założeniu.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli linija prosta AP (fig. 29) *jest prostopadłą do dwóch innych* PB, PC, *krzyżujących się u jey spodka na płaszczyznie* MN, *tedy ta linija* AP *będzie prostopadłą do każdey linii* PQ, *poprowadzoney przez jey spodek na teyże płaszczyznie; a zatém będzie ona prostopadłą do płaszczyzny* MN.

Przez punkt Q, wzięty dowolnie na PQ, daymy liniją prostą BC, w kącie BPC, tak, aby było BQ=QC (pod. 5 xię. 3); poprowadzimy AB, AQ, AC.

Ponieważ podstawa BC podzielona jest na dwie równe części w punkcie Q, przeto troykąt BPC da (14.3)

$$\overline{PC}^2+\overline{BP}^2=2\overline{PQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Troykąt BAC podobnie daje

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AQ}^2+2\overline{QC}^2:$$

odciągnąwszy pierwszą równość od drugiey, i uważając że troykąty APC, APB, oba prostokątne w P, dają $\overline{AC}^2-\overline{CP}^2=\overline{AP}^2$, i $\overline{AB}^2-\overline{PB}^2=\overline{AP}^2$; mieć będziemy

$$\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=2\overline{AQ}^2-2\overline{PQ}^2.$$

Biorąc więc połowę z obudwóch stron, mieć będziemy $\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2$, czyli $\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2$; azatém troykąt APQ jest prostokątny w P (13.3); więc AP jest prostopadłą do PQ.

Uwaga. Ztąd widzimy, że nie tylko linija prosta może bydź prostopadłą do wszystkich tych, które przechodzą przez jey spodek na płaszczyznie, lecz że to zachodzi zawsze, ile razy ta linija jest prostopadłą do dwóch liniy prostych, poprowadzonych na płaszczyznie; i to właśnie dowodzi pewności opisania I.

Wniosek I. Prostopadła AP jest krótszą od każdey linii pochyłey AQ; azatém ta prostopadła mierzy prawdziwą odległość punktu A, od płaszczyzny PQ.

Wniosek II. Przez punkt P dany na płaszczyznie, jedna tylko prostopadła do płaszczyzny poprowadzona bydź może: bo gdyby można było wynieść dwie prostopadłe z jednego punktu P, tedy, gdy poprowadzimy, podług tych dwóch prostopadłych, płaszczyznę, którey przecięciem z płaszczyzną MN niech będzie PQ; wówczas dwie te prostopadłe, o których mówimy, byłyby prostopadłe do linii PQ, w tymże samym punkcie i na teyże samey płaszczyznie: co jest niepodobieństwem.

Równie niepodobieństwem jest, spuścić z jednego punktu, danego za płaszczyzną, dwie prostopadłe na tęż płaszczyznę; gdyż niech będą AP, AQ, te dwie prostopadłe; wówczas tróykąt APQ miałby dwa kąty proste, APQ, AQP, co jest niepodobieństwem.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

Linije pochyłe, równie oddalone od prostopadłey, są równe sobie; a z dwóch liniy pochyłych, nie równie oddalonych od prostopadłey, ta jest dłuższą, która więcey od niey jest oddaloną.

Bo kąty APB, APC, APD (fig. 30) są proste; jeżeli więc założymy, że odległości PB, PC, PD są równe sobie, tedy troykąty APB, APC, APD mieć będą kąt równy, zawarty między bokami równemi; azatém te tróykąty będą równe sobie; przeciwprostokątne więc, czyli linije pochyłe AB, AC, AD, będą równe między sobą. Podobnie, jeżeli odległość PE jest większa od PD czyli jey równey PB, tedy oczywiście pochyła AE, będzie większą od AB, czyli jey równey AD.

Wniosek. Wszystkie linije pochyłe równe AB, AC, AD i t. d. padają na okrąg koła BCD, zakreślonego ze spodka prostopadłey P, jako środka; azatém mając dany punkt A za płaszczyzną, a chcąc znaleść na tey płaszczyznie punkt P, gdzieby padła prostopadła spuszczona z A, potrzeba na tey płaszczyznie naznaczyć trzy punkta B, C, D, równie oddalone od A, i szukać potém środka koła, któreby przez te punkta przechodziło, a tym środkiem będzie punkt szukany P.

Uwaga. Kąt ABP, nazywa się *nachyleniem linii pochyłey* AB *do płaszczyzny* MN. Widzimy, że to nachylenie jest równe dla wszystkich liniy pochyłych, AB, AC, AD i t. d. które są równie od prostopadłey oddalone; gdyż wszystkie tróykąty ABP, ACP, ADP i t. d. są równe między sobą.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Niech będzie AP *prostopadła do płaszczyzny* MN (fig. 31) *i* BC *linija na tey płaszczyznie położona; jeżeli ze spodku* P *tey prostopadłey spuścimy* PD *prostopadłą na* BC, *i poprowadzimy* AD; *powiadam że* AD *będzie prostopadłą do* BC.

Weźmy DB=DC i poprowadźmy PB, PC, AB, AC. Ponieważ DB=DC, pochyła PB=PC; a względem prostopadłey AP, ponieważ PB=PC, pochyła AB=AC (5), linija więc AD ma dwa swoje punkta A i D równie oddalone od końców B i C, azatém AD jest prostopadłą w środku linii BC.

Wniosek. Tu razem widzimy, że BC jest prostopadłą do płaszczyzny APD, ponieważ BC jest razem prostopadłą do dwóch liniy prostych AD, PD.

Uwaga. Dwie linije AE, BC, stawią przykład dwóch liniy prostych, które się zgoła z sobą nie spotykają, gdyż te linije nie znaydują się na jedney płaszczyznie. Naykrótsza odległość tych liniy jest prostopadła PD, która razém jest prostopadłą do linii AP i do linii PC; odległość PD jest naykrótsza między temi dwiema linijami; bo gdy połaczymy dwa inne punkta, jak naprzykład A i B, będzie AB > AD, AD > PD; azatém tém bardziey AB > PD.

Lubo dwie linije AE, CB, nie są na jedney płaszczyznie, czynią jednak z sobą kąt prosty; gdyż AD i równoległa przez jeden z jey punktów poprowadzona do linii BC, czynią między sobą kąt prosty. Podobnie linije AB i PD, wystawujące dwie jakiekolwiek linije proste, nie leżące na jedney płaszczyznie, uważają się, że czynią z sobą tenże sam kąt, jakiby uczyniła AB równoległa do PD, poprowadzona przez jeden z punktow linii AB.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli linija AP *jest prostopadłą do płaszczyzny* MN (fig. 32), *wszelka linija* DE *równoległa do* AP, *będzie prostopadłą do teyże płaszczyzny.*

W kierunku liniy równoległych AP, DE poprowadźmy płaszczyznę, którey przecięciem się z płaszczyzną MN będzie PD: na płaszczyznie MN poprowadźmy BC prostopadłą do PD, i daymy AD.

Podług wniosku poprzedzającego twierdzenia, BC jest prostopadłą do płaszczyzny APDE, azatém kąt BDE jest prosty; lecz kąt EDP jest także prosty, bo AP jest prostopadła do PD i że DE jest równoległa do AP; azatém linija DE jest prostopadła do dwóch liniy prostych PD i DE: azatém jest ona prostopadłą do ich płaszczyzny MN.

Wniosek I. Wzajemnie, jeżeli dwie linije proste AP, DE, są prostopadłe do jedney płaszczyzny MN, takie linije będą równoległe sobie; bo gdyby nie były równoległemi, tedy, poprowadzona przez punkt D linija równoległa do AP, byłaby prostopadłą do płaszczyzny MN; azatém z jednego punktu D, możnaby było wynieść dwie prostopadłe do jedney płaszczyzny; co jest niepodobieństwém (4).

Wniosek II. Dwie linije A i B równoległe trzeciey C, są równoległe sobie; bo gdy wyobrazimy płaszczyznę prostopadłą do linii C, linije A i B równoległe do tey prostopadłey, będą prostopadłe do teyże płaszczyzny; azatém, przez wniosek poprzedzający, są równoległe sobie.

Rozumiemy, że trzy linije nie są na jedney płaszczyznie, inaczey bowiem to podanie byłoby już znane (25, 1).

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli linija AB (fig. 33) *jest równoległą do linii prostey* CD, *poprowadzoney na płaszczyznie* MN; *ta linija będzie równoległą do tey płaszczyzny.*

Bo, gdyby linija AB, będąca na płaszczyznie

ABCD, spotkała płaszczyznę MN, to spotkanie przypadłoby w jakimkolwiek punkcie linii CD, przecięcia wspólnego dwóch płaszczyzn; aże AB nie może spotkać CD, bo do niey jest równoległą; przeto nie może spotkać i płaszczyzny MN: azatém jest równoległą do płaszczyzny (opis. 2).

PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Dwie płaszczyzny MN *i* PQ (fig. 34) *prostopadłe do jedney linii prostey* AB, *są równoległe sobie.*

Bo gdyby się z sobą gdziekolwiek spotkały, i niech będzie O jednym z ich punktow wspólnych; daymy OA, OB; linija AB, prostopadła do płaszczyzny MN, jest prostopadłą do linii prostey OA, na teyże płaszczyznie przez jey spodek poprowadzoney; dla teyże samey przyczyny AB jest prostopadłą do BO; azatém OA i OB byłyby dwie prostopadłe, z jednego punkt O spuszczone na liniją prostą; co jest niepodobieństwém, przeto płaszczyzny MN, PQ nie mogąc się z sobą spotkać, są równoległe sobie.

PODANIE X.

TWIERDZENIE.

Przecięcia EF, GH, *dwóch płaszczyzn równoległych* MN, PQ, *przez trzecią płaszczyznę* FG, *są równoległe* (fig. 35).

Bo gdy linije EF, GH, leżące na jedney płaszczyznie, nie są równoległe, tedy przedłużone zbiegą się z sobą; azatém i płaszczyzny MN i PQ, na których one się znaydują, zbiegłyby się także, a więc nie byłyby równoległe.

PODANIE XI.

TWIERDZENIE.

Linija AB (fig. 34) *prostopadła do płaszczyzny* MN, *jest prostopadłą do płaszczyzny* PQ *równoległey* MN.

Pociągniymy dowolnie liniją BC na płaszczyznie PQ; przez AB i BC poprowadźmy płaszczyznę ABC, którey przecięciem się z płaszczyzną MN niech będzie AD: to przecięcie AD, będzie równoległe do BC, (10); aże linija AB, prostopadła do płaszczyzny MN, jest prostopadłą do linii AD; azatém AB będzie prostopadłą do jey równoległey BC; a ponieważ linija AB jest prostopadłą do każdey linii BC, przechodzącey przez jey spodek na płaszczynie PQ, stąd przeto idzie, iż ta linija jest prostopadłą do płaszczyzny PQ.

PODANIE XII.

TWIERDZENIE.

Linije równoległe EG, FH (fig. 35) *zajęte między dwiema płaszczyznami równoległemi* MN, PQ, *są równe sobie.*

Przez linije równoległe EG, FH przeprowadźmy płaszczyznę EGHF, która spotka płaszczyzny równoległe podług kierunków EF i GH. Przecięcia EF, GH są równoległe sobie (10), oraz takiemi są linije EG, FH, azatém figura EGHF jest równoległobokiem; a więc EG = FH.

Wniosek. Z tego wypada, że dwie płaszczyzny równoległe, są wszędzie równo od siebie oddalone; bo jeżeli EG i FH, są prostopadłe do dwóch płaszczyzn MN, PQ, tedy są one równoległe sobie (7); azatém są równe.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa kąty CAE, DBF (fig. 36) *nieleżące na jedney płaszczyznie, mają swe ramiona równoległe, i skierowane w jednę stronę, kąty takie są równe a ich płaszczyzny równoległe.*

Weźmy AC = BD, AE = BF, i poprowadźmy

CE, DF, AB, CD, EF. Ponieważ AC jest równe, i równoległe do BD, przeto figura ABDC jest równoległobokiem (1,3); azatém CD jest równe i równoległe do AB. Dla teyże samey przyczyny EF, jest równe i równoległe do AB; więc także CD jest równe i równoległe do EF; azatém figura CEFD jest równoległobokiem; przeto bok CE jest równy i równoległy DF; więc tróykąty CAE, DBF, są równoboczne z sobą, azatém kąt CAE=DBF.

Powtóre. Powiadam, że płaszczyzna ACE jest równoległą płaszczyznie BDF; bo przypuśćmy że płaszczyzna równoległa do BDF, poprowadzona przez punkt A, spotyka linije CD i EF w innych punktach, niż są C i E, naprzykład w punktach G i H; wówczas podług podania XII; trzy linije AB, GD, FH, będą równe; aże trzy linije AB, CD, EF już są równe, więc byłoby CD=GD i FH=EF; co jest niedorzecznością; azatém płaszczyzna ACE jest równoległą do płaszczyzny BDF.

Wniosek. Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe MN, PQ, są przecięte przez dwie inne płaszczyzny CABD, EABF, kąty CAE, DBF, utworzone przez przecięcia płaszczyn równoległych, będą równe; bo przecięcie AC jest równoległe do BD (10), AE równoległe do BF; azatém kąt CAE=DBF.

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli trzy linije proste AB, CD, EF (fig. 36) *nieleżące na jedney płaszczyznie, są równe i równoległe sobie, tedy troykąty* ACE, BDF *utworzone z jedney i drugiey strony, łączące końce tych liniy prostych, będą równe, a ich płaszczyzny będą równoległe sobie.*

Jakoż, ponieważ AB jest równa i równoległa CD, figura ABDC jest równoległobokiem; azatém bok AC jest równy i równoległy BD. Dla podobney przyczyny boki AE i BF są równe i równoległe; oraz takiemi są boki CE i DF: dwa więc tróykąty ACE, BDF są równe. Nadto podobnie się dowodzi, jak w podaniu poprzedzającém, że płaszczyzny tych tróykątów są równoległe.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

Dwie linije proste, zawarte między trzema płaszczyznami równoległemi, przecięte są na części proporcyonalne.

Przypuśćmy że linija AB (fig. 37) spotyka płaszczyzny równoległe MN, PQ, RS, w punktach

A, E, B, i że linija CD, spotyka też same płaszczyzny w punktach C, F, D: powiadam, że mieć będziemy AE : EB : : CF : FD.

Poprowadźmy AD, która spotka płaszczyznę PQ w punkcie G: i daymy AC, EG, GF, BD: przecięcia EG, BD, płaszczyzn równoległych PQ, RS, przez płaszczyznę ABD, są równoległe (10): azatem AE : EB : : AG : GD: podobnie przecięcia AC, GF, jako równoległe, dają AG : GD : : CF : FD: z przyczyny więc wspólnego stosunku AG : GD, będzie AE : EB : : CF : FD.

* PODANIE. XVI.

