GEOMETRYIA

ANALITYCZNA

LINIY i POWIERZCHNI DRUGIEGO RZĘDU.

PRZEZ A. KR.

W WARSZAWIE,

W DRUKARNI N. GLÜCKSBERGA,

KSIĘGARZA i TYPOGRAFA KRÓLEW. WAR. UNIWERSYTETU.

1822.

Le rapprochement de la géométrie et de l'algèbre, répand un nouveau jour sur ces deux sciences: les opérations intellectuelles de l'analyse, rendues sensibles par les images de la géométrie, sont plus faciles à saisir, plus intéressantes à suivre. Cette correspondance fait l'un des plus grands charmes attachés aux spéculations mathématiques; et quand l'observation réalise ces images et transforme les résultats mathématiques en lois de la nature; quand ces lois, en ambrassant l'univers, dévoilent à nos yeux ses états passés et à venir; alors la vue de ce sublime spectacle nous fait éprouver le plus noble des plaisirs réservés à la nature humaine.

La Place, dans les leçons de l'École normale.

JEGO CESARSKIEY KROLEWSKIEY MOSCI

ALEKSANDROWI I,

CESARZOWI ROSSYYSKIEMU

KROLOWI POLSKIEMU

Obecne dzieło Geometryi analityczney, iako hołd należny naydobroczynnieyszemu Założycielowi w Warszawie Swiątyni Nauk, tytułem Królewskiego Uniwersytetu zasczyconey, ma szczęście przypisać i z naygłębszem uszanowaniem przypisuie

Wierny poddany

Adrian Krzyżanowski

Filoz. Dr. Uniwers. K.W. Professor.

POCZET PRENUMERATOROW.

Aleksandrow Xiążę Paweł, Officer Gwardyi.

Bansemer Jan Marcin, MF i A. Kadet Rakiet. konnych.
Bartoszewicz Adam, P. S. Wydz. Bialskiey.
Barciński Antoni, N. S. Woiew. Lubelskiey.
Bem Jozef, Kapitan Artyl. kon. Gwardyi.
Bernhard August, U. Uniw. Warszaw.
Bertoldy Karol, Sekretarz konsulatu Austryiackiego.
Ks. Bielski Symon S. P.
Biblioteka Szk. Woiewódzkiey w Kielcach.
Biblioteka Szk. Woiewódzkiey Ks. Piiarow w Warszaw.
Biblioteka Szkoły Jnżenierow Warszawskiey Eks. 2.
Biblioteka Ks. Dominikanow w Grodnie.
Białobłocki Jan, U. Uniw. Warszaw.
Boiarski Jozef, U. Uniw. Warszaw.
Borowicz Jan, P. S. Woiew. w Płocku.
Bystry Karol, P. Szk Wydz. Bialskiey.
Borzęcki Stanisław, Nau: S. Woiew. w Kielcach.
Brzozowski Marian, M A. Kadet Rakiet. konnych.
Buczyński Maurycy, U. S. Woiewod. Ks. P. na Żolib.
Chorzewski Piotr, Kapitan Artil. kon. Gwardyi.
Ks. Chmielewicz Aleksy, Rek. S. Wyd. Ks. P. w Wieluniu
Chęciewski Woyciech, N. S. Woiew. w Kaliszu.
Chrapczyński Jozef, N. S. Woiew. Warsz. Ks Piiarow.
Duchet Mar. Franciszek, Konsul Austryiacki w War.
Ks. Dąbrowski Antoni, Prof. Uniw. Warszaw.
Dziekoński Tomasz, Prof. S. Woiew. w Kaliszu.
Dmochowski Aleksy, Uczeń S.W. Ks: P. na Żoliborzu.
Fiszer Karol, Ucz. Uniw. Warszaw.
Frączkiewicz Augustyn, Prof. Liceum Krakowskiego.
Garbiński Kaietan, Prof. Uniw: Warszaw.
Gawroński Florian, N. S. Wydz. Warszaw.
Głuszyński Teofil. Członek K. R. W. R. i O. P.
Główczyński Józef, Podporucznik Artill.
Grabowski Ambroży, Obywatel i Księg. Krakowski.
Grobicki Antoni, N. S. Woiew. w Płocku.
Hewelki Karol, Proboscz Paraf. Ewaniel. w Płocku.

Hilczyński Wawrzyniec, N. Liceum Warszaw.
Jakubowicz Antoni, Poru. Artyleryi.
Janicki Stanisław, Professor.
Jasiński Władysław, Prf. Liceum Warszaw.
Jasieński Augustyn, U. S. Woiew. Ks. P. na Zoliborzu.
Janakowski Aleksander, *dito.*
Jaroszyński Henryk, *dito.*
Jeżewski Julian, *dito.*
Jaworski Józef, Doktor Medic. w Kielcach.
Ks. Kamionowski Adam, R. S. W. Ks. P. na Żolib. E. 3
Kozłowski Leander, Prof. Fizyki SW. na Żoliborzu.
Karwowski Jan, N. Liceum Warszaw.
Kado Michał, Prof. Uniw. Warszaw.
Kanigowski Tomasz, U. S. W. Ks. P. na Żoliborzu.
Karnkowski Konstanty, *dito.*
Karczewski Wincenty, Z P. S. Woiew. w Kielcach.
Kiełczewski Tomasz, Poseł Powiatu Konieckiego.
Kitaiewski Adam, Prof. Uniw. Warszaws,
Kolberg Juliusz, Prof. Uniw. Warszaws.
Koriot Jozef, Podpółkownik Jnżenierow.
Kołysko Jgnacy, Kapitan Artil. kon. Gwardyi.
Kopycki Kaietan, N. S. Woiew. w Kielcach.
Konkowski Ludwik, U. Uniw. Warszaw.
Kozubowski Felix, Nauczyciel.
Koncewicz Jan, P. S. Woiew. w Kielcach.
Kornaszewski Franciszek, U. Uniw. Warszaw.
Kosiński Jozef, U. S. Woiewód. w Płocku.
Koźmiński Kazimierz, N. Liceum Warszaws.
Kukliński Jacenty, Prof. S. Woiew. w Płocku.
Kucharski Andrzey, P. S. Woiew. w Kielcach.
Ks. Kudrewicz Florian, Prof. Uniw. Krakowskiego.
Kręski Edward, U. S. Woiew. Ks. P. na Żoliborzu.
Krieger Jozef, *dito.*
Krzyżanowski Jan Kanty, Pr. S. Woiew. w Lublinie.
Kruszyński Jan, Sekr. Jener. K. R. P. i Skarbu.
Krzywicki Jan, N. Liceum Warszaw.
Lapiere Jan , Sek. K. R. P. i Skarbu do kor. francusk.
Lewartowski Walenty, z Sekr. K. R. P. i Sk.

·Łapiński Ksawery, Dyrektor Kancellaryi K. R. P. i S.
·Łascz Tomasz.
·Łęski Jozef, Prof. Uniw. Krakowskiego.
·Łuszkiewicz Michał, Prof. Liceum Krakow.
Machczyński Piotr, Konduktor w Inżenieryi.
Malcz Wilhelm, Doktor Medic. i Chirurgii.
Maierkowski Jozef, U. Uniw. Warszaw.
Marylski Eustachy, U. Liceum Warszrw.
Mausz Antoni, Porucznik Saperow.
Mile Jan. D. M. i C. Prof. Uniw. Warszaw.
Ks. Modzelewski Piotr. Prof. Sz. W. Ks. P. na Żolib.
Morykoni Kaietan, Rektor S· Woiewod. w Płocku.
Nahaiewicz Kazimierz, Prof. S. Woiew. w Kaliszu.
Niemyski Woyciech, Konduktor K. R. Spr. Wewn.
Niezabitowski Anastazy SP. PSW. na Zoliborzu.
Ostrowski Franciszek, ZP. S. Woiew. w Lublinie.
Pawłowicz Mar. Antoni, DGM. Uniw. Warsz. PLW.
Pinko Albin, PS. Woiew. w Płocku.
Ks. Polciowski Andrzey, Rektor S. Wo. w Kielcach.
Potocki Hr. August.
Posłowski Ksawery, U.S. Woiew. Ks. P. na Zoliborzu
Ks. Przybylski Jgnacy, Rektor S. Woiew. w Kaliszu.
Radomiński Jan, Nacz. Wy. Oświecenia KRWR i OP
Regulski Jozef, Półk. Dir. Nauk w kor. kad. w Kaliszu
Rembowski Walerian, U. S. Woiew. Ks. P. na Zolib.
Rosen Mathias, U. Lic. Warsz.
Serwiński Andrzey, CKW. Towar. Przyi. Nauk.
Skrodzki Jozef Karol, Prof: Uniw. Warszaw.
Skowroński Woyciech, Sek. Księcia Namiestnika.
Skułdycki Nauczyciel z Lubelskiego.
Smolikowski Andrzey, Rektor S. Woiew. w Lublinie.
Solkiewicz Symon, Porucznik Saperow.
Sobertyn Jozef, Prof. S. Woiew. w Kielcach.
Sobieszczański Ludwik, N. S. Woiew. w Kielcach.
Stępiński Jakob, N. S. Woiew. w Płocku.
Ks. Strzałecki Justyn. Prof. S. Woiew. Ks. P. na Zolib.
Stokowski Maciey U. S. W. na Zolib.
Szydłowski Adolf, U. Liceum Warszaw.

Swidziński Michał, Porucznik Artil. kon. Gwardyi.
Szumkowski Michał, Prof. S. Woiewod. w Łomży.
Szopowicz Franciszek, Prof. Uniw. Krakowskiego.
Szołayski Faustyn, U. S. Woiew. Ks P. na Zoliborzu.
Toeplitz Maksymilian, U. Liceum Warszaw.
Uiazdowski Tomasz, N. S. Woiew. w Kielcach.
Wagner Tadeusz, Rektor. Szkół w Lubomlu na Woł:
Węgleński Franciszek, U. S. Woiew. Ks. P. na Zolib.
A. Wertheim.
Wilamowski Mateusz, N. Szkoły w Płocku.
Wnorowski Paweł, Prof. S. Woiew. w Kielcach.
Ks. Wolicki Antoni, Rektor S. Wo. Ks. P. w Radomiu
Wolski Józef, Prof. Szkoły dramatyczney w War.
Wolski Kaietan, U. S. Woiew. Ks. P. na Zoliborzu.
Woroniecki Jeremiiasz, *dito.*
Wołłowicz Michał, *dito.*
Woelki Antoni, Prof. S. Woiew. w Lublinie.
Wołowski Franciszek, Mecenas.
Ks. Woyno Felix, Wikar. Paraf. w Biały.
Wręczycki Franciszek SP, U. Uniw. Warszaw.
Zabellewicz Adam Jg. Dz. W. Fil. Uniw. Warszaw.
Zabellewicz Florian, N. S. Woiew. w Lublinie.
Ks. Zager Kolumban, P. S. Woiew. w Płocku.
Zamoyski Hrabia, Eks. 2.
Zarzecki Prof. w Miedzyrzeczu Wołyńskim.
Zakrzewski Aleksander, Konduktor w Inżenieryi.
Zawadzki Jozef, Księgarz i Typograf Un. Wileńskiego.
Zborowski Jozef, P. S. Woiew w Płocku.
Zdżarski Augustyn, Prof. S. W. w Płocku.
Zengteller Jozef, Prof. S. W. w Biały.
Zeuschner Ludwik, U. Uniw. Warszaw.

PRZEMOWA.

Pierwiastki nauki którą zowiemy Geometryią, z Egiptu i z kraiow wschodnych wnieśli do Grecyi *Tales* z Miletu (1) i *Pitagoras* z Samos (2): poźnieysi uczeni Grecy doskonalili ią i rozszerzali, *Euklides* Aleksandryyski pierwszy napisał iey wykład systematyczny, *Archymedes* (3) poczynił w niey wiele wynalazkow a *Apollonius* z Pergamu (4) iest autorem traktatu sekcyy konicznych których odkrycie winniśmy Platonowi (5) i uczniom iego szkoły.

Diofantes z Aleksandryi, żyiący w czwartym po Chrystusie wieku, pierwszy założył zasady Algebry: w następnych wiekach uprawiali Arabowie tę naukę, w 15ym wniósł ią do Europy *Kamil Leonard* Toskańczyk, a w 16ym *Viete* z Fontenay (6) nadał iey postać ogólną. Także w 15ym wieku żyli twórcy Trygonometryi *Purbach* z Austryi i Jan *Miller Regiomontanus* z Frankonii. Te są znacznieysze epoki czasu w którym umysł ludzki od nayprostszych wiadomości wznosił się do coraz więcey złożonych czyli postępował sposobem syntetycznym.

Z tak przygotowanego przez wiele wiekow i geniuszow stanowiska mógł człowiek przeyrzeć przestrzeń nauk matematycznych iaka za nim była i iaka przed nim być mogła. To stanowisko pierwszy zaiął *René Descartes* (7), który uogólnioną przez Vietę swego poprzednika algebrę przystosował do geometryi liniy krzywych i utworzył dzisiey-

---

(1) Urodzony r. 640 przed Chr. (2) ur. r: 540 pr. Ch.
(3) ur. w Syrakuzach r. 287. pr. Ch. (4) ur. r. 150 pr. Ch.
(5) ur. r. 438 pr. Ch. (5) ur: r. 1540.
(7) ur. r. 1596 31. Marca w *Haie en Touraine.*

szą analizę geometryczną: mówię do geometryi liniy krzywych, ponieważ przystosowanie algebry do początkowey geometryi iest daleko dawnieysze i należy do analizy starożytnych.

Pierwszy Descartes pomyślił i nauczył iż z równań ogólnych drugiego, trzeciego i czwartego stopnia z dwiema ilościami zmiennemi, można wyprowadzić liniie krzywe foremne. Z liniy tym sposobem odkrytych nayważnieyszemi są te, które można wykreślić i poznać za pomocą ogólnego równania stopnia drugiego z dwiema ilościami zmiennemi, i które liniiami drugiego rzędu zowiemy. Poźnieysi analiści dochodzili postaci i liczby powierzchni foremnych za pomocą równań stopnia drugiego, trzeciego i czwartego z trzema ilościami zmiennemi. Z tych powierzchni, także nayważnieyszemi są te, które można wyprowadzić z równania stopnia drugiego i które zowiemy powierzchniami drugiego rzędu. Obecny traktat obeymuie Geometryią analityczną liniy i powierzchni drugiego rzędu: rozumiemy zaś przez geometryią, badania ściągaiące się do odkrycia własności iakie mieć może rozciągłość uważana pod względem na iey postać i wymiary.

Od epoki wynalezienia rachunku analitycznego, to iest różniczkowego i integralnego zmienili geometrowie podany przez Descartes'a podział liniy krzywych. *Leibnitz* (1) obiął ie wszystkie w geometryi i iedne nazwał *algebraicznemi*, drugie *przestępnemi*. Pierwszemi są te których naturę wyraża równanie algebraiczne skończone, drugiemi te których równanie składa się z nieskończoney liczby wyrazow, ieżeli nie iest różniczkowem. Jakoż równanie złożone z nieskończoney liczby wyrazow zawieraiących rosnące bez końca potęgi ilości zmienney iest rzędu który przewyższa czyli przestępuie wszelki rząd skończony.

Jakożkolwiek iest ważne i geniuszu pełne dzieło Descartes'a, mała iednak liczba osób mogła ie rozumieć i ważnością iego treści przeniknąć się: z resztą byłoby to osobliwe zdarzenie aby ludzie, dawny do którego przywykli rozumowania sposób rzucali od razu i zamieniali za nowy. Przyiaciel tego geometry, *Flerimond de Beaune* (2), pierwszy upowszechniał i uprawiał iego naukę. Po Beaunie Hollendrom i Flamandczykom winna Geometryia Kartezyiańska swóy wzrost i wydoskonalenie: i tak, Franciszek

(1) ur. w Lipsku r. 1646. (2) ur. w Blois r. 1601.

Schooten ob-iaśnił ią uczonym kommentarzem, Christian *Huygens* iest autorem liniy rozwiniętych, (développées), *Jan de Witt*, minister rzeczypospolitey hollenderskiey i Gerard *Kinckhuysen* są autorami traktatow sekcyy konicznych: w ogólności Hollandyia w 17ym wieku wydała naywięcey analistow i geometrow, i pod tym względem słynęła u przodkow naszych, iakto widać z dzieł matematycznych *Stanisława Solskiego* w owym wieku żyiącego.

W roku 1705 wyszła na widok, a w latach 1733 i 1753 była przedrukowaną książka, *Application de l' algebre à la Géometrie par Guinée*, zawieraiąca teoryią liniy krzywych algebraicznych i wykreślenia ich równań więcey rozwiniętą niż w *Traité analytique des Sections coniques, Paris* 1707, l'*Hopital*'a. Także w r. 1707 wyszła na widok w Londynie *Arithmetica universalis seu de resolutione et compositione mathematica* obeymuiąca algebrę i iey przystosowania do zadań geometrycznych. To ważne dzieło Newtona wytłomaczył na ięzyk francuski *Noël Beaudeux* i powiększył ie przydatkami i ob-iaśnieniami, w r. 1802.

Są znowu autorowie z 18go wieku którzy sposobem starożytnych pisali dzieła matematyczne. I tak Robert *Simpson* Anglik Professor z Glasgowa, iest autorem traktatu sekcyy konicznych z r. 1735 tym sposobem napisanego: w dziełach swoich, które wyszły r. 1787 po iego śmierci, dopełnił Simpson prac Euklidesa i Apolloniusa. *Hutton* Professor artylleryi w Woolwich iest autorem dzieła *Elements of Conics Sections* w tymże stylu, iasno i dokładnie napisanego.

Z drugiey strony miał ciągle Descartes stronnikow swoiey analizy. I tak w r. 1706 wyszło w Londynie z pod pióra Newtona, *Enumeratio linearum tertii ordinis.* Opisuie tu autor postać liniy 3go rzędu i dzieli ie na 72 klass. *Euler* napisał obszerny traktat liniy rzędow wyższych w dziele *Introductio in analysim infinitimorum, Lausannæ* 1747, w którem wynalazł wiele rzeczy i te z dawnieyszemi uporządkował. Tegoż rodzaiu traktat, z dokładności i z-iasności zaletę maiący wydał *Kramer* pod tytułem *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, *Genève*, 1750. Podobne zalety ma dzieło *Maklaurina* Szkota *De linearum geometricarum proprietatibus principalibus tractatus.* Ten znakomity geometra odkrył wiele własności liniy trzeciego i czwartego rzędu. *Besout*, członek Akademii francuskiey, w swoim *Cours de Mathematiques*, który około r. 1765 zaczął wychodzić na widok, ob-iął także *Application de l'algebre à l'arithmetique et à la Géometrie.* W tym traktacie rozwięzuie Besout za pomocą algebry niektóre zadania geometryczne a daley wykłada sekcyie koniczne algebraicznie lecz nie analitycznie.

Według rozmaitego sposobu uważania, rozmaicie porządkowali analiści liniie rzędow wyższych nad drugi. I tak, Newton naliczył 72 gatunkow liniy 3go rzędu, Euler 16 klass a Kramer 4 które podzielił na 14 rodzaiow. Co do liniy 4go rzędu, Euler dzieli ie na 146 klass mogącycli mieć wiele podpodziałow, Kramer zaś na 9 klass których podziały oznaczyć iest prawie niepodobieństwem. *Montucla* w swoiey historyi Matematyki pisze o nieiakim księdzu *Bragelogne* który wiele prac podeymował około teoryi liniy czwartego rzędu i próby badań swoich zostawił w zbiorze pamiętnikow Akademii francuskiey. Według księdza Bragelogne wypadłoby liniy czwartego rzędu około 1600. Z resztą badania tego rodzaiu nie są ani potrzebne ani pożyteczne, bo w każdym razie można, według danego równania linii rzędu czwartego, doyść postaci i własności linii szukaney.

Powiedzieliśmy że za pomocą równań stopni wyższych nad pierwszy z trzema ilościami zmiennemi można odkryć postać i własności powierzchni foremnych. Pierwszy ze znanych Geometrow który ich dochodził tym sposobem, iest według Montucli, *Pitot,* którego rosprawa w tym zamiarze napisana znayduie się w pismach akademii francuskiey z r. 1733, i *Herman* którego takieyże treści rosprawa znayduie się w pismach akademii Petersburskiey z roku 1732 i 1733. Euler w spomnionem wyżey dziele z r. 1748 obiął także wykład analityczny powierzchni drugiego rzędu.

Pomimo badań i prac analitycznych Descartes'a, Newtona, Eulera, Kramera i wielu innych geometrow, dzieła elementarne 18go wieku niżey stały niż postępy oświecenia a autorowie elementarni nie obięli iescze ducha analizy nowoczesney chociaż swoie dowodzenia opierali na algebrze. Od tego zarzutu dzieło polskie także z 18go wieku *Rachunku Algebraicznego Teoryia przystosowana do liniy krzywych, w Krakowie* 1783, *Jana Sniadeckiego*, nie tylko wolne, ale nawet tak zupełnie w duchu analizy nowoczesney napisane iest, iż pod tym względem przewyższa poźnieysze tego rodzaiu niektóre dzieła *np. Essai de Geometrie analityque* Biota, z roku 1813 ktorego plan nie iest zupełnie analityczny. Biot bowiem, naprzod z przecięć ostrokręgu wywodzi liniie drugiego rzędu, potem opisuie ich własności a nareszcie pod niewłaściwym dyskussyy tytułem wywodzi te liniie z równania stopnia drugiego z dwiema ilościami zmiennemi i kończy rzecz na tem od czego zacząć ią był powinien. Zaletami i dokładnością dzieła Jana Sniadeckiego tyle przeięci iesteśmy że ie mamy za wyższe nad ówczesny stan nauk matematycznych: że iednak to szacowne dzieło nie dość w Polsce upowszechnione i użyte zostało, pochodzi z tey przyczyny szczególnie, że w ciągu 40 lat od iego na świat wyyścia, nie zaiął się autor, iego nowem wydaniem powiększonem w-iednych względach a skroconem w drugich i więcey zbliżonem do prostoty i obecnego stanu umieiętności. Dzieło to, tem iest w Polsce dla matematyki czem *Kopczyńskiego* dla oyczystey mowy: obadwa doznały tego losu że, w samem z-iawieniu się oznaczone cechą doskonałości, więcey przez swych twórcow, mimo postępow oświecenia, nie były tkniętemi.

Epokę wielkiego postępu, który nauki matematyczne winne są analizie nowoczesney, stanowi rewolucyia francuska a w szczególności założenie w r. 1795 szkoły politechniczney w Paryżu. Nie dziwnego że ta epoka aż po wielu wiekach nastąpiła. "Jeżeli bowiem, są słowa *Laplace'a* (1) wznosimy się do prawd powszechnych, to tylko przez porównanie wypadkow szczególnych, które trzeba długo i pod rozlicznemi postaciami rozważać aby pochwycić to co maią spólnego i odkryć w nich źródło tych wielkich teoryy które zmieniaią stan umieiętności i sprawiaią epokę w-ich historyi". Francuzi tedy od spomnioney epoki wydoskonalili analizę nowoczesną i przy iey wpływie uczynili w matematyce postępy które im zapewniły w tym względzie pierwszeństwo między innemi ludami. To pierwszeństwo winni są geometrom *Lagrange*, *Monge*, *Laplace* i innym którzy byli Professorami lub uczniami szkoły Politechniczney. Z tego instytutu wyszły zgodne ze wzrostem nauk matematycznych dzieła elementarne analizy nowoczesney i w szczególności geometryi analityczney. *Gabriel Monge* ieden z założycielow i pierwszych Professorow tey szkoły, wydał w arkuszach r. 1795 dla iey użytku analizę przystosowaną do geometryi. Z tych arkuszow pierwsze, zawierały rozwiązanie zadań tyczących się linii prostey i płaszczyzny. W roku 1801, *Monge* i *Hachette* wydali rosprawę o powie-

---

(1) Leçons de Mathématiques données à l'Ecole normale en 1795. Cahier VII. et VIII page 97 du Journal de l'Ecole Polytechnique.

rzchniach drugiego rzędu (1) które podzielili na dwie klassy; iedne maiące środek i tych iest trzy, drugie nie maiące środka i tych iest dwie. W tymże roku wyszło dziełko *Essai sur la ligne droite et les courbes du second degré par Lefrançais.* W roku 1805 wydał JB. *Biot*, *Traité analytique des courbes et des surfaces du second ordre.* Antoni Charles *Poullet delisle* iest autorem dzieła *Application de l'algèbre à la Geometrie* z r. 1809, a Jan Ludwik *Boucharlat* wydaney powtóre w r. 1810, *Theorie des courbes et des surfaces du second ordre*, w którey wyiaśnił i sprościł niektóre materyie. Te i inne traktaty Geometryi analityczney doskonaliły się przez odnawianie wydań i przez ciągłe prace szkoły Politechniczney, iak to widzieć można w piśmie peryiodycznem *Correspondance de l'Ecole polytechnique* wydawanem, od czasow założenia tey szkoły, przez Profesora Hachette. Pierwszy Hachette dowiódł, że równanie powierzchni rzędu drugiego może być przywiedzione do nayprostszey postaci złożoney z czterech wyrazow (patrz § 258 w obecnem dziele). *Bourdon* Professor Liceum Karola W. r. 1811, dowiódł że 9 niewiadomych ilości które wchodzą w tyleż równań służących do wyznaczenia głównych osi powierzchni, są rzeczywistemi, a Biot wyiaśnił tę materyią. Jestto nayważnieysze twierdzenie w teoryi powierzchni 2go rzędu bo na niem polega wyznaczenie klass, liczby i postaci powierzchni tego rodzaiu. Jan Joachim *Livet* (2) odkrył kilka ważnych własności powierzchni 2go rzędu i wyiaśnił formuły ściągaiące się do przemiany układu spółrzędnych trzech wymiarow (3). *Boucharlat* prościey iescze wyłożył tę ostatnią materyią (§ 78 i 82. tego dzieła). Przyłożyli się iescze swemi rosprawami do wzrostu Geometryi analityczney Pa-

---

(1) 11 Cah. du J. de l'Ecole Polytechnique.

(2) Jan Joachym *Livet* urodzony w *Morlaix*, Departam: *Finistère*, był uczniem szkoły Politechniczney od r. 1802 a szkoły dróg i mostow od r. 1805. W roku 1806 został Repetytorem szkoły Politechniczney a w r. 1808, przeniósł się do Warszawy, gdzie był Professorem w szkole Artylleryi i Inżenieryi aż do r. 1812 swego zawczesnego zgonu. Znakomite talenta tego geometry znała Francyia i nowa iego oyczyzna Polska, a w szczególności znali iego uczniowie Polacy, dziś posiadaiący znakomite stopnie. Oddawał Livet pochwały tym uczniom w swoiey korespondencyi z Paryżem (Ob. cor. de l'E. P. Tom II. p. 120).

(3) Obacz Corr. de l'Ec. Pol. Tom I. p. 28, i Cah XIII. du Journal de l'Ec. Pol. page 270.

wel i Jakob bracia *Binet*, tudzież *Poisson* i *Dupin*. Były Professor S. Pol: Paweł *Binet*, znany w Paryżu z rzadkich talentów i z biegłości w analizie, nie ogłaszał drukiem swych odkryć analitycznych lecz tylko udzielał ie znaiomym. W tym względzie spominaią go z chwałą w swych dzielach, *Lacroix*, *Biot*, *Francœur*. Ja w szczególności miałem porę, mieszkaiąc w Paryżu, poznania talentow tego analisty. Jego przychylności i pomysłom winienem, sposób ogólny assymptot który opisałem w § 103 i 104, tudzież stycznych w § 231 — 235 i tworzenia równań liniy lub powierzchni według naznaczonych warunków.

Taki iest rys historyczny umieiętności, któréy obecny traktat wypracowałem, i takie są zródła w których czerpałem. Zdanie o zaletach mey pracy w porównaniu z innemi, zostawiam publiczności. Powiem tylko iż usiłowałem tak się tłomaczyć aby ci którzy znaią zasady geometryi i ogólney algebry, mogli mnie bez trudności rozumieć. Nie obiąłem trygonometryi prostokreslney i nie poszedłem w tym razie za przykładem *Develeia* (1), *Poullet delisle i Reynaud* (2) bo trygonometryia lubo potrzebuie pomocy algebry, nie iest częścią lecz tylko narzędziem analizy nowoczesney.

Ponieważ spomnione wyżey dzieło Biota, *Essai de Géometrie analytique*, dla wielu zalet swoich naywięcey używane iest w kraiu naszym i nadto przetłomaczone na polski ięzyk przez Antoniego *Wyrwicza* w Wilnie r. 1819; zbliżyłem się do układu tego autora, z resztą różnią się znacznie te dwa układy z przyczyn których dotknęliśmy wyżey. Nadto traktat móy obszernieyszy iest od traktatu Biota. Dla osób które poznaią obadwa, ośmielam się przytoczyć następuiące wyrazy z przemowy Biota. »Je m'estimerai heureux si ce » petit ouvrage, après avoir été utile aux elèves, donne nais» sance à quelqu'autre plus parfait, auquel je serais le pre» mier à applaudir."

Co do skróceń i nazwisk, namienię że łuku lub kąta x wstawę oznaczam przez *wst x*, wstawę dopełnienia czyli dostawę przez *dos x*, styczną przez *stycz x*. *Systéme des coordonnées* nazywam *układem spółrzędnych*, *abscisse*—*odciętą*, *ordonnée*—*rzędną*, *directrisse*—*kierownicą*, *diamètres conjugués*—*srednicami sprzężonemi*; te dwa ostatne nazwania są Jana Sniadeckiego. Parametru, asymptoty, nie nazywałem według

---

(1) Application de l'Algebre a la Géometrie par Develey Lausanne 1816. (2) Traité de l'application de l'Algebre à la Géometrie, par Reynaud. Paris 1819.

tegoż autora, *miarą równania, ledwoniestyczną*, bo te nazwania nie są od ogółu przyięte. Zamiast słowa *biegun* używam *pol*, bo to równie za polskie iak tamto można uważać (1). *Surface gauche* nazywam z *Hreczyną* tłomaczem Geometryi rysunkowey *Potiera* i z Professorem Uniw. Krakowskiego *Sapalskim* powierzchnią *wichrowatą*, zważaiąc na tę okoliczność że tem samem słowem nazywa lud polski tarcicę wykrzywioną czyli spaczoną (2), a w francuskim ięzyku nazywano zrazu, iak się doczytuiemy w Montucli, powierzchnie o których mówimy, *biaises*, to iest wichrowatemi. Skośnemi z resztą, iak ie nazywa Professor *Garbiński* w swoiey rosprawie (3), możnaby nazywać powierzchnie i takie iak ostrokręgowe proste które iednak nie są temi które Francuzi zowią *gauches*.

Trzymałem się podziału okręgu na 400 stopni, a tego na 100 minut, idąc za francuskimi autorami dzieł matematycznych które zdobią wiek XIX i koniec XVIII.

Ułożyłem obecny traktat w roku szkolnym $18\frac{20}{21}$ mego Professorstwa przy szkole Woiewódzkiey Krakowskiey w Kielcach, a to w skutku oświadczonego życzenia przez Kommissyią Rządową Wyznań Religiynych i Oświecenia Publicznego. Przesłany sobie manuskrypt zwróciła mi Kommissyia Rządowa i reskryptem swoim z d. 18 Kwietnia 1822 Nro $\frac{2342}{535}$ zachęciła do ogłoszenia go drukiem dla użytku kraiu.

Zachęcony od moiey zwierzchności, i sparty uwagami szanownych Professorow Ks. A. *Dąbrowskiego*, Ks. R. *Skolimowskiego* i Ka. *Garbińskiego*, tudzież szczególną pomocą dawnieyszych kollegow moich Antoniego *Woelkiego* Profes: S Woiew. w Lublinie, Ks. Kolumbana *Zagera* i Albina *Pinka* PPr. S. Woiew. w Płocku; wydałem pracę moię na widok, przez chęć stania się choć w małey cząstce pożytecznym kraiowi.

---

(1) Obacz. w Pamiętniku Warszawskim z mies. Listopada r. 1822. stron. 259.

(2) Obacz w słowniku *Lindego*.

(3) Tytuł tey pożyteczney i uczącey rosprawy iest: Wykład syntetyczny własności powierzchni skośnych z-ich przystosowaniem do konstrukcyi machin, sklepień kamiennych i t. p. przez Kaietana *Garbińskiego*, w Warszawie 1822.

GEOMETRYIA ANALITYCZNA.

1. Ucząc się zasad Geometryi, postępowaliśmy od rzeczy znanych do nieznanych i za pomocą wiadomości nayprostszych nabywaliśmy stopniami coraz więcey złożonych, czyli uczyliśmy się sposobem *syntetycznym*. Używamy tego sposobu, gdy chcemy siebie lub drugich przekonać o prawdach które się opieraią na inney pierwiastkowey (principium) lub skądinąd poznaney: tu każdą następną prawdę poznaiemy za pomocą poprzedzaiącey a w końcu znayduiemy tę którey szukaliśmy. Tymto sposobem utworzyli starożytni naukę Geometryi.

2. Jnakszy iest uczenia się Geometryi sposób *analityczny*. Poweźmiemy wyobrażenie o tym sposobie z dwóch następuiących przykładow.

a) Niechbysmy twierdzili iż, dany maiąc ieden prostokąta bok C'C (fig. 1) który nazwiemy b i kwadrat, którego bok AD nazwiemy a, można znaleźć drugi bok prostokąta taki, iż różnica między prostokątem z tych dwóch bokow i kwadratem danym będzie równą kwadratowi ze znalezionego boku prostokąta.

Oznaczywszy przez x bok szukany, twierdzenie które utrzymuiemy wyrazimy równaniem drugiego stopnia

$$bx - a^2 = x^2$$

a rozwiązawszy ie względem niewiadomey ilości x, otrzymamy

$$x = \tfrac{1}{2} b \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} b^2 - a^2}$$

Ten wypadek oznacza naprzód iż x ma dwie różne wartości a zatem dwoiako można sprawdzić założone twierdzenie: powtóre iż to twierdzenie wtenczas tylko iest prawdziwe gdy $a^2 < \frac{1}{4} b^2$, to iest gdy kwadrat dany mnieyszy iest od kwadratu z połowy boku danego b, lub gdy mu iest równy tak iż $a^2 = \frac{1}{4} b^2$; fałszywe zaś w przeciwnym razie, to iest gdy $a > \frac{1}{4} b$, w którym ilość $\sqrt{\frac{1}{4} b^2 - a^2}$ byłaby uroioną.

Aby wykreślić znalezioną wartość $\frac{1}{2} b \pm \sqrt{\frac{1}{4} b^2 - a^2}$ dla x zatrzymuiąc znak $+$, wyrysuiemy kąt prosty dab, weźmiemy $ad = a$, promieniem $db = \frac{1}{2} b$ z punktu d iako ze środka odetniemy punkt b na drugiem ramieniu kąta i będzie $ab = \sqrt{\frac{1}{4} b^2 - a^2}$, nakoniec promieniem bd z punktu b iako środka zakreślimy półkole $c'dc$ i będzie $x = ac$ czyli $= cb + ba = \frac{1}{2} b + \sqrt{\frac{1}{4} b^2 - a^2}$. Według tego wypadku równanie założone $bx - a^2 = x^2$ zamieni się na $c'c \times ac - ad^2 = ac^2$ czyli $dc^2 - ad^2 = ac^2$ które iak widzimy iest prawdziwe. Zatrzymuiąc zaś znak $-$ w wartości dla x, wypadnie $x = c'b - ab$ czyli $x = c'a$, a równanie założone zamieni się na $c'd^2 - ad^2 = ac^2$ które, iak widzimy, iest prawdziwe.

b). Na drugi przykład bierzemy następuiące zadanie. Wdany tróykąt BAC wpisać prostokąt równy kwadratowi danemu m^2. (fig. 2).

Niech wpisanym prostokątem będzie DFGE, którego iedna rozciągłość $FG = x$ równoodległą iest od podstawy BC, druga FD którą nazwiemy y równoodległą iest od AH wysokości tróykąta: trzeba wyznaczyć dwie niewiadome x, y w miarach ilości wiadomych, to iest, podstawy $b =$ BC wysokości $a =$AH i kwadratu m^2. W tym zamiarze utworzymy naprzód według założenia, równanie $xy = m^2$ powtóre proporcyią BC: FG = AH: AI, czyli $b : x = a : a - y$, skąd $ax = ba - by$ czyli $ax + by = ba$, po czem rozwiążemy dwa równania

$$ax + by = ba \text{ i } xy = m^2$$

Rozmnożywszy strony drugiego przez ab, otrzymamy równanie $ax.\, by = ab.\, m^2$ które daie iloczyn dwóch ilości ax i by, summę zaś tych samych ilości daie równanie pierwsze, a zatem te dwie ilości, iak wiemy z Algebry można uważać za pierwiastki równania stopnia drugiego

$$z^2 - ab.z + abm^2 = 0$$

tak iż $z = ax$, $z = by$ czyli $x = \frac{z}{a}$, $y = \frac{z}{b}$

aże

$$z = \frac{ab}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2}{4} - abm^2}$$

więc

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{bm^2}{a}},$$

$$y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{am^2}{b}}$$

Mamy więc iuż wartości żądane dla x, y: co się tyczy znakow, z tych nie można brać samych dodatnych ani samych odiemnych, w pierwszym bowiem razie wykreślony prostokąt byłby większy niż w drugim, co być nie może dla tego że ma być równy naznaczonemu kwadratowi m^2: trzeba przeto wziąć w pierwszym wypadku znak $+$, w drugim zaś $-$, lub w pierwszym $-$ a w drugim $+$, a tak mieć będziemy dwa rozwiązania. Z resztą otrzymane wypadki uczą nas iż

1° być nie może $\frac{bm^2}{a} > \frac{b^2}{4}$ ani $\frac{am^2}{b} > \frac{a^2}{4}$ czyli, skróciwszy w obudwóch razach, nie może być $m^2 >$

$\frac{ab}{4}$, co znaczy iż nie może wartość danego prostokąta być większą od połowy $\left(=\frac{1}{2}\times\frac{ab}{2}\right)$ powierzchni tróykąta danego ieżeli w ten tróykąt ma być wpisany prostokąt.

2° Gdy $m^2=\frac{ab}{4}$, prostokąt dany iest naywiększy iaki można wpisać w tróykąt, wymiary zaś tego prostokąta są $x=\frac{b}{2}$, $y=\frac{a}{2}$. Wpiszemy ten naywiększy prostokąt, poprowadziwszy przez środek O boku AB linią OK równoodległą od podstawy BC, a z punktow O i K w których ta linia przecina dwa boki tróykąta spuściwszy na BC prostopadłe OL, KL', będzie bowiem $RH=\frac{1}{2}.AH$ i $OK=\frac{1}{2}BC$.

3° Gdy $m^2<\frac{ab}{4}$, wartości dla x, y będą rzeczywiste a rozwiązanie będzie dwoiakie. Dla wykreślenia wartości y, wykreślmy tyko $\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{am^2}{b}}$ (na co sposób wkrótce poznamy) a znalazłszy wartość liniyną pierwiastku tę przeniesiemy od R do I według znaku + wchodzącego w wartość y, lub od R do S według znaku —, i otrzymamy w pierwszym razie prostokat DFGE, w drugim D'F'G'E' wpisany w tróykąt i równy kwadratowi m^2.

4° Gdyby trzeba było wpisać kwadrat m^2 w tróykąt dany; dostateczne byłoby równanie $ax+by=ab$, to bowiem, dla tego że $x=y$, zamieniłoby się na $x(a+b)=ab$ skąd $x=\frac{ab}{a+b}$; co znaczy iż bok kwadratu mogącego być wpisanym w tróykąt iest linią czwartą proporcyonalną do summy dwóch wymiarow, do iednego wymiaru i do drugiego wymiaru tróykąta.

3 Sposób iakim rozwiązaliśmy te dwa przykłady, iest *analityczny*. Chcąc użyć tego sposobu w Geometryi, przypuszczamy naprzód iż założone twierdzenie iest prawdziwe, lub że naznaczone zadanie iest rozwiązane: z takiego przypuszczenia wyprowadzamy wnioski iedne po drugich póty póki nie doydziemy do wypadku prawdziwego lub fałszywego gdy się trudnimy twierdzeniem; gdy zaś trudnimy się zadaniem, do wypadku z którego pomiarkuiemy czy można rozwiązać zadanie, czy nie. Aby teraz porównać dwa sposoby syntetyczny i analityczny, powiemy iż w pierwszym zgromadzamy i wiążemy z sobą kilka prawd a z-ich powiązania i zebrania wywodzimy nową, zawsze pewną; w drugim rozbieramy czyli rozwięzuiemy podanie iescze niepewne na części które wszystkie są prawdziwe ieśli podanie iest prawdziwe, lub też są fałszywe (czyli iakiey prawdzie przeciwne) ieśli podanie iest fałszywe; w pierwszym nareszcie postępuiemy od rzeczy wiadomych do niewiadomych, w drugim od niewiadomych do wiadomych.

4. Starożytni Geometrowie są twórcami takowey matematyczney analizy: nazwano ią przeto *analizą starożytną* rozróżniaiąc od analizy nowoczesney, którą niżey poznamy. Wynalazek sposobu analitycznego winniśmy *Platonowi* i Uczniom iego Liceum. Niekiedy *Euklides* (1) i *Archymedes* a często *Apollonius*, *Pappus* i wielu innych sławnych w starożytności Geometrow używali tego sposobu. Aże Algebra w tak uogólnioney iak dziś postaci (i nawet zdaie się w żadney) nie była znaną starożytnym, więc ich analiza do Geometryi wprowadzona nie była tak snadną, iasną i w swem rozgałęzieniu płodną, iak kiedy iey nadano

(1) Pierwszy z powyższych dwóch przykładow naśladowaniem iest przykładu Euklidesa. *Propos.* 27. et 28. *Lib.* VI.

postać dzisieyszą. Algebra, lubo się z-iawiła w piątym po Chrystusie wieku; w szesnastym dopiero zaczęła być poznawaną w takim iak dziś uogólnieniu i składzie, do takiego zaś uogólnienia i dalszego wzrostu tey nauki pierwszy krok uczynił Geometra francuski *Viète.* Po tey dopiero epoce można było wprowadzić algebrę do analizy geometryczney starożytnych; gdy zaś to uczyniono, zaczęto nazywać *przystosowaniem algebry do Geometryi*, to co należało nazywać analizą starożytnych. Tey analizie poświęcimy kilka kart, tu zaś zastanowimy się iescze iakim sposobem, syntetycznym czy analitycznym, nauczyliśmy się Algebry.

5. Działamy w duchu analizy gdy, znalazłszy prawdę iaką powszechną, otrzymuiemy za iey pomocą wypadki szczegółowe i rozdrobnione, Ta prawda powszechna raz pochwycona i w całey obszerności rozebrana stać się może podstawą całey budowy nauki nayobszernieyszey, a do wzniesienia tey budowy nie potrzeba wieków bo tu zawsze znaydą się gotowe umysłowe materyiały. Ztądto pochodzi że analiza nowoczesna, w-iednym niespełna wieku z-iawiła się, wzrosła i wydoskonaloną została. Przeciwnie, Geometryia elementarna, dla tego że ią syntetycznie tworzyć musiano, wzrastała wiekami. Takiego samego losu doznała Algebra bo i ta nauka ze szczegółow poczęła się i wzrosła, bo tu także od rzeczy poznanych i prostszych postępowano do nieznanych i coraz więcey złożonych, bo nareszcie układ Algebry nie iest poiedynczym gmachem na iedney podstawie wzniesionym, a zatem w ogóle sposób uczenia się tey umieiętności iest syntetyczny. Według danego w §. 3. wyobrażenia sposobu analitycznego, pomiarkuiemy iż Algebra w niektórych swoich częściach i w niektórych przykładach, wykłada się sposobem analitycznym, lecz co do swego ogółu iest syntezą.

I. ANALIZA STAROŻYTNA.

6. Oznaczywszy literami, iak w przykładach § 2, ilości geometryczne wchodzące w zadanie; w końcu otrzymuiemy formuły algebraiczne które trzeba wykreślić geometrycznie. I tak wykreśliliśmy ilość $\sqrt{\frac{1}{4}b^2-a^2}$ bo od razu mogliśmy byli postrzedz iż ta wyraża bok tróykąta prostokątnego którego przeciwprostokątna $=\frac{1}{2}b$ a bok drugi $=a$. Postrzegliśmy także iż otrzymana wartość $\frac{ab}{a+b}$ wyraża czwartą proporcyionalną liniią do tych trzech $a+b:a=b:$, a zatem wykreślenie tego wypadku można z łatwością wykonać. Przypadki takowych wykreśleń ilości algebraicznych, w których litery oznaczaią *liniie*, są następuiące

1° *Wykreślenie ilości spółmiernych.* Jlości algebraiczne spółmierne oznaczaią albo liniie albo powierzchnie albo bryły, czyli są ilościami iednego lub dwóch lub trzech wymiarow. I tak wyrażenia

$$a, \frac{ab}{c}, \frac{abc}{de}, \frac{abcd}{efg}, \ldots$$

oznaczaią każde w szczególności, liniią prostą. Pierwsze a iest prostem nazwiskiem linii prostey, drugie $\frac{ab}{c}$ oznacza czwartą proporcyionalną do liniy c, b i a: wyrażenie $\frac{abc}{de}$ czyli $\frac{ab}{d}\times\frac{c}{e}$ oznacza także czwartą proporcyionalną do liniy e, c i $\frac{ab}{d}$ z których ostatna wykreśliłaby się naprzód oddzielnie, nareszcie $\frac{abcd}{efg}$

czyli $\frac{abc}{ef} \times \frac{d}{g}$ oznacza czwartą proporcyionalną do liniy g, d i $\frac{abc}{ef}$.

Wyrażenia ab, $\frac{abc}{d}$, $\frac{abcd}{ef}$, $\frac{abcde}{fgh}$, ... oznaczaią powierzchnie, każde bowiem za pomocą czwartych proporcyionalnych można przywieść do nayprostszego wyrażenia ab. I tak

$\frac{abc}{d} = \frac{ab}{d} \times c = Pc$, gdzie $P = \frac{ab}{d}$

$\frac{abcd}{ef} = \frac{ab}{e} \times \frac{cd}{f} = PQ$, gdzie $P = \frac{ab}{e}$, $Q = \frac{cd}{f}$

etc. etc.

Wyrażenie nayprostsze ilości trzech wymiarow iest abc: oznaczać ono może bryłowatość równoległościanu prostokątnego którego trzy krawędzie są a, b, c: do tey nayprostszey postaci będzie można przywieść ułomki

$$\frac{abcd}{e}, \quad \frac{abcde}{fg}, \text{ etc.}$$

w których liczba liter licznika przechodzi trzema liczbę liter mianownika.

Ułomki $\frac{a}{b}$, $\frac{ab}{cd}$, $\frac{abc}{def}$, ... w liczniki których wchodzi tyle liter ile w mianowniki, oznaczaią liczby wypadaiące z podzielenia linii przez linią, lub powierzchni przez powierzchnią etc.

7. Aby wykreślić ilość spółmierną z kilku części złożoną $np.$

$$\frac{abc+def+geh}{ph+pr+ps} \text{ czyli } \frac{abc+def+geh}{p(q+r+s)}$$

naznaczymy summę liniy $q+r+s=k$, i wykreślimy według wskazanego sposobu ilość

$$\frac{abc}{pk}+\frac{def}{pk}+\frac{ghl}{pk},$$

otrzymany wypadek będzie wartością liniyną danego wyrażenia.

Aby wykreślić ilość

$$\frac{abc+def+ghl}{pm+qn+rs}$$

którey mianownik nie może być od razu rozebrany na dwa czynniki, naznaczymy $qn=px$, $rs=py$ a znalazłszy każdą czwartą proporcyionalną x, y do trzech wiadomych liniy, przywiedziemy daną ilość do takiey postaci iak w poprzedzaiącym przykładzie.

Aby wykreślić wyrażenie $\frac{abcd+efgh}{mnp+qrs}$, naznaczymy $qr=mx$ i znaydziemy czwartą proporcyionalną do trzech danych liniy m, q, r: mianownik zamieni się naprzód na $m(np+xs)$. Naznaczymy daley $xs=ny$ i znaydziemy czwartą proporcyionalną do trzech wiadomych liniy n, x, s: mianownik zamieni się na $mn(p+y)$ czyli mnk (wziąwszy $p+y=k$), a dane wyrażenie przybierze postać $\frac{abcd}{mnk}+\frac{efgh}{mnk}$ w którey można ie wykreślić.

W ogólności można wykreślić każde wyrażenie ułomkowe które da się rozebrać na ułomki cząstkowe iednąż liczbę wymiarow oznaczaiące. Nie moglibyśmy np wykreślić wyrażania $\frac{abcd+dbe}{fg}$ czyli $\frac{abcd}{fg}+\frac{dbe}{fg}$ ponieważ pierwszy z tych ułomkow wyraża powierzchnią, drugi liniią prostą.

8. 2° *Wykreślenie ilości niespółmiernych.* Za pomocą własności kwadratu z przeciwprostokątney można wykreślić ilości

$$\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{c^2-b^2},\ \sqrt{p^2-2rs},\ \sqrt{a^2+ab}:$$

Z tych pierwsza i druga żadney nie sprawi trudności. Co do trzeciey, naznaczymy naprzód $2rs=x^2$ i znaydziemy średną geometrycznie proporcyionalną x między $2r$ i s, a potem wykreślimy $\sqrt{p^2-x^2}$. Co do czwartey naznaczymy także $ab=x^2$ i takimże sposobem znalazłszy wartość dla x, wykreślimy $\sqrt{a^2+x^2}$, albo, nadawszy czwartey ilości postać $\sqrt{a(a+b)}$, widzimy iż ta ilość oznacza linią styczną z kołem którego średnica $=b$; przedłużenie zaś tey średnicy aż do przecięcia ze styczną za kołem iest $=a$.

Wyrażenie $\sqrt{ab}$ oznacza średną geometrycznie proporcyionalną między dwiema ilościami a i b. Gdy więc te litery oznaczać będą dwie dane linie, wykreślmy ilość $\sqrt{ab}$ wiadomym z Geometryi elementarney sposobem. Aby takimże sposobem wykreślić ilość

$$\sqrt{abcd-ghef}$$

przywiedziemy ią naprzód do nayprostszey postaci $\sqrt{ab}$. W tym zamiarze, naznaczmy $bc=ax$, $gh=ay$, $ef=az$, i wykreślmy czwarte proporcyionalne x, y, z: dane wyrażenie zamieni się na

$$\sqrt{a^2xd-a^2yz} \quad \text{czyli} \quad a\sqrt{xd-yz}$$

naznaczmy daley $yz=xu$ i wykreślmy czwartą proporcyionalną u: otrzymamy $a\sqrt{x(d-u)}$, po czem pozostanie wykreślić średną geometryczną między dwiema liniami x i $d-u$.

Takąż samą postać nadamy wyrażeniu $\sqrt{\frac{ab^2}{c}-gd}$, naznaczywszy naprzód $\frac{b^2}{c}=p$, $gd=ax$; a ta będzie $\sqrt{a(p-x)}$, po czem pozostanie wykreślić średną geometryczną między liniami a i $p-x$.

9. Wyrażenie $x = \sqrt{a}$ oznaczaiące pierwiastek kwadratowy wyciągnięty z linii prostey a, wykreślimy następuiącym sposobem: (fig. 3).

naprzód. Niech a będzie liniią AC mnieyszą od linii AB uważaney za iedność. Zakreślmy półkole na AB iako na średnicy i z punktu C wyprowadźmy prostopadłą CD która w punkcie D przetnie się z okręgiem: liniia AD będzie pierwiastkiem kwadratowym linii AC; gdyż $AD = \sqrt{AC.AB}$ czyli (dla tego że $AC = a$, $AB = 1$) $AD = \sqrt{a}$. Widzimy że znaleziony pierwiastek AD większy iest od linii AC uważaney za kwadrat i za ułomek. Taż sama okoliczność zachodzi z liczbami: i tak pierwiastek, $\frac{1}{2}$ ułomku $\frac{1}{4}$ uważanego za kwadrat większy iest od swego kwadratu.

Można daley wykreślić pierwiastek 4go, 8go, 16go stopnia linii a. I tak, zakreśliwszy promieniem AD z punktu A łuk DC′ a z punktu C′ wyprowadziwszy prostopadłą C′D′, będzie AD′ pierwiastkiem 4go stopnia linii AC. Jest bowiem $AD' = \sqrt{AC'} = \sqrt{AD}$ $= \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$, znaydziemy iescze $AD'' = \sqrt[8]{a}$, $AD''' = \sqrt[16]{a}$, etc.

powtóre. Gdy przeciwnie dana linia $a > 1$, wykreślimy iey pierwiastek następuiącym sposobem:

Mamy naprzód $a = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)}$, skąd $\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}}}$, co znaczy iż wykreślenie pierwiastku kwadratowego z linii a większey od iedności polega na wykreśleniu pierwiastku $\sqrt{\frac{1}{a}}$ linii $\frac{1}{a}$ mnieyszey od iedności, a zatem na rozwiązaniu poprzedzaiącego przypadku. Nareszcie według formuł

$$\sqrt[4]{a}=\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{a}}},\ \sqrt[8]{a}=\frac{1}{\sqrt[8]{\frac{1}{a}}},\ \text{etc}$$

wykreślimy pierwiastki 4go, 8go stopnia linii daney a uważaney za większą od iedności.

Niechby na przykład trzeba było wykreślić $\sqrt{\frac{b+c}{d+e}}$, ułomek $\frac{b+c}{d+e}$ oznacza tu liniią mnieyszą lub większą od iedności, według tego czy $b+c<d+e$, lub $b+c>d+e$, a zatem trzeba będzie wykreślić pierwiastek kwadratowy linii $\frac{b+c}{d+e}$ stosownie do iednego z tych dwóch przypadkow, zadaniem ogólnem obiętych.

10. Poznaliśmy iuż w § 2. sposób wykreślenia dwóch pierwiastkow równania stopnia drugiego, gdy postać równania iest $x^2=bx-a^2$ (fig. 1). Jnaksze będzie wykreślenie pierwiastkow równania $x^2=-ax+a^2$, i tem się wkrótce (11) zatrudnimy, teraz zaś wykreślimy wyrażenie $x=a^2+\sqrt{a^3-ab+c^2}$.

W tym zamiarze porównaymy linie x, a, b, c z pewną długością k uważaną za iedność liniyną, i wyraźmy ie tak $\frac{x}{k}$, $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$: dane wyrażenie przeydzie na

$$\frac{x}{k}=\frac{a^2}{k^2}+\sqrt{\frac{a^3}{k^3}-\frac{ab}{k^2}+\frac{c^2}{k^2}}$$

czyli $$x=\frac{a^2}{k}+\sqrt{\frac{a^2}{k}a-ab+c^2}$$

widzimy dopiero że $\frac{a^2}{k}$ oznacza trzecią ciągło-proporcyionalną d do k i a, trzy zaś ilości znakiem pierwiastku obięte oznaczaią trzy prostokąty, które zamieniwszy na kwadraty; ostatne wyrażenie przeydzie na

$$x = d + \sqrt{e^2 - f^2 + c^2}$$

które podług wskazanych sposobow wykreślimy.

11. Tak przysposobieni przystępuiemy do rozwiązazania następuiących zadań.

Zadanie 1. Podzielić liniią $a = AB$ na dwie nierówne części tak, aby większa, którą nazwiemy x, była średną geometryczną między daną liniią a i częścią mnieyszą $a - x$ (fig. 4).

Według zadania mamy proporcyią $a : x = x : a - x$ skąd $x^2 = - ax + a^2$ i $x = - \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$. Aby wykreślić tę wartość x, wyrysuiemy kąt ABC którego iedno ramie $AB = a$, drugie $BC = \frac{1}{2}a$ i będzie $AC = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$, a zatem $x = AC - BC = AD = AE$, $a - x = AB - AE = EB$.

Uskuteczniliśmy to wykreślenie, zatrzymuiąc znak + wchodzący w ogólną wartość dla x. Zatrzymuiąc zaś znak —, wartość $- \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$ dla x będzie $= - AD'$. Przeniesiemy tę odiemną wartość AD' na przedłużenie linii AB od A do E' w kierunku przeciwnym kierunkowi linii AE, tak iak znak tey linii iest przeciwnym znakowi linii AE'. Mówię teraz że i ten drugi wypadek iest rozwiązaniem zadania. Jakoż z wiadomey proporcyi

$$AD' : AB = AB : AD$$

wywiedziemy tę: $AD' + AB : AD' = AB + AD : AB$

czyli $EB : E'A = E'A : AB$

którą porównawszy z proporcyią przez pierwsze rozwiązanie otrzymaną

$$EB : EA = EA : AB$$

widzimy iż równie punkt E iak punkt E czyni zadosyć warunkowi zadania: Wypadek ten, któryśmy winni analizie, uczy nas iż właściwe i dokładne wysłowienie zadania powinno było być następuiące: znaleźć na kierunku daney linii AB punkt którego odległość od końca A tey linii byłaby linią średną geometryczną między daną i odległością tegoż punktu szukanego od drugiego końca B linii daney.

12. *Zadanie* 2. Przeciąwszy dwa boki BD, DE (fig. 5) tróykąta BED przez liniią AF równoodległą od trzeciego BE, znaleźć powinowactwo części odciętych BA, AD, EF, FD.

Tróykąt uważany BDE iest prostokątny przy E. Spuśćmy z punktu A liniią AC prostopadłą do BE: ta będzie równoodległą i równą linii FE. Naznaczmy

$AB = c$, $AD = c'$, FE czyli $AC = b$, $FD = b'$, $BC = a$, $AF = a'$.

W tróykącie BCA, iest $c^2 = a^2 + b^2$ (1)

AFD, $c'^2 = a'^2 + b'^2$ (2)

BED, $(c+c')^2 = (a+a')^2 + (b+b')^2$ (3)

wyrugowawszy z tych trzech równań ilości a, a' wypadnie równanie z czterema ilościami b, b', c, c'. W tym zamiarze rozwiniemy równanie (3) i otrzymamy

$$c^2 + c'^2 + 2cc' = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + 2aa' + 2bb'$$

czyli, na mocy równań (1) i (2),

$$cc' = aa' + bb', \text{ skąd } a^2a'^2 = (cc' - bb')^2$$

aże równania (1) i (2) daią $a^2a'^2 = (c^2 - b^2)(c'^2 - b'^2)$

więc $(cc' - bb')^2 = (c^2 - b^2)(c'^2 - b'^2)$

czyli $c^2b'^2 - 2cc'bb' + c'^2b^2 = 0$

czyli $(cb' - c'b)^2 = 0$, $cb' - c'b = 0$

skąd $cb' = c'b$, i $c : c' = b : b'$

to iest $AB : AD = FE : FD$

takie iest, wiadome skądinąd, powinowactwo części odciętych AB, AD, EF, FD.

Łatwo teraz można okazać iż takież samo powinowactwo maią części HG, HD, BA, AD dwóch boków troykąta nieprostokątnego GDB odcięte przez liniią HA równoodległą od trzeciego boku. W tróykącie bowiem prostokątnym

GDE; GH : HD = EF : FD

BDE; BA : AD = EF : FD

więc GH : HD = BA : AD

13. *Zadanie* 3. Znaleźć wyrażenie linii AD (fig. 6) poprowadzoney od wierzchołka A tróykąta do punktu któregokolwiek D boku przeciwnego BC, maiąc wiadome odcinki DB, DC tego boku i wszystkie trzy boki tróykąta.

Niech będą wiadome ilości BC $=a$, AC $=b$, AB $=c$ BD $=s$, CD $=s'$, niewiadoma AD $=x$: spuśćmy od wierzchołka A prostopadłą AE na BC. W tróykącie

$$\text{ADB};\quad c^2=x^2+s^2+2s\times \text{DE}\ (1)$$

$$\text{ADC};\quad b^2=x^2+s'^2-2s'\times \text{DE}$$

Skąd

$$c^2-b^2=s^2-s'^2+2(s+s')\ \text{DE}$$

$$\text{DE}=\frac{c^2-b^2-s^2+s'^2}{2(s+s')}$$

Wstawiwszy tę wartość DE w równanie (1) otrzymamy

$$x^2=\frac{sb^2+s'c^2+ss'(s+s')}{s+s'}$$

Gdyby było $s=s'$, to iest, gdyby liniia AD dzieliła bok BC na dwie równe części w punkcie D, mielibyśmy

$$x^2=\frac{b^2+c^2-2s^2}{2}\ \text{skąd}\ b^2+c=2x^2+2s^2.$$

Gdyby nadto było $b=c$, to iest gdyby tróykąt ABC był równoramienny, mielibyśmy

$$b^2=x^2+s^2$$

to iest, liniia AD byłaby w tym razie prostopadłą do BC.

14. *Zadanie* 4. Znaleźć wyrażenie linii AD dzielącey na dwie równe części kąt BAC, maiąc wiadome wszystkie trzy boki tróykąta BAC (fig. 6).

Oznaczywszy ilości w to zadanie wchodzące temiż literami co w poprzedzaiącem zadaniu, będą do rozwiązania potrzebne trzy następuiące równania

$$cs = bs', \quad s + s' = a, \quad x^2 + ss' = bc$$

z których pierwsze i ostatne wyrażaią wiadome z geometryi elementarney twierdzenia. Znalazłszy za pomocą dwóch pierwszych, wartości odcinkow

$$s = \frac{ac}{b+c}, \quad s' = \frac{ab}{b+c}$$

i wstawiwszy ie w trzecie, otrzymamy

$$x^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

czyli $x^2 = bc\left(1 + \frac{a}{b+c}\right)\left(1 - \frac{a}{b+c}\right)$

czyli $x^2 = \left(c + \frac{ac}{b+c}\right)\left(b - \frac{ab}{b+c}\right)$

skąd $c + \frac{ac}{b+c} : x = x : b - \frac{ab}{b+c}$

czyli $c + s : x = x : b - s'$

to iest: liniia, dzieląca kąt tróykąta zawarty między bokami c, b na dwie równe części, iest średną geometryczną między summą boku iednego i odcinka przyległego a różnicą boku drugiego i odcinka przyległego.

15. *Zadanie* 5. Przez punkt D (fig. 7.) dany wśrod kąta A poprowadzić liniią BDC tak aby tróykąt BAC był równy kwadratowi danemu m^2.

Nazwiymy z, y, niewiedome boki AB, AC tróykąta BAC: przez punkt D poprowadźmy liniie, DE równoodległą od AC i DF równoodległą od AB: niech będą wiadome liniie AE $= a$, DE $= b$: trzeba znaleźć wartości boków x, y za pomocą wiadomych ilości a, b, m^2, i kąta A, to iest trzeba utworzyć dwa równania z temi dwiema niewiadomemi. Ponieważ wysokością tróykąta ABC iest $y.wst\,A$, więc iego powierzchnia iest $xy.\frac{wst\,A}{2}$ a zatem według zadania iest

$$\frac{xy.wst\,A}{2} = m^2. \quad (1)$$

Aby utworzyć drugie równanie, ułożymy proporcyią

EB: ED = FD: FC czyli $x - a : b = a : y - b$,

skąd $bx + ay = xy$ czyli $bx + ay = \frac{2m^2}{wst\,A}$. (2)

Aby rozwiązać dwa równania (1) i (2), rozmnożę strony pierwszego przez ab i wyrażę ie tak

$$bx.ay = \frac{2ab.m^2}{wst\,A}$$

to zaś porównawszy z równaniem (2) widzę iż dwie niewiadome bx, ay są pierwiastkami równania stopnia drugiego

$$z^2 - \frac{2m^2}{wst\,A}z + \frac{2ab.m^2}{wst\,A} = 0$$

tak iż $z = bx$, $z = ay$:

ażc $$z = \frac{m^2}{wst\,A} \pm \sqrt{\frac{m^4}{wst^2 A} - \frac{2ab.m^2}{wst\,A}}$$

więc $$x = \frac{z}{b} = \frac{m^2 \pm m\sqrt{m^2 - 2ab\,wst\,A}}{b.\,wst\,A}$$

$$y = \frac{z}{a} = \frac{m^2 \pm m\sqrt{m^2 - 2ab.wst\,A}}{a\,wst\,A}$$

Pozostaie teraz wykreślić znalezione wartości dla x, y, a w wykreśleniu trzeba (dla tey samey co w przykładzie § 2. przyczyny) wziąć znak + w wartości x i znak — w wartości y; lub znak — w pierwszym razie a znak + w drugim.