TWIERDZENIE.

Niech będzie ABCD (fig, 38), *jakikolwiek czworobok, nie leżący na jedney płaszczyznie; jeżeli boki przeciwległe przetną się proporcyonalnie przez dwie linije proste* EF, GH, *tak, że jest* AE : EB : : DF : FC; i BG: GC = AH: HD; *powiadam, że linije proste* EF, GH, *przetną się z sobą w pukcie* M *tak, że będzie* HM : MG : : AE : EB; i EM : MF : : AH : HD.

Poprowadźmy przez AD, jakąkolwiek płaszczyznę A*b*H*c*D, tak jednak, żeby nie przechodziła przez GH: przez punkta E, B, C, F, daymy do GH równoległe E*e*, B*b*, C*c*, F*f*; które spotkają tę płaszczyznę w punktach *e*, *b* .*c*, *f*. Z przyczyny równoległości liniy B*b*, GH, C*c*. (15,3) mieć będziemy $bH : Hc :: BG : GC :: AH : HD$, azatém (20.3) tróykąty AHb, DHc, są podobne. Mieć potém będziemy $Ae : eb :: AE : EB$: i $Df : fc :: DF : FC$; azatém $Ae : eb :: Df : fc$; albo składając, będzie $Ae : Df :: Ab : Dc$. Aże z przyczyny podobieństwa tróykątów AHb, DHc, mamy $Ab : Dc :: AH : HD$; azatém $Ae : Df :: AH : HD$: nadto, ponieważ z przyczyny podobieństwa tychże tróykątów AHb i DHc, kąt $HAe = HDf$; przeto tróykąty AHe, DHf są podobne (20,3); azatém kąt $AHe = DHf$. Z tego naprzód wypada, że eHf, jest liniją prostą; azatém że trzy równoległe Ee, GH, Ff leżą na jedney płaszczyznie, która zawierać będzie linije EF, GH: więc *te linije przecinać się muszą w punkcie* M. Powtóre, z przyczyny równoległości liniy Ee, MH, Ff, mieć będziemy $EM : MF :: eH : Hf :: AH : HD$.

Przez podobne wykreślenie, odniesione do boku AB, dowiedziemy, że $HM : MG :: AE : EB$.

PODANIE XVII.

TWIERDZENIE.

Kąt zawarty między płaszczyznami (MAN: MAP (fig. 39) *może bydź mierzony, stosownie do opisania, kątém* NAP, *jaki czynią z sobą dwie prostopadłe* AN, AP *poprowadzone na każdey z tych płaszczyzn, do przecięcia wspólnego* AM.

Dla przekonania się o rzetelności tey miary, dowieśdź potrzeba 1º. że jest ona stałą, czyli że będzie tąż samą w każdym punkcie wspólnego przecięcia, skąd się wyprowadzają dwie prostopadłe.

Jakoż, jeżeli weźmiemy inny punkt M, i gdy poprowadzimy MC na płaszczyźnie MN, i MB na płaszczyźnie MP, prostopadłe do wspólnego przecięcia AM; tedy, ponieważ MB i AP są prostopadłe do jedney linii AM, przeto są równoległe sobie. Dla teyże samey przyczyny MC jest równoległe do AN: więc kąt BMC=PAN (13): azatém obojętną jest rzeczą, prowadzić prostopadłe do punktu M lub do A, kąt między niemi zawarty zawsze będzie ten sam.

2º Dowieśdź potrzeba, że gdy kąt dwóch płaszczyzn powiększy się lub zmnieyszy w pewnym stosunku, tedy i kąt PAN, powiększy się lub zmnieyszy w tymże stosunku.

Na płaszczyźnie PAN, z punktu A promieniem dowolnym, zakreślmy łuk NDP: ze środka M, promieniem równym, zakreślmy łuk CEB; poprowadźmy dowolnie AD. Ponieważ dwie płaszczyzny PAN, BMC są prostopadłe do jedney linii MA, przeto są równoległe sobie (9): przecięcia więc AD, ME, tych dwóch płaszczyzn przez trzecią AMD są równoległe; azatém kąt BME będzie równy PAD (13).

Nazwiymy na moment *węgieł*, kąt utworzony przez dwie płaszczyzny MP, MN. Teraz, gdyby kąt DAP był równy kątowi DAN, tedy oczywiście węgieł DAMP, byłby równy węgłowi DAMN;

gdyż podstawa PAD położyłaby się zupełnie na sobie równą DAN, wysokość AM zawsze byłaby taż sama: więc te dwa węgły zupełnieby do siebie przystały. Widzimy nawet, iż gdyby kąt DAP zawierał się dokładnie pewną liczbą razy w kącie PAN, tedy i węgieł DAMP tyleżby się razy zawierał w węgle PAMN. Aże ze stosunku liczby całey wnosimy o stosunku jakimkolwiek, jak tego w zupełnie podobnem zdarzeniu dowiedliśmy (17, 2); azatém jakikolwiek będzie stosunek kąta DAP do kąta PAN; węgieł DAMP, będzie w tymże stosunku z węgłem PAMN: azatém kąt NAP może bydź wzięty za miarę węgła PAMN, czyli kąta, jaki czynią dwie płaszczyzny MAP, MAN.

Uwaga. Toż samo jest z kątami przez dwie płaszczyzny utworzonemi, co i z kątami utworzonemi przez dwie linije proste. Azatém, gdy dwie płaszczyzny wzajemnie się krzyżują, kąty w wierzchołku są równe, a kąty przyległe razem wzięte ważą dwa kąty proste; azatém jeżeli jedna płaszczyzna jest prostopadłą do drugiey, tedy ta wzajemnie jest prostopadłą do pierwszey. Podobnie w spotkaniu dwóch płaszczyzn równoległych przez trzecią płaszczyznę, zachodzą też same równości i też same własności, co i w spotkaniu dwóch liniy równoległych przez trzecią.

PODANIE XVIII.

TWIERDZENIE.

Gdy linija AP *jest prostopadła do płaszczyzny* MN, *wszelka płaszczyzna* APB *prowadzona przez tę prostopadłą* AP, *będzie prostopadłą do płaszczyzny* MN (fig. 40).

Niech będzie BC przecięcie płaszczyzn AB, MN: jeżeli na płaszczyznie MN, poprowadzi się DE prostopadła do BP; linija AP, jako prostopadła do płaszczyzny MN, jest prostopadłą do każdey z dwóch liniy BC, DE: aże kąt APD, utworzony przez linije PA, PD prostopadłe do wspólnego przecięcia BP, mierzy kąt dwóch płaszczyzn AB, MN; przeto, ponieważ ten kąt jest prosty, dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe (opis. 5).

Uwaga. Gdy trzy linije proste AP, BP, DP, są do siebie prostopadłe, każda z tych liniy jest prostopadłą do płaszczyzny dwóch innych, a trzy płaszczyzny są wzajemnie prostopadłe do siebie.

PODANIE XIX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli płaszczyzna AB *jest prostopadłą do płaszczyzny* MN, *i gdy na płaszczyznie pierwszey* AB, *poprowadzi się* PA *prostopadła do wspólnego przecięcia* PB; *powiadam, że* PA *będzie prostopadła do płaszczyzny* MN (fig. 40).

Jakoż gdy na płaszczyznie MN poprowadzi się PD prostopadła do PB, kąt APD będzie prosty; gdyż płaszczyzny są prostopadłe do siebie; więc linija AP, jest prostopadłą do dwóch liniy PB, PD, zatém są one prostopadłe do ich płaszczyzny MN.

Wniosek. Jeżeli płaszczyzna AB, jest prostopadłą do płaszczyzny MN, i gdy z punktu P wspólnego ich przecięcia, wyniesie się prostopadła do płaszczyzny MN, powiadam, że ta prostopadła będzie na płaszczyznie AB; bo gdyby ona nie była na niey, moglibyśmy poprowadzić na płaszczyznie AB prostopadłą AP do wspólnego przecięcia BP, która byłaby razem prostopadłą do płaszczyzny MN: azatém w jednym punkcie byłyby dwie prostopadłe do płaszczyzny MN; co jest niepodobieństwem (4).

PODANIE XX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie płaszczyzny AB, AD (fig. 40), *są prostopadłe do trzeciey* MN, *tedy i wspólne ich przecięcie* AP, *prostopadłe będzie do tey trzeciey płaszczyzny.*

Bo gdy z punktu P wyniesiemy prostopadłą do płaszczyzny MN, ta prostopadła znaydować się musi razém, tak na płaszczyznie AB jako i na płaszczyznie AD (wnio. 19); azatém jest ona wspólnym ich przycięciem AP.

PODANIE XXI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli kąt bryłowy utworzony jest przez trzy kąty płaskie, summa jakichkolwiek dwóch z tych kątów będzie większą od kąta trzeciego.

Należy nam dowieść tylko to podanie, gdy kąt płaski, który z summą dwóch innych porównywamy, jest większy od każdego z tych ostatnich. Niech więc będzie kąt bryłowy S (fig. 41) utworzony przez trzy kąty płaskie ASB, ASC i BSC; i przypuśćmy że kąt ASB, jest naywiększy ze trzech kątów, powiadam że mieć będziemy $ASB < ASC + BSC$.

Na płaszczyznie ASB zróbmy kąt $DSB = BSC$; poprowadźmy dowolnie liniją prostą ADB, a wziąwszy $SC = SD$, daymy AC, BC.

Dwa boki BS, SD, są równe dwóm bokom BS, SC; kąt $BSD = BSC$; azatém dwa troykąty BSD, BSC są równe, więc $BD = BC$. Mamy zaś $AB < AC + BC$; odciągnąwszy z jedney strony BD a z drugiey strony BC równe BD, otrzymamy $AD < AC$. Dwa boki AS, SD są równe dwóm bokóm AS, SC, trzeci AD jest mnieyszy od trzeciego AC; azatém (10, 1) kąt $ASD < ASC$. Dodając $BSD = BSC$, mieć będziemy $ASD + BSD$ czyli $ASB < ASC + BSC$.

PODANIE XXII.

TWIERDZENIE.

Summa kątów płaskich, składających kąt bryłowy, jest zawsze mnieysza od czterech kątów prostych.

Przetnijmy kąt bryłowy S (fig. 42) jakąkolwiek płaszczyzną ABCDE, z punktu O wziętego na tey płaszczyznie poprowadźmy do wszysikich kątów liniie OA, OB, OC, OD, OE.

Summa kątów tróykątów ASB, BSC i t. d. utworzonych przy wierzchołku S, równa jest summie kątów podobneyże liczby tróykątów AOB, BOC i t. d. utworzonych przy wierzchołku O. Lecz w punkcie B, kąty ABO, OBC, wzięte razém czynią kąt ABC mnieyszy od summy kątów ABS, SBC (21); podobnie w punkcie C, mamy BCO + OCD < BCS + SCD, toż samo jest, ze wszystkiemi kątami wieloboku ABCDE. Z tego wypada, że w troykątach których wierzchołkiem jest O, summa kątów na podstawie jest mnieysza od summy kątów na podstawie w tróykątach, których wierzchołkiem jest S; azatém summa kątów utworzonych przy punkcie O jest większa od summy kątów przy punkcie S. Aże summa kątów przy punkcie O jest równa czterém kątóm prostym (5, 1); azatem summa kątów płaskich składających kąt bryłowy S, jest mnieysza od czterech kątów prostych.

Uwaga. W tém dowodzeniu przypuszczamy że kąt bryłowy jest wypukły, czyli że płaszczyzna jedney ściany przedłużona nigdy przeciąć nie może kąta bryłowego; w przeciwnym razie summa kątów płaskich niemiałaby granic, i mogłaby bydź jakąkolwiek wielkością.

PODANIE XXIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa kąty bryłowe złożone są ze trzech kątów płaskich równych, każdy każdemu, tedy płaszczyzny na których leżą te kąty równe, będą równie do siebie nachylone.

Niech będzie kąt ASC=DTF, kąt ASB=DTE, i kąt BSC=ETF (fig. 43); powiadam, że dwie płaszczyzny ASC, ASB takie mieć będą nachylenie do siebie, jakie mają i płaszczyzny DTF, DTE.

Weźmy dowolnie SB, i poprowadźmy BO prostopadłą do płaszczyzny ASC; z punktu O, gdzie ta prostopadła spotyka płaszczyznę, poprowadźmy OA, OC, prostopadłe do SA, SC, i daymy AB, BC; weźmy potém TE=SB; poprowadźmy EP prostopadłą do płaszczyzny DTF; z punktu P poprowadźmy PD, PF prostopadłe do TD TF: nakoniec daymy DE, EF.

Tróykąt SAB jest prostokątny w A, a tróykąt DTE prostokątny w D (6), a ponieważ kąt ASB=DTE, przeto także kąt SBA=TED. Nadto SB=TE; więc tróykąt SAB jest równy tróykątowi TDE (5, 1); azatém SA=TD, a AB=DE. Podobnym sposobém dowiedzie się że SC=TF, a BC=EF. Czworobok SAOC jest równy czworobokowi TDPF, bo gdy położymy kąt ASC na jemu równy DTF. tedy z przyczyny SA=TD, a SC=TF, punkt A padnie na D, a punkt C na F, a w tymże czasie AO, prostopadła do SA, padnie na DP prostopadłą do DT, i podobnie OC padnie na OF; azatém punkt O padnie na punkt P, i będzie AO=DP. Aże tróykąty AOB, DPE są prostokątne w O i P, przeciwprostokątna AB=DE i bok AO=DP; przeto te troykąty są równe (18, 1); azatém kąt OAB=PDE. Kąt OAB jest nachyleniem dwóch płaszczyzn ASB, ASC; kąt PDE jest nachyleniem dwóch płaszczyzn DTE, DTF; azatém te dwa nachylenia są równe sobie.

Uważać tu jednak należy że kąt A, tróykata prostokątnego OAB, nie jest właściwie nachyleniem dwóch płaszczyzn ASB, ASC, tylko w tenczas, gdy prostopadła BO pada, względem SA, z teyże samey strony, co i SC; jeżeli ta prostopadła pada z drugiey strony, wówczas kąt dwóch płaszczyzn byłby rozwarty, a przyłączony do kąta A tróykąta OAB, uczyniłby dwa kąty proste. Lecz w tymże samym przypadku, kąt dwóch płaszczyzn TDE, TDF, byłby także rozwarty, a przyłączony do kąta D, tróykąta DPE, uczyniłby dwa kąty proste: azatém, ponieważ kąt A zawsze byłby równy kątowi D, wnieślibyśmy także, że nachylenie dwóch płaszczyzn ASB, ASC jest równe nachyleniu dwóch płaszczyzn TDE, TDF.

Uwaga. Gdy dwa kąty bryłowe są złożone z trzech kątów płaskich, równych każdy każdemu, i gdy razem kąty równe czyli odpowiedne są *jednakim sposobém rozłożone* w dwóch kątach bryłowych; wówczas te kąty są równe sobie, i przyłożone do siebie przystaną. Jakoż widzieliśmy już, że czworobok SAOC może bydź położony na jemu równy TDPF; a tak kładąc, SA na TD, SC padnie na TF a punkt O na punkt P. Lecz z przyczyny równości tróykątów AOB, DPE, OB, prostopadła do płaszczyzny ASC, jest równa PE, prostopadłey do płaszczyzny TDF: nadto tu prostopadłe są skierowane w jednę stronę; azatém punkt B padnie na E, linija SB na liniją TE, i dwa kąty bryłowe zupełnie do siebie przystaną.

To jednak przystawanie wtenczas zachodzi, gdy zakładamy, że kąty płaskie równe są *rozłożone jednakim sposobém* w obudwóch kątach bryłowych; bo gdyby kąty płaskie równe *rozłożone były w wstecznym porządku*, albo co na jedno wychodzi, gdyby prostopadłe OB, PE, zamiast kierowania się w tęż samę stronę względem płaszczyzn ASC, DTF, były skierowane w stronę przeciwną, wówczas niepodobne byłoby przystawanie do siebie dwóch kątów bryłowych: to jednak niebyłoby mniey prawdziwym, podług twierdzenia, gdyby płaszczyzny na których są kąty równe, były równie nachylone do siebie, tak, że dwa kąty bryłowe byłyby równe we wszystkich swych częściach składających, niemogąc jednak do siebie przystać. Ten rodzay równości, który nie jest bezwzględny, czyli przystawanie, zasługuje na rozróżnienie przez szczególne nazwanie, my to nazywać będziemy *równością przez symetryą.*

I tak dwa kąty bryłowe, o których jest mowa, utworzone przez trzy kąty płaskie równe każdy każdemu, lecz rozłożone w porządku wstecznym, nazywać się będą, *kątami równemi przez symetryą,* czyli krócey, *kątami symetrycznemi.*

Ta sama uwaga stosuje się do kątów bryłowych, utworzonych z więcey niż trzech kątów płaskich; i tak jeden kąt bryłowy utworzony przez kąty płaskie A, B, C, D, E, i kąt drugi bryłowy utworzony przez te same kąty w porządku wstecznym A, E, D, C, B, mogą bydź takie, że płaszczyzny na których znaydują się te kąty równe, są równie nachylone do siebie; te kąty bryłowe, które będą równe, chociaż przystawanie ich jest niepodobne, nazywają się *kątami bryłowemi równemi przez symetryą,* czyli *kątami bryłowemi symetrycznemi.*

W figurach płaskich, właściwie mówiąc, zgoła niema równości przez symetryą, i wszystkie te równości, którebyśmy tak nazywać chcieli, byłyby równościami bezwzględnemi albo przystawaniem: przyczyną tego jest, że można przewrócić figurę płaską, i bez różnicy wziąć górę za spód. Całkiem inaczey się dzieje w bryłach, gdzie trzeci wymiar może bydź wzięty w dwóch kierunkach różnych.

PODANIE XXIV.

ZAGADNIENIE.

Mając dane trzy kąty płaskie składające kąt bryłowy, wynaleźć, przez wykreślenie płaskie, kąt jaki dwie z tych płaszczyzn czynią z sobą.

Niech będzie S (fig. 44) dany kąt bryłowy w którym znane są trzy kąty płaskie ASB, ASC, BSC; szukaymy kąta jaki czynią z sobą dwie z tych płaszczyn, naprzykład płaszczyzny ASB, ASC.

Wyobraźmy że zrobiliśmy to samo wykreślenie co w podaniu poprzedzającém; kąt OAB będzie kątém szukanym. Chodzi więc tylko o znalezienie tegoż samego kąta, przez wykreślenie płaskie, czyli kreślone na jedney płaszczyznie.

Na ten koniec zrobmy na jedney płaszczyznie kąty B'SA, ASC, B''SC, równe kątóm BSA, ASC, BSC, w figurze bryłowey: wezmy B'S i B''S równe w szczególności BS figury bryłowey. Z punktów B' i B'' spuśćmy B'A i B''C prostopadłe na SA i SC, które się zbiegą z sobą w punkcie O. Z punktu A, jako środka, promieniem AB' zakreślmy półokręgu koła B'*b*E; z punktu O wynieśmy O*b* prostopadłą do B'E, która spotka okrąg koła w *b*; daymy A*b*; a kąt EA*b* będzie nachyleniem szukaném dwóch płaszczyzn ASC, ASB, kąta bryłowego.

Cała rzecz się sprowadza do pokazania, że tróykąt AOb figury płaskiey, jest równy tróykątowi AOB figury bryłowey. Dwa tróykąty $B'SA$, BSA, prostokątne są w A, kąty w S są równe, azatém kąty B' i B są równe. Aże przeciwprostokątna SB' jest równa przeciwprostokątney SB, przeto te tróykąty są równe, azatém bok SA figury płaskiey jest równy SA figury bryłowey, i także AB', czyli jemu równy Ab, w figurze płaskiey, jest równy AB w figurze bryłowey; podobnie się dowiedzie że bok SC jest równy w jedney i drugiey figurze; skąd wypada, że czworobok $SAOC$ w obu tych figurach jest równy, azatém że AO figury płaskiey jest równy AO figury bryłowey; więc w obu tych figurach tróykąty prostokątne AOb, AOB, mają przeciwprostokątną równą i bok jeden równy; więc są równe sobie, azatém kąt EAb, znaleziony przez wykreślenie płaskie, jest równy nachyleniu, dwóch płaszczyzn SAB, SAC w kącie bryłowym.

Gdy punkt O pada między A i B' w figurze płaskiey, kąt EAb staje się rozwartym, i mierzy zawsze prawdziwe nachylenie dwóch płaszczyzn, i dla tego to oznaczyliśmy przez EAb a nie przez OAb nachylenie żądane, w celu ażeby toż samo rozwiązanie służyło wszystkim bez wyjątku przypadkóm.

Uwaga. Można zadać sobie pytanie, azali biorąc dowolnie trzy kąty płaskie, można utworzyć z nich kąt bryłowy.

Na sam przód potrzeba żeby summa trzech kątów danych była mnieysza od czterech kątów prostych, bo bez tego nie może bydź utworzony kąt bryłowy (22); nadto, gdy weźmiemy dwa kąty dowolnie B'SA, ASC, potrzeba ażeby trzeci CSB″ był takiey wielkości, iżby prostopadła CB″ na bok SC spuszczona, spotykała średnicę B'E między jey końcami B' i E. Granicami więc wielkości kąta CSB″ są to granice, które dozwalają spuścić prostopadłą B″C do punktów B' i E. Z tych punktów spuśćmy na CS prostopadłe B'I i EK, które spotkają okrąg koła, nakreślony promieniem SB″, w punktach I i K, a granicami kąta CSB″ będą CSI i CSK.

W tróykącie równoramiennym B'SI, ponieważ linija CS przedłużona, prostopadłą jest do podstawy B'I, mamy kąt CSI = CSB' = ASC + ASB'. A w troykącie równoramiennym ESK, ponieważ linija SC jest prostopadłą do SK, mamy kąt CSK = CSE. Nadto z przyczyny równości troykątów ASE, ASB', kąt ASE = ASB'; azatém CSE czyli CSK = ASC — ASB'.

Z tego wypada, że zagadnienie będzie podobne tyle razy, ile razy trzeci kąt CSB″ będzie mnieyszy od summy dwóch innych ASC, ASB', a większy od ich różnicy. Jest to warunek zgadzający się z podaniem XXI; gdyż na mocy tego podania potrzeba żeby było CSB″ < ASC + ASB'; nadto potrzeba, żeby było ASC < CSB″ + ASB' czyli CSB″ > ASC — ASB'.

PODANIE XXV.

ZAGADNIENIE.

Mając dane dwa z trzech kątów płaskich, składających kąt bryłowy, oraz kąt nachyleni i tych dwóch płaszczyzn, znaleść trzeci kąt płaski.

Niech będą ASC, ASB' (fig. 44) dwa kąty płaskie dane, i przypuśćmy na moment, że CSB'', jest trzecim kątém szukanym. Gdy więc zrobimy wykreślenie to samo, co w poprzedzającém zagadnieniu, kąt, zawarty między płaszczyznami dwóch pierwszych, będzie EA*b*. Jako więc determinuje się kąt EA*b*, za pomocą CSB'', gdy dwa inne są dane, tak podobnie zadeterminować można CSB', zapomocą EA*b*; co rozwiąże zagadnienie podane.

Wziąwszy dowolnie SB', spuśćmy na SA prostopadłą nieograniczoną B'E; zróbmy kąt EA*b* równy kątowi dwóch płaszczyzn danych. Z punktu *b*, gdzie bok A*b* spotyka okrąg koła, nakreślony ze środka A promieniem AB', spuśćmy na AE prostopadłą *b*O; z punktu O spuśćmy na SC prostopadłą nieograniczoną OCB'', którą tak oznaczmy w B'', żeby było SB''=SB'. Kąt CSB'' będzie trzecim kątém płaskim szukanym.

Bo gdy utworzymy kąt bryłowy z trzech kątów płaskich BSA, ASC, CSB'' nachylenie płaszczyzn, gdzie są kąty dane ASB', ASC, będzie równe kątowi danemu EAb.

Uwaga. Jeżeli kąt bryłowy jest *czworościenny*, czyli złożony z czterech kątów płaskich ASB, BSC, CSD, DSA (fig. 45); tedy wiadomość tych ostatnich kątów nie jest dostateczna do oznaczenia wzajemnych do siebie nachyleń płaszczyzn, na których kąty płaskie leżą: gdyż z tychże samych kątów płaskich, nieskończoną liczbę kątów bryłowych utworzyć można. Lecz jeżeli się przyda jeden warunek, naprzykład, jeżeli będzie dane nachylenie dwóch płaszczyzn ASB, BSC, wówczas kąt bryłowy całkiem jest oznaczony, i można znaleść nachylenie dwóch jakichkolwiek jego płaszczyzn. Jakoż wyobraźmy kąt bryłowy troyścienny, utworzony przez kąty płaskie ASB, BSC, ASC; dwa pierwsze kąty są dane, oraz dane jest nachylenie ich płaszczyzn; można więc zadeterminować, przez rozwiązane teraz zagadnienie, kąt trzeci ASC. Jeżeli teraz zważymy kąt bryłowy troyścienny, utworzony przez kąty płaskie ASC, ASD, DSC, te trzy kąty są znane; a tak kąt bryłowy całkiem jest determinowany. Ponieważ kąt bryłowy czworościenny jest utworzony przez połączenie się dwóch kątów troyściennych, o których teraz mówiliśmy, azatém, ponieważ te kąty cząstkowe są znane i determinowane, kąt całkowity podobnie znany i determinowany będzie.

Kąt dwóch płaszczyzn ASD, DSC, wprost się wynaydzie za pomocą drugiego kąta bryłowego cząstkowego. Co się tyczy kąta dwóch płaszczyzn

BSC, CSD, potrzeba w kącie bryłowym cząstkowym szukać kąta czwartego, zawartego między dwiema płaszczyznami ASC, DSC, a w drugim, kąta zawartego między dwiema płaszczyznami ASC, BSC; summa tych dwóch kątów będzie kątém zawartym między płaszczyznami BSC, DSC.

Podobnym sposobém się znaydzie, że dla zadeterminowania kąta bryłowego pięciościennego, potrzeba oprócz pięciu kątów płaskich, składających kąt bryłowy, znać jeszcze dwa wzajemne nachylenia ich płaszczyzn, a zaś trzeba znać ich trzy, w kącie bryłowym sześciościennym, i tak daley.

XIĘGA VI.

WIELOŚCIANY.

OPISANIE.

I. Nazywamy *bryłą wielościenną*, albo krócicy *wielościanem*, każdą bryłę zakończoną płaszczyznami czyli ścianami płaskiemi. (Te płaszczyzny zakończone są koniecznie linijami prostemi). Nazywamy wszczególności *czworościanem*, bryłę mającą cztery ściany; *sześciościanem* bryłę zakończoną sześciu ścianami: *ośmiościanem*, zakończoną ośmiu ścianami: *dwónastościanem*, zakończoną dwónastu ścianami: *dwudziestościanem*, zakończoną dwudziestu ścianami, i tak daley.

Czworościan jest nayprostszy z wielościanów; gdyż do utworzenia kąta bryłowego naymniey trzy płaszczyzny są potrzebne: i te płaszczyzny zastawią mieysce próżne, które żeby było zamknięte, przynaymniey jedney jeszcze płaszczyzny potrzebuje.

II. Wspólne przecięcie się dwóch ścian przyległych w wielościanie, nazywa się *bokiem* albo *krawędzią* wielościanu.

III. *Wielościanem foremnym* nazywa się ten, w którym wszystkie ściany są wielobokami foremnemi równemi, i którego wszystkie kąty bryłowe są równe sobie. Tych wielościanów jest pięć (patrz dodatek do xiąg vi, i vii).

IV. *Graniastosłup*, jestto bryła zawarta wielu ścianami równoległobocznemi, zakończona z jedney i drugiey strony płaszczyznami wielobocznemi równemi i równoległemi sobie.

Dla wykreślenia tey bryły, niech będzie dany ABCDE (fig. 48) jakikolwiek wielobok: jeżeli na jakieykolwiek płaszczyznie równoległey do ABC, poprowadzą się linije FG, GH, HI, i t. d. równe i równoległe bokom AB, BC, CD, i t. d. które utworzą wielobok FGHIK, równy wielobokowi ABCDE: jeżeli potém połączą się wierzchołki kątów jedney płaszczyzny z wierzchołkami odpowiednich kątów drugiey płaszczyzny, linijami prostemi AF, BG, GH, i t. d. ściany ABGF, BCHG i t. d. będą równoległobokami, a bryła ABCDEFGHIK, tym sposobem utworzona, będzie graniastosłupem.

V. Wieloboki równe i równoległe ABCDE, FGHIK nazywają się *podstawami graniastosłupa*: inne płaszczyzny równoległoboczne wzięte razem, stanowią *powierzchnią boczną* czyli *wypukłą graniastosłupa*. Linije równe AF, BG, CH i t. d., nazywają się *krawędziami* graniastosłupa.

VI. *Wysokość graniastosłupa*, jestto odległość dwóch jego podstaw, czyli prostopadła spuszczona z punktu podstawy górney na podstawę dolną.

VII *Graniastosłup* jest *prosty*, gdy krawędzie jego AF, BG, i t. d. są prostopadłe do płaszczyzn podstaw: a wówczas każda krawędź jest równa wysokości graniastosłupa. W każdym innym przypadku, graniastosłup jest *pochyły*, i wysokość jego jest mnieysza od krawędzi.