Gdyby dany kwadrat m^2 był mnieyszy od $2ab.wst$A to iest od podwóynego równoległoboku AEDF; wartości x, y byłyby uroione czyli nie możnaby zadania rozwiązać.

Naymnieysza wartość iaką mieć może kwadrat m^2 iest $2ab.wst$A i boki tróykąta szukanego będą w tym razie $2a$, $2b$ powierzchnia zaś $2ab.wst$A: to iest, naymnieyszy kwadrat równy iest podwóynemu równoległobokowi AEDF, boki zaś tróykąta równego temu kwadratowi co do powierzchni są AB = 2AF, AC = 2AF, bok nareszcie BC będzie w tym razie podzielony na dwie równe części w punkcie D.

Gdy $m^2 > 2ab.wst$A, wartości dla x, y będą rzeczywiste i dodatne: wyznaczywszy punkta G, G′ za pomocą dwóch wartości dla x, poprowadzimy linie GH, G′H′ i otrzymamy dwa tróykąty GAH, G′AH′ z których każdy równy będzie kwadratowi m^2.

16. *Zadanie* 6. Znaleźć powierzchnią tróykąta maiąc wiadome wszystkie trzy boki. (fig. 8.)

Trzy wiadome boki są AB $= c$, BC $= a$, AC $= b$. Spuściwszy od wierzchołka B prostopadłą BD na bok AC uważany za podstawę, powierzchnia tróykąta będzie

$$\frac{\mathrm{AC}}{2}\cdot \mathrm{BD} \text{ czyli } \frac{b}{2}\cdot \mathrm{BD}$$

aże BD $= \sqrt{c^2 - \mathrm{AD}^2}$, czyli, dla tego że

$$\mathrm{AD} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2},$$

$$\mathrm{BD} = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{b^2}$$

więc powierzchnia ABC iest, $\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$

czyli $\frac{1}{4}\sqrt{\left((2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)\right)}$

czyli $\frac{1}{4}\sqrt{\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c^2)\right)}$

czyli $\frac{1}{4}\sqrt{\left((b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)\right)}$

Naznaczywszy $2p=a+b+c$, będzie $2p-2a=b+c-a$,
$2p-2c=a+b-c$, $2p-2b=a-b+c$,
wyrażenie zaś powierzchni tróykąta,

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Gdyby było $b=c$, tróykąt byłby równoramienny a iego powierzchnia byłaby $(p-b)\sqrt{p(p-a)}$

Gdyby było $b=c=a$ troykąt byłby równoboczny a iego powierzchnia byłaby $(p-a)\sqrt{p(p-a)}$

17. *Zadanie* 7. Przez liniią EF równoodległą od AB podzielić dany tróykąt ACB na dwa odcinki AEFB, ECF któreby się miały iak dwie dane linije LI, IG czyli m i n. (fig. 9.)

Niech będzie podstawa wiadoma $AB=a$, a wysokość $CH=b$, tróykąta ACB: podstawa szukana $EF=z$, a wysokość $CG=x$ tróykąta ECF. Z proporcyi $AB:EF=CH:CG$ czyli $a:z=b:x$ wywiedziemy równanie

$$ax=bz \quad (1)$$

Z proporcyi $AEFB:ECF=m:n$ czyli

$\frac{a+z}{2}(b-x):\frac{zx}{2}=m:n$ wywiedziemy równanie

$$n(a+z)(b-x)=mzx \quad (2)$$

Wyrugowawszy z z równań (1) i (2) otrzymamy

$$x=\pm\sqrt{\frac{nb^2}{m+n}}$$

Aby wykreślić tę wartość, znaydziemy naprzód trzecią ciągło-proporcyionalną do $m+n$ i b czyli do LG i GM (=HC) i tą niech będzie GK $= \frac{b^2}{m+n}$: powtóre średną między n i $\frac{b^2}{m+n}$ czyli IG i GK którą niech będzie GC $= x$. Przez wzgląd na podwóyną wartość dla x, przeniesiemy GC na przedłużenie wysokości HC od C do g i na tęż wysokość od C do G, dokończymy wykreślenia według wyznaczonych punktow G i g i otrzymamy dwa rozwiązania z których iedno z dwoyga użytem będzie według danego stosunku $m : n$, który może być iakikolwiek.

Gdy $m=n$, wartość dla x wypadnie $\sqrt{\frac{mb^2}{2}}$ którą wykreśliwszy, podzielimy tróykąt na dwie równe części przez liniią równoodległą od iednego z bokow.

18. *Zadanie* 8. Przez punkt O dany za okręgiem poprowadzić liniią przecinaiącą koło tak aby część (fig. 10.) CD tey linii zawarta w kole miała długość naznaczoną.

Niech będzie CD $= c$, OC $= x$: poprowadziwszy dowolnie liniią OB$=a$ i nazwawszy b iey część OA za kołem, ułożymy proporcyią

$$a : c+x = x : b, \text{ skąd } x^2+cx=ab,$$

i $$x = -\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2+ab}.$$

Aby wykreślić pierwszą wartość x, mamy naprzód $ab=$ OE^2, wyprowadziwszy więc z punktu dotknięcia E prostopadłą EF $= \frac{1}{2}c$, będzie

$$\text{OF} = \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2+ab}, \quad \text{OF}-\text{EF} = \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2+ab} - \tfrac{1}{2}c$$

Promieniem OK$=$OF$-$EF z punktu O przecinam okrąg dany w punkcie C, przez punkta O i C prowadzę liniią OD: tey część CD zawarta w kole równą będzie naznaczoney linii.

Aby wykreślić drugą wartość x, przeniesiemy summę liniy OF i EF na przedłużenie linii OC od O do C i będzie $OC' = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$: weźmiemy $OB = a$, $OA' = b$ a przez punkta A' C' B' zakreśliwszy okrąg, cięciwa CD będzie równą daney linii.

19. *Zadanie* 9. Podzielić powierzchnią DEBL zawartą między ćwierciami dwóch okręgów spółśrodkowych i ich promieniami na dwie równe części przez trzeci łuk także spółsrodkowy. (fig. 11.)

Niech AT będzie promieniem szukanego łuku: ma być według założenia

$$DAL - ZAT = ZAT - EAB$$

czyli, naznaczywszy $AL = a$, $AB = b$, $AT = x$,

$$\frac{1}{4}a^2\pi - \frac{1}{4}x^2\pi = \frac{1}{4}x^2\pi - \frac{1}{4}b^2\pi$$

czyli $\qquad a^2 - x^2 = x^2 - b^2$ skąd $x = \pm\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Aby wykreślić wartość znalezioną dla x, poprowadzimy linią $DB = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ i na niey iako na średnicy zakreślimy półkole BDG: od punktu G wziętego w środku tego półkola poprowadzimy do którego kolwiek końca średnicy linią GD, a ta będzie promieniem koła szukanego. Jest bowiem

$$DG = \sqrt{DB^2 - BG^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Promieniem więc $AT = DG$ z punktu A zakreśliwszy łuk ZT, ten podzieli powierzchnią EDLB na dwie równe części.

II. ANALIZA NOWOCZESNA.

20. Do powzięcia wyobrażenia o duchu analizy nowoczesney posłuży nam rozwiązanie następuiącego zadania.

Znaleźć dla niewiadomey x wchodzącey w wyrażenie

$\sqrt{\frac{2x^2 + {}^3x}{x^2 + 4}}$ wartość taką, która sama, ze wszystkich wartości iakie niewiadoma x mieć może, nadałaby nay-większą wartość liczebną danemu wyrażeniu.

Naznaczaiąc dla x wszelkie wartości liczebne poczynaiąc od naymnieyszych *np* od *iedności*, a postępuiąc do co raz większych i te wstawiaiąc koleyno za x w dane wyrażenie, postrzeżemy iż wartość wyrażenia będzie z razu rosła a potem malała mimo co raz większych wartości branych dla x. Stąd wniesiemy iż między owemi wartościami dla x znayduie się taka która nadaie wartość naywiększą wyrażeniu. Aby znaleźć takową wartość dla x, oznaczmy przez y różne wartości wyrażenia odpowiadaiące różnym wartościom x i załóżmy równanie

$$y = \sqrt{\frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 4}},\ \text{albo}\ y^2 = \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 4}$$

dla oznaczenia iż wartość y zawisła od warsości x, sama zaś ilość x nie zawisła od żadney inney: okoliczność którą wyrażaią w ogólności równaniem

$$y = fx$$

oznaczaiącem że y iest funkcyią x, to iest że wartość ilości y zawisła od szczególney wartości wziętey dla x.

Związek zachodzący między ilościami y, x można wystawić za pomocą układu dwóch liniy OX, OY (fig. 12) przecinaiących się pod kątem prostym w punkcie O, biorąc na pierwszey OX długości OA, OC, OA′, etc wyrażaiące wartości dla x, na drugiey zaś OY wartości odpowiadaiące dla y to iest OB′, OB, etc. równe względnie liniiom AM′, CM. Tę okoliczność, że wartości dla y zrazu rosną a potem maleią, wyrazić możemy na figurze linią krzywą M′MM″ łączącą końce liniy AM′, CM, AM″ oznaczaiących wartości dla y.

Za pomocą takiego wykreślenia postrzeżemy, iż, dopóki y mieć nie będzie naywiększey wartości, dopóty linii $y = AM' = A'M'$ odpowiadać będą dwie różne wartości x, to iest OA i OA': gdy zaś y otrzyma największą wartość CM w ów czas x mieć będzie poiedynczą OC, czyli dwie z razu nierówne wartości OA, OA', przeydą, że tak powiem, na dwie równe OC, OC. Stąd wniesiemy że, nadawszy ostatnemu równaniu postać

$$(x^2+4)y^2 = 2x^2 + 3x \quad \text{(a)}$$

trzeba znaleźć dla niewiadomey y w to równanie wchodzącey wartość taką przez którą dwie wartości x stałyby się równemi. Ułożywszy więc względem x równanie (a) w sposób następuiący

$$(y^2-2)x^2 - 3x + 4y^2 = 0 \quad \text{(b)}$$

to musi mieć dwa pierwiastki równe: warunkiem zaś tey okoliczności iest, iak wiemy z algebry, aby polynomy,

$$(y^2-2)x^2-3x+4y^2, \text{ i } 2(y^2-2)x-3$$

miały spólny dzielnik. Odbywszy działanie dla znalezienia spólnego dzielnika, doydziemy do reszty drugiey $4y^2 - \dfrac{9}{4(y^2-2)}$, i tę zrównawszy zero, założymy warunek aby rzeczone polynomy miały spólny dzielnik. Z tego równania warunkowego wypadnie

$$y^2 = \tfrac{9}{4},\ y^2 = -\tfrac{1}{4}, \text{ skąd } y = \pm\tfrac{3}{2},\ y = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}:$$

dwie uroione wartości y znaczą iż linia krzywa M'MM" iest zamkniętą, czyli że przeszedłszy pewną granicę nie znaydziemy już żadnych wartości dla y odpowiadaiących wartościom dla x: weźmiemy więc tylko dwie pierwsze wartości y, z których iednę, np $+\frac{3}{2}$, wstawiwszy w równanie (b) otrzymamy $x=6$: liczba więc 6, wstawiona za x w dane wyrażenie, nada mu największą wartość $= \frac{3}{2}$.

21. Dwie okoliczności posłużyły nam do rozwiązania tego zadania. Pierwsza żeśmy uważali ilości x, y za *zmienne* czyli mogące mieć nieograniczoną liczbę

wartości, druga żeśmy te wartości, oznaczone liniiami prostemi, odcinali, poczynaiąc zawsze od iednegoż punktu O, na dwóch liniiach OX, OY przecinaiących się pod kątem prostym w punkcie O, tak iż wziąwszy na OX pewną długość liniyną dla x odcięliśmy na OX odpowiadaiącą wartość dla y wyznaczoną za pomocą równania $y = \sqrt{\frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 4}}$

Takowy postępowania sposób należy do *analizy nowoczesney*. Główną cechą i podstawą tey analizy iest *zmienność ilości*. Z takiegoto powszechnego stanowiska, zaczęto w ostatnych czasach, według myśli rzuconych przez *Leibnica* i *Newtona*, uważać naukę matematyki, przechodzono od rzeczy nayogólnieyszych do szczegółow stopniami drobnieyszych, odkrywano tym sposobem prawdy nieznane zrazu i nareszcie utworzono naypięknieysze teoryie tak czystey iak przystosowaney matematyki.

Analiza starożytna w daleko ściśleyszych uogólnienia granicach, niż nowoczesna, była zamkniętą, i dla tego tyle płodną w odkrycia i rozgałęzienia ile ta ostatna, być nie mogła.

22. Dwie główne części: *Geometryia analityczna* i *rachunek analityczny*, który się dzieli na różniczkowy i integralny, składaią czystą *matematykę ilości zmiennych* czyli *analizę nowoczesną*.

23. W analizie dwóch wymiarow wykonywaią się wykreślenia za pomocą układu dwóch liniy prostych OX, OY (fig. 13) przecinaiących się pod kątem iakimkolwiek a naydogodniey prostym; w analizie zaś trzech wymiarow wykonywaią się wykreślenia za pomocą układu trzech liniy OX, OY, OZ (fig. 14) przecinaiących się w iednym punkcie, także naydogodniey pod kątem prostym. W tym ostatnym razie można, dla snadnieyszego poięcia rzeczy, uważać dwie linie OX,

OY za horyzontalne, trzecią zaś OZ za pionową, każde zaś po dwie brane za położone na płaszczyznie, tak iż płaszczyzna XOY iest horyzontalną, płasczyzny zaś XOZ, YOZ są pionowe.

24 Za pomocą takowego układu liniy prostych można wyznaczyć położenie punktu uważanego na płaszczyznie lub w przestrzeni. I tak, wyznaczymy położenie punktu M (fig. 13) na płaszczyznie XOY za pomocą dwoch liniy OP, PM z których pierwsza wzięta na OX nazywa się *odciętą*; druga, równoodległa od OY, nazywa się *rzędną* punktu M. Wyznaczymy położenie punktu M (fig. 14) danego w przestrzeni za pomocą trzech liniy MP, Pa, Pb, z których pierwsza równoodległą iest od OZ druga od OY trzecia od OX. W każdym z tych dwóch przypadkow, liniie takie iak OP, PM w 1$^{\text{m}}$, MP, Pa, Pb w 2$^{\text{gim}}$ razie, za pomocą których wyznaczamy położenie punktu odnoszonego do układu liniy nieograniczonych OX, OY w pierwszym razie, lub OX, OY, OZ w drugim; nazywaią się *spółrzędnemi*, linie zaś nieograniczone OX, OY, lub OX, OY, OZ na których, poczynaiąc zawsze od iednegoż punktu O, odcinaią się spółrzędne; nazywaią się *osiami spółrzędnych liniy.* Punkt O w którym się przecinaią trzy osi, nazywać będziemy *zaczęciem* układu osi.

§ 25. Uważaiąc linie OX, OY za osi (fig. 13) liniy spółrzędnych dodatnych, będą OX′, OY′ osiami liniy spółrzędnych odiemnych: iako bowiem kierunek osi OX′ iest przeciwny kierunkowi osi OX, tak znaki liniy odciętych na OX′ muszą być przeciwne znakom odciętych na OX. Wziąwszy OY za oś rzędnych dodatnych, będzie, dla podobney przyczyny, OY′ osią rzędnych odiemnych. Więc

spółrzędne punktu M, są $x = +$ OP, $y = +$ PM
. . M′, $x = -$ OP′, $y = +$ P′m′
. . M″, $x = +$ OP, $y = -$ PM′

4

. . M''', $x = - OP'$, $y = - PM'''$
spółrzędne punktu P, są $x = + OP$, $y = o$
. . P', $x = - O'P'$, $y = o$
. . Q, $x = o$, $y = + OQ$
. . Q', $x = o$, $y = - OQ'$
. . O, $x = o$, $y = o$

Takaż sama okoliczność zachodzi ze znakami spółrzędnych punktu danego w przestrzeni, zwłaszcza (fig. 14) co się tyczy osi OX, OY uważanych za horyzontalne. Co się zaś tyczy osi OZ uważaney za pionową wszelkie rzędne, brane według tey osi nad płaszczyzną horyzontalną XY, będą dodatnemi, a zatem wszelkie rzędne brane według teyże osi OZ pod płaszczyzną horyzontalną XY, będą odiemnemi. Skoro zatem są dane trzy spółrzędne punktu w przestrzeni odnoszonego do takowego układu trzech osi, będzie można wyznaczyć położenie tego punktu.

26. Można także wyznaczyć długość linii prostey daney na płaszczyznie lub w przestrzeni w funkcyi wiadomych spółrzednych iey końców. I tak, niech x, y (fig. 13) będą spółrzędnemi punktu C, $x' y'$ punktu M, długość linii zawartey między temi punktami uważaney na płaszczyznie i za przekątną prostokąta, będzie $\sqrt{CS^2 + MS^2}$

czyli $\sqrt{(y - y')^2 + (x - x')^2}$

długość zaś linii OC przechodzącey przez zaczęcie, będzie

$$\sqrt{y^2 + x^2}$$

27. Aby znaleźć długość linii prostey MM' daney w przestrzeni, zważymy naprzód iż tę liniią, którey iednego końca M (fig. 14) spółrzędne wiadome są x, y, z, drugiego M' są $x' y' z'$; można uważać za przekątną równoległościanu prostokątnego wystawionego na trzech krawędziach $x - x'$, $y - y'$ $z - z'$, a

zatem według wiadomego ze Stereometryi twierdzenia długość tey linii będzie

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

Można iescze następuiącym sposobem znaleźć ostatnią formułę.(f. 15) Przez liniią daną MM' poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do XY i zawartą między dwiema liniiami $M'm'=z'$, $Mm=z$ prostopadłemi do XY. Slad $m'm$ płasczyzny $MM'm'm$ na XY, iest według poprzedzaiącego § $=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$. Przez punkt M' na płaszczyznie Mm poprowadzimy liniią MP równoodległą od $m'm$, tróykąt M'PM będzie prostokątny przy P, więc $MM'=\sqrt{M'P^2+MP^2}$ aże $MP=Mm-Pm=z-z'$ więc

$$MM'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

Gdy dana linia OM przechodzi przez zaczęcie spółrzędnych (fig. 14) wartość tey linii uważaney za przekątną równoległościanu prostokątnego wystawionego na trzech krawędziach x, y, z, które są spółrzędnemi punktu M, będzie

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

28. Płasczyzna $MM'm'm$, według którey zrzuciliśmy liniią MM' na XY nazywa się *zrzucaiącą* (plan projettant), płasczyzna zaś XY na którąśmy zrzucili ową liniią nazywa się *płasczyzną rzutow* (plan de projection). Liniia $m'm$ nazywa się *rzutem* (projection) linii M'M, punkt m' rzutem punktu M'. Linia OP (fig. 13) iest rzutem linii OM, linia Pd rzutem linii MC na oś OX.

29. Z tego co się dotąd wyłożyło, wniesiemy że, gdybyśmy mieli dane, czyto przez równanie czy przez proporcyią, powinowactwo spółrzędnych liniy punktow uważanych 1° na płasczyznie 2° w przestrzeni; moglibyśmy, nadaiąc w pierwszym razie różne wartości dla iedney ze spółrzędnych a wyznaczaiąc drugą za pomo-

cą danego powinowactwa, lub nadaiąc w drugim razie różne wartości dla dwóch spółrzędnych a wyznaczaiąc trzecią za pomocą danego powinowactwa; moglibyśmy, mówię, wyznaczyć ciąg nieprzerwany tych punktow których mieyscem geometrycznem byłaby w pierwszym razie albo linia prosta albo krzywa, w drugim zaś powierzchnia. Z tych względow podzielony iest obecny traktat *Geometryi analityczney* na trzy następuiące części: *pierwsza* o linii pierwszego rzędu czyli o linii prostey, *druga* o liniach drugiego rzędu, *trzecia* o powierzchniach drugiego rzędu.

CZĘŚĆ PIERWSZA

O LINII PIERWSZEGO RZĘDU CZYLI O LINII PROSTEY.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

O linii prostey uważaney na płaszczyźnie.

§ 30. Niech będzie równanie pierwszego stopnia
$$Ay+Bx=C=0 \quad (1)$$
z dwiema niewyznaczonemi ilościami y, x. Nadaiąc dla x różne wartości a wyznaczaiąc y za pomocą danego równania w którem A, B, C oznaczaią ilości stałe wiadome; daley, wartości dla x uważane za liniie proste odcinaiąc na osi OX, (fig. 16) wartości zaś znalezione dla y odcinaiąc na osi OY i przez punkta a, b, c... d, e, f... tym sposobem wyznaczone poprowadziwszy liniie ag, bh, ci..., dg, eh, fi,... równoodległe względnie od osi OY, OX do przecięcia spólnego w punktach g, h, i; znaleźć iaka liniia będzie mieyscem geometrycznem punktow g, h, i tym sposobem wyznaczonych.

Aby to zadanie rozwiązać wywiedźmy z równania (1) wartość dla y, która iest
$$y=-\frac{B}{A}x-\frac{C}{A}$$
czyli, naznaczywszy $-\frac{B}{A}=a, =-\frac{C}{A}=b,$
$$y=ax+b.$$

Naznaczmy dopiero $x=o$, skąd wypadnie $y=b$ i tę ilość stałą b odetniymy na OY od O do k. Poprowadziwszy przez punkt k liniią kn równoodległą od OX i nadawszy ostatniemu równaniu postać

$$\frac{y-b}{x}=a$$

widzimy iż stosunki kl: lg, km: mh, kn: ni są równe każdy w szczególności ilości stałey a, a tem samem równe między sobą, skąd wniesiemy że tróykąty klg, kmh, kni... są podobne, a zatem że punkta k, g, h, i są w linii prostey. Równanie więc

$$y=ax+b,$$

za pomocą którego wyznaczyliśmy punkta k, g, h, iest równaniem linii prostey.

31. Gdyby punkt k był zaczęciem osi spółrzędnych, ilość b byłaby $=o$, liniia ki przechodziłaby przez zaczęcie spółrzędnych a iey równanie byłoby $y=ax$.

32. Aby wyznaczyć ilość stałą a wchodzącą w równanie linii prostey, ułożymy za pomocą któregokolwiek tróykąta np, klg proporcyią

$$kl:lg=1:stycz.\,gkl, \text{ czyli } x.y=1: stycz.\,gkl.$$

skąd $\quad stycz.\,gkl = \dfrac{y}{x}$, aże według poprzedzaiącego § iest $\quad a = \dfrac{y}{x}$

więc $\quad a = stycz.\,gkl$

to iest, ilość a oznacza styczną trygonometryczną kąta który liniia dana przez równanie czyni z osią OX.

33. Sposób geometryczny znalezienia równania linii prostey przechodzącey przez zaczęcie osi, iest następuiący.

Wszelkie punkta linii prostey OM (fig 13) odnoszone do dwóch osi spółrzędnych maią tę własność iż stosunek spółrzędnych każdego punktu tey linii, równy iest stosunkowi któregokolwiek innego punktu, to iest, ma się

$$OP : PM = OP' : P'M' = Od : dC$$

aże wartość któregokolwiek z tych stosunkow iest

$= 1 :$ *stycz.* MOP czyli, dla skrócenia, $= 1 : a$

tak iż $x : y = 1 : a$,

więc $y = ax$

iest równaniem linii prostey przechodzącey przez zaczęcie osi. Gdyby kąt MOP był $= 50^o$ styczna iego byłaby iednością równanie linii OM iest w tym razie

$$y = x.$$

Równanie linii Om' iest także

$$y = ax,$$

lecz styczna a kąta $m'OX$ iest w tym razie odiemną, odcięta x punktu któregokolwiek tey linii iest także odiemną, a zatem iloczyn ax iest dodatny.

Równanie linii OM''' iest

$$y = -ax,$$

w tym razie, a oznacza styczną kąta $M'''OX'$ dodatną, x odciętą odiemną, więc iloczyn ax iest odiemny.

Równanie linii OM'' iest

$$y = -ax,$$

w tym razie a oznacza styczną kąta $M''OX$ odiemną, x odciętą dodatną, więc iloczyn ax iest odiemny.

34. W każdym z czterech ostatnych przypadkow powiększywszy ax ilością stałą b otrzymamy równanie (fig. 17)

$y = ax + b$ liniy AB i AB'

$y = -ax - b$ liniy A'B'' i A'B''

W ogólności równanie linii prostey, nie zważaiąc na znaki iest $y = ax + b$.

35. Dotąd odnosiliśmy liniią prostą do układu osi spółrzędnych prostokątnych, i w tem założeniu wyznaczyliśmy wartość dla a. Tęż samą postać zachowa równanie ogólne linii prostey odnoszoney do ukła-

du osi spółrzędnych nieprostokątnych, wartość zaś ilości a znaydziemy w tym razie następuiącym sposobem.

Nazwiymy β kąt osi YOX, α kąt MOP, skąd MOY $=\beta-\alpha$ i ułóżmy proporcyią (fig. 18)

$$OP : PM \text{ czyli } x : y = wst(\beta-\alpha) : wst\alpha.$$

Otrzymamy równanie linii prostey OM

$$y=\frac{wst\alpha}{wst(\beta-\alpha)}.x$$

któremu nadawszy postać prostszą $y=ax$, widzimy iż

$$a=\frac{wst\alpha}{wst(\beta-\alpha)}$$

taka iest w tym razie wartość, którą mieliśmy znaleźć, ilości a.

Rozumuiąc iak w § 23 przekonamy się iż równanie

linii OM lub OM′ iest $y=\dfrac{wst\alpha}{wst(\beta-\alpha)}.x$

OM‴ . OM″ . $y=-\dfrac{wst\alpha}{wst(\beta-\alpha)}.x$

36. Równanie zaś linii nie przechodzącey przez zaczęcie spółrzędnych nieprostokątnych (fig. 19) podobnie iak w § 34, w szczególności zaś

linii AM i AM′ iest, $y=\dfrac{wst\alpha}{wst(\beta-\alpha)}.x+b$

A′M‴ i A′M″ . $y=-\dfrac{wst\alpha}{wst(\beta-\alpha)}.x-b$

37. Odnosząc więc do iakiegokolwiek układu osi spółrzędnych liniią prostą, iey ogólne równanie będzie w każdym razie

$$Ay+Bx+C=0$$

w które nie wchodzą ani iloczyny ani potęgi ilości zmiennych x, y. Z tego względu wszelkie równanie które można przywieść do tey postaci, nazywa się w rachunku analitycznym *równaniem liniynem* (1).

38. Wyznaczymy położenie linii prostey na płaszczyźnie za pomocą równania $y = ax + b$ gdy dane będą wartości dla ilości a, b, wchodzących w to równanie, lub warunki na ich wyznaczenie. Stosownie do tych przypadkow, i używaiąc układu osi prostokątnych iako naydogodnieyszego, zatrudnimy się następuiącemi zadaniami.

39. *Zadanie.* Znaleźć równanie linii prostey przechodzącey przez dwa punkta których spółrzędne są dane.

Oznaczmy przez x'', y'' i przez x', y' spółrzędne wiadome dwóch punktow linii, którey równanie ogólne iest

$$y = ax + b \quad (1)$$

Ponieważ liniia przechodzić ma przez punkt pierwszy (x'', y'') (2), więc iey równanie sprawdzi się gdy w nie wstawimy x'' za x, i y'' za y, i zamieni się na

$$y'' = ax'' + b \quad (2).$$

taż sama okoliczność zachodzi względem punktu drugiego $(x'\ y')$, więc

$$y' = ax' + b. \quad (3)$$

Odciągnąwszy stronami to równanie od poprzedzaiącego, będzie

$$y'' - y' = a(x'' - x') \text{ skąd } a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}:$$

Mamy tedy wartość dla a którą wstawić trzeba w równanie (1), czyli mamy wiadome położenie linii:

---

(1) To nazwanie nie iest naystosownieysze, bo w analizie nie tylko prosta lecz i wszelka krzywa foremna liniia oznacza się równaniem.

(2) Wyrażenie *punkt* (x'', y'') oznacza toż samo co punkt którego dwie spółrzędne są x'' i y''.

że zaś trzeba iescze z tegoż równania wyrugować b, odciągniemy stronami równanie (1) od rów: (2), skąd wypadnie $y''-y=a(x''-x)$ czyli

$$y''-y=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x'-x):$$

takie iest równanie linii przechodzącey przez dwa punkta.

Rozbierzmy teraz wartość styczney kąta pod iakim liniia dana przecina oś OX, to iest, wartość

$$a=\frac{y''-y'}{x''-x'}$$

1° Wziąwszy w tey wartości $y''=y'$, wypadnie $a=0$. Pierwsze z tych ostatnych równań oznacza iż liniia dana iest równoodległą od osi OX, drugie iż się z nią nigdy nie przetnie.

2° Wziąwszy $x''=x'$ wypadnie $a=\frac{1}{0}$: pierwsze z tych równań oznacza iż liniia dana równoodległą iest od osi OY, drugie iż iest prostopadłą do osi OX.

3° Wziąwszy $y''=y'$, $x''=x'$, wypadnie $a=\frac{0}{0}$ co znaczy iż liniia przechodzi przez ieden tylko punkt i że mieć może niezliczone położenia względem osi OX.

Można iescze sposobem geometrycznym znaleźć równanie linii prostey przechodzącey przez ieden punkt lub dwa punkta (fig. 20).

1° Aby znaleźć równanie liniii AB przechodzącey przez punkt A którego spółrzędne są $OC=x'$, $AC=y'$, obierzmy na tey linii punkt M i oznaczmy iego spółrzędne OE, EM przez x, y, przez a styczną kąta BAG który AB czyni z osią OX. W tróykącie AFM mamy

$$AF:FM=1:a,\text{ czyli } x-x':y-y'=1:a,$$

skąd

$$y-y'=a(x-x')$$

równanie linii przechodzącey przez punkt dany.

2° Oznaczmy przez x'' y'' spółrzędne wiadome punktu innego B linii AB. W tróykącie AGB mamy proporcyią

AG : GB = 1 : a czyli $x'' - x' : y'' - y' = 1 : a$,

skąd
$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Wstawiwszy tę wartość w równanie poprzedzaiącego przypadku, wypadnie równanie linii przechodzącey przez dwa punkta

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$$

40. *Zadanie.* Znaleźć warunek równoodległości dwóch liniy.

Niech będzie równanie linii

iedney $\quad y = ax + b$

drugiey $\quad y = a'x + b'$

aby te dwie liniie były równoodległe, muszą czynić iedenże kąt z osią OX czyli musi być $a = a'$, przez co równanie równoodległey zamieni się na

$$y = ax + b'$$

41. *Zadanie.* Znaleźć kąt dwóch liniy których równania a w sczególności styczne trygonometryczne kątow, pod iakiemi się przecinaią z osią OX są dane (fig. 21).

Niech będą AB, AC dwie dane liniie przecinaiące się w punkcie A: niech y, x, oznaczaią spółrzędne tego punktu spólnego obudwom liniiom, a ich równania $\quad y = ax + b$, $y = a'x + b'$.

Nazwiymy α' kąt BAx który AB czyni z osią OX, α kąt CAx który AC czyni z tąż osią: kąt szukany BAC będzie $\alpha' - \alpha$. Jest zaś podług wiadomey formuły

$$stycz\,(\alpha' - \alpha) = \frac{stycz.\,\alpha' - stycz\,\alpha}{1 + stycz\,\alpha'\ stycz\,\alpha},$$

czyli nazwawszy V kąt $\alpha' - \alpha'$, i wstawiwszy a' za $stycz\ \alpha$, a za $stycz\ \alpha$,

$$styczV = \frac{a' - a}{1 + aa'}$$

1° Gdyby te dwie liniie były równoodległe, byłaby $styczV = 0$, a zatem $a' = a$ iest warunkiem równoodległości dwóch liniy.

2° Gdyby się przecinały pod kątem prostym, byłaby $styczV = \frac{1}{0}$, więc $1 + aa' = 0$ iest warunkiem aby dwie liniie były do siebie prostopadłe. Jeśli iedna z dwóch ilości a, a', na przykład pierwsza iest wiadomą, znaydziemy drugą

$$a' = -\frac{1}{a}$$

Odiemna wartość styczney a' oznacza iż gdy iedna z liniy przecinaiących się pod kątem prostym czyni z osią OX kąt ostry, druga czyni kąt roztwarty.

3° Znalazłszy styczną kąta V znaydziemy iego wstawę i dostawę. Jest bowiem

$$a)\ dwsV = \frac{1}{sieczV} = \frac{1}{\sqrt{(1 + stycz^2V)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{(a'-a)^2}{(1+aa')^2}\right)}}$$

$$= \frac{1 + aa'}{\sqrt{\left((1+aa')^2 + (a'-a)^2\right)}}$$

aże $(1+aa')^2 + (a'-a)^2 = 1 + a^2 + a'^2 + a^2a'^2$
$= (1+a^2)(1+a'^2)$

więc $$dwsV = \frac{1 + aa'}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}$$

$$b)\ wstV = dwsV.styczV = \frac{1 + aa'}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}} \times \frac{a'-a}{1+aa'}$$

$$= \frac{a' - a}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}$$

Można i geometrycznie znaleźć warunek aby dwie liniie przecinały się pod kątem prostym CAB. (fig. 22.)

Niech będzie $y=a'x+b'$ równanie linii AB,

$y=ax+b$ . . . . . AC

a' iest $=$ *stycz* ABX, $a=$ *stycz* ACB: aże *stycz* ABX $=-$ *stycz* ABC czyli $=-$ *dosty* ACB $=-\frac{1}{\textit{stycz}\,\text{ACB}}=$

$$=-\frac{1}{a}, \text{ więc } a'=-\frac{1}{a}.$$

42. *Zadanie.* Wyznaczyć punkt spólnego przecięcia dwóch liniy których dane są równania

$$y=ax+b,\quad y=a'x+b'$$

czyli w których ilości a, b, a', b' są wiadome.

Ponieważ punkt przecięcia ma się znaydować na każdey linii, więc spółrzędne x, y, tego punktu sprawdzą dwa ostatne równania, i znaydziemy spółrzędne punkta przecięcia

$$x=\frac{b'-b}{a-a'},\quad y=\frac{ab'-a'b}{a-a'}$$

43. *Zadanie.* Spuścić, od punktu danego na płasczyźnie, prostopadłą na linią prostą, i znaleźć wartość części prostopadłey zawartą między punktem danym i linią.

Niech będzie równanie linii daney CD (fig. 23.)

$$y=ax+b\quad (1)$$

niech będą x', y' spółrzędne punktu danego około tey linii: równanie prostopadłey, maiącey się przeciąć z daną w pewnym punkcie, będzie

$$y=a'x+b'$$

maiącey zaś przechodzić przez punkt dany, będzie

$$y'=a'x'+b'$$

Odciągnąwszy stronami to ostatne od poprzedzaiącego, wypadnie równanie prostopadłey

$$y-y'=a'(x-x')\quad (2)$$

które wyraża te dwie okoliczności, że prostopadła przechodzi przez punkt dany i że przecina liniią daną: aby zaś była prostopadłą do daney, którey równanie iest (1) musi być (41) $a' = -\frac{1}{a}$, więc nareszcie równanie szukane prostopadłey

iest $$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \quad (3)$$

Spółrzędne punktu przecięcia linii daney z prostopadłą, oznaczywszy przez x'', y'', równania (1) i (3) przeydą w tym razie na

$$y'' = ax'' + b, \quad y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x')$$

Aby z tych ostatnych równań wyprowadzić wartość dla x'', y'', daymy pierwszemu postać taką

$$y'' - y' = a(x'' - x') + ax' + b - y'$$

i rozwiążmy ie z drugiem względem $x'' - x'$ i $y'' - y'$, znaydziemy

$$x'' - x' = -\frac{a(ax' + b - y')}{1 + a^2}; \quad y'' - y' = \frac{ax' + b - y'}{1 + a^2}$$

Nazwawszy D część prostopadłey zawartą między punktem danym i iey przecięciem z liniią daną, będzie

$$D = \pm \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

czyli, wstawiwszy wartości za $x'' - x'$, $y'' - y'$,

$$D = \pm \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

Aby wiedzieć w-iakim razie weźmie się ieden z dwóch znakow wartości D, uważymy naprzód, iż

$$OP = x', \quad PM = y', \quad PN = ax' + b$$

ieżeli więc PM > PN, to iest $y' > ax' + b$; dany punkt M z którego mieliśmy spuścić prostopadłą na CD, będzie między liniią i osią OY, więc $ax' + b - y'$ iest w tym razie ilością odiemną, a tem samem trzeba wziąć znak — dla wartości D czyli MK, aby ta była bezwzględnie dodatną, w tym więc razie iest

$$MK = -\frac{ax' + b - y'}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

Jeśli przeciwnie punkt M′ z którego spuścić mamy prostopadłą na CD, iest dany między liniią i osią OX; będzie

$$PM' < PN \text{ czyli } y' < ax' + b$$

więc $ax' + b - y'$ iest ilością dodatną, a tem samem trzeba wziąć znak + dla wartości D czyli M′K′, i w tym razie

$$M'K' = +\frac{ax' + b - y'}{\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

44. Przystosuiemy formuły i rzecz § 43. do następuiącego przykładu.

Znaleźć wyrażenie summy prostopadłych spusczonych od punktu C wziętego wśród obwodu na trzy boki tróykąta OAB. (fig. 24.)

Aby to zagadnienie, ile można naydogodniey rozwiązać, daymy podstawie OB tróykąta, którą nazwiemy b, położenie na osi OX a iey koniec O weźmy za zaczęcie osi.

Niech będzie boku OA, przechodzącego przez zaczęcie, równanie

$$y = ax,$$

równanie zaś boku AB,

$$y = a'x + b'.$$

Aby znaleźć wartość ilości b', uważam iż liniia AB przechodzi przez punkt B którego spółrzędne są $x = b$, $y = o$, że zatem iey równanie zamieni się w tym razie na $o = a'b + b'$ skąd $b' = -a'b$: tę wartość b' wstawiwszy w równanie linii AB, wypadnie

$$y = a'(x - b)$$

1° Wartość części CF prostopadłey spusczoney z punktu C na bok OA którego równanie $y = ax$, będzie (podług 43), nazwawszy $x' y'$ spółrzędne punktu C;

$$CF = \pm \frac{ax' - y'}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

Aby wiedzieć który z dwóch znakow służy tey wartości, uważam że, gdy w równanie $y = ax$ linii OA wstawię x' za x, będę miał $y =$ DN $= ax'$, aże CD czyli $y' <$ DN czyli $y' < ax'$, więc $ax' - y'$ iest ilością dodatną, a przeto w powyższey wartości CF trzeba wziąć znak $+$, i

$$CF = + \frac{ax' - y'}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

2° Wartość części CE prostopadłey spusczoney od punktu C na bok AB którego równanie $y = a'(x - b)$ iest

$$CE = \pm \frac{a'(x' - b) - y'}{\sqrt{(1+a'^2)}}$$

Aby wiedzieć który z dwóch znakow służy tey wartości uważam że, gdy w równanie linii AB wstawię x' za x, wartość wypadaiąca dla y będzie $DN' = a'(x' - b)$: aże DC $<$ DN$'$ czyli $y' < a'(x' - b)$, więc licznik wartości CE iest dodatny, przeto

$$CE = + \frac{a'(x' - b) - y'}{\sqrt{(1+a'^2)}}$$

Postrzegłszy iż OB $>$ OD czyli $b > x'$, że zatem $x' - b$ iest ilością odiemną, możnaby wnieść iż licznik $a'(x' - b) - y'$ iest odiemny: lecz z drugiey strony postrzeżemy iż a' iako styczna kąta roztwartego iest odiemną; a więc iloczyn $a'(x' - b)$ iest dodatny.

3° Wartość nareszcie prostopadłey CD spusczoney od C na bok trzeci OB iest

$$CD = y'$$

Dodawszy trzy znalezione wartości prostopadłych, wypadnie

$$CD+CF+CE=y'+\frac{ax'-y'}{\sqrt{(1+a^2)}}+\frac{a'(x'-b)-y'}{\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Gdyby tróykąt był równoboczny mielibyśmy $a'=-a$, i w tym razie

$$CD+CF+CE=y'+\frac{ab-2y'}{\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Że ta wartość iest ilością stałą bez względu na położenie punktu C i równą wysokości tróykąta, dowiedziemy następuiącym sposobem.

Prostopadła AP spusczona od wierzchołka A na podstawę tróykąta dzieli tę podstawę na dwie równe części, odcięta punktu A iest więc $x=\frac{b}{2}$: wstawiwszy tę wartość x w równanie $y=ax$ linii OA, otrzymamy wartość wysokości $AP=\frac{ab}{2}$.

aże $\quad b^2=OA^2=OP^2+PA^2=\frac{b^2}{4}+\frac{a^2b^2}{4}$

skąd $\quad 1=\frac{1}{4}+\frac{a^2}{4}$ czyli $4=1+a^2$

nareszcie $a=\sqrt{3}$

więc $\quad AP=\frac{b\sqrt{3}}{2}$. $\quad$ (1)

Wstawiwszy znalezioną wartość a w ostatne wyrażenie summy prostopadłych, wypadnie

$$CD+CF+CE=\frac{b\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

a zatem według równań (1) i (2), iest

$$CD+CF+CE=AP$$

to iest: w tróykącie równobocznym spuściwszy, od punktu wewnątrz tróykąta od upodobania wziętego, prostopadłe na trzy boki tróykąta, summa tych prostopadłych iest ilością stałą i równą wysokości tróykąta.

45. *Zadanie.* Maiąc dane boki równoodległe (fig. 25.) AC, BD trapezu ABDC i stosunek odcinków AE, EB boku AB zrobionych przez liniią EF równoodległą od dwóch danych bokow, znaleźć wyrażenie analityczne linii EF.

Niech będzie $AC = b$, $BD = b'$, a stosunek odcinkow AE i $EB = m : m'$, nazwiymy x liniią szukaną EF, przez punkt E pociągniymy liniią GH równoodległą od DC do zeyścia się z przedłużoną AC w punkcie G i ułóżmy proporcyią

$AE : EB = AG : BH$ czyli $m : m' = x - b : b' - x$,

skąd $$x = \frac{m'b + mb'}{m + m'} \quad (A)$$

gdy $m = m'$, będzie $x = \dfrac{b + b'}{2}$

wypadek wiadomy z zasad Geometryi:

gdy $m = 2\,m'$, będzie $x = \dfrac{b + 2b'}{3}$.

Wystawmy sobie że liniia AB obraca się około punktu A i dąży do wzięcia położenia linii AG; czyli, co na iedno wychodzi, że kąt BAC staie się coraz roztwartszym. W tym razie punkta F i D zbliżać się będą do C, a gdy AB weźmie położenie linii AG, linie FE, DB wezmą położenie liniy CE, CB, (fig. 26.) i według formuły (A) mieć będziemy równanie

$$CE = \frac{m'.\,CA + m.\,CB}{m + m'} \quad (B)$$

czyli naznaczywszy $CE = x$, $CA = b$, $CB = b'$

$$x = \frac{m'b + mb'}{m + m'}$$

wypadek w którym stosunek $m : m'$ iest $=$ AE : EB

1° Według formuły (*A*) będzie można znaleźć spółrzędne punktu N (fig. 27.) w którym liniia MM' podzielona iest na dwa odcinki w stosunku danym $m : m'$ a którey końców rzędne są y' i y'', odcięte x', x''.

Tu bowiem rzędna NQ punktu N odpowiada linii EF na fig. 25, MP odpowiada AC, M'P' odpowiada BD, nareszcie MM' odpowiada AB więc

$$NQ = \frac{m'. MP + m.M'P'}{m + m}$$

czyli
$$y = \frac{m'y' + my''}{m + m}$$

2° Aby znaleźć odciętą OQ tegoż punktu N, użyiemy formuły (B). Tu mamy naprzód PQ: QP' $= m:m'$, więc podobnie iak na *fig.* 26, iest

$$OQ = \frac{m'. OP + m. OP'}{m + m'}$$

czyli
$$x = \frac{m'x' + mx''}{m + m'}$$

Gdy $m = m'$ to iest gdy punkt N iest w środku linii MM', spółrzędne środka tey linii będą

$$y = \frac{y' + y''}{2},\ x = \frac{x' + x''}{2}$$

to iest, rzędna środka linii równą iest połowie summy rzędnych, a odcięta tegoż punktu równa iest połowie summy odciętych, dwóch końcow teyże linii.

46. Za pomocą formuł § 45. dowiedziemy następuiące twierdzenia:

1° Trzy liniie, prowadzone od wierzchołkow tróykąta do środkow bokow przeciwnych, przecinaią się w-iednymże punkcie.

Niech będzie OMP tróykąt dany, (fig. 28) weźmy ieden z-iego wierzchołkow O za zaczęcie spółrzędnych, a oś OX na boku OP: oznaczywszy przez x'' odciętą punktu P, przez x', y' spółrzędne punktu M; spółrzędne środkow trzech bokow będą

punktu B . . $\frac{y'}{2}, \frac{x'}{2}$

. . . D . . o, $\frac{x''}{2}$

. . . C . . $\frac{y'}{2}, \frac{x'+x''}{2}$

równanie więc linii OC iest $y = \frac{y'}{x'+x''} \cdot x$ (39)

. . : : . . . BP . $y = \frac{y'}{x'-2x''}(x-x'')$

. . . . MD . $y = \frac{2y'}{2x'-x''}\left(x - \frac{x''}{2}\right)$

Aby znaleźć odciętą punktu przecięcia spólnego dwóch pierwszych liniy OC, BP wyruguiemy y z-ich dwóch równań, i znaydziemy

$$x = \frac{x'+x''}{3}, \text{ skąd } y = \frac{y'}{3}.$$

Znaydziemy też same wartości spółrzędnych punktu przecięcia spólnego liniy OC, MD, wyrugowawszy y z równania 1° i 3°, skąd wniesiemy że trzy liniie OC, BP, MD przecinaią się w-iednymże punkcie A którego spółrzędne są $x = \frac{x'+x''}{3}$, $y = \frac{y'}{3}$: aże odcięta punktu C iest $\frac{x'+x''}{2}$, więc odcięta punktu A iest $= \frac{1}{3}$ odciętey podwóyney punktu C, czyli $= \frac{2}{3}$ odciętey punktu C, więc punkt A znayduie się na $\frac{2}{3}$ linii OC poczynaiąc od punktu O, lub na $\frac{1}{3}$ teyże linii poczynaiąc od C.

2° Wyprowadziwszy ze środkow bokow tróykąta prostopadłe, te się przetną w-iednymże punkcie A. (fig. 29).

Dawszy położenie tróykątowi i oznaczywszy spółrzędne iego wierzchołkow iak w poprzedzaiącym razie, będziemy mieli równanie linii OM przechodzącey przez punkt O, którego spółrzędne są $y=o$, $x=o$, i przez punkt M którego spółrzędne są x', y',

$$\left.\begin{array}{ll} \text{OM,} & y = \dfrac{y'}{x'}\,x \\ \text{podobnie linii MP,} & y = \dfrac{y'}{x'-x''}(x-x'') \\ \text{. . . . . OP} & y = o \end{array}\right\}(A)$$

równanie więc linii AB przechodzącey przez punkt B którego spółrzędne podaliśmy w poprzedzaiącym przypadku i prostopadłey do OM, będzie (43)

$$\text{AB,}\quad y - \frac{y'}{2} = -\frac{x'}{y'}\left(x - \frac{x'}{2}\right)$$

$$\text{podobnie linii AC,}\quad y - \frac{y'}{2} = \frac{x''-x'}{y'}\left(x - \frac{x'+x''}{2}\right)$$

$$\text{AD,}\quad .\ .\ x = \frac{x''}{2}$$

Wstawiwszy tę wartość x w równania liniy AB, AC, otrzymamy rzędne punktow w których dwie liniie AB, AC przecinaią się z liniią AD, ażе w tym razie każde z dwóch powyższych równań daie iednęż wartość

$$y = \frac{y'}{2} - \frac{x'x''-x'^2}{2y'}$$

wniesiemy że liniie AB, AC przecinaią się z liniią AD w-iednymże punkcie którego spółrzędne są

$$\frac{y'}{2} - \frac{x'x''-x'^2}{2y'} \text{ i } \frac{x''}{2}$$

3° Spuściwszy od wierzchołkow na boki tróykąta, prostopadłe, te się przetną w-iednymże punkcie.

Równania bowiem tych prostopadłych spusczonych na liniie OM, MP, OP dane przez trzy powyższe równania (A) (fig. 28) są (43)

$$y = -\frac{x'}{y'}(x - x'')$$

$$y = \frac{x'' - x'}{y'} . x$$

$$x = x'$$

aże, wstawiwszy wartość x wziętą z ostatnego równania we dwa poprzedzaiące, otrzymamy też same wartości dla y; więc trzy prostopadłe spusczone od wierzchołkow tróykąta na boki przeciwne, przecinaią się w-iednymże punkcie którego spółrzędne są

$$x' \quad \text{i} \quad \frac{x'(x'' - x')}{y}$$

4° Trzy punkta, wyznaczone w trzech poprzedzaiących przypadkach, znayduią się na iedneyże linii prostey.

Poprowadziwszy bowiem liniią prostą przez punkt w pierwszym przypadku wyznaczony, którego spółrzędne są

$$\frac{y'}{3}, \quad \text{i} \quad \frac{x' + x''}{3}$$

i przez punkt w 2gim wyznaczony którego spółrzędne są

$$\frac{y'}{2} - \frac{x'x'' - x'^2}{2y'} \ \text{i} \ \frac{x''}{2},$$

styczna kąta który ta liniia uczyni z osią OX, będzie (39)

$$\frac{\frac{y'}{3}-\frac{y'}{2}+\frac{x'x''-x'^2}{2y'}}{\frac{x+x''}{3}-\frac{x'}{2}},\ \text{czyli}\ \frac{y'^2-3x'(x''-x')}{y'(x''-2x')}.$$

Gdy znowu poprowadzimy liniią przez punkta pierwszego i trzeciego przypadku, znaydziemy takież samo wyrażenie styczney kąta który ta liniia uczyni z osią OX: skąd wniesiemy że trzy punkta wyznaczone w trzech sczególnych przypadkach, znayduią się na iedneyże linii prostey.

47. *Zadanie.* Dane maiąc spółrzędne wierzchołkow tróykąta, znaleźć iego powierzchnią. (fig. 30). Weźmy wierzchołek tróykąta za zaczęcie osi spółrzędnych; i spuśćmy z tego punktu prostopadłą na podstawę CB tróykąta: powierzchnia szukana iest

$$\frac{\text{OD}\times\text{BC}}{2}$$

Aby znaleźć wartości analityczne liniy OD i BC, oznaczmy przez x', y' spółrzędne punktu B, przez x'' y'' spółrzędne punktu C: równanie linii BC przechodzącey przez te dwa punkta iest (39)

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$$

czyli, dodawszy y' po obudwóch stronach i przywiódłszy do naykrótszego wyrażenia,

$$y=\frac{y''-y'}{x''-x'}.x+\frac{y'x''-y''x'}{x''-x'}.$$

Porównawszy to równanie z równaniem ogólnem linii prostey $y=ax+b$, i uważywszy iż długość prostopadłey spusczoney na tę liniią od punktu zaczęcia którego spółrzędne są $x=o$, $y=o$, iest $=+\frac{b}{\sqrt{(1+a^2)}}$ (43); znaydziemy długość prostopadłey OD gdy wstawimy w to ostatne wyrażenie, $\frac{y'x''-y''x'}{x''-x'}$ za b, $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ za a, i wypadnie

$$OD = \frac{y'x''-y''x'}{\sqrt{\left((x''-x')^2+(y''-y')^2\right)}}$$

mamy daley

$$BC = \sqrt{\left((x''-x')^2+(y''-y')^2\right)}$$

więc powierzchnia tróykąta OBC iest

$$\frac{OD.\ BC}{2} = \frac{y'x''-y''x'}{2}.$$

Gdybyśmy byli dali położenie tróykątowi takie, aby punkt C znaydował się na osi OX, byłoby $y''=o$ a powierzchnia tróykąta wypadłaby $\frac{y'x''}{2}$.

DODATEK DO ROZDZIAŁU POPRZEDZAIĄCEGO

O przemianie układu osi spółrzędnych, dwóch wymiarów.

48. Rozwiązaliśmy zadania rozdziału poprzedzaiącego odnosząc punkta i liniią prostą do układu prostokątnego spółrzędnych, iako naydogodnieyszego. Lecz w dalszey analizie, iakoto w teoryi liniy i powierzchni krzywych, zachodzi nieiedno zadanie którego rozwiązanie wymaga innego niż prostokątny układu i innego, niż było z razu, zaczęcia osi. W takim razie trzeba mieć *wartości spółrzędnych pierwiastkowych w funkcyi spółrzędnych branych w nowym układzie.* Zatrudnimy się rozwiązaniem tego zadania.

49. Z układu YOX (fig. 31) przeydziemy do innego, którego osi są równoodległe od pierwiastkowych OX, OY a tylko inne maią zaczęcie, następuiącym sposobem.

O, iest zaczęciem pierwiastkowego układu w którym brane spółrzędne oznaczymy przez x', y'; O', O'', O''', O'''', są zaczęcia nowych układow: z tych w którymkolwiek brane spółrzędne oznaczymy przez x', y'. Naznaczmy odległości nowych zaczęć od pierwiastkowego, $OB=a$, $Ob=-a$, $OC=b$ $Oc=-b$. Obierzmy punkt M i znaydźmy iego spółrzędne OP, PM w funkcyi spółrzędnych innego układu.

1° W układzie którego zaczęcie O', iest

$$OP=OB+BP \text{ czyli } x=a+x'$$
$$PM=Pp+pM \;.\;.\; y=b+y'$$

2° W układzie którego zaczęcie O'', iest

$$OP=-O''c+O''p' \quad x=-a+x'$$
$$PM=-p'P+p'M \;.\; y=-b+y'$$

3° W układzie którego zaczęcie O''', iest

$$OP=-O'''C+O'''p \;.\; x=-a+x',$$
$$PM=\;Pp+pM \;.\; y=\;b+y'$$

4° W układzie którego zaczęcie O'''', iest

$$OP=\;O''''c+O''''p' \;.\; x=a+x'$$
$$PM=-p'P+p'M \;.\; y=-b+y'$$

Formuły te oznaczaią że, aby przeyść z iednego układu spółrzędnych do innego równoodległego, trzeba powiększyć lub zmnieyszyć nowe spółrzędne ilościami względnemi a, b wyrażaiącemi spółrzędne iednego z nowych zaczęć odnoszone do pierwiastkowego, a wypadki będą wartościami dawnych spółrzędnych w funkcyi nowych. Widzimy nadto, iż ilości a, b, są dodatne, odiemne lub mieszane według tego czy nowe zaczęcie wzięte iest w kącie osi pierwiastkowych dodatnych, odiemnych lub mieszanych.

50. Przeydziemy z układu YOX do innego Y'OX',

maiącego spólne z pierwszem zaczęcie O lecz inny kierunek osi, następuiącym sposobem. (fig. 32).

Naznaczmy spółrzędne punktu M wzięte w pierwszym układzie, $OP=x$, $PM=y$, spółrzędne tegoż punktu wzięte w nowym, $OP'=x'$ $P'M=y'$. Poprowadziwszy przez punkt P' linie P'Q, P'N równoodległe względnie od osi OX, OY, będzie

1° PM czyli $y=MQ+NP'$, OP czyli $x=P'Q+ON$. Naznaczmy kąt $YOX=\beta$, $X'OX=\alpha$, $Y'OX=\alpha'$. W tróykącie MP'Q, na znalezienie MQ, ułożymy proporcyią

$$MP':MQ=wst MQP': wst MP'Q, \text{ czyli}$$
$$y':MQ=wst\beta: wst\alpha'$$

skąd $$MQ=\frac{y'.wst\,\alpha'}{wst\beta}.$$

Znaydziemy tymże sposobem w tróykącie OP'N

$$NP'=\frac{x'.wst\alpha}{wst\beta}.$$

Wtróykącie MP'Q ułożymy proporcyią

$$MP': P'Q=wst MQP': wst M\ (=wst YOY')$$

czyli $$y': P'Q=wst\beta : wst(\beta-\alpha')$$

skąd $$P'Q=\frac{y'.wst(\beta-\alpha')}{wst\beta}$$

Znaydziemy tymże sposobem w tróykącie OP'N

$$ON=\frac{x'.wst(\beta-\alpha)}{wst\beta}$$

wartości więc dla y, x są

$$y=\frac{y'.wst\alpha'+x'.wst\alpha}{wst\beta}, \qquad (A)$$
$$x=\frac{y'.wst(\beta-\alpha')+x'.wst(\beta-\alpha)}{wst\beta}$$

a to gdy osi każdego ze dwóch układow spólne maią zaczęcie, i przecinaią się pod kątem nieprostym, iak YOX, Y'OX' (fig. 32).

2° Gdy kąt $\beta=100^\circ$, to iest gdy układ pierwiastkowy osi iest prostokątny, nowy zaś iest nieprostokątny, będzie

$wst\beta=1, wst(\beta-\alpha')=wst YOY'=wst(100^\circ-\alpha')=dws\alpha'$
$wst(\beta-\alpha)=wst\ YOX'=wst(100-\alpha)=dws\alpha$

i formuły (A) zamienią się na

$$y=y'.wst\alpha'+x'.wst\alpha,\ x=y'.dws\alpha'+x'.dws\alpha.$$

takie są wartości spółrzędnych dawnych prostokątnych w funkcyi spółrzędnych nowych nieprostokątnych, gdy obadwa układy spólne maią zaczęcie.

3° Gdy kąt Y'OX' iest prostym, kąt β iakimkolwiek byle nieprostym, będzie $\alpha'-\alpha=100^\circ$, $\alpha'=100+\alpha$ więc $wst\alpha'=wst(100^\circ+\alpha)=dws\alpha$

$$wst(\beta-\alpha')=wst(\beta-100^\circ-\alpha)$$
$$=wst-\{100^\circ-(\beta-\alpha)\}=-dws(\beta-\alpha)$$

i formuły (A) zamienią się na

$$y=\frac{y'.dws\alpha+x'.wst\alpha}{wst\beta},$$
$$x=\frac{-y'.dws(\beta-\alpha)+x'.wst(\beta-\alpha)}{wst\beta}.$$

takie są wartości spółrzędnych dawnych nieprostokątnych w funkcyi spółrzędnych nowych prostokątnych, gdy obadwa układy maią spólne zaczęcie.

4° Gdy kąt YOX=Y'OX' czyli $\beta=\alpha'-\alpha$ skąd $\beta-\alpha'=-\alpha$ będzie

$$y=\frac{y'.wst\alpha'+x'.wst\alpha}{wst\beta},$$
$$x=\frac{-y'.wst(\beta-\alpha')+x'wst(\beta-\alpha)}{wst\beta}$$

takie są wartości spółrzędnych dawnych nieprostokątnych w funkcyi spółrzędnych nowych nieprostokątnych, gdy kąt pierwszych równy iest kątowi drugich, a zaczęcie obudwom spólne.

5° Gdy nareszcie każdy z kątów XOY, X'OY' iest prosty, będzie

$\beta=100^\circ$, $\alpha'-\alpha=100^\circ$, skąd $\alpha'=100^\circ+\alpha$, a zatem
$wst\beta=1$, $wst\alpha'=wst'100^\circ+\alpha=dwsa$
$wst(\beta-\alpha')=wst(100^\circ-100^\circ-\alpha)=-wst\alpha$
$wst(\beta-\alpha)=wst(100^\circ-\alpha)=dwsa$
i formuły (A) zamienią się na

$$y=y'.dwsa+x'.wst\alpha,\ x=-y'.wst\alpha+x'.dwsa:$$

takie są wartości spółrzędnych dawnych prostokątnych w funkcyi spółrzędnych nowych także prostokątnych, gdy obadwa układy maią spólne zaczęcie.

51. Przeydziemy z układu yOx do innego (fig 32) $Y'OX'$ gdy obadwa maią różne zaczęcia i różne kierunki osi, dodawszy z-dości a, b, z których pierwsza $=Od$, druga$=Od$, pierwszą do wartości x drugą do wartości y w *każdym z pięciu przypadków* § 50, i otrzymamy następuiące formuły

$$1^\circ\ y=b+\frac{y'.wst\alpha'+x'wst\alpha}{wst\beta},$$

$$x=a+\frac{y'.wst(\beta-\alpha')+x'.wst(\beta-\alpha)}{wst\beta}$$

$$2^\circ\ y=b+y'.wst\alpha'+x'.wst\alpha,$$
$$x=a+y'.dwsa'+x'.dwsa$$

$$3^\circ\ y=b+\frac{y'.dwsa+x'.wst\alpha}{wst\beta},$$

$$x=a+\frac{-y'.dws(\beta-\alpha)+x'.wst(\beta-\alpha)}{wst\beta}$$

$$4^\circ\ y=b+\frac{y'.wst\alpha'+x'.wst\alpha}{wst\beta},$$

$$x=a+\frac{-y'.wst(\beta-\alpha')+x'.wst(\beta-\alpha)}{wst\beta}$$

$$5^\circ\ y=b+y'.dwsa+x'.wst\alpha,$$
$$x=a-y'.wst\alpha+x'.dwsa.$$

52. Zastanowiwszy się nad postacią dwóch ogólnych formuł (A) to iest

$$y = \frac{y'.wst\alpha' + x'.wst\alpha}{wst\beta},$$

$$x = \frac{y'.wst(\beta - \alpha') + x'.wst(\beta - \alpha)}{wst\beta}$$

wyczytamy w nich następuiące prawidło na przemianę spółrzędnych:

1° licznik wartości y składa się z rzędney y' rozmnożoney przez wstawę kąta który czyni z osią OX, *więcey* odciętą x' rozmnożoną przez wstawę kąta który czyni z tąż osią; mianownikiem zaś tey wartości iest wstawa kąta który czynią dawne spółrzędne.

2° licznik wartości x składa się z rzędney y', rozmnożoney przez wstawę kąta który czyni z osią OY, *więcey* odciętą x' rozmnożoną przez wstawę kąta który czyni z tąż osią OY, mianownikiem zaś iest wstawa kąta który czynią dawne spółrzędne.

Prawidło to będzie ogólnem gdy raz na zawsze będziemy uważali za dodatne, kąty takie iak xOX, (fig. 33) położone z-iedney strony osi OX, a za odiemne kąty takie iak XOX położone z drugiey strony osi OX; tudzież za dodatne, kąty takie iak YOY położone z-iedney strony osi OY a za odiemne, kąty takie iak yOY, położone z drugiey strony osi OY.

Weźmy, na *pierwszy przykład*, osi OX, OY (fig. 33) za pierwiastkowe, a OX', OY' za nowe; α będzie odiemne i znaydziemy

$$y = \frac{y'.wst\alpha' - x'.wst\alpha}{wst\beta},$$

$$x = \frac{y'.wst(\beta - \alpha') + x'.wst(\beta + \alpha)}{wst\beta}$$

Weźmy, na *drugi przykład*, osi OX, OY (fig. 34) za pierwiastkowe, OX', OY' za nowe. będzie XOX' $= -\alpha$, YOX' $= \alpha'$ YOX $= \beta$, YOY' $= -(\beta - \alpha')$, i wypadnie według ogólnego prawidła i zasady tyczącey się znakow

$$y = \frac{y'.wst(6 - \alpha) - x'.wst\alpha}{wst(\alpha' - \alpha)},$$

$$x = \frac{-y'.wst(6 - \alpha') + x'.wst\alpha'}{wst(\alpha' - \alpha)}.$$

Weźmy, na *trzeci przykład*, osi OX, OY (fig. 35) za pierwiastkowe, OX', OY' za nowe; będzie X'OX $= -\alpha'$, X'OY $= \alpha$ X'OY' $= \alpha''$ i wypadnie

$$y = \frac{y'.wst(\alpha' + \alpha'') - x'.wst\alpha'}{wst(\alpha - \alpha')},$$

$$x = \frac{y'.wst\,(\alpha + \alpha'') + x'.wst\alpha}{wst(\alpha - \alpha')}.$$

Weźmy, na *czwarty przykład*. osi OX, OY (fig. 36) za pierwiastkowe, OX', OY' za nowe, naznaczmy XOY $= 6$, X'OY' $= 6'$ YOY $= \alpha$: wypadnie

$$y = \frac{y'.wst(\alpha + 6) + x'.wst\,(400^{\circ} - 6 - \alpha - 6')}{wst6}$$

$$= \frac{y'.wst(\alpha + 6) - x'.wst(6 + \alpha + 6')}{wst6}$$

$$x = \frac{y'.wst\alpha + x'.wst\,(\alpha + 6')}{wst6}$$

Owo zgoła, trzymaiąc się powszechnego prawidła, potrafimy w każdym razie wyrazić spółrzędne pierwiastkowe w funkcyi spółrzędnych nowych. Prawidło to, i warunek zwiększania lub zmnieyszania ilością stałą wartości dla x, y gdy zaczęcia dwóch układow są różne, stanie za to wszystko cośmy dotąd o przemianie spółrzędnych powiedzieli.

53. Według tego prawidła rozwiążemy zadanie: *znaleźć wartości spółrzędnych nowego w funkcyi spółrzędnych dawnego układu*, które, iak widzimy, odwrotne iest względem zadania § 48.

Gdyby z formuł (A) (50) trzeba było wyciągnąć wartości dla x', y' w funkcyi x, y; musielibyśmy rozwiązać te dwa równania względem niewiadomych y', x': lecz też same wartości daleko snadniey znaydziemy za pomocą ogólnego prawidła. W tym razie, uważaiąc osi OX', OY', (fig. 32) za dawne, OX, OY za nowe, znaydziemy

$$1^{\circ}\quad y' = \frac{y.wst\,(\beta-\alpha) - x\,wst\,\alpha}{wst(\alpha'-\alpha)};\qquad (A')$$

$$x' = \frac{-y.wst(\beta-\alpha') + x.wst\alpha'}{wst(\alpha'-\alpha)}$$

2° Wziąwszy $\beta = 100°$, będzie $wst(\beta-\alpha) = dwsa$ $wst(\beta-\alpha') = dws\alpha'$ i dwie formuły (A') zamienią się na

$$y' = \frac{y.dws\,\alpha - x.wst\alpha}{wst(\alpha'-\alpha)},\ x' = \frac{-y.dwst.\alpha' + x.wst\alpha'}{wst(\alpha'-\alpha)}$$

3° Wziąwszy Y'OX' czyli $\alpha'-\alpha = 100°$, skąd $\alpha' = 100° + \alpha$, będzie

$wst(\alpha'-\alpha) = 1$; $wst(\beta-\alpha') = wst(\beta - 100 - \alpha)$ $= - wst(100° - (\beta-\alpha)) = - dws(\beta-\alpha)$: $wst\alpha'$ $= wst(100+\alpha) = dws\alpha$; i formuły (A') zamienią się na

$$y' = y.wst(\beta-\alpha) - x.wst\alpha,$$
$$x' = y.dws(\beta-\alpha) + x.dws\alpha$$

4° Gdy kąty dwóch układow są równe, nie będąc prostemi, wypadnie

$$y' = \frac{y.wst(\beta-\alpha) - x.wst\alpha}{wst\beta},\ x' = \frac{y.wst\alpha + x.wst\alpha'}{wst\beta}$$

5° Gdy obadwa układy są prostokątne, to iest gdy $\beta = 100°$, $\alpha'-\alpha = 100°$, wypadnie

$$y' = y.dws\alpha - x.wst\alpha,\ x' = y.wst\alpha + x.dws\alpha$$

54. Gdy nakoniec dwa układy maią różne zaczęcia i różne kierunki osi; z których Y'OX' uważać będziemy za dany, yOx za nowy, trzeba w poprzedzaiące formuły wstawić $y+b$ za y; $x+a$ za x. I tak formuły (A') przeydą na

$$y' = \frac{(y+b)wst(\beta-\alpha)-(x+a)wst\alpha}{wst(\alpha-\alpha)},$$

$$x' = \frac{-(y+b)wst(\beta-\alpha')+(x+a)wst\alpha'}{wst(\alpha-\alpha)}$$

formuły 5° na

$$y' = (y+b)dws\alpha-(x+a)wst\alpha,$$

$$x' = (y+b)wst\alpha+(x+a)dws\alpha$$

znaki ilości a, b mogą się zmieniać stosownie do położenia zaczęcia osi iak na fig 31.

ROZDZIAŁ DRUGI

O linii prostey uważaney w przestrzeni.

55. Widzieliśmy (24) iż spółrzędne punktu wziętego w przestrzeni, na przykład punktu M, (fig. 14) są trzy prostopadłe MP, MQ, spuszczone na trzy płaszczyzny względne XY, ZY, XZ przecinaiące się pod kątem prostym: gdy więc trzy spółrzędne MP, MQ, MR, czyli z, y, x maią wartości stałe; to iest, gdy

$$z=c, \quad y=b, \quad x=a$$

będzie można za pomocą tych trzech spółrzędnych danych, czyli za pomocą trzech równań, wyznaczyć położenie punktu w przestrzeni.

Poprowadziwszy przez prostopadłę MP (fig. 14) płaszczyznę nieograniczoną MRaP równoodległą od płaszczyzny ZY; każdy punkt tey płaszczyzny będzie równooddalony od płaszczyzny ZY, czyli, odcięte wszystkich takich punktow według osi OX będą równe, czyli każdego punktu odcięta

$$x = a$$

to równanie, samo w sobie wzięte, iest równaniem płaszczyzny MRaP.

Podobnie

$$y = b$$

iest równaniem płaszczyzny równoodległey od XZ;

$$z = c$$

iest równaniem płaszczyzny równoodległey od XY: trzy zatem razem wzięte ostatne równania należą do trzech razem płaszczyzn, a przeto do punktu wszystkim trzem płaszczyznom spólnego, i przeto są równaniami punktu położonego w przestrzeni.

Gdy punkt M przeydzie w zaczęcie osi, trzy iego spółrzędne MP, MQ, MR staną się zerem, w tym więc razie mamy równania

$$z = 0,\ y = 0,\ x = 0,$$

z których pierwsze iest równaniem płaszczyzny YX drugie pł. XZ, trzecie pł. XY, a zatem wszystkie trzy razem są równaniami punktu spólnego tym trzem płaszczyznom to iest zaczęcia osi.

56. Weźmy na linii MM′, położoney w przestrzeni (fig. 15) i odnoszoney do trzech płaszczyzn spółrzędnych prostokątnych, nieograniczoną liczbę punktow i od każdego spuśćmy prostopadłą na płaszczyznę XY: wszystkie te prostopadłe będą się znaydowały na iedneyże płaszczyznie prostopadłey do YX, ponieważ po dwie brane którekolwiek są prostopadłe do płaszczyzny YX, a więc iak wiemy z zasad Stereometryi są równoodległe i tem samem znayduią się na płaszczyznie. Stąd wypada że liniia mm', według którey rzuty wszelkich punktow linii MM′ padły na płaszczyznę XY, iest prostą (§ 28).

57. Oznaczywszy przez Z kąt OMm (fig. 37) który czyni liniia OM$=$D z rzędną M$m = z$ czyli z osią OZ, będzie w tróykącie OmM prostokątnym przy m,

$$m\text{M} = \text{OM} \times dws\,\text{OM}m, \text{ czyli } z = \text{D}.dws\text{Z}$$

Oznaczywszy przez X kąt który liniia OM czyni z rzędną OP$= x$ czyli z osią OX; przez Y kąt który też liniia czyni z rzędną mP$= y$ czyli z osią OY, będzie

$$y = \text{D}.dws\text{Y},\quad x = \text{D}.dws\text{X}$$

wstawiwszy te wartości x, y, z w wartość (§ 27) $D = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ wypadnie

$$D^2 = D^2 (dws^2 Z + dws^2 Y + dws^2 X)$$

skąd wniesiemy iż

$$dws^2 Z + dws^2 Y + dws^2 X = 1$$

to iest: summa kwadratow z dostaw kątow, które liniia OM w przestrzeni położona i przechodząca przez zaczęcie czyni z trzema osiami, równa iest iedności.

58. Znaydziemy równanie linii AM, (fig. 38) położoney w przestrzeni, następuiącym sposobem.

Liniią AM uważać możemy za przecięcie dwóch płaszczyzn: *iedney* AMM′ prostopadłey do płaszczyzny XZ tak, iż poprowadziwszy liniią MM′ równoodległą od Ax, płaszczyzna AMM′ będzie zrzucaiącą a liniia xM′ rzutem linii daney na płaszczyznę ZX; *drugiey* AMM″ prostopadłey do płaszczyzny ZY, tak iż, poprowadziwszy liniią MM″ równoodległą od Ay, płaszczyzna AMM″ będzie zrzucaiącą a liniia yM″ rzutem daney na płaszczyznę YZ. Równania dwóch płaszczyzn zrzucaiących, czyli, co iest toż samo, rzutow xM′ yM″, będą równaniami daney linii AM odnoszoney do płaszczyzn spółrzędnych: aże równanie linii xM′ położoney na płaszczyznie ZX iest, uważaiąc OX za oś rzędnych, OZ za oś odciętych,

$$x = az + \alpha$$

równanie zaś linii yM″ położoney na płaszczyznie ZY iest, uważaiąc OY za oś rzędnych, OZ za oś odciętych,

$$y = bz + \beta$$

a w tych $\alpha = Ox$, $a = stycz{:}z'x$M′, $\beta = Oy$, $b = stycz$ $z''y$M″ więc dwa równania razem wzięte

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \ \text{(A)}$$

są równaniami linii AM połozoney w przestrzeni.

Gdyby liniia AM była równoodległą od OZ, iey rzuty xM′, yM″ byłyby także równoodległe od OZ (według § 27 fig 14) a kąty $z'xM'$, $z''yM''$ i ich styczne a, b, znikłyby: wziąwszy więc $a=o$, $b=o$ w rów. (A), równania linii prostopadłey do płaszczyzny XY czyli równoodległey od osi OZ będą

$$x=\alpha,\ y=\beta.$$

Gdyby liniia AM przechodziła przez zaczęcie osi, nie wziąwszy położenia osi OZ; odległości $Ox=\alpha$, $Oy=\beta$ zniklyby: wziąwszy więc $\alpha=o$, $\beta=o$ w rów: (A) równania linii daney w przestrzeni i przechodzącey przez zaczęcie spółrzędnych będą

$$x=az,\ y=bz.$$

Wyciągnąwszy dla z z równań (A) wartości

$$z=\frac{x-\alpha}{a},\ z=\frac{y-\beta}{b},$$

każda z nich oznaczać będzie tęż samą rzędną z pewnego punktu: zrównawszy ie więc wypadnie

$$y=\frac{b}{a}x+\left(\beta-\frac{\alpha b}{a}\right)$$

równanie, ze spółrzędnemi y, x, linii daney a radziey iey rzutu na płaszczyznę XY. Z trzech równań,

$$x=az+\alpha,\ y=bz+\beta,\ y=\frac{b}{a}x+\left(\beta-\frac{\alpha b}{a}\right)$$

dwa którekolwiek są dostateczne do wyznaczenia położenia linii w przestrzeni, a każde iest wypadkowem dwóch innych.

59. Gdy ilości a, b, α, β wchodzące w równania linii prostey

$$x=az+\alpha,\ y=bz+\alpha$$

są wiadome, iedna tylko z ilości x, y, z, na przykład z będzie niewyznaczona: biorąc więc różne wartości dla z, wyznaczymy w każdym razie dwie inne spółrzędne a tem samem nieograniczoną liczbę punktow linii daney w przestrzeni. Okoliczność tę można wyłożyć geometrycznie przez następuiące wykreślenie. (fig. 39.)

Za pomocą dwóch danych równań wykréślimy dwa rzuty AM, A'M' na płasczyzny XZ, YZ. Ponieważ z iest niewiadomą, wiedzieć nie można iak daleko linije AM, A'M' iedna od A ku M druga od A' ku M' rozciągać się będą· weźmy więc dowolnie $z =$ OR i wykonaymy wykreślenie na trzech płasczyznach spółrzędnych tak iak ie figura wystawia: punkta M, M', M'' będą oznaczały trzy rzuty punktu linii daney na owe płasczyzny, czyli M'Q, M''P będą szukanemi spółrzędnemi x, i y.

60. Powiedzieliśmy (58) iż liniią AM (fig. 38) uważać można za przecięcie dwóch płasczyzn AMM', AMM'', iedney prostopadłey do ZX, drugiey do ZY. Wystawmy teraz sobie w mieyscu płasczyzn AMM', AMM'' dwie powierzchnie krzywe, na przykład dwie powierzchnie walcowe: w tym razie, w mieysce linii prostey xM' weydzie pewna liniia krzywa, iako ślad powierzchni walcowey na płasczyźnie XZ; podobnie w mieysce linii prostey yM'' weydzie pewna liniia krzywa, iako ślad powierzchni walcowey na płasczyźnie YZ. Niechby nad to dane były równania dwóch śladow powierzchni krzywych na płasczyznach XZ, YZ: te dwa równania byłyby równaniami linii krzywey, według którey przetną się dwie powierzchnie. Tu więc, tak iak w poprzedzaiącym § naznaczywszy wartość iakąkolwiek dla rzędney z, znaydziemy wartości rzędnych x, y punktu położonego na linii krzywey, wyznaczywszy zaś tym sposobem iak naywięcey punktow, wyznaczymy tem samem położenie linii krzywey. Liniia takowa nazywa się *liniią podwóyney krzywości* (courbe à double courbure) dla tego że dwie powierzchnie krzywe składaią się na iey utworzenie i że ta przeto łączy w sobie dwie różne krzywości.

61. Gdy ilości a, b, α, β wchodzące w równania linii prostey, lub warunki na ich wyznaczenie są dane, można wyznaczyć położenie linii w przestrzeni: Stosownie do tych okoliczności i używaiąc układu osi prostokątnego zatrudnimy się następuiącemi zadaniami.

62. *Zadanie.* Znaleźć równania linii prostey przechodzącey przez dwa punkta w przestrzeni których spółrzędne są dane.

Niech będą x', y', z'; x'', y'', z'' spółrzedne dwóch punktow, i równania ogólne linii

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta \quad (1)$$

Ponieważ ta liniia ma przechodzić przez dwa naznaczone punkta; równania (1) sprawdzą się gdy w nie za x, y, z, wstawimy spółrzędne dane dwóch punktow, to iest, będzie

$$\left.\begin{array}{l} x' = az' + \alpha \\ y' = bz' + \beta \end{array}\right\} \text{dla } 1^{go} \quad \left.\begin{array}{l} x'' = az'' + \alpha \\ y'' = bz'' + \beta \end{array}\right\} \text{dla } 2^{go} \text{ punktu:}$$

te cztery równania są dostateczne do wyznaczenia czterych niewiadomych ilości a, b, α, β. Odciągnąwszy naprzód stronami pierwsze od trzeciego, drugie od czwartego równania, znaydziemy wartości

$$a = \frac{x'' - x'}{z'' - z'},\quad b = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}$$

i te wstawimy w rów: (1). Aby daley pozbyć się ilości niewiadomych α, β, odciągniemy stronami rów: (1) od równań odpowiadaiących pierwszemu punktowi, a w otrzymane

$$x' - x = a(z' - z),\quad y' - y = b(z' - z)$$

wstawiwszy wartości a, i b; wypadną

$$x' - x = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z' - z)$$

$$y' - y = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z' - z)$$

równania linii prostey daney w przestrzeni i przechodzącey przez dwa punkta których spółrzędne są x'', y'' iednego, i x', y' drugiego.

63. *Zadanie.* Znaleźć warunki równoodległości dwóch liniy danych w przestrzeni przez równania

$$\left.\begin{array}{l}x=az+\alpha\\ y=bz+\beta\end{array}\right\}1^{ey}\quad \left.\begin{array}{l}x=a'z+\alpha'\\ y=b'z+\beta'\end{array}\right\}2^{ey}\text{ linii}$$

ponieważ te równania należą rzeczywiście do rzutow liniy (58), więc rzuty tak iak dane linie, będą równoodległe od siebie, a zatem warunki równoodległości są (40)

$$a=a',\ b=b'$$

przez które zamienią się równania drugiey linii na

$$x=az+\alpha',\ y=bz+\beta'$$

w tych, α' β' zostaią niewyznaczonemi ilościami, ponieważ nieograniczona iest liczba liniy równoodległych od dwóch pierwszych.

64. *Zadanie.* Znaleźć kąt dwóch liniy prostych danych w przestrzeni przez równania

$$\left.\begin{array}{l}x=az+\alpha\\ y=bz+\beta\end{array}\right\}1^{ey},\quad \left.\begin{array}{l}x=a'z+\alpha'\\ y=b'z+\beta'\end{array}\right\}2^{iey}$$

w których ilości a, b, a' b' są wiadome.

Dwie dane liniie mogą się przecinać w przestrzeni, lub, nie przecinaiąc się, być do siebie pod pewnym kątem pochylone: w każdym razie wyrysuiemy kąt ich pochyłości poprowadziwszy, przez zaczęcie O, liniie OM, OM' (fig. 40.) od danych równoodległe: kąt V dwoch liniy OM, OM' będzie szukanym. Obierzmy na tych liniiach punkta M, M' i oznaczmy przez r, r' ich odległości od zaczęcia O, a przez D odległość MM' samych punktow. W tróykącie MOM' mamy według wiadomego z Geometryi twierdzenia

$$\cos V=\frac{r^2+r'^2-D^2}{2rr'}$$

W to wyrażenie trzeba za r, r', D wstawić ich wartości w funkcyi wiadomych ilości a, b, a' b'. Mamy zaś, nazwawszy x, y, z spółrzędne punktu M; x', y', z' spółrzędne punktu M',

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$D^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

czyli $D^2 = r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz')$

więc $dws\,V = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}$

czyli, na mocy równań,

$$\left.\begin{matrix} x = az \\ y = bz \end{matrix}\right\} \text{linii OM}, \quad \left.\begin{matrix} x' = a'z' \\ y' = b'z' \end{matrix}\right\} \text{linii OM'}$$

$$dws\,V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}\sqrt{(1 + a'^2 + b'^2)}}$$

Znalazłszy dostawę kąta V w funkcyi wiadomych ilości znaydziemy i styczną tego kąta, iest bowiem

$$stycz\,V = \frac{\sqrt{(1 - dws^2 V)}}{dws\,V}$$

czyli

$$st\,V = \frac{\sqrt{\{(1^2 + a^2 + b^2)(1^2 + a'^2 + b'^2) - (1 + aa' + bb')^2\}}}{1 + aa' + bb'}$$

czyli, wykonawszy skazane mnożenie i zważaiąc że

$a^2 - 2aa' + a'^2 = (a - a')^2$, $b^2 - 2bb' + b'^2 = (b - b')^2$

$a^2 b'^2 - 2aa'bb' + a'^2 b^2 = (ab' - a'b)^2$

$$stycz\,V = \frac{\sqrt{\{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2\}}}{1 + aa' + bb'}$$

1° Wziąwszy kąt V za prosty będzie $stycz\,V = \frac{1}{0}$ a zatem

$$1 + aa' + bb' = 0$$

iest równaniem warunkowem aby dwie liniie w przestrzeni przecinały się pod kątem prostym.

2° Wziąwszy kąt $V = 0$, w którym to razie dwie liniie są równoodległe, wypadnie

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2 = 0.$$

lecz, aby summa trzech kwadratow była równą 0, każdy kwadrat w szczególności musi być = 0, będą tedy równania warunkowe równoodległości dwóch liniy w przestrzeni

$$a=a',\quad b=b',\quad ab'=a'b:$$

z tych trzecie, iako wynikaiące z dwóch pierwszych, nie stanowi osobnego warunku.

3° Gdyby dwie linie OM, OM′ znaydowały się na płasczyznie XZ byłoby $b=o$, $b'=o$, a styczna kąta tych liniy byłaby, iak (41),

$$stycz\,V=\frac{a-a'}{1+aa'}.$$

4° Nazwiymy X, Y, Z, kąty które liniia OM czyni z trzema względnie osiami OX, OY, OZ, a X′, Y′, Z′, kąty które liniia OM′ czyni z temiż osiami: i szukaymy wartości dostaw tych kątow w funkcyi ilości a, b a', b' wiadomych i wchodzących w równania liniy.

Według tego cośmy widzieli w § 57 a co i na fig. 40. wystawić sobie można, mamy

$$\left.\begin{array}{l} dws\mathrm{X}=\dfrac{x}{r},\quad dws\mathrm{Y}=\dfrac{y}{r},\ dws\mathrm{Z}=\dfrac{z}{r} \\ dws\mathrm{X}'=\dfrac{x'}{r'},\quad dws\mathrm{Y}'=\dfrac{y'}{r'},\ dws\mathrm{Z}'=\dfrac{z'}{r'} \end{array}\right\}(\mathrm{A})$$

czyli, wstawiwszy za x, y, x' y' wartości wzięte z równań liniy OM, OM′,

$$dws\mathrm{X}=\frac{a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},\quad dws\mathrm{Y}=\frac{b}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},$$

$$dws\mathrm{Z}=\frac{1}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$$

$$dws\mathrm{X}'=\frac{a'}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}},\ dws\mathrm{Y}'=\frac{b'}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}},$$

$$dws\mathrm{Z}'=\frac{1}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}$$

5° Można iescze wyrazić wartość dostawy kąta V w funkcyi kątow X, Y, Z, X', Y', Z'. W tym zamiarze użyiemy znalezionego wyżey równania

$$dws\mathrm{V} = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$$

które, wstawiwszy w nie za x, x', y, y', z, z' wartości wzięte z równań (A), zamieni się na

$$dws\mathrm{V} = dws\mathrm{X}.dws\mathrm{X}' + dws\mathrm{Y}.\ dws\mathrm{Y}' + dws\mathrm{Z}.dws\mathrm{Z}'.$$

Gdyby kąt V był prosty, mielibyśmy

$$dws\mathrm{X}.\ dws\mathrm{X}' + dws\mathrm{Y}.\ dws\mathrm{Y}' + dws\mathrm{Z}.\ dws\mathrm{Z}' = 0$$

6° Ponieważ kąt Z który liniia OM czyni z osią OZ iest dopełnieniem kąta P który taż liniia OM czyni z płaszczyzną XY, więc

$$dws\mathrm{Z} = wst\mathrm{P}$$

aże $dws\mathrm{Z} = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$, więc i

$$wst\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$$

podobnie kąt Y który liniia OM czyni z osią OY iest dopełnieniem kąta Q który taż liniia czyni z płaszczyzną XZ: więc

$$wst\mathrm{Q} = \frac{b}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$$

nareszcie wstawa kąta R który liniia OM czyni z płaszczyzną ZY, iest

$$wst\mathrm{R} = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$$

65. *Zadanie.* Znaleźć warunki i punkt spólnego przecięcia dwóch liniy prostych położonych w przestrzeni.

Niech będą dane dwóch liniy rownania

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + 6 \end{array}\right\}^{1\text{ey}} \quad \left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + 6' \end{array}\right\}^{2\text{ey}}$$

w których ilości a, α, b, 6, a', α' b' $6'$ są wiadome:

niech będą x' y' z' spółrzędne szukane punktu przecięcia: aby te liniie przecięły się, musi być

$$x'=az'+\alpha,\ y'+bz'+\beta,\ x'=a'z'+\alpha'\ y'=b'z'+\beta':$$

Cztery te równania są dostateczne do wyznaczenia trzech niewiadomych x' y' z'. Jest naprzód

$$az'+\alpha=a'z+\alpha,\ bz'+\beta=b'z'+\beta'$$

skąd $z'=\dfrac{\alpha'-\alpha}{a-a'}$, $z'=\dfrac{\beta'-\beta}{b-b'}$

a zatem

$$(\alpha-\alpha')\,(b-b')=(a-a')(\beta-\beta')$$

iest równaniem warunkowem aby się dwie liniie przecięły. Znaydziemy daley

$$x'=\frac{a\alpha'-a'\alpha}{a-a'},\ y'=\frac{b\beta'-b'\beta}{b-b'}$$

gdyby było $a=a'$, $b=b'$ wartości x', y', z' byłyby nieskończonemi, a liniie założone równoodległemi (iak w 63)

Ponieważ każde z równań

$$(a-a')\,(\beta-\beta')=(b-b')\,(\alpha-\alpha'),$$
$$1+aa'+bb'=0\ (64.\ 1^{\circ})$$

z których pierwsze wyraża warunek spólnego przecięcia dwóch liniy, drugie prostopadłości; iest samo przez się prawdziwe; wniesiemy iż dwie liniie w przestrzeni mogą być prostopadłe do siebie choć się nie przecinaią: a zatem aby dwie liniie przecięły się w przestrzeni pod kątem prostym, dwa owe równania razem i w-iednymże czasie muszą się sprawdzić.

66. Tego samego sposobu użylibyśmy na wyznaczenie punktow i warunku przecięcia spólnego dwóch liniy krzywych danych przez równania. Aże liniie krzywe mogą się przeciąć w kilku punktach, zastanowmy się czyby z danych równań liniy krzywych nie można znaleźć liczby ich spólnych przecięć w przestrzeni.

Założywszy iż równania liniy krzywych są

$$\left.\begin{array}{l}x=\varphi z\\ y=\psi z\end{array}\right\}\text{1ey}\quad \left.\begin{array}{l}x=\varphi' z\\ y=\psi' z\end{array}\right\}\text{2giey}$$

równania warunkowe przecięć będą

$$\varphi z=\varphi' z,\quad \psi z=\psi' z \quad \text{(a)}$$

Jeżeli w równania (a) nie wchodzą wyrażenia pierwiastkow potęg, przeniesiemy wszystkie wyrazy każdego równania na iedną stronę, a ieżeli pierwsze strony tych równań mieć będą spólny dzielnik, wniesiemy iż linie krzywe przecinaią się.

Niechby na przykład dane były równania

$$\left.\begin{array}{l}x=z^3(z-1)+z\\ y=z^4(z-1)+z^2+1\end{array}\right\}\text{1ey linii krzywey}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=z^4(z-1)+1\\ y=z^2(z-1)+2\end{array}\right\}\text{2giey}$$

Aby odkryć czy te dwie liniie przecinaią się, założymy

$$z^3(z-1)+z=z^4(z-1)+1,$$
$$z^4(z-1)+z^2+1=z^2(z-1)+2$$

przeniesiemy wyrazy na iedną stronę, i otrzymamy równania

$$z^3(z-1)-z^4(z-1)=0,$$
$$z^4(z-1)-z^2(z-1)+z^2-1=0.$$

Tych pierwsze strony maią spólny dzielnik $z-1$, czyli $z=1$ iest ich pierwiastkiem: znaydziemy daley $x=1, y=2$. A tak liniie krzywe przecinaią się w-iednym punkcie, którego trzy spółrzędne są $z=1$, $x=1$, $y=2$.

W ogólności: 1° ieżeli równania (a) są algebraiczne a ich ilości stałe, są wiadome; oczyścimy ie naprzód z wyrażeń, iakie zawierać mogą, pierwiastkow potęg, potem przeniesiemy wszystkie wyrazy na iedną stronę i otrzymamy dwa równania w postaci

$$\mathrm{F}z=0,\quad \mathrm{F}'z=0$$

daley szukać będziemy spólnego dzielnika fz między pelynomami Fz, i F$'z$, założymy równanie

$$\mathrm{f}z=0$$

i nakoniec wniesiemy że, ile wartości mieć będzie niewiadoma z tego ostatnego równania, które może być stopnia pewnego, tyle przecięć spólnych mieć będą dane linie krzywe. Gdy ilość a będzie iedną z wartości z, wstawimy ią w wyrażenia $x=\varphi z, y=\psi z$, i otrzymamy dwie inne spółrzędne punktu przecięcia spólnego.

2° Gdy równania liniy krzywych przywiedzione do postaci

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x,\ x)=0\\ \psi(y,\ z)=0\end{array}\right\}1^{ey} \quad \text{i} \quad \left.\begin{array}{l}\varphi'(x,\ z)=0\\ \psi'(y,\ z)=0\end{array}\right\}2^{iey}$$

zawierać będą ilości stałe α, β, γ . . . ; będziemy mogli rozrządzić temi równaniami tak, że zniewolą linie krzywe do wzięcia położenia w którem przecinać się będą ieden, dwa, trzy . . . w ogólności tyle razy, ile będzie owych niewyznaczonych stałych ilości. W tym zamiarze poszukamy spólnego dzielnika polynomow

$$\varphi(x,\ z),\quad \varphi'(x,\ z)$$

i znaydziemy przedostatnią i ostatnią resztę w postaci

$$xF_1 z + F_2 z\ ,\ \text{i}\ Fz.$$

poszukamy także spólnego dzielnika polynomow

$$\psi(y,\ z)\ \psi'(y,\ z)$$

i znaydziemy przedostatnią i ostatnią resztę w postaci

$$y\ F'_1 z + F'_2 z,\ \text{i}\ F'z$$

Poszukamy nareszcie spólnego dzielnika polynomow

$$Fz \quad \text{i} \quad F'z \qquad (A)$$

a przypuściwszy *naprzód* iż te polynomy zawieraią iedną tylko niewyznaczoną ilość stałą α; cel działania naszego będzie, znaleźć wartość niewyznaczoney α taką, na mocy którey owe polynomy miałyby spólny dzielnik. W tym zamiarze doszedłszy w poszukiwaniu spólnego dzielnika polynomow Fz, $F'z$, do reszt przedostatney i ostatney pod postacią

$$z\ f_1\alpha + f_2\alpha \quad \text{i} \quad f\alpha$$

założymy równanie

$$f\alpha=0$$

i wyznaczymy iedną wartość rzeczywistą ilości stałey α, którą wstawiwszy w polynom

$$z+\frac{f_2\alpha}{f_1\alpha}$$

ten będzie spólnym dzielnikiem polynomow (A). Wstawiwszy nareszcie wartość $z=-\dfrac{f_2\alpha}{f_1\alpha}$ w równania

$$xF_1z+F_2z=o,\ yF_1z+F_2'z=o \quad (B)$$

wyciągniemy wartości dla x, y które będą spółrzędnemi poiedynczego punktu przecięcia liniy krzywych.

Rozbierzmy *powtóre* przypadek w którym polynomy (A) zawierać będą dwie ilości stałe α, 6 wchodzące w równania dwóch liniy krzywych. W tym razie szukać będziemy spólnego dzielnika między polynomami (A) póty, póki nie doydziemy do reszty pierwszego stopnia względem niewiadomey z którąto resztę otrzymamy pod postacią

$$zf(\alpha, 6)+f_1(\alpha, 6)$$

daley założymy równania

$$f(\alpha, 6)=o, f_1(\alpha, 6)=o$$

i z tych wywiedziemy wartości dwóch niewiadomych α, 6. Powyższą resztę pierwszego stopnia poprzedzi reszta stopnia drugiego w postaci

$$z^2f_2(\alpha, 6)+zf_3(\alpha, 6+f_4(\alpha, 6):$$

w tę wstawimy znalezione wartosci α, 6, zrównamy ią zero, a rozwiązawszy to równanie, znaydziemy dwie wartości dla z które, ieśli będą rzeczywiste, posłużą do znalezienia wartości podwóynych rzeczywistych dla x, y za pomocą równań (B): będą więc wyznaczone spółrzędne dwóch punktow w których się przecinaią dwie linie krzywe.

Widzimy także iż każda wartość rzeczywista z wywiedziona z równania

$$z^2f_2(\alpha, 6)+zf_3(\alpha, 6)+f_4(\alpha, 6)=o$$

rozwiąże równania $Fz=o$, $F'z=o$, ponieważ na mocy znalezionych wartości α, 6, trynom

$$z^2 + \frac{f_3'(\alpha, \beta)}{f_2(\alpha, \beta)} x + \frac{f_4(\alpha, \beta)}{f_2(\alpha, \beta)}$$

będzie spólnym dzielnikiem polynomow (A). Też same wartości dla z, tudzież wartości dla x, y wywiedzione z równań (B) rozwiążą równania założone liniy krzywych, ponieważ wartości z uczynią binom $x + \frac{F_2 z}{F_1 z}$ spólnym dzielnikiem polynomow $\varphi(x, z)$, $\varphi'(x, z)$, binom zaś $y + \frac{F_2' z}{F'_1 z}$ uczynią spólnym dzielnikiem polynomow $\psi(y, z)$, $\psi'(y, z)$.

Gdy *potrzecie* polynomy (A) zawierać będą trzy niewiadome α, β γ; posuniemy szukanie spólnego dzielnika do reszty drugiego stopnia z niewyznaczoną z

$$z^2 f(\alpha, \beta, \gamma) + z f_1(\alpha, \beta, \gamma) + f_2(\alpha, \beta, \gamma)$$

wyznaczymy ilości α, β, γ za pomocą równań

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, f_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0, f_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

znaydziemy daley trzy wartości dla z za pomocą równania

$$z^3 f_3(\alpha,\beta,\gamma,) + z^2 f_4(\alpha,\beta,\gamma) + z f_5(\alpha,\beta,\gamma) + f_6(\alpha,\beta,\gamma) = 0$$

którego pierwsza strona oznacza resztę przedostatną. Jeżeli wartości z wypadną rzeczywiste, wstawimy ie w równania (B), z których wywiódłszy wartości rzeczywiste dla x, y, otrzymamy spółrzędne trzech punktow w których się przetną dwie linije krzywe.

Wyznaczywszy wartości z i x za pomocą równań $Fz = 0$, $xF_1 z + F_2 z = 0$; wartości te, iako pierwiastki równań $\varphi(x, z) = 0$, $\varphi'(x, z) = 0$ rzutow liniy krzywych na płaszczyznę XZ, posłużą do wyznaczenia punktow w których się przecinaią rzuty. Takoż, wartości y, z dane przez równania $F'z = 0$, $yF'_1 z + F'_2 z = 0$ posłużą do wyznaczenia punktow w których przetną się rzuty na płaszczyźnie YZ. Te trzy przecięcia, naprzód rzutow na XZ, powtóre rzutow na YZ, potrzecie liniy krzywych w przestrzeni, leżyć będą na iedneyże płasczyźnie prostopadłey do osi OZ, ponieważ taż sama wartość dla z rozwiąże równania $Fz =$ i $F'z = o$.

ROZDZIAŁ TRZECI

O płasczyźnie uważaney w przestrzeni.

67. Wystawmy sobie w przestrzeni liniią EF (fig. 41) i do niey prostopadłą MN. Niech liniia EF obraca się około MN w punkcie niewzruszonym M, i w swym obrocie niech będzie do MN zawsze prostopadłą: tym sposobem liniia EF zakreśli *płasczyznę*. Zamierzmy sobie znaleźć równanie płasczyzny któreby wyrażało tę główną okoliczność iż liniia ruchoma EF iest w każdem położeniu prostopadłą do linii niewzruszoney MN.

Oznaczywszy przez x', y', z' spółrzędne punktu M, przez A, B, styczne kątow które rzuty linii MN na płasczyzny XZ, YZ czynią z osią OZ; równania linii MN przechodzącey przez punkt M będą

$$x-x'=A(z-z'),\ y-y'=B(z-z').$$

Oznaczywszy zaś przez A′, B′ styczne kątow które rzuty linii EF na płasczyzny XZ, YZ czynią z osią OZ, równania linii EF przechodzącey przez punkt M będą

$$x-x'=A'(z-z').\ y-y'=B'(z-z')$$

Ponieważ dwie linie EF, MN przecinaią się pod kątem prostym więc (64)

$$1+AA'+BB'=o.$$

Aby to równanie ściągało się nie do poiedynczey linii EF, lecz do płasczyzny przez nią utworzoney, trzeba wyrugować ilości A′ B′ zniewalaiące liniią one EF do stałego położenia: iest zaś $A' = \frac{x-x'}{z-z'}$, $B' = \frac{y-y'}{z-z'}$, więc wstawiwszy te wartości w ostatne równanie, to zamieni się na

$$z-z'+A(x-x')+B(y-y')=0$$

i pod tą postacią będzie równaniem płaszczyzny utworzoney przez liniią EF obracaiącą się około linii stałey i prostopadłey MN.

Aby temu równaniu prostszą nadać postać, weźmy zamiast punktu M punkt C na osi OZ w którym przedłużona EF przetnie się pod czas swego obrotu z tąż osią, będzie bowiem w tym razie $x'=0$, $y'=0$, $z'=OC$ czyli $z'=C$, przez co powyższe równanie zamieni się na

$$z+Ax+By-C=0$$

Gdyby linia tworząca EF przechodziła przez zaczęcie O, byłoby $C=0$, równanie więc płaszczyzny przechodzącey przez zaczęcie osi iest

$$z+Ax+By=0$$

Można iescze znaleźć równanie płaszczyzny zyx (fig. 42) następuiącym sposobem. Od zaczęcia O spółrzędnych spusczam prostopadłą OM′ na płaszczyznę daną. Liniia OM′ będzie prostopadłą do wszystkich liniy prowadzonych przez iey spodek M′ na płaszczyźnie daney, na przykład do linii MM′: wyrażenie analityczne tey własności, będzie równaniem płaszczyzny. Aby znaleźć to wyrażenie łączę liniią prostą zaczęcie O z punktem którymkolwiek M linii MM′: w tróykącie OMM′ prostokątnym przy M′, iest

$$MM'^2=OM^2-OM'^2$$

czyli oznaczywszy przez r, r' liniie OM, OM′, przez x', y', z', spółrzędne punktu M′,

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=r^2-r'^2$$

czyli, wykonawszy działanie i zważaiąc że $x^2+y^2+z^2=r^2$, $x'^2+y'^2+z'^2=r'^2$,

$$xx'+yy'+zz'=r'^2 \quad \text{(P)}$$

i to iest równanie płaszczyzny: aby temu równaniu nadać postać taką iak w poprzedzaiącym sposobie, wywiedziemy z niego wartość dla z

$$z = -\frac{x'}{z'}x - \frac{y'}{z'}y + \frac{r'^2}{z'^2}$$

czyli, naznaczywszy $\frac{x'}{z'} = \mathrm{A}$, $\frac{y'}{z'} = \mathrm{B}$, $\frac{r'^2}{z'^2} = \mathrm{C}$.

$$z = -\mathrm{A}x - \mathrm{B}y + \mathrm{C}.$$

Uważaymy, iż kąt M'OX który liniia OM' prostopadła do płaszczyzny xyz czyni z osią OX, prostopadłą do płaszczyzny ZY równy iest kątowi płaszczyzn xyz i XY. Kąt bowiem liniy OM', OX rowny iest, iak wiemy z zasad stereometryi, kątowi płaszczyzn do których owe linije są względnie prostopadłemi. Z takiey samey przyczyny kąt M'OY = kątowi pochyłości płaszczyzny zyx i pł: XZ. Kąt MOZ = kątowi pochyłości płaszczyzn xyz i XY. Nazwawszy teraz α, β, γ kąty M'OX, MOY, MOZ które czyni liniia OM' z trzema osiami OX, OY, OZ czyli które płaszczyzna xyz czyni z trzema pł: względnie YZ, XZ, XY, będzie

$$dws\alpha = \frac{x'}{r'}, \quad dws\beta = \frac{y'}{r'}, \quad dws\gamma = \frac{z'}{r'}$$

przez co równanie (P) zamieni się na

$$x.\,dws\alpha + y.\,dws\beta + z.\,dws\gamma = r'$$

czyli ogólniey na

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{D}$$

1° Porównawszy spółczynniki ostatnych dwóch równań, mamy

$$\frac{dws\alpha}{r'} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}, \quad \frac{dws\beta}{r'} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}, \quad \frac{dws\gamma}{r'} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$$

skąd $r'\mathrm{A} = \mathrm{D}.dws\alpha$, $r'\mathrm{B} = \mathrm{D}.dws.\beta$, $r'\mathrm{C} = \mathrm{D}.dws\gamma$

i $r'^2(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2) = \mathrm{D}^2(dws^2\alpha + dws^2\beta + dws^2\gamma)$

aże podług (§ 57.) $dws^2\alpha + dws^2\beta + dws^2\gamma = 1$

więc $$r' = \frac{D}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

znaydziemy daley dostawy kątow, które płasczyzna dana przez równanie $Ax+By+Cz=D$ czyni z trzema płasczyznami spółrzędnemi,

$$dws\alpha = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\ dws\beta = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

$$dws\gamma = \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

2° Znaydziemy także za pomocą tych i powyższych formuł spółrzędne x', y', z' spodku M′ prostopadłey OM′

$$x' = \frac{AD}{A^2+B^2+C^2},\ y' = \frac{BD}{A^2+B^2+C^2},$$

$$z' = \frac{CD}{A^2+B^2+C^2}$$

3° Wziąwszy przed oczy równanie płasczyzny

$$z = -\frac{x'}{z'}x - \frac{y'}{z'}y + \frac{r'^2}{z'^2}$$

i zważywszy iż równania prostopadłey OM′ są

$$z = \frac{z'}{x'}x,\ z = \frac{z'}{y'}y;$$

postrzeżemy że równania

$$-\frac{x'}{z'}\cdot\frac{z'}{x'} = -1, -\frac{y'}{z'}\cdot\frac{z'}{y'} = -1,$$

czyli $$-\frac{x'z'}{z'x'}+1=0, -\frac{y'z'}{z'y'}+1=0$$

są warunkami spełnionemi prostopadłości linii OM′ do płasczyzny: w ogólności więc aby do płasczyzny którey równanie

$$z = Ax+By+C$$

była prostopadłą liniia prosta którey równania są

$$z=ax,\ z=by.$$

muszą się sprawdzić równania $Aa+1=0$ $Bb+1=0$.
4° Gdyby płaszczyzna xyz była prostopadłą do YX, linija OM′ leżałaby na płaszczyźnie XY, rzędne z zniknęłyby i równanie płaszczyzny prostopadłey do XY byłoby

$$Ax+By-D=0:$$

tymże sposobem znaydziemy równania płaszczyzn prostopadłych, iedney do XZ, drugiey do YZ,

$$Ax+Cz-D=0, \quad By+Cz-D=0$$

5° Wziąwszy $y=0$ w rów: $z=-Ax-By+C$; otrzymamy równania śladu xz płaszczyzny daney na XZ,

$$y=0, \; z=-Ax+C.$$

Podobnie równania, śladu yz na YZ są

$$x=0, \; z=-By+C,$$

śladu xy na XY są

$$z=0, \; -Ax-By+C=0$$

Wziąwszy $x=0$ w równaniu pierwszego, $y=0$ w równaniu drugiego śladu, wypadnie w każdym razie iednaż wartość dla z, a zatem ślady na płaszczyźnie ZX i ZY przecinaią się w iednymże punkcie.
6° Że rzuty linii OM′ są prostopadłe do śladów płaszczyzny xyz, stąd widać iż płaszczyzny zrzucaiące są prostopadłe do płaszczyzn spółrzędnych i do daney xyz a zatem i do ich spólnych przecięć czyli do śladów. Tę prawdę okażemy analitycznie, za pomocą równań linii OM′

$$x-x'=A(z-z'), \; y-y'=B(z-z')$$

i równań śladów

$$x=-\frac{1}{A}z+C, \; y=-\frac{1}{B}z+C$$

tu bowiem warunki prostopadłości tych liniy sprawdzaią się (41).

Uważaymy iż równanie płaszczyzny iest pierwszego stopnia ze zmiennemi x, y, z. Byłoby ono także pierwszego stopnia, gdybyśmy zamiast prostokątnego wzięli inny układ spółrzędnych: równania bowiem liniy tworzących EF, MN (fig. 41), lub liniy MM', OM' (fig. 42) byłyby zawsze pierwszego stopnia, z równań zaś tych liniy wypada, iak wiemy, równanie płasczyzny.

68. Podobnym, iak w § 67, sposobem można znaleźć równanie powierzchni krzywey, utworzoney przez liniią krzywą lub prostą posuwaiącą się po inney linii, prostey lub krzywey, według pewnego warunku. W tym biegu linii ruchomey po stałey, pierwsza z drugą musi się zawsze przecinać, aby się zaś przecinały musi zachodzić pewne równanie między ilościami stałemi α, β, γ... w równaniu dwóch liniy tworzących zawartemi, iakeśmy to w § 66 wytłomaczyli, gdzieśmy widzieli iż owe ilości stałe niewyznaczone muszą mieć takie wartości iakie zniewolą liniią ruchomą do wzięcia położenia w którem przetnie się z drugą. Wartości te muszą się zmieniać za każdem położeniem linii ruchomey; a tak doszedłszy do równania któreśmy w ogólnym rozbiorze oznaczyli przez $f\alpha=0$, lub do równań któreśmy oznaczyli przez $f(\alpha,\beta)=0$, $f_{\prime}(\alpha,\beta)=0$ (66); wstawiwszy w pierwsze za α, w drugie zaś za α i β wartości tych ilości w funkcyi x, y, z wywiedzione z równań dwóch liniy krzywych lub prostych tworzących, a wypadkowe równanie w pierwszym razie lub dwa równania w drugim, będą należały do powierzchni krzywey. Dwa równania drugiego przypadku można, przez wstawienie wartości, któreykolwiek zmienney wywiedzioney z iednego równania w drugie; przywieźć do poiedynczego które będzie szukanem równaniem powierzchni. Rzecz ta wyiaśnioną będzie przykładami w teoryi powierzchni krzywych.

69. Dowiedziemy iż równanie

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A)$$

nie może należeć do inney powierzchni oprócz płaskiey.

Obierzmy na powierzchni do którey to równanie należy dwa punkta i złączmy ie liniią prostą: ieżeli dowiedziemy że wszelki punkt wzięty na tey linii znayduie się i na powierzchni, ta będzie tem samem płaską. Oznaczywszy przez x', y', x'', y'', spółrzędne owych dwóch punktow obranych na powierzchni, równania linii prostey będą

w pierwszym razie $x'=az'+\alpha$, $y'=bz'+\beta$

w drugim, $x'=az''+\alpha$, $y'=bz''+\beta$

równanie zaś powierzchni będzie w pierwszym razie

$$Ax'+By'+Cz'+D=o$$

czyli $$A(az'+\alpha)+B(bz'+\beta)+Cz'+D=o$$

czyli $$(Aa+Bb+C)z'+A\alpha+B\beta+D=o$$

w drugim $$(Aa+Bb+C)z''+A\alpha+B\beta+D=o$$

odciągnąwszy stronami to równanie od poprzedzaiącego, wypadnie

$$(Aa+Bb+C)(z'-z'')=o$$

ażе nie może być $z'-z''=o$, więc

$$Aa+Bb+C=o. \quad (1)$$

na mocy tego równania będzie także

$$A\alpha+B\beta+D=o \quad (2)$$

równania tedy (1) i (2) są warunkami pod iakiemi liniia prosta mieć będzie dwa punkta spólne z powierzchnią, daną przez równanie (A)

Weźmy dopiero punkt którykolwiek na linii prostey maiącey iuż dwa punkta spólne z powierzchnią i oznaczmy przez x''', y''', z''' spółrzędne tego punktu: aby się ten punkt znaydował na powierzchni musi sprawdzić się równanie

$$(Aa+Bb+C)z'''+A\alpha+B\beta+D=o:$$

lecz to równanie sprawdza się na mocy równań (1) i (2) więc ów punkt nowo obrany, spólny iest linii prostey i powierzchni, ażе był wzięty dowolnie, więc wszystkie inne punkta linii będą na powierzchni, więc ta iest płaską, więc równanie (A) nie może należyć do inney powierzchni oprócz płaskiey.

70. *Zadanie.* Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącey przez trzy punkta naznaczone.

Postać szukanego równania iest

$$Ax+By+Cz+D=o$$

aże płaszczyzna ma mieć położenie stałe, to iest przechodzić przez trzy punkta których spółrzędne wiadome oznaczymy przez x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''', więc trzeba znaleźć wartości spółczynnikow A, B, C, D w funkcyi tych wiadomych ilości. W tym zamiarze rozwiążemy trzy następuiące równania

$$Ax'+By'+Cz'+D=o$$
$$Ax''+By''+Cz''+D=o$$
$$Ax'''+By'''+Cz'''+D=o$$

z czterema rzeczonemi niewiadomemi: uważaiąc zaś za niewiadome tylko A, B, C przypomniymy sobie z algebry iż tylko w liczniki formuł ogólnych, daiących trzy niewiadome trzech równań pierwszego stopnia, wchodzą ostatne wyrazy równań iak tu D, a zatem wartości dla niewiadomych A, B, C będą miały postać

$$A=A'D,\ B=B'D,\ C=C'D$$

w których A', B', C' są funkcyiami ułomkowemi spółrzędnych wiadomych x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''. Wstawiwszy te wartości za A, B, C w równanie ogólne płaszczyzny, wyraz D zniknie i równanie szukane będzie

$$A'x+B'y+C'z+1=o$$

które uczyni zadosyć żądanym warunkom.

71. *Zadanie* Znaleźć równanie spólnego przecięcia dwóch płaszczyzn.

Niech będą równania dwóch płaszczyzn przecinaiących się

$$Ax+By+Cz+D=o,\ A'x+B'y+C'z+D'=o$$

wyrugowawszy z nich zmienną z, wypadnie

$$(AC'-A'C)x+(BC'-B'C)y+(DC'-D'C)=o$$

równanie rzutu na XY przecięcia płaszczyzn.

Podobnym sposobem znaleźlibyśmy równanie rzutu, na YZ i XZ, przecięcia płaszczyzn.

Znaleźlibyśmy spólne przecięcie trzech płaszczyzn którem iest punkt, wyznaczywszy trzy spółrzędne x,y,z punktu za pomocą trzech danych równań płaszczyzn

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=o$$
$$\mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'z+\mathrm{D}'=o$$
$$\mathrm{A}''x+\mathrm{B}''y+\mathrm{C}''z+\mathrm{D}''=o$$

72. *Zadanie.* Znaleźć warunki równoodległości dwóch płaszczyzn.

Niech będą równania dwóch płaszczyzn

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=o,\ \mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'z+\mathrm{D}'=o$$

Jeśli te płaszczyzny są równoodległe, ich ślady na płaszczyznach spółrzędnych będą równoodległe: aże równania śladow, naznaczywszy z kolei $x=o$, $y=o$, $z=o$ w założonych równaniach, są

$$z+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}y+\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}=o,\ z+\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{C}'}y+\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{C}'}=o$$
$$z+\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}x+\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}=o,\ z+\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{C}'}x+\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{C}'}=o$$
$$y+\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x+\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}=o,\ y+\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{B}'}x+\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{B}'}=o$$

więc równania równoodległości śladow (40) a tem samem i płaszczyzn są

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{C}'},\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{C}'},\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{B}'}$$

czyli $\mathrm{BC}'=\mathrm{B}'\mathrm{C}$, $\mathrm{AC}'=\mathrm{A}'\mathrm{C}$, $\mathrm{AB}'=\mathrm{A}'\mathrm{B}$:
z tych trzech równań dwa którekolwiek są dostateczne, bo trzecie wypada z dwóch innych.

Można iescze znaleźć też same warunki następującym sposobem. Otrzymaliśmy w poprzedzaiącem zadaniu równanie przecięcia dwóch płaszczyzn

$$(\mathrm{AC}'-\mathrm{A}'\mathrm{C})x+(\mathrm{BC}'-\mathrm{B}'\mathrm{C})y+(\mathrm{DC}'-\mathrm{D}'\mathrm{C})=o$$

aże to przecięcie w przypadku równoodległości dwóch płasczyzn, iest nieskończenie oddalone, więc i punkt na tem przecięciu wzięty, uważaiąc położenie dwóch płasczyzn takie iż każda z nich przecina płasczyzny spółrzędne XZ, YZ, iest nieskończenie oddalonym, spółrzędne więc x, y tego punktu są ilościami nieskończenie wielkiemi i równanie powyższe zamieni się w tym razie na

$$(AC'-A'C)\tfrac{1}{0}+(BC'-B'C)\tfrac{1}{0}+(DC'-D'C)=o$$

czyli, podzieliwszy obie strony przez $\frac{1}{0}$, na

$$(AC'-A'C)+(BC'-B'C)=o$$

aby zaś to równanie sprawdziło się, musi być

$$AC'=A'C,\quad BC'=B'C:$$

te są warunki równoodległości dwóch płasczyzn.

73. *Zadanie.* Znaleźć warunek równoodległości linii prostey od płasczyzny.

Aby linia dana przez równanie

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta$$

przecięła się z płasczyzną daną przez równanie

$$Ax+By+Cz+D=o$$

warunkiem (69) iest równanie

$$(Aa+Bb+B)z+A\alpha+B\beta+D=o:$$

ieśli dopiero liniia prosta iest równoodległą od płasczyzny, punkt przecięcia będzie nieskończenie oddalonym, więc rzędna z tego punktu będzie nieskończenie wielką, i ostatne równanie zamieni się na

$$(Aa+Bb+C)\tfrac{1}{0}+A\alpha+B\beta+D=o$$

czyli podzieliwszy obie strony przez $\frac{1}{0}$, na

$$Aa+Bb+C=o.$$

takie iest równanie warunkowe równoodległości linii od płasczyzny.

74. *Zadanie.* Znaleźć warunki pod iakiemi liniia prostopadłą iest do płasczyzny i wartość części prostopadłey zawartey między punktem na niey wziętym i płasczyzną.

Niech będą równania linii prostey

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta$$

a równanie płaszczyzny

$$Ax+By+Cz+D=o$$

1° Gdy liniia prosta iest prostopadłą do płaszczyzny; rzuty pierwszey są prostopadłemi do śladow drugiey, są zaś równania śladow, wziąwszy osobno $y=o$, $x=o$ w równaniu płaszczyzny,

$$Ax+Cz+D=o, \quad By+Cz+D=o$$

więc aby te liniie były prostopadłe każda w szczególności do rzutow daney, ma być (41)

$$-\frac{Ca}{A}+1=o, \quad -\frac{Cb}{B}+1=o$$

czyli $Ca=A, Cb=B$

te są warunki prostopadłości linii do płaszczyzny (§ 67 3°)

2° Niech P, (fig. 43) oznacza spodek prostopadłey do płaszczyzny. iego zaś spółrzędne niech będą x, y, z; M, punkt wzięty na prostopadłey, iego zaś spółrzędne niech będą x', y', z'; długość prostopadłey PM którą nazwiemy L iest (27).

$$L=\sqrt{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}}$$

Na znalezienie wartości dla $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ w funkcyi ilości wiadomych wchodzących w równanie płaszczyzny, mamy naprzód równania linii PM przechodzącey przez M (62)

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z') \ (1):$$

aby utworzyć iedno iescze równanie z niewiadomemi $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, wystawmy sobie płaszczyznę przechodzącą przez punkt M równoodległą od daney: iey równanie

$$Ax'+By'+Cz'+E=o$$

odciągnąwszy stronami od równania daney, wypadnie

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D-E=o$$

czyli $A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D+Ax'$
$+By'+Cz'=o$

lub, naznaczywszy $D+Ax'+By'+Cz'=D'$,

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D'=0 \quad (2)$$

Z trzech równań (1) i (2) wyprowadzimy

$$z-z'=\frac{-D'}{Aa+Bb+C}, \quad x-x'=\frac{-aD'}{Aa+Bb+C},$$

$$y-y'=\frac{bD'}{Aa+Bb+C}$$

lub, wstawiwszy za a, b ich wartości $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ wzięte z równań warunkowych poprzedzaiącego przypadku,

$$z-z'=\frac{-CD'}{A^2+B^2+C^2}, \quad x-x'=\frac{-AD'}{A^2+B^2+C^2},$$

$$y-y'=\frac{BD'}{A^2+B^2+C^2},$$

wartość więc linii PM iest

$$L=\pm\frac{D'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

czyli

$$L=\pm\frac{D+Ax'+By'+Cz'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

znak podwóyny $\pm$ znaczy, iż pierwszy brać trzeba dla linii PM gdy iey punkt M iest nad płasczyzną daną, drugi gdy iey punkt iest pod płasczyzną.

75. *Zadanie.* Znaleźć kąt dwóch płasczyzn danych przez równania

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

Na spólnem przecięciu płasczyzn obierzmy punkt, i na obudwóch poprowadźmy przez ten punkt linie prostopadłe do ich spólnego przecięcia: kąt tych dwóch liniy iest kątem pochyłości płasczyzn, i spełnia dwa proste z kątem który czynią dwie prostopadłe do płasczyzn wyprowadzone z punktow obranych na ramionach pierwszego kąta. Niech będą równania tych prostopadłych

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta, \quad x=a'z+\alpha', \quad y=b'z+\beta':$$

warunki prostopadłości tych liniy do płaszczyzn względnych są

$$A = aC,\ B = bC,\ A' = a'C',\ B' = b'C'\ (74):$$

oznaczywszy przez V kąt dwóch prostopadłych, dostawa tego kąta, a zatem i dostawa kąta szukanego spełniaiącego pierwszy i znakiem tylko różniąca się, będzie

$$dws\,V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}\sqrt{(1 + a'^2 + b'^2)}}\ (64)$$

czyli, wstawiwszy za a, a', b, b' ich wartości,

$$dws\ V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}$$

Jlości D, D' nie wchodzą w tę wartość i wchodzić nie powinny, ponieważ, wyrażaiąc rzędne z których spodki są w zaczęciu osi, nie wpływaią na pochyłość płaszczyzn.

1° Gdy dwie płaszczyzny przecinaią się pod kątem prostym; dws V = o a zatem

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

iest równaniem warunkowem prostopadłości dwóch płaszczyzn.

2° Gdy iedna z płaszczyzn, na przykład ta którey równanie

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

iest na płaszczyźnie XY ktorey równanie $z = 0$; równanie założone skróci się, dla tego iż oprócz $z = 0$, będzie $D' = 0$ (iako rzędna z maiąca spodek w zaczęciu); i przeydzie na

$$A'x + B'y = 0$$

które aby się sprawdziło, musi być $A' = 0$, $B' = 0$, nazwawszy więc V' kąt który płaszczyzna pochyła czyni z płaszczyzną XY będzie

$$dws\,V' = \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}:$$

znaydziemy takimże sposobem dostawę kąta V'' który czyni taż płasczyzna z pł: XZ

$$dws\ V'' = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

nareszcie dostawę kąta V''', który czyni z płasczyzną YZ,

$$dws V''' = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}.$$

też same formuły znaleźliśmy w § 67. 1°.

Nazwawszy U', U'', U''' kąty, które druga płasczyzna pochyła czyni z trzema płasczyznami spółrzędnemi, znaydziemy

$$dws\ U' = \frac{C'}{\sqrt{(A^2+B^2+C'^2)}},$$

$$dws U'' = \frac{B'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}}$$

$$dws U'' = \frac{A'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}}$$

wstawiwszy dopiero w wartość dla *dws*V za AA', BB', CC' ich wartości w funkcyi dostaw, otrzymamy

$$dws V = dws V'.dws U' + dws V'.dws U' + dws V''.dws U''$$

jak w § 64. 5°.

76. *Zadanie.* Znaleźć kąt pochyłości linii prostey, daney przez równania

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta,$$

do płasczyzny daney przez równanie

$$Ax + By + Cz + D = o.$$

Liniia dana i iey rzut na płasczyznę daną tworzą szukany kąt pochyłości, kąt zaś z linii daney i prostopadłey, od punktu na tamtey wziętego, spuszczoney na iey rzut iest dopełnieniem pierwszego. Niech będą równania tey prostopadłey

$$x = a'z + \alpha',\ y = b'z + \beta';$$

Warunek iey prostopadłości do płaszczyzny, zawieraią równania (74)

$$A = a'C,\ B = b'C$$

dostawa kąta tey linii i daney, czyli co iest toż samo, wstawa kąta szukanego V, iest (64)

$$\frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}\sqrt{(1 + a'^2 + b'^2)}}$$

wstawiwszy więc za a', b' ich wartości; będzie

$$wst\,V = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$$

1° Wziąwszy kąt V=o będzie $wst\,V = 0$, a zatem

$$Aa + Bb + C = 0$$

iest równaniem warunkowem równoodległości linii prostey od płaszczyzny (73).

2° Wziąwszy płaszczyznę XY za daną, ilości Cz, i D znikną z równania płaszczyzny daney i będzie tylko $Ax + By = 0$, skąd A=o, B=o, więc wstawa kąta który linia prosta czyni z płaszczyzną XY, iest

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}.$$

Ponieważ ta wstawa równa iest dostawie kąta Z, który linia dana czyni z osią OZ, więc także

$$dws\,Z = \frac{1}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}$$

Znaydziemy podobnym sposobem dostawy kątow które taż linia czyni z osiami OY, OX,

$$dws\,Y = \frac{b}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}},$$

$$dws\,X = \frac{a}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}$$

77. *Zadanie*. Znaleźć naykrotszą odległość dwóch liniy prostych danych w przestrzeni.

Aby to zadanie iak można naydogodniey rozwiązać, (fig. 44) weźmiemy iednę z liniy za oś OZ; drugą liniią niech będzie BC. Naykrótszą odległością tych dwóch liniy iest prostopadła MN do obudwóch: że zaś można dwie linie w przestrzeni dane połączyć liniią do obudwóch prostopadłą, przekonamy się następującym sposobem. Przeciąwszy dwie linie dane płaszczyznami prostopadłemi do iedney, liniia prosta prowadzona na któreykolwiek z tych płaszczyzn przez punkta w których tę płaszczyznę linie dane przecinaią, będzie prostopadłą do pierwszey linii a z drugą czynić będzie kąt ostry lub roztwarty. Między temi ostatnemi kątami raz mnieyszemi, drugi raz większemi od prostego, znaydować się musi kąt prosty, a w ów czas liniia łącząca dwa punkta, w których linie dane przecinaią płaszczyznę iedną z równoodległych, będzie prostopadłą do obudwóch liniy, a tem samem będzie ich naykrótszą odległością.

Aby znaleźć wyrażenie analityczne tey naykrótszey odległości, poprowadźmy przez punkt N, równoodległą od OZ: liniia MN będzie prostopadłą do dwóch liniy CB i ND, a zatem do płaszczyzny CND czyli CBEH przechodzącey przez te dwie linie (EH wyraża iey ślad na XY, EB równoodległą od OZ). Spuśćmy z punktu O prostopadłą OG do śladu HE, ta będzie prostopadłą do płaszczyzny CBEH i równą linii MN, według wykreślenia: wyrażenie więc analityczne długości OG będzie tem którego szukamy. Azc, założywszy równanie śladu HE

$$y=Ax+B\,;$$

wyrażenie długości OG prostopadłey do śladu i przechodzącey przez zaczęcie, którego spółrzędne są $x=o$, $y=o$, iest według § 43.

$$\frac{B}{\sqrt{(1+A^2)}}$$

więc takie samo iest wyrażenie naykrótszey odległości dwóch liniy prostych danych w przestrzeni.

DODATEK DO ROZDZIAŁOW 2go i 3go.

1. *O przemianie spółrzędnych, trzech wymiarow.*

78. Wyrazić spółrzędne zrazu używane, w funkcyi spółrzędnych nowego układu, iest ogólne zadanie którego rozwiązaniem tu się zatrudnimy z powodow w § 48 wyłożonych.

Niech będzie punkt M (fig. 45 Tab. II) w przestrzeni którego spółrzędne prostokątne są $OP=x$, $PQ=y$, $MQ=z$: niech będą $OP'=x'$, $PQ'=y'$, $Q'M=z'$ spółrzędne tegoż punktu w nowym układzie maiącym spólne z pierwszym zaczęcie O. Poprowadźmy przez punkta P', Q', M płaszczyzny równoodległe od XY: te przetną rzędną $z=MQ$ na trzy części, z których pierwsza będzie rzutem odciętey x' na oś OZ, druga rzutem rzędney, y' trzecia rzutem rzędney z' na tęż samą oś. A tak rzędna z będzie równą summie rzutow trzech spółrzędnych x', y', z' na oś OZ. Nazwawszy więc Z, Z', Z'' kąty które nowe spółrzędne x', y', z' czynią z osią OZ, będzie

$$z=x'.dwsZ+y'.dwsZ'+z'.dwsZ''. \quad (1)$$

Nazwawszy Y, Y' Y'' kąty które nowe spółrzędne x', y', z' czynią z osią OY będzie

$$y=x'.dwsY+y'.dwsY'+z'.dwsY'' \quad (2).$$

Nazwawszy nareszcie X, X', X'' kąty które nowe spółrzędne x', y', z' czynią z osią OX, będzie

$$x=x'.dwsX+y'.dwsX'+z'.dwsX'' \quad (3)$$

Też same formuły wypadłyby, gdyby obadwa układy były prostokątne.