VIII. *Graniastosłup* jest *tróykątny*, *czworokątny*, *pięciokątny*, *sześciokątny* t. d., podług tego, jak podstawa jego jest troykątem, czworobokiem, pięciobokiem, sześciobokiem i t. d.

IX. Graniastosłup mający za podstawę równoległobok, wszystkie swe ściany ma równoległoboczne, i nazywa się *równoległościanem* (fig. 49). *Równoległościan* jest *prostokątnym*, gdy wszystkie ściany jego są prostokątami.

X. Z pomiędzy równoległościanów prostokątnych rozróżniamy *sześcian*, czyli sześciościan foremny, zamknięty sześciu kwadratami równemi.

XI. *Ostrosłup* czyli *piramida* jestto bryła utworzona z wielu płaszczyzn troykątnych, wychodzących z jednego punktu S, a kończących się na rozmaitych bokach jedney płaszczyzny wieloboczney ABCDE (fig. 42).

Wielobok ABCDE nazywa się *podstawą* ostrosłupa, punkt S *wierzchołkiem*, a zbiór tróykątów ASB, BSC i t. d. składa *powierzchnią wypukłą* czyli *boczną* ostrosłupa.

XII. *Wysokością* graniastosłupa jest prostopadła spuszczona z wierzchołka na płaszcyznę podstawy, przedłużoney, jeżeliby tego potrzeba było.

XIII. Ostrosłup jest *troykątny*, *czworokątny* i t. d. podług tego, jak podstawą jego jest troykąt, czworobok i t. d.

XIV. Ostrosłup jest *foremny*, gdy podstawa jest wielobokiem foremnym, i razem gdy prostopadła spuszczona z wierzchołka na płaszczyznę podstawy, przechodzi przez środek podstawy: ta linija nazywa się wówczas *osią* ostrosłupa.

XV. *Przekątna* wielościanu, jestto linija prosta, łącząca wierzchołki dwóch kątów bryłowych nieprzyległych.

XVI. Nazywać będziemy *wielościanami symetrycznemi*, dwa wielościany mające wspólną podstawę, i podobnie zbudowane jeden nad, drugi pod płaszczyzną podstawy, z tym jednak warunkiem, że wierzchołki kątów bryłowych odpowiednich, położone są w równych odległościach od płaszczyzny podstawy, na jedney linii prostey prostopadłey do teyże płaszczyzny.

Naprzykład, jeżeli ST (fig. 61) jest prostopadłą do płaszczyzny ABC, i gdy w punkcie O, gdzie ta prostopadła spotyka tę płaszczyznę, jest ona podzieloną na dwie równe części; dwa ostrosłupy SABC, TABC, mające wspólną podstawę ABC, są wielościanami symetrycznemi.

XVII. Dwa *ostrosłupy troykątne* są *podobne*, gdy mają dwie ściany podobne każda każdey, podobnie położone i równie do siebie nachylone.

I tak, gdy założymy, że kąty ABC=DEF; BAC=EDF, ABS=DET, BAS=EDT, i gdy nadto nachylenie płaszczyzn ABS, ABC (fig. 64), jest równe nachyleniom im odpowiednych płaszczyzn DTE, DEF; ostrosłupy SABC, TDEF będą podobne.

XVIII. Gdy utworzymy troykąt z wierzchołków trzech kątów wziętych na jedney ścianie, albo podstawie wielościanu, możemy wyobrazić że wierzchołki różnych kątów bryłowych wielościanu, położone za płaszczyzną tey podstawy; są wierzchołkami tyluż ostrosłupów troykątnych, mających za podstawę wspólną troykąt wzmiankowany, i każdy z tych ostrosłupów zadeterminuje położenie każdego kąta bryłowego wielościanu. względem podstawy. To gdy założymy.

Dwa *wielościany* są *podobne*, gdy mają podstawy podobne, wierzchołki kątów bryłowych odpowiednych za temi podstawami są determinowane przez ostrosłupy troykątne podobne każdy każdemu.

XIX. Nazywać będziemy *wierzchołkami* wielościanu, punkta położone w wierzchołku rozmaitych kątów bryłowych.

NB. Wszystkie wielościany które rozważamy, są wielościanami o kątach wyskakujących, czyli wielościanami *wypukłemi*. Nazywać będziemy tak wielościany, których powierzchnia nie więcey jak tylko w dwóch punktach przez liniją prostą spotkana być może. W tym rodzaju wielościanów, płaszczyzna przedłużona jedney ściany, nie może przecinać bryły; niepodobieństwem więc jest, aby wielościan, był w części nad płaszczyzną jedney ściany, a w części pod tą płaszczyzną; jest on całkiem z jedney strony tey płaszczyzny.

PODANIE PIERWSZE.

TWIERDZENIE.

Dwa wielościany nie mogą mieć też same wierzchołki i jednaką ich liczbę, bez przystania do siebie.

Jakoż przypuśćmy że mamy wystawiony jeden z wielościanów; jeżeli chcemy wystawić drugi, któryby miał też same wierzchołki i o takieyże liczbie, potrzeba ażeby nie wszystkie płaszczyzny jego przechodziły przez też same punkta jak w pierwszym wielościanie; bo inaczey nieróżniłyby się niczém od siebie; lecz widocznie, iż wówczas niektóre z nowych płaszczyzn przecięłyby pierwszy wielościan; byłyby wierzchołki nad temi płaszczyznami, i wierzchołki pod temi płaszczyznami; co niemoże się godzić z wielościanem wypukłym; azatém jeżeli dwa wielościany mają też same wierzchołki i jednaką ich liczbę, tedy te wielościany muszą koniecznie do siebie przystać.

Uwaga. Mając dane, co do położenia swego punkta A, B, C, K i t. d., mające służyć za wierzchołki wielościanowi, łatwo jest nakreślić sam wielościan.

Obierzmy naprzód trzy punkta bliskie siebie D, E, H (fig. 46), tak: ażeby płaszczyzna DEH przechodziła, jeżeli to być, przez nowe punkta K, C, zostawuj ąc wszystkie inne z jedney strony, to jest nad albo pod płaszczyzną; płaszczyzna DEH czyli DEHKC tym sposobem zadeterminowana, będzie jedną ścianą bryły. Przez jeden z jey boków EH poprowadźmy płaszczyznę, i tak ją obracaymy, aż nie napotka nowego wierzchołka F, albo kilka ich razem F, I; mieć będziemy drugą ścianę FEH czyli FEHI; ciągnąc daley tym sposobém prowadzenie płaszczyzn przez boki znalezione aż póki bryła zupełnie ze wszystkich stron nie będzie zakończona, otrzymamy bryłę, która będzie wielościanem żądanym; gdyż nie mogą bydź dwie, któreby miały też same wierzchołki.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

W dwóch wielościanach symetrycznych, ściany odpowiedne są równe każda każdey a nachylenie ścian przyległych w jedney z tych brył, jest równe nachyleniu ścian odpowiednych w drugiey.

Niech będzie ABCDE (fig. 47) podstawą wspólną dwóch wielościanów: niech M i N będą wierzchołkami dwóch jakichkolwiek kątów bryłowych jednego z wielościanów; a M' i N' odpowiedne wierzchołki drugiego wielościanu. Potrzeba, podług opisania, aby linije proste MM', NN′ były prostopadłe do płaszczyzny ABC, i podzielone na dwie równe części w punktach m i n, w których tę płaszczyznę spotykają. To założywszy powiadam, że odległość MN jest równa odległości M′N′.

Jakoż gdy obrócimy trapez mM′N′n około mn tak, aby płaszczyzna jego położyła się na płaszczyznie mMNn; tedy z przyczyny kątów prostych w m i n, bok mM′ padnie na bok sobie równy mM, a zaś nN′ na nN; azatém te dwa trapezy przystaną do siebie, i mieć będziemy MN = M′N′.

Niech będzie P trzecim wierzchołkiem wielościanu górnego, a zaś P′ jemu odpowiednym w dolnym; podobnie mieć będziemy MP = M′P′, a NP = N′P′; azatém *tróykąt* MNP, *łączący jakiekolwiek trzy wierzchołki wielościanu górnego, jest równy tróykątowi* M′N′P′, *łączącemu trzy wierzchołki odpowiedne w dolnym wielościanie.* Z pomiędzy tych tróykątów, jeżeli zważymy te tylko, które utworzone są na powierzchni wielościanu, wnieść już możemy że powierzchnie dwóch wielościanów, złożone są z jednakiey liczby troykątow równych każdy każdemu.

Powiadam teraz, jeżeli troykąty znaydują się na jedney płaszczyznie powierzchni i składają jednę i tęż samę ścianę wieloboczną, tedy troykąty odpowiedne, będą na teyże płaszczyznie na drugiey powierzchni, i utworzą ścianę wieloboczną równą.

Jakoż niech będą MPN, NPQ dwa troykąty

przyległe, które założmy, iż leżą na jedney płaszczyznie, i niech będą M'P'N', N'P'Q' troykąty im odpowiedne: mamy kąt MNP=M'N'P'; kąt PNQ=P'N'Q', a gdy poprowadzimy MQ i M'Q', troykąt MNQ będzie równy troykątowi M'N'Q', a tak mieć będziemy kąt MNQ=M'N'Q'; aże MPNQ jest jedną płaszczyzną, przeto kąt MNQ=MNP+PNQ; azatém mieć także będziemy M'N'Q'=M'N'P'+P'N'Q'. Aże gdyby trzy płaszczyzny M'N'P', P'N'Q', M'N'Q', nie zbiegły się z sobą w jednę, utworzyłyby kąt bryłowy, i mielibyśmy (20,5), kąt M'N'Q'<M'N'P'+P'N'Q'; przeto, ponieważ ten warunek niezachodzi, dwa troykąty M'N'P', P'N'Q' leżą na jedney płaszczyznie.

Zostaje nam do pokazania, że nachylenie jakichkolwiek dwóch ścian przyległych w jednym z wielościanów, jest równe nachyleniu dwóch ścian odpowiednych w drugim wielościanie.

Niech będą MPN, NPQ dwa troykąty utworzone na krawędzi wspólney NP, na płaszczyznach dwóch ścian przyległych: niech będą M'P'N' N'P'Q' im odpowiedne troykąty; w punkcie N wyobrazić możem kąt bryłowy utworzony przez trzy kąty płaskie MNQ, MNP, PNQ, a w punkcie N' kąt bryłowy, utworzony przez trzy kąty M'N'Q', M'N'P', P'N'Q'; aże już pokazaliśmy że te kąty płaskie są równe każdy każdemu, azatém nachylenie dwóch płaszczyzn MNP, PNQ jest równe nachyleniu im odpowiadających płaszczyzn M'N'P', P'N'Q' (22, 5).

W wielościanach więc symetrycznych, ściany są równe każda każdey, a płaszczyzny dwóch ścian jakichkolwiek przyległych w jedney bryle, mają też same nachylenie, co płaszczyzny dwóch ścian odpowiednych w drugiey bryle.

Uwaga. Tu postrzegamy, *że kąty bryłowe jednego wielościanu, są symetryczne z kątami bryłowemi drugiego wielościanu;* bo gdy kąt bryłowy N, utworzony jest przez płaszczyzny MNP, PMQ, QNR i t. d. tedy jemu odpowiedny N', jest utworzony przez płaszczyzny M'N'P', P'N'Q', Q'N'R' i t. d.. Te ostatnie płaszczyzny zdają się bydź rozłożone w tymże samym porządku co i pierwsze; ale ponieważ dwa kąty bryłowe są w popołożeniu względem siebie odwróconem, przeto rzeczywisty układ płaszczyzn składających kąt bryłowy N', jest odwrótny względem układu płaszczyzn zachodzącego w kącie odpowiednym N. Nachylenia płaszczyzn następnie po sobie idących są równe w jednym i drugim kącie bryłowym, azatém te kąty bryłowe są symetryczne względem siebie (*patrz, uwaga pod.* XXIII *xię.* V) Ta uwaga pokazuje, iż *wszelki wielościan, jeden tylko mieć może wielościan sobie symetryczny.* Bo gdybyśmy wystawili na inney podstawie nowy wielościan symetryczny z wielościanem danym, tedyby kąty bryłowe tego wielościanu były zawsze symetryczne z kątami wielościanu podanego; azatém byłyby równe kątom wielościanu symetrycznego wystawionego na pierwszey podstawie. Nadto, ściany odpowiedne byłyby zawsze równe, przeto te dwa wielościany symetryczne, wystawione na jedney podstawie albo na inney, miałyby ściany równe i kąty bryłowe równe, azatém przyłożone do siebie przystałyby, i utworzyłyby jeden i tenże sam wielościan.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Dwa graniastosłupy są równe, gdy mają kąt bryłowy zawarty między trzema płaszczyznami, równemi każda każdey, i podobnie umieszczonemi.

Niech będzie podstawa ABCDE, równa podstawie *abcde* (fig. 48); równoległobok ABGF równy równoległobokowi *abgf*, i równoległobok BCHG równy równoległobokowi *bchg*; powiadam że graniastosłup ABCI będzie równy graniastosłupowi *abci*.

Jakoż, gdy podstawę ABCDE położymy na podstawie jey równey *abcde*, te dwie podstawy przystaną do siebie: aże trzy kąty płaskie, składające kąt bryłowy B, są równe trzém kątom płaskim składającym kąt bryłowy *b*, każdy każdemu, tojest ABC=*abc*, ABG=*abg*, i GBC=*gbc*; nadto te kąty są podobnie umieszczone; przeto kąty bryłowe B i *b* są równe; a następnie bok BG padnie na jemu równy *bg*. Widzimy także, iż z przyczyny równoległoboków równych ABGF, *abgf*, bok GF padnie na bok jemu równy *gf*, i podobnie

GH na *gh*; azatém podstawa górna FGHIK zbieży się całkiem z podstawą sobie równą *fghik*; i dwie bryły zleją się w jednę, gdyż mieć będą też same wierzchołki (1).

Wniosek. Dwa graniastosłupy proste, mające podstawy i wysokości równe są równe sobie. Bo że bok AB jest równy *ab*, i wysokość BG równa *bg*, prostokąt ABGF będzie równy prostokątowi *abgf*; toż samo jest z prostokątami BGHC, *bghc*; przeto trzy płaszczyzny składające kąt bryłowy B, są równe trzem płaszczyznom składającym kąt bryłowy *b*. Azatém dwa takie graniastosłupy są równe.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

W każdym równoległościanie, płaszczyzny przeciwległe są równe i równoległe sobie.