Gdyby nowy układ spółrzędnych x', y', z' miał osobne zaczęcie którego trzy spółrzędne byłyby a, b, c, mielibyśmy trzy równania (51).

$$x=a+x'.dwsX+y'.dwsX'+z'.dwsX''$$
$$y=b+x'.dwsY+y'.dwsY'+z'.dwsY''$$
$$z=c+x'.dwsZ+y'.dwsZ'+z'.dwsZ''$$

79. Aby zatem znaleźć spółrzędne dawne w funkcyi spółrzędnych nowych i wiadomych, trzeba znać dziewięć ilości X, Y, Z, X′, Y′, Z′; X″, Y″, Z″. Dla wyznaczenia tych ilości trzeba mieć, oprócz trzech ostatnych, iescze sześć równań. Utworzymy ie następuiącym sposobem.

Naprzód, ponieważ X, Y, Z, są kąty które oś OX′ czyni z trzema w szczególności dawnemi osiami; X′, Y′, Z′, kąty które oś OY′, nareszcie X″, Y″, Z″ które oś OZ′ czyni z temiż osiami; więc (57)

$$(a)\begin{cases} dws^2 X + dws^2 Y + dws^2 Z = 1 \\ dws^2 X' + dws^2 Y' + dws^2 Z' = 1 \\ dws^2 X'' + dws^2 Y'' + dws^2 Z'' = 1 \end{cases}$$

Powtóre, oznaczywszy przez $(x'y')$, $(x'z')$, $(y'z')$ kąty, które nowe osi czynią między sobą, mamy (według § 64 i 75),

$$(b)\begin{cases} dws(x'y') = \\ = dws\,X.dws X' + dws Y.dws Y' + dws Z.\,dws Z' \\ dws(x'z') = \\ = dws X.\,dws X'' + dws Y.dws Y'' + dws Z.dws Z''; \\ dws(y'z') = \\ = dws X'\cdot dws X'' + dws Y'.dws Y'' + dws Z'.dws Z'' \end{cases}$$

Te formuły zamienią się, gdy nowy układ równie iak dawny iest prostokątny, na trzy następuiące

$$(b')\begin{cases} 0 = dws X.dws X' + dws Y.dws Y' + dws Z.dws Z' \\ 0 = dws X.dws X'' + dws Y.dws Y'' + dws Z.dws Z'' \\ 0 = dws X'.dws X'' + dws Y'.dws Y'' + dws Z'.dws Z'' \end{cases}$$

Za pomocą dziewięciu równań (1) (2) (3) (a) (b) moglibyśmy wyznaczyć dziewięć niewiadomych X, Y, Z; X′, Y′, Z′; X″, Y″, Z″, gdyby x, y, z, x' y' z' tudzież kąty $(x'y')$, $(x'z')$, $(y'z')$ były dane. Gdyby zaś obadwa układy były prostokątne znaleźlibyśmy rzeczone ilości za pomocą równań (1), (2), (3), (a), (b′). W tym ostatnym razie można wyznaczyć też same niewiadome dogodnieyszym sposobem który wkrótce wyłożymy.

Gdyby dwie nowe osi OX′, OY′ leżały na płaszczyźnie XY, a oś OZ′ schodziła się z osią OZ, kąt Z″ dwóch osi OZ, OZ′ byłby $=$ o, kąty zaś X″, Y″ które oś OZ′ czyni z osiami OX, OY byłyby proste; w tym razie

$$dws Z''=1,\ dws Y''=0,\ dws X''=0$$

kąty także które oś OZ′ czyni z osiami OX′, OY′ są proste więc

$$dws(z'x')=0,\ dws(z'y')=0$$

przez co dwa ostatne równania (*b′*) zamienią się na

$$dws Z=0,\ dws Z'=0$$

daley równania (a) na

$$dws^2 X+dws^2 Y=1,\ dws^2 X'+dws^2 Y'=1.$$

z tych zaś wypadnie

$$dws Y=wst X,\ dws Y'=wst X'$$

równania tedy (1) (2) (3) zamienią się na

$$x=x'.dws X+y'.dws X',\ y=x'.wst X+y'.wst X'$$

formuły też same któreśmy w §. 50. 2° otrzymali.

80. Aby przeyść od układu spółrzędnych x, y, z prostokątnego, do innego spółrzędnych x''', y''' z''' także prostokątnego, wyznaczymy położenie nowych osi OX‴, OY‴, OZ‴ czyli kąty (fig. 46).

X, Y, Z, które oś OX‴
X′, Y′, Z′, które oś OY‴
X″, Y″, Z″, które oś OZ‴

czyni z trzema dawnemi osiami OX, OY, OZ; następuiącym sposobem.

Gdyby było dane położenie osi OX‴, OY‴ wiedzielibyśmy położenie osi OZ‴ iako prostopadłey do dwòch poprzedzaiących, rozwiązanie więc tego zadania zawisło od wyznaczenia położenia osi OX‴, OY‴. To położenie będzie można wyznaczyć za pomocą

1° kąta θ który płaszczyzna X‴Y‴ czyni z pł. XY,
2° kąta ψ który oś OX czyni ze śladem płasczyzny X‴Y‴ na XY
3° kąta φ który nowa oś OX‴ czyni z tymże śladem.

Zamieńmy naprzód osi OX, OY na inne prostokątne OX′, OY′ (fig. 47) któreby leżały na płasczyźnie XY i weźmy ślad OE płasczyzny X‴Y‴ na XY za oś OX′: w tym razie kąt XOX′$=\psi$, więc według § 50. 5°

$$y=y'.dws\psi+x'.wst\psi,\ x=-y'.wst\psi+x'.dws\psi \quad (d)$$

Ponieważ płasczyzna X′Y′ iest taż sama co XY, więc

$$z=z' \quad (e)$$

Poprowadźmy prostopadłą OY″ do śladu OE pod kątem pochyłości do płasczyzny XY równym θ: liniia OY″ leżyć będzie na płasczyźnie X‴Y‴, ponieważ θ iest także kątem pochyłości płasczyzn XY, X‴Y‴ a Y″OY′ kątem dwóch liniy prostopadłych do spólnego przecięcia OE tychże płasczyzn, nadto liniie OY′, OY″ i oś OZ′ czyli OZ znayduią się na iedneyże płasczyźnie, ponieważ liniią OY″ można uważać za iedno z położeń linii OY′ obracaiącey się około OX′ do którey zostaie zawsze prostopadłą.

Na płasczyźnie Y′OY″ czyli Y′OZ zamieńmy osi OY′ i OZ′ ($=$OZ) na dwie inne prostokątne OY″, OZ″, a ponieważ kąt który czynią dwie osi OY′, OY″ iest θ, więc podług tych samych co wyżey formuł (50 5°) iest

$$z'=z''.dws\theta+y''.wst\theta,\ y'=-z''.wst\theta+y''.dws\theta \quad (f)$$

nadto liniia OE iest prostopadłą do płasczyzny Y′OY″, więc zeydzie się z trzecią osią OX″ i

$$x'=x'' \quad (g).$$

Ponieważ liniia OY″ równie iak ślad OE schodzący się z osią OX″ leżą na płasczyźnie X‴Y‴, więc spółrzędne x'', y'' leżą na płasczyźnie X‴Y‴, nadto kąt osi OX‴ i OX″ ($=$OE) iest φ, więc podług tych samych co wyżey formuł, iest

$$y''=y'''.dws\varphi+x'''.wst\varphi,\ x''=-y'''.wst\varphi+x'''.dws\varphi \quad (h)$$

nareszcie, oś OZ″ schodzi się z osią OZ‴, więc

$$z''=z''' \quad (i)$$

Wstawiwszy dopiero w formuły (d) i (e) wartości wzięte dla x', y', z', z formuł (f) i (g), w otrzymane zaś wypadki wstawiwszy wartości wzięte dla x'', y'', z'' z formuł (h) i (i), otrzymamy

$$x = x'''(dws\psi.dws\varphi - dws\theta\ wst\psi.wst\varphi) -$$
$$- y'''(dws\theta.wst\psi.dws\varphi + dws\psi.wst\varphi) + z'''.wst\theta\ wst\psi$$
$$y = x'''(wst\psi\ dws\varphi + dws\theta.dws\psi.wst\varphi) +$$
$$+ y'''(dws\theta.dws\psi\ dws\varphi - wst\psi.wst\varphi) - z'''.wst\theta.dw\psi$$
$$z = x'''.wst\theta\ wst\varphi + y'''.wst\theta.dws\varphi + z'''.dws\theta.$$

Znaki wyrazow tych formuł mogą się zmieniać według pochyłości kątow θ, ψ, φ. Gdyby na przykład osi OX', OY' wzięły położenie takie iak na fig. 48 pierwsza z przeciwncy strony osi OX druga z przeciwney strony osi OY' w porównaniu do fig. 47, trzebaby zmienić znaki dla $wst\ \theta$ i $wst\ \psi$ w formułach ostatnych i w tym razie byłoby

$$x = x'''(dws\psi.dws\varphi + dws\theta.wst\psi.wst\varphi) +$$
$$+ y'''(dws\theta.wst\psi.dws\varphi - dws\psi wst\varphi) + z'''.wst\theta.wst\psi.$$
$$y = x'''(dws\theta\ dws\psi.wst\varphi - wst\psi.dws\varphi) +$$
$$+ y'''(dws\theta.dws\psi.dws\varphi + wst\psi wst\varphi) + z'''.wst\theta.dws\psi$$
$$z = -x'''.wst\theta.wst\varphi - y'''.wst\theta\ dws\varphi + z'''.dws\theta$$

Można tym formułom prostszą nadać postać wziąwszy kąt $\varphi = o$, to iest, wziąwszy ślad OE za oś OX''', w tym bowiem razie $wst\varphi = o$, $dws\varphi = 1$, i formuły zamienią się na

$$x = \ \ x'''.dws\psi + y'''.dws\theta.wst\psi + z'''.wst\theta.wst\psi$$
$$y = -x'''.wst\psi + y'''.dws\theta.dws\psi + z'''.wst\theta.dws\psi$$
$$z = \qquad\qquad - y'''.wst\theta + z'''.dws\theta$$

Porównawszy przedostatne formuły z formułami (1) (2) (3) § 79 otrzymamy

$$dwsX = dws\theta.wst\psi.wst\varphi + dws\psi.dws\varphi$$
$$dwsY = dws\theta.dws\psi.wst\varphi - wst\psi.wst\varphi$$
$$dwsZ = -wst\theta.wst\varphi$$
$$dwsX' = dws\theta.wst\psi.dws\varphi - dws\psi.wst\varphi$$
$$dwsY' = dws\theta.dws\psi.dws\varphi + wst\psi.wst\varphi$$
$$dwsZ' = -wst\theta.dws\varphi$$
$$dwsX'' = wst\theta.wst\psi$$

$$dws Y'' = wst\theta . dws\psi$$
$$dws Z'' = dws\theta .$$

81. Aby znaleźć wartości nowych spółrzędnych x', y', z', w funkcyi danych, biorąc nayłatwieyszy przypadek układow prostokątnych, dość będzie zastanowić się nad prawidłem według którego są utworzone równania (1) (2) i (3) § 78, znaydziemy bowiem według tego prawidła,

$$x' = x . dws X + y . dws Y + z . dws Z$$
$$y' = x . dws X' + y . dws Y' + z . dws Z'$$
$$z' = x . dws X'' + y . dws Y'' + z . dws X''$$

zamiast sześciu równań (a) i (b') mamy sześć następuiących

$$dws^2 X + dws^2 X' + dws^2 X'' = 1$$
$$dws^2 Y + dws \ Y' + dws^2 Y' = 1$$
$$dws^2 Z + dws^2 \ Z' + dws^2 Z' = 1$$
$$dws X . dws Y + dws X' . dws Y' + dws X'' . dws Z'' = 0$$
$$dws X . dws Z + dws X .' dws Z' + dws X'' . dws Z'' = 0$$
$$dws Y . dws Z + dws Y' . dws Z' + dws Y'' . dws Z'' = 0$$

82. Gdyby zaczęcia spółrzędnych były różne, gdyby na przykład dawne było po lewey stronie nowego, spółrzędne x, y, z byłyby powiększone względnie ilościami a, b, c wyrażaiącemi spółrzędne nowego zaczęcia odnoszone do dawnego, wstawiwszy więc $x+a$, $y+b$, $z+c$ za x, y, z, w formuły poprzedzaiącego §, będzie

$$x' = (x+a) dws X + (y+b) dws Y + (z+c) dws Z$$
$$y' = (x+a) dws X' + (y+b) dws Y' + (z+c) dws Z'$$
$$z' = (x+a) dws X'' + (y+b) dws Y'' + (z+c) dws Z''$$

Gdyby przeciwnie zaczęcie dawne było po prawey stronie nowego, wstawilibyśmy $x-a$, $y-b$, $z-c$ za x, y, z w rzeczone formuły.

II. *O spółrzędnych polarnych.*

83. 1° *na płasczyźnie.* Położenie punktu M (fig. 49) danego na płasczyźnie, można wyznaczyć za pomocą iego odległości OM $=r$ od punktu stałego O który się nazywa *polem*, kąta MOP $=\theta$ który linia MO zwana *promieniem wodzącym*, (radius vector) czyni z linią, stałą we względzie położenia, OX. Dwie ilości r, θ zowią się *spółrzędnemi polarnemi.*

Niech OX, OY oznaczaią osi spółrzędnych prostokątnych: zamierzmy sobie znaleźć wartości spółrzędnych x, y, w funkcyi spółrzędnych polarnych r, θ. Naznaczywszy OP $=x$, PM $=y$, będzie w tróykącie OPM prostokątnym przy P,

$$x=r.dws\theta,\quad y=r.wst\theta,\quad x^2+y^2=r^2;$$

za pomocą tych trzech formuł potrafimy przeyść z układu spółrzędnych prostokątnych x, y, do układu spółrzędnych polarnych r, θ, i wzaiemnie z układu polarnego do prostokątnego.

84. 2° *w przestrzeni.* Położenie punktu danego w przestrzeni można wyznaczyć za pomocą iego odległości od punktu stałego który się nazywa *polem* a owa odległość *promieniem wodzącym*, i za pomocą kątow które promień wodzący czyni z trzema osiami prostokątnemi.

Nazwiymy te kąty α, β, γ, promień wodzący R, i obierzmy pol w zaczęciu spółrzędnych prostokątnych. Cztery ilości α, β, γ, R są spółrzędnemi polarnemi. Przeydziemy z układu spółrzędnych prostokątnego do polarnego za pomocą następuiących formuł

$$x=R.dws\alpha,\quad y=R.dws\beta,\quad z=R.dws\gamma$$
$$R=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$$

85. Dogodniey iest, zamiast trzech kątow α, β, γ, używać tylko dwóch, iednego θ który czyni rzut OP promienia wodzącego na płasczyznę XY z osią OX (fig. 50) drugiego γ który promień wodzący OM$=$R czyni z osią OZ: trzy ilości R, γ, θ, są spółrzędnemi polarnemi.

Aby w funkcyi tych ilości wyrazić $dwsa$, $dws6$ wchodzące w formuły poprzedzaiącego §, mamy w tróykącie OqM prostokątnym przy q,

$$Oq = OM.dwsMOq. \text{ czyli } Oq = R.dwsa$$

w tróykącie OqP prostokątnym przy q,

$$Oq = OP.dwsPOq, \text{ czyli } Oq = OP.dws\theta$$

skąd $R.dwsa = OP.dws\theta$, i $dwsa = \frac{OP}{R} \cdot dws\theta$

aże, w tróyk: OPM prostok: przy P, $\frac{OP}{R} = wst\gamma$, więc

$$dwsa = wst\gamma.dws\theta \ (1).$$

Aby znaleźć wartość dla $dws6$ uczynimy toż samo co w ostatnym razie wykreślenie, z tą różnicą iż tu odniesiemy do osi OY cośmy tam odnosili do osi OX, i że, zamiast kąta θ, wezmiemy iego dopełnienie POY, czyli $wst\theta$ za $dws\theta$, wziąwszy nakoniec $dws6$ zamiast $dwsa$, równanie (1) zamieni się na

$$dws6 = wst\gamma.wst\theta \ (2)$$

Wstawiwszy dopiero wartości dla $dwsa$, $dws6$, które daią równania (1) i (2), w formuły poprzedzaiącego §, otrzymamy

$$x = R.wst\gamma dws\theta, \ y = R.wst\gamma.wsts\theta \ z = R.dws\gamma$$

Kąt θ może się zmieniać od o do $400°$, a kąt γ od o do $200°$.

Gdyby zaczęcia spółrzędnych były szczególne dla każdego układu, powiększylibyśmy lub zmnieyszylibyśmy wartości spółrzędnych prostokątnych ilościami stałemi wyrażaiącemi spółrzędne nowego zaczęcia wzięte w układzie osi prostokątnym.

CZĘŚĆ DRUGA

O LINIIACH DRUGIEGO RZĘDU.

86. Odnosząc liniią prostą uważaną na płasczyźnie lub w przestrzeni do układu osi spółrzędnych, znaleźliśmy równania za pomocą których można wyznaczyć położenie linii prostey. Widzieliśmy, że te równania są pierwszego stopnia i że należą do samey tylko linii prostey, którą dla tego nazwaliśmy liniią pierwszego rzędu. Wystawiliśmy sobie iż, przez obrot linii prostey około inney do niey prostopadłey, tworzy się płasczyzna: i tak znaleźliśmy równanie płasczyzny które, iak widzieliśmy, iest także pierwszego stopnia z trzema zmiennemi. A ponieważ te równania są pierwszego stopnia; wartość zmienney którey-kolwiek, inne zmienne wziąwszy za wiadome, iest zawsze poiedynczą; i gdy wartości wszystkich zmiennych będą wiadome, wyznaczymy za ich pomocą iedyny tylko punkt na płasczyźnie lub w przestrzeni.

Przypuśćmy teraz iż mogą się znaydować na płasczyźnie liniie takie których natura i utwor zawisły od równania stopnia drugiego z dwiema zmiennemi: mówię z dwiema zmiennemi, ponieważ owe linie uważamy na płasczyźnie i przeto odnosić ie będziemy do dwóch osi spółrzędnych: aże utwor tych liniy ma podlegać stałemu prawu zawartemu w postaci równania stopnia drugiego, więc owe liniie, ieśli są iakie, będą foremne. Przyrodzenie stawia przed oczy nasze mnóstwo liniy krzywych trafem utworzonych, i te pod żadne utworzenia prawo, czyli pod żadne równanie, podciągnięte być nie mogą. Gdybyśmy w przyrodzeniu nachodzili liniie płaskie krzywe foremne i gdyby liczba tych liniy była stała i nam wiadoma, moglibyśmy od razu wziąć ie pod rozbior i tak śledzić ich własności. Aże, ani takowych liniy krzywych foremnych ani ich liczby, nie znamy; udamy się do analizy i usiłować będziemy rozwiązać za iey pomocą to ogólne *zadanie*: znaleźć za pomocą ogólnego równania stopnia drugiego między dwiema zmiennemi ilościami liczbę i postać liniy krzywych foremnych płaskich.

87. Że równanie stopnia drugiego z dwiema zmiennemi zawiera prawo tworzenia linii krzywey, przekonamy się z następuiącego nayprostszego przykładu.

Niech będzie równanie stopnia 2go

$$y^2=2ay\sqrt{x}-b^2,$$

rozwiązawszy ie względem y, otrzymamy

$$y=a\sqrt{x}\pm\sqrt{(a^2x-b^2)}.$$

Wykreślmy dwie osi OX, OY (fig. 51) pod kątem prostym i weźmy na pierwszey wartość OB dla x, równanie

$$y=a\sqrt{x}$$

wyrażać będzie liniią prostą OA przechodzącą przez zaczęcie O, a AB będzie wartością dla $a\sqrt{x}$, odciąwszy dopiero po obudwóch stronach punktu A na linii DB części AD $=\sqrt{(a^2x-b^2)}$ i AD' $=-\sqrt{(a^2x-b^2)}$, mieć będziemy dwa punkta D i D' należące do linii którey służy założone równanie. Gdy daley naznaczymy dla x wartość taką aby było

$$a^2x-b^2=0;$$

część wartości całkowitey dla y zniknie, i pozostanie poiedyncza wartość $y=a\sqrt{x}$, aże

$$x=\frac{b^2}{a^2}, \text{ więc } y=b.$$

wziąwszy więc OF za wartość $\frac{b^2}{a^2}$, będzie FE$=b$:
Wyznaczywszy więcey punktow takich iak D′, E, D i połączywszy ie linią krzywą; tey służyć będzie założone równanie stopnia drugiego, ponieważ za pomocą tego równania wykreśloną być może.

Liniie krzywe uważane na płaszczyźnie które za pomocą równania stopnia drugiego z dwiema zmiennemi wykreślić można, nazywaią się *liniiami drugiego rzędu.* Sposób analityczny doyścia ich liczby i postaci iest następuiący.

DZIAŁ PIERWSZY

O POSTACI I LICZBIE LINIY DRUGIEGO RZĘDU.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

O wyznaczeniu postaci i liczby liniy krzywych płaskich za pomocą ogólnego równania stopnia drugiego z dwiema ilościami zmiennemi.

88. Abyśmy za pomocą ogólnego równania stopnia drugiego z dwiema zmiennemi,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \quad (1)$$

wyznaczyli postać linii krzywey do którey może należyć, uważać będziemy ilości zmienne x, y, za dwie spółrzędne prostokątne, i w tem założeniu rozwiążemy równanie względem y: wypadnie

$$y=-\frac{Bx+D}{2A} \quad (A).$$

$$\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}$$

Wyraz pierwszy drugiey strony tego wypadku oznacza rzędną linii prostey którey równanie iest

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}.$$

Aby wykreślić tę liniią prostą naznaczymy naprzód, w-iey równaniu, $x=o$; skąd wypadnie $y=-\frac{D}{2A}=$ rzędney punktu w którym liniia prosta przecina oś OY. Wziąwszy więc $OA=-\frac{D}{2A}$, przeniesiemy owę rzędną od O do A. (fig. 52) Naznaczymy daley, w temże równaniu, $y=o$, skąd wypadnie $x=-\frac{D}{B}=$ odciętey punktu w którym liniia prosta przecina oś OX. Wziąwszy więc $OB=-\frac{D}{B}$ przenieśmy OB od O do B: a poprowadziwszy przez punkta B i A liniią prostą BB′ iey równanie będzie $y=-\frac{Bx+D}{2A}$. Jakoż, obrawszy na tey linii punkt N, mamy proporcyią OB: OA=PB: PN czyli

$$-\frac{D}{B} : -\frac{D}{2A} = x+\frac{D}{B} : -y,$$

skąd wypada $y=-\frac{Bx+D}{2A}$.

Otrzymamy dwa punkta linii krzywey odpowiadaiące punktowi N linii BB′ i wartości $x=OP$, gdy przeniesiemy, poczynaiąc od punktu N, po obudwóch stronach linii BB′, odległość NM i NM′ którey wartość iest

$$\frac{1}{2A}\sqrt{\{(B^2-4AC)x^2 + 2(BD-E)x + D^2 - 4AF\}}$$

punkta mówię M, M′ będą na linii krzywey. Biorąc dopiero wartości dla x mnieysze lub większe od OP, wartości dla y będą także mnieysze lub większe od PM, PM' a punkta wyznaczone tym sposobem będą się znaydowały na linii krzywey.

Ponieważ liniie takie iak NM, NM' są w każdem położeniu równe sobie; liniia BB' przechodząca przez środki wszystkich liniy takich iak MM' w linii krzywey zawartych, nazywa się *średnicą* linii krzywey.

89. Trzy mogą być sczególne przypadki z równaniem (A).

1° spółczynnik $B^2 - 4AC$ ilości x^2 może być odiemny, 2° dodatny, 3° $= 0$ Jeżeli nie iest $= 0$, będzie można przywieść równanie do postaci

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')\}} \quad (B)$$

gdzie x', x'' oznaczaią pierwiastki polynomu znakiem niespółmierności obiętego, te zaś znaydziemy naznaczywszy ów polynom równy zero.

90. Co do *pierwszego przypadku* w którym

$$B^2 - 4AC < 0$$

Zważymy iż czynniki $x - x'$, $x - x''$ wchodzące w drugą stronę równania (B) mogą być 1° rzeczywiste i nierówne 2° rzeczywiste i równe 3° uroione.

1° Gdy czynniki $x - x'$, $x - x''$ są rzeczywiste i nierówne; w ów czas naznaczaiąc dla x wartości zawarte między x' i x'', czynniki $x - x'$, $x - x''$ będą miały znaki przeciwne a ich iloczyn będzie odiemny, rozmnożywszy więc ten iloczyn przez ilość odiemną $B^2 - 4AC$, otrzymamy wypadek dodatny i tak dwie wartości dla y będą rzeczywiste. W tym razie każdey wartości x iak na przykład OP, zawartey między $x' = OP'$ i $x'' = OP''$ odpowiadać będą dwa punkta M, M' linii krzywey

Naznaczywszy $x = x' = OP'$, albo $x = x'' = OP''$, ilość zawarta pod znakiem pierwiastku zniknie, rzędne linii krzywey staną się równe rzędnym linii prostey BB'. Ponieważ, biorąc dla x wartość nie zawartą między OP', OP'' wypadnie ilość pod znakiem pierwiastku odiemna, co uczyni wartość dla y uroioną; wniesiemy iż liniia krzywa nie rozciąga się po za rzędne P'N', P''N'' a zatem iest zawartą między temiż rzędnemi i tak ze wszech stron od M do M' i od N' do N'' iest zamkniętą.

Gdybyśmy byli rozwiązali równanie (1) względem x, otrzymalibyśmy ilość, zawartą pod znakiem niespółmierności, którą moglibyśmy przywieść do postaci

$$(B^2-4AC)(y-y')(y-y''):$$

w tym razie biorąc dla y wartości nie zawarte między y' i y'', iloczyn $(y-y')(y-y'')$ byłby dodatny, aże B^2-4AC iest ilością odiemną, więc wartość dla x, byłaby uroioną skąd wniesiemy że liniia krzywa iest ze wszech stron zamknięta.

2° Gdy czynniki $x-x'$, $x-x''$ będą rzeczywiste i równe, ich iloczyn będzie $(x-x')^2$ a wartość dla y wypadnie

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}(x-x')\sqrt{(B^2-4AC)}$$

z którey widzimy iż tylko na przypadek $x=x'$ wartość dla y iest rzeczywistą, to iest

$$y=-\frac{Bx'+D}{2A}$$

te wartości dla x, y w funkcyi x' są więc spółrzędnemi punktu położonego na średnicy i w tym razie równanie założone (1) należy do punktu.

3° gdy czynniki $x-x'$, $x-x''$ będą uroione, ich iloczyn będzie dodatny, ilość znakiem niespółmierności obięta odiemną a wartość dla y uroioną i równanie (1) nie będzie wyrażało żadney linii krzywey.

91. Co do *drugiego przypadku* w którym

$$B^2-4AC>0$$

Zważymy iż czynniki $x-x'$, $x-x''$ wchodzące w drugą stronę równania (B) mogą być 1° rzeczywiste i nierówne 2° rzeczywiste i równe, 3° uroione

1° gdy czynniki $x-x'$, $x-x''$ są rzeczywiste i nierówne, ich iloczyn, naznaczywszy dla x wartości zawarte między x' i x'', będzie odiemny, więc rozmnożony przez ilość dodatną B^2-4AC przeydzie na odiemny, wartość dla y będzie uroioną a liniia krzywa rozciągać się nie będzie między punktami N', N'' odpowiadaiącemi odciętym $x'=OP'$ $x''=OP''$.

Wziąwszy $x=x'$, $x=x''$ wyraz niespółmierny zniknie, i otrzymamy rzędne punktow N', N'' w których liniia krzywa przecięta iest od średnicy.

Wziąwszy dla x wartość różną od tych które są zawarte między x' i x'', iloczyn $(x-x')(x-x'')$ będzie dodatny, wartość dla y rzeczywistą, i liniia krzywa rozciągać się będzie z obudwóch stron liniy odciętych tak dodatnych iak odiemnych, według czterech odnog N'Q, N''Q', i N'q', N'q.

2° gdy czynniki $x-x'$, $x-x''$ są równe, ich iloczyn zamieni się na $(x-x')^2$, a wartość y na

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}(x-x')\sqrt{(B^2-4AC)}$$

która wyraża dwie liniie proste.

3° gdy czynniki $x-x'$, $x-x''$ są uroione, ich iloczyn iest dodatny i w tym razie będzie można wykreślić liniią krzywą: a ponieważ odcięte x', x'' są uroione, więc ilość $-\frac{Bx+D}{2A}$ w którą wchodzi x, mieć nie może wartości rzeczywistey, to iest, żadna wartość y kończyć się nie będzie na linii BB', czyli liniia krzywa żadnego punktu ze średnicą spólnego mieć nie będzie, i położenie krzywey będzie RMR', R''MR'''.

92. W *trzecim przypadku* który iest

$$B^2-4AC=0$$

równanie (A) zamieni się na

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{\{2(BD-2AE)x + D^2 - 4AF\}}$$

lub, naznaczywszy $\frac{D^2-4AF}{BD-2AE} = x'$, na

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{\left(2(BD-2AE)(x-x')\right)}$$

Gdy ilość $BD - 2AE$ iest dodatną, trzeba wziąć za x wartość większą od ilości staley x' aby ilość, pod znakiem niespółmierności zawarta, była dodatną a wartość dla y rzeczywistą. Gdy $x < x'$, czynnik $x - x'$ iest odiemny a wartość dla y uroioną. Linia więc krzywa HNH′ ciągnie się nieograniczenie tylko w iedną stronę poczynaiąc od $x = x'$: rzędna P′N′ odpowiadaiąca tey odciętey iest styczną i granicą linii krzywey.

Gdy ilość $BD - 2AE$ iest odiemną, wypadki są też same, z tą różnicą iż linia krzywa ciągnie się w stronę odciętych odiemnych: w obudwu razach $x = x'$ da

$$y = -\frac{Bx + D}{2D}$$

równanie średnicy linii krzywey.

Rozwiązawszy równanie względem x, otrzymamy też same wypadki: w tym razie równanie średnicy wypadnie

$$x = -\frac{By + E}{2C}$$

albo, wyciągnąwszy wartość dla y,

$$y = -\frac{2Cx}{B} - \frac{E}{B}$$

$a\check{z}e\, B^2 - 4AC = 0$, więc $\frac{2C}{B} = \frac{B}{2A}$, skąd

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{E}{B}$$

aże równanie pierwszey średnicy iest

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}$$

więc dwie średnice linii krzywey w tym ostatnym przypadku odkrytey są równoodległe (32 i 40).

93. Już tedy zadanie nasze iest rozwiązane. Znaleźlismy za pomocą ogólnego równania stopnia drugiego (1) iż trzy są główne linie drugiego rzędu. Z tych *pierwsza* MNM′N′ iest ze wszech stron zamknięta: iey postać zawisła od własności spółczynników A, B, C równania (1) według którey ilość

B^2-4AC *ma być odiemną*:

w tym razie spółczynniki A, C muszą mieć znaki równe, to iest muszą być albo obadwa dodatne, albo obadwa odiemne, aby ich iloczyn AC był dodatny a tem samem ilość B^2-4AC odiemną: ten iest główny warunek aby równanie ogólne (1) należało do linii krzywey zamkniętey

druga złożona iest z dwóch oderwanych lecz równych, bo podług iednego prawa wykreślonych, części QN″Q′, *q*N′*q*′ które się ciągną nieograniczenie w przeciwne sobie strony nie mogąc być zamknięte. Postać tey linii krzywey zawisła od własności spółczynnikow A, B, C równania ogólnego według którey ilość

B^2-4AC *ma być dodatną*:

w tym razie spółczynniki A, C muszą mieć znaki różne aby ich iloczyn AC był odiemny a tem samem ilość B^2-4AC dodatną: ten iest główny warunek aby równanie ogólne (1) należało do linii krzywey którą uważamy.

trzecia HNH ograniczona iest z-iedney strony, a dwie iey odnogi N′H N′H′ ciągną się bez granic nie mogąc być nigdy zamknięte. Postać tey linii krzywey zawisła od własności spółczynnikow A, B, C równania ogólnego według którey ma być

$$B^2-4AC=o:$$

równanie to daie naprzód $B^2=4AC$, gdyby zatem spółczynnik B wyrazu zawieraiącego xy był $=o$, mielibyśmy $AC=o$, a zatem iedna z-ilości A, C które są spółczynnikami kwadratów z-ilości zmiennych, byłaby $=o$: ten iest główny warunek aby równanie ogólne (1) należało do linii krzywey którą uważamy.

94. Tyle odkrywszy własności ogólnego równania na każdy z trzech rodzaiow liniy drugiego rzędu, wypada nam z kolei rozwiązać następuiące *zadanie*: przywieść równanie ogólne drugiego stopnia z dwiema zmiennemi do postaci iak można nayprostszey, pod którą nie przestałoby należyć do liniy krzywych któreśmy odkryli.

Jeżeli potrafimy rozwiązać to równanie pozostanie nam tylko dać przyzwoite znaki spółczynnikom potęg ilości zmiennych x, y, według 1go, i 2go przypadku lub rozrządzić niemi według 3go przypadku § poprzedzaiącego, a tak otrzymamy właściwe równanie każdey z trzech liniy krzywych, które w końcu osobnemi będziemy mogli rozróżnić nazwiskami.

95. Można przewidzieć iż, zmieniaiąc układy osi spółrzędnych, potrafimy rozwiązać zadanie.

Niech więc dawne osi OX, OY (fig. 53) do których odnosiliśmy równanie liniy 2go rzędu

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o \quad (1)$$

wezmą nowy kierunek osi, prostokątnych OX′, OY′, nie zmieniwszy zaczęcia: niech $PM=y$, $OP=x$ oznaczaią spółrzędne prostokątne punktu M linii krzywey w dawnym układzie: spółrzędne nowe będą $MP'=y'$, $OP'=x'$: naznaczywszy kąt $XOX'=\alpha$, będzie (50, 50)

$$y=y'.dwsa+x'.wsta, \quad x=-y'.wsta+x'.dwsa$$

wstawiwszy w równanie (1) zamiast x, y, ich wartości, i oznaczywszy przez A′ summę wyrazow mnożących y'^2, przez B′ summę tych które mnożą $x'y'$, przez C′, D′, E′ summy tych które mnożą x'^2, y', x', otrzymamy równanie

$$A'y'^2+B'x'y'+C'x'^2+D'y'+E'x'+F=0$$

w ktorem $B'=2(A-C)wst\alpha.dws\alpha+B.dws^2\alpha-B.wst^2\alpha$.
Ponieważ α iest ilością zmienną, wyznaczymy iey wartość przywodzącą spółczynnik B′ do zera, założywszy równanie

$$-B.wst^2\alpha+2(A-C)wst\alpha.dws\alpha+B.dws^2\alpha=0$$

czyli, podzieliwszy obie strony przez $-B.dws^2\alpha$,

$$stycz^2\alpha-\frac{2(A-C)}{B}.stycz\alpha-1=0 \text{ (a)}$$

skąd $stycz\alpha=\frac{A-C}{B}\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2+1\right\}}$

Ponieważ ta wartość dla $stycz\alpha$ iest rzeczywista, wniesiemy iż nie zmieniwszy zaczęcia ani prostopadłości osi, można zawsze zniszczyć wyraz $B'x'y'$, czyli wyznaczyć dwa położenia osi OX takie iż nowe równanie linii będzie

$$A'y'^2+C'x'^2+D'y'+E'x'+E=0.$$

Nazwawszy a, a' dwie wartości dla $stycz\alpha$ które wywiedziemy z równania (a) stopnia drugiego, ich iloczyn będzie równy ostatniemu wyrazowi równania, to iest

$aa'=-1$, skąd $aa'+1=0$

formuła $aa'+1=0$ oznacza (41. 2°) iż dwie osi, według x, dwóch nowych układow są prostopadłe do siebie, więc te dwa układy wychodzą na ieden: czyli, iedno tylko iest położenie osi spółrzędnych do których odnosząc liniią krzywą, zniknie w równaniu powyższem wyraz $B'x'y'$.

Wyznaczywszy tym sposobem wartość dla $stycz\alpha$ dodatną, wstawimy ią w formuły

$$dwsa = \frac{1}{\sqrt{(1+stycz^2\alpha)}},\ wsta = \frac{stycza}{\sqrt{(1+styc^2\alpha)}}$$

wartości zaś otrzymane dla *dwsa*, *wsta* w spółczynniki A', C', D', E', których wartości tym sposobem wyznaczone nazwawszy M, N, P, Q; równanie które nas zatrudnia zamieni się, odrzuciwszy kreski iako iuż nie potrzebne, na

$$My^2+Nx^2+Py+Qx+F=0$$

96. Zmieńmy teraz zaczęcie spółrzędnych zachowuiąc ten sam kierunek nowych osi OX', OY' równoodległy od osi OX, OY które na fig. 54 są też same, co OX', OY' na fig. 53. Niech punkt O' będzie tem nowem zaczęciem, a punkt M iednym z punktow linii krzywey, naznaczymy

$$MP=y,\ PP'=b,\ MP'=y'$$
$$OP=x,\ QO=a,\ P'O'=x'$$

skąd $y=y'+b$, $x=x'+a$;, wstawiwszy te wartości za x, y w ostatne równanie poprzedzaiącego §, otrzymamy równanie

$$My'^2+Nx'^2+(P+2Mb)y'+(Q+2Na)x'+F'=0 \quad (c)$$

w którem $F'=Mb^2+Na^2+Pb+Qa+F$.

Według tego cośmy poznali w § 93, zważymy iż, ieśli równanie (c) należy do iedney z dwóch pierwszych liniy w spomnionym § rozróżnionych; spółczynniki M, N oznaczaią pewne ilości: ieżeli zaś równanie (c) należy do trzeciey linii owego §; w ów czas ieden ze spółczynnikow M, N musi być równy zero, ponieważ w równanie (c) nie wchodzi wyraz zawieraiący iloczyn zmiennych $x'y'$.

W pierwszym razie można wyznaczyć wartości dla a, b, takie przez które znikłyby w równaniu (c) wyrazy $(P+2Mb)y'$, $(Q+2Na)x'$: założymy w tym zamiarze

$$P+2Mb=0,\ Q+2Na=0$$

i równanie (c) zamieni się na

$$My'^2+Nx'^2+F'=0 \quad (D)$$

Według tego cośmy wyżey postrzegli (93), równanie to należy do linii krzywey zamkniętey ieżeli znaki spółczynników M, N, są iednakowe, dawszy więc równaniu (D) postać

$$\frac{M}{F}y^2+\frac{N}{F}x^2+1=0 \quad (E)$$

kreski iako iuż niepotrzebne odrzuciwszy; ilości $\frac{M}{F}$, $\frac{N}{F}$ muszą być odiemne, bo w tym tylko przypadku pierwiastki równania (E) będą rzeczywiste: naznaczmy przeto $\frac{M}{F}=-\frac{1}{B^2}$, $\frac{N}{F}=-\frac{1}{A^2}$ a równanie (E) zamieni się na

$$\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1$$

czyli

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$$

ta iest nayprostsza postać równania linii krzywey zamkniętey którąśmy wyżey odkryli a która iest nazwana ELLIPSĄ.

Gdy znaki spółczynników M, N równania (D) będą różne (93), równanie będzie należało do linii krzywey złożoney z dwóch oderwanych równych części, które się ciągną nieograniczenie w dwie przeciwne strony a nie mogą być nigdy zamknięte naznaczywszy więc $\frac{M}{F}=+\frac{1}{B^2}$, $\frac{N}{F}=-\frac{1}{A^2}$ równanie (E) zamieni się na

$$\frac{y^2}{B^2}-\frac{x^2}{A^2}=-1$$

czyli na

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2:$$

ta iest nayprostsza postać równania linii krzywey dopiero opowiedzianey która iest nazwana HYPERBOLĄ.

W drugim razie, gdy iedna z-ilości M, N na przykład N iest równą zero, nie można wyznaczyć ilości a, b za pomocą tych samych co wyżey równań, lecz za pomocą równań

$$P+2Mb=o,\quad Mb^2+Pb+Qa+F=o$$

z których wyciągniemy

$$b=-\frac{P}{2M},\quad a=-\frac{Mb^2+Pb+F}{Q}$$

wstawiwszy zaś te wartości b, a w równanie (c), to zamieni się na

$$My^2+Qx=o,\ \text{czyli}\ y^2+\frac{Q}{M}x=o:$$

ta iest nayprostsza postać równania linii trzeciey, którąśmy wyżey (93) odkryli, a która iest nazwana PARABOLĄ.

97. Te są trzy główne liniie drugiego rzędu: znali ie starożytni Geometrowie, lecz dopiero nowoczesney analizie winniśmy tę pewność matematyczną z-iaką wyrzec możemy iż takich liniy nie masz ani mniey ani więcey iak trzy. Poznaymy bliżey naturę równań tych liniy.

98. Aby się dowiedzieć co znaczą ilości A, B wchodzące w równanie ellipsy

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$$

odnoszoney do układu prostokątnego osi (96) OX, OY; (fig. 55) naznaczymy $y=o$, i znaydziemy punkt w którym ellipsa przecina oś OX: wypadnie $x=\pm A$, biorę tedy $OA=+A$, $OA'=-A$ a przez punkta A, A′ osi OX przechodzić będzie ellipsa. Naznaczywszy daley $x=o$, wypadnie $y=\pm B$, biorę tedy $OB=+B$, $OB'=-B$, i przez punkta B, B′ przechodzić będzie ellipsa: zważywszy nareszcie formuły

$$y = \pm \frac{B}{A} \sqrt{(A^2 - x^2)},\ x = \pm \frac{A}{B} \sqrt{(B^2 - y^2)}$$

z równania ellipsy wywiedzione; wniesiemy iż ilości A, B wchodzące w równanie elipsy oznaczaią połowy średnic ellipsy pod kątem prostym przecinaiących się które zowią *osiami.* Osi te są nierówne tak iak ilości A i B: iedna z nich $A'A = 2A$ nazywa się *osią wielką*, druga $BB' = 2B$ zowie się *osią małą*, punkt O zowie się *środkiem* ellipsy, równanie nareszcie które nas zatrudnia zowią równaniem *odnoszonem do środka i osi ellipsy.*

99. Gdy ilości A, B to iest połowice osi są równe, ellipsa iest liniią krzywą którąśmy w zasadach Geometryi poznali pod nazwiskiem okręgu koła: równanie tedy koła z równania ellipsy wypadaiące iest

$$y^2 + x^2 = A^2,$$

a tak koło iest ellipsą którey obiedwie osi są równe.

Wziąwszy środek koła za zaczęcie spółrzędnych (fig. 56) będzie $Ob = x$, $ab = y$, $ab^2 + bo^2 = Oa^2$ czyli

$$y^2 + x^2 = Oa^2,$$

to iest, w kole summa kwadratow ze spółrzędnych równa iest kwadratowi z promienia: więc A w przedostatnem równaniu oznacza promień koła.

100. Takimże sposobem znaydziemy iż ilości A, B wchodzące w równanie hyperboli

$$A^2 y^2 - B^2 x^2 = - A^2 B^2$$

oznaczaią połowice OA, OB osi tey linii krzywey (fig. 57), gdzie punkt O iest środkiem hyperboli: w tym razie znaydziemy

$$OA = A,\quad OB = B\sqrt{-1}$$

pierwsza więc oś A'A iest rzeczywistą, *druga* B'B iest uroioną, i tę tylko dla symetryi wyrażaią na figurze.

101. Aby wyznaczyć punkta w których parabola (fig. 58) przecina osi spółrzędnych prostokątnych do

których iest odnoszoną, naznaczymy $x=0$, w-iey równaniu

$$y^2 = -\frac{Q}{M}x$$

skąd wypadnie $y^2=0$: aże równania $y^2=0$, $x=0$ należą do zaczęcia spółrzędnych, wniesiemy iż ta liniia krzywa przecina oś OX w zaczęciu a iest styczną do osi OY w tymże punkcie. Aby zaś wyznaczyć ilość $\frac{Q}{M}$ w równanie paroboli wchodzącą, naydogodnieyszy będzie sposób następuiący.

Obrawszy na płaszczyźnie punkt stały F, (fig. 59) liniią stałą BL, tudzież punkta M, M′ tak aby, spuściwszy z każdego prostopadłe MQ, M′q na liniią BL i od tychże punktow poprowadziwszy liniie MF, M′F do punktu stałego F, było $MQ=MF$, $M'q=M'F$.... znaleźć co za liniia krzywa iest mieyscem wszystkich takowych punktow M, M′, O.

Według wysłowionego warunku utworzenia linii krzywey widzimy, iż z punktu F spuściwszy prostopadłą FB, którą nazwiemy p na BL i podzieliwszy BF na dwie równe części w punkcie O, punkt ten będzie także iednym z punktow linii krzywey. Weźmy punkt O za zaczęcie osi spółrzędnych prostokątnych OX, OY, i spuśćmy z M prostopadłą MP na OX: w tróykącie prostokątnym MFP, mamy

$$MF^2 = MP^2 + FP^2$$

czyli $$MF^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

aże $$MF = MQ = OP + OB = x + \frac{p}{2},$$

więc, $$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

czyli, przywiódłszy do nayprostszego wyrażenia,

$$y^2 = 2px.$$

Takież samo równanie otrzymalibyśmy względem innego któregokolwiek punktu M′: równanie więc znalezione cechuie liniią pewną krzywą będącą mieyscem wszystkich takowyych punktow: aże równanie paraboli

$$y^2 = -\frac{Q'}{M}x$$

takąż iak znalezione ma postać, więc liniia krzywa MM′O iest także parabolą: a zatem ilość $\frac{Q}{M}$ bez względu na znak iest $= 2p =$ ilości którą nazywaią *Parametrem paraboli.* Parametrem iest, iak widzimy, liniia M′m' prostopadła do osi w punkcie stałym F który nazywaią *ogniskiem.* Jest bowiem p czyli BF$=q$M′$=$M′F, skąd $2p = 2$M′F$=$M′m. Równanie więc paraboli tak opowiemy: kwadrat z rzędney równy iest prostokątowi z parametru i odciętey.

102. Naywiększą ze średnic ellipsy iest oś wielka a naymnieyszą oś mała (fig. 60).

Aby to twierdzenie dowieść, prowadzę przez środek O średnicę iakąkolwiek MM′, równanie iey będzie

$$y = ax$$

wstawiwszy tę wartość y w równanie ellipsy $A^2y^2 + Bx^2 = A^2B^2$ otrzymamy

$$x^2 = \frac{A^2B^2}{A^2a^2 + B^2}$$

a zatem na mocy równania $y^2 = a^2x^2$, będzie

$$y^2 = \frac{A^2B^2a^2}{A^2a^2 + B^2}$$

i

$$OM = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{\left\{\frac{A^2B^2(1 + a^2)}{A^2a^2 + B^2}\right\}},$$

$$MM'=2\sqrt{\left\{\frac{A^2B^2(1+a^2)}{A^2a^2+B^2}\right\}}$$

Aby znaleźć naywiększą i naymnieyszą wartość iakie mieć może to ostatne wyrażenie, założymy iż $A>B$, wstawimy B za A w mianownik, i mieć będziemy

$$\frac{A^2B^2(1+a^2)}{A^2a^2+B^2}<\frac{A^2B^2(1+a^2)}{B^2(1+a^2)} \text{ czyli } <A^2$$

skąd wypada że $MM'<2A$, to iest, wszelka średnica mnieyszą iest od wielkiey osi.

Wstawiwszy przeciwnie A za B w mianownik, wypadnie

$$\frac{A^2B^2(1+a^2)}{A^2a^2+B^2}>B^2$$

skąd $\qquad MM'>2B$

to iest, wszelka średnica iest większą od osi małey. Aby się przekonać że w hyperboli oś pierwsza iest naymnieyszą ze średnic dosyć iest uważyć iż $OM>OP$ (fig. 61) a tym bardziey $OM>OB$, skąd $2OM>2OB$ czyli $MM'>BB'$.

103. Za pomocą ogólnego równania

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

liniy drugiego rzędu, można iescze odkryć układ liniy prostych, zwanych *Asymptotami*, przez swoię własność osobliwych.

Rozwiązawszy założone równanie względem y otrzymamy

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm$$

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{B^2-4AC}{4A^2}\right)x^2+\left(\frac{BD-2AE}{4A^2}\right)x+\frac{D^2+4AF}{4A^2}\right\}}$$

Według tey wartości y, wykreślimy liniią krzywą MDM′ (fig. 62), iedną z trzech iuż wiadomych, według natury ilości B^2-4AC (93). Jest naprzód

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}$$

równaniem średnicy BB', w którem naznaczywszy $x = o$, otrzymamy $y = -\frac{D}{2A} = OB$, naznaczywszy zaś $y = o$, otrzymamy $x = -\frac{D}{B} = OG$: liniia prowadzona przez punkta znalezione G, B będzie średnicą krzywey. Wziąwszy OP za wartość x będzie $PN = -\frac{Bx + D}{2A}$, wziąwszy NM, NM'

$$= \sqrt{\left\{\left(\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right)x^2 + \left(\frac{BD - 2AE}{4A^2}\right)x + \frac{D^2 - 4AF}{4A^2}\right\}}$$

mieć będziemy punkta M, M' linii krzywey, punkt nareszcie D wyznaczymy tym samym iak na fig. 52 sposobem.

To założywszy, naznaczmy

$$\frac{B^2 - 4AC}{4A^2} = m, \frac{BD - 2AE}{4A^2} = n, \frac{D^2 - 4AF}{4A^2} = p$$

podzielmy i rozmnożmy przez x^2 ilość obiętą znakiem pierwiastku; a wypadnie

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm x \sqrt{\left(m + \frac{m}{x} + \frac{p}{x^2}\right)} \quad (A)$$

Przypuściwszy dopiero iż x iest ilością nieskończenie wielką, równanie (A) przeydzie na

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm x\sqrt{m} : \quad (B)$$

oznacza ono iż za powiększeniem odciętey x, rzędna y linii krzywey którey równanie iest (A), zbliża się coraz bardziey do rzędney linii prostey, oznaczoney iednem z równań (B). Uważaymy, iż spółrzędne y, x, wchodzące w równania (B) różnemi są od tych które wchodzą w równania (A), że pierwsze należą do liniy prostych BS, BS′, drugie do linii krzywey MDM′.

Aby znaleźć punkt w którym liniie BS, BS′ przecinaią oś OY naznaczymy w-ich równaniach $x=0$, a wypadek otrzymany

$$y=-\frac{D}{2A}$$

oznacza iż liniie BS, BS′ przecinaią oś OY, i średnicę GBB′ w-iedneyże odległości $=$ OB od zaczęcia O. Aby zaś znaleźć punkta w których liniie BS, BS′ przecinaią oś OX, naznaczymy $y=0$ w-ich równaniach (B), a otrzymawszy wypadki

$$x=\frac{D}{2A\sqrt{m}-B},\quad x=-\frac{D}{2A\sqrt{m}+B},$$

za pomocą pierwszego wyznaczymy punkt C, za pomocą drugiego punkt E, poprowadzimy potem przez punkta B i C iedną; przez B i E drugą liniią prostą i będziemy mieli dwie liniie BS, BS′ oznaczone równaniami (B).

Aby rozebrać przypadek równey odciętey x w równaniach (A) i (B), odciągnijmy stronami drugie od pierwszych: różnica z spółrzędnych linii krzywey i prostey wypadnie

$$z=\pm\left\{\sqrt{\left(m+\frac{n}{x}+\frac{p}{x^2}\right)}-\sqrt{m}\right\}x$$

Aby się dowiedzieć iakiey zmianie, za powiększeniem się x podlegnie ta wartość dla z; rozmnożymy ią i podzielimy przez $\sqrt{\left(m+\frac{n}{x}+\frac{p}{x^2}\right)}+\sqrt{m}$, i otrzymamy

$$z=\pm\frac{n+\frac{p}{x}}{\sqrt{m}+\sqrt{\left(m+\frac{n}{x}+\frac{p}{x^2}\right)}}.$$

widzimy dopiero że im bardziey powiększy się x, tym bardziey zmnieyszy się $\frac{p}{x}$ i $\frac{n}{x}$, tak iż wartość licznika zbliży się do n, a mianownika do $2\sqrt{m}$, i granica różnicy maleiącey rzędnych linii prostey i krzywey, będzie

$$z = \pm \frac{n}{2\sqrt{m}}$$

a zatem liniia krzywa zbliża się nieustannie do dwóch liniy prostych lecz z niemi nigdy zeyść się nie może. Gdy więc odciągniemy od drugich stron równań (B) ilość $\pm \frac{n}{2\sqrt{m}}$, otrzymamy równania dwóch nowych liniy prostych równoodległych względnie od BS, BS′, aże na ów czas zniknie granica zbliżenia się linii krzywey i dawney prostey któreykolwiek, więc krzywa zeydzie się z nowemi prostemi Os Os', gdy x mieć będzie wartość nieskończenie wielką, czyli zeydzie się w odległości nieskończenie wielkiey. To wysłowienie analityczne, wychodzi na to proste, że liniie Os, Os' nigdy się nie zeydą z krzywą: od tey własności nazywaią się one *asymptotami*. Równania więc asymptot są

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm x\sqrt{m} \mp \frac{n}{2\sqrt{m}}$$

czyli $$y = -\frac{Bx+D}{2A} \mp \frac{2mx-n}{2\sqrt{m}} \quad (C)$$

Naznaczywszy $x = \frac{n}{2m}$ otrzymamy iedną z rzędnych asymptot

$$y = -\frac{Bx+D}{2A};$$

aże takie samo równanie służy średnicy, więc tak linie BS, BS′ iak Os, Os' przecinaią się na średnicy. Naznaczywszy potem $x=o$, otrzymamy

$$y = -\frac{D}{2A} \pm \left(\frac{-n}{2\sqrt{m}}\right)$$

skąd wniesiemy że, aby znaleźć punkta zeyścia się asymptot z osią OY, trzeba przenieść, po obudwóch stronach punktu B wierzchołka rzędney $OB = -\frac{D}{2A}$, dwie długości BI, BH równe $\frac{-n}{2\sqrt{m}}$: przez wyznaczone tym sposobem punkta I, H poprowadziwszy Is', Hs równoodległe względnie, od liniy BS', BS; te będą żądanemi asymptotami a punkt spólnego przecięcia O' będzie ich zaczęciem.

Aby się nareszcie dowiedzieć, którą iest z trzech liniy drugiego rzędu liniia MDM', uważymy iż ilość m czyli $\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$, czyli, co na iedno wychodzi, $B^2 - 4AC$, nie powinna być ani odiemną ani $= o$ ieśli równania (C) nie maią wyrażać asymptot uroionych: ma więc być $m > o$ czyli $B^2 - 4AC > o$, aże ten warunek cechuie hyperbolę, (93) więc sama tylko hyperbola z liniy drugiego rzędu ma asymptoty.

104. Pozostaie nam wytłomaczyć równania

$$Ay^2 + Bxy + Dy + Ex + F = o,$$
$$Bxy + Dy + Ex + F = o,$$

pierwsze w którem braknie wyrazu z drugą potęgą zmienney x, *drugie* w którem braknie wyrazow z potęgami drugiemi zmiennych x, y

Przypadek pierwszy obięty iest poprzedzaiącym ogólnym, w którym $C = o$; $m = \frac{B^2}{4A^2}$: tu więc wykreślenie będzie podobne iak było tam: roztwartość tylko kąta asymptot i odnog hyperboli będzie inaksza.

W drugim przypadku, mamy

$$y = -\frac{Ex+F}{Bx+D} \text{ czyli } y = -\frac{E+\frac{F}{x}}{B+\frac{D}{x}}$$

przypuściwszy więc iż zmienna x powiększa się, ułomki $\frac{F}{x}$, $\frac{D}{x}$ będą malały a wartość y przybliżać się będzie do $-\frac{E}{B}$ nie mogąc nigdy stać się tey ilości równą. Aże równanie $y = -\frac{E}{B}$ należy do linii równoodległey (fig. 63) od osi OX a przecinaiącey oś OY w odległości $-\frac{E}{B}$ od zaczęcia O; wniesiemy że, im bardziey x rosnąć, tym bardziey rzędna linii krzywey przybliżać się będzie do rzędney linii DB, lecz zawsze te dwie rzędne różnić się będą pewną ilością, a zatem linia DB iest *asymptotą* krzywey. Naznaczywszy $x=0$ w równaniu linii krzywey, to zamieni się na

$$y = -\frac{F}{D}$$

wziąwszy więc $OI = -\frac{F}{D}$ wyznaczymy punkt I przecięcia linii krzywey z osią OY.

Przywiódlszy równanie linii krzywey do postaci

$$y = -\frac{Ex+F}{B\left(x+\frac{D}{B}\right)}$$

i przypuściwszy iż wartość x przybliża się do $-\frac{D}{B}$ nie stawszy się nigdy tey ilości równą; mianownik B $\left(x+\frac{D}{B}\right)$ będzie malał a wartość y będzie rosła nieustannie: aże równanie

$$x=-\frac{D}{B}$$

należy do linii równoodległey od osi OY która przecina oś OX w odległości od zaczęcia równey OC $=-\frac{D}{B}$; więc rzędne linii krzywey będą zawsze rosły nie mogąc nigdy zbiegnąć się z liniią CF, ta więc liniia iest drugą asymptotą krzywey, zaś krzywą iest hyperbola według ogólnego wywodu asymptot.

105. Zakończymy ten rozdział rozwiązaniem następuiącego *zadania*. Znaleźć środek linii krzywey któréy ogólne równanie iest

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

Oznaczywszy przez x', y' spółrzędne nowe punktu M (fig. 64 Tab. 3) linii krzywey odnoszone do środka szukanego O', przez a, b spółrzędne szukane tego środka: będziemy mieli

$$x=a+x', \quad y=b+y'$$

wstawiwszy te wartości x, y, w równanie założone, to przeydzie na

$$\begin{aligned}&Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+(2Ab+Ba+D)y'\\&+(Bb+2Ca+F)x'+Ab^2+Bba+Ca^2+Db\\&Ea+F=0.\end{aligned}$$

Ponieważ to równanie ze zmiennemi x', y' iest odniesione do środka linii krzywey, więc wyrazy z pierwszemi potęgami x', y' wchodzić w nie nie powinny (69): a tak otrzymamy dwa następuiące, na wyznaczenie niewiadomych a, b, równania

$$2Ab+Ba+D=0, \quad Bb+2Ca+E=0.$$

Rozmnożywszy strony pierwszego pzzez 2C, drugiego przez B, i odciągnąwszy stronami drugie od pierwszego, wyruguiemy a z tych równań i wypadnie

$$(4AC-B^2)b+2CD-BE=0$$

skąd $b=\dfrac{BE-2CD}{4AC-B^2}$

wyrugowawszy podobnym sposobem niewiadomą b, wypadnie

$$a=\frac{BD-2AE}{4AC-B^2}.$$

Otrzymawszy tym sposobem poiedyncze wartości dla spółrzędnych a, b szukanego środka, wniesiemy że linie krzywe drugiego rzędu ieden tylko mogą mieć środek.

Gdyby było $4AC-B^2=0$, wartości dla a, b byłyby nieskończone, aże warunek $4AC-B^2=0$ cechuie parabolę, więc parabola nie ma środka, czyli analitycznie mowiąc, ma go w nieskończoney odległości.

Gdy nie będzie $4AC-B^2=0$, co iest przypadkiem ellipsy i hyperboli, naówczas wyznaczony punkt O, będzie środkiem szukanym. Jeśli bowiem wartości $y'=\beta$, $x'=\alpha$ sprawdzą równanie odnoszone do środka

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Ab^2+Bba+Ca^2$$
$$+Db+Ea+F=0;$$

sprawdzą ie także wartości $y'=-\beta$, $x'=-\alpha$: aże dwie pierwsze wartości należą do iednego z punktow M, m linii krzywey, dwie drugie do iednego z punktow M' i m' iedneyże krzywey położonego na przedłużeniu równem linii MO' lub mO', więc wszelka liniia prowadzona przez punkt O i maiąca swe końce na obwodzie krzywey będzie podzieloną na dwie równe części w owym punkcie, więc ten punkt będzie środkiem ellipsy, lub hyperboli, które same iak widzimy z liniy drugiego rzędu maią środek.

106. Postępuiąc drogą analizy w rozwiązaniu zadania § 86. doszliśmy do następuiących, wszelką

maiących ścisłość i pewność matematyczną; wypadkow:
1° głównych liniy druglego rzędu iest trzy, ellipsa, hyperbola i parabola, koło zaś iest gatunkiem ellipsy.
2° linia prosta prowadzona wśrod linii któreykolwiek drugiego rzędu przez środek cięciwy, dzieli wszystkie cięciwy równoodległe od pierwszey na dwie rowne części i dla tego zowie się średnicą.
3° w ellipsie naywiększą ze średnic iest oś wielka, naymnieyszą oś mała, w hyperboli zaś naymnieyszą ze średnic iest oś pierwsza.
4° sama tylko hyperbola z liniy drugiego rzędu może mieć asymptoty.
5° tylko ellipsa i hyperbola maią środek.

ROZDZIAŁ DRUGI.

O WYKREŚLENIU LINIY DRUGIEGO RZĘDU WEDŁUG DANYCH RÓWNAŃ.

I. *O wykreśleniu ellipsy.*

107. Za pomocą równania ellipsy odnoszonego do układu osi spółrzędnych prostokątnych maiących zaczęcie w środku, to iest równania

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B, \text{ czyli } \frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1$$

można znaleźć długości osi ellipsy, gdy dane równananie będzie liczebne. Niechby na przykład takie równanie ellipsy było

$$2x^2+3y^2=6:$$

podzieliwszy obie iego strony przez 6, skąd wypadnie

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1.$$

postrzeżemy iż 3 iest kwadratem z połowy osi liniy odciętych, a 2 kwadratem z połowy osi liniy rzędnych: dwie więc osi są $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$.

Takimże sposobem znaydziemy iż osi ellipsy którey równanie $4x^2+6y^2=5$, są $\sqrt{5}$ i $\sqrt{\frac{10}{3}}$.

108. Aby utworzyć równanie ellipsy odnoszoney do osi spółrzędnych równoodległych od osi ellipsy (fig. 65) naznaczymy spółrzędne nowe $O'P'=x''$, $P'M=y''$, spółrzędne środka $O'A=x'$, $OA=y'$, i będzie

$$OP=O'P'-O'A,\ PM=P'M-AO$$

czyli $\quad x=x''-x',\ y=y''-y'$

wstawiwszy te wartości x, y, w równanie ellipsy, otrzymamy

$$A^2(y''-y')^2+B^2(x''-x')^2=A^2B^2$$

równanie ellipsy odnoszoney do osi spółrzędnych prostokątnych równoodległych od osi tey krzywey linii.

109. W ogólności równanie takie iak

$$ay^2+bx^2+cy+dx=e \quad (a)$$

należy do ellipsy odnoszoney do osi równoodległych od osi tey krzywey linii. Przywiódłszy bowiem to równanie do postaci

$$a\left(y^2+\frac{c}{a}y\right)+b\left(x^2+\frac{d}{b}x\right)=e$$

a potem dodawszy po obudwóch stronach, $a\frac{c^2}{4a^2}$, $b\frac{d^2}{4b^2}$ dla dopełnienia kwadratow, będzie

$$a\left(y^2+\frac{c}{a}y+\frac{c^2}{4a^2}\right)+b\left(x^2+\frac{d}{b}x+\frac{d^2}{4b^2}\right)$$

$$=e+\frac{c^2}{4a}+\frac{d^2}{4b}$$

czyli $$a\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2+b\left(x+\frac{d}{2b}\right)^2$$
$$=e+\frac{c^2}{4a}+\frac{d^2}{4b}\quad\text{(A)}$$
spółrzędne środka ellipsy (108) są więc $AO=-\frac{c}{2A}$, $AO'=-\frac{d}{2b}$. Podzieliwszy obie strony równania przez $e+\frac{c^2}{4a}+\frac{d^2}{4b}$, będzie
$$\frac{\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2}{\frac{e}{a}+\frac{c^2}{4a^2}+\frac{d^2}{4ab}}+\frac{\left(x+\frac{d}{2b}\right)^2}{\frac{e}{b}+\frac{c^2}{4ab}+\frac{d^2}{4b^2}}=1$$
skąd widzimy iż osi ellipsy są $2\sqrt{\left(\frac{e}{a}+\frac{c^2}{4a^2}+\frac{d^2}{4ab}\right)}$ i $2\sqrt{\left(\frac{e}{b}+\frac{c^2}{4ab}+\frac{d^2}{4b^2}\right)}$.

Niechby na przykład trzeba było znaleźć spółrzędne środka i osi ellipsy którey równanie iest
$$2x^2+3y^2-4x-12y=-8:$$
postępuiąc iak wyżey, przywiedziemy to równanie do postaci
$$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$$
z którey widzimy iż środka spółrzędne są 1 i 2, a osi $2\sqrt{2}$ i $2\sqrt{3}$.

Tymże sposobem znaydziemy iż ellipsy, którey równanie $x^2+2y^2-2x-3y=4$, spółrzędne środka są 1, $\frac{3}{4}$ a osi $\frac{7}{\sqrt{2}}$ i $\frac{7}{2}$ poczynaiąc od x.

110. W równaniu powyższem (A), oznaczaiącem

ellipsę, ilość $e+\frac{c^2}{4a}+\frac{d^2}{4b}$ iest dodatną: gdyby ta ilość była odiemną równanie nie oznaczałoby żadney linii krzywey, ponieważ summa dwóch wyrazow dotatnych nie może być równa ilości odiemney, gdyby znowu ilość $e+\frac{c^2}{4a}+\frac{d^2}{4b}$ była $=0$, równanie oznaczałoby punkt O′ którego spółrzędne byłyby $y+\frac{c}{2a}=0$, $x+\frac{d}{2b}=0$, znayduiący się w zaczęciu osi. (fig. 65).

111. Gdyby w równaniu (a) spółczynniki a, b potęg były równe, równanie (A) w tym razie zamieniłoby się na

$$\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2+\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2=\frac{e}{a}+\frac{c^2}{4a^2}+\frac{d^2}{4a^2}$$

i należałoby do koła odnoszonego do osi spółrzędnych równoodległych od tych które mają zaczęcie w środku iego: a tak równanie

$$ay^2+ax^2+cy+dx=e$$

należy do koła którego środka spółrzędne są $-\frac{c}{2a}$, $-\frac{d}{2a}$ a promień $\sqrt{\left(\frac{e}{a}+\frac{c^2}{4a^2}+\frac{d^2}{4a^2}\right)}$.

Tak na przykład równanie $y^2+x^2+4y-2x=4$ należy do koła którego środka spółrzędne są -2 i $+1$, a promień 3: równanie dane zamieni się więc na

$$(y+2)^2+(x-1)^2=9.$$

Aby wykreślić koło do którego to równanie należy, weźmiemy $OP=1$, $OQ=-2$ (fig. 66) przez punkta P, Q poprowadzimy liniie równoodległe od osi, a punkt spólnego przecięcia C tych równoodległych będzie środkiem koła którego promień $=3OP$.

Aby się dowiedzieć iaką liniią oznacza równanie $y^2+x^2-2x+1=0$, przywiedziemy ie do postaci

$$y^2+(x-1)^2=0.$$

Tu mamy pewną odległość $=0$, dwa więc końce tey odległości schodzą się w ieden punkt, aże ostatne równanie oznacza iż iest

$$y=0,\quad x=1$$

więc ów punkt znayduie się na osi OX w stronie dodatnych x, w odległości OP$=1$ od zaczęcia. (fig. 66).

112. Aby wykreślić liniią krzywą którey równanie

$$ax^2+by^2+cx=0$$

a spółczynniki a, i b są dodatne, nadamy naprzód równaniu postać

$$a\left(x^2+\frac{c}{a}x\right)+by^2=0$$

potem dodamy po obudwóch stronach $a.\frac{c^2}{4a^2}$ i będzie

$$a\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2+by^2=\frac{c^2}{4a}$$

czyli $$\frac{\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2}{\frac{c^2}{4a^2}}+\frac{y^2}{\frac{c^2}{4ab}}=1$$

równanie to a tem samem i założone należy do ellipsy którey środka spółrzędne są o, i $-\frac{c}{2a}$, a osi $\frac{c}{a}$ i $\frac{c}{\sqrt{ab}}$ (fig. 67). Aby wykreślić tę liniią krzywą, weźmiemy punkt A na osi BX w odległości AB$=-\frac{c}{2a}$ od zaczęcia B spółrzędnych za środek ellipsy, skąd

$BB'=\frac{c}{a}$: weźmiemy potem $DD'=\frac{c}{\sqrt{ab}}$ za drugą oś ellipsy, wyznaczymy nakoniec za pomocą danego równania iak naywięcey punktow i tym sposobem wykreślimy ellipsę.

113. Aby wykreślić ellipsę którey równanie iest:

$$y^2-2xy+2x^2+2y+x+3=0$$

znaydziemy naprzód

$$y=x-1\pm\sqrt{(-x^2-3x-2)}$$

czyli

$$y=x-1\pm\sqrt{-(x+1)(x+2)}$$

ponieważ ilość znakiem pierwiastku obięta iest odiemną więc założone równanie należy do ellipsy. Wartość rzędney y składa się z dwóch części, iedney spółmierney, drugiey niespółmierney. Pierwsza część $y=x-1$ iest równaniem linii prostey, w którem naznaczywszy $y=0$, znaydziemy $x=1$, naznaczywszy zaś $x=0$, znaydziemy $y=-1$: owa przeto liniia prosta przecina oś OX w odległości OB$=1$ (fig. 68) od zaczęcia, wziętey na stronie odciętych dodatnych, a oś OY w odległości OA$=1$ od zaczęcia, wziętey na stronie rzędnych odiemnych, liniia więc AB iest tą którey równanie $y=x-1$. Dopieroż, według całkowitey wartości y, trzeba za każdą wartością x dodać do i odciąć od rzędney linii AB część $=\sqrt{\{-(x+1)(x+2)\}}$, a w każdym razie otrzymamy dwa punkta linii krzywey równooddalone od linii AB, która przeto iest średnicą krzywey. To założywszy widzimy że im mnieysze będą długości które dodamy do i odetniemy od rzędney linii AB, tym bardziey punkta linii krzywey zbliżać się będą do AB, będą zaś spólne obudwom liniiom, gdy będzie $\sqrt{\{-(x+1)(x+2)\}}=0$. Założymy więc $(x+1)(x+2)=0$, i otrzymamy, $x=-1=$OP i $x=-2=$OP', a zatem liniie PC, P'C' równoodległe od OY zamkną liniią krzywą w punktach C i C'.

Ponieważ $(x+1)(x+2)$ ma przed sobą znak odiemny, więc ta ilość musi być rzeczywiście odiemną aby w obecnym razie stała się dodatną: będzie odiemną biorąc dla x wartości zawarte między PO i OP' to iest między -2, i -1; dodatną zaś biorąc dla x wartości albo mnieysze od -2 albo większe od -1: w tym ostatnym razie wartość dla y będzie uroioną, więc liniia krzywa nie ciągnie się po za PC, P'C', i iest ellipsą. Aby znaleźć rzędne iey środka O' mamy PC$=2$, P'C'$=3$, więc $O'Q = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ (45): mamy daley OP$=1$, OP'$=2$, więc $OQ = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$. Znalazłszy spółrzędne OQ, QO' środka, wyznaczymy środek O' i będziemy mieli dwie średnic, ellipsy CC', mm'.

Znaiąc położenie i wartość tych średnic, znaydziemy wielkość i kierunek osi następuiącym sposobem. Trzeba naprzód znaleźć wyrażenie wartości średnicy któreykolwiek DD', a potem naywiększą i naymnieyszą wartość tego wyrażenia, te zaś będą żądanemi osiami (102).

Równanie linii O'D' przechodzącey przez punkt O' którego rzędna $= -\frac{5}{2}$, odcięta $= -\frac{3}{2}$ iest

$$y+\tfrac{5}{2}=a(x+\tfrac{3}{2})$$

gdzie a wyraża styczną kąta który liniia O'D' czyni z osią OX. Odległość O'D którą nazwiemy t iest

$$t=\sqrt{[(x+\tfrac{3}{2})^2+(y+\tfrac{5}{2})^2]}$$

czyli, wstawiwszy $a(x+\frac{3}{2})$ za $y+\frac{5}{2}$,

$$t=(x+\tfrac{3}{2})\sqrt{(1+a^2)}$$

skąd wypadnie

$$x+\tfrac{3}{2}=\frac{t}{\sqrt{(1+a^2)}},\ y+\tfrac{5}{2}=\frac{at}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

a, naznaczywszy dla skrócenia $\sqrt{(1+a^2)}=r$,

$$x=-\tfrac{3}{2}+\frac{t}{r},\ y=-\tfrac{5}{2}+\frac{at}{r}$$

wstawiwszy te wartości x, y w założone równanie ellipsy, wypadnie

$$\left(\frac{a^2-2a+2}{r^2}\right)t^2-\frac{1}{4}=0$$

czyli przywróciwszy wartość r i zniósłszy mianowniki

$$4(a^2-2a+2)t^2-(1+a^2)=0.$$

Równanie to iest z dwiema zmiennemi t i a: wiemy zaś iż naywiększey wartości dla t odpowiada poiedyncza wartość dla a (20), czyli że, ułożywszy to równanie względem niewiadomey a, w sposób następujący

$$(4t^2-1)a^2-8t^2a+8t^2-1=0 \quad \text{(c)}$$

równanie to mieć powinno dwa pierwiastki równe. Bytność zaś pierwiastkow równych tego równania zawisła, iak wiemy z zasad Algebry od bytności spólnego dzielnika polynomow

$$(4t^2-1)a^2-8t^2a+8t^2-1,\ (4t^2-1)a-4t^2:$$

wykonawszy działanie dla znalezienia dzielnika spólnego tych polynomow, znaydziemy iloraz

$$a-\frac{4t^2}{4t^2-1},\ \text{i resztę 2gą } 8t^2-1-\frac{16t^4}{4t^2-1}:$$

a tak warunkiem bytności spólnego dzielnika dla dwóch rzeczonych polynomow iest równanie

$$8t^2-1-\frac{16t^4}{4t^2-1}=0$$

czyli $\quad 16t^4-(8t^2-1)(4t^2-1)=0 \quad$ (D)

i w ów czas $a-\frac{4t^2}{4t^2-1}$ będzie czynnikiem pierwszey strony równania (c), a iego pierwiastkiem $a=\frac{4t^2}{4t^2-1}$: pozostaie tylko znaleźć wartość niewiadomey t za pomocą równania (D). Równanie to można obrócić na

$$16t^4-12t^2+1=0$$

skąd

$$t^2=\tfrac{3}{8}\pm\tfrac{1}{8}\sqrt{5}$$

to iest kwadrat z połowy wielkiey osi $=\frac{1}{4}(3+\sqrt{\frac{5}{4}})$

małey osi $=\frac{1}{4}(3-\sqrt{\frac{5}{4}})$

wyciągnąwszy pierwiastki kwadratowe z wyrażeń $3\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$ według wiadomych z Algebry formuł, znaydziemy iż połowa wielkiey osi $=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$

małey osi $=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$

114. Aby wykreślić ellipsę którey równanie

$$y^2-2xy+2x^2-2y+2x=0$$

znaydziemy naprzód

$$y=x+1\pm\sqrt{-(x^2-1)}$$

założymy w równaniu średnicy $y=x+1$, z osobna $y=0$, $x=0$ i znaydziemy $x=-1$, $y=1$. Dla wyznaczenia granic linii krzywey, założymy równanie $x^2-1=$ skąd $x=1$, $x=-1$.

Aby wykreślić średnicę biorę OB$=1$, OA$=1$ (fig. 69) przez punkt B, A prowadzę linią BD′ i ta będzie średnicą. Co do granic biorę OP$=1$, z punktu P wyprowadzam prostopadłą PD′ z punktu B prostopadłą BD, w punktach B i D′ przecinać będzie średnica linią krzywą i dwie prostopadłe. Aby znaleźć punkta przecięć linii krzywey z osiami spółrzędnych, naznaczymy z osobna w założonem równaniu $y=0$, $x=0$: znaydziemy w pierwszym razie $x=0$, $x=-1$, aże $x=0$ daie $y(y-2)=0$ więc $y=0$, $y=2$; też same wypadki otrzymamy w drugim razie, więc linija krzywa przechodzi przez zaczęcie spółrzędnych i przecina oś OX w odległości OB $=1$ od zaczęcia a oś OY w odległości OC$=2$.

Znalazłszy położenie średnic BD′, OC ellipsy, znaydziemy długość osi i styczną kąta iey pochyłości do osi OX, następuiącym sposobem. Równanie linii iakieykolwiek prostey przechodzącey przez punkt A którego spółrzędne są $y=1$, $x=0$, iest

$$y-1=ax$$

gdzie a oznacza styczną kąta pochyłości tey linii do osi OX. Wyrażenie odległości AH którą nazwiemy t, iest

$$t=\sqrt{[x^2+(y-1)^2]}$$

czyli, na mocy poprzedzaiącego równania,

$$t=x\sqrt{(1+a^2)}$$

skąd, naznaczywszy $\sqrt{(1+a^2)}=r$, wypada

$$x=\frac{t}{r},\ y=1+\frac{at}{r}:$$

wstawiwszy te wartości x, y, w założone równanie, wypadnie

$$(a^2-2a+2)t^2-(1+a^2)=0.$$

Naywiększa wartość zmienney t tego równania odpowiada poiedynczey wartości dla a czyli dwom pierwiastkom równym tegoż równania ułożonego względem a, to iest

$$(t^2-1)a^2-2t^2a+2t^2-1=0.$$

Postąpiwszy iak w poprzedzziącym paragrafie znaydziemy

$$a=\frac{t^2}{t^2-1},\ t^4-(2t^2-1)(t^2-1)=0.$$

Rozwiązawszy ostatne równanie względem t, znaydziemy długość wielkiey osi ellipsy $= \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$

małey osi $= -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$

po czem znaydziemy styczną a kąta pochyłości wielkiey osi ellipsy do osi OX $= \dfrac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

małey osi $= \dfrac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

II. *O wykreśleniu hyperboli.*

115. Za pomocą równania hyperboli odnoszonego do środka i osi tey linii krzywey

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2 \text{ czyli } \frac{y^2}{B^2} - \frac{x^2}{A^2} = -1$$

można znaleźć długość osi gdy dane równanie będzie liczebne. Niechby na przykład było równanie hyperboli

$$2x^2 - 3y^2 = -6.$$

Podzieliwszy obie strony przez 6, skąd wypadnie

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = -1$$

postrzeżemy iż osi hyperboli są $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{-2}$ z których iedna iest uroiona.

116. Niechby teraz trzeba było znaleźć równanie hyperboli odnoszoney do osi OX, OY (fig. 70) równoodległych od osi tey linii krzywey. Nazwawszy x'', y'' spółrzędne punktu M wzięte w nowym układzie, x', y' spółrzędne środka; będą $x''-x'$, $y''-y'$ wartości spółrzędnych tegoż punktu w układzie osi hyperboli, któreto wartości wstawiwszy za x, y, w równanie poprzedzaiącego § otrzymamy

$$A^2(y''-y')^2 - B^2(x''-x') = -A^2B^2$$

równanie hyperboli odnoszoney do osi spółrzędnych równoodległych od osi tey linii krzywey.

117. W ogólności równanie takie iak

$$ax^2 + by^2 + cx + dy = e.$$

w którem spółczynniki a, b maią znaki różne, należy do hyperboli odnoszoney do osi równoodległych od osi tey linii krzywey: zamienimy ie bowiem podobnie iak w (109) na

$$\frac{\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2}{\frac{e}{b} + \frac{c^2}{4b^2} + \frac{d^2}{4ab}} + \frac{\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2}{\frac{e}{a} + \frac{c^2}{4a^2} + \frac{d^2}{4ab}} = 1$$

aże a i b maią znaki przeciwne, więc ie maią także dwa wyrazy pierwszey strony równania, więc to należy do hyperboli którey środka spółrzędne są $-\frac{d}{2b}$, $-\frac{c}{2a}$, osi zaś są $2\sqrt{\left(\frac{e}{b}+\frac{c^2}{4b^2}+\frac{d^2}{4ab}\right)}$,

i
$$2\sqrt{\left(\frac{e}{a}+\frac{c^2}{4a^2}+\frac{d^2}{4ab}\right)}.$$

Gdyby w założonem równaniu było $a=b$, dwie osi hyperboli byłyby równe. Hyperbola którey dwie osi są równe, nazywa się *równoboczną*.

Aby na przykład znaleźć spółrzędne środka i osi hyperboli którey równanie iest
$$2x^2-3y^2-4x-12y=-8$$
zamienimy ie, podobnie postępuiąc iak w § 108, na
$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{}=-1$$
i postrzeżemy iż spółrzędne środka są $x=1$ i $y=-2$ a osi 6 i $2\sqrt{6}$.

Takimże sposobem zamienimy równanie
$$x^2-2y^2-2x-3y=\tfrac{1}{4}$$
na
$$\frac{(y+\frac{3}{4})^2}{\frac{1}{16}}-\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{8}}=-1$$
i wniesiemy iż tu spółrzędne środka są $-\frac{3}{4}$ i 1, a osi $\frac{1}{2}$ i $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Równanie $y^2-x^2-2x-1=0$, czyli $y^2-(x+1)^2=0$ skąd $y=x+1$ wyraża punkt którego spółrzędne są $y=1$, $x=-1$.

118. Łatwo okazać iż równanie
$$ax^2-by^2+cx=0$$
należy do hyperboli. Zamieniwszy ie bowiem iak w (112) na
$$\frac{y^2}{\left(\frac{c^2}{4ab}\right)}-\frac{\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2}{\left(\frac{c^2}{4a^2}\right)}=-1$$

widzimy iż należy do hyperboli którey środka spółrzędne są $x = -\frac{1}{2a}$, $y = 0$, a osi $\frac{c}{a}$ i $\frac{c}{\sqrt{(ab)}}$

119. Aby wykreślić hyperbolę którey równanie

$$y^2 - 2xy - x^2 - 2y + 2x + 3 = 0$$

znaydziemy naprzód

$$y = x + 1 \pm \sqrt{[2(x+1)(x-1)]}$$

i wniesiemy ze znaku dodatnego ilości, z którey trzeba wyciągnąć pierwiastek, iż założone równanie należy rzeczywiście do hyperboli. Naznaczywszy daley $y = 0$ w równaniu

$$y = x + 1$$

średnicy, otrzymamy $x = -1$, naznaczywszy zaś $x = 0$ otrzymamy $y = 1$. Srednica więc przecina oś OX (fig. 71) w odległości OB $= 1$ od zaczęcia spółrzędnych, a oś OY w odległości OA $= 1$ i średnicą będzie liniia BB'. Biorąc dopiero za x wszelkie wartości większe od $+1$ lub mnieysze od -1, trzeba będzie za każdą takową wartością x dodać do i odiąć od rzędney linii BB' część $= \sqrt{[2(x+1)(x-1)]}$, a otrzymamy w każdym razie dwa punkta odpowiadaiące linii krzywey równooddalone od średnicy BB'. Znaydziemy potem punkta spólne średnicy i hyperboli założywszy równanie $\sqrt{[2(x+1)(x-1)]} = 0$, skąd wypadnie $x = -1 =$ OB, $x = 1 =$ OP, a tak między liniami BP i BD ciągnąć się nie będzie hyperbola, w punktach zaś B i B' przetnie średnicę. Punkt A iest środkiem hyperboli którego spółrzędne są AO czyli $y = 1$, i $x = 0$, rzędna więc B'P punktu B' iest $= 2$.

Znalazłszy położenie i wartość średnicy B'B znaydziemy wielkość i kierunek pierwszey osi hyperboli sposobem następuiącym. Niech AC wystawia połowę średnicy któreykolwiek: równanie tey linii przechodzącey przez punkt A którego spółrzędne są $y' = 1$, $x' = 0$, iest

$$y - 1 = ax$$

gdzie a oznacza styczną kąta który liniia AC czyni z osią OX: odległość AC, którą oznaczymy przez t, iest

$$t = \sqrt{[(y-1)^2 + x^2]}$$

czyli na mocy poprzedzaiącego równania i naznaczywszy $\sqrt{(1+a^2)} = r$

$$t = xr$$

skąd $$x = \frac{t}{r},\ y = 1 + \frac{at}{r}$$

wstawiwszy te wartości x, y w założone równanie hyperboli, wypadnie

$$(a^2 - 2a - 1)t^2 + 2(1+a^2) = 0:$$

z dwóch zmiennych t i a, w to równanie wchodzących, pierwsza ma mieć wartość naymnieyszą, ponieważ ze średnic hyperboli oś pierwsza iest naymnieyszą (102): w tym razie (113) równanie ułożone względem a, to iest

$$(t^2 + 2)a^2 - 2t^2 a - t^2 + 2 = 0$$

musi mieć dwa pierwiastki równe. Bytność pierwiastkow równych zawisła od bytności spólnego dzielnika polynomow

$$(t^2+2)a^2 - 2t^2 a - t^2 + 2,\quad (t^2+2)a - t^2:$$

odbywszy działanie dla znalezienia spólnego dzielnika, otrzymamy iak w §. 113

$$a = \frac{t^2}{t^2+2},\ \text{i}\ -3t^4 + 4 = 0.$$

skąd $$t = \sqrt[4]{\tfrac{4}{3}};\ \text{i}\ a = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\frac{4}{3}} + 2}.$$

120. Takimże postępuiąc sposobem wykreślimy hyperbole według następuiących równań.

$$y^2 - 2xy - x^2 + 2 = 0. \quad \text{(fig. 72.)}$$
$$y^2 - x^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \quad \text{(fig. 73.)}$$
$$y^2 - 2x^2 - 2y + 6x - 3 = 0 \quad \text{(fig. 74.)}$$

121. Zatrudnimy się teraz wykreśleniem hyperboli

między asymptotami według danych równań liczebnych.

Aby wykreślić hyperbolę między asymptotami którey równanie iest

$$y^2-2y-2x^2+6x-3=0$$

znaydziemy naprzód

$$y=1\pm\sqrt{(2x^2-6x+4)}$$

wykonamy potem początkowe wykreślenie iak na fig. 74. i znaydziemy $AO=1$, $OP=1$, $OP'=2$ (fig. 75.)

Postępuiąc daley drogą skazaną w ogólnym sposobie, (103) założymy

$$y=1\pm x\sqrt{\left(2-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}$$

i przypuścimy iż wartość dla x większą iest od wszelkiey naznaczoney ilości, przez co ułomki $\frac{6}{x}$, $\frac{4}{x^2}$ zbliżać się będą do zera a równanie ostatne do

$$y=1\pm x\sqrt{2}$$

Równanie to należy do dwóch liniy przecinaiących się w-iednymże punkcie średnicy AB, ponieważ naznaczywszy w niem $x=0$ będzie $y=1$ każda zaś z dwóch pochyloną iest do osi AB pod kątem spełniaiącym kąt drugiey. Oznaczywszy przez z różnicę rzędnych linii prostey i krzywey, będzie

$$z=\pm x\left(\sqrt{2}-\sqrt{\left(2-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\right)$$

pomnożywszy i podzieliwszy drugą stronę przez

$$\sqrt{2}+\sqrt{\left(2-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}$$

będzie

$$z=\pm\frac{6-\frac{4}{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{\left(2-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}$$

Gdy x mieć będzie wartość większą od wszelkiey ilości naznaczoney, wartość z przybliży się do $\pm\frac{6}{2\sqrt{2}}$ czyli $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$, i tak granicą zbliżenia się linii prostey do krzywey iest ilość $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. Gdy więc od rzędney, każdey z dwóch liniy prostych, odetniemy tę granicę i w odległości $=\frac{3}{\sqrt{2}}$ poprowadzimy dwie linie równoodległe względnie od dwóch pierwszych, owe równoodległe przetną się z linią krzywą w punktach których odcięta x będzie nieskończenie wielką, te przeto linie są asymptotami hyperboli a ich równania są

$$y=1\mp x\sqrt{2}\pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

W tych naznaczywszy $x=2$ dla znalezienia punktow w których iedna z asymptot przecina rzędną P′C′, otrzymamy dwie wartości

$$y=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ y=\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

szukaymy dopiero czwartey proporcyionalney do $\sqrt{2}:1+\sqrt{2}=1:y$. Linia CF $=\sqrt{2}$ ponieważ $Cc'=1$, $FC'=1$: na przedłużeniu więc linii CF weźmy $CJ=1=CP$, przez punkt I poprowadźmy IH równoodległą od OX, będziemy mieli proporcyią

FC: FI$=$FC′: FH, czyli $\sqrt{2}: 1+\sqrt{2}=1: y$, a tak przeniesiemy FH czyli y od P′ do K, przez punkta O′ i K poprowadzimy linią O′K, a ta będzie iedną z asymptot.

Szukaymy potem czwartey proporcyionalney do $\sqrt{2}:-1+\sqrt{2}=1:y$.

Ponieważ $OC=\sqrt{2}$, $OI=OC-CI=\sqrt{2}-1$ będzie

OC: OI=CP: PD, więc y=PD=P'H: poprowadziwszy zatem pezez punkta O' i H liniią prostą, ta będzie drugą asymptotą.

122. Aby wykreślić asymptoty hyperboli którey równanie

$$y^2-2xy-x^2-2y+2x+3=0$$

znaydziemy naprzód

$$y=x+1\pm\sqrt{(2x^2-2)}$$

i wykonamy początkowe wykreślenie iak na fig. 71: (119), przywiedziemy ostatne równanie do postaci

$$y=x+1\pm x\sqrt{2-\frac{2}{x^2}}$$

i powiemy: im bardziey x rosnąć, tym bardziey ułomek $\frac{2}{x^2}$ maleć będzie, więc równannie

$$y=x+1\pm x\sqrt{2}$$

należy do dwóch liniy prostych przecinaiących się wiednymże punkcie średnicy BB' na osi OY (fig: 76.) a tym punktem iest środek hyperboli, skąd wniesiemy iż są asymptotami.

Postępuiąc drogą skazaną w sposobie ogólnym (103), oznaczymy przez z różnicę spółrzędnych hyperboli i liniy prostych o których mowa; i znaydziemy.

$$z=x\left(\sqrt{2}-\sqrt{\left(2-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

czyli, pomnożywszy i podzieliwszy drugą stronę przez $\sqrt{2}+\sqrt{\left(2-\frac{2}{x^2}\right)}$,

$$z=\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{\left(2-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

widzimy dopiero iż gdy x mieć będzie wartość większą od wszelkiey naznaczoney ilości, licznik $\frac{2}{x}$ stanie się $=0$, granica zatem między asymptotami i ich równoodległemi iest $=0$, więc owe linie proste przechodzące przez O′ są asymptotami.

Aby wykreślić te asymptoty, naznaczmy w ich równaniach

$$y=x+1+x\sqrt{2},\ y=x+1-x\sqrt{2}$$

$x=1$, dla znalezienia punktow w których przecinaią rzędną PC: wypadnie

$$y=2+\sqrt{2},\ y=2-\sqrt{2}$$

z punktu B′ iako ze środka promieniem $B O'=\sqrt{2}$ zakreślmy łuk: dwa przecięcia C, C′ tego łuku z rzędną PC będą temi przez które przechodzić maią asymptoty, iest bowiem

$$PC=PB'+B'C=2+\sqrt{2}$$
$$PC'=PB'-B'C'=2-\sqrt{2}$$

123. Aby wykreślić asymptoty hyperboli którey równanie

$$y^2-2xy-x^2+2=0,$$

znaydziemy naprzód

$$y=x\pm\sqrt{(2x^2-2)}:$$

skąd wniesiemy że $y=x$ iest równaniem średnicy; $x=\pm1$ sa równaniami granic (Fig. 77), średnica więc CC′ przechodzi przez zaczęcie i czyni z dwiema osiami spółrzędnych kąt równy połowie prostego: wziąwszy zaś $OP=OP'=1$, $PC=P'C'=1$, wyznaczymy średnicę, iey środek O i granice hyperboli. Przywiódłszy daley ostatne równanie do postaci

$$y=x\pm x\sqrt{\left(2-\frac{2}{x^2}\right)}$$

i wyrozumowawszy iak w poprzedzaiących §§, otrzymamy równania asymptot

$$y=x\pm x\sqrt{2}.$$

Aby znaleźć punkta w których asymptoty przecinaią rzędną PC, naznaczymy $x=1$, skąd wypadnie

$$y=1+\sqrt{2},\ y=1-\sqrt{2}$$

Z punktu C promieniem $CO=\sqrt{2}$ zakreślimy łuk koła, a przecięcia łuku z rzędną PC w punktach D, D' będą temi przez które przechodzić maią asymptoty.

124. Aby wykreślić asymptoty hyperboli którey równanie

$$y^2+2xy-x^2+2x+2y-1=0$$

znaydziemy naprzód

$$y=-(x+1)\pm\sqrt{(2x^2+2)}$$

aże granice wypadaią w tym razie uroione według równania $x=\pm\sqrt{-1}$, więc rozwiążemy założone względem x i otrzymamy

$$x=y+1\pm\sqrt{(2y^2+4y)}:$$

z równania średnicy $x=y+1$ (fig. 78), wywiedziemy $y=-1$, $x=+1$; z równania zaś granic $y(y+2)=0$ wywiedziemy $y=0$, i $y=-2$. Według tych wypadków, granice linii krzywey na średnicy będą C i C'. Aby znaleźć kierunek asymptot przechodzących przez punkt O, nadaymy ostatnemu równaniu postać

$$x=y+1\pm y\sqrt{\left(2+\frac{4}{y}\right)}:$$

równania asymptot będą

$$x=y+1\pm y\sqrt{2}:$$

Naznaczywszy w tych równaniach $y=-2$ dla znalenia punktow w których asymptoty przecinaią granicę DD', wypadnie

$$x=-1+2\sqrt{2},\quad x=-1-2\sqrt{2}$$

a zatem z punktu C' iako ze środka promieniem $=2OC'=2\sqrt{2}$ zakreślam łuk koła, a punkta D, D' spólnego przecięcia z linią DD' będą temi przez które przechodzić maią asymptoty.

III. *O wykreśleniu paraboli.*

125. Wiemy iż równanie paraboli odnoszone do osi maiących zaczęcie w wierzchołku tey linii krzywey, iest

$y^2 = 2px.$

Aby znaleźć równanie paraboli odnoszone do osi OX, OY (fig. 79) równoodległych od pierwiastkowych, mamy

$$OP = O'P' - O'Q, \text{ czyli } x = x' - \alpha$$
$$PM = P'M - P'P \text{ czyli } y = y' - \beta$$

gdzie α, β wyrażaią spółrzędne *wierzchołka* O paraboli: wstawiwszy wartości x, y w założone, wypadnie

$$(y' - \beta)^2 = 2p(x' - \alpha)$$

równanie paraboli odnoszone do osi równoodległych od pierwiastkowych, którey wierzchołka O rzędna iest $+\beta = OQ$, a odcięta $+\alpha = OQ$.

126. W ogólności równanie

$$ay^2 + bx^2 + cy + dx = e$$

gdy w niem b, to iest, ieden ze spółczynnikow a, b iest $= 0$, należy do paraboli odnoszoney do osi równoodległych od pierwiastkowych. Przywiódłszy ie bowiem do postaci

$$\left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = -\frac{d}{a}\left(x - \frac{e}{d} - \frac{c^2}{4ad}\right)$$

sposobem w (109) skazanym, widzimy iż oznacza parabolę odnoszoną do układu YOX, którey parametr iest $-\frac{d}{a}$, rzędna wierzchołka $-\frac{c}{2a}$ a odcięta $+\left(\frac{e}{d} + \frac{c^2}{4ad}\right)$: kierunek nareszcie odnóg paraboli iest taki iak na figurze 80 aby była dodatną ilość.

$$-\frac{d}{a}\left(x - \frac{e}{d} - \frac{c^2}{4ad}\right)$$

I tak, aby wykreślić parabolę którey równanie

$$2y^2 - 3y - x = 1;$$

zamienimy naprzód to równanie na

$$\left(y - \tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{17}{18}\right)$$

i postrzeżemy iż należy do paraboli którey parametr $= \frac{1}{2}$ rzędna wierzchołka $= + \frac{3}{4}$ odcięta $= - \frac{17}{18}$.

Aby wykreślić parobolę którey równanie

$$y^2-2xy+x^2+x=0,$$

znaydziemy naprzód

$$y=x\pm\sqrt{-x}:$$

aby wartość dla y była rzeczywistą trzeba wziąć x za odiemną ilość i będzie

$$y=-x\pm\sqrt{x}.$$

$y=-x$ iest równaniem średnicy, iey więc położenie iest (fig. 81) w kącie odiemnych x, y. Naznaczywszy $x=0$, w równaniu tak średnicy iak paraboli, wypadnie $y=0$, więc te dwie linije przecinaią się w zaczęciu osi: biorąc dopiero nad i pod średnicą części $=\sqrt{x}$ równoodległe od osi OY, wyznaczymy iak naywięcey punktow paraboli. Gdy OD $=x$ oznaczać będzie iedność liniyną, wszystkie wartości x mnieysze od OD będą ułomkami, więc od O do D, będzie $\sqrt{x}$, większy od x i linija krzywa będzie przechodziła nad osią OX, począwszy zaś od D będzie schodziła pod oś.

127. Podobnym postępuiąc sposobem wykreślimy następuiące równania

$$y^2-2xy+x^2+2y=0 \quad \text{(fig. 82).}$$
$$y^2-2xy+x^2+2y+1=0 \quad \text{(fig. 83).}$$
$$y^2-2xy+x^2-2y-1=0 \quad \text{(fig. 84).}$$
$$y^2-2xy+x^2-2y-2x=0 \quad \text{(fig. 85).}$$

128. Zakończymy ten rozdział wykreśleniem kilku równań innego rodzaiu niż te któreśmy dotąd uważali. Tak na przykład z równań

$$y^3=ax,\quad y^3=ax^2$$

pierwsze iest równaniem *paraboli sześcienney pierwszey*, drugie równaniem *paraboli sześcienney drugiey*.

Aby wykreślić pierwszą, uważam iż za każdą dodatną wartością x, wypada wartość rzeczywista dodatna dla $y=\sqrt[3]{(ax)}$: linija krzywa ma więc pierwszą odnogę taką iak OA (fig. 86). Założywszy zaś wartość odiemną dla x, otrzymamy $y = -\sqrt[3]{(ax)}$, skąd wniesiemy iż liniia krzywa takąż samą ma postać pod osią OX iaką nad osią OX: można więc uważać odnogę OA' za położenie linii OA iakie wzięła przez swóy obrot około punktu O w kierunku od A do Y. Oś OX iest styczną w punkcie O do obudwóch odnóg OA, OA'.

Aby wykreślić drugą, uważam iż z wartości x tak dodatney iak odiemney wypadnie zawsze wartość dodatna $y = \sqrt[3]{(ax^2)}$, więc liniia krzywa iest parabolą AOA' styczną do osi OX (fig. 87).

129. Aby iescze dać uczuć różnicę między liniiami krzywemi które wykreślić można za pomocą równań 2go stopnia z dwiema zmiennemi, a liniiami krzywemi których postać zawisła od równań innego stopnia; wykreśliny liniią którey równanie iest

$y = wst\ x$ (fig. 88).

Naznaczywszy w danem równaniu $y = 0$, wypadnie $x = 0$, liniia krzywa przechodzi więc przez zaczęcie społrzędnych: naznaczywszy $x = 200^\circ$ wartość odpowiadaiąca dla y będzie $= 0$: wziąwszy zaś dla x wartości zawarte między 0° i 200°, otrzymamy punkta M, M' linii krzywey: naywiększa rzędna będzie odpowiadała wartości $x = 100^\circ$, naymnieysza zaś wartości $x = 200^\circ$ a tą będzie punkt J. Wartość $x = 300^\circ$ da rzędną $y = mp$ odiemną, $x = 400^\circ$ da punkt J' od którego poczynaiąc liniia krzywa znowu się wzniesie na I oś OX i tak daley ciągnąć się będzie. Też same otrzymamy wypadki założywszy dla x wartości odiemne.

DZIAŁ DRUGI

O WLASNOŚCIACH LINIY DRUGIEGO RZĘDU.

130. Sposobem analitycznym odkryliśmy postać i liczbę liniy drugiego rzędu. Starożytni trafili na też same linije krzywe, przecinaiąc przez płaszczyznę ostrokrąg i nazywali *przecięciami ostrokręgowemi* te krzywe linije które my zowiemy *liniiami drugiego rzędu*, lecz nie mogli się zapewnić czy, z rodzaiu liniy takich iak ellipsa, hyperbola i parabola, znayduią się ieszcze inne iakowe lub nie.

Nim przystąpimy do wykładu własności tych trzech liniy krzywych, poznamy owo skąd inąd szacowne, od starożytnych zostawione nam twierdzenie, iż ellipsa, hyperbola i parabola są przecięciami ostrokręgu. Aby tę prawdę okazać, przypomniymy sobie iż powierzchnia znanego w zasadach Geometryi ostrokręgu powstaie z obrotu linii prostey opieraiącey się iednym ze swoich punktow na innym punkcie stałym i na okręgu koła który przebiega. Z takiego tey powierzchni utworzenia widać, iż się składa z dwóch powłok (nappes), przedzielonych punktem danym i obeymuiących przestrzeń tym rozlegleyszą im się daley od owego punktu rozciągaią. Ten punkt nazywa się *środkiem ostrokręgu*: wystawiwszy bowiem sobie dwie płaszczyzny w równey odległości od owego punktu i równoodległe od siebie, część linii tworzącey w każdem położeniu uważaney zawarta między temi dwiema płasczyznami będzie podzielona na dwie równe części w owym punkcie, który przeto iest środkiem wszystkich liniy tworzących a tem samem powierzchni i pełności ostrokręgu.

131. Niech będzie SAB (fig. 89) powierzchnia takiego ostrokręgu, S iego środek na którym opiera się linia tworząca SA, ACBD koło którego okrąg przebiega, nakoniec O środek tegoż koła. Przeciąwszy ostrokrąg płasczyzną przechodzącą przez środek S i przez średnice podstaw, ta przetnie dwie powłoki według dwóch tróykątow CSD, *csd* maiących kąty przy S równe, iako wierzchołkiem przeciwległe. Gdyby płasczyzna przecinaiąca miała położenie ACBD równoodległe od podstawy, przecięcie to, iak wiemy skądinąd, byłoby kołem. Poczynaiąc od tego położenia płasczyzny przecinaiącey, wystawmy sobie iż ta obraca się około linii DC iako osi i dąży do położenia CSD: linia przecięcia oddalać się będzie coraz bardziey od okręgu a zbliżać do tróykąta i

1° dopóki płasczyzna przecinaiąca czynić będzie z linią tworzącą AS kąt taki iak BA'A mnieyszy od 200°, przecinać będzie tylko niższą powierzchnią ASB, a przecięcie będzie linią krzywą zamkniętą coraz więcey wyciągniętą.

2° gdy płasczyzna przecinaiąca uczyni z liniią AS kąt = 200°, czyli gdy będzie równoodległą od AS; przetnie tylko powierzchnią niższą i zostawi na niey liniią krzywą otwartą.

3° przeszedłszy kąt o 200°, płasczyzna ruchoma przetnie obiedwie powłoki, utworzy na każdey osobne przecięcie z których każde ciągnąć się będzie do nieskończoności w też same strony co powłoki, a między obudwoma będzie przerwa tym znacznieysza im bardziey płasczyzna przecinaiąca będzie oddaloną od środka ostrokręgu.

Postrzedz iuż możemy wielkie podobieństwo między temi trzema przecięciami ostrokręgu a liniami drugiego rzędu. Proste uważanie tróykątow doprowadzi do równań, cechuiących przecięcia, takich samych jakie należą (96) do liniy drugiego rzędu i zobaczymy iż przecięcie w pierwszym razie iest ellipsą, w trzecim hyperbolą, w drugim parabolą.

132. Niech liniia IMI' będzie tą która wypada z przecięcia w pierwszym razie (fig. 90) a GH śladem płaszczyzny przecinaiącey zostawionym na płaszczyźnie podstawy ostrokręgu: niech płaszczyzna przecina ostrokrąg przez oś tak, aby ślad AB tróykąta przecinaiącego ASB, zostawiony na podstawie ostrokręgu, był prostopadły do śladu GH płaszczyzny przecinaiącey. Poprowadźmy dwie płaszczyzny FMEm, F'M'E'm' równoodległe od podstawy ABCD: ich przecięciami z ostrokręgiem będą dwa koła, a FE, F'E' przecięciami tych kół z płaszczyzną tróykąta ASB, nareszcie Mm, M'm' przecięciami kół z płaszczyzną przecinaiącą: aże linie AG, GH są do siebie prostopadłe więc także ich równoodległe FE, Mm, tudzież F'E', M'm', są do siebie prostopadłe. Dwa troykąty IP'E', IPE, tudzież I'PF, I'P'F' dadzą proporcyią

$$IP: IP' = PE: P'E', \text{ i } I'P: I'P' = PF: P'F'$$

skad $\quad IP \times I'P: IP' \times I'P' = PE \times PF: P'E' \times P'F'$

aże $\quad PE \times PF = PM^2, \; P'E' \times P'F' = P'M'^2$

więc $\quad PM^2: P'M'^2 = IP \times I'P: IP' \times I'P'$.

Liniia GI' iest prostopadłą do śladu GH, ponieważ można tę liniią uważać za iedno z położeń linii GB prostopadłey do GH obracaiącey się około punktu G na płaszczyźnie tróykąta ASB, linia zaś II' leży na płaszczyźnie tróykąta; więc i linie PM, P'M' są prostopadłe do II', a zatem można ie uważać za rzędne prostokątne linii krzywey IMM'I' które oznaczymy przez y, y'. Wziąwszy dopiero zaczęcie spółrzędnych w punkcie I, i naznaczywszy $II'=2A$, $IP=x$, $IP'=x'$, będzie $I'P=2A-x$, $I'P'=2A-x'$, i ostatna proporcyia zamieni się na

$$y^2 : y'^2 = (2A-x)x : (2A-x')x'$$

skąd $$(2Ax'-x'^2)y^2 + y'^2x^2 = 2Ay'^2x.$$

Równanie to należy do ellipsy odnoszoney do osi spółrzędnych równoodległych od osi tey linii krzywey (108), co też iest przypadkiem obecnym: wziąwszy zaś środek ellipsy za zaczęcie spółrzędnych trzeba będzie za x wstawić $A-x$ w równanie znalezione, które w tym razie zamieni się na

$$(2Ax'-x'^2)y^2 + y'^2x^2 = A^2y'^2$$

czyli $$\frac{y^2}{\left(\frac{A^2y'^2}{2Ax'-x'^2}\right)} + \frac{x^2}{A^2} = 1$$

czyli, naznaczywszy $\frac{A^2y'^2}{2Ax'-x'^2} = B^2$, na

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$$

które iest (98) równaniem *ellipsy* odnoszoney do iey środka i osi. Gdy będzie $B=A$ przecięcie ostrokręgu będzie kołem a iego równanie

$$y^2 + x^2 = A^2$$

133. Aby okazać że przecięcie według trzeciego przypadku daie hyperbolę; przetniemy ostrokrąg przez płaszczyznę równoodległą od podstawy, skąd wypadnie koło ACBD, (fig. 91) poprowadzimy cięciwę CD prostopadle do średnicy AB, z punktu Q wyprowadzimy prostopadłą Q'QP do płaszczyzny koła ACBD przecinaiącą dwie powłoki w punktach P i P', poprowadzimy nareszcie przez linie DC i Q'QP płaszczyznę która przetnie ostrokrąg według dwóch liniy krzywych D'PC' i EP'F. Jest tedy DQ prostopadłą do AB i do PQ', a D'Q' do AB' i do PQ'. Tróykąty po-

dobne PQB, P'Q'B', tudzież P'AQ, P'A'Q' dadzą proporcyią

$$BQ : B'Q' = PQ : P'Q', \text{ i } AQ : A'Q' = P'Q : PQ'$$

skąd $$BQ \times AQ : B'Q' \times A'Q' = PQ \times P'Q : P'Q' \times PQ'$$

czyli $$DQ^2 : D'Q'^2 = PQ \times P'Q : P'Q' \times PQ'.$$

Proporcyia ta, wziąwszy za zaczęcie spółrzędnych punkt P i naznaczywszy $DQ = y$, $D'Q' = y'$, $PP' = 2A$, $PQ = x$ $PQ' = x'$, $P'Q = 2A + x$, $P'Q' = 2A + x'$ zamieni się na

$$y^2 : y'^2 = x(2A + x) : x'(2A + x')$$

skąd $$(2Ax' + x'^2)y^2 - y'^2 x^2 = 2Ay'^2 x.$$

To równanie należy do hyperboli odnoszoney do osi spółrzędnych równoodległych od osi tey linii krzywey (116). Przeniósłszy zaczęcie w punkt O' środek linii PP'; będzie $PO = A$ a dawne x czyli PQ zamieni się na O'Q—O'P czyli $x - A$: wstawiwszy więc $x - A$ za x w ostatne równanie, wypadnie

$$(2Ax' + x'^2)y^2 - y'^2 x^2 = -A^2 y'^2$$

czyli

$$\frac{y^2}{\left(\dfrac{A^2 y'^2}{2Ax' + x'^2}\right)} - \frac{x^2}{A^2} = -1$$

lub naznaczywszy $$\frac{A^2 y'^2}{2Ax' + x'^2} = B^2$$

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{x^2}{A^2} = -1$$

równanie *hyperboli* odnoszone do iey środka i osi (100).

134. W trzecim przypadku w którym płaszczyzna przecinaiąca równoodległą iest od boku ostrokręgu uczynimy wykreślenie podobne iak na fig. 90 i mieć będziemy

$$PF = P'B \quad \text{(fig. 92).}$$

$$IP : IP' = EP : AP'$$

skąd $$IP : IP' = PF \times EP : P'B \times AP'$$

czyli $IP : IP' = PM^2 : P'M'^2$
Weźmy I za zaczęcie osi spółrzędnych prostokątnych i naznaczmy $IP = x$, $IP' = x'$ $MP = y$, $M'P' = y'$,

będzie $x : x' = y^2 : y'^2$, skąd $y^2 = \frac{y'^2}{x'} x$

czyli, naznaczywszy $\frac{y'^2}{x'} = 2p$,

$$y^2 = 2px$$

równanie to (101) oznacza iż liniia krzywa MIm iest *parabolą*.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

O ELLIPSIE.

I. *O Kole.*

135. Równanie ellipsy którey osi są równe, czyli równanie koła odnoszone do osi prostokątnych maiących zaczęcie w środku, iest (99)

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

W tem równaniu czytać można główne własności koła. Aby na przykład wyznaczyć punkta w których okrąg przecina osi OY, OX, (fig. 93) weźmiemy z osobna $x = o$, $y = o$ w iego równaniu i otrzymamy w pierwszym razie $y = \pm R$, w drugim $x = \pm R$, co znaczy iż $Oa = Oa'$, $OB = OB'$. Wartość dla y, wyięta z równania koła

$$y = \pm \sqrt{(R^2 - x^2)}$$

oznacza iż wziąwszy dla x wartość iakąkolwiek $= -OP$ będzie $PM = PM'$, czyli że średnica dzieli cięciwę, do którey iest prostopadłą, na dwie równe części. Wziąwszy $x > R$, wartość dla y będzie uroioną, co znaczy iż koło zamknięte iest w granicach $x = \pm R$, $y = \pm R$. Nadawszy ostatnemu równaniu postać

$$y = \pm \sqrt{[(R+x)(R-x)]}$$

widzimy iż prostopadła od punktu okręgu na średnicę spusczona, iest średną geometrycznie proporcyionalną między odcinkami średnicy. Nareszcie równanie koła, samo w sobie wzięte, oznacza iż wszelkie liniie proste prowadzone od środka koła do okręgu są sobie równe.

136. Dowiedziemy, za pomocą równania koła, iż dwie cięciwy prowadzone od końcow średnicy do punktu okręgu, przecinaią się pod kątem prostym.

Oznaczywszy przez a styczną kąta który liniia B'M (fig. 93) czyni z osią OX; równanie tey linii przechodzącey przez punkt B' którego rzędna $y' = 0$, odcięta $x' = -R$, iest (39)

$$y = a(x + R)$$

równanie zaś linii BM przechodzącey przez punkt B którego spółrzędne $y' = 0$, $x' = +R$; iest

$$y = a'(x - R).$$

Ponieważ te liniie przecinaią się na okręgu w-iednymże punkcie, więc sprawdzą się iednąż wartością dla y te trzy równania

$$y = a(x + R),\ y = a'(x - R),\ y^2 + x^2 = R^2$$

czyli, wziąwszy iloczyn dwóch pierwszych, te dwa

$$y^2 = aa'(x^2 - R^2),\ y^2 = -(x^2 - R^2)$$

z których wypadnie

$$aa' = -1, \text{ czyli } aa' + 1 = 0$$

równanie oznaczaiące iż dwie liniie, o których mowa, przecinaią się na okręgu pod kątem prostym (41).

137. *Zadanie.* Znaleźć warunki spólnego przecięcia dwóch okręgow.

Weźmy O środek iednego z kół (fig. 94) za zaczęcie spółrzędnych prostokątnych, i niech będzie równanie tego koła

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1).$$

Aby znaleźć równanie drugiego koła, uważam iż $MP^2+AP^2=AM^2$ czyli $MP^2+(AO-PO)^2=AM^2$: naznaczywszy więc odległość środków $AO=x'$, promień $AM=r'$; równanie drugiego koła będzie

$$y^2+(x'-x)^2=r'^2 \quad (2).$$

Pozostaie rozwiązać względem x, y równania (1) i (2). W tym zamiarze odciągniemy stronami (1) od (2) i otrzymamy

$$x=\frac{x'^2+r^2-r'^2}{2x'}$$

wstawiwszy zaś tę wartość x w równanie (1), wypadnie

$$y=\pm\frac{1}{2x'}\sqrt{[(4r^2x'^2-(x'^2+r^2-r'^2)^2]}.$$

Trzy mogą być przypadki z tą wartością y.

1° $\sqrt{[4r^2x'^2-(x'^2+r^2-r'^2)^2]}>0$, 2° $=0$, 3° <0.

w *pierwszym*, wartość y iest rzeczywistą a zatem dwa koła przetną się: aże $4r^2x'^2>(x'^2+r^2-r'^2)^2$ czyli $2rx'>x'^2+r^2-r'^2$; więc $r'^2>x'^2-2rx'+r^2$ czyli $r'^2>(x'-r)^2$ czyli $r'^2-(x'-r)^2>0$, czyli

$$(r'+r-x')(r'+x'-r)>0.$$

Dwa czynniki tey nierówności muszą mieć znaki równe, będzie więc

1° $r'+r>x'$, $r'+x'>r$

lub 2° $r'+r<x'$, $r'+x'<r$

Pierwszy podwóyny warunek przecięcia spólnego dwóch kół oznacza iż summa promieni dwóch kół ma być większą od odległości środkow, i że summa promienia koła iednego i odległości środkow ma być większą od drugiego promienia. Drugi podwóyny warunek iest z pierwszym sprzeczny, ponieważ pierwszy oznacza bytność tróykąta, a drugi też bytność zaprzecza: drugi tedy oznacza iż dwa okręgi nie przetną się gdy summa ich promieni mnieyszą iest od odległości środkow i gdy summa iednego promienia i odległości środkow mnieyszą iest od drugiego promienia. Ponieważ y ma dwie równe ze znakami różnemi wartości, znaczy się to, iż odcięteу punktu przecięcia dwóch kół odpowiadaią dwie rzędne równe znakami przeciwne, czyli iż liniia łącząca środki dwóch kół przecinaiących się iest prostopadłą do spólney obudwom cięciwy i dzieli ią na dwie równe części.

w *drugim* iest $2rx'=x'^2+r^2-r'^2$ skąd $y=0$, a zatem dwa punkta przecięcia schodzą się w ieden na osi OX czyli dwa koła stykaią się w tym punkcie: z równania ostatnego wywiedziemy

$$r'^2=(x'-r)^2,\quad r'=\pm(x'-r)$$

skąd $\quad x'=r'+r,\quad x'=r-r',$

pierwsze z tych dwóch ostatnych równań iest warunkiem aby się dwa koła stykały zewnętrznie, drugie aby się stykały wewnętrznie.

w *trzecim* wartość y iest uroiona. Jakoż z nierówności

$$2rx'<x'^2+r^2-r'^2 \text{ wywiedziemy}$$

$$r^2-2rx'+x'^2-r'^2>0, \text{ czyli } (r-x')^2-r'^2>0$$

czyli $\quad (r-x'+r')(r-x'-r')>0$

byćby więc musiało $r+r'>x',\quad r>x'+r'$

albo $r+r'<x',\quad r<x'+r'$

w tych obudwóch razach zachodzi sprzeczność: koła więc ani się przecinaią ani stykaią czyto dla tego iż są zbyt od siebie oddalone, czy dla tego że iedno znayduie się wewnątrz drugiego.

138. Aby utworzyć równanie koła odnoszone do osi spółrzędnych prostokątnych maiących zaczęcie w końcu O średnicy; obierzemy na okręgu punkt M (fig. 95) uważymy iż odcięta tego punktu iest AP = OP — OA, czyli $x=x'-R$: wstawiwszy więc tę wartość x w równanie koła $x^2+y^2=R^2$ otrzymamy, opuściwszy kreski,

$$y^2+x^2=2Rx$$

równanie koła odnoszone do spółrzędnych prostokątnych maiących zaczęcie w końcu średnicy.

Podobnym sposobem znaydziemy równanie koła odnoszone do osi prostokątnych maiących swe zaczęcie za okręgiem: (fig. 96) naznaczywszy bowiem spółrzędne środka $Oa=\alpha$, $Aa=\beta$, spółrzędne $Om=x$, $Mm=y$; równanie $AG^2+GM^2=AM^2$, wyrazimy

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

139. *Zadanie.* Znaleźć równanie linii prostey *styczney* z kołem.

Równanie linii NM (fig, 97) przecinaiącey koło w dwóch punktach M, N których spółrzędne oznaczymy przez x', y' iednego; $x''y''$ drugiego iest (39)

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$$

Ponieważ punkta M, N znayduią się na okręgu więc

$$y'=\sqrt{(R^2-x'^2)},\quad y''=\sqrt{(R^2-x''^2)}$$

wstawiwszy te wartości y', y'' w spółczynnik $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, wyrazimy okoliczność iż sieczna ma dwa punkta spólne z kołem: aby zaś uniknąć wyrażeń niespółmierności, mamy

$$y'-y''=\frac{y'^2-y''^2}{y'+y''};$$

skąd $y'-y''=-\frac{(x'^2-x''^2)}{y'+y'}$, $\frac{y'-y''}{x'-x''}$

$=-\frac{x'+x'}{y'+y''}$, równanie więc sieczney przeydzie na

$$y-y'=-\frac{x'+x''}{y'+y''}(x-x').$$

Niech dopiero liniia MN obraca się około punktu M wychodząc z koła: w tym razie punkt N zbliżać się będzie do punktu M, a gdy obadwa zeydą się w-ieden, będzie $x'=x''$, $y'=y''$, linia MN z sieczney stanie się styczną a równanie tey ostatney będzie

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x'),$$

lub, rozmnożywszy obie strony przez y' i wziąwszy R^2 za $y'^2+x'^2$,

$$yy'+xx'=R^2.$$

Za pomocą tego równania styczney i równania koła łatwo dowieść iż styczna ieden tylko punkt ma spólny z kołem. Rozmnożywszy bowiem strony równania styczney przez 2 i odciągnąwszy ie od stron równania koła $x'^2+y'^2=R^2$, będzie

$$x'^2-2yy'+y'^2-2xx'=-R^2$$

lub, dodawszy po obudwóch stronach x^2+y^2,

$$(x-x')^2+(y-y')^2=x^2+y^2-R^2.$$

Ponieważ pierwsza strona tego równania iest dodatną, więc takąż musi bydź i druga, więc

$$x^2+y^2>R^2$$

aże x, y są spółrzędne któregokolwiek punktu styczney wyiąwszy punkt M, więc ostatny wypadek oznacza, iż wszelkie punkta styczney oprócz punktu dotknięcia są za okręgiem koła. Nie może także żaden punkt styczney znaydować się wśród okręgu, ponieważ w tym razie byłoby $x^2+y^2-R^2<0$ a zatem i $(x-x')^2+(y-y')^2<0$ co być nie może: a tak styczna ieden tylko punkt ma spólny z okręgiem.

140. Liniia prostopadła do styczney w punkcie dotknięcia nazywa się *normalną*.

Znaydziemy równanie normalney następuiącym sposobem. Nazwawszy x, y spółrzędne któregokolwiek punktu M (fig. 97) w którym przecina okrąg, równanie linii OM będzie

$$y-y'=a'(x-x')$$

aże styczna trygonometryczna kąta który styczna do koła czyni z osią OX iest $= -\frac{x'}{y'}$ (139) więc warunek prostopadłości normal: i styczney iest (41) $-\frac{a'x'}{y'}+1=0$, skąd $a'=\frac{y'}{x'}$ i równanie normalney przeydzie na

$$y-y'=\frac{y'}{x'}(x-x')$$

lub, skróciwszy, na

$$yx'=y'x.$$

Ten wypadek wychodzi na $y=\frac{y'}{x'}x$; to iest, na równanie linii prostey przechodzącey przez zaczęcie spółrzędnych, normalna więc przechodzi przez środek koła.

141. Aby przez punkt za okręgiem dany poprowadzić styczną do koła, trzeba będzie, — oznaczywszy przez $x''\ y''$ spółrzędne punktu danego, przez x', y' spółr: punktu dotknięcia, — rozwiązać dwa równania

$$y''y'+x''x'=R^2,\quad x'^2+y'^2=R^2$$

dla wyznaczenia niewiadomych x', y'.

Aby zaś poznać okoliczności zadania, odciągniemy równanie pierwsze od drugiego i wypadek przywiedziemy do postaci

$$\left(x'-\frac{x''}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{y''}{2}\right)^2=\frac{x''^2+y''^2}{4}$$

Równanie to należy do koła krórego środka spółrzędne są $\frac{x''}{2}$, $\frac{y''}{2}$ a promień $\sqrt{\left(\frac{x''^2+y''^2}{2}\right)}$. Ponieważ dwa założone równania drugiego stopnia dadzą podwóyne wartości dla x', y', wniesiemy iż od punktu danego za okręgiem dwie styczne do koła poprowadzić można: aże styczna szukana ma swoie punkta na obudwóch okręgach, więc ie ma w dwóch przecięciach okręgów, przetną się zaś okręgi ponieważ odległość ich środkow $\sqrt{\left(\frac{x''^2+y''^2}{2}\right)}$ mnieyszą iest, co łatwo okazać, od summy promieni. Wywiódłszy wartość dla y' z założonych równań, znaydziemy

$$y' = \frac{R^2 y''}{x''^2+y''^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{R^2 x''^2(x''^2+y''^2-R^2)}{(x''^2+y''^2)^2}\right\}}$$

i wniesiemy że wartość y' iest rzeczywistą
gdy $x''^2+y''^2-R^2 > 0$
lub $x''^2+y''^2-R^2 = 0$
uroioną zaś, gdy $x''^2+y''^2-R^2 < 0$:
w pierwszym razie mamy dwa punkta dotknięcia, w drugim ieden i to na okręgu, w trzecim nie masz żadnego punktu dotknięcia a dany znayduie się w śród okręgu.

142. Zakończymy rzecz o kole odpowiedzią na pytanie czy nie masz w kole układu osi spółrzędnych ukośnych, zaczęcie w śródku maiących; w którym utworzywszy równanie koła, to zachowałoby zwyczayną postać, to iest same kwadraty ze zmiennych.

Nazwawszy α, α' kąty pochyłości nowych osi do dawney OX, a x', y', spółrzędne nowego układu: mamy (50. 2°)

$$y = y'.wst\alpha' + x'.wst\alpha, \quad x = y'.dwsa' + x'.dws\alpha.$$

Wstawiwszy te wartości y, x, w równanie koła $y^2+x^2=R^2$ wypadnie

$$y'^2 + (dws\alpha'.dws\alpha + wst\alpha'.wst\alpha)2x'y' + x'^2 = R^2$$

aby w to równanie nie wchodził wyraz zawieraiący $x'y'$, musi być

$$dws\alpha'.dws\alpha + wst\alpha'.wst\alpha = 0$$

czyli $stycz\alpha'.stycz\alpha + 1 = 0.$

To ostatne równanie znaczy iż dwie nowe osi są do siebie prostopadłe (41. 2°), że zatem nie masz innego układu osi do którego odnoszone równanie koła zawierałoby same kwadraty ze zmiennych.

Zobaczymy, rzecz maiąc o ellipsie i o hyperboli, iż równania tych krzywych, odnoszone do układu osi ukośnego w środku zaczynaiącego się, zawieraią same kwadraty ze zmiennych tak iak równania odnoszone do osi tych liniy krzywych. Dwie takowe osi ukośne spółrzędnych, nazywaią się *średnicami sprzężonemi* (Diamètres conjugués). Srednice sprzężone koła przecinaią się pod kątem prostym i przeto żadnego nowego nie stanowią układu.

II. O ELLIPSIE

uważaney pod względem na środek i osi.

143. Równanie ellipsy odnoszone do środka i osi, iest (98)

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \quad (1).$$

Wziąwszy oś odciętych za oś rzędnych i wzaiemnie, to iest wstawiwszy w założone równanie B za A, i A za B, układ spółrzędnych zostawiaiąc ten sam, równanie zamieni się na

$$B^2y^2+A^2x^2=A^2B^2:$$

skąd widzimy iż postać równania ellipsy zostanie iednakowa bez względu którą z-iey osi weźmiemy za oś odciętych (fig. 98).

144. Wziąwszy koniec A′ (fig. 99) osi wielkiey, który się nazywa *wierzchołkiem* ellipsy za zaczęcie spółrzędnych, odcięta dawna OP będzie$=$A′P$-$A′O$=x-$A: wstawiwszy tę wartość za x w równanie (1), będzie

$$A^2y^2+B^2x^2=2AB^2x$$

skąd $$y^2=\frac{B^2}{A^2}(2Ax-x^2):$$

takie iest równanie ellipsy odnoszone do osi prostokątnych maiących swe zaczęcie w wierzchołku, z których iedną iest oś wielka ellipsy. Naznaczywszy x', y' spółrzędne innego punktu m, będzie

$$y'^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax' - x'^2):$$

skąd $\quad y^2 : y'^2 = x(2A - x) : x'(2A - x')$

czyli $\quad MP^2 : mp^2 = AP \times A'P : Ap \times A'p$

to iest: kwadraty z rzędnych ellipsy maią się iak iloczyny z odległości spodka każdey rzędney od dwóch wierzchołkow.

145. Twierdzenie to prowadzi do następuiących wnioskow. Wykreśliwszy kilka ellips na spólney osi A'A (fig. 100), będzie

$$PM : PN : PO : PQ = P'M' : P'N' : P'O' : P'Q'$$

wartość bowiem każdego z tych stosunkow iest taż sama.

2° Zakreśliwszy koło promieniem $= OA = A$ (fig. 101), będzie dla teyże przyczyny

$$OY : OB = PM : PQ \text{ czyli } A : B = Y : y$$

to iest, tak się ma połowa osi wielkiey do połowy osi małey iak rzędna koła zakreślonego połową osi wielkiey do rzędney ellipsy.

Jnaczey. Kwadrat z rzędney PM koła iest (fig. 101)

$$Y^2 = A^2 - x^2$$

z rzędney zaś PQ ellipsy iest

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$$

skąd $\quad Y^2 : y^2 = A^2 : B^2$

i $\quad A : B = Y : y$

lub $\quad YO : BO = MP : PQ$

trzy pierwsze wyrazy tey proporcyi mogą być wiadome, znaydziemy więc czwarty, to iest rzędną ellipsy a tem samem punkt tey linii krzywey: wyznaczywszy zaś tym sposobem iak naywięcey punktow, wykreślimy ellipsę. Nadto, ponieważ $YO > BO$, więc i $MP > PQ$: to iest, w tym razie ellipsa znayduie się wewnątrz koła. Gdybyśmy zakreślili koło promieniem $OB = B$, dowiedlibyśmy podobnie iż to koło znayduie się wewnątrz ellipsy.