Podług opisania tego gatunku bryły, podstawy ABCD, EFGH (fig. 49) są równoległobokami równemi, a ich boki są równoległe; zostaje więc do dowiedzenia, że toż samo zachodzi i w dwóch ścianach przeciwległych, jak naprzykład w ścianach AEHD, BFGC. Bok AD jest równy i równoległy bokowi BC, bo figura ABCD jest równoległobokiem; dla podobney przyczyny bok AE jest równy równoległy bokowi BF, azatém kąt DAE jest równy kątowi CBF (13, 5), a płaszczyzna DAE jest równoległa płaszczyznie CBF; a przeto także równoległobok DAEH jest równy równoległobokowi CBFG: dowiedzie się podobnym sposobem, że równoległoboki sobie przeciwległe ABFE, DCGH są równe i równoległe.

Wniosek. Ponieważ równoległościan jest bryłą zamkniętą sześciu płaszczyznami, z których sobie przeciwległe są równe i równoległe, przeto jakakolwiek i jey przeciwległa mogą bydź wzięte za podstawy równoległościanu.

Uwaga. Mając dane trzy linije proste AB, AE, AD, przez jeden punkt A przechodzące, i czyniące z sobą kąty dane, można na tych trzech linijach wystawić równoległościan. Natenkoniec poprowadzić trzeba przez koniec każdey linii prostey, płaszczyznę równoległą do płaszczyzny dwóch innych: to jest przez punkt B płaszczyznę równoległą do DAE, a przez punkt D płaszczyznę równoległą do BAE, a zaś przez punkt E płaszczyznę równoległą do BAD. Wzajemne spotkania się tych płaszczyzn utworzą równoległościan żądany.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

W każdym równoległościanie kąty bryłowe przeciwległe są symetryczne z sobą; a przekątne, przez wierzchołki tych kątów poprowadzone, przecinają się wzajemnie na dwie równe części.

Porównaymy, naprzykład, kąt bryłowy A, z jemu przeciwległym G (fig. 49): kąt EAB równy kątowi EFB jest także równy kątowi HGC; kąt DAE=DHE=CGF; a kąt DAB=DCB=HGF; azatém trzy kąty płaskie, składające kąt bryłowy A, są równe każdy każdemu trzem kątom składającym kąt bryłowy G: nadto, łatwo jest widzieć że ich rozkład jest różny w obudwóch tych kątach bryłowych: azatém 1º dwa kąty bryłowe A i G są symetryczne względem siebie (23, 5).

Powtóre, wyobraźmy dwie przekątne EC, AG, obie poprowadzone z wierzchołków przeciwległych: ponieważ AE jest równa i równoległa CG, przeto figura AEGC jest równoległobokiem; azatém przekątne EC, AG przetną się wzajemnie na dwie części równe. Podobnym sposobem dowiedzie się, że przekątna EC i druga DF przetną się także na dwie części równe; azatém 2º cztery przekątne wzajemnie się przetną na dwie części równe w jednym punkcie, który uważać można, jako środek równoległościanu.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Płaszczyzna BDHF (fig. 50) *przechodząca przez dwie krawędzie przeciwległe i równoległe sobie* BF, DH, *dzieli równoległościan* AG *na dwa graniastosłupy tróykątne* ABDHEF, GHFBCD *symetryczne względem siebie.*

Naprzód, te dwie bryły są graniastosłupami; gdyż troykąty ABD, EFH, jako mające swe boki równe i równoległe, są równe sobie; a zaś w niey ściany boczne ABFE, ADHE, BDHF są równoległobokami; azatém bryła ABDHEF jest graniastosłupem. Tożsamo jest i z bryłą GHFBCD. Powiadam teraz że te dwa graniastosłupy są względem siebie symetryczne.

Na podstawie ABD, wystawmy graniastosłup ABDE'F'H', symetryczny z graniastosłupem ABDEFH. Podług podania II, płaszczyzna ABF'E' jest równa ABFE, a płaszczyzna ADH'E' jest równa ADHE: lecz gdy porównamy graniastosłup GHFBCD z graniastosłupem ABDH'E'F', podstawa GHF jest równa ABD; równoległobok GHDC, który jest równy ABFE, jest także równy ABF'E' a równoległobok GFBC, który jest równy ADHE, jest także równy ADH'E': azatém trzy płaszczyzny, składające kąt bryłowy G w graniastosłupie GHFBCD, są równe trzem płaszczyznom, składającym kąt bryłowy A w graniastosłupie ABDH'E'F', każda każdey: nadto, te płaszczyzny są podobnie rozłożone, azatém te dwa graniastosłupy są równe (3) i mogą do siebie przystać. Aże jeden z nich ABDH'E'F' jest symetryczny z graniastosłupem ABDHEF, przeto drugi GHFBCD, jest także symetryczny z ABDHEF.

PODANIE VII.

PODANIE PRZYBRANE.

W każdym graniastosłupie ABCI (fig. 51) *przecięcia* NOPQR, STVXY *zrobione przez płaszczyzny równoległe, są wielobokami równemi.*

Jakož, boki NO, ST są równoległe, jako przecięcia dwóch płaszczyzn równoległych przez trzecią płaszczyznę ABGF: też same boki NO, ST są zawarte między linijami sobie równoległemi NS, OT, które są krawędziami graniastosłupa; azatém NO jest równe ST. Dla podobney przyczyny boki OP, PQ, QR i t. d., przecięcia NOPQR, są równe odpowiednie bokom TV, VX, XY i t. d., przecięcia STVXY. Nadto, ponieważ boki równe razem są i równoległe, przeto kąty NOP, OPQ, i t. d. pierwszego przecięcia, są równe odpowiednie kątom STV, TVX, i t. d. drugiego przecięcia. Azatém dwa przecięcia NOPQR, STVXY są wielobokami równemi.

Wniosek. Wszelkie przecięcie w graniastosłupie, równoległe podstawie, jest równe teyże podstawie.

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Dwa graniastosłupy tróykątne symetryczne ABDHEF, BCDFGH (fig. 52) *na które się rozkłada równoległościan* AG, *są równoważne sobie.*

Przez wierzchołki B i F poprowadźmy prostopadle do boku BF, płaszczyzny B*adc*, F*ehg*, które spotykają w jedney stronie w *a*, *d*, *c*, w drugiey w *e*, *h*, *g*, trzy inne krawędzie AE, DH, CG tegoż równoległościanu: przecięcia B*adc*, F*ehg* będą równoległobokami równemi. Przecięcia te są równe, gdyż zrobione są przez płaszczyzny prostopadłe do jedney linii prostey, a następnie równoległe są sobie (7): są one równoległobokami, gdyż dwa przeciwległe boki jednego przecięcia *a*B, *dc*, są przecięciami dwóch płaszczyzn równych ABFE, DCGH, przez tęż płaszczyznę.

Dla podobney przyczyny, figura B*ae*F, jest równoległobokiem, tak jak i wszystkie inne ściany boczne BF*gc*, *chdg*, *adhe*, bryły B*adc*F*ehg*; azatém ta bryła jest graniastosłupem (opis 4), i ten graniastosłup jest prosty, gdyż krawędź BF jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

To założywszy, jeżeli płaszczyzną BFHD podzielimy graniastosłup prosty B*h* na dwa graniastosłupy troykątne proste *a*B*de*F*h* B*dc*F*hg*; powiadam że graniastosłup troykątny pochyły ABDEFH, będzie równoważny graniastosłupowi tróykątnemu prostemu AB*de*F*h*.

Jakoż, ponieważ te dwa graniastosłupy mają jednę część wspólną ABD*he*F, przeto dosyć jest dowieśdź że pozostałe części, tojest bryły B*a*AD*d*, F*e*EH*h* są równoważne sobie.

Ponieważ z przyczyny równoległoboków ABFE, *a*BF*e*, boki AE, *ae* jako równe bokowi BF sobie równoległemu, są równe sobie; przeto odciągając od nich część wspólną A*e*, zostanie A*a*=E*e*. Podobnie się dowiedzie że D*d*=H*h*.

Dla wykonania teraz przystawania dwóch brył B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, połóżmy podstawę F*eh* na jey równey B*ad*: wówczas punkt *e* padnie na *a*, a punkt *h* na *d*: boki *e*E, *h*H padną na sobie równe *a*A, *d*D, bo one są prostopadłe do teyże płaszczyzny B*ad*. Dwie więc bryły, o których mówimy, zupełnie zeydą się z sobą; azatém graniastosłup pochyły BADFEH jest równoważny graniastosłupowi prostemu B*ad*F*eh*.

Podobnym sposobém się dowiedzie że graniastosłup pochyły BDCFHG jest równoważny graniastosłupowi prostemu B*dc*F*hg*. Lecz dwa graniastosłupy proste B*ad*F*eh*, B*dc*F*hg* są równe między sobą, gdyż mają tęż samę wysokość BF a podstawy ich B*ad*, B*dc* są połowami tegoż samego równoległoboku (3). Azatém dwa graniastosłupy troykątne BADFEH, BDCFHG równoważne graniastosłupom równym, są równoważne sobie.

Wniosek. Każdy graniastosłup troykątny ABDHEF, jest połową równoległościanu AG, wystawionego z tegoż samego kąta bryłowego A, i z tychże samych krawędzi AB, AD, AE.

PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa równoległościany AG, AL (fig. 53), *mają wspólną podstawę* ABCD, *a podstawy ich górne* EFGH, IKLM, *leżą na jedney płaszczyznie, zawarte między temiż linijami równoległemi* EK, HL, *takie dwa równoległościany są równoważne sobie.*

Tu zachodzić mogą trzy przypadki: albo EI jest większe od EF, albo mnieysze, albo nakoniec EI równe EF: lecz dowodzenie zawsze będzie toż samo: i powiadam naprzód, że graniastosłup troykątny AEIDHM jest równy graniastosłupowi troykątnemu BFKCGL.

Jakoż, ponieważ AE jest równoległa do BF a HE do GF; kąt AEI = BFK, HEI = GFK a HEA = GFL. Z tych sześciu kątów, trzy pierwsze składają kąt bryłowy E, a trzy drugie składają kąt bryłowy F; azatém, ponieważ kąty płaskie są równe każdy każdemu i podobnie rozłożone, kąty bryłowe E i F są równe. Jeżeli teraz położymy graniastosłup AEM na graniastosłupie BFL, a naprzód podstawę AEI na podstawie BFK, te dwie podstawy, jako równe, przystaną do siebie; a ponieważ kąt bryłowy E jest równy kątowi bryłowemu F, przeto bok EH padnie na bok sobie równy FG. Niepotrzeba już więcey dowodzić, że dwa graniastosłupy zeydą się z sobą w całey swey rozciągłości; bo podstawa AEI i krawędź EH determinują graniastosłup AEM, tak jak podstawa BFK i krawędź FG determinują graniastosłup BFL (3): azatém tegraniastosłupy są równe.

Lecz gdy od bryły AL odetniemy graniastosłup AEM, zostanie równoległościan AIL: a gdy od teyże bryły AL odetniemy graniastosłup BFL, zostanie równoległościan AEG: azatém dwa równoległościany AIL, AEG są równoważne sobie.

PODANIE X.

TWIERDZENIE.

Dwa równoległościany jednakiey podstawy i jedney wysokości są równoważne sobie.

Niech będzie ABCD (fig. 54) podstawa wspólna dwóm równoległościanom AG, AL: ponieważ te równoległościany są jedney wysokości, przeto podstawy ich górne EFGH, IKLM będą na jedney płaszczyznie. Nadto, krawędzie EF i AB są równe i równoległe, toż samo i krawędzie IK, AB; azatém EF jest równa i równoległa krawędzi IK: dla podobney przyczyny, GF jest równa i równoległa LK. Przedłużmy krawędzie EF, HG, oraz krawędzie LK i IM, tak aby te przedłużenia, przez wzajemne swe przecięcia się, utworzyły równoległobok NOPQ. Ten równoległobok oczywiście jest równy każdey z podstaw EFGH, IKLM. Jeżeli więc wyobrazimy sobie trzeci równoległościan na podstawie dolney ABCD, a mający za podstawę górną równoległobok NOPQ; ten trzeci równoległościan będzie równoważny równoległościanowi AG (9): bo mają tęż samę podstawę dolną, a zaś górne leżą na jedney płaszczyznie, między linijami równoległemi GQ, FN. Dla teyże przyczyny ten trzeci równoległościan jest równoważny równoległościanowi AL: azatém dwa równoległościany AG, AL, mające tęż samę podstawę i wysokość, są równoważne między sobą.

PODANIE XI.

TWIERDZENIE.

Każdy równoległościan może bydź zamieniony na równoległościan prostokątny równoważny, mający tęż samę wysokość i podstawę równoważną.

Niech będzie AG (fig. 54) równoległościan dany: z punktow A, B, C, D, poprowadźmy AI, BK, CL, DM, prostopadłe do płaszczyzny podstawy; tym sposobem utworzymy równoległościan AL, równoważny równoległościanowi AG, a w którym ściany boczne AK, BL i t. d. będą prostokątami. Jeżeli więc podstawa ABCD jest prostokątem, równoległościan AL będzie prostokątnym, równoważny równoległościanowi podanemu AG. Lecz jeżeli ABCD nie jest prostokątem (fig. 55), poprowadźmy AO, BN prostopadłe do CD: a potém OQ i NP prostopadłe do podstawy; a tak mieć będziemy bryłę ABNOIKPQ, która będzie równoległościanem prostokątnym. Jakož z wykreślenia, podstawa ABNO i jey przeciwległa IKPQ, są prostokątami; ściany jey boczne są także prostokątami, bo krawędzie AI, OQ i t. d. są prostopadłe do płaszczyzny podstawy; azatém bryła AP jest równoległościanem prostokątnym. Aże te dwa równoległościany AP, AL, uważać się mogą jako mające jednę podstawę ABKI, i tęż samę wysokość AO; azatém są sobie równoważne; azatém równoległościan AG zamieniony naprzód na równoległościan sobie równoważny AL (fig. 54), został znowu zamieniony na równoległościan prostokątny AP (fig. 55) sobie równoważny, mający tęż samę wysokość AI i podstawę ABNO równoważną podstawie ABCD.

PODANIE XII.

TWIERDZENIE.

Dwa równoległościany prostokątne AG, AL (fig. 56), *mające tęż samę podstawę* ABCD, *mają się do siebie jak ich wysokości* AE, AY.

Przypuśćmy naprzód, że wysokości AE, AY mają się do siebie jak dwie liczby całkie, naprzykład, jak 15 do 8. Podzielmy AE na 15 części równych, jakich AY zawiera 8; i przez punkta podziałów x, y, z i t. d. poprowadźmy płaszczyzny równoległe podstawie. Te płaszczyzny podzielą bryłę AG na 15 równoległościanow cząstkowych, równych między sobą, jako mające podstawy i wysokości równe: podstawy równe, ponieważ każde przecięcie MIKL, zrobione w graniastosłupie równolegle do jego podstawy ABCD, jest równe podstawie (7): wysokości równe, bo te wysokości są samemi podziałami Ax, xy, xz i t. d. Ponieważ z tych 15 równoległościanow równych, ośm iest zawartych w bryle AL: azatém bryła AG. tak się ma do bryły AL, jak 15 do 8: czyli w ogólności, jak wysokość AE do wysokości AI.

Powtóre, jeżeli stosunek AE do AI nie może się wyrazić w liczbach, powiadam iż nie mniey będzie *brył.* AG : *brył.* AL : : AE : AI. Bo jeżeli ta proporcya niema mieysca, załóżmy tedy iż jest *brył.* AG : *brył.* AL : : AE : AO. Podzielmy AE na części równe, z którychby każda była mnieysza od OI: jeden przynaymniey punkt podziału *m* przypadnie między O i I. Niech będzie P. równoległościan, który ma za podstawę ABCD, a za wysokość A*m*. Ponieważ wysokości AE, A*m* mają się do siebie jak dwie liczby całkie, przeto będzie *brył.* AG : P : : AE: A*m*. Lecz z założenia mamy *brył.* AG : *brył.* AL : : AE : AO; stąd wypada *brył.* AL : P : : AO : A*m*. Aże AO jest większe od A*m*, przeto, aby proporcya była prawdziwa, potrzeba żeby bryła AL była większa od P. Przeciwnie zaś, jest ona mnieysza: azatem niepodobieństwem jest aby czwarty wyraz proporcyi *brył.* AG: *brył.* AL : : AE : *x*, był liniją większą od AI. Przez podobne rozumowanie dowiedzie się, że czwarty wyraz nie może bydź mnieyszy od AI: azatém równy bydź musi AI: dwa więc równoległościany prostokątne jednakiey podstawy mają się do siebie jak ich wysokości.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

Dwa równoległościany prostokątne AG, AK (fig. 57), *mające jednę wysokość* AE, *mają się do siebie jak ich podstawy* ABCD, AMNO.

Postawiwszy obok siebie dwie bryły, jak figura wystawia, przedłużmy płaszczyznę ONKL aż do spotkania się z płaszczyzną DCGH, podług linii PQ: mieć będziemy trzeci równoległościan AQ, który porównać można z każdym z równoległościanow AG, AK. Dwie bryły AG, AQ, mające jednę podstawę AEHD, mają się do siebie jak ich wysokości AO, AB. Podobnie dwie bryły AQ, AK, mające wspólną podstawę AOLE, mają się do siebie jak ich wysokości AD, AM. A tak mieć będziemy te dwie proporcye

$$\textit{bryl.}\ AG : \textit{bryl.}\ AQ :: AB : AO,$$

$$\textit{bryl.}\ AQ : \textit{bryl.}\ AK :: AD : AM;$$

mnożąc te dwie proporcye wporządku swoim, i opuszczając w wypadku, wspólny mnożnik *bryl.* AQ, otrzymamy

$$\textit{bryl.}\ AG : \textit{bryl.}\ AK :: AB \times AD : AO \times AM.$$

Aże AB×AD wyraża podstawę ABCD, a zaś AO×AM wyraża podstawę AMNO; azatém dwa równoległościany prostokątne równey wysokości mają się do siebie jak ich wysokości.

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

Dwa jakiekolwiek równoległościany prostokątne, mają się do siebie jak mnogości z ich podstaw przez ich wysokości: czyli jak mnogości z ich trzech wymiarów.

Bo umieściwszy dwie bryły AG, AZ (fig. 57) tak, aby ich powierzchnie miały kąt wspólny BAE, gdy przedłużymy płaszczyzny potrzebne do utworzenia trzeciego równoległościanu AK jedney wysokości z równoległościanem AG: mieć będziemy na mocy poprzedzającego twierdzenia

bryt. AG : *bryt.* AK : : ABCD : AMNO.

Aże dwa równoległościany AK, AZ, mające tęż samę podstawę AMNO, mają się do siebie jak ich wysokości AE, AX; przeto będzie

bryt. AK : *bryt.* AZ : : AE : AX.

Mnożąc przez się w swoim porządku te dwie proporcye, i opuszczając w wypadku mnożnik wspólny *bryt.* AK, otrzymamy

bryt. AG : *bryt.* AZ : : ABCD×AE : AMNO×AX.

W mieyscu podstaw ABCD i AMNO, położyć można AB×AD i AO×AM; przez co otrzymamy *bryt.* AG : *bryt.* AZ : : AB×AD×AE : : AO×AM×AX.

Azatém dwa jakiekolwiek równoległościany prostokątne mają się do siebie i t. d..

Uwaga. Stąd wypada, iż za miarę równoległościanu prostokątnego, wziąć można mnogość jego podstawy przez wysokość, czyli mnogość z trzech jego wymiarów. I na tymto właśnie początku, opieramy obrachunek wszystkich brył innych.

Dla wyrozumienia tey miary, przypomnieć sobie należy, co rozumiemy przez mnogość dwóch lub więcey liniy: mnogość liczb wyrażających te linije i te liczby, zawisłe są od jedności linijowéy, którą wziąć można od upodobania. Mnogość więc trzech wymiarów równoległościanu, jest liczbą samą przez się nic nięznaczącą, a któraby inną bydź mogła, gdybyśmy inną wzięli jedność linijową. Lecz gdy się pomnożą przez się podobnie trzy wymiary innego równoległościanu, obliczone w teyże jedności linijowey; dwie mnogości mieć się będą do siebie jak bryły, i dadzą wyobrażenie o ich wielkości względnéy.

Wielkość bryły, jey objętość czyli jéy rozciągłość, stanowią to co nazywamy *bryłowatością:* i wyraz *bryłowatość* używa się szczególniey do oznaczenia miary takiey bryły: i tak mowi się, że bryłowatość równoległościanu prostokatnego jest równa mnogości z jego podstawy przez jego wysokość, czyli równa mnogości z trzech jego rozmiarów.

Trzy rozmiary sześcianu, ponieważ są równe sobie przeto jeżeli bok jest 1, bryłowatość jego będzie 1×1×1 czyli 1; jeżeli bok jest 2, bryłowatość jego będzie 2×2×2 czyli 8: jeżeli bok jest 3, bryłowatość jego będzie 3×3×3 czyli 27; i tak daley. A tak gdy krawędzie sześcianów są jak liczby 1, 2, 3, i t. d.; same sześciany czyli ich bryłowatości są jak liczby 1, 8, 27, i t. d. Ztądto pochodzi, iż w Arytmetyce *sześcianem* jakiey liczby, nazywają mnogość wypadającą z trzech mnożników, równych tey liczbie.

Gdybyśmy zadali sobie zrobić sześcian podwóyny względem sześcianu danego, potrzeba byłoby, żeby bok sześcianu szukanego miał się do boku sześcianu danego, jak pierwiastek sześcienny z 2 do jedności. Bardzo łatwo znaleźć można, przez wykreślenie geometryczne, pierwiastek kwadratowy z 2; lecz nie można znaleźć pierwiastku sześciennego, a przynaymniey przez proste działania Geometryi początkowey, które zawisły od użycia samych tylko liniy prostych, których znane są dwa punkta, i koła, których środki i promienia są determinowane.

Z przyczyny tey trudności, zagadnienie o *podwojeniu sześcianu* było sławnem u starożytnych geometrów, tak jak zagadnienie *podziału kąta na trzy równe części*, które prawie jest tegoż samego porządku. Lecz od dawna już znano rozwiązania, którym te gatunki zadań są podległe, a które, chociaż mniey proste, jak wykreślenia Geometryi początkowey, nie są jednak ani mniey dokładne, ani mniey ścisłe.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

Bryłowatość równoległościanu, a w ogólności, bryłowatość jakiegokolwiek graniastosłupa, jest równa mnogości z jego podstawy przez wysokość.

Jakoż, 1° wszelki równoległościan jest równoważny równoległościanowi prostokątnemu, mającemu też samę wysokość i podstawę równoważną (11). Bryłowatość zaś tey ostatniey bryły jest równa mnogości z podstawy przez wysokość: azatém bryłowatość pierwszey bryły jest podobnie równa mnogości z podstawy przez wysokość.

2°. Wszelki graniastosłup troykątny, jest połową równoległościanu jedney z nim wysokości, a dwa razy większéy podstawy (8). Że zaś bryłowatość ostatniéy bryły jest równa podstawie mnożonéy przez jéy wysokość; azatém bryłowatość pierwszéy bryły, to jest graniastosłupa, jest równa mnogości z jego podstawy, połowy podstawy równoległościanu, mnożonéy przez jego wysokość.

3°. Wszelki graniastosłup może bydź podzielony na tyle graniastosłupów troykątnych mających jednę wysokość, ile utworzyć można troykątów w wieloboku służącym mu za podstawę.

Lecz bryłowatość każdego graniastosłupa troykątnego, jest równa jego podstawie mnożoney przez jego wysokość; a ponieważ wysokość jest jedna dla wszystkich graniastosłupów, przeto summa wszystkich graniastosłupów cząstkowych, będzie równa summie wszystkich troykątów służących im za podstawy, mnożoney przez wysokość im wspólną. Azatem bryłowatość wszelkiego wielokątnego graniastosłupa, jest równa mnogości z jego podstawy przez jego wysokość.

Wniosek. Gdy porównamy dwa graniastosłupy mające jednę wysokość; mnogości podstaw przez wysokości mieć się będą do siebie jak podstawy; a zatem *dwa graniastosłupy jedney wysokości, mają się do siebie jak ich podstawy:* dla podobney przyczyny, *dwa graniastosłupy jednych podstaw mają się do siebie jak ich wysokości.*

PODANIE XVI.

TWIERDZENIE.

Gdy ostrosłup SABCDE (fig. 58) *przecięty będzie płaszczyzną* abd *równoległą do jego podstawy;*

1°. *Krawędzie* SA, SB, SC, . . ., *i wysokość* SO, *będą podzielone proporcyonalnie w* a, b, c, . . . *i* o;

2°. *Przecięcie* abcde *będzie wielobokiem podobnym podstawie* ABCDE.

Jakoż 1°, ponieważ płaszczyzny ABC, *abc* są równoległe, przecięcia ich AB, *ab* przez trzecią SAB są równoległe (10, 5); a zatém troykąty SAB, *Sab* są podobne, i mamy tę proporcyą SA : *Sa* :: SB : *Sb*: podobnie mieć będziemy SB : *Sb* :: SC : *Sg* i tak daley. Wszystkie więc krawędzie SA, SB, SC i t. d., przecięte są proporcyonalnie w *a*, *b*, *c*, i t. d. Wysokość SO jest także przecięte w punkcie *o* w takieyże proporcyi: gdyż BO i *bo* są równoległe; a zatém będzie OS : *So* :: SB : *Sb*.

2°. Bok *ab* jest równoległy do AB, *bc* do BC, a CD do *cd* i t. d., kąt *abc*=ABC, kąt *bcd*=BCD, i tak daley. Nadto, z podobieństwa troykątów SAB, *Sab* mamy AB : *ab* :: SB : *Sb*; a z przyczyny podobnych troykątów SBC, *Sbc* mamy SB : *Sb* :: BC : *bc*; podobnie mieć będziemy BC : *bc* :: CD : *cd*; i tak daley. Wieloboki więc ABCDE, *abcde* mają kąty równe każdy każdemu i boki odpowiedne proporcyonalne; a zatém są podobne.

Wniosek. Niech będą SABCDE, SXYZ dwa ostrosłupy, których wierzchołek jest wspólny, i jedney są wysokości, czyli których podstawy są położone na jedney płaszczyznie: gdy się te ostrosłupy przetną płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstaw, wypadną ztąd przecięcia *abcde*, *xyz*; powiadam, *że przecięcia* abcde, xyz *mieć się będą do siebie jak podstawy* ABCDE, XYZ.

Jakoż ponieważ wieloboki ABCDE, *abcde* są podobne, przeto powierzchnie ich mają się do siebie jak kwadraty z boków odpowiednych AB, *ab*; ale AB : *ab* :: SA : *Sa*; przeto ABCDE : *abcde* ::

$\overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2$. Dla podobnéy przyczyny XYZ : *xyz* :: $\overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2$. Lecz że *abcxyz* jest jedną płaszczyzną, przeto mamy także SA : *Sa* :: SX : *Sx*; a zatém ABCDE : *abcde* :: XYZ : *xyz*. Przecięcia więc *abcde*, *xyz* mają się do siebie jak podstawy ABCDE, XYZ. A zatém jeżeli podstawy ABCDE, XYZ są równoważne, przecięcia zrobione w równych wysokościach, są także równoważne.

PODANIE XVII.

TWIERDZENIE.

Dwa ostrosłupy troykątne, mające podstawy równoważne a wysokości równe, są sobie równoważne.

Niech będą SABC, *sabc* (fig. 59) dwa ostrosłupy wysokości jedney AT i o podstawach troykątnych ABC, *abc*, równoważnych, a które przypuszczamy, iż leżą na jedney płaszczyznie. Jeżeli te ostrosłupy nie są równoważne, niech będzie *sabc* naymnieyszy, a A*x* niech będzie wysokością graniastosłupa, któryby wystawiony na podstawie ABC, był równy ich różnicy.

Podzielmy wysokość wspólną AT, na części sobie równe, mnieysze od A*x*, i niech będzie *k* jedną z tych części. Przez punkta podziału wysokości, poprowadźmy płaszczyzny równoległe do płaszczyzn podstaw: przecięcia uczynione przez każdą z tych płaszczyzn w dwóch ostrosłupach będą równoważne (16 wnio.), jak naprzykład DEF i *def*, GHI i *ghi*, i t. d. To zrobiwszy, na troykątach ABC, DEF, GHI i t. d. wziętych za podstawy, wystawmy graniastosłupy zewnętrzne, któreby miały za krawędzie części AD, DG, GK, i t. d. boku SA; podobnie na troykątach *def*, *ghi*, *klm*, i t. d., wziętych za podstawy, wystawmy w drugim ostrosłupie, graniastosłupy wnętrzne, któreby miały za krawędzie odpowiadające części boku *sa*. Wszystkie te graniastosłupy cząstkowe mieć będą wysokość wspólną *k*.

Summa graniastosłupów zewnętrznych ostrosłupa SABC, jest większa od tego ostrosłupa; summa graniastosłupów wnętrznych ostrosłupa *sabc*, jest mnieysza od tego ostrosłupa. Dla tych dwóch więc przyczyn, różnica między dwiema summami graniastosłupów, powinna bydź większą od różnicy między dwoma ostrosłupami.