146. Dogodnieyszy od poprzedzaiącego iest następuiący sposób wykreślenia ellipsy. Niech OA, OB (fig. 102) będą dwie dane połowy osi, weźmy ich różnicę OD i przenieśmy ią na ramiona kąta AOB′, odetniymy na iey przedłużeniu część $DM = OB = B$, a punkt M będzie iednym z punktow obwodu ellipsy: wykonawszy bowiem wykreślenie iak ie okazuie figura, będzie

$$O'M : DM = QM : PM$$

czyli $$A : B = \sqrt{(A^2 - x^2} : PM$$

skąd $$PM = \frac{B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

więc PM iest rzędną ellipsy czyli punkt M iest na obwodzie tey linii krzywey. Aby więc wykreślić za iednym pociągiem ćwierć ellipsy, będziemy obracali w kącie AOB′ linią O′D, tak aby iey końce D i O′ opierały się zawsze pierwszy na osi OA drugi na OB: koniec M linii O′M obracaney ku A zakreśli łuk ellipsy MA, obracaney zaś ku B zakreśli łuk MB. Tym samym sposobem wykreślimy trzy inne ćwierci ellipsy.

147. Wystawiwszy sobie trzy punkta na linii prostopadłey do wielkiey osi ellipsy, z którychby ieden znaydował się wśród ellipsy, drugi na iey obwodzie, trzeci za obwodem, będzie

w pierwszym razie $$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2) - \frac{n^2}{A^2}$$

w drugim $$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$$

w trzecim $$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2) + \frac{n^2}{A^2}$$

czyli w pierwszym, $A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2=-n^2$
w drugim, $A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2=0$
w trzecim, $A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2=n^2$
to iest: ilość $A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2$ iest w pierwszym razie odiemną, w drugim równą zero, w trzecim dodatną.

148. Poprowadziwszy od końców osi wielkiey do punktu któregokolwiek obwodu ellipsy dwie liniie A′M, AM (fig. 103) które się nazywaią *cięciwami spełniaiącemi* i nazwawszy a, a' styczne kątow które te cięciwy czynią z osią OX; zamierzmy sobie znaleźć równanie wyrażaiące warunek spólnego przecięcia tych liniy na obwodzie ellipsy.

Równanie linii A′M przechodzącey przez punkt A′ którego spółrzędne są $x'=-A$, $y'=0$, iest (39)

$$y=a(x+A),$$

równanie linii AM przechodzącey przez punkt A którego spółrzędne są $x'=A$, $y'=0$ iest

$$y=a'(x-A').$$

Aby te dwie liniie przecinały się w-iednym punkcie linii krzywey, musi iedneyże wartości x odpowiadać iednaż wartość y w trzech równaniach

$$y=a(x+A),\ y=a'(x-A),\ y^2=\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2)$$

czyli, rozmnożywszy stronami dwa pierwsze przez siebie, w tych dwóch

$$y^2=-aa'(A^2-x),\quad y^2=\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2);$$

z tych więc wypadaiące równanie

$$\frac{B^2}{A^2}=-aa'$$

wyraża warunek spólnego przecięcia cięciw spełniaiących na obwodzie ellipsy.

Warunkiem tey okoliczności w kole, dla tego że $A=B$, iest równanie

$1 = -aa'$ (136).

Otrzymany wypadek $\frac{B^2}{A^2} = -aa'$ oznacza, iż gdy ieden kąt MAX, którego styczna $= a'$, iest rostwarty; drugi MA'X iest ostry. Kąty te spełniaią się czyli ważą 200°, kiedy cięciwy przecinaią się w końcu B osi małey: w tym bowiem razie kąt BAX z kątem BAA' czyli z kątem BA'A ważą dwa proste.

149. Ze wszystkich cięciw spełniaiących, te które się przecinaią w wierzchołku osi małey czynią kąt naywiększy.

Szukaymy naprzód wyrażenia analitycznego wartości kąta A'MA (fig. 103) który czynią dwie cięciwy spełniaiące dane przez równania w poprzedzaiącym §. Styczna tego kąta iest podług wiadomey formuły (41).

$$styczM = \frac{a' - a}{1 + aa'}$$

czyli wstawiwszy wartości a', a wzięte z równań cięciw,

$$styczM = \frac{2Ay}{x^2 - A^2 + y^2}$$

czyli nareszcie, wstawiwszy za $x^2 - A^2$ wartość z równania ellipsy wyiętą $-\frac{y^2A^2}{B^2}$,

$$styczM = \frac{2AB^2}{(B^2 - A^2)y}.$$

Ponieważ $B < A$, więc 1° otrzymana wartość *stycz* M iest odiemną czyli kąt M iest roztwarty. 2° Ponieważ styczna kąta roztwartego tym iest mnieyszą im taki kąt iest większy, więc wziąwszy dla y wartość naywiększą B, *stycz*M będzie naymnieyszą a kąt A'MA weźmie wartość naywiększą, czyli stanie się kątem A'BA a iego

$$stycz\ A'BA = \frac{2AB}{B^2 - A^2}$$

kąt więc A'BA iest naywiększy.

Takimże postępuiąc sposobem, znaydziemy iż kąt cięciw spełniaiących wykreślonych na osi małey iest ostry, z tych zaś kątow naymnieyszy iest kąt BAB' którego wierzchołek A przypada w końcu osi wielkiey. Wartość styczney tego kąta wypadnie

$$styczBAB' = \frac{2AB}{A^2 - B}.$$

Ponieważ wartości dla *stycz* ABA' i *stycz* BAB' są równe i różnią się tylko znakami, więc kąty ABA', BAB' spełniaią się czyli ważą dwa kąty proste.

150. Do odkrycia naywaźnieyszych własności ellipsy doprowadzi następuiące *zadanie*. Znaleźć na płasczyźnie ellipsy punkt którego odległość od punktu wziętego dowolnie na obwodzie ellipsy, byłaby wyrażoną spółmiernie w funkcyi x.

Niech punktem takowym będzie f: (fig. 104) oznaczmy spółrzędne iego przez x', y': obierzmy punkt M na obwodzie ellipsy a iego spółrzędne oznaczmy przez x, y, kwadrat z odległości Mf iest (26)

$$Mf^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

czyli rozwinąwszy i za y^2, y wstawiwszy wartości

$$\frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2), \frac{B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)},$$

$$Mf^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + B^2 - \frac{B^2 x^2}{A^2}$$

$$- \frac{2y'B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)} + y'^2$$

według założonego warunku ma być Mf, a tym bardziey Mf^2 ilością spółmierną, w wartość więc dla Mf^2 nie powinno wchodzić $\frac{2y'B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)}$: nastąpi to gdy będzie $y' = 0$, co oznacza iż punkt szukany musi znaydować się na osi AA', weźmiemy więc na tey osi punkt F zamiast f i otrzymamy

$$MF^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2} x^2 - 2xx' + x'^2 + B^2$$

lub, wziąwszy $A^2 - B^2 = c^2$, i wyciągnąwszy pierwiastek,

$$MF = \pm \sqrt{\left(\frac{c^2 x^2}{A^2} - 2xx' + x'^2 + B^2\right)}.$$

Aby wartość MF była spółmierną, musi summa wyrazow pod znakiem pierwiastku zawarta być zupełnym kwadratem. Być to może, ponieważ w te wyrazy wchodzi niewyznaczona ilość x', którey wartość dobrana może sprawić iż rzeczona summa będzie zupełnym kwadratem: odbywszy działanie dla znalezienia pierwiastku kwadratowego summy

$$\frac{c^2 x^2}{A^2} - 2xx' + x'^2 + B^2;$$

otrzymamy pierwiastek $\frac{cx}{A} - \frac{Ax'}{c}$

i resztę drugą $-\frac{A^2 x'^2}{c^2} + x'^2 + B^2$.

Aby zaś rzeczona summa była zupełnym kwadratem, reszta druga musi być $= 0$, więc równanie

$$(A^2 - c^2) x'^2 = B^2 c^2$$

czyli, dla tego że $A^2 - c^2 = B^2$,

$$x' = \pm c,$$

stanowi żądany warunek. Podwóyna wartość x' oznacza iż znayduią się z dwóch przeciwnych stron dwa punkta na osi A'A, w odległości $c = \sqrt{(A^2 - B^2)}$ od środka ellipsy. Według tego zakreślimy z punktu B jako środka promieniem $= A$ łuk koła, a punkta F, F' w których ten łuk przetnie oś wielką będą żądanemi punktami, będzie bowiem x'^2 czyli c^2 czyli $OF^2 = BF^2 - BO^2 = A^2 - B^2$: mamy więc, dla tego że $x' = c$,

$$MF = \pm \left(\frac{cx}{A} - A\right)$$

ażeby $x<A$, $c<A$ więc $cx<A^2$, $\frac{cx}{A}<A$, więc ilość

$\frac{cx}{A}-A$ iest odiemną, aby przeto iey bezwzględna wartość była dodatną ; z dwóch znakow weźmiemy odiemny i będzie

$$MF=A-\frac{cx}{A}.$$

Wziąwszy znowu $x'=-c$ wypadnie

$$MF'=A+\frac{cx}{A}.$$

Dodawszy stronami dwa ostatne równania, wypadnie

$$MF+MF'=2A.$$

Doszliśmy więc do tey ważney własności ellipsy, iż na iey wielkiey osi znayduią się dwa punkta F i F', których, odległości od punktu wziętego na obwodzie ellipsy summa, iest ilością stałą i równą osi wielkiey.

Punkta F, F' nazywaią się *ogniskami* (foci), odległość OF lub OF' *mimośrodem*, (excentricitas) odległości MF, MF' *promieniami wodzącemi* (vectores), nareszcie podwóyna rzędna mn, prostopadła do osi w ognisku, nazywa się *parametrem*.

151. Aby znaleźć wartość parametru ellipsy który nazwiemy $2p$, wstawimy w-iey równanie $y^2=\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2)$, A^2-B^2 za x, p za y i wypadnie

$p=\frac{B^2}{A}$, skąd $A:B=B:p$, a $2A:2B=2B:2p$:

to iest parametr ellipsy iest trzecią ciągłą proporcyionalną do osi 2A, 2B.

Ponieważ $\frac{p}{A}=\frac{B^2}{A^2}$; więc równanie ellipsy odnoszone do środka i parametru iest

$$y^2 = \frac{p}{A}(A^2 - x^2):$$

odnoszone zaś do wierzchołka i parametru, iest

$$y^2 = \frac{p}{A}(2Ax - x^2), \text{ czyli } y^2 = 2px - \frac{px^2}{A},$$

152. Z twierdzenia o ogniskach (150) można wyprowadzić następuiącą własność ellipsy.

Oznaczywszy przez z długość FM, będzie

$$z = A - \frac{cx}{A}, \text{ skąd } Az = c\left(\frac{A^2}{c} - x\right)$$

i $$c : A = z : \frac{A^2}{c} - x \quad (1)$$

Aby znaleźć wartość czwartego wyrazu tey proporcyi, uważymy naprzód iż $\frac{A^2}{c}$ oznacza trzecią ciągło-proporcyionalną do c i A czyli do OF i OA (fig. 105) którą będzie OQ: a zatem

$$\frac{A^2}{c} - x = OQ - OP = PQ = MN,$$

i proporcyią (1) wyrazimy tak

$$OF : OA = FM : MN,$$

aże OF < OA więc i FM < MN: nadto punkt M wzięty iest dowolnie, więc także

$$OF : OA = Fm : mn = Fm' : m'n' = FA : AQ.$$

Liniia QN którey położenie wyznaczyć można przez proporcyią

$$OF : OA = FA : AQ$$

nazywa się *kierownicą* ellipsy, (directrisse)

Podobna własność służy paraboli: było tam (101) MN=MF. Zobaczymy iż w hyperboli iest MN < MF.

153. Aby wykreślić ellipsę maiąc daną oś wielką i ogniska, weźmiemy dowolnie dwie części osi wielkiey, i z ogniska któregokolwiek zakreślimy łuk iedną

z tych części, a drugą przetniemy go z drugiego ogniska: punkt przecięcia łukow będzie należał do ellipsy. Kreśląc łuki z obudwóch stron osi wielkiey, oznaczymy za iednym razem dwa punkta. Z resztą zatknąwszy kolcami dwa punkta na płaszczyźnie i zawlokłszy spodki kolcow nicią zamkniętą tak długą iak oś wielka, ślad zarysowany rylcem wiedzionym według tey nici wytężoney, będzie śladem ellipsy.

154. *Zadanie*. Znaleźć równanie linii styczney z ellipsą.

Rownanie linii MN (fig. 106) przecinaiącey ellipsę w dwóch punktach M, N' których spółrzędne oznaczymy przez x', y'; x'', y'', iest (39)

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

Ponieważ punkta M, N znayduią się na ellipsie więc

$$y'=\frac{B}{A}\sqrt{(A^2-x'^2)},\quad y''=\frac{B}{A}\sqrt{(A^2-x''^2)}.$$

Wstawiwszy te wartości y', y'' w spółczynnik $\dfrac{y'-y''}{x'-x''}$ wyrazimy tę okoliczność iż sieczna ma dwa punkta z ellipsą spólne. Aby zaś uniknąć wyrażeń niespółmierności, mamy

$$y'-y''=\frac{y'^2-y''^2}{y'+y''}=-\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x'^2-x''^2}{y'+y''}$$

skąd
$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x'+x''}{y'+y''}$$

i równanie sieczney zamieni się na

$$y-y'=-\frac{B^2}{A^2}\;\frac{x'+x''}{y'+y''}\;(x-x').$$

Niech dopiero liniia MN obraca się około punktu M usiłując wyyść z ellipsy: w tym razie punkt N zbliżać się będzie do M, a gdy się z nim zeydzie będzie $x'=x''$, $y'=y''$, liniia MN z sieczney przeydzie na styczną MT, tey zaś równanie będzie

$$y-y'=-\frac{B^2x'}{A^2y'}(x-x')$$

lub, zniosłszy mianownik i pamiętaiąc że $A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2$, będzie

$$A^2yy'+B^2xx'=A^2B^2.$$

Dowiedziemy teraz, iż styczna ieden tylko punkt ma spólny z ellipsą. Rozmnożywszy strony ostatnego równania przez 2 i odciągnąwszy ie od stron równania $A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2$, otrzymamy wypadek który przywiedziemy do tey postaci

$$A^2(y-y')^2+B^2(x-x')^2=A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2.$$

Tu x, y oznaczaią spółrzędne wszelkich punktow styczney wyiąwszy punkt M którego spółrzędne są x', y'; a że pierwsza strona ostatnego równania iest dodatną, więc nią iest i druga, więc podług (147) wszelkie punkta styczney oprócz punktu dotknięcia są za ellipsą.

155. Aby poprowadzić styczną do ellipsy przez punkt M (fig. 107) dany na iey obwodzie, trzeba 1° przez punkt M poprowadzić średnicę MOM', 2° przez koniec A' osi wielkiey cięciwę A'N równoodległą od MM', 3° złączyć punkta N i A liniią prostą NA, 4° poprowadzić przez punkt M równoodległą MT od NA, i liniia MT będzie szukaną styczną.

Równanie bowiem *pierwszey* linii OM przechodzącey przez punkt M którego spółrzędne są x', y', iest

$$y'=ax', \text{ skąd } a=\frac{y'}{x'};$$

równanie *drugiey* linii A'N przechodzącey przez punkt A' którego spółrzędne są $x=-A$, $y=0$, iest (39)

$$y=a(x+A);$$

równanie *trzeciey* linii AN przechodzącey przez punkt A którego spółrzędne są $x = +A$, $y = 0$, iest

$$y = a(x - A):$$

ażeli te dwie ostatne liniie przecinaią się na obwodzie ellipsy, więc (148).

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2}, \text{ skąd } a' = -\frac{B^2}{A^2 a}$$

$$\text{czyli } a' = -\frac{B^2 x'}{A^2 y'}$$

nakoniec równanie *czwartey* linii MT przechodzącey przez punkt M którego spółrzędne są x' i y', iest

$$y - y' = a'(x - x')$$

czyli, za a' wstawiwszy wartość,

$$y - y' = -\frac{B^2 x'}{A^2 y'}(x - x')$$

ten zaś wypadek oznacza iż liniia MT iest styczną (154).

Podobnie poprowadziwszy średnicę mm' równoodległe od NA a przez punkt m liniią równoodległą od MM'; owa liniia byłaby styczną z ellipsą w punkcie m. Zobaczymy późniey iż średnice MM', mm' równoodległe od cięciw spełniaiących są te któreśmy nazwali (142) *sprzężonemi:* kąt tych średnic mOM iest $=$ kątowi A'NA cięciw spełniaiących. Podług takich samych prawideł rozwiązalibyśmy zadanie które nas zatrudnia, gdybyśmy wzięli oś małą za pierwszą, ponieważ równanie ellipsy zachowuie tęż samą postać gdy ie odnosimy do osi małey, uważaney za pierwszą.

156. Aby znaleźć punkt w którym styczna przecina oś OX, czyli aby znaleźć odległość OT, (fig. 107); weźmiemy $y = 0$ w równaniu styczney $A^2 yy' + B^2 xx' = A^2 B^2$, i znaydziemy

$$x \text{ czyli } OT = \frac{A^2}{x'}$$

skąd $PT = OT - OP = \frac{A^2}{x'} - x' = \frac{A^2 - x'^2}{x'}$

odległość PT spodka rzędney punktu dotknięcia od punktu w którym styczna przecina oś OX nazywa się *podstyczną*: mamy więc

$$\textit{podstyczna}\ PT = \frac{A^2 - x'^2}{x'}.$$

Ponieważ wartość podstyczney PT (fig. 108) nie zawisła od drugiey osi B, więc wszystkie ellipsy maiące spólny środek i spólną oś wielką z ellipsą którą uważamy, maią względem odciętey x tęż samą podstyczną, chociaż ich styczne są różne.

Poprowadziwszy zatem styczną Tm' do koła którego średnicą iest oś wielka ellipsy i z tego punktu m' spuściwszy prostopadłą do OA, punkt M ellipsy będzie znalezionym punktem dotknięcia, gdy punkt T, od którego ma być prowadzoną styczna, dany będzie na przedłużeniu osi wielkiey.

157. W ogólności oznaczywszy przez x'', y'' spółrzędne wiadome punktu danego za obwodem ellipsy od któregoto punktu trzeba poprowadzić styczną do ellipsy; przez x', y' spółrzędne szukanego punktu dotknięcia, będziemy mieli dwa równania

iedno ellipsy $\quad A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2$

drugie styczney $\quad A^2y'y'' + B^2x'x'' = A^2B^2$

na wynalezienie wartości dwóch niewiadomych x', y'. Znalazłszy

$$x' = \frac{A^2B^2x'' \pm A^2y''\sqrt{(A^2y''^2 + B^2x''^2 - A^2B^2)}}{A^2y''^2 + B^2x''^2}$$

wniesiemy iż x' a więc i y' maią dwie wartości; że zatem od punktu danego za ellipsą można poprowadzić dwie styczne do ellipsy: nadto aby wartość x' była rzeczywistą, ilość $A^2y''^2 + B^2x''^2 - A^2B^2$ musi być dodatną, to iest (147) punkt dany musi się znaydować za obwodem ellipsy. Gdyby ta ilość była odiemną, to iest gdyby punkt dany znaydował się wśród ellipsy, wartość x' byłaby uroioną; co znaczy iż od punktu danego wśród ellipsy nie można poprowadzić styczney do tey linii krzywey: a gdyby nareszcie owa ilość była $=0$, punkt dany znaydowałby się na obwodzie ellipsy, a wartość dla x' byłaby rzeczywistą.

158. *Zadanie.* Znaleźć równanie linii *normalney* do ellipsy.

Niech będzie punkt M (fig. 109) do którego trzeba poprowadzić normalną, to iest prostopadłą do cząstki obwodu nieskończenie małey którą za liniią prostą można uważać. Przedłużywszy tę cząstkę nieskończenie małą, otrzymamy styczną MT do którey prostopadła MN, zowie się normalną ellipsy. Aże równanie styczney iest

$$y-y'=-\frac{B^2x'}{A^2y'}(x-x'),$$

(tu y', x' są spółrzędnemi punktu M dotknięcia) równanie zaś normalney iest w ogólności

$$y-y'=a(x-x')$$

skąd (41, 2°) $a=\dfrac{1}{\left(\dfrac{B^2x'}{A^2y'}\right)}=\dfrac{A^2y'}{B^2x'}$

więc żądane równanie normalney iest

$$y-y'=+\frac{A^2y'}{B^2x'}(x-x')$$

159. Aby znaleźć liniią ON, (fig. 109) czyli, aby wyznaczyć punkt w którym normalna przecina oś OX, naznaczymy w równaniu tamtey $y=0$, skąd wypadnie

$$x \text{ czyli } ON=\frac{A^2-B^2}{A^2}x':$$

skąd $NP=OP-ON=x'-\frac{A^2-B^2}{A^2}x'$

czyli $NP=\frac{B^2}{A^2}x'$

odległość NP punktu N, w którym normalna przecina oś OX, od spodku N linii MN rzędney punktu dotknięcia M, zowie się *podnormalną*. Wartość podnormalney iest dodatną lub odiemną według znaku odciętey x'.

160. Normalna MN ellipsy dzieli na dwie równe części kąt FMF' dwóch promieni wodzących FM, F'M.

Znaleźliśmy iż promienie wodzące (150) są

$$FM=A-\frac{cx'}{A},\ F'M=A+\frac{cx'}{A}$$

x', y' oznaczaią tu spółrzędne punktu M dotknięcia, a c mimośrod. Znaleźliśmy nadto w poprzedzaiącym §

$$x \text{ czyli } ON=\frac{A^2-B^2}{A^2}x'=\frac{c^2}{A^2}x'$$

iest więc

$$FN=OF-ON=c-\frac{c^2x'}{A^2}=\frac{c}{A}\left(A-\frac{cx'}{A}\right)=\frac{c}{A}FM$$

$$F'N=OF'+ON=c+\frac{c^2x'}{A^2}=\frac{c}{A}\left(A+\frac{cx'}{A}\right)=\frac{c}{A}F'M$$

skąd wypada proporcyia

$$FN:F'N=FM:F'M$$

która oznacza iż kąt FMF' iest podzielony na dwie równe części przez normalną MN, to iest, FMN=F'MN: Skąd wniesiemy że i kąt FMT=F'Mt, ponieważ kąty TMN, tMN są proste.

Poprawka: Końcowa formuła § 158. ma być

$$y-y'=\frac{A^2y'^2}{B^2x'^2}(x-x')$$

161. Za pomocą tey własności ellipsy można poprowadzić styczną do ellipsy przez punkt dany na iey obwodzie lub za obwodem.

Niechby, naprzód, trzeba było poprowadzić styczną z ellipsą przez punkt M (fig. 110) dany na obwodzie. Poprowadzimy promienie wodzące MF, MF, przedłużymy pierwszy do K tak aby było MK=MF, kąt FMK podzielimy na dwie równe części przez liniią MT a ta będzie styczną z ellipsą, widzimy bowiem że kąt FMT=F'M*t*.

Niech, powtóre, będzie dany za obwodem punkt *t*, przez który trzeba poprowadzić styczną do ellipsy. Z punktu F' iako ze środka promieniem równym 2A zakreślimy okrąg, a z punktu *t* promieniem *t*F przetniemy go: dwa okręgi w dwóch punktach K i *k* przetną się dla tego że F'*t* odległość środkow mnieyszą iest od summy promieni *t*K+F'K. Poprowadziwszy dopiero liniie F'K, F'*k*, punkta M, *m* w których te linie przetną obwód ellipsy, będą punktami dotknięcia. Co do punktu M, mamy *t*F=*t*K i MF=MK (dla tego że F'M + MK=F'M+MF) więc liniia *t*MT iest według zasad Geometryi prostopadłą do FK, skąd daley wypada że kąt FMT=F'M*t*, więc *t*M iest styczną ellipsy.

162. Wiadomo z fizyki iż ciało spadłszy na płaszczyznę w kierunku ukośnym, odbiia się pod kątem równym kątowi wpadnienia. Tęż samą własność maią promienie światła i cieplika. Wystawiwszy więc sobie promień mogący się odbić, wypadaiący z-iednego ogniska ellipsy i uderzaiący o iey obwód; promień ten dozna tego samego skutku iak gdyby odbił się o styczną ellipsy w punkcie dotknięcia, odbiwszy się więc wpadnie w drugie ognisko, a ieśli iedno z ognisk iest środkiem wiązki promieni świetnych lub cieplikowych, wszystkie promienie złączą się w drugiem ognisku. Ztądto pochodzi nazwisko tych osobliwych punktow ellipsy.

III O ELLIPSIE

uważaney pod względem na średnice sprzężone.

163. Dochodząc postaci i liczby liniy drugiego rzędu (88, etc.), przekonaliśmy się iż wszelka linia prowadzona przez środek ellipsy dzieli ią na dwie równe części, czyli że ta liniia ieśli którąkolwiek cięciwę, więc i wszystkie inne cięciwy od tamtey równoodległe przecina na dwie równe części i dla tego nazywa się *średnicą*.

Gdy średnica OX′ (fig. 111) dzieli na dwie równe części wszystkie cięciwy równoodległe od średnicy OY′, nie idzie za tem iż nawzaiem średnica OY′ dzieli na dwie równe części cięciwy równoodległe od OX′: gdy zaś dwie średnice ellipsy maią takową własność, zowią się *sprzężonemi*. Osi ellipsy są średnicami sprzężonemi, ponieważ każda dzieli na dwie równe części cięciwy równoodległe od drugiey. Jeżeli więc oprócz tego znayduie się inny iescze układ średnic sprzężonych w ellipsie; równanie odnoszone do tego układu musi mieć taką samą postać iak równanie odnoszone do środka i osi ellipsy.

Aby się przekonać o bytności takowego średnic układu nazwiymy α, α' kąty które średnica według x' i druga według y' czyni z osią OX, będzie (50, 2°)

$$y = y'.wst\alpha' + x'.wst\alpha,\quad x = y'.dws\alpha' + x'.dws\alpha,$$

gdzie y', x' oznaczaią spółrzędne MP′, PO punktu M w nowym układzie. Wstawiwszy te wartości y, x w równanie ellipsy $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$, wypadnie

$$(A^2.wst^2\alpha + B^2.dws^2\alpha)x'^2 + (A^2.wst^2\alpha' + B^2.dws^2\alpha')y'^2$$
$$+ (2A^2.wst\alpha.wst\alpha' + 2B^2 dws\alpha.dws\alpha')\,x'y' = A^2B^2.$$

Aby znaleźć dla kątow α, α' wartości przez które zniklby wyraz tego równania zawieraiący $x'y'$; założymy

$$A.^2 wst\alpha.wst\alpha' + B^2.dws\alpha.dws\alpha' = 0, \quad (a)$$

bo w tym razie będzie

$$(A^2.wst^2\alpha + B^2.dws^2\alpha)x'^2 +$$
$$+(A^2.wst^2\alpha' + B^2.dws^2\alpha')y^{2\prime} = A^2B^2 \quad (1)$$

Aby wyznaczyć kąty α, α' lub przynaymniey ich powinowactwo, podzielimy obie strony równania (a) przez $dws\alpha.dws\alpha'$ i wypadnie

$$stycz\alpha.\ stycz\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}$$

Ponieważ α, α' są dwie ilości niewyznaczone, można dla iedney z nich *np.* dla α wziąć wartość dowolną, a potem wyprowadzić wartość odpowiadaiącą dla α'. Jest więc nieograniczona liczba układow średnic sprzężonych: aże oznaczywszy przez a, a' styczne kątow które czynią cięciwy spełniaiące z osią OX, mamy równanie teyże co powyższe postaci, to iest (148).

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2}$$

więc wziąwszy $stycz\alpha = a$, będzie $stycz\alpha' = a'$, co znaczy iż dwie średnice sprzężone są równoodległe od dwóch cięciw spełniaiących. Poprowadziwszy więc dowolnie dwie cięciwy spełniaiące, a przez środek i wśród ellipsy liniie od nich równoodległe, te będą średnicami sprzężonemi.

Jeśli kąt α iest ostry, $stycz\alpha$ iest dodatną, więc $stycz\alpha'$ odiemną a kąt α' rostwarty, i wzaiemnie ieśli kąt α' iest ostry, kąt α iest rostwarty: gdy więc iedna ze średnic sprzężonych czyni kąt ostry z osią OX, druga czyni z nią kąt rostwarty,

W zamiarze znalezienia wartości połowic średnic A', B' naznaczymy z osobna $x'=0$, $y'=0$ w równaniu (1) i otrzymamy

$$A'^2 = \frac{A^2B^2}{A^2.wst^2\alpha + B^2.dws^2\alpha}, \quad (b)$$

$$B'^2 = \frac{A^2B^2}{A^2.wst^2\alpha' + B^2.dws^2\alpha'} \quad (b),$$

więc równanie (1), czyli

$$\frac{x'^2}{\frac{A^2B^2}{A^2.wst^2\alpha + B^2.dws^2\alpha}} + \frac{y'^2}{\frac{A^2B^2}{A^2.wst^2\alpha' + B^2.dws^2\alpha'}} = 1$$

czyli

czyli $\quad \frac{x'^2}{A'^2} + \frac{y'^2}{B'^2} = 1$, lub $A'^2y'^2 + B'^2x'^2 = A'^2B'^2$

iest równaniem ellipsy odnoszonem do średnic sprzężonych.

164. Za pomocą formuł (a) i (b) dowiedziemy że prostokąt z dwóch osi równy iest równoległobokowi ze średnic sprzężonych.

Rozmnożywszy przez siebie wartości A'^2, B'^2; mamy

$$A'^2B'^2 = \frac{A^4B^4}{\left\{\begin{array}{l} A^4.wst^2\alpha.wst^2\alpha' + B^4.dws^2\alpha.dws^2\alpha' \\ + A^2B^2(wst^2\alpha.dws^2\alpha' + wst^2\alpha'.dws^2\alpha) \end{array}\right\}}$$

aże, podniosłszy do kwadratu każdą stronę równania (a), iest

$$A^4wst^2\alpha.wst^2\alpha' + B^4dws\alpha^2.dws^2\alpha'$$
$$= -2A^2B^2wst\alpha wst\alpha'.\, dws\alpha.\, dws\alpha'$$

więc

$$A'^2B'^2 = \frac{A^2B^2}{(wst\alpha.dws\alpha' - wst\alpha'.dws\alpha)^2}$$

czyli

$$A'^2B'^2 = \frac{A^2B^2}{wst^2(\alpha' - \alpha)}$$

skąd

$$AB = A'B'.wst(\alpha'-\alpha)$$

pomnożywszy zaś obie strony przez 4, otrzymamy

$$4AB = 4A'B'.wst(\alpha'-\alpha)$$

wypadek który oznacza iż prostokąt z osi ellipsy równy iest równoległobokowi ze średnic sprzężonych (fig. 112).

165. Dowiedziemy iescze że $A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2$. W tym zamiarze wyruguiemy α, α' z trzech równań (a) i (b) następuiącym sposobem. Wywiódłszy z (a)

$$A^4 wst^2\alpha . wst^2\alpha' = B^4 dws^2\alpha . dws^2\alpha',$$

mamy $$dws^2\alpha' = \frac{A^4 wst^2\alpha}{B^4 dws^2\alpha} . wst^2\alpha'$$

czyli $$1 - wst^2\alpha' = \frac{A^4 wst^2\alpha}{B^4 dws^2\alpha} . wst^2\alpha'$$

skąd $$wst^2\alpha' = \frac{B^4 dws^2\alpha}{A^4 wst^2\alpha + B^4 dws^2\alpha},$$

a zatem $$dws^2\alpha' = \frac{A^4 . wst^2\alpha}{A^4 . wst^2\alpha + B^4 . dws^2\alpha}$$

Wstawiwszy te wartości dla $wst^2\alpha'$ i $dws^2\alpha'$ w wartość B'^2, wypadnie

$$B'^2 = \frac{A^4 . wst^2\alpha + B^4 . dws^2\alpha}{A^2 . wst^2\alpha + B^2 . dws^2\alpha}$$

dodawszy rę wartość B'^2 do wartości A'^2, będzie

$$A'^2 + B'^2 = \frac{A^2B^2 + A^4 . wst^2\alpha + B^4 . dws^2\alpha}{A^2 . wst^2\alpha + B^2 . dws^2\alpha}$$

czyli $$= \frac{A^2B^2(wst^2\alpha + dws^2\alpha) + A^4 . wst^2\alpha + B^4 dws^2\alpha}{A^2 wst^2\alpha + B^2 . dws^2\alpha}$$

$$= \frac{B^2(A^2 wst^2\alpha + B^2 . dws^2\alpha) + A^2(A^2 wst^2\alpha + B^2 . dws^2\alpha)}{A^2 . wst^2\alpha + B^2 . dws^2\alpha}$$

czyli $$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2$$

a zatem $$4A'^2 + 4A'^2 = 4A + 4B^2$$

czyli $$(2A')^2 + (2B')^2 = (2A)^2 - (2B)^2$$

to iest summa kwadratow ze średnic sprzężonych równa iest summie kwadratow z dwóch osi.

166. Doszedłszy (163) że kąt średnic sprzężonych równy iest kątowi cięciw spełniaiących iako równoodległych względnie od średnic; wniesiemy iż kąt takich średnic iest zawsze rostwarty, gdy cięciwy spieraią się na końcach osi wielkiey, naywiększy zaś iaki być może równy iest kątowi cięciw przecinaiących się w końcu osi małey (149).

Aby zatem poprowadzić w ellipsie dwie średnice sprzężone, pochylone do siebie pod kątem danym A (fig. 113) który iak dopiero uważaliśmy, ma być rostwarty po pewną granicę, wyrysuiemy kąt A′AD rowny danemu, i uważać go będziemy za kąt odcinka koła którego cięciwą iest oś AA′. Aby wykreślić równy mu kąt w odcinku, wyprowadzimy z punktu A prostopadłą AS do AD którato AD ma być styczną koła szukanego: z punktu S promieniem SA zakreślimy okrąg który przetnie ellipsę w dwóch punktach M, M′ i będzie kąt odcinka A′AD równy kątowi A′MA w odcinku. Otrzymamy tym sposobem cięciwy spełniaiące A′M, AM przecinaiące się na ellipsie pod kątem równym danemu: poprowadziwszy więc przez środek ellipsy średnice od tych cięciw równoodległe; te będą sprzężone i pochylone do siebie pod kątem żądanym.

Aby się zapewnić że okrąg przetnie ellipsę i to we dwóch punktach; znaydźmy spółrzędne punktow tym dwom liniiom krzywym spólnych. W tym zamiarze nazwawszy $-a$ styczną kąta danego rostwartego DAX (fig. 113) równanie linii DA przechodzącey przez punkt A którego spółrzędne są $y=0$, $x=A$, iest

$$y=-a(x-A)$$

równanie zaś linii SA do niey prostopadłey, iest

$$y=+\frac{1}{a}(x-A)$$

odcięta punktu S środka koła iest $x=0$, rzędna więc OS, wziąwszy $x=0$ w tem równaniu, wypadnie

$$OS = -\frac{A}{a}$$

a zatem kwadrat z promienia iest $AS^2 = OS^2 + OA^2 = \frac{A^2}{a^2}$, a równanie koła

$$x^2 + \left(y + \frac{A}{a}\right)^2 = A^2 + \frac{A^2}{a^2}$$

czyli $$x^2 + y^2 + \frac{2Ay}{a} = A^2,$$

z tego i ellipsy równania $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$ wyrugowawszy x wypadnie

$$(A^2 - B^2)y^2 - \frac{2AB^2}{a}y = 0$$

a zatem 1° $y=0$, 2° $y = \frac{2AB^2}{a(A^2-B^2)}$:

wyprowadzimy nareszcie z równania ellipsy

$$3^\circ\ x = \pm A,\quad 4^\circ\ x = \pm A\sqrt{\left\{1 - \frac{4A^2B^2}{a^2(A^2-B^2)^2}\right\}}$$

Z tych czterech wypadkow pierwszy i trzeci oznacza iż koło z ellipsą stykaią się w końcach osi wielkiey, drugi i czwarty iż te dwie linie krzywe przecinaią się we dwóch punktach. Roztrząsnąwszy nareszcie wypadki 2° i 4° poznamy okoliczności z przecięciami dwóch krzywych połączone (*cf* 149).

167. Aby znaleźć sposób na wykreślenie dwóch średnic sprzężonych równych, zrównamy naprzód wartości A'^2 i B'^2 (163) i otrzymamy

$$A^2 wst^2\alpha + B^2.dws^2\alpha = A^2.wst^2\alpha' + B^2.dws^2\alpha'$$

czyli, wstawiwszy $1 - wst^2\alpha$ za $dws^2\alpha$, i $1 - ws^2\alpha'$ za $dw^2\alpha'$

$$(A^2 - B^2)wst^2\alpha = (A^2 - B^2)wst^2\alpha'$$

skąd wniesiemy że

$wst\alpha = wst\alpha'$ (1)

stąd zaś, i na mocy założonego równania, że

$dws^2\alpha = dws^2\alpha'$ (2),

Wstawiwszy $wst\alpha$ za $wst\alpha'$ w równanie (a) warunkowe osi sprzężonych (163), wypadnie

$$dws\alpha . dws\alpha' = -\frac{A^2}{B^2} wst^2\alpha,$$

skąd widzimy, iż $dws\alpha$ i $dws\alpha'$ maią znaki przeciwne a zatem z równania (2) wywiedziemy

$$dws\alpha = -dws\alpha' :$$

co znaczy iż osi sprzężone równe, czynią kąty α, α' z osią OX z których ieden iest spełnieniem drugiego do dwóch kątow prostych: aże tęż samą własność maią (148) cięciwy spełniaiące prowadzone od końców osi wielkiey do końca osi małey, więc średnice sprzężone równe będą te, które poprowadzimy od tych cięciw równoodlegle (fig. 114).

Równanie ellipsy odnoszone do średnic sprzężonych równych iest więc

$$x'^2 + y'^2 = A^2.$$

Stąd, że to równanie ma tęż samą postać co równanie koła odnoszone do osi prostokątnych, nie wypada iż koło może mieć oprócz prostokątnego inny nieprostokątny układ spółrzędnych, w którym utworzone równanie byłoby takie samo iak w tamtym. Niech będą na przykład OX, OY (fig. 115) dwie średnice koła przecinaiące się pod kątem ostrym α, mielibyśmy dla znalezienia wartości promienia OM, który nazwiemy A, rownanie

$$A^2 = x^2 + y^2 + 2yx.dws\alpha.$$

Niechby daley xA, yY były dwie średnice sprzężone równe ellipsy: mielibyśmy równanie

$$A^2 = x^2 + y^2$$

które nie iest toż samo co poprzedzaiące, więc nie może należyć do koła, więc koło ieden tylko ma układ prostokątny spółrzędnych (142).

168. Rozwiązawszy równanie ellipsy odnoszone do średnic sprzężonych tak względem y' iak względem x', wniesiemy z postaci wypadkow iż każda ze średnic, tak iak każda z osi dzieli na dwie równe części cięciwy równoodległe od drugiey: nadto z równania

$$y'^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(A'^2 - x'^2)$$

wywiedziemy tak iak (w 144) proporcyią

$$y'^2 : y''^2 = (A'+x')(A'-x') : (A'+x'')(A'-x'')$$

czyli $PM^2 : PM'^2 = A'P . AP : A'P' . AP'$ (fig. 116)

która znaczy iż kwadraty z rzędnych branych według iedney ze średnic sprzężonych maią się iak prostokąty z odcinkow drugiey średnicy zrobionych przez rzędne.

Za pomocą tey proporcyi wykreślimy ellipsę maiąc dane iey średnice sprzężone i kąt pod którym się przecinaią. W tym razie wykreślimy na pierwszey średnicy $2A'$ iako na osi ellipsę któreyby drugą osią była średnica $2B'$. Wykreślmy daley rzędne NP, N P′ prostokątne, nachylimy nareszcie też rzędne pod kątem $boA' =$ danemu, nie zmieniaiąc ich długości, a punkta M, M′ będą należały do ellipsy; proporcyia bowiem ostatnia będzie sprawdzoną.

169. Znaydziemy iescze powinowactwo kątow które cięciwy spełniaiące AN, A′N (fig. 117) czynią z osią spółrzędnych OX wziętą na iedney ze średnic sprzężonych.

Oznaczywszy przez 6 kąt średnic sprzężonych AA′, BB′; przez α kąt który cięciwa A′N czyni z osią AA′ przez α' kąt NAX; równanie linii A′N przechodzącey przez punkt A′ którego spółrzędne są $y = 0$, $x = -A'$, będzie

$$y = a(x + A'), \text{ w którem } a = \frac{\mathrm{wst}\alpha}{\mathrm{wst}(\beta - \alpha)} \quad (36)$$

równanie zaś linii AN przecinaiącey się z pierwszą iest

$$y = a'(x - A') \text{ w którem } a' = \frac{\mathrm{wst}\alpha'}{\mathrm{wst}(\beta - \alpha')}.$$

Ponieważ te dwie linije przecinaią się z ellipsą którey równanie

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(A'^2 - x^2),$$

więc te trzy równania czyli to ostatne, i równanie

$$y^2 = -aa'(A'o - x^2)$$

wypadaiące z rozmnożenia dwóch pierwszych przez siebie, sprawdzone będą iednąż wartością dla y: a zatem

$$aa' = -\frac{B'^2}{A'^2}$$

iest równaniem wyrażaiącem warunek, pod który m cięciwy spełniaiące w układzie średnic sprzężonych przetną się na obwodzie ellipsy. Równanie to, gdy średnice sprzężone są sobie równe, zamieni się na

$$aa' = -1$$

kąt iednak w tym razie A'NA nie będzie prosty, ponieważ musiałby i kąt β być prostym, co być nie może, (163 i 149).

170. *Zadanie.* Znaleźć równanie styczney do ellipsy w punkcie M którego spółrzędne odnoszone do średnic sprzężonych są dane (fig. 118).

Tu rozumuiąc i postępuiąc zupełnie iak w § 154. znaydziemy równanie styczney

$$y - y' = -\frac{B'^2 x'}{A'^2 y'}(x - x').$$

171. *Zadanie.* Poprowadzić styczną doellipsy przez punktM, na iey obwodzie dany, nie znaiąc ani środka ellipsy ani iey średnic sprzężonych.

Znaydziemy naprzód środek ellipsy poprowadziwszy, przez środki dwóch cięciw którychkolwiek równoodległych między sobą, linią i tę podzieliwszy na dwie równe części: środek O (fig. 119) tey linii będzie środkiem ellipsy. 1° Od punktu O do M poprowadźmy linią OM, 2° średnicę iakąkolwiek DD', 3° przez punkt D' linią D'N równoodległą od OM, 4° linią ND, nareszcie przez M równoodległą MT od ND i będzie MT styczną żądaną w punkcie M.

Wystawiwszy bowiem sobie średnicę CC' sprzężoną z DD' do których odniesiemy ellipsę; równanie linii OM przechodzącey przez zaczęcie O. będzie

$$y = ax$$

w którem $a = \frac{wst\,\alpha}{wst(\beta - \alpha)}$ i α, β oznaczaią toż samo co w § 169. Oznaczywszy przez x', y' spółrzędne punktu M brane w tym układzie, będzie $a = \frac{y'}{x'}$.
Równanie linii D'N równoodległey od OM, iest

$$y = a(x + A')$$

linii zaś DN, $y = a'(x - A')$, w którem $a' = \frac{wst\,\alpha'}{wst(\beta - \alpha')}$
nakoniec linii MT, przechodzącey przez punkt M którego spółrzędne są x', y', iest

$$y - y' = a'(x - x').$$

Aże DN, D'N są cięciwami spełniaiącemi w układzie średnic sprzężonych, więc (169)

$$aa' = -\frac{B'^2}{A'^2}, \text{ skąd } a' = -\frac{B'^2}{aA'^2}$$

czyli, na mocy wartości a; $a' = -\frac{B'^2 x'}{A'^2 y'}$, równanie więc linii MT iest

$$y - y' = -\frac{B'^2 x'}{A'^2 y'}(x - x')$$

które należy do styczney (170) więc MT iest styczną z ellipsą.

172. Gdyby dwie średnice sprzężone miały się przecinać pod kątem danym, naówczas poprowadzilibyśmy średnicę iakąkolwiek DD′, (fig. 119) tę uważalibyśmy za cięciwę koła (iak w 166) która z-inną liniią DQ czyniłaby kąt DDQ równy danemu, wykreślilibyśmy kąt w odcinku równy kątowi odcinka DDQ, a dwa punkta w którychby koło przecinało ellipsę byłyby temi w których przecinałyby się dwie par cięciw spełniaiących: średnice równoodległe od tych cięciw względnie będą sprzężonemi i przetną się pod kątem danym.

Jeśli kąt dany iest prosty, średnice tym sposobem wyznaczone będą osiami ellipsy, w ów czas punkt S środek koła padnie na punkt O środek ellipsy. Zakreśliwszy więc koło na średnicy DD′, to przetnie ellipsę ponieważ połowa średnicy OD mnieyszą iest od połowy osi wielkiey: punkt przecięcia koła z ellipsą będzie punktem przecięcia spólnego cięciw spełniaiących od których równoodległe średnice będą szukanemi osiami. Gdyby koło promieniem OD zakreślone nie przecinało ellipsy lecz się iey tylko dotykało w punktach D i D′, w ów czas średnica DD′ byłaby osią ellipsy.

IV. *O równaniu polarnem ellipsy.*

173. Z własności ellipsy, któreśmy dotąd odkryli, nayznacznieyszą iest ta, że summa promieni wodzących równa iest osi wielkiey.

Rozwiążmy teraz zadanie odwrotne, to iest, znaydźmy równanie linii krzywey maiącey tę własność, iż summa odległości punktu M (fig. 120) na iey obwodzie dowolnie wziętego od dwóch punktow F, F′

stałych na iey płaszczyźnie położonych iest ilością stałą i równą $2A$.

Weźmy środek O linii FF', którą naznaczymy $=2c$ za zaczęcie osi spółrzędnych. Oznaczmy przez x, y, spółrzędne PO, PM tego punktu a przez z, z' odległości FM, F'M: według założenia iest

$$z'+z=2A \quad (1)$$

W tróykątach MPF, MPF' mamy

$$z^2=y^2+(c-x)^2,\ z'^2=y^2+(c+x)^2$$

zatem z'^2-z^2 czyli $(z'+z)(z'-z)=4cx$

a $$z'-z=\frac{2cx}{A}\ (2):$$

odciągnąwszy stronami równanie (2) od (1), wypadnie

$$z=A-\frac{cx}{A},$$

wstawiwszy tę wartość z w równanie daiące z^2, a z wypadaiącego wyprowadziwszy wartość dla y^2; otrzymamy

$$y^2=\frac{A^2-c^2}{A^2}(A^2-x^2)$$

ilość A^2-c^2 iest dodatną, ponieważ $FF'<F'M+FM$ czyli $2c<2A$, $c<A$: naznaczywszy więc $A^2-c^2=B^2$, mamy równanie

$$y^2=\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2)$$

z którego postaci wniesiemy iż linija krzywa szukana, iest ellipsą.

174. Według znalezionego równania potrafilibyśmy wykreślić liniią krzywą i przekonalibyśmy się iż iest symetryczną, ma środek, osi, *itd*: Lecz rozwiążemy tylko to zadanie, czy liniia krzywa, którey znaleźliśmy równanie, iest wklęsłą czy wypukłą względem osi swoich.

Wartość rzędney któreykolwiek nad osią wielką iest

$y = \frac{B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)}$, pod osią $y = -\frac{B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)}$

z tych pierwszą wyraźmy tak

$$y = \frac{B}{A}\sqrt{[(A + x)(A - x)]}$$

załóżmy iż x oznacza odciętą dodatną $OP < A$, (fig. 121): będzie

$$\frac{B}{A}\sqrt{[(A+x)(A-x)]} > \frac{B}{A}\sqrt{[(A-x)(A-x)]}$$

czyli $$PM > \frac{B}{A}(A-x) \quad (a)$$

Aby się dowiedzieć co znaczy ilość $\frac{B}{A}(A-x)$, poprowadźmy od B do A linią BA: równanie tey linii przechodzącey przez punkt A iest

$$y = a(x - A) \text{ lub } y = a(A - x)$$

aże $a = \frac{B}{A}$, więc y czyli $PN = \frac{B}{A}(A-x)$ i wyrażenie (a) przeydzie na

$$PM > PN.$$

Widzimy tedy iż punkta linii krzywey odpowiadaiące punktom linii prostey BA znayduią się nad tą linią iako nad cięciwą krzywey, a zatem krzywa iest wklęsłą: aże się składa z czterech części symetrycznych takich iak AMB, więc ta sama własność służy innym trzem częściom i liniia krzywa iest wklęsłą względem osi swoich.

175. Dodawszy i odiąwszy stronami równania (1) i (2) § 173 wypadnie w 1ym razie $z = A + \frac{cx}{A}$ (a)

w 2gim $$z = A - \frac{cx}{A} \text{ (b).}$$

Z tych każde można uważać za równanie ellipsy, ponieważ za pomocą każdego, biorąc dla x różne wartości, znaydziemy z a tem samem nowy punkt ellipsy. Weźmy więc 1° punkt F', (fig. 122) za zaczęcie, będzie F'P = F'O + OP czyli $x' = c + x$, skąd $x = x' - c$ a zatem według (a) iest

$$z' = A + \frac{c(x'-c)}{A}$$

2° wziąwszy F za nowe zaczęcie, będzie OP = OF — PF czyli $x = c - x'$ czyli $x = -(x'-c)$ a zatem według (b) iest

$$z = A + \frac{c(x'-c)}{A}$$

Te dwa ostatne wypadki oznaczaią, że $z' = z$ skoro $x' = x'$: wziąwszy *np.* F'P = FP', będzie FM = F'M, lub wziąwszy FP = F'P, będzie FM = F'M.

176. Którekolwiek z równań (a) i (b) nazywa się *równaniem polarnem* ellipsy, od tego iż tu spółrzędne z i x, zwane polarnemi wychodzą z-iednego punktu F uważanego za *pol.* Używaiąc równania polarnego do wykreślenia ellipsy, wyznacza się punkt iakikolwiek tey linii krzywey za pomocą spólnego przecięcia dwóch linij z których iedna iest rzędną niewyznaczoną odpowiadaiącą odciętey daney x, drugą wartość z. Lecz, gdybyśmy mieli dany kąt pochyłości promienia wodzącego z, moglibyśmy się obeyść bez odciętey x, a wowczas wyznaczanie punktów ellipsy byłoby snadnieysze. Nazwiymy v ten kąt pochyłości a wziąwszy raz na zawsze,

$$z = A - \frac{cx}{A} \text{ (b)}$$

za równanie polarne, starajmy się nadać mu postać stosownie do okoliczności o którey mówimy.

W tym razie wypada nam zacząć od naymnieyszych wartości z, czyli, co na iedno wychodzi, od naymnieyszych wartości v a postępować do coraz większych. Naymnieyszą z wartości z iest FA (fig. 123) coraz większemi są FM, Fm, Fm', a to według równania (b). Wartości z=FA odpowiada kąt v=o, ten kąt iest ostrym od o aż do 100° to iest aż do położenia z=Fm prostopadłego do OX w którem toż z równe iest połowie parametru. Przeszedłszy Fm, z tworzyć będzie kąty v rostwarte z osią OX, etc...

Aby więc zacząć od naymnieyszych wartości v, weźmy z w położeniu FM w którem v iest kątem ostrym, będzie

$$Fp = z.\,dws\,v$$

Wziąwszy $\frac{c}{A} = e$ czyli $c = Ae$, iest x czyli Op=OF $+Fp = Ae + z.dws\,v$: na mocy tych wartosci x i $\frac{c}{A}$ równanie polarne (b) zamieni się na

$$z = \frac{A(1 - e^2)}{1 + e.dws\,v} \quad (P)$$

ta iest zwyczayna postać równania polarnego ellipsy używana w mechanice analityczney i w astronomii. W niey, dwsv iest odiemną gdy kąt v iest rostwarty lub zawarty między 200° i 300°, dodatną zaś gdy kąt v iest zawarty między 300° i 400°. Zostawiwszy tedy, dla uogólnienia, równanie polarne w takiey iak iest postaci, pamiętaymy iż mianownik $1 + e.dws\,v$ iest w wielu razach $1 - e.dws\,v$.

Powiedzieliśmy iż z = połowie p parametru gdy kąt v iest prosty: w tym razie dwsv = o a równanie (P) zamieni się na

$$\tfrac{1}{2}p = A(1 - e^2)$$

a zatem równanie polarne można wyrazić tak

$$z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + e.dwsv}$$

iakoż $1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{A^2} = 1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2} = \frac{B^2}{A^2}$, a

zatem $A(1 - e^2) = \frac{B^2}{A} = \frac{1}{2}p$ (151).

177. Lubo w równaniu (P) mianownik, iakeśmy powiedzieli, iest raz $1 + e.dwsv$, drugi raz $1 - e.dwsv$, iednak wartość dla z iest zawsze dodatną bo iloczyn $e.dwsv$, którego obadwa czynniki są ułomkami; iest ułomkiem, a zatem $1 - e.dwsv$ stąd zaś i wartość z iest ilością dodatną. Zobaczymy teraz iż biorąc pol wśród obwodu gdziekolwiek, i naznaczaiąc dla v wartości od o do 400°, wartość dla z wypadnie zawsze dodatną (fig. 124).

Niech O będzie polem, OM $= z$ promieniem wodzącym, v kątem pochyłości promienia do osi OX, będzie

$$z = \frac{x}{dwsv}, \quad z = \frac{y}{wstv}.$$

1° Względem punktu M iest $v < 100°$ skąd $dwsv > 0$, $wstv > 0$, $x > 0$, $y > 0$, więc $z > 0$.

2° Względem punktu M′ iest $v > 100°$, skąd $dwsv < 0$, $wstv > 0$, $x < 0$, $y > 0$, więc $z > 0$.

3° Względem punktu M″ iest $v > 200°$, $dwsv < 0$, $wstv < 0$, $x < 0$, $y < 0$, więc $z > 0$.

4° Względem punktu M‴ iest $v > 300°$; skąd $dwsv > 0$ $wstv < 0$, $x > 0$, $y < 0$, więc $z > 0$:

a tak wartość z iest w każdym razie dodatną.

178. Zakończymy rzecz o ellipsie wykładem ogólnym równań polarnych tey linii krzywey.

Oznaczywszy przez x, y spółrzędne punktu na obwodzie ellipsy wziętego; przez x', y' spółrzędne polu obranego dowolnie, wszystko odnosząc do układu osi prostokątnego; przez v kąt promienia wodzącego z i osi OX, będzie (83).

$$x = x' + z.dwsv, \quad y = y' + z.wstv:$$

wstawiwszy te wartości x, y w równanie

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

wypadnie równanie ogólne polarne ellipsy

$$(A^2wst^2v + B^2.dws^2v)z^2$$
$$+ 2(A^2y'.wstv + B^2x'.dwsv)z$$
$$+ A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2 \quad (Q)$$

Ponieważ to rownanie iest drugiego stopnia z niewiadomą z, więc ta ma dwie wartości. Wziąwszy (fig. 125) 1° punkt P' wśród obwodu za pol, dwie wartości dla z byłyby Pm, Pn i w tym razie naznaczaiąc dla v wszelkie wartości od v=0 do v=400°, wartości dla z wypadłyby zawsze dodatne (177), i tak wyznaczylibyśmy iak naywięcey punktow obwodu ellipsy. 2° Wziąwszy za pol punkt P którego spółrzędne są x', y', dwie wartości dla z będą Pm, i Pn, a wartości dla v będziemy brali między 0° i 200°, większe bowiem dałyby z odiemne, które przypadłyby po drugiey stronie linii BG równoodległey od OX i byłyby przedłużeniami pierwszych. 3° Wziąwszy za pol punkt m na obwodzie ellipsy; Pm stanie się zerem, Pn przeydzie na mn; x', y' będą spółrzędnemi punktu m, nareszcie $A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2$, a równanie (Q) zamieni się na

$$(A^2.wst^2v + B^2.dws^2v)z$$
$$+ 2(A^2y'.wstv + B^2x'.dwsv)z = 0$$

skąd $z = 0, \quad z = -\dfrac{2(A^2y'.wstv + B^2x'.dwsv)}{A^2.wst^2v + B^2.dws^2v}.$

Ta wartość dla z stanie się zerem, gdy promień wodzący Pn będzie stycznym z ellipsą, więc w tym razie

$$A^2y'.wstv + B^2x'.dwsv = 0$$

a

$$stycz v = -\frac{B^2x'}{A^2y'} \text{ (iak w 154).}$$

Tu, iak w poprzedzaiącym przypadku, bralibyśmy wartości dla z tylko dodatne przypadaiące po lewey stronie linii styczney TP (fig. 126), te bowiem, któreby przypadły po drugiey stronie linii. byłyby przedłużeniami pierwszych. A tak obrawszy P za pol, brać będziemy v czyli TPx od v = TPx do v=TPx+ 200°.

Okoliczność odiemnych z obiaśnimy za pomocą równań wyżey podanych

$$z = \frac{x}{dwsv},\ z = \frac{y}{wstv},$$

i za pomocą figur 124, 125, 126. Liniia OX (fig. 124) toż samo znaczy co na figurach 125, 126 liniie BG i TT′ które są granicami promienia wodzącego, tak iż ten promień z-iedney któreykolwiek strony granicy czyni z osią OX kąty między 0° i 200° zawarte. Założywszy ten warunek względem figury 124, dowiedziemy iak wyżey iż wartości dla z nad liniią OX są dodatne. Co się zaś tyczy wartości z przypadaiących pod liniią OX, te są odiemne, iest bowiem względem punktu M″ fig. 124

v < 100°, $x < 0$, $y < 0$ więc $z < 0$

względem M‴, v > 100°, $x > 0$, $y < 0$ więc $z < 0$

4° A tak obrawszy za pol koniec P (fig. 127) osi wielkiey, będziemy brali v tylko po lewey stronie styczney TT′ od v=0 do v=200°: aże w tym razie spółrzędne punktu P są $y'=0$, $x'=A$, więc wartość $z =$

$$= -\frac{2(A^2 y'.wstv + B^2 x'.dwsv)}{A^2.wst^2v + B^2.dws^2v}$$

zamieni się na

$$z = -\frac{2AB^2.dwsv}{A^2.wst^2v + B^2.dws^2v}.$$

5° Wziąwszy nakoniec pol w ognisku, będziemy mieli spółrzędne tego polu $y'=o$, $x'=Ae$, równanie ogólne (Q) zamieni się na

$$(A^2.wst^2v + B^2.dws^2v)z^2 + (2B^2x'.dwsv)z + B^2x'^2 = A^2B^2:$$

czyli, wstawiwszy za B^2 wartość $=A^2(1-e^2)$ i podzieliwszy wyrazy przez A^2, na

$$(1-e^2.dws^2v)z^2 + 2Ae(1-e^2)dwsv.z = A^2(1-e^2)^2$$

za pomocą którego otrzymamy iak wyżey

$$z = \frac{A(1-e^2)}{1+e.dws.v},$$

179. Aby ten wykład przystosować do koła, weźmiemy w równaniu ogólnem (Q) $A=B$, i otrzymamy

$$z^2 + 2(x'.dwsv + y'.wstv)z + (y'^2 + x'^2 - A^2) = o:$$

ponieważ ostatny wyraz $y'^2 + x'^2 - A^2$ nie zawiera zmienney v, a iest iak wiemy iloczynem z dwóch wartości z, wniesiemy iż iloczyn z wszelkich wartości z iest ilością stałą, a zatem wziąwszy P za pol, iest (fig. 128) i (fig. 129).

$$Pc \times Po = Pv \times Pn = Pp \times Pm = PM^2$$

$$PN \times Pn = PC \times Pd = Pb \times Pa = \text{ilości stałey}$$

tak iak wiemy z zasad Geometryi.

Obrawszy pol na okręgu (fig. 130) ilość $y'^2 + x'^2 - A^2$ będzie zerem a równanie polarne przeydzie na

$$z^2 + 2(x'.dwsv + y'.wstv)z = o$$

Wziąwszy nakoniec pol w środku koła, będzia $x' = o$, $y' = o$ a równanie (Q) przeydzie na

$$z^2 - A^2 = o, \text{ a zatem } z = A$$

to iest, promień wodzący iest w tym razie równy promieniowi koła.

ROZDZIAŁ DRUGI

O HYPERBOLI.

I. *O Hyperboli uważaney pod względem na iey środek i osi.*

180. Równanie hyperboli odnoszone do iey środka i osi iest

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2.$$

Naznaczaiąc w tem równaniu $y=o$, $x=o$ z osobna; przekonamy się że oś $2A$ iest rzeczywistą, $2B$ uroioną: albo, porównawszy równanie hyperboli z odpowiadaiącem ellipsy

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$$

i założywszy iż osi tych dwóch liniy krzywych są sobie równe względnie; (fig. 131) postrzeżemy iż B^2 w ellipsie $=-B^2$ w hyperboli, czyli B w ellipsie $=\pm B\sqrt{-1}$ w hyperboli: hyperbola nie ma więc drugiey osi, czyli, analitycznie mówiąc, ma oś drugą uroioną: a tak, wystawiwszy ellipsę na pierwszey osi hyperboli, oś druga ellipsy będzie osią uroioną hyperboli.

Hyperbola, którey dwie osi są równe, nazywa się równoboczną. Tey równanie dla tego że $A=B$, iest

$$y^2-x=-A^2.$$

Hyperbola *równoboczna* iest tem względem hyperboli zwyczayney czem koło względem ellipsy.

181. Wziąwszy koniec A' (fig. 131) osi czyli wierzchołek hyperboli, za zaczęcie spółrzędnych, odcięta dawna będzie

$$OP=A'P-A'O=x-A$$

wstawiwszy tę wartość OP za x w równanie hyperboli, to zamieni się na

$$A^2y^2—B^2x^2=—2AB^2x$$

a zatem $$y^2=\frac{B^2}{A^2}x(x—2A).$$

Naznaczywszy y', x' spółrzędne innego punktu będzie

$$y'^2=\frac{B^2}{A^2}x'(x'—2A)$$

skąd $$y^2:y'^2=x(x—2A):x'(x'—2A)$$

czyli $$MP^2:mp^2=AP\times A'P:Ap\times A'p$$

to iest, kwadraty z rzędnych maią się iak iloczyny z odległości spodka każdey rzędney od wierzchołkow hyperboli.

Wykreśliwszy zatem kilka hyperbol spółśrodkowych na spólney osi A'A (fig, 132), i porównawszy z sobą rzędne odpowiadaiące odciętym OP, OP'; będzie

$$MP:M'P'=nP:n'P'=OP:O'P'=QP:Q'P'$$

wartość bowiem każdego z tych stosunkow iest ta sama.

182. Wziąwszy oś drugą hyperboli za pierwszą a zatem oś odciętych za oś rzędnych, zostawiwszy ten sam układ spółrzędnych; 1°—B² równania

$$A^2y^2—B^2x^2=—A^2B^2 \quad (1)$$

zamieni się na + B² a samo równanie na

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$$

2°, +A² zamieni się na — A² a ostatne równanie na

$$—A^2y^2+B^2x^2=—A^2B^2:$$

wstawiwszy *nareszcie* B za A i A za B, będzie

$$—B^2y^2+A^2x^2=—A^2B^2$$

czyli $$—A^2x^2+B^2y^2=A^2B^2 \quad (2):$$

takie iest równanie hyperboli na przypadek w którym oś odciętych weźmiemy za oś rzędnych i wzaiemnie. Porównawszy ie z równaniem (1), widzimy że postać obudwóch równań iest ta sama, znaki tylko iednego są przeciwne znakom drugiego równania. Gdy więc równanie (1) oznacza hyperbolę kAk', lAl'; równanie (2) oznacza hyperbolę pbp', $qb'q'$. Jakoż wziąwszy $x=0$ w równaniu (2) wypadnie $y=\pm A$; wziąwszy zaś $y=0$, wypadnie $x=\pm B\sqrt{-1}$: nowa więc hyperbola ma oś pierwszą czyli rzeczywistą $bb'=2A$ według OY, drugą czyli uroioną $=2B$ według OX.

183. Wystawiwszy sobie trzy punkta na linii prostopadłey do osi pierwszey przedłużoney, z którychby ieden był wśród hyperboli, drugi na iey obwodzie, trzeci za obwodem mieć będziemy

w pierwszym razie $y^2=\frac{B^2}{A^2}(x^2-A^2)-\frac{n^2}{A^2}$

w drugim $y^2=\frac{B^2}{A^2}(x^2-A^2)$

w trzecim $y^2=\frac{B^2}{A^2}(x^2-A^2)+\frac{n^2}{A^2}$

czyli w 1ym $A^2y^2-B^2x^2+A^2B^2=-n^2$

w 2im $A^2y^2-B^2x^2+A^2B^2=0$

w 3im $A^2y^2-B^2x^2+A^2B^2=n^2$:

to iest: ilość $A^2y^2-B^2x^2+A^2B^2$ iest w pierwszym razie odiemną, w drugim zero, w trzecim dodatną.