Aże idąc od podstaw ABC, *abc*, drugi graniastosłup zewnętrzny DEFG jest równoważny pierwszemu graniastosłupowi wnętrznemu *defa*; bo ich podstawy DEF, *def*, są równoważne, a mają wspólną wysokość *k*; dla teyże samey przyczyny, są równoważne trzeci graniastosłup zewnętrzny GHIK i drugi wnętrzny *ghid*; czwarty zewnętrzny i trzeci wnętrzny, i t. d., aż do ostatniego, jednych i drugich graniastosłupów. Azatem wszystkie graniastosłupy zewnętrzne ostrosłupa SABC, wyjąwszy pierwszy ABCD, mają sobie równoważne graniastosłupy wnętrzne ostrosłupa *sabc*. Azatém graniastosłup ABCD jest różnicą między summą graniastosłupów zewnętrznych ostrosłupa SABC i summą graniastosłupów wnętrznych ostrosłupa *sabc*: aże ta różnica tych dwóch summ, jest większą od różnicy dwóch ostrosłupów, a zatém potrzeba byłoby, aby graniastosłup ABCD był większy od graniastosłupa ABCX; lecz przeciwnie jest on mnieyszy, ponieważ mają jednę podstawę ABC a wysokość *k* pierwszego, jest mnieysza od wysokości A*x* drugiego graniastosłupa. Przypuszczenie więc, od któregośmy do tego wypadku przyszli, nie może mieć mieysca, a zatém dwa ostrosłupy SABC, *sabc* podstaw równoważnych i wysokości równych, są równoważne sobie.

PODANIE XVIII.

TWIERDZENIE.

Wszelki ostrosłup troykątny jest trzecią częścią graniastosłupa troykątnego, mającego tęż samę podstawę i tęż samę wysokość.

Niech będzie SABC (fig. 60), ostrosłup troykątny, a zaś ABCDES, graniastosłup troykątny jedney podstawy i wysokości z ostrosłupem; powiadam, że ostrosłup jest trzecią częścią tego graniastosłupa.

Odetniymy od graniastosłupa ostrosłup SABC, zostanie bryła SACDE, którą uważać można jako ostrosłup czworokątny, którego wierzchołek jest w S, a podstawą jest równoległobok ACDE. Poprowadźmy przekątną CE, i daymy płaszczyznę SCE; która podzieli ostrosłup czworokątny na dwa ostrosłupy troykątne SACE, SDCE. Te dwa ostrosłupy za wysokość wspólną mają prostopadłą spuszczoną z wierzchołka S na płaszczyznę ACDE; mają zaś podstawy równe, bo troykąty ACE, DCE są dwiema połowami jednego równoległoboku: a zatém dwa ostrosłupy SACE, SDCE są równoważne sobie: lecz ostrosłup SDCE i ostrosłup SABC, mają podstawy równe ABC, DES, mają także równą wysokość, bo jest ona odległością płaszczyzn rownoległych ABC, DES; dwa więc ostrosłupy SABC, SDCE są równoważne; aże dowiedliśmy, że ostrosłup SDCE jest równoważny ostrosłupowi SACE; a zatém trzy ostrosłupy SABC, SDCE, SACE, składające graniastosłup ABD, są równoważne sobie. A zatém ostrosłup SABC jest trzecią częścią graniastosłupa ABD, mającego tęż samę podstawę i wysokość.

Wniosek. Bryłowatość ostrosłupa troykątnego, równa jest trzeciey części mnogości z podstawy przez jego wysokość.

PODANIE XIX.

TWIERDZENIE.

Wszelki ostrosłup SABCDE (fig. 58), *ma za miarę trzecią część mnogości z jego podstawy* ABCDE *przez jego wysokość* AO.

Jakoż, gdy przeprowadzimy płaszczyzny SEB, SEC, przez przekątne EB, EC, podzielimy przez to ostrosłup wieloboczny SABCDE, na wiele ostrosłupów troykątnych, mających jednę wysokość SO. A że na mocy poprzedzającego twierdzenia, każdy z tych ostrosłupów mierzy się mnogością każdey z podstaw ABE, BCE, CDE, przez trzecią część jego wysokości SO; a zatém summa ostrosłupów troykątnych, czyli ostrosłup wieloboczny SABCDE, mieć będzie za miarę summę troykątów ABE, BCE, CDE, składających podstawę wieloboczną ABCDE, mnożoną przez ⅓ SO; a zatém wszelki ostrosłup, ma za miarę trzecią część mnogości z jego podstawy przez jego wysokość.

Wniosek I. Wszelki ostrosłup jest trzecią częścią graniastołupa, mającego tęż samę podstawę i wysokość.

Wniosek II. Dwa ostrosłupy jedney wysokości, mają się do siebie jak ich podstawy, a dwa ostrosłupy jedney podstawy mają się do siebie jak ich wysokości.

Uwaga. Obrachować można bryłowatość każdego ciała wielościennego, rozkładając je na ostrosłupy, i ten rozkład wielu sposobami wykonać się może; nayprostszy jest ten, prowadzić płaszczyzny podziałowe przez wierzchołek jednego kąta bryłowego, a wówczas mieć będziemy tyle ostrosłupów cząstkowych, ile jest ścian w wielościanie, wyjąwszy ściany składające kąt bryłowy, skąd płaszczyzny podziałowe prowadziliśmy.

PODANIE XX.

TWIERDZENIE.

Dwa wielościany symetryczne są równoważne między sobą czyli równe co do bryłowatości.

Jakoż 1º dwa ostrosłupy tróykątne symetryczne, jakiemi są SABC, TABC (fig. 61), mają, za miarę wspólną, mnogość z podstawy ABC przez trzecią część wysokości SO lub TO; azatém te ostrosłupy są równoważne między sobą. 2º Jeżeli jakimkolwiek sposobém podzielimy jeden z wielościanów symetrycznych na ostrosłupy troykątne, można będzie podzielić podobnie inny wielościan na ostrosłupy troykątne symetryczna; aże ostrosłupy troykątne symetryczne, są równoważne każdy każdemu; azatém i całkowite wielościany będą równoważne między sobą, czyli równe co do bryłowatości.

Uwaga. To podanie zdawałoby się wprost wypadać z podania II, gdzie pokazano, że w dwóch wielościanach symetrycznych, wszystkie części, składające jednę bryłę, są równe częściom składającym drugą bryłę: lecz nie mniey potrzeba byłoby tego dowieśdź sposobem ścisłym.

PODANIE XXI.

TWIERDZENIE.

Gdy ostrosłup przetniemy płaszczyzną równoległą do jego podstawy, kloc, czyli ostrosłup ścięty pozostały po odjęciu małego ostrosłupa, jest równy summie trzech ostrosłupów, mających za wysokość wspólną wysokość kloca, a za podstawy, podstawę dolną kolca, jego podstawę górną i średnią proporcyonalną między temi dwiema podstawami.

Niech będzie ostrosłup ABCDE (fig. 62) przecięty płaszczyzną *abd* równoległą do podstawy; niech będzie TFGH ostrosłup troykątny, których podstawa i wysokość są równe albo równoważne podstawie i wysokości ostrosłupa SABCDE. Można założyć że dwie podstawy leżą na jedney płaszczyznie: a wówczas płaszczyzna *abd* przedłużona, zadeterminuje, w ostrosłupie troykątnym, przecięcie *fgh*, położone w teyże odległości nad płaszczyzną wspólną podstaw: skąd znowu wypada, że przecięcie *fgh* ma się do przecięcia *abd*, jak podstawa FGH do podstawy ABD (16). A ponieważ podstawy są równoważne, przeto takiemi są i przecięcia. Ostrosłupy więc S*abcde*, T*fgh* są równoważne, gdyż mają jednę wysokość i podstawy równoważne. Dla teyże samey przyczyny ostrosłupy SABCDE, TFGH są równoważne: azatém kloce ABD*dab*, FGH*hfg* są równoważne, a następnie dosyć będzie dowieśdź podania, wysłowionego tylko na przypadek kloca ostrosłupa troykątnego.

Niech będzie FGH*hfg* (fig. 65) kloc ostrosłupa troykątnego o podstawach równoległych. Przez trzy punkta F, *g*, H, poprowadźmy płaszczyznę F*g*H, odcinającą od kloca ostrosłup troykątny *g*FGH. Ten ostrosłup ma za podstawę, podstawę dolną FGH kloca, ma także za wysokość, wysokość kloca; bo wierzchołek *g*, jest na płaszczyznie podstawy górney *fgh*.

Po odcięciu tego ostrosłupa, zostanie ostrosłup czworokątny *gfh*HF, którego wierzchołek *g*, jest na postawie *fh*HF. Przez trzy punkta *f*, *g*, H, poprowadźmy płaszczyznę *fg*H, która podzieli ostrosłup czworokątny na dawa ostrosłupy troykątne *g*F*f*H, *gfh*H. Ten ostatni ma za podstawę *gfh* podstawę górną kloca, a za wysokość, wysokość tegoż kloca; gdyż wierzchołek jego H, należy do podstawy dolney: a tak mamy już dwa z trzech ostrosłupów mających składać kloc.

Zostaje do rozważenia trzeci ostrosłup *g*F*f*H: jeżeli poprowadzimy *g*K równoległą do *f*F, i gdy wyobrazimy nowy ostrosłup fFHK, którego wierzchołkiem jest K, a podstawą FfH; te dwa ostrosłupy mieć będą tęż samę podstawę FfH, mieć także będą tęż samę wysokość, gdyż wierzchołki g i K położone są na linii gK równoległey do fF, a następnie równoległey do płaszczyzny podstawy: azatém te ostrosłupy są równoważne. Lecz ostrosłup fFKH może bydź uważany jako mający swóy wierzchołek w f, a tak mieć on będzie tęż samę wysokość co kloc: co się tycze jego podstawy FKH, powiadam że ta jest średnią proporcyonalną między podstawami FGH, fgh. Jakoż troykąty FHK, fgh, mają jeden kąt równy F$=f$, i bok równy FK$=fg$; azatém będzie (24, 3) FHK : fgh :: FH : fh. Mamy także FHG : FHK :: FG : FK czyli fg. Lecz troykąty podobne FGH, fgh dają FG : fg :: FH : fh; azatém FGH : FHK :: FHK : fgh; a tak podstawa FHK jest średnią proporcyonalną między dwiema podstawami FGH, fgh; azatém kloc ostrosłupowy troykątny o podstawach równoległych, równy jest trzem ostrosłupom, mającym za wysokość wspólną, wysokość kloca, a których podstawami są, podstawa dolna kloca, jego podstawa górna i średnia proporcyonalna między temi dwiema podstawami.

PODANIE XXII.

TWIERDZENIE.

Gdy graniastosłup troykątny, którego ABC (fig. 60) *jest podstawą, przetniemy płaszczyzną* DES *nachyloną do téy podstawy, bryła* ABCDES *wypadająca z tego przecięcia, będzie równa summie trzech ostrosłupów, których wierzchołkami są* D, E, S, *a podstawą wspólną* ABC.

Przez trzy punkta S, A, C, poprowadźmy płaszczyznę SAC, która od graniastosłupa ściętego ABCDES, odetnie ostrosłup troykątny SABC: ten ostrosłup ma za podstawę ABC a za wierzchołek punkt S.

Po odjęciu tego ostrosłupa, zostanie ostrosłup czworokątny SACDE, którego S jest wierzchołkiem a ACDE podstawą. Przez trzy punkta S, E, C, poprowadźmy jeszcze płaszczyznę SEC, która podzieli ostrosłup czworokątny na dwa ostrosłupy troykątne SACE, SCDE.

Ostrosłup SACE, mający za podstawę troykąt AEC a za wierzchołek punkt S, jest równoważny ostrosłupowi EABC, mającemu za podstawę AEC a za wierzchołek punkt B.

Ponieważ te dwa ostrosłupy mają tęż samę podstawę, przeto mają tęż samę wysokość; bo linija BS, jako równoległa do każdéy z liniy

AE, CD, jest równoległa do ich płaszczyzny ACE; a zatém ostrosłup SACE jest równoważny ostrosłupowi EABC, który uważany bydź może, jako mający za podstawę ABC, a za wierzchołek punkt E.

Trzeci ostrosłup SCDE może bydź naprzód zamieniony na ASCD, gdyż te dwa ostrosłupy mają tęż samę podstawę SCD; mają także one tęż samę wysokość, bo AE jest równoległa do płaszczyzny SCD; a zatém ostrosłup SCDE jest równoważny ostrosłupowi ASCD. Potém, ostrosłup ASCD może bydź zamieniony na ABCD, gdyż te dwa ostrosłupy mają podstawę wspólną ACD; są one także i jednéy wysokości, bo ich wierzchołki S i B, leżą na linii równoległéy do płaszczyzny podstawy.

A zatém ostrosłup SCDE równoważny ostrosłupowi ASCD, jest także równoważny ostrosłupowi ABCD; ten zaś ostatni może bydź uważany jako mający za podstawę ABC a za wierzchołek punkt D.

A zatém nakoniec, graniastosłup ścięty czyli klocowy ABCDES, jest równy summie trzech ostrosłupów, mających za podstawę wspólną ABC a za wierzchołki sobie odpowiednie punkta D, E, S.

Wniosek. Jeżeli krawędzie AE, BS, CD są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, będą one razem wysokościami trzech ostrosłupów składających graniastosłup ścięty; tak, że bryłowatość graniastosłupa ściętego wyrazi się zawsze przez

$\frac{1}{3}ABC \times AE + \frac{1}{3}ABC \times BS + \frac{1}{3}ABC \times CD$; ilość, która się przywodzi do $\frac{1}{3}ABC \times (AE + BS + CD)$.

PODANIE XXIII.

TWIERDZENIE.

W dwóch ostrosłupach troykątnych podobnych, ściany odpowiedne są podobne sobie, a kąty bryłowe odpowiedne są równe.

Podług opisania, dwa ostrosłupy troykątne SABC, TDEF (fig. 64) są podobne, jeżeli dwa troykąty SAB, ABC, są podobne dwóm troykątom TDE, DEF i podobnie umieszczone, to jest jeżeli kąt ABS = DET, BAS = EDT, ABC = DEF, BAC = EDF, i gdy nadto, nachylenie płaszczyzn SAB i ABC, jest równe nachyleniu płaszczyzn TDE i DEF: to założywszy, powiadam, że te ostrosłupy mają wszystkie ściany podobne każda każdey, i kąty bryłowe odpowiedne są równe.

Weźmy BG = ED, BH = EF, BI = ET, i poprowadźmy GH, GI, IH. Ostrosłup TDEF jest równy ostrosłupowi IGBH: bo wzięliśmy boki GB, BH równe bokom DE, EF, i kąt GBH, z założenia jest równy kątowi DEF: troykąt więc GBH jest równy troykątowi DEF: a zatém dla zdziałania, przystawania dwóch ostrosłopów, można naprzód podstawę DEF położyć na jéy równéy GBH; potém, ponieważ płaszczyzna DTE, tyle jest nachylona do płaszczyzny DEF, ile płaszczyzna SAB do płaszczyzny ABC; przeto oczywiście płaszczyzna DET padnie nieoznaczonym sposobem na płaszczyznę ABS. A że z założenia kąt DET=GBI, więc ET padnie na sobie równe BI; a ponieważ cztery punkta D, E, F, T, padają na cztery G, B, H, I, przeto (1) ostrosłup TDEF przystanie do ostrosłupa IGBH.

Ponieważ z przyczyny troykątów równych DEF, GBH, kąt BGH=EDF=BAC; więc GH jest równoległe do AC. Dla podobney przyczyny GI jest równoległe do AS; a zatem płaszczyzna IGH jest równoległa do SAC (13,5). Ztąd wypada; że troykąt IGH albo jemu równy TDF, jest podobny SAC (15), i że troykąt IBH albo jemu równy TEF, jest podobny SBC: a zatem dwa ostrosłupy troykątne podobne SABC, TDEF mają cztery ściany podobne każda każdey: nadto, mają one kąty bryłowe odpowiedne równe.

Gdyż umieściliśmy już kąt bryłowy E na jemu odpowiedny B, i toż samo zrobić można z dwóma drugiemi kątami bryłowemi odpowiednemi; lecz wprost widzimy, że dwa kąty bryłowe odpowiedne są równe; naprzykład, kąty T i S, gdyż one są utworzone przez trzy kąty płaskie równe każdy każdemu i podobnie umieszczone.

A zatem dwa ostrosłupy troykątne podobne, mają ściany odpowiedne podobne i kąty bryłowe odpowiedne równe.

Wniosek I. Troykąty podobne w dwóch ostrosłupach, dają proporcyą AB:DE::BC:EF:: AC:DF::AS:DT::SB:TE::SC:TF; a zatem *w ostrosłupach troykątnych podobnych, boki odpowiedne są proporcyonalne.*

II. Ponieważ kąty bryłowe odpowiednie są równe, przeto *nachylenie jakichkolwick dwóch ścian ostrosłupa jest równe nachyleniu dwóch ścian odpowiednych ostrosłupa podobnego.*

III. Gdy ostrosłup troykątny SABC, przetnie się płaszczyzną GIH, równoległą do jedney ze ścian SAC, ostrosłup cząstkowy BGIH, będzie podobny ostrosłupowi całemu BASC: bo troykąty BGI, BGH są podobne troykątom BAS, BAC każdy każdemu, i podobnie są umieszczone: nachylenie ich płaszczyzn jest tož samo w obudwóch; a zatem dwa ostrosłupy są podobne.

IV. W ogólności, *gdy jakikolwiek ostrosłup* SABCDE (fig. 58) *przetnie się płaszczyzną* abcde *rownoległą do podstawy, ostrosłup cząstkowy* Sabcde *podobny będzie ostrosłupowi całkiemu* SABCDE. Jakož, podstawy ABCDE, *abcde* są podobne, a gdy poprowadzimy AC, *ac*, dowiedliśmy teraz, že ostrosłup troykątny SABC jest podobny ostrosłupowi S*abc*: a zatem punkt S tak jest determinowany względem podstawy ABC, jak punkt S determinowany jest względem podstawy *abc* (opis. 18): a zatem dwa ostrosłupy SABCDE, S*abcde* są podobne.

Uwaga. Zamiast pięciu datek potrzebnych, podług opisania, do podobieństwa dwóch ostrosłupów troykątnych, možna za nie podstawić pięć innych, stosownie do rozmaitych kombinacyy; a z tego tyleż wypadłoby twierdzeń, z pomiędzy których to tylko rozróżnić możemy: *Dwa ostrosłupy troykątne są podobne, gdy mają krawędzie odpowiedne proporcyonalne.*

Jakoż, jeżeli mamy proporcye (fig. 64) AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF, co zawiera pięć warunków, tedy troykąty ABS, ABC będą podobne troykątom DET, DEF i podobnie umieszczone. Mieć będziemy także troykąt SBC podobny troykątowi TEF; a zatém trzy kąty płaskie składające kąt bryłowy B, będą równe kątom płaskim, składającym kąt bryłowy E, każdy każdemu; skąd wypada, że nachylenie płaszczyzn SAB, ABC jest równe nachyleniu sobie odpowiednych płaszczyzn TDE, DEF; a zatém, że dwa ostrosłupy są podobne.

PODANIE XXIV.

TWIERDZENIE.

Dwa wielościany podobne, mają ściany odpowiedne podobne, i kąty bryłowe odpowiedne równe.

Niech będzie ABCDE (fig. 65) podstawa wielościanu: niech M i N będą wierzchołkami dwóch kątów bryłowych za tą podstawą, determinowane przez ostrosłupy troykątne MABC, NABC, których podstawą wspólną jest ABC:

niech będą w drugim ostrosłupie, *abcde* podstawą, *m* i *n* wierzchołki, odpowiedne wierzchołkom M i N, determinowane przez ostrosłupy *mabc*, *nabc* podobne ostrosłupom MABC, NABC; powiadam naprzód, że odległości MN, *mn*, są proporcyonalne bokom odpowiednym AB, *ab*.

Jakoż, ostrosłupy MABC, *mabc*, ponieważ są podobne, przeto nachylenie płaszczyzn MAC, BAC, jest równe nachyleniu płaszczyzn *mac*, *bac*. Podobnie, ponieważ ostrosłupy NABC, *nabc* są podobne, nachylenie płaszczyzn NAC, BAC, jest równe nachyleniu płaszczyzn *nac*, *bac*. Jeżeli więc odcymiemy pierwsze nachylenia od ostatnich, zostanie nachylenie płaszczyzn NAC, MAC, równe nachyleniu płaszczyzn *nac*, *mac*. Lecz z przyczyny podobieństwa tychże ostrosłupów, troykąt MAC jest podobny *mac*, a troykąt NAC jest podobny *nac*: a zatém dwa ostrosłupy troykątne MNAC, *mnac* mają ściany każda każdey podobne, podobnie umieszczone i równie nachylone do siebie; a zatém te ostrosłupy są podobne (21); krawędzie więc ich odpowiedne dają proporcyą MN : *mn* : : AM : *am*. Nadto, AM : *am* : : AB : *ab*; a zatém MN : *mn* : : AB : *ab*.

Niech będą P i *p*, dwa inne wierzchołki odpowiedne tychże wielościanów, a podobnie mieć będziemy PN : *pn* : : AB : *ab*, PM : *pm* : : AB : *ab*. Więc MN : *mn* : : PN : *pn* : : PM : *pm*. A zatém *troykąt* PNM, *łączący jakiekolwiek trzy wierzchołki wielościanu, jest podobny troykątowi* pnm *łą-*

czącemu trzy wierzchołki odpowiedne drugiego wielościanu.

Niech będą jeszcze Q i q dwa wierzchołki odpowiedne; a troykąt PQN będzie podobny troykątowi pqn. Powiadam nadto, że nachylenie płaszczyzn PQN, PMN jest równe nachyleniu płaszczyzn pqn, pmn.

Bo gdy poprowadzimy QM, i qm, mieć będziemy zawsze troykąt QNM, podobny troykątowi qnm, a następnie kąt QNM równy kątowy qnm. Zważmy w N, kąt bryłowy utworzony przez trzy kąty płaskie QNM, QNP, PNM; a w n. kąt bryłowy utworzony przez trzy kąty płaskie qnm, qnp, pnm; ponieważ te kąty każdy każdemu są równe, przeto stąd idzie, iż kąty bryłowe są równe. A zatém nachylenie dwóch płaszczyzn PNQ, PNM jest równe nachyleniu im odpowiednych płaszczyzn pnq, pnm: a zatém jeżeliby dwa troykąty PNQ, PNM były na jedney płaszczyznie, w którym to przypadku mielibyśmy kąt QNM $=$ QNP $+$ PNM, mielibyśmy. także $qnm = qnp + pnm$, i dwa troykąty qnp, pnm byłyby także na jedney płaszczyznie.

To wszystko cośmy teraz dowiedli ma mieysce, jakiekolwiek będą kąty M, N, P, Q porównywane z sobie odpowiednemi m, n, p. q.

Przypuśćmy teraz, że powierzchnia jednego z wielościanów jest podzielona na troykąty ABC, ACD, MNP, NPQ i t. d.; widzimy, iż powierzchnia drugiego wielościanu zawierać będzie równą liczbę troykątów abc, acd, mnp. npq i t. d.,

11**

podobnych i podobnie umieszczonych: a jeżeli kilka troykątów, jak MPN, NPQ, i t. d. należą do jedney ściany i są na jedney płaszczyznie, tedy im odpowiedne *mpn*, *npq*, i t. d. będą także na jedney płaszczyznie. A zatém wszelka ściana wieloboczna w wielościanie, odpowiadać będzie ścianie wieloboczney podobney w drugim wielościanie; więc dwa wielościany będą zamknięte jednaką liczbą płaszczyzn podobnych i podobnie umieszczonych. Powiadam nadto, że kąty bryłowe odpowiedne będą równe.

Jakoż, jeżeli kąt bryłowy N, naprzykład, jest utworzony z kątów płaskich QNP, PNM, MNR, QNR, kąt bryłowy odpowiedny *n*, utworzony będzie przez kąty płaskie *qnp*, *pnm*, *mnr*, *qnr*, A że te kąty płaskie, każdy każdemu są równe, a nachylenie dwóch płaszczyzn przyległych, jest równe nachyleniu sobie odpowiednych płaszczyzn; więc dwa kąty bryłowe są równe, jakżeby mogły przystać do siebie.

A zatém nakoniec, dwa wielościany podobne, mają ściany odpowiedne podobne, a kąty odpowiedne równe.

Wniosek. Z poprzedzającego dowodzenia wypada, że gdy z cztérech wierzchołków wielościanu, utworzymy ostrosłup troykątny, i gdy utworzymy drugi z cztérech wierzchołków odpowiednych wielościanu podobnego; te dwa ostrosłupy będą podobne; bo mieć będą boki odpowiedne proporcyonalne (21 uwag.).

Widzimy razem, że dwie odpowiedne przekątne (17,2), naprzykład AN, *an*, mają się do siebie, jak dwie odpowiedne krawędzie AB, *ab*.

PODANIE XXV.

TWIERDZENIE.

Dwa wielościany podobne, mogą się podzielić na jednaką liczbę ostrosłupów troykątnych, podobnych każdy każdemu, i podobnie umieszczonych.

Wiemy już bowiem, że powierzchnia dwóch wielościanów może się podzielić na jednaką liczbę troykątów, podobnych każdy każdemu i podobnie umieszczonych. Zważmy wszystkie troykąty jednego wielościanu, oprócz troykątów składających kąt bryłowy A, jako podstawy tyluż ostrosłupów troykątnych, których wierzchołkiem jest A: te ostrosłupy razem wzięte złożą wielościan. Podzielmy podobnie drugi wielościan na ostrosłupy, któreby miały za wierzchołek wspólny, wierzchołek kąta *a* odpowiednego kątowi A. Oczywiście ostrosłup łączący cztéry wierzchołki wielościanu, będzie podobny ostrosłupowi łączącemu cztéry wierzchołki odpowiedne drugiego wielościanu. A zatém dwa wielościany podobne i t. d.

PODANIE XXVI.

TWIERDZENIE.

Dwa ostrosłupy podobne mają się do siebie jak sześciany z boków odpowiednych.

Ponieważ dwa ostrosłupy są podobne, przeto mnieyszy może bydź umieszczony w większym tak, aby miały kąt wspólny S (fig. 58). Wówczas podstawy ABCDE, *abcde*, będą równoległe; bo że ściany odpowiedne są podobne (22), kąt *Sab* jest równy kątowi SAB, oraz kąt *Sbc* równy SBC; a zatém płaszczyzna *abc* jest równoległa płaszczyznie ABC (13,5). Niech teraz SO będzie prostopadłą spuszczoną z wierzchołka S na płaszczyznę ABC, i niech *o* będzie punktem w którym ta prostopadła spotyka płaszczyznę *abc*; mieć będziemy, podług tego co się już dowiodło (15), $SO : So :: SA : Sa :: AB : ab$; a następnie

$$\tfrac{1}{3} SO : \tfrac{1}{3} So :: AB : ab.$$

Lecz podstawy ABCDE, *abcde*, jako figury podobne, dają

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Mnożąc terminy odpowiedne tych dwóch proporcyy przez się, otrzymamy proporcyą

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3} SO : abcde \times \tfrac{1}{3} So :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3;$$

a że $ABCDE \times \tfrac{1}{3} SO$ jest bryłowatością ostrosłupa SABCDE (18), a zaś $abcde \times \frac{1}{3} So$ jest bryłowatością ostrosłupa *Sabcde;* a zatem dwa ostrosłupy mają się do siebie, jak sześciany z ich krawędzi odpowiednych.

PODANIE XXVII.

TWIERDZENIE.

Dwa wielościany podobne mają się do siebie jak sześciany z ich krawędzi odpowiednych.

Jakoż dwa wielościany podobne mogą bydź podzielone na jednaką liczbę ostrosłupów troykątnych, podobnych każdy każdemu (23). Lecz dwa ostrosłupy podobne APNM, *apnm* (fig. 65), mają się do siebie jak sześciany z boków odpowiednych AM, *am*, albo jak sześciany z boków odpowiednych AB, *ab*. Tenże sam stosunek zaydzie między innemi jakiemikolwiek ostrosłupami odpowiednemi; a zatem summa wszystkich ostrosłupów, które składają wielościan, czyli sam wielościan, ma się do drugiego wielościanu, jak sześcian z jakiegokolwiek boku pierwszego wielościanu, do sześcianu z boku odpowiednego wielościanu drugiego.

Uwaga ogolna.

Można wystawić w terminach algebraicznych, to jest sposobem nayzwięzleyszym, powtórzenie główniejszych podań tey xiążki, zamykającey bryłowatości wielościanów.

Niech B wyraża podstawę graniastosłupa, H jego wysokość: bryłowatość graniastosłupa, będzie $B \times H$ czyli BH.

Niech B wyraża podstawę ostrosłupa, a zaś H jego wysokość: bryłowatość ostrosłupa będzie $B \times \frac{1}{3}H$, czyli $H \times \frac{1}{3}B$, czyli $\frac{1}{3}BH$.

Niech będzie H wysokość kloca ostrosłupowego o podstawach równoległych: niech A i B wyrażają podstawy jego: $\sqrt{AB}$ będzie średnią proporcyonalną między podstawami: a bryłowatością kloca będzie $\frac{1}{3}H \times (A + B + \sqrt{AB})$.

Niech B wyraża podstawę kloca graniastosłupa troykątnego, H, H', H'', wysokości trzech jego wierzchołków górnych: bryłowatością graniastosłupa ściętego, będzie $\frac{1}{3}B \times (H + H' + H'')$.

Niech nakoniec P i p, wyrażają bryłowatości dwóch wielościanów podobnych, A i a dwa boki albo dwie przekątne odpowiednie tych wielościanów: będzie $P : p :: A^3 : a^3$.

KONIEC.