184. Poprowadziwszy od końców osi pierwszey do punktu któregokolwiek hyperboli M (fig. 134) dwie linije AM, A'M które się nazywaią *cięciwami spełniaiącemi*, i nazwawszy a, a' styczne kątow które czynią cięciwy z osią OX, zamierzmy sobie znaleźć równanie wyrażaiące warunek pod którym przetną się te cięciwy.

Równanie linii A'M iest $y=a(x+A)$

AM $y=a'(x-A)$:

aby te dwie liniie przecinały się w punkcie linii krzywey; musi iedneyże wartości x odpowiadać iednaż wartość y w trzech równaniach

$$y=a(x+A),\ y=a'(x-A),\ y^2=\frac{B^2}{A^2}(x^2-A^2)$$

czyli, rozmnożywszy stronami dwa pierwsze równania przez siebie, w tych dwóch

$$y^2=aa'(x^2-A^2),\ y^2=\frac{B^2}{A^2}(x^2-A^2):$$

z tych zatem wypadaiące równanie

$$aa'=\frac{B^2}{A^2}$$

iest warunkiem pod którym cięciwy spełniaiące przetną się na obwodzie hyperboli. Oznacza ono naprzód iż kąty których styczne a i a' maią znaki iednakowe, są obadwa ostre lub obadwa rostwarte.

2° Gdy więc kąty MA'P, MAP są ostre, kąty zaś MA'P, MAP rostwarte; kąt A'MA lub AMA' iest ostry. Widzieliśmy iż w ellipsie takowy kąt dwóch cięciw spełniaiących iest rostwarty (149).

3° W hyperboli równoboczney, iest $aa'=1$, skąd $a=\frac{1}{a'}$: to iest, styczna kąta iednego $=$ dostyczney drugiego, więc dwa kąty które cięciwy spełniaiące czynią z osią OX ważą ieden kąt prosty.

185. Do odkrycia nayważnieyszych własności hyperboli doprowadzi rozwiązanie następuiącego *zadania.* Znaleźć na płaszczyźnie hyperboli punkt którego odległość od punktu wziętego dowolnie na obwodzie hyperboli a maiącego odciętą $=x$, byłaby wyrażoną spółmiernie w funkcyi x.

Niech f będzie punktem takowym (fig. 135): spółrzędne iego oznaczywszy przez x', y', punktu zaś M wziętego na obwodzie hyperboli przez x, y; kwadrat z odległości Mf będzie

$$\mathrm{M}f^2=(x-x')^2+(y-y')^2$$

czyli, rozwinąwszy drugą stronę a wziąwszy
$\frac{B^2}{A^2}(x^2-A^2)$ i $\frac{B}{A}\sqrt{(x^2-A^2)}$ zamiast y^2 i y,

$$\mathrm{M}f^2=x^2-2xx'+x'^2-B^2+\frac{B^2x^2}{A^2}$$

$$-\frac{2y'B}{A}\sqrt{(x^2-A^2)}+y'^2:$$

aże według założonego warunku ma być spółmierną wartość $\mathrm{M}f$, więc tym bardziey taką być musi wartość kwadratu z $\mathrm{M}f$, więc w tę wchodzić nie powinno
$\frac{2y'B}{A}\sqrt{(x^2-A^2)}$: nastąpi to gdy y' będzie $=0$, ta zaś ostatna okoliczność oznacza iż punkt szukany znayduie się na osi A'A, weźmiemy więc punkt F zamiast punktu f i mieć będziemy

$$\mathrm{MF}^2=\frac{A^2+B^2}{A^2}x^2-2xx'+x'^2-B^2$$

a naznaczywszy $A^2+B^2=c^2$,

$$\mathrm{MF}=\pm\sqrt{\left\{\frac{c^2x^2}{A^2}-2xx'+x'^2-B^2\right\}}.$$

Aby ta wartość MF była spółmierną, musi summa wyrazow znakiem pierwiestku obięta być zupełnym kwadratem. Być to może, ponieważ w te wyrazy wchodzi niewyznaczona x', którey wartość dobrana może ową summę uczynić zupełnym kwadratem. Wyciągnąwszy więc z tey summy pierwiastek kwadratowy

$$\frac{cx}{A}-\frac{Ax'}{c}$$

i otrzymawszy resztę drugą

$$-\frac{A^2x'^2}{c^2}+x'^2-B^2;$$

tę naznaczymy równą zero i tak utworzymy równanie

$$(c^2 - A^2)x'^2 = B^2c^2$$

dla znalezienia żądaney wartości x': skąd, dla tego że $c^2 - A^2 = B^2$, wypadnie

$$x' = \pm c.$$

Podwóyna wartość c' oznacza iż znayduią się dwa punkta na osi OX w odległości $c = \sqrt{(A^2 + B^2)}$ z każdey strony środka hyperboli. Aby wykreślić te dwie wartości x' zakreślmy z punktu O iako ze środka promieniem $= \sqrt{(A^2 + B^2)}$ łuk koła a punkta F, F' w których ten łuk przetnie oś OX będą żądanemi punktami.

Wziąwszy $x' = c$ wartość MF będzie

$$MF = \pm\left(\frac{cx}{A} - A\right)$$

aże $x > A$, $c > A$, skąd $cx > A^2$, $\frac{cx}{A} > A$, więc z dwóch znakow wartości MF trzeba wziąć znak + aby ta bezwzględna wartość była dodatną, a zatem

$$MF = \frac{cx}{A} - A.$$

Wziąwszy znowu $x' = -c$ wypadnie

$$MF' = \frac{cx}{A} + A.$$

Odciągnąwszy stronami pierwsze równanie od drugiego, otrzymamy wypadek

$$MF' - MF = 2A,$$

który oznacza, iż na przedłużeniach pierwszey osi znayduią się dwa punkta F, F' których odległości od punktu któregokolwiek na obwodzie hyperboli wziętego różnica, iest ilością stałą i równą osi pierwszey.

Punkta F', F zowią się *ogniskami*, odległość OF' lub OF *mimośrodem*, MF', MF promieniami *wodzącemi*, nareszcie podwóyna rzędna *mn* przez ognisko przechodząca nazywa się *parametrem*.

186. Znaydziemy wartość parametru hyperboli który nazwiemy $2p$, wstawiwszy A^2+B^2 za x^2, p za y, w równanie hyperboli $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2-A^2)$: wypadnie

$$p = \frac{B^2}{A},$$

to iest, parametr hyperboli iest trzecią ciągłą proporcyonalną do dwóch osi $2A$, $2B$.

Ponieważ $\frac{p}{A} = \frac{B^2}{A^2}$, więc równanie hyperboli odnoszone do parametru iest

$$y^2 = \frac{p}{A}(x^2-A^2)$$

równanie zaś odnoszone do układu osi spółrzędnych poczynaiących się w wierzchołku hyperboli iest

$$y^2 = \frac{p}{A}(x^2-2Ax)$$

czyli $$y^2 = -2px + \frac{px^2}{A}.$$

187. Według znalezioney własności hyperboli, można wykreślić tę linią krzywą, maiąc daną iey oś pierwszą i dwa ogniska. Weźmiemy za promień liniią równą summie osi pierwszey i długości dowolney, tym promieniem zakreślimy łuk z-iednego ogniska na przykład F' (fig. 135) promieniem zaś równym długości dowolney przetniemy łuk pierwszy z drugiego ogniska, punkt spólnego przecięcia będzie iednym z punktow hyperboli. Zakreślaiąc łuki z obudwóch stron osi, wyznaczymy za iednym razem dwa punkta.

188. Z twierdzenia o ogniskach hyperboli (185)

wyprowadzimy iescze następuiącą własność tey linii krzywey. Oznaczywszy przez z linią FM (fig. 136), iest

$$z = \frac{cx}{A} - A, \text{ a stąd } Az = c\left(x - \frac{A^2}{c}\right)$$

i

$$c : A = z : x - \frac{A^2}{c} \quad (1).$$

Tu $\frac{A^2}{c}$ oznacza trzecią ciągłą proporcyionalną OQ do c i A czyli do OF i OA; zatem

$$x - \frac{A^2}{c} = OP - OQ = QP = MN$$

a proporcyia (1) wychodzi na

$$OF : OA = FM : MN$$

aże $OF > OA$ więc i $FM > MN$. Nadto, punkt M iest wzięty dowolnie, więc także

$$OF : OA = FM : MN = Fm : mn = Fm' : m'n'$$
$$= AF : AQ$$

linija QN którey położenie można wyznaczyć przez proporcyią

$$OF : OA = AF : AQ$$

nazywa się *kierownicą* hyperboli.

189. Równanie linii *styczney* z hyperbolą, wziąwszy $B\sqrt{-1}$ zamiast B w równaniu styczney z ellipsą (154), wypadnie

$$y - y' = \frac{B^2 x'}{A^2 y'} (x - x'),$$

lub $$A^2 yy' - B^2 xx' = -A^2 B^2.$$

Za pomocą tego drugiego i hyperboli równania

$$A^2 y'^2 - B^2 x'^2 = -A^2 B^2$$

dowiedziemy iż styczna ma ieden tylko punkt spólny z hyperbolą. Wziąwszy bowiem z równania styczney wartość

$$y = \frac{B^2(xx' - A^2)}{A^2 y'^2}\text{, będzie}$$

$$A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 = \frac{B^4(xx' - A^2)^2}{A^2y'^2} - B^2x^2 + A^2B^2$$

lub, sprowadziwszy do iednego mianownika i wstawiwszy w licznik, $B^2x'^2 - A^2B^2$ za $A^2y'^2$,

$$A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 =$$
$$= \frac{B^4(xx' - A^2)^2 - (B^2x^2 - A^2B^2)(B^2x'^2 - A^2B^2)}{A^2y'^2}$$

czyli, wykonawszy działanie,

$$A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 = \frac{B^4(x - x')^2}{y'^2}.$$

Ten ostatny wypadek oznacza (183) że wszelki punkt styczney oprócz punktu dotknięcia iest za obwodem hyperboli.

190. Aby poprowadzić styczną do hyperboli przez punkt M (fig. 137) dany na iey obwodzie, trzeba 1° poprowadzić od tego punktu do środka O liniią MO, 2° równoodległą A'N od OM do zeyścia się z hyperbolą w punkcie N. 3° liniią AN, 4° od tey ostatney równoodległą MT i ta będzie styczną żądaną.

Równanie bowiem tey linii OM przechodzącey przez punkt M którego spółrzędne oznaczymy przez x', y', iest $y' = ax'$ skąd $a = \frac{y'}{x'}$, 2giey A'N, iest $y = a(x + A)$; 3ciey AN iest $y = a'(x - A)$; 4ey TM iest $y - y' = a'(x - x')$. Aby wyznaczyć a' mamy z drugiego i trzeciego równania to

$$y^2 = aa'(x^2 - A^2),$$

aże liniie A'N, AN przecinaią się na hyperboli którey równanie iest

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2)$$

więc $aa' = \frac{B^2}{A^2}$ skąd $a' = \frac{B^2}{A^2 a} = \frac{B^2 x'}{A^2 y'}$, i tak równanie linii czwartey TM iest

$$y - y' = \frac{B^2 x'}{A^2 y'} (x - x')$$

które oznacza iż ta linia iest styczną z hyperbolą (189).

Stąd wniesiemy, iż *mt* równoodległa od AN iest także styczną z hyperbolą i równoodległą od pierwszey MT: a tak dwie styczne do końców średnicy M*m* są od siebie równoodległe. Poprowadziwszy więc przez środek O równoodległą od stycznych czyli od AN, ta nigdy nie przetnie hyperboli. Przez podobieństwo iak w ellipsie linia OB pewney długości i średnica OM, zowią się średnicami sprzężonemi. Kąt BOM tych średnic równy iest kątowi A'NA cięciw spełniaiących.

191. Wziąwszy $y = 0$ w równaniu styczney $A^2 yy' - B^2 xx' = -A^2 B^2$, wypadnie

$$x \text{ czyli } OT = \frac{A^2}{x'} \text{ (fig. 137)}$$

a zatem $PT = OP - OT = x' - \frac{A^2}{x'} = \frac{x'^2 - A^2}{x'}$.

$$\text{linia } PT = \frac{x'^2 - A^2}{x'}$$

nazywa się *podstyczną* hyperboli.

192. Równanie *normalney* MN znaydziemy takim samym iak w ellipsie sposobem (158)

$$y - y' = -\frac{A^2 y'}{B^2 x'} (x - x')$$

wartość zaś *podnormalney*

$$PN = \frac{B^2 x'}{A^2}.$$

193. Aby poprowadzić styczną do hyperboli przez punkt za obwodem dany którego spółrzędne wiadome nazwiemy x y; trzeba, oznaczywszy przez x', y' spółrzędne punktu dotknięcia, rozwiązać równania

$$A^2y'^2 - B^2x'^2 = -A^2B^2,\quad A^2yy' - B^2xx' = -A^2B^2,$$

a potem wykreślić znalezione podwóyne wartości dla x' i y'.

194. Styczna MT (fig. 138) hyperbolli w punkcie M, dzieli kąt FMF promieni wodzących na dwie równe części.

$$\text{Wiemy iż } FM = \frac{cx'}{A} + A,\ FM = \frac{cx'}{A} - A,\ (185).$$

Aby znaleźć wartości dla FT i FT, mamy naprzód

$$(192)\ OT = \frac{A^2}{x'},$$

$$\text{skąd } FT = FO + OT = c + \frac{A^2}{x'} = \frac{A}{x'}\left(\frac{cx'}{A} + A\right)$$

$$FT = FO - OT = c - \frac{A^2}{x'} = \frac{A}{x'}\left(\frac{cx'}{A} - A\right)$$

$$\text{czyli } FT = \frac{A}{x'}FM,\ FT = \frac{A}{x'}FM$$

a zatem FM: FM=FT: FT

ta proporcyia oznacza iż kąt FMF podzielony iest na dwie równe części przez liniią MT, więc

FMT=FMT.

Stąd wniesiemy iż normalna NM dzieli kąt FMf na dwie równe części: kąty bowiem TMN i tMN są równe iako proste, aże TMF = tMf, więc i FMN=fMN.

195. Aby zatem poprowadzić styczną przez punkt M (fig. 139) hyperboli, trzeba poprowadzić promienie wodzące FM, FM, wziąć FM=KM, a liniia łą-

cząca punkt M i środek linii KF będzie styczną hyperboli. W tym bowiem razie kąt FMT=F'MT.

Odciąwszy na linii F'M łączącey punkt M z ogniskiem F', liniią F'K równą osi A'A i poprowadziwszy od punktu K liniią Kt, która zawsze równą iest linii tF, do punktu t wziętego na styczney, daley uważaiąc linie F'K i tK za promienie kół, a punkta F' i t za środki; koła temi promieniami zakreślone przetną się we dwóch punktach, ponieważ summa ich promieni czyniących liniią złamaną F'Kt, większą iest od linii prostey łączącey dwa punkta F' i t i będącey odległością środkow.

Aby zatem poprowadzić styczną do hyperboli przez punkt t dany za obwodem; naprzód, z punktu F' promieniem równym A'A, zakreślmy łuk koła, z punktu zaś t promieniem tF zakreślmy drugi łuk, który, według tego cośmy dopiero okazali, przetnie się z pierwszym w dwóch punktach K i K'. Przez każdy z tych punktow i przez F' poprowadziwszy liniie F'K, F'K' do przecięcia się z hyperbolą w punktach M, M', te ostatne będą punktami dotknięcia, przez które i przez punkt t poprowadziwszy liniie te będą stycznemi z hyperbolą. W tym bowiem razie iest tK=tF, MK=MF, więc Mt iest prostopadłą do KF i dzieli kąt KMF na dwie równe części.

196. Punkt materyialny elastyczny lub promień świetny albo cieplikowy, wypadaiąc z-iednego ogniska i uderzaiąc o obwód hyperboli, odbiie się podług linii prostey która przeydzie przez drugie ognisko: aże będzie zatrzymany przez liniią krzywą, więc odbicie przypadnie w tey części linii krzywey, w którey znayduie się pierwsze ognisko, i według przedłużenia promienia wodzącego. Jeśli iedno z ognisk iest środkiem wiązki promieni świetnych lub cieplikowych; wszystkie te które padną na obwód hyperboli odbiią

26

się w kierunku takim samym iak gdyby wypadły z drugiego ogniska i z tego mogły przeyść wskroś przez linią krzywą. Od tey fizyczney okoliczności pochodzi nazwisko *ognisk* hyperboli.

II. O HYPERBOLI

uważaney pod względem na średnice sprzężone.

197. Dochodząc postaci i liczby liniy drugiego rzędu, przekonaliśmy się iż wszelka liniia prosta prowadzona przez srodek do obwodu hyperboli, dzieli ią na dwie równe części, czyli że ta liniia gdy iedną cięciwę, więc i wszystkie inne cięciwy, od pierwszey równoodległe przecina na dwie równe części: Liniia MOM (fig. 140) prowadzona przez środek hyperboli, maiąca taką własność, nazywa się średnicą. Wypada iescze z symetryczney figury hyperboli, iż liniia MM podzieloną iest na dwie równe części w punkcie O, tak iż OM = OM′: o tey prawdzie można iescze przekonać się następuiącym sposobem.

Równanie linii OM iest

$$y = ax:$$

wstawiwszy tę wartość y w równanie hyperboli $A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$ i wywiódłszy wartość dla x, znaydziemy

$$x = \pm \frac{AB}{\sqrt{(B^2 - A^2a^2)}}, \text{ skąd } y = \pm \frac{aAB}{\sqrt{(B^2 - A^2a^2)}}.$$

Trzy mogą być przypadki z mianownikiem tych wartości:

$$1^o\ B^2 > A^2a^2,\quad 2^o\ B^2 = A^2a^2,\ 3^o B^2 < A^2a^2,$$

W *pierwszym* każda wartość tak x iak y iest rzeczywista, a znak podwóyny $\pm$ oznacza równość dwóch odciętych OP, OP′ i dwóch rzędnych MP, M′P′ należących do punktow M i M′ w których liniia MM′

przecina hyperbolę: dwa więc tróykąty OMP, OM′P′ przystaną do siebie a zatem OM=OM′. W *drugim* spółrzędne są nieskończone a zatem średnica OB w tym razie otrzymana nigdy nie przetnie hyperboli, i dla tego iest granicą wszelkich średnic rzeczywistych: tu $a=\pm\frac{B}{A}$, to iest poprowadziwszy przez punkt A prostopadłą AB=B, do osi A′A a przez punkta O i B liniią OB, będzie OA : AB = 1: *stycz* BOA czyli A : B = 1 : *stycz*BOA skąd *stycz*BOA $=\frac{B}{A}=a$. Nakoniec liniie prowadzone przez środek hyperboli za liniią OB, będą coraz bardziey oddalały się od hyperboli: są one objęte przypadkiem *trzecim*, i zowią się średnicami uroionemi. Liniia OB zwana *asymptotą*, iest także granicą wszystkich stycznych. Gdy bowiem w formule OT$=\frac{A^2}{x}$ (194), odcięta x stanie się nieskończenie wielką; będzie OT=0, a zatem styczna MT zbliży się nieskończenie do asymptoty OB, ta przeto iest granicą stycznych.

198. Oś pierwsza iest z liczby średnic rzeczywistych, aże równanie hyperboli odnoszone do osi rzeczywistey i uroioney iest $A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2$, więc takąż postać mieć musi równanie odnoszone do średnicy rzeczywistey MM′ i drugiey uroioney, które składaią nowy układ osi spółrzędnych i zowią się *sprzężonemi.* Aby znaleźć takowy układ średnic, nazwiymy α, α' kąty które średnica według x' a druga według y' czyni z osią OX: będzie (50, 2°)

$$y=y'.wst\alpha'+x'.wst\alpha,\ x=y'.dwst\alpha'+x'\ dwst\alpha,$$

wstawiwszy te wartości y, x w równanie hyperboli, wypadnie

$$(A^2 wst^2\alpha' - B^2 dws^2\alpha')y'^2$$
$$+(A^2 wst^2\alpha - B^2 dws^2\alpha)x'^2 +$$
$$+2(A^2 wst\alpha . wst\alpha' - B^2 dws\alpha . dws\alpha')x'y' = -A^2B^2$$

Aby znaleźć wartości kątow α, α' przez które zniknęłby wyraz tego równania zawieraiący $x'y'$; założymy

$$A^2 wst\alpha . wst\alpha' - B^2 dws\alpha . dws\alpha' = 0 \quad (a)$$

skąd $\quad stycz\alpha . stycz\alpha' = \frac{B^2}{A^2}$

iest warunkiem aby równanie hyperboli odnoszone do średnic sprzężonych miało żądaną postać. Znaleziony warunek oznacza iż kąty α, α' muszą być obadwa ostre lub obadwa rostwarte, ponieważ w każdym razie ilość $stycz\alpha\, stycz\alpha'$ iest dodatną i równą $+\frac{B^2}{A^2}$. *Fig* 141 wystawia pierwszy, figura 142 drugi przypadek. Równanie więc hyperboli odnoszone do średnic sprzężonych, iest

$$(A^2 wst^2\alpha' - B^2 dws^2\alpha')y'^2$$
$$+(A^2 wst^2\alpha - B^2 dws^2\alpha)x'^2 = -A^2B^2 \quad (1).$$

Trzeba teraz okazać iż spółczynniki kwadratów y'^2, x'^2 maią znaki przeciwne. W tym zamiarze wywiedziemy z równania warunkowego (a), następuiące

$$-B^2 dws^2\alpha' = -\frac{A^4 wst^2\alpha . wst^2\alpha'}{B^2 dws^2\alpha}$$

do którego obudwóch stron dodawszy $A^2 wst^2\alpha'$ otrzymamy

$$A^2 wst^2\alpha' - B^2 dws^2\alpha' =$$
$$= \frac{A^2 wst^2\alpha'}{B^2 dws^2\alpha}\,(B^2 dws^2\alpha - A^2 wst^2\alpha).$$

Ponieważ w tym wypadku ilość $\frac{A^2 wst^2\alpha'}{B^2 dws^2\alpha}$ iest kwadratem zupełnym, wniesiemy iż ilości

$$A^2 wst^2\alpha' - B^2 dws^2\alpha', \text{ i } B^2 dws^2\alpha - A^2 wst^2\alpha$$

maią znaki równe: ieśli więc pierwsza iest dodatną takąż iest i druga, czyli gdy $A^2 wst^2\alpha - B^2 dws^2\alpha$ odiemną, $A^2 wst^2\alpha' - B^2 dws^2\alpha'$ dodatną iest ilością, a zatem społczynniki kwadratow y'^2, x'^2 maią znaki przeciwne.

Przywiódłszy równanie (1) do postaci

$$\frac{y'^2}{\frac{A^2B^2}{A^2 wst^2\alpha' - B^2 dws^2\alpha'}} + \frac{x'^2}{\frac{A^2B^2}{A^2 wst^2\alpha - B^2 dws^2\alpha}} = -1$$

i naznaczywszy, stosownie do odkrytey okoliczności znakow,

$$\left.\begin{aligned} B'^2 &= \frac{A^2B^2}{A^2 wst^2\alpha' - B^2 dws^2\alpha'} \\ -A'^2 &= \frac{A^2B^2}{A^2 wst^2\alpha - B^2 dws^2\alpha} \end{aligned}\right\} \text{(b)},$$

równanie hyperboli odnoszone do średnic sprzężonych, będzie

$$\frac{y'^2}{B'^2} - \frac{x'^2}{A'^2} = -1, \text{ czyli } A'^2y'^2 - B'^2x'^2 = -A'^2B'^2$$

Wziąwszy w tem równaniu z osobna $y' = 0$, $x' = 0$, wypadnie $x' = \pm A'$, $y' = \pm B'\sqrt{-1}$: skąd widzimy iż sama tylko oś OX' przecina hyperbolę w dwóch punktach odległych od zaczęcia ilością A'. Linie 2A', 2B' są średnicami sprzężonemi hyperboli.

199. Takim samym iak w § 181 sposobem dowiedziemy, iż kwadraty z rzędnych w układzie średnic sprzężonych maią się iak iloczyny z odległości spodka każdey rzędney od końcow średnic. Aże ta sama proporcyia służy hyperboli odnoszoney do swoich osi, więc aby wykreślić hyperbolę którey są dane średnice sprzężone, trzeba ią wykreślić na iedney średnicy uważaney za oś tey krzywey a potem rzędne prostopadłe, nie zmieniaiąc ich długości, nachylić pod kątem danym właściwym.

200. Rozmnożywszy przez siebie wartości A'^2, B'^2, będzie

$$A'^2B'^2 = \frac{-A^4B^4}{\left\{\begin{array}{l} A^4 wst^2\alpha.wst^2\alpha' + B^4 dws^2\alpha.dws^2\alpha' \\ -A^2B^2(wst^2\alpha\, dws^2\alpha' + wst^2\alpha'.dws^2\alpha)\end{array}\right\}}$$

aże równanie warunkowe (a) daie

$$A^4.wst^2\alpha.wst^2\alpha' + B^4 dws^2\alpha.dws^2\alpha'$$
$$= 2A^2B^2 wst\alpha.wst\alpha'.dws\alpha.dws\alpha'$$

więc wstawiwszy, wypadnie

$$A'^2B'^2 = \frac{A^2B^2}{(wst\alpha' dws\alpha - wst\alpha dws\alpha')^2}$$

skąd $\quad A'B' = \dfrac{AB}{wst(\alpha' - \alpha)}$

a $\quad 4A'B'wst(\alpha' - \alpha) = 4AB$

to iest, równoległobok ze średnic sprzężonych równy iest prostokątowi z osi hyperboli.

201. Aby dowieść że $A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$, trzeba wyrugować α, α' z równań (a) i (b).
Z równania (a) wywiedziemy to

$$A^4 wst^2\alpha.wst^2\alpha' = B^4 dws^2\alpha\, dws^2\alpha'$$
$$= B^4 dws^2\alpha - B^4 dws^2\alpha.wst^2\alpha'$$

skąd $\quad wst^2\alpha' = \dfrac{B^4 dws^2\alpha}{A^4 wst^2\alpha + B^4 dws^2\alpha}$;

a zatem $\quad dws^2\alpha' = \dfrac{A^4 wst^2\alpha}{A^4 wst^2\alpha + B^4 dws^2\alpha}$;

te dwa ostatne wypadki zamienią wartość B'^2 na

$$B'^2 = -\frac{A^4.wst^2\alpha + B^4 dws^2\alpha}{A^2.wst^2\alpha - B^2.dws^2\alpha}.$$

Odciągnąwszy tę wartość B'^2 od wartości A'^2 i przywiódłszy wyrazy do naykródszego wyrażenia, wypadnie

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2.$$

Wziąwszy A=B wypadnie A′=B′: a tak tylko hyperbola równoboczna ma średnice sprzężone równe.

202. Gdy od końców średnicy wziętey za oś OX′ poprowadzimy dwie linije do punktu na obwodzie hyperboli obranego; równania tych liniy będą (35 i 39)

$$y=a(x+A'),\ y=a'(x-A')$$

skąd $$y^2=aa'(x^2-A'^2)$$

aże równanie hyperboli, odnoszone do średnic sprzężonych, iest

$$y^2=\frac{B'^2}{A'^2}(x^2-A'^2)$$

więc $$aa'=\frac{B'^2}{A'^2}.$$

Ten wypadek oznacza iż średnice sprzężone pod takimże kątem przecinaią się co cięciwy spełniaiące. W ogólności, też same własności służą średnicom sprzężonym co i osiom hyperboli.

203. *Zadanie.* Poprowadzić styczną do hyperboli przez punkt M na iey obwodzie dany, nie znaiąc ani średnic ani osi (fig. 142).

Znaydziemy naprzód środek hyperboli, poprowadziwszy przez środki dwóch cięciw równoodległych liniią prostą i iey część zawartą między odnogami hyperboli podzieliwszy na dwie równe części. Od środka O tey linii, który będzie środkiem hyberboli, do punktu M poprowadzimy średnicę OM, potem średnicę którąkolwiek DD′, daley przez punkt D równoodległą DN od OM, potem liniią DN, nareszcie MT równoodległą od DN, i MT będzie żądaną styczną.

Wziąwszy bowiem średnicę CC′ za sprzężoną z DD′ i odnosząc hyperbolę do tych średnic, iest równanie linii OM

$$y=ax$$

gdzie $a=\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(6-\alpha)}$, $6=\text{YOX}$, $\alpha=\text{MOX}$, Oznaczywszy przez x, y, spółrzędne punktu M, iest

$$y' = ax' \text{ skąd } a = \frac{y'}{x'}.$$

Równanie linii DN iest $y = a(x + A')$
DN $y = a'(x - A')$

gdzie $a' = \frac{wst\alpha'}{wst(\beta - \alpha')}$, $\alpha' = NDX$: nakoniec równanie linii MT iest

$$y - y' = a'(x - x')$$

aże $aa' = \frac{B'^2}{A'^2}$ (202), skąd $a' = \frac{B^2}{A'^2 a} = \frac{B^2 x'}{A'^2 y'}$, więc równanie linii MT iest

$$y - y' = \frac{B'^2 x'}{A'^2 y'}(x - x')$$

które iak w § 189 oznacza iż ta liniia iest styczną z hyperbolą.

III. O HYPERBOLI

uważaney pod względem na asymptoty.

204. Zamierzmy sobie znaleźć za pomocą równania hyperboli odnoszonego do środka i osi

$$A^2 y^2 - B^2 x^2 = -A^2 B^2$$

inne odnoszone do osi spółrzędnych nieprostokątnych OX′, OY′, (fig. 143). Nazwiemy w tym zamiarze α i α' niewiadome kąty AOX′ i AOY′, x' i y' nowe spółrzędne, a za dawne x, y wstawimy w równanie hyperboli ich wartości (50. 2°)

$$y = y'.wst\alpha' + x'.wst\alpha, \quad x = y'.dws\alpha' + x'.dws\alpha;$$

i otrzymamy równanie

$$(A^2.wst^2\alpha - B^2.dws^2\alpha)x'^2$$
$$+ (A^2.wst^2\alpha' - B^2.dws^2\alpha')y'^2$$

$$-2(A^2.wst\alpha.wst\alpha'+B^2.dwsa.dws\alpha')x'y'=-A^2B^2.$$

Wziąwszy dopiero = zero spółczynniki kwadratów x'^2 i y'^2, mamy równania

$$A^2wst^2\alpha-B^2dws^2\alpha=o,\quad A^2wst^2\alpha'-B^2dws^2\alpha'=o$$

na wyznaczenie niewiadomych α, α' a tem samem położenia układu nowego: przywiódłszy ie zaś do postaci

$$A^2stycz^2\alpha-B^2=o,\quad A^2stycz^2\alpha'-B^2=o$$

postrzeżemy, iż $stycz\alpha$ i $stycz\alpha'$ są pierwiastkami równania stopnia 2go $A^2z^2-B^2=o$ które daie $z=\pm\frac{B}{A}$, że zatem iest

$$stycz\alpha=\frac{B}{A},\ stycz\alpha'=-\frac{B}{A}.$$

Weźmiemy więc na CC′ prostopadłey do osi pierwszey AA′ w wierzchołku A, linią AC=B, i—AC′=B, a linije OC, OC′ przedłużone nieograniczenie będą osiami nowego układu spółrzędnych w którem równanie hyperboli, opuściwszy kreski, iest

$$xy=\frac{A^2B}{2(A^2wst\alpha.wst\alpha'+B^2dwsa.dws\alpha')}:\quad (1)$$

tu wartość iloczynu xy iest ilością stałą, ponieważ α i α' maią, iak widzieliśmy, wartości stałe.

Aby znalezionemu równaniu nadać prostszą postać, poprowadzimy przez A liniią AD′ równoodległą od OX′ i AD od OY, Ponieważ otrzymaliśmy kąt DOA=AOD′, więc kąt DOA = DAO a zatem bok OD=DA, to iest spółrzędne punktu A w układzie OX′, OY′ są równe: oznaczywszy więc każdą przez M, iest według równania (1)

$$M^2=\frac{A^2B^2}{2(A^2wst\alpha.wst\alpha'+dwsa.dws\alpha')}\quad (2)$$

a według równań (1) i (2),

$$xy=M^2.$$

Aby znaleźć nową wartość dla M^2 w-ilościach stałych i wiadomych, uważam iż boki AD, DC, OD są równe: widzieliśmy bowiem iż OD=DA, aże kąt DAC (iako równy OC'A) iest = ACD, więc DA=DC, i trzy liniie OD, DA, DC są równe, aże $OC^2=4OD^2 =4M^2=OA^2+AC^2=A^2+B^2$, więc

$$M^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2)$$

i równanie hyperboli odnoszone do asymptot, iest

$$xy=\frac{1}{4}(A^2+B^2).$$

Nazwawszy β kąt Y'OX' asymptot; rozmnożmy obie strony ostatnego równania przez $wst\beta$: otrzymamy wypadek

$$xy.\,wst\beta=\frac{A^2+B^2}{4}\cdot wst\beta$$

który znaczy że równoległobok OPNn iest równy kwadratowi ukośnemu ODAD'.

Wykreśliwszy asymptoty hyperboli według danych równań (121 i następ:), dość będzie podzielić kąt asymptot na dwie równe części przez linią prostą chcąc znaleźć oś pierwszą.

205. Gdy odcięta x równania

$$y=\frac{M^2}{x}$$

iest nieskończenie wielką, rzędna odpowiadaiąca y stanie się nieskończenie małą, osi iednak OX', OY' zeyść się nigdy z liniią krzywą nie mogą choć się bez granic do niey zbliżą, gdyby się bowiem zeszły kwadrat ukośny ODAD' byłby równy zero, co być nie może.

W hyperboli równoboczney, xy iest prostokątem, ODAD' kwadratem, a równanie hyperboli równoboczney odnoszone do asymptot iest

$$xy=2\left(\frac{A}{2}\right)^2$$

206. *Zadanie.* Znaleźć równanie linii styczney z hyperbolą uważaną między asymptotami.

Równanie linii przecinaiącey hyperbolę w dwóch punktach których spółrzędne oznaczymy przez x', y'; x'', y'' iest

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

wstawiwszy w to równanie $\frac{M^2}{x'}$ za y', $= \frac{M^2}{x''}$ za y'', wyrazimy iż sieczna ma dwa punkta spólne z hyperbolą: aże

$$y' - y'' = \frac{M^2(x'' - x')}{x'x''} = -\frac{M^2(x' - x'')}{x'x''}$$

skąd
$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{M^2}{x'x''}$$

więc równanie sieczney zamieni się na

$$y - y' = -\frac{M^2}{x'x''}(x - x').$$

Gdy dopiero dwa punkta, przez obrót sieczney około iednego z nich, zeydą się w ieden; sieczna stanie się styczną (fig. 144) a tey równanie, wziąwszy w ostatnem $x' = x''$, będzie

$$y - y' = -\frac{M^2}{x'^2}(x - x')$$

lub, dla tego że $M^2 = x'y'$;

$$y - y' = -\frac{y'}{x'}(x - x').$$

207. Aby znaleźć punkt w którym styczna MT (fig. 144) przecina oś OX', naznaczymy $y = 0$ w równaniu styczney, i wypadnie

$x - x' = x'$, czyli $Ot - OP = OP$, czyli $Pt = OP$ to iest, podstyczna Pt punktu dotknięcia M równą iest odciętey OP tegoż punktu. Aby więc poprowadzić styczną z hyperbolą przez punkt dany M, przeniesiemy odciętą OP tego punktu od P do t, poprowadzimy przez punkta M i t liniią tMT, a ta będzie styczną. Widzimy nadto że części MT, Mt styczney zawartey między asymptotami są równe.

208. Poprowadziwszy średnicę OM$=$A′ (fig. 144) i styczną MT do punktu M, mamy dowieść iż MT iest średnicą sprzężoną względem OM. W tróykącie OPM; $OM^2=OP^2+PM^2-2OP\times PM\,dws\,OPM$ aże kąt OPM iest spełnieniem, kąta $Y'OX'=\mathit{6}$; tudzież że $OP=x$, $PM=y$, więc

$$OM^2=x^2+y^2+2xy.dws\mathit{6}.$$

Takimże sposobem, zważaiąc iż $Pt=x$, $MPt=\mathit{6}$; znaydziemy w tróykącie MPt

$$Mt^2=x^2+y^2-2xy.dws\mathit{6}$$

więc $\quad OM^2-Mt^2=4xy.dws\mathit{6}$ (1).

Kąt który każda z asymptot czyni z osią OX iest $=\frac{1}{2}\mathit{6}$, (204) więc

$$stycz\frac{\mathit{6}}{2}=\frac{B}{A}$$

$$a\ dws\frac{\mathit{6}}{2}=\frac{1}{siecz\frac{\mathit{6}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+st^2\frac{\mathit{6}}{2}\right)}}=\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$$

$$wst\frac{\mathit{6}}{2}=dws\frac{\mathit{6}}{2}\cdot stycz\frac{\mathit{6}}{2}=\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}.$$

Wiemy z formuł trygonometrycznych iż

$$dws\mathit{6}=dws^2\frac{\mathit{6}}{2}-wst^2\frac{\mathit{6}}{2}=\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}$$

tu zaś mamy (204) $4xy=A^2+B^2$

więc wstawiwszy wartości $dws\mathit{6}$ i $4xy$ w równanie (1), wypadnie

$$A'^2 - Mt^2 = A^2 - B^2$$

aże (201) $A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$
więc $Mt = B'$ czyli $MT = B'$, to iest MT iest średnicą sprzężoną względem średnicy OM.

209. Odnosząc hyperbolę MAM' (fig. 145) do asymptot ON, ON'; gdy poprowadzimy przez punkt M gdziekolwiek na krzywey wzięty liniią prostą NN' do przecięcia asymptot w punktach N, N' a krzywey w M i M'; części MN, M'N' tey linii zawarte między krzywą i asymptotami będą równe.

Aby dowieść tę prawdę oznaczmy przez x, y spółrzędne punktu M, a przez x', y' spółrzędne punktu M' w układzie asymptot i poprowadźmy przez M i M' równoodległe od asymptot. W tróykątach podobnych PMN, MCM'; iest

$$\frac{MM'}{MN} = \frac{CM'}{PM} = \frac{qM' - qC}{PM} = \frac{x' - x}{x} = \frac{x'}{x} - 1$$

W tróykątach podobnych P'M'N', MCM'; iest

$$\frac{MM'}{M'N'} = \frac{CM}{P'M'} = \frac{q'M - q'C}{P'M'} = \frac{y - y'}{y'} = \frac{y}{y'} - 1$$

aże $xy = x'y'$ (204), więc $\dfrac{x'}{x} = \dfrac{y}{y'}$,

i $\dfrac{MM'}{MN} = \dfrac{MM'}{M'N'}$, nareszcie $MN = M'N'$.

Wystawiwszy sobie iż liniia NN' posuwa się ku punktowi O zostaiąc zawsze w położeniu równoodległem od pierwiastkowego; wniesiemy iż iey części MN, M'N', zmieniaiąc się, są w każdem położeniu linii ruchomey a więc i w ten czas równe sobie gdy punkta M, M' zeydą się w ieden, co znaczy iż części styczney zawarte między punktem dotknięcia i asymptotami są równe iak w § 207.

IV. *O równaniu polarnem hyperboli.*

210. Z własności hyperboli, któreśmy dotąd poznali, nayznacznieyszą iest ta iż różnica promieni wodzących równa iest osi pierwszey. Rozwiążmy teraz zadanie odwrotne: wyznaczyć liniią krzywą któraby miała tę własność że różnica odległości, punktu na iey obwodzie obranego, od dwóch punktow stałych, byłaby ilością stałą i równą $2A$.

Niech będą F, F' owe dwa punkta stałe, niech O (fig. 146) będzie środkiem linii FF' którą naznaczymy $=2c$ i zaczęciem osi spółrzędnych prostokątnych. Niech M będzie iednym z punktow linii krzywey, niech x, y, oznaczaią spółrzędne OP, PM tego punktu, nareszcie z, z' odległości FM, $F'M$. Według założenia iest

$$z'-z=2A \quad (1).$$

W tróykątach FMP, $F'MP$ mamy

$$z^2=y^2+(x-c)^2,\ z'^2=y^2+(x+c)^2,$$

odciągnąwszy stronami pierwsze z tych rownań od drugiego, wypadnie

$$z'^2-z^2=4cx, \text{ czyli } (z'+z)(z'-z)=4cx$$

skąd

$$z'+z=\frac{2cx}{A}. \quad (2)$$

Odciągnąwszy stronami równanie (1) od (2), otrzymamy

$$z=\frac{cx}{A}-A:$$

Wstawiwszy tę wartość z w równanie które daie z^2, a wypadkowe rozwiązawszy względem y^2, otrzymamy

$$y^2=A^2-c^2+\frac{c^2-A^2}{A^2}x^2:$$

tu c^2-A^2 iest ilością dodatną, albowiem $F'M-FM$

$<$ FF′ czyli $z' - z < 2c$, czyli $A < c$: naznaczywszy więc $c^2 - A^2 = B^2$, równanie otrzymane przeydzie na

$$y^2 = -B^2 + \frac{B^2}{A^2} x^2 \text{, czyli } y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2)$$

które oznacza iż liniia założoną maiąca własność iest hyperbolą.

Według znalezionego równania, potrafilibyśmy wykreślić liniią krzywą i przekonalibyśmy się iż iest symetryczną, iż ma środek i dwie osi, iedną rzeczywistą, drugą uroioną. Chcąc się dowiedzieć czy liniia krzywa iest wklęsłą czy wypukłą względem osi pierwszey, trzebaby naprzód znaleźć równanie linii styczney z krzywą, a za pomocą tego równania możnaby okazać iż rzędna wszelkiego punktu styczney większą iest od rzędney hyperboli gdy obiedwie rzędne odpowiadać będą iedney odciętey, że przeto liniia krzywa iest wklęsłą względem osi pierwszey.

211. Równanie

$$z = \frac{cx}{A} - A$$

nazywa się *równaniem polarnem* hyperboli: za iego pomocą iedną tylko połowę hyperboli MAM′ (fig. 147) i to z pewnemi zastrzeżeniami, które wnet poznamy, można wykreślić.

Weźmy F za zaczęcie układu polarnego i uważaymy odcięte takie iak FP, brane w tym samym kierunku co dawne, za dodatne, a zaś FA maiące przeciwny tamtym kierunek za odiemne. Zamiast odciętey x czyli OP wziąwszy OF + FP czyli $c + x'$ czyli $c + z.\cos v$, gdzie z oznacza FM a v kąt PFM który promień wodzący czyni z osią OX, i naznaczywszy $\frac{c}{A} = e$ skąd $c = Ae$; przywiedziemy równanie do postaci

$$z = -\frac{A(1-e^2)}{1-e.dwsv}.$$

Ponieważ $e > 1$, więc licznik $-A(1-e^2)$ iest ilością dodatną, a zatem trzeba dla v dobierać takie wartości od 0° do 400°, któreby mianownik $1-e.dwsv$ a zatem i wartość z uczyniły dodatnemi, z przyczyn któreśmy pod ellipsą wyłożyli (177 etc). Wziąwszy naprzód v=o, będzie $dwsv=1$, i

$$z = -A(1-e).$$

Ponieważ w tym razie wartość z iest odiemną, więc liniia krzywa nie ma żadnego punktu tey wartości odpowiadaiącego, iakoż liniia krzywa MAM′ nie przecina osi za ogniskiem F. Ponieważ mianownik $1-e.dwsv$ iest odiemny gdy v = o; wniesiemy, iż takim będzie póty póki nie stanie się zerem, (bo zero iest przeyściem od odiemnych ilości do dodatnych) czyli póki nie będzie

$$dwsv = \frac{1}{e}$$

a tak od v=o aż po tę granicę, odnoga MAM′ nie będzie miała żadnego rzeczywistego punktu. Poznaymy co znaczy ta granica.

Przywróciwszy wartość e w ostatnem wyrażeniu; otrzymamy $dwsv = \frac{A}{c} = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$

$$wstv = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \text{ a}$$

$$styczv = \frac{B}{A};$$

skąd widzimy iż ową granicą iest asymptota (204). A tak, ponieważ wartość $dwsv$ iest naywiększą gdy v=o, a naymnieyszą gdy $dwsv = \frac{1}{e}$ w przeciągu odiemnych wartości mianownika $1-e.dwsv$, w którymto przeciągu $dwsv$ maleie czyli kąt v rośnie; mianownik zacznie być dodatnym w chwili w którey $dwsv < \frac{1}{e}$ czyli $stycz v < \frac{B}{A}$, czyli kąt v większy od kąta którego dostawa $= \frac{1}{e} = \frac{A}{c}$, czyli którego styczna $= \frac{B}{A}$, to iest od kąta który asymptota czyni z osią OX: poczynaiąc od tey granicy, promień wodzący z przecina hyperbolę.

Daley postępuiąc gdy $dwsv = 0$; kąt v iest prosty, a promień wodzący prostopadły do osi OX i równy połowie parametru, który nazwawszy p, wywiedziemy z równania polarnego następuiące

$$\tfrac{1}{2}p = -A(1-e^2)$$

a zatem polarne można wyrazić tak

$$z = \frac{\frac{1}{2}p}{1-e.dwsv}.$$

Postępuiąc do A od $v=100^o$ aż do $v=200^o$, kąt v będzie rostwarty a $dwsv$ odiemną, aże $e.dwsv < 1$, więc mianownik iest dodatnym, wartość z także dodatną, a punkta wyznaczone są rzeczywistemi. Ta sama okoliczność służy dla przedziału od $v = 200^o$ do $v=300^o$ czyli od FA do Fm'; w ostatnym razie iest $dwsv = 0$ w przedostatnym $dwsv = -1$, w tym więc

$$z = FA = -A(1-e):$$

taka iest wartość odległości FA ogniska od wierzchołka A.

Nakoniec gdy v stanie się $> 300^o$; $dwsv$ będzie dodatną i takimże mianownik $1-e.dwsv$ aż do wartości $dwsv = \frac{1}{e}$ która odpowiada drugiey asymptocie: za tą granicą ilość $e.dwsv$ stanie się >1, mianownik odiemnym, promień wodzący nieskończonym.

Tym sposobem wykreślimy odnogę MAM′ linii krzywey.

212. Aby znaleźć równanie polarne na wykreślenie drugiey odnogi hyperboli, przemieniemy równanie zwyczayne

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2$$

na polarne, biorąc F za pol a kąt v od zera czyli od położenia promienia FM na osi FX do $v=400°$, i założywszy (83)

$$x=c+z\ dwsv,\ y=z\ wstv$$

wypadnie

$$(A^2wst^2v-B^2dws^2v)z^2$$
$$-2B^2c\ dwsv.z-B^2c^2=-A^2B^2$$

lub, naznaczywszy $c^2-A^2=B^2$;

$$(A^2-c^2.dws^2v)z^2-2c(c^2-A^2)dwsv.z-(c^2-A^2)^2=0$$

skąd

$$z=\frac{(c^2-A^2)(c.dwsv+A)}{A^2-c^2dws^2v},\ z=\frac{(c^2-A^2)(c.dwsv-A)}{A^2-c^2.dws^2v}$$

aże $A^2-c^2.dws^2v=-(c.dwsv-A)(c.dwsv+A)$

$$\text{więc } z=\frac{c^2-A^2}{A-c.dwsv},\ z=-\frac{c^2-A^2}{A+c.dwsv}$$

czyli, naznaczywszy $\frac{c}{A}=e$ lub $c=Ae$;

$$z=-\frac{A(1-e^2)}{1-e.dwsv},\ z=\frac{A(1-e^2)}{1+e.dwsv}.$$

Pierwsze z tych równań, iest to samo któreśmy roztrząsnęli i służy do wykreślenia odnogi MAM′; drugie, iak się zaraz przekonamy, służy do wykreślenia drugiey odnogi odnoszonej do tego samego ogniska F względem niey zewnętrznego.

Naznaczmy w niem naprzód $v=o$, czyli $dwsv=1$, a wypadnie

$$z=A(1-e).$$

Ponieważ $e>1$ więc ostatna wartość z iest odiemną i odnoga krzywey nie ma żadnego rzeczywistego punktu na osi OX od F ku X. Okoliczność ta zachodzić będzie póty póki mianownik $1+e.dwsv$ będzie dodatnym, to iest aż po wartość $dwsv=-\frac{1}{e}$. Aże w poprzedzaiącym paragrafie znaleźliśmy granicę $dwsv=\frac{1}{e}$, tu zaś $dwsv=-\frac{1}{e}$; więc tamten kąt iest spełnieniem kąta tego tu, to iest w obecnym razie $dwsv=-\frac{1}{e}$ odpowiada asymptocie (fig. 147) OR′ iako granicy.

Nazwiymy v' kąt R′OA, v kąt ROA czyli R′OA′; będzie $v'=200^o-v$ skąd $v=200^o-v'$, drugą granicą punktow rzeczywistych będzie $v'+$ R′OS′ czyli 200^o+v czyli $400^o-v'$, to iest druga asymptota OS′: a tak między OR′ i OS′ czyli między $v=-\frac{1}{e}$ i $v=400-v'$ zawarte są punkta rzeczywiste hyperboli, wszelkie zaś inne są uroione.

ROZDZIAŁ TRZECI

O PARABOLI.

I O *paraboli uważaney pod względem na oś.*

213. Równanie paraboli odnoszone do osi spółrzędnych prostokątnych poczynaiących się w wierzchołku a z których iedna przypada na osi tey linii krzywey iest

$$y^2=2px \text{ (fig. 59)}$$

gdzie $2p$ oznacza parametr $M'm'$, czyli, iak wiemy, rzędną podwóyną przechodzącą przez ognisko F. Znamy także główną własność paraboli, iż iéy odnoga MOm' ciągnie się tylko w iedną stronę i że poprowadziwszy linią BL prostopadle do BX w odległości BO = OF którato linia zowie się *kierownicą*, daley z punktow M, M' spuściwszy prostopadłe MQ, $M'q$ na BL a do F poprowadziwszy linie MF, M'F iest MF=MQ, $M'F=M'q$, czyli MF=BP, M'F=BF (101).

Dowiedziemy teraz że parabola iest ellipsą nieskończenie wyciągniętą (fig. 148). Równanie ellipsy odnoszone do parametru i do osi spółrzędnych prostokątnych poczynaiących się w wierzchołku iest (151).

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{A}$$

przypuściwszy więc iż oś wielka A powiększa się bez granic, ułomek $\frac{px^2}{A}$ będzie malał, stanie się zaś ilością nieskończenie małą gdy oś A stanie się nieskończenie wielką: w tym ostatnym razie ellipsa nieskończenie wyciągniętą a iey równanie iest

$$y^2=2px.$$

214. Widzieliśmy (101) iż znayduie się na płaszczyźnie paraboli punkt zwany ogniskiem, którego odległość od wszelkiego punktu tey krzywey iest wyrażona spółmiernie w funkcyi x. Teraz, aby się dowiedzieć, czy ów punkt stały znayduie się koniecznie w ognisku, czy też są na płaszczyźnie paraboli inne iescze punkta z taką samą własnością, przedsięweźmy znaleźć analitycznie taki punkt, któregoby odległość od wszelkiego punktu linii krzywey maiącego odciętą x była wyrażoną spółmiernie w funkcyi x.

Niechby takowy punkt był f (fig. 149): oznaczywszy iego spółrzędne przez x', y', spółrzędne zaś punktu M przez x, y, iest.

$$MF^2=(x-x')^2+(y-y')^2$$

czyli, rozwinąwszy drugą stronę, a wziąwszy za y^2 i y, wartości $2px$ i $\sqrt{(2px)}$;

$$Mf^2=x^2-2xx'+x'^2+2px-2y'\sqrt{(2px)}+y'^2$$

Aby kwadrat z Mf, był iiością spółmierną, musi być $y'=0$, w tym razie równanie poprzedzaiące zamieni się na

$$MF^2=x^2-2xx'+2px+x'^2$$

skąd $\quad MF=\pm\sqrt{(x^2-2xx'+2px+x'^2)}$.

Szukany pierwiastek znaydziemy

$$x+(p-x')$$

i resztę drugą $-p^2+2px'$, którą zrównawszy zero, otrzymamy warunek pod iakim wartość dla MF^2 będzie zupełnym kwadratem; znaydziemy tym sposobem

$x'=\frac{p}{2}$, a zatem

$$MF=x+\frac{p}{2}.$$

Z dwóch znakow wzięliśmy dodatny, ponieważ wartość MF ma być bezwzględnie dodatną, a tak ieden tylko i to w ognisku znayduie się punkt z zapowiedzianą własnością.

215. Aby wykreślić parabolę maiąc dany parametr $2p$, (fig. 150) weźmiemy $BO = OF = \frac{p}{2}$ i punkt O będzie wierzchołkiem paraboli, z punktu P któregokolwiek osi OX wyprowadzimy prostopadłą PM, a promieniem BP z punktu F przetniemy ią, punkt M tak wyznaczony, będzie iednym z punktow paraboli, iest bowiem $FM = BO + OP = \frac{p}{2} + x$:

Według teyże własności można wykreślić parabolę za pomocą węgiełka i prawidła. Niech BR (fig. 151) oznacza prawidło, EQR węgiełek. Weźmiemy nić EMF = QE i utwierdzimy ieden z-iey końcow w ognisku F, drugi w rogu E węgiełka. To wykonawszy, posuwać będziemy węgiełek wzdłuż prawidła od B do R i przytrzymywać nić ołowkiem przy QE: zakreślona tym sposobem linia krzywa OM będzie parabolą, iest bowiem względem wszelkiego iey punktu MF = MQ.

216. *Zadanie.* Znaleźć równanie linii *styczney* z parabolą.

Równanie linii prostey przecinaiącey parabolę w dwóch punktach których spółrzędne oznaczymy przez x', y' i x'', y'', iest

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Aby wyrazić iż ta linia ma dwa punkta spólne z parabolą wstawimy w-iey równanie, $2px'$ i $2px''$ za y'^2 i y''^2, będzie naprzód

$$y' - y'' = \frac{y'^2 - y''^2}{y' + y''} = \frac{2p(x' - x'')}{y' + y''}$$

skąd $\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{2p}{y'+y''}$, a zatem równanie założone przeydzie na

$$y-y'=\frac{2p}{y'+y''}(x-x'):$$

gdy dwa punkta o których mówimy zeydą się w-ieden przez obrót sieczney około iednego z tych punktów, będzie $x'=x''$, $y'=y''$, sieczna stanie się styczną, równanie więc styczney iest

$$y-y'=\frac{p}{y'}(x-x')$$

lub $\quad yy'=p(x+x')$

Aby dowieść iż styczna ieden tylko punkt ma spólny z parabolą rozmnożymy strony ostatnego równania przez 2 i odciągniemy ie od stron równania $y'^2=2px'$, wypadnie

$$y'^2-2yy'=-2px, \text{ czyli } (y'-y)^2=y^2-2px$$

ponieważ tu ilość y^2-2px, iest dodatną, a y i x są spółrzędnemi punktu któregokolwiek styczney oprócz punktu dotknięcia; wniesiemy iż wszelki punkt styczney oprócz punktu dotknięcia iest za obwodem paraboli,

217. Aby poprowadzić styczną do paraboli od punktu za iey obwodem danego, trzeba, oznaczywszy przez x'', y'' spółrzędne punktu danego, przez x', y' spółrzędne punktu dotknięcia, rozwiązać dwa równania

$$y'^2=2px',\; y''y'=p(x''+x')$$

dla wyznaczenia niewiadomych x' i y'. W tym zamiarze weźmiemy wartość px' z drugiego i wstawimy ią w pierwsze: wypadnie

$$y'^2=2y''y'-2px''$$

a zatem $\quad y'=y''\pm\sqrt{(y''^2-2px'')}$

Stąd wniesiemy 1°: ieżeli $y''^2-2px''=0$, punkt dany znayduie się na paraboli: 2° ieżeli $y''^2-2px''>0$ punkt iest za parabolą i w tym razie można poprowadzić dwie styczne do paraboli: 3° ieżeli $y''^2-2px''<0$; punkt iest wśrod paraboli, a wartość y' uroioną, czyli od tego punktu nie można poprowadzić styczney do paraboli.

218. Wziąwszy $y=0$ w równaniu styczney, wypadnie

$$x=-x' \text{ czyli } OP=OT \text{ (fig. 150)}$$

skąd widzimy iż punkt O iest środkiem podstyczney PT, czyli iż podstyczna równa iest podwóyney odcięty OP. Według tey własności paraboli można poprowadzić styczną do tey linii krzywey przez punkt na iey obwodzie dany.

219. Z równania linii styczney z parabolą

$$y-y'=\frac{p}{y'}(x-x')$$

wywiedziemy równanie normalney

$$y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x')$$

220. Wziąwszy $y=0$ w równaniu normalney, wypadnie

$$x-x'=p, \text{ czyli } PN=p$$

to iest, *podnormalna* równa iest połowie parametru. Według tey własności można poprowadzić styczną do paraboli przez punkt na iey obwodzie dany.

221. Poprowadziwszy w paraboli dwie liniie, iedną od punktu dotknięcia do ogniska, drugą przez tenże punkt dotknięcia równoodlegle od osi OX, te dwie linie czynić będą ze styczną kąty równe (fig. 152).

Mamy bowiem $FM=x'+\frac{p}{2}$, $FT=OT+OF=x'+\frac{p}{2}$

więc FM=FT, a zatem FMT=FTM a że FTM=F′Mt, więc FMT=F′Mt.

Według tey własności paraboli można poprowadzić styczną do tey krzywey przez punkt G dany za iey obwodem. Promieniem GF z punktu G zakreślimy łuk i przetniemy kierownicę w punkcie L, z punktu L wyprowadzimy prostopadłą LM do BL; punkt M, w którym LM przetnie parabolę, będzie punktem dotknięcia, iest bowiem w tym razie kąt TMF=tMF′.

222. Ponieważ ta ostatna własność paraboli ma podobieństwo z własnością odpowiadaiącą ellipsy; uważaią punkt F′ w nieskończoney wzięty odległości za drugie ognisko paraboli. Gdy zatem przez MOm rozumieć będziemy zwierciadło paraboliczne, światło padaiące z punktu F po FM na powierzchnią zwierciadła, odbiie się po MF′ i w tym kierunku może być widziane z nieskończoney odległości.

II. O PARABOLI

uważaney pod względem na średnice.

223. Średnica paraboli, tak iak innych liniy drugiego rzędu ma tę własność iż, ieśli którąkolwiek z cięciw więc i wszystkie inne cięciwy od pierwszey równoodległe, dzieli na dwie równe części. O tey prawdzie przekonamy się bezpośrednie, gdy rozwiążemy następuiące *zadanie*: co za linia łączy środki cięciw równoodległych paraboli.

Równanie linii prostey MM′ (fig. 153) iest

$$y=ax+b$$

Aby znaleźć punkta w których ta liniia przecina parabolę, wstawimy $ax+b$ za y w równanie paraboli $y^2=2px$ i otrzymamy

$$a^2x^2+2abx+b^2=2px$$

czyli $x^2 + \frac{2(ab-p)x}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 0.$

Oznaczywszy przez x odciętą środka M cięciwy M′M″; przez x', x'' odcięte iey końców M′ i M″ czyli pierwiastki równania stopnia drugiego, będzie

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \text{ czyli } x = -\frac{ab-p}{a^2}:$$

wstawiwszy tę wartość w równanie $y = ax + b$ linii M′M″, wypadnie wartość rzędney środka M

$$y = \frac{p}{a}:$$

ten wypadek iest równaniem linii prostey równoodległey od osi OX, a zatem linia łącząca środki cięciw równoodległych paraboli iest prostą, równoodległą od osi OX i oddaloną od zaczęcia O długością równą $\frac{p}{a}$.

224. Aby zamienić układ spółrzędnych prostokątnych paraboli na układ spółrzędnych ukośnych, w ktorymby równanie tey linii krzywey też samą miało postać, wstawimy za y, x ich wartości (51, 2°)

$$y = b + y'.wst\alpha + x'.wst\alpha, \quad x = a + y'.dwsa + x'.dwsa$$

w równanie $y^2 = 2px$ i otrzymamy

$$wst^2\alpha.y'^2 + 2wst\alpha wst\alpha.x'y' + wst^2\alpha.x'^2 +$$
$$+ b^2 - 2ap + 2(b.wst\alpha - p.dwsa)y' +$$
$$+ 2(b.wst\alpha - p.dwsa)x' = 0:$$

założymy równania

$$wst\alpha.wst\alpha = 0, \quad wst^2\alpha = 0,$$
$$b.wst\alpha - p.dwsa = 0 \quad b^2 - 2ap = 0$$

i równanie paraboli zamienimy na

$$y'^2 = \frac{2p}{wst^2\alpha}x.$$

Drugie z równań warunkowych oznacza iż nowa oś

OX′ (fig. 154) ma być równoodległą od OX, a tak średnica paraboli iest równoodległą od osi: dwa inne

$$b^2 = 2ap, \quad \textit{stycz}\,\alpha' = \frac{p}{b}$$

oznaczaią, pierwsze iż zaczęcie nowego układu ma być na paraboli, drugie iż oś OY′ iest styczną z parabolą w punkcie nowego zaczęcia (216).

Naznaczywszy $\frac{p}{wst^2\alpha'} = p'$ i opuściwszy kreski, równanie paraboli odnoszone do średnic, będzie

$$y^2 = 2p'x.$$

Aby znaleźć wartość parametru $2p'$, wywiedziemy z równania $\textit{stycz}\,\alpha' = \frac{p}{b}$ następuiące

$$wst^2\alpha' = \frac{p^2}{p^2 + b^2},$$

czyli, dla tego że $b^2 = 2ap$;

$$wst^2\alpha' = \frac{p}{p + 2a}$$

więc $p' = \frac{p}{wst^2\alpha'} = p + 2a$, $2p' = 4\left(a + \frac{p}{2}\right)$

a że $a + \frac{p}{2}$ oznacza odległość ogniska od punktu paraboli którego odcięta $= a$ (215); więc parametr średnicy równy iest poczworney odległości ogniska od zaczęcia średnicy.

Stąd wniesiemy że aby wykreślić parabolę gdy parametr średnicy i kąt pochyłości rzędnych są dane, wykreślimy naprzód parabolę na średnicy iako na osi według danego parametru, a potem nachylimy rzędne według danego kąta nie zmieniwszy ich długości.

225. Z resztą równanie linii styczney z parabolą

odnoszoną do średnic i wyrażenie podstyczney będą miały też samą postać iak w §§ 216 i 218.
Aby więc poprowadzić styczną do paraboli przez punkt M dany na obwodzie (fig. 154) trzeba poprowadzić rzędną PM równoodlegle od OY, wziąć OT=OP, i poprowadzić przez punkta T i M linią prostą, a ta będzie styczną.

III. *O równaniu polarnem paraboli.*

226. Równanie znalezione w § 214

$$z = x + \frac{p}{2} \quad (1)$$

iest równaniem polarnem paraboli. Nazwiymy v (fig. 155) kąt który promień wodzący z czyni z osią OX, weźmy ognisko F za zaczęcie odciętych a z tych uważaymy za dodatne te które się brać będą od F ku X, nazwiymy x' odciętą FP punktu M: będzie OP=OF+FP$=\frac{p}{2}+x'$ czyli $x=\frac{p}{2}+z.dwsv$.
Wstawiwszy tę wartość x w założone, otrzymamy równanie polarne paraboli w zwyczayney postaci.

$$z = \frac{p}{1 - dwsv}.$$

Aby ie znaleźć, zaczęliśmy od naymnieyszych wartości kąta v. Wziąwszy v=o, wartość z iest nieskończoną i parabola nie przetnie osi OX w innym punkcie oprócz punktu O. Jakąkolwiek weźmiemy wartość dla v, promień wodzący wypadnie zawsze rzeczywisty: im zaś większą weźmiemy, tym mnieyszą będzie $dwsv$, zatem tym większym mianownik $1-dwsv$, a tym mnieyszym promień z. Gdy v=100° czyli gdy promień z weźmie położenie prostopadłe Fm do osi OX; będzie z = połowie parametru $=p$. Od v=100°

do $v=300°$, iest $dwsv$ odiemną, a równanie polarne w tym przeciągu iest

$$z=\frac{p}{1+dwsv}.$$

Pod tą postacią używane bywa w ogólnych przypadkach. Między $v=300°$ i $v=400°$ ma znowu postać poprzedzaiącą.

Można wywieść równanie polarne paraboli z polarnego ellipsy (176)

$$z=\frac{p}{1+e.dwsv}$$

wziąwszy w niem $e=1$. Jest bowiem $e=\frac{\sqrt{(A^2-B^2)}}{A}$ $=\sqrt{\left(1-\frac{B^2}{A^2}\right)}$, więc w paraboli $e=1$ dla tego że $A=\frac{1}{0}$.

227. Aby wyprowadzić równanie polarne paraboli ze zwyczaynego $y^2=2px$; weźmiemy spółrzędne polarne z i v zamiast prostokątnych y, x. Oznaczywszy spółrzędne polu przez x', y'; będzie (83)

$$x=x'+z.dwsv,\quad y=y'+z.wstv:$$

te wartości dla x, y zamienią równanie $y^2=2px$, na

$$wst^2v.z^2+2(y'wstv-p.dwsv)z+$$
$$+y'^2-2px'=0 \quad (1).$$

Obrawszy pol na obwodzie paraboli, będzie

$$y'^2-2px'=0,$$

w tym razie wartości dla z są

$$z=0,\quad z=\frac{2(p.dwsv-y'.wstv)}{wst^2v}$$

Gdy druga wartość z stanie się zerem, promień wodzący będzie stycznym z parabolą: w tym razie z równania

$$p.dwsv - y'.wstv = 0$$

wywiedziemy

$$styczv = \frac{p}{y'} \text{ (iak w 216).}$$

Wziąwszy pol w ognisku, będzie $y' = 0$, $x' = \frac{p}{2}$

a równanie (1) zamieni się na

$$wst^2v \cdot z^2 - 2p\,dwsv.\,z = p^2$$

więc $$z = \frac{p\,dwsv \pm \sqrt{(p^2 dws^2v + p^2.wst^2v)}}{wst^2v}$$

czyli $$z = \frac{p.dwsv + p}{wst^2v} = \frac{p(1 + dwsv)}{(1 + dwsv)(1 - dwsv)}$$

czyli $$z = \frac{p}{1 - dwsv}$$

iak w poprzedzaiącym §.

DZIAŁ TRZECI

PRZYSTOSOWANIA POPRZEDZAIĄCYCH TEORYY.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

O ogólnym sposobie prowadzenia stycznych do liniy drugiego rzędu.

228. Sposób *pierwszy*. Aby wyprowadzić równanie linii, styczney z którąkolwiek linią drugiego rzędu, z równania stopnia drugiego z dwiema zmiennemi

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \quad (1);$$

wystawimy sobie linią prostą któraby przecinała krzywą w dwoch punktach: oznaczywszy przez x', y' i x'', y'' spółrzędne tych punktow brane w układzie osi prostokątnym, równanie sieczney będzie

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

Aby wyrazić okoliczność spólności dwóch punktow sieczney i krzywey, wstawimy w to równanie za y', y'' wartości tych rzędnych wzięte z równań

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F=0,$$
$$Ay''^2+Bx''y''+Cx''^2+Dy''+Ex''+F=0.$$

W tym razie dość iest znaleźć wartość ilości $y'-y''$ i dla tego odciągniemy stronami ostatne równanie od poprzedzaiącego, a uważaiąc iż $x'y'-x''y''=y'(x'-x'')+x''(y'-y'')$, otrzymamy

$$A(y'^2-y''^2)+B[y'(x'-x'')+x''(y'-y'')]+$$
$$+C(x'^2-x''^2)+D(y'-y'')+E(x'-x'')=0$$

skąd wypadnie

$$y'-y''=\frac{-By'(x'-x'')-C(x'^2-x''^2)-E(x'-x'')}{A(y'+y'')+Bx''+D}$$

wstawiwszy tę wartość $y'-y''$ w równanie sieczney, otrzymamy

$$y-y'=-\frac{By'+C(x'+x'')+E}{A(y'+y'')+Bx''+D}(x-x'):$$

Gdy sieczna, obracaiąc się około iednego z dwóch punktow wychodzić będzie z linii krzywey; dwa owe punkta zbliżać się będą do siebie, a gdy się zeydą w ieden, sieczna stanie się styczną: równanie więc styczney, wziąwszy w ostatnem $x''=x'$, $y''=y'$, iest

$$y-y'=-\frac{By'+2Cx'+E}{Bx'+2Ay'+D}(x-x') \quad (2)$$

W tem ogólnem styczney równaniu, licznik drugiey strony iest summą wyrazow w równanie (1) wchodzących, tam zawieraiących x, tu podzielonych przez x; mianownik zaś iest summą wyrazow w równanie (1) wchodzących, tam zawieraiących y, tu podzielonych przez y, z tem zastrzeżeniem iż drugi wyraz tak licznika iak mianownika ma być pomnożony przez 2.

Według tego prawidła, równanie styczney z linią drugiego rzędu danego przez równanie

$$2x^2-5xy-7y^2-3x-4y=5;$$

iest

$$y-y'=\frac{4x'-5y'-3}{5x'+14y'+4}(x-x')$$

229. Z równania ogólnego (2) wywiedziemy równanie styczney do któreykolwiek linii drugiego rzędu odnoszoney do środka i osi

1 W *kole* iest $A=1$, $C=1$, $B=0$, $D=0$, $E=0$: równanie więc styczney z kołem iest

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x')$$

2° W *ellipsie* iest $A=A^2$, $C=B^2$, $B=0$, $D=0$, $E=0$, równanie więc styczney z ellipsą iest

$$y-y'=-\frac{B^2x'}{A^2y'}(x-x')$$

3° W *hyperboli* $C=-B^2$ a reszta iak w ellipsie, równanie więc styczney z hyperbolą iest

$$y-y'=\frac{B^2x'}{A^2y'}(x-x')$$

4° W *paraboli* $A=1$, $E=-2p$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, równanie więc styczney z parabolą odnoszoną do wierzchołka i osi, iest

$$y-y'=\frac{p}{y'}(x-x').$$

Odnosząc liniie krzywe do układu osi równoodległych od osi liny krzywych; trzeba, oznaczywszy przez α, β spółrzędne środka liny krzywych, w równania poprzedzaiące wstawić $x-\alpha$, $x'-\alpha$, $y-\beta$, $y'-\beta$ za x, x'; y, y': w tym więc razie równanie styczney

z *kołem* iest, $y-y'=-\dfrac{x'-\alpha}{y'-\beta}(x-x')$

z *ellipsą* $y-y'=-\dfrac{B^2}{A^2}\cdot\dfrac{x'-\alpha}{y'-\beta}(x-x')$

z *hyperbolą* $y-y'=\dfrac{B^2}{A^2}\cdot\dfrac{x'-\alpha}{y'-\beta}(x-x')$

z *parabolą* $y-y'=\dfrac{p}{y'-\beta}(x-x')$.

230. Ponieważ w równanie (2) nie wchodzi ilość

F znayduiąca się w równaniu (1), wniesiemy iż, nadaiąc różne wartości dla ilości F a nie zmieniaiąc A, B, C, D, E, równanie (2) styczney zostanie to samo dla każdey linii krzywey różnie według różney wartości F wykreśloney, czyli wszystkie te linie krzywe będą miały spólną styczną (fig. 156).

231. Sposób *drugi oparty na teoryi pierwiastkow równych.* Równanie linii prostey (fig. 157) AB odnoszoney do układu osi spółrzędnych prostokątnych, iest

$$y = ax + b \quad (1).$$

Niech ta liniia przecina w dwóch punktach krzywą którąkolwiek drugiego rzędu daną przez równanie ze zmiennemi x, y: wyznaczymy naprzód odcięte OP, OP′ owych dwóch punktow wstawiwszy w równanie krzywey wartość y (1), i rozwiązawszy ie względem x; wyznaczymy zaś rzędne MP, M′P′ tych punktow wstawiwszy dwie znalezione dla x wartości w równanie (1).

Aby liniia AB z sieczney stała się styczną, musi styczna trygonometryczna a i odległość b czyli OA przybrać stosowne wartości, dwie zaś wartości dla x muszą stać się sobie równe czyli punkta M, M′ zeyść się w ieden punkt. Gdy więc w równanie linii drugiego rzędu

$$Ay^2 + By + C = 0, \quad (2)$$

którego spółczynniki B, i C zawieraią x, wstawimy wartość y wziętą z równania (1) a otrzymane

$$A(ax+b)^2 + B(ax+b) + C = 0$$

przywiedziemy do postaci

$$A'x^2 + B'x + C' = 0$$

którego spółczynniki A′, B′, C′ zawieraią ilości szukane a i b, to ostatne równanie musi mieć dwa pierwiastki równe.

Wiemy z Algebry iż bytność tych pierwiastkow równych zawisła od bytności spólnego dzielnika między polynomami

$$A'x^2+B'x+C' \text{ i } 2A'x+B' \quad (N)$$

postać zaś tego spólnego dzielnika będzie $x-\alpha$. Aby go znaleźć podzielmy pierwszy polynom przez drugi, i doydziemy do reszty drugiey w postaci

$$F(a, b).$$

To wykonawszy, założymy równanie

$$F(a, b)=0 \quad (4),$$

i wyznaczymy iedną z niewiadomych, na przykład a w funkcyi b, weźmiemy daley dla b wartość dowolną, nakoniec, wstawiwszy wartości a i b w równanie (1); otrzymamy równanie styczney z liniią drugiego rzędu: wstawiwszy ie zaś w polynomy (N), drugi $2A'x+B'$, którego postać iest

$$xf(a, b)+f'(a, b), \text{ lub } x+\frac{f'(a, b)}{f(a, b)};$$

mieścić się będzie zupełnie w pierwszym, czyli będzie spólnym dzielnikiem polynomow (N).

Spółrzędne nareszcie punktu dotknięcia znaydziemy za pomocą równania (1) i

$$x+\frac{f'(a, b)}{f(a, b)}=0 \quad (3)$$

a te będą

$$x=-\frac{f'(a, b)}{f(a, b)},\ y=-\frac{f'(a, b)}{f(a, b)}+b$$

1° Jeżeli styczna ma przechodzić przez punkt linii krzywey którego spółrzędne dane są x', y'; równania

$$x'+\frac{f'(a, b)}{f(a, b)}=0,\ y'=ax'+b$$

posłużą do wyznaczenia niewiadomych a, b w funkcyi x' i y': poczem wstawiwszy znalezione wartości a i b w równanie (1), to przybierze postać

$$y-y'=\varphi(x', y')\ (x-x')$$

(gdzie $\varphi(x', y')$ wyraża wartość a) i należyć będzie do styczney.

2° Jeżeli a i b są wiadome a w równanie (2) wchodzi ilość stała niewyznaczona r; wyznaczymy tę ilość r za pomocą równania $F(a, b)=0$ w którem znaydować się będzie, tak zaś wyznaczoną wstawiwszy w równanie (2), to oznaczać będzie iż liniia krzywa styczną iest z prostą daną.

232. Przystosuiemy ten wykład ogólny, naprzód *do stycznych z kołem.*

Równanie linii prostey iest $y=ax+b$ (1)
koła $y^2+x^2=r^2$ (2).

Aby znaleźć spółrzędne dwóch przecięć linii prostey z okręgiem wstawimy w-iego równanie $ax+b$ za y i otrzymamy

$$(1+a^2)x^2+2abx=r^2-b^2:$$

utworzymy równanie wynikłe

$$(1+a^2)x+ab=0 \quad (3)$$

odpowiadaiące równaniu (3) poprzedzaiącego §, doydziemy, szukaiąc spólnego dzielnika polynomow $(1+a^2)x^2+2abx-(r^2-b^2)$ i $(1+a^2)x+ab$, do reszty drugiey i, tę zrównawszy zero, otrzymamy równanie

$$r^2(1+a^2)-b^2=0 \quad (4).$$

W przystosowaniu czterech równań (1), (2), (3), (4); cztery mogą być przypadki zadania.

1° Gdy kąt pochyłości linii styczney do osi OX lub iego styczna a, tudzież promień r są wiadome; znaydziemy za pomocą równania (4)

$$b=r\sqrt{(1+a^2)}$$

i równanie linii styczney z kołem będzie

$$y=ax+r\sqrt{(1+a^2)}.$$

Wstawiwszy wartość b w równania (1) i (3) otrzymamy spółrzędne punkta dotknięcia.

$$x = -\frac{ar}{\sqrt{(1+a^2)}},\ y = \frac{r}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

2°, Gdy wartość dla b i r iest dana, otrzymamy za pomocą równania (4)

$$a = \frac{\sqrt{(b^2-r^2)}}{r}$$

a zatem równanie styczney iest

$$y = x\frac{\sqrt{(b^2-r^2)}}{r} + b$$

spółrzędne zaś punktu dotknięcia są

$$x = -\frac{r\sqrt{(b^2-r^2)}}{b},\ y = \frac{r^2}{b}.$$

Aby wartość a była rzeczywistą, musi być $b > r$: to iest, punkt w którym styczna przetnie oś OY powinien być za okręgiem koła, w którego środku iest zaczęcie spółrzędnych.

3°, Gdy spółrzędne x', y' punktu dotknięcia są dane, wstawimy ie za x, y w równania (1) i (3), w zamiarze wyznaczenia niewiadomych a i b: tych znalezione wartości

$$a = -\frac{x'}{y'},\ b = y' + \frac{x'}{y'}\ x'$$

wstawiwszy w rów: (1), wypadnie równanie styczney

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}\ (x - x')$$

z kołem którego promień $r = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$.

Niech na przykład będą spółrzędne punktu dotknięcia $x = 1$, $y = 2$. Promień koła, stycznego z liniią prostą w punkcie naznaczonym, będzie $\sqrt{(2^2+1)} = \sqrt{5}$ Na wyznaczenie niewiadomych a i b mamy według równań (1) i (3) dwa następuiące

$$2=a+b,\quad 1+a^2+ab=0$$

z których wywiedziemy $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$. Według tych warunkow poprowadzimy liniią prostą, a z punktu na niey danego wyprowadziwszy prostopadłą $=\sqrt{5}$, z-iey zaś końca drugiego iako ze środka promieniem $=\sqrt{5}$ zakreśliwszy koło, to będzie stycznym z liniią prostą w punkcie naznaczonym.

4° Gdy wartości a i b są dane, a trzeba wykreślić koło styczne z liniią prostą daną przez równanie $y=ax+b$, znaydziemy naprzód według równania (4) promien

$$r=\frac{b}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

według zaś równań (1) i (3) spółrzędne punktu dotknięcia

$$x=\frac{-ab}{1+a^2},\ y=\frac{b}{1+a^2}.$$

233. Powtóre *do stycznych z ellipsą.*

Równanie linii prostey iest, $y=ax+b$ (1)

ellipsy $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$: (2)

w to drugie wstawiwszy wartość y wziętą z pierwszego, wypadnie

$$(A^2a^2+B^2)x^2+2A^2ab.x+A^2(b^2-B^2)=0.$$

Aby to równanie miało pierwiastki równe; pierwsza iego strona i wynikłego

$$(A^2a^2+B^2)x+A^2ab=0 \quad (3)$$

muszą mieć spólny dzielnik. Szukaiąc tego spólnego dzielnika, doydziemy do reszty drugiey którą zrównawszy zero, otrzymamy równanie

$$A^2a^2+B^2-b^2=0 \quad (4)$$

od którego będzie zawisł wyrażony warunek. Równania (1) (2) (3) (4) służą na cztery przypadki zadania.

1° Gdy a iest dane, mamy z równania (4)

$$b=\sqrt{(A^2a^2+B^2)},$$

więc równanie styczney iest

$$y = ax + \sqrt{(A^2a^2 + B^2)}.$$

Za pomocą rownań (1) i (3) znaydziemy spółrzędne punktu dotknięcia

$$x = \frac{-A^2ab}{A^2a^2 + B^2}, \; y = \frac{B^2b}{A^2a^2 + B^2}.$$

Gdy kąt który liniia dana czyni z osią OX iest$=50°$, będzie $a = 1$ a zatem równanie styczney iest

$$y = x + \sqrt{(A^2 + B^2)}.$$

Aby wykreślić styczną naznaczymy, w-iey równaniu, $x = 0$, (fig. 158) skąd $y = \sqrt{(A^2 + B^2)} = DC$, i weźmiemy OE $=$ DC. Naznaczymy daley $y = 0$ skąd $x = -\sqrt{(A^2 + B^2)}$ i weźmiemy OF$=$OE; liniia FE będzie styczną, z ellipsą, przecinaiącą oś OX pod kątem$=50°$

2° Gdy b iest dane, znaydziemy za pomocą równania (4)

$$a = \frac{\sqrt{(b^2 - B^2)}}{A}$$

a zatem równanie styczney iest

$$y = x\frac{\sqrt{(b^2 - B^2)}}{A} + b.$$

Aby wartość a była rzeczywistą, musi być $b > B$, to iest punkt w którym styczna przetnie oś OY musi być za ellipsą. Znaydziemy nareszcie spółrzędne punktu dotknięcia, za pomocą równań (1) i (3)

$$x = \frac{-A\sqrt{(b^2 - B^2)}}{b}, \; y = \frac{B^2}{b}.$$

Ponieważ wartość y nie zawiera A wniesiemy że, wykreśliwszy ellipsy (fig. 159) BMA, BMA′, BM″A″, BM‴A‴.. na spólney osi OB różniące się tylko osiami OA, OA′, OA″.. i z punktu D wziętego na przedłużeniu osi OB poprowadziwszy styczne do tych różnych ellips; punkta dotknięcia M, M′, M″, M‴

będą leżały wszystkie na iedneyże linii prostey MM″ równoodległey od osi OA.

3° Gdy są dane spółrzędne x', y' punktu dotknięcia; mamy równania

$$A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2,\quad y'=ax'+b.$$

Z tych w pierwsze wstawiwszy wartość y' wziętą z drugiego i ułożywszy wypadkowe względem x; równanie z wypadkowego wynikłe będzie

$$(A^2a^2+B^2)x'+A^2ab=0:$$

z dwóch ostatnych wywiedziemy

$$b=y'-ax',\quad a=-\frac{B^2x'}{A^2y'}:$$

wstawiwszy nareszcie wartości b i a w równanie $y=ax+b$, wypadnie równanie styczney

$$y-y'=-\frac{B^2x'}{A^2y'}(x-x')$$

4° Gdy wartości dla a, b są dane, a trzeba wyznaczyć osi ellipsy styczney z liniią prostą którey równanie $y=ax+b$; wyznaczymy naprzód, za pomocą równania (4), iedną z osi w funkcyi drugiey, którey nadamy wartość dowolną. Tym sposobem będziemy mogli wykreślić szereg ellips stycznych z liniią prostą.

Ponieważ równanie warunkowe $A^2a^2+B^2=b^2$ daie

$$A=\frac{b}{a}\sqrt{\left(1-\frac{B^2}{b^2}\right)},$$

wniesiemy iż $b>B$, $\frac{b}{a}>A$: wyrażaią zaś b i $\frac{b}{a}$ odległości zaczęcia spółrzędnych od punktow w których styczna przecina osi OY, OX.

Równanie ellips stycznych z liniią prostą iest

$$A^2y^2+(b^2-A^2a^2)x^2=A^2(b^2-A^2a^2)$$

spółrzędne zaś punktu dotknięcia, według równań (1) i (3) są

$$x=\frac{-A^2a}{b},\ y=\frac{b^2-A^2a^2}{b}.$$

Aby znaleźć stosunek osi A i B, założymy iż ellipsa iest styczną z-inną iescze liniią prostą, którey równanie

$$y=a'x+b':$$

w tym razie będziemy mieli dwa warunkowe równania

$$A^2a^2+B^2=b^2,\ A^2a'^2+B^2=b'^2$$

z których wyprowadzimy

$$A^2=\frac{b^2-b'^2}{a^2-a'^2},\ B^2=\frac{a^2b'^2-b^2a'^2}{a^2-a'^2},$$

a zatem równanie ellipsy iest

$$\frac{y^2}{a^2b'^2-b^2a'^2}+\frac{x^2}{b^2-b'^2}=\frac{1}{a^2-a'^2}$$

spółrzędne zaś punktu dotknięcia z pierwszą liniią są

$$x=-\frac{(b^2-b'^2)b}{(a^2-a'^2)a},\ y=\frac{a^2b'^2-b^2a'^2}{(a^2-a'^2)b},$$

z drugą liniią są

$$x=-\frac{(b^2-b'^2)b'}{(a^2-a'^2)a'},\ y=\frac{a^2b'^2-b^2a'^2}{(a^2-a'^2)b'}.$$

234. Poczwarte *do stycznych z hyperbolą.* Tu rozumuiąc iak w poprzedzaiącym §, ułożymy cztery następuiące równania

$$y=ax+b \quad (1)$$
$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2 \quad (2)$$
$$(A^2a^2-B^2)x+A^2ab=0 \quad (3)$$
$$A^2a^2-B^2-b^2=0 \quad (4)$$

1° Gdy a iest dane, znaydziemy według (4)

$$b=\sqrt{(A^2a^2-B^2)}:$$

więc równanie styczney iest

$$y=ax+\sqrt{(A^2a^2-B^2)}$$

a spółrzędne punktu dotknięcia są

$$x=\frac{-A^2ab}{A^2a^2-B^2},\ y=\frac{-B^2b}{A^2a^2-B^2}.$$

Gdyby kąt styczney z osią OX był $=50°$ czyli $a=1$, równanie styczney byłoby

$$y=x+\sqrt{(A^2-B^2)}$$

za pomocą tego równania można poprowadzić styczną do hyperboli.

2° Gdy b iest dane, znaydziemy

$$a=\frac{1}{A}\sqrt{(B^2+b^2)}:$$

więc równanie styczney iest

$$y=x\frac{\sqrt{(B^2+b^2)}}{A}+b$$

nareszcie spółrzędne punktu dotknięcia są

$$x=\frac{-A\sqrt{(B^2+b^2)}}{b},\ y=\frac{-B^2}{b}.$$

Ponieważ w ostatną wartość y nie wchodzi A, wniesiemy iż, wykreśliwszy (fig. 160) hyperbole AM, A′M′, A″M″, A‴M‴ na osi spólney OB, różniące się tylko osiami OA, OA′ OA″, OA‴, i z punktu D wziętego na osi B w stronie odiemnych rzędnych w odległości $OD=\frac{B^2}{b}$ mnieyszey od B poprowadziwszy styczne do tych hyperbol; punkta dotknięcia M, M′, M″, M‴, będą leżały na iedneyże linii prostey MM‴ równoodległey od osi OX.

3° Gdy spółrzędne x', y' punktu dotknięcia są dane; mamy równania

$$A^2y'^2-B^2x'^2=-A^2B^2,\ y'=ax'+b$$

z tych w pierwsze wstawiwszy wartość y' wziętą z drugiego, będzie z wypadkowego wynikłe

$$(A^2a^2-B^2)x'^2+A^2ab=o.$$

Z dwóch ostatnych równań wywiedziemy

$$b=y'-ax', a=\frac{B^2x'}{A^2y'}$$

z tych zaś i z równania $y=ax+b$, równanie styczney

$$y-y'=\frac{B^2x'}{A^2y'}(x-x')$$

4° Gdy ilości a i b są dane, wyznaczymy podobnym iak w ellipsie sposobem osi hyperboli i podobne, znakami tylko różniące się, otrzymamy wypadki.

235. Poczwarte *do stycznych z parabolą.* Równanie linii prostey iest

$$y=ax+b \quad (1)$$

paraboli $y^2=2px$ (2).

Wstawiwszy wartość y wziętą z równania (1) w równanie (2), wypadnie

$$a^2x^2+2(ab-p)x+b^2=o$$

szukaiąc spólnego dzielnika pierwszey strony tego ostatnego równania i pierwszey strony wynikłego

$$a^2x+ab-p=o \quad (3),$$

doydziemy do reszty drugiey, a tę zrównawszy zero, mieć będziemy równanie warunkowe

$$p=2ab \quad (4).$$

1° Gdy a iest dane będzie $b=\frac{p}{2a}$ a równanie styczney

$$y=ax+\frac{p}{2a}:$$

znaydziemy daley spółrzędne punktu dotknięcia

$$x=\frac{p}{2a^2}, \ y=\frac{p}{a}.$$

Gdyby kąt styczney z osią był $=50^\circ$, byłoby $a=1$, skąd $x=\frac{p}{2}$, $y=p$ a równanie styczney

$$y=x+\frac{p}{2}.$$

2° Gdy b iest dane, znaydziemy $a=\frac{p}{2b}$, więc równanie styczney iest

$$y=\frac{px}{2b}+b$$

spółrzędne zaś punktu dotknięcia są

$$x=\frac{p}{2a^2}, y=\frac{p^2}{4a^2b}+b.$$

3° Gdy spółrzędne x', y' punktu dotknięcia są dane, użyiemy równań

$$y'^2=2px', \ y'=ax'+b, \ a^2x'+ab-p=0:$$

wywiedziemy z dwóch ostatnych, wartości

$$b=y'-\frac{p}{y'}x', \ a=\frac{p}{y'}$$

a te wstawiwszy w równanie $y=ax+b$, otrzymamy

$$y-y'=\frac{p}{y'}(x-x')$$

równanie linii styczney z parabolą.

ROZDZIAŁ DRUGI

O geometrycznem rozwiązywaniu równań trzeciego i czwartego stopnia za pomocą spólnych przecięć liniy drugiego rzędu.

236. Dwa z dwiema niewiadomemi równania, od których zawisło rozwiązanie geometrycznego zadania, można uważać za równania dwóch liniy krzywych przecinaiących się w pewnych punktach czyli maiących spólne spółrzędne pod względem na te punkta. Wyrugowawszy więc rzędną y z dwóch równań, otrzymamy równanie z samą niewiadomą x, a tę wyznaczywszy mieć będziemy odciętą spólnego przecięcia krzywych.

Weźmy na przykład do rozwiązania sławne starożytnością swoią następuiące zadanie.

Znaleźć sześcian dwa razy większy od danego.

Niech będzie a krawędź wiadoma sześcianu danego, x krawędź niewiadoma sześcianu dwa razy większego szukanego: mamy równanie

$$x^3=2a^3$$

czyli, rozmnożywszy obie strony przez x,

$$x^4=2a^3x.$$

To równanie, naznaczywszy

$$x^2=py \quad (1)$$

gdzie p iest wiadomą dowolnie wziętą ilością, y niewyznaczoną, zamieni się na następuiące

$$y^2=\frac{2a^3}{p^2}x \quad (2).$$

Równania (1) i (2) należą iak widzimy do dwóch parabol odnoszonych do iednegoż układu osi prostokątnych (fig. 161) z którychto parabol, pierwszey M'OM iest OY osią odciętych, p parametrem; drugiey MON iest OX osią odciętych, $\frac{2a^3}{p^2}$ parametrem: punkt nareszcie O iest spólnym wierzchołkiem obudwóch. Wykreśliwszy te dwie parabole według ich parametrow wiadomych (215), odcięta OP spólnego przecięcia M obudwóch, będzie szukaną krawędzią sześcianu dwa razy większego od danego.

237. W ogólności, równanie 4º stopnia z-iedną niewiadomą x można uważać za wypadek wyrugowania ilości y z równań, dwóch liniy drugiego rzędu których spółrzędne dla punktow spólnych są x, y. Aże może się znaydować nieograniczona liczba równań drugiego stopnia z niewiadomemi x, y, z którychto równań wyniknąć może założone przez wyrugowanie y; trzeba z nich obierać nayprostsze.

Niechby na przykład trzeba było rozwiązać następuiące czwartego stopnia równanie

$$x^4-px^2-qx-r=0.$$

Naznaczymy

$$x^2=ay \quad (1),$$

tu a iest ilością wiadomą, a równanie (1) należy do paraboli M″OM (fig. 162) którey odcięte biorą się na OY, rzędne na OX. Wstawimy ay za x^2 w założone, wypadnie równanie

$$a^2y^2-pay-qx-r=0$$

czyli

$$y^2-\frac{p}{a}y-\frac{q}{a^2}x-\frac{r}{a^2}=0$$

które także należy do paraboli (126). Nadawszy mu z resztą postać

$$y^2-\frac{p}{a}y+\frac{p^2}{4a^2}=\frac{q}{a^2}\left(x+\frac{r}{q}+\frac{p^2}{4q}\right)$$

czyli

$$\left(y - \frac{p}{2a}\right)^2 = \frac{q}{a^2}\left(x + \frac{4r+p^2}{4q}\right) \quad (2)$$

widzimy iż oznacza parabolę którey wierzchołka rzędna iest $+\frac{p}{2a}$, odcięta zaś $-\frac{4r+p^2}{4q}$ a parametr $\frac{q}{a^2}$ nareszcie OY iest osią rzędnych, OX odciętych.

A tak rzędna PM, w układzie YOX, punktu M paraboli M'OM'', różni się ilością $\frac{p}{2a}$ = PQ, od rzędney paraboli którey równanie (2) gdy obiedwie rzędne odpowiadaią iedneyże odciętey OP. Poprowadziwszy więc w odległości $\frac{p}{2a}$ = QP=OA liniią O'X' równoodległą od OX ; wszelkie rzędne wykreślone według równania (2) będą krótsze od rzędnych według równania (1) ilością $\frac{p}{2a}$. Przeciwnie, odcięte paraboli (2) będą dłuższe ilością $\frac{4r+p^2}{4q}$ od odciętych paraboli (1): wziąwszy więc na przedłużeniu linii AX' od A ku O' długość AO' $= \frac{4r+p^2}{4q}$ punkt O' będzie wierzchołkiem paraboli która ma być wykreśloną według równania (2) i według parametru $= \frac{q}{a^2}$: ta parabola przetnie pierwszą w czterech punktach M', M'', *m*, *m'* od których spuściwszy prostopadłe na OX otrzymamy cztery odcięte +OP', —OP'', +OP''', —OP'''', i te będą oznaczały cztery pierwiastki założonego równania stopnia 4^{go}.

Gdyby liniie krzywe nie przecinały się w żadnym punkcie, równanie miałoby same uroione pierwiastki, to iest nie miałoby żadnych : gdyby się przecinały w dwóch tylko punktach, równanie miałoby dwa pierwiastki rzeczywiste a dwa uroione; gdyby się stykały, równanie miałoby pierwiastki równe rzeczywiste.

238. Przystosuiemy ten ogólny wykład do rozwiązania zadania, które tak iak powyższe o podwóynym sześcianie, starożytnością swoią i trudnościami iakie sprawiło, iest sławne.

Podzielić łuk koła na trzy równe części.

Łuk (fig. 163) który mamy podzielić na trzy równe części, niech będzie ADB, iego promień wiadomy $= r$, i cięciwa AB wiadoma $= a$. Aby rozwiązać zadanie, trzeba wyznaczyć cięciwę AD łuku który iest trzecią częścią założonego. W tym zamiarze przypuścimy iż łuk ADEB podzielony iest na trzy równe części AD, DE, EB i poprowadzimy promienie CA, CD, CE, CB. Nazwiymy x cięciwę szukaną AD i szukaymy równania między ilościami x, a, i r.

Ponieważ łuki AD, EB są równe, więc cięciwy AB i DE są równoodległe, a kąty DFA, FDE, iako iednostronne są równe: aże ADF $=$ FDE, więc DFA$=$ADF, i AF$=$AD$=x$, nareszcie tróykąty ACD, FAD są podobne. Takimże sposobem dowiedlibyśmy iż GB$=$EB$=x$, więc

$$a = 2x + \mathrm{FG} \quad \text{(A)}.$$

Aby znaleźć FG ułożymy proporcyią

$$\mathrm{CD} : \mathrm{DE} = \mathrm{CF} : \mathrm{FG}, \text{ czyli } r : x = \mathrm{FC} : \mathrm{FG}$$

czyli, dla tego że FC$=$DC$-$DF$=r-$DF,

$$r : x = r - \mathrm{DF} : \mathrm{FG} \quad \text{(B)}$$

aby znaleźć DF, uważam dwa tróykąty podobne DCE, FAD: w tych

$$\mathrm{DC} : \mathrm{DE} = \mathrm{AF} : \mathrm{FD} \text{ czyli } r : x = x : \mathrm{FD}$$

skąd FD$= \frac{x^2}{r}$, a proporcyia (B) zamieni się na

$$r : x = \frac{r^2 - x^2}{r} : \mathrm{FG}$$

i FG $=\frac{(r^2-x^2)x}{r^2}$, wstawiwszy tę wartość FG w równanie (A) i przywiódłszy wyrazy do iednego mianownika, otrzymamy równanie trzeciego stopnia

$$x^3-3r^2x+ar^2=0,$$

które rozwiązawszy względem x; znaydziemy przynaymniey iedną rzeczywistą wartość x, to iest wartość cięciwy szukaney AD.

Aby ie rozwiązać sposobem wyłożonym w dwóch poprzedzaiących §§, rozmnożymy obie iego strony przez x i otrzymamy równanie

$$x^4-3r^2x^2+ar^2x=0:$$

to zaś, naznaczywszy

$$x^2=py \quad (1),$$

zamienimy na

$$p^2y^2-3r^2py+ar^2x=0$$

czyli, podzieliwszy obie strony przez p^2 i do każdey dodawszy $\frac{9r^4}{4p^2}$, na

$$\left(y-\frac{3r^2}{2p}\right)^2=\frac{-ar^2}{p^2}\left(x-\frac{9r^2}{4a}\right) \quad (2).$$

Pozostaie wykreślić dwie parabole których równania są (1) i (2). Z tych pierwsze (1) należy do paraboli, którey odcięte biorą się na OY (fig. 164) rzędne na OX a parametr iest p. Tą parabolą niech będzie MOM′. Drugie (2) należy do paraboli M″O′M‴, którey wierzchołka rzędna $=\frac{3r^2}{2p}=$ O′P a odcięta $=\frac{9r^2}{4a}$, parametr zaś $=\frac{-ar^2}{p^2}$. Aby uczynić drugą stronę równania (2) dodatną, weźmiemy x na stronie odiemnych odciętych od O ku X′, a tak równanie (2) zamieni się na

$$\left(y - \frac{3r^2}{2p}\right)^2 = \frac{ar^2}{p^2}\left(x + \frac{9r^2}{4a}\right)$$

według tego równania weźmiemy odciętą wierzchołka $-\frac{9r^2}{4a} = OP$, i wykreślimy parabolę M″O′M‴, która przetnie pierwszą przynaymniey w iednym punkcie s. Spuściwszy dopiero od punktu s prostopadłą sK na OX; odcięta OK będzie szukaną cięciwą łuku równego trzeciey części założonego (fig. 163) ABEB.

ROZDZIAŁ TRZECI

O kwadraturze ellipsy, hyperboli i paraboli.

239. 1° *ellipsy.* Zakreśliwszy koło promieniem równym połowie pierwszey osi ellipsy i nazwawszy y i Y (fig. 165) rzędne odpowiadaiące iedneyże odciętey, pierwszą w ellipsie drugą w kole; będzie (145)

$$y = \frac{B}{A} Y.$$

Podzielmy oś pierwszą ellipsy na równe części AP, PP′, P′P″, P″P‴, P‴B i nazwiymy n iedność liniyną. Wyprowadźmy z punktow P, P′, P″, P‴ prostopadłe aby się przecięły z dwiema liniiami krzywemi w punktach N, M; N′, M... a te połączmy cięciwami tak w kole iak w ellipsie: tym sposobem wpiszemy wielokąty w dwie linie krzywe. Nazwawszy Y, Y′, Y″... rzędne PM, P′M′, P″M″ koła; mamy

$$PN = \frac{B}{A} Y,\ P'N' = \frac{B}{A} Y',\ P''N'' = \frac{B}{A} Y''$$

więc powierzchnia trapezu PP′N′N $= \frac{1}{2}(PN + P'N')PP'$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} Y + \frac{B}{A} Y'\right)n = \frac{1}{2}\frac{B}{A}(Y + Y')n:$$

aże powierzchnia trapezu $PP'MM' = \frac{1}{2}(Y + Y')n$
więc $PP'NN' : PP'MM' = B : A$.
Stąd wniesiemy iż wielokąt wpisany w ellipsę ma się do wielokąta wpisanego w koło, iak oś mała B do osi wielkiey A. Dwie ilości składaiące pierwszy stosunek wysłowioney proporcyi, iakożkolwiek się powiększą przybieraiąc coraz mnieyszą iedność liniyną n; zawsze zostaną w tymże co z razu stosunku $= B : A$, a zatem mieć się będą iak ich granice, to iest iak ellipsa do koła, więc także mieć się będzie

$$ellipsa : koła = B : A$$

czyli $ellipsa : A^2\pi = B : A$

skąd $ellipsa = B.A.\pi$:

takie iest wyrażenie powierzchni ellipsy.

Wiemy iż, oznaczywszy przez α i α' kąty, które średnice sprzężone A' i B' czynią z osią ellipsy wziętą za oś odciętych x, iest $AB = A'B'.wst(\alpha' - \alpha)$ (164), więc $Powierzchnia\ ellipsy = A'B'\pi.wst(\alpha' - \alpha)$

Oznaczywszy przez m średną geometryczną między A i B, będzie $AB = m^2$, skąd $AB\pi = m^2\pi$, to iest powierzchnia ellipsy równą iest powierzchni koła którego promień równy iest średney geometryczney między połowami dwóch osi ellipsy.

240. 2°. Dowiedlibyśmy tym samym sposobem iż część powierzchni hyperboli równa iest odpowiadaiącey części powierzchni hyperboli równoboczney rozmnożoney przez stosunek $\frac{B}{A}$; z resztą kwadratura hyperboli należy do wyższey analizy.

241. 3° *paraboli.* Opiszmy na paraboli wielokąt iakikolwiek, tak aby boki iego były podzielone na dwie równe części w punkcie dotknięcia: wykonamy to następuiącym sposobem. Poprowadzimy przez punkt T wzięty na osi OX (fig. 166) styczną M''T do paraboli, i tę przedłużymy do S tak aby było TM'' = M''S.

Przez punkt S poprowadzimy inną styczną SM′ i tę przedłużymy do R tak aby było SM′ = M′R, i tak daley. Wykreślmy prostokąt OBQP′, przez punkta R i M poprowadźmy równoodległe DL, CN od OX, i naznaczmy $OP=\alpha$, $PM=\beta$, $OP'=x'$, $P'Q=y'$, $OP''=x''$, $P''R=y''$. Przedłużmy QR styczną przy punkcie M do zeyścia się z osią OX w punkcie T′, będzie $OT'=OP=\alpha$ (218).

Równanie styczney MT′ przy punkcie M którego spółrzędne $x=\alpha$, $y=\beta$ a przechodzącey przez punkt T′ którego spółrzędne $x=-\alpha$, $y=0$, iest (39)

$$y-\beta=\frac{\beta}{2\alpha}(x-\alpha)$$

aże punkt R którego spółrzędne oznaczyliśmy przez x'', y'', i punkt Q którego spółrzędne oznaczyliśmy przez x', y'; znayduią się na linii MT′, więc także

$$y'-\beta=\frac{\beta}{2\alpha}(x'-\alpha),\quad y''-\beta=\frac{\beta}{2\alpha}(x''-\alpha)$$

czyli $\quad \beta(x'-\alpha)=2\alpha(y'-\beta)$, $\beta(\alpha-x'')=2\alpha(\beta-y'')$

czyli $\quad PM.PP'=2OP.QN$, $PM.PP''=2OP.MK$

dodawszy te równania stronami, wypadnie

$$PM.(PP'+PP'')=2OP(QN+MK)$$

czyli $\quad PM.P'P''=2OP.QL$

czyli $\quad$ Prostokąt $NP''=2.$ Prostokątom BK $\quad$ (1).

Ponieważ bok RQ podzielony iest na dwie równe części w M, dwa tróykąty RGM, MNQ przystaną do siebie, i Prost. NP″ = *Trapezowi* P″RQP′

Także tróykąty RMK, MQI przystaną do siebie, więc

Prost:BK = Trapez: BDRQ.

Na mocy tych dwóch ostatnych równań, równanie (1) zamieni się na

Trap: P″RQP′ = 2 *Trap*: BDRQ

a tak bok RQ wielokąta opisanego dzieli powierzchnią BLP″ na dwie części które się maią iak 2 : 1 : aże wszystkie inne boki wielokąta taką samą maią własność, więc cały obwod wielokątny TSRQ dzieli powierzchnią OBQP′ w takimże stosunku, a zatem i granica tego obwodu to iest łuk paraboli dzieli prostokąt OVZP′ w takimże stosunku, więc

Powierzchnia OM″M′MZP′$=2$*Pow*:OM″M′MZV

aże *Pow*: OM″M′MZV$=\frac{1}{3}$ *Prostokąta* OVZP′

więc *Pow*: OM″M′MZP′$=\frac{2}{3}$ *Prost*:OVZP′

$=\frac{2}{3}$. OP′.P′Z:

to iest, powierzchnia wycinka parabolicznego OMZP′ równa iest $\frac{2}{3}$ powierzchni prostokąta z odcięțey OP′ i rzędney P′Z.

A tak można skwadrować powierzchnią paraboli czyli znaleźć kwadrat równy iey co do powierzchni. Nie ma tey własności ellipsa, ponieważ w wyrażenie iey powierzchni wchodzi ilość niespółmierna π wyrażaiąca stosunek średnicy do okręgu koła.

ROZDZIAŁ CZWARTY

O wyznaczaniu mieysc geometrycznych.

242. *Zadanie.* Przypuściwszy, iż liniia AB (fig. 167) odprawia bieg w taki sposób iż opiera się stale końcami swemi na ramionach kąta prostego YOX; znaleźć liniią krzywą iaką zakreśli punkt C, wzięty gdziekolwiek na linii ruchomey AB.

Odnosząc liniią prostą AB do układu osi prostokątnego, iey równanie iest

$$y=ax+b \quad (1)$$

w którem a i b tak iak x i y, są ilościami zmiennemi. Naznaczmy długość wiadomą AB$=l$, BC$=m$, a spółrzędne zmienne punktu C nazwiymy y' i x': równanie z temi zmiennemi nie zawieraiące ani a ani b, będzie równaniem linii krzywey przez punkt C zakreśloney.

Aby ie utworzyć, znaydziemy naprzód długość OB wziąwszy $y=o$ w równaniu (1): wypadnie

$$x \text{ czyli } OB=-\frac{b}{a}:$$

znaydziemy daley długość OA wziąwszy $x=o$ w temże równaniu i wypadnie

y czyli $OA=b$.

W tróykącie prostokątnym AOB iest $AO^2+OB^2=AB^2$, czyli

$$b^2+\frac{b^2}{a^2}=l^2 \quad (2)$$

W tróykąt: podobnych AOB, CPB iest AB:AO=CB:CP czyli $l:b=m:y'$ skąd

$$b=\frac{ly'}{m} \quad (3):$$

wyrugowawszy dopiero z równań (2), (3) i $y'=ax'+b$, ilości a, b, otrzymamy równanie szukane linii krzywey,

$$\frac{y'^2}{m^2}+\frac{x'^2}{(l-m)^2}=1$$

z którego postaci widzimy iż liniia krzywa zakreślona punktem C według założonego warunku, iest ellipsą którey półosi są m i $l-m$ czyli BC i AC.

Wstawiwszy w równanie (1) wartości a i b wywiedzione z równań (2) i (3); równanie linii AB, będzie

$$y=-\frac{(l-m)}{m}\cdot\frac{y'}{x'}x+\frac{ly'}{m}$$

czyli, przywiódłszy wyrazy do iednego mianownika,

$$mx'y+(l-m)\,y'x=ly'x'.$$

Oznaczywszy m przez B, $l-m$ przez A, będzie równanie

ellipsy $\quad A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2$

linii AB $\quad Ay'x+Bx'y=(A+B)x'y'$.

Gdy punkt C będzie w środku M linii AB; będzie $m=l-m$ czyli $B=A$ a równanie ellipsy zamieni się na

$$x'^2+y'^2=A^2$$

które oznacza iż środek M linii ruchomey AB zakreśla koło: w tym razie równanie linii AB iest

$$y'x+x'y=2x'y'.$$

243. Aby według otrzymanego wypadku wykreślić ellipsę (fig. 168) wyrysuiemy naprzód kąt prosty COF, weźmiemy długość stałą OF, i na niey odetniemy dwie nierówne części OB, BF, z których większa OB będzie połową osi wielkiey, druga BF połową osi małey: weźmiemy w cyrkiel liniią OF i damy iey różne położenia fo, $f'o'$, $f''o''$, na tych odetniemy części bf, $b'f'$, $b''f''$ z których każda $=$ BF a punkta b, b', b'' będą na obwodzie ellipsy; niech w tym razie punkt b'' będzie ostatnym który można wyznaczyć. To samo wykreślenie uczynimy za pomocą linii $OG=OF$, wziąwszy $CG=A=OB$, i wyznaczymy punkta bliższe punktu C. Wykonawszy takie samo wykreślenie z trzech innych stron punktu O, wyrysuiemy całą ellipsę.

Wysłowioną własność koła dowiedziemy iescze geometrycznie (fig. 169).

Wziąwszy połowę CB części iakieykolwiek AC promienia GC, i przez punkt B poprowadziwszy liniią BF równoodległą od CD do przecięcia okręgu w punkcie F, przez punkta zaś A i F liniią AFD do przecięcia przedłużoney średnicy w punkcie D; będzie AD $=$ średnicy koła, punkt zaś F spólny okręgowi i linii AD będzie w środku tey linii.

Spuściwszy bowiem z punktu F prostopadłą FE na CD, dwa tróykąty ABF, FED przystaną do siebie, więc $FD=FA$. Dwa tróykąty AFB, BFC także przystaną do siebie, więc $AF=FC$, nakoniec $FD=FC$. A tak można uważać okrąg za mieysce geometryczne punktu F środkowego linii AD przebiegaiącey kąt prosty ACD tak iż zawsze na iego ramionach opiera się swemi końcami.

244. *Zadanie*. Znaleźć równanie linii łączącey środki cięciw równoodległych ellipsy (fig. 170).

Równanie cięciwy któreykolwidk M″M′ iest

$$y=ax+b \quad (1)$$

wstawiwszy tę wartość y w równanie ellipsy

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2,$$

wypadnie

$$A^2(a^2x^2+2abx+b^2)+B^2x^2=A^2B^2$$

czyli $$x^2+\frac{2abA^2}{A^2a^2+B^2}x+\frac{A^2(b^2-B^2)}{A^2a^2+B^2}=0 \quad (2).$$

Dwa pierwiastki tego równania będą wartościami odciętych dla punktow M′, M″. Oznaczmy przez x, y spółrzędne punktu M środka cięciwy M′M″, przez x', y' i x'', y'' spółrzędne punktow M′ i M″: to iest, niech będzie

$$x=-\text{OP} \quad x'=\text{OP}', \quad x''=-\text{OP}'';$$
$$y=\text{PM}, y'=\text{P}'\text{M}', y''=-\text{P}''\text{M}'':$$

iest nareszcie (45. 2°)

$$x=\frac{x'+x''}{2}, \quad y=\frac{y'+y''}{2}.$$

Wstawiwszy tę wartość x w równanie (1), wypadnie

$$x=a\frac{x'+x''}{2}.$$

Ponieważ x' i x'' są pierwiastkami równania (2), więc iak wiemy z teoryi równań 2^go^ stopnia, ich summa

$$x'+x''=\frac{-2abA^2}{A^2a^2+B^2}$$

a $\frac{x'+x''}{2}$ czyli $x=\frac{-abA^2}{A^2a^2+B^2}$, a tak wartość dla y wypadnie

$$y = \frac{bB^2}{A^2a^2 + B^2}.$$

Znalazłszy tym sposobem wartości dla spółrzędnych x, y środka cięciwy M'M', wystawmy sobie iż ta cięciwa posuwa się wśród ellipsy równoodlegle od swego pierwszego położenia: w tym razie ilość a to iest styczna kąta który M'M" czyni z osią OX zostanie niezmienną, lecz b czyli OD zmieniać się ciągle będzie, wyrugowawszy więc b z równań

$$x = \frac{-abA^2}{A^2a^2 + B^2}, \; y = \frac{bB^2}{A^2a^2 + B^2};$$

równanie wypadkowe będzie należało do linii łączącey środki wszelkich cięciw równoodległych od M'M". W tym celu podzielimy stronami równanie drugie przez pierwsze i otrzymamy wypadek

$$y = -\frac{B^2x}{A^2a}$$

który iest równaniem linii prostey przechodzącey przez zaczęcie spółrzędnych: więc linia łącząca środki wszystkich cięciw równoodległych ellipsy iest liniią prostą i średnicą.

245. *Zadanie.* Obrawszy na osi małey punkt stały D (fig. 171) czyli wziąwszy odległość OD$=b$, i poprowadziwszy przez ów punkt cięciwy w ellipsie; znaleźć co za linia iest mieyscem środków tych cięciw.

Równanie cięciwy któreykolwiek iest

$$y = ax + b,$$

b iest tu ilością stałą $=$ OD, a zmienną. Znaleźliśmy w poprzedzaiącym paragrafie równanie linii prostey przechodzącey przez środek cięciwy i ellipsy

$$y = -\frac{B^2}{A^2a}x, \text{ skąd } a = -\frac{B^2x}{A^2y}:$$

wstawiwszy tę wartość a w równanie (244)

$$y = \frac{bB^2}{A^2a^2 + B^2}; \text{ wypadnie } y = \frac{A^2by^2}{B^2x^2 + A^2y^2}$$

lub, zniósłszy mianownik i podzieliwszy obie strony przez y,

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2by$$

równanie z którego postaci wniesiemy, iż linia szukana iest ellipsą.

Aby się dowiedzieć czy znaleziona ellipsa przecina założoną, zważymy iż spółrzędne punktów przecięć będą te same w równaniach

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,\ A^2y^2 + B^2x^2 = A^2by;$$

skąd wniesiemy że

$$A^2by = A^2B^2, \text{ a stąd } y = \frac{B^2}{b}:$$

wstawiwszy tę wartość y w równanie założoney ellipsy i wywiódlszy wartość dla x, otrzymamy

$$x = \frac{A}{b}\sqrt{(b^2 - B^2)},$$

aże OD<OY, więc $b<B$ i wartość x iest uroioną a tem samem nowa ellipsa nie przetnie się z dawną.

Gdyby cięciwy ellipsy przedłużone przecinały się za ellipsą w-iednymże punkcie D osi OY (fig. 172), na owczas b^2 byłoby większe od B^2, a ellipsa nowa przecinałaby dawną w dwóch punktach których odcięte byłyby

$$+\frac{A}{b}\sqrt{(b^2 - B^2)} = OP,\ -\frac{A}{b}\sqrt{(b^2 - B^2)} = OP'.$$

Aby w tym razie znaleźć środek i osi ellipsy nowey, nadamy równaniu $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2by$ postać

$$A^2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + B^2x^2 = \frac{A^2b^2}{4}$$

czyli $$\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b^2}{4}\right)}+\frac{x^2}{\left(\frac{A^2b^2}{4B^2}\right)}=1,$$

i postrzeżemy że spółrzędne środka nowey ellipsy są $x=0$, $y=\frac{b}{2}$, to iest, środek ten znayduie się na osi OY w środku linii $OD=b$ która przeto iest osią nowey ellipsy według y, drugą zaś osią iest $\frac{Ab}{B}$.

Rozwiążemy iescze to samo zadanie następuiącym sposobem.

Oznaczywszy przez α, β spółrzędne punktu D (fig. 173); równanie linii któreykolwiek DM przez ten punkt przechodzącey, będzie

$$y-\beta=a(x-\alpha),\text{ skąd } y=a(x-\alpha)+\beta:$$

wstawiwszy tę wartość y w równanie ellipsy, wypadnie

$$A^2[a(x-\alpha)+\beta]^2+B^2x^2=A^2B^2$$

czyli, rozwinąwszy i ułożywszy równanie względem x,

$$x^2-\frac{2A^2a(a\alpha-\beta)}{A^2a^2+B^2}x-\frac{A^2(B^2+2a\alpha\beta-a^2\alpha^2-\beta^2)}{A^2a^2+B^2}=0.$$

Pierwiastki x', x'' tego równania będą wyrażały odcięte punktów M′ i M″, oznaczywszy zaś przez x odciętą punktu M środka linii M′M″, będzie

$$x=\frac{x'+x''}{2}=\frac{A^2a(a\alpha-\beta)}{A^2a^2+B^2}\quad(1),$$

wstawiwszy tę wartość x w równanie $y=a(x-\alpha)+\beta$ i przywiódłszy wyrazy do naykrótszego wyrażenia, wypadnie

$$y=-\frac{B^2(a\alpha-\beta)}{A^2a^2+B^2}\quad(2);$$

podzieliwszy stronami równanie (2) przez (1), wypadnie

$$\frac{y}{x} = \frac{-B^2}{A^2 a}, \text{ skąd } a = -\frac{B^2 x}{A^2 y}:$$

wstawiwszy znalezioną wartość a w równanie (2) i przywiódłszy wyrazy do naykrótszego wyrażenia, wypadnie równanie

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2\beta y + B^2\alpha x$$

z którego postaci wniesiemy iż liniia krzywa szukana iest ellipsą (109).

Aby wyznaczyć punkta przecięć nowey ellipsy z dawną, porównamy dwa równania

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,\ A^2y^2 + B^2x^2 = A^2\beta y + B^2\alpha x$$

i wyprowadzimy z nich to

$$A^2\beta y + B^2\alpha x = A^2B^2,$$

wartość zaś $y = \dfrac{B^2(A^2 - \alpha x)}{A^2\beta}$.

wstawiwszy w równanie dawney ellipsy i rozwiązawszy ie względem x, otrzymamy

$$x = \frac{A^2B^2\alpha}{A^2\beta^2 + B^2\alpha^2}$$

$$\pm \frac{1}{A^2\beta^2 + B^2\alpha^2} \sqrt{[A^4\beta^2(A^2\beta^2 + B^2\alpha^2 - A^2B^2)]}.$$

Aby ta wartość x była rzeczywistą; musi być $A^2\beta^2 + B^2\alpha^2 - A^2B^2 > 0$, to iest musi punkt D znaydować się za ellipsą. Gdy punkt D będzie na obwodzie ellipsy, ilość $A^2\beta^2 + B^2\alpha^2 - A^2B^2$ zniknie i wartość dla x będzie poiedynczą: gdy nakoniec punkt D dany będzie wśród ellipsy, wartość dla x będzie uroioną.

Aby znaleźć środek i osi nowey ellipsy, nadamy iey równaniu postać

$$A^2\left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 + B^2\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{A^2\beta^2}{4} + \frac{B^2\alpha^2}{4}$$

czyli $$\frac{\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2}{\frac{\beta^2}{4}+\frac{B^2\alpha^2}{4A^2}}+\frac{\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{A^2\beta^2}{4B^2}}=1$$

spółrzędne środka są więc $\frac{\beta}{2}$ i $\frac{\alpha}{2}$, a osi

$$\sqrt{\left(\beta^2+\frac{B^2\alpha^2}{A^2}\right)} \text{ i } \sqrt{\left(\alpha^2+\frac{A^2\beta^2}{B^2}\right)}.$$

246. *Zadanie.* Znaleźć równanie linii łączącey środki cięciw równoodległych hyperboli (fig. 174).

Równanie linii prostey M′M″ iest

$$y=ax+b:$$

wstawiwszy tę wartość y w rów: $A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2$ wypadnie

$$x^2+\frac{2abA^2}{A^2a^2-B^2}x+\frac{A^2(b^2+B^2)}{A^2a^2-B^2}=0 \quad (1).$$

Dwa pierwiastki x tego równania są wartościami odciętych OP′ i OP″ punktow M′ i M″. Oznaczmy przez x i y, spółrzędne punktu M środka linii M′M″, przez x' i y', x'' i y'' spółrzędne punktu M′ i M″, będzie (45, 2°)

$$x=\frac{x'+x''}{2},\ y=\frac{y'+y''}{2}$$

czyli $$x=-\frac{abA^2}{A^2a^2-B^2},\ \text{skąd}\ y=\frac{-bB^2}{A^2a^2-B^2}$$

Aby wyrugować z tych równan zmienną b=OD, podzielimy stronami drugie przez pierwsze i otrzymamy

$$y=\frac{B^2}{A^2a}x$$

równanie linii łączącey środki cięciw równoodległych, które oznacza iż ta linija iest prosta i przechodzi przez środek hyperboli.

247. *Zadanie.* Obrawszy na drugiey osi hyperboli

punkt D i od tego poprowadziwszy liniie proste przecinaiące hyperbolą; znaleźć mieysce geometryczne środkow cięciw w tym sposobem poprowadzonych (fig. 175).

Równanie cięciwy któreykolwiek MM' iest

$$y=ax+b$$

tu iest a ilością zmienną, b stałą. Oznaczywszy przez y, x spół: środka cięciwy, znaleźliśmy w poprzedzaiącym §

$$y=\frac{B^2x}{A^2a},\quad y=\frac{-B^2b}{A^2a^2-B^2}.$$

Wstawiwszy wartość $a=\frac{B^2x}{A^2y}$, wziętą z pierwszego, w drugie; wypadnie równanie

$$A^2y^2-B^2x^2=A^2by$$

które oznacza (117) iż linia szukana iest hyperbolą.

Aby się dowiedzieć czy przecina pierwszą, porównamy równania

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2,\quad A^2y^2-B^2x^2=A^2by$$

i postrzeżemy że $A^2by=-A^2B^2$, skąd $y=\frac{-B^2}{b}$ wstawiwszy tę wartość y w równanie pierwszey hyperboli i rozwiązawszy ie względem x, znaydziemy odciętą spólnego przecięcia

$$x=\pm\frac{A}{b}\sqrt{(b^2+B^2)}.$$

tu wartość dla x iest rzeczywistą gdy $b^2>B^2$ lub gdy $b^2<B^2$.

Aby znaleźć środek i osi nowey hyperboli przywiedziemy iey równanie do postaci

$$B^2x^2-A^2\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=-\frac{A^2b^2}{4}$$

czyli $$\frac{x^2}{\left(\frac{Ab}{2B}\right)^2}-\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=-1$$

i znaydziemy iż środek O' nowey hyperboli leży w środku linii OD, osi zaś są $\frac{Ab}{B}$ i b.

248. *Zadanie.* Wyprowadziwszy z wierzchołka O paraboli prostopadłą OY do osi OX i od punktu na tey prostopadłey wziętego poprowadziwszy linie przecinające parabolę, znaleźć mieysce geometryczne środków cięciw tym sposobem prowadzonych w paraboli (fig. 176).

Równanie cięciwy któreykolwiek MM'' iest

$$y=ax+b$$

tu, iest b ilością stałą, a odmienną. Nazwawszy x, y spółrzędne środka M cięciwy, znaleźliśmy (223)

$$y=\frac{p}{a},\quad x=-\frac{ab-p}{a^2}:$$

wstawiwszy wartość $a=\frac{p}{y}$ wziętą z pierwszego z tych równań w drugie, to zamieni się na

$$y^2-by=px$$

czyli $$\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=p\left(x+\frac{b^2}{4p}\right):$$

wypadek ten oznacza, iż liniia szukana iest parabolą którey wierzchołka spółrzędne są $\frac{b}{2}=\frac{OD}{2}$, i $-\frac{b^2}{4p}$ a parametr = połowie parametru dawney paraboli.

249. *Zadanie.* Znaleźć mieysce geometryczne koł według których ilość pewna ostrokręgow dotyka się równey ilości brył, zwanych ellipsoidami, utworzonych przez obrót ellips około spólney osi, na przedłużeniu którey znaydnie się środek spólny A ostrokręgow (fig. 177 i 178).

Wiemy iż ellipsy wykreślone na spólney średnicy, maią wszystkie iednąż podstyczną gdy z-iednegoż punktu A poprowadzimy styczne do tych liniy krzywych, punkta zaś dotknięcia znaydować się będą na rzędney

MM'M'' prostopadłey do osi (156). Niech dopiero półkole B'MB obraca się około osi BB: w tym obrocie punkt M zakreśli okrąg, rzędna OM koło którego płaszczyzna będzie prostopadłą do osi, punkta M' i M'' zakreślą okręgi spółśrodkowe z pierwszym i znayduiące się na tey samey co tamten płaszczyźnie, a styczne AM, AM', AM'' utworzą powierzchnie ostrokręgowe dotykaiące się ellipsoid według okręgow zakreślonych punktami M, M' M'', więc mieyscem geometrycznem zetknięć ostrokręgow z ellipsoidami iest płaszczyzna prostopadła do spólney osi.

250. *Zadanie.* Znaleźć mieysce geometryczne kół według których ostrokręgi maiące spólny środek B dotykaią się kul spółśrodkowych (fig. 179).

Poprowadziwszy od punktu B do okręgow spółśrodkowych tyleż stycznych BM, BM' BM'', punkta dotknięcia będą się znaydowały na okręgu którego OB iest średnicą, ponieważ za pomocą tego samego okręgu wyznaczą się punkta dotknięcia M, M', M'' względem danego punktu B. Wystawmy teraz sobie iż półokręgi OCB, B'MD, B''M'D', B'''M''D' tak iak styczne BM, BM', BM'' obracaią się około spólney osi BB'. W tym razie, punkta M, M', M'' zakreślą okręgi według których ostrokręgi utworzone przez styczne dotykaią się kul; aże okręgi zakreślone przez punkta M, M', M'' znayduią się na kuli utworzoney przez okrąg OCB, dla tego że owe punkta zawsze na tym okręgu zostaią; więc mieyscem geometrycznem kół według których ostrokręgi spólny maiące srodek dotykaią się kul spółśrodkowych, iest kula utworzona przez koło OCB za pomocą którego znayduią się styczne kół będących rzutami kul danych.

CZĘŚĆ TRZECIA

O POWIERZCHNIACH DRUGIEGO RZĘDU.

251. Odnosząc płasczyznę położoną w przestrzeni do układu trzech płasczyzn przecinaiących się pod kątem prostym, każdy punkt owey płasczyzny może być wyznaczony za pomocą równania stopnia pierwszego z trzema ilościami zmiennemi

$$Ax+By+Cz+D=0$$

i dla tego równanie to należy do płasczyzny, czyli do powierzchni pierwszego rzędu (67).

Przypuśćmy teraz iż mogą się znaydować powierzchnie takie których własność i postać zawisłyby od równania stopnia drugiego z trzema zmiennemi. Ten warunek oznacza iż takie powierzchnie są foremne. Przyrodzenie stawia nam przed oczy powierzchnie trafem utworzone, i które pod żadne prawo utworu podciągnięte być nie mogą: gdyby zaś potworzyło było powierzchnie krzywe foremne a tych liczba była stała i nam wiadoma, wzięlibyśmy ie pod wykład analityczny, podobnie iakeśmy to uczynili ze znaioma wszystkim płasczyzną, i tak śledzilibyśmy ich własności. Lecz, że ani takowych powierzchni krzywych ani ich liczby nie nachodzimy w przyrodzeniu; dochodzić ich drogą analizy i usiłować będziemy rozwiązać analitycznie to ogólne zadanie.

Znaleźć, za pomocą ogólnego równania stopnia drugiego z trzema zmiennemi ilościami, postać i liczbę powierzchni krzywych.

DZIAŁ PIERWSZY

TEORYJA OGÓLNA POWIERZCHNI DRUGIEGO RZĘDU.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

O dochodzeniu powierzchni za pomocą ogólnego równania stopnia drugiego z trzema ilościami zmiennemi.

252. Równanie ogólne stopnia 2go z trzema zmiennemi, iest

$$Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + Byz + B'xz + B''xy + Cz + C'y + C''x + F = 0 \quad (1).$$

Uważaymy w niem zmienne x, y, z za trzy spółrzędne brane w układzie trzech osi prostokątnych z których dwie według x, y są horyzontalne a trzecia według z pionowa. Rozwiązawszy równanie względem z, otrzymamy

$$x = -\frac{By + B'x + C}{2A} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{By + B'x + C}{2A}\right)^2 + \frac{-A'y^2 - A''x^2 - B''xy - C'y - C''x - F}{A}\right\}}$$

czyli

$$z = -\frac{By + B'x + C}{2A} \pm$$

$$\frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2 - 4AA')y^2 + 2(BB' - 2AB'')yx + (B'^2 - 4AA'')x^2}$$

$$+ 2(BC - 2AC')y + 2(B'C - 2AC'')x + C^2 - 4AF]$$

czyli, naznaczywszy

$B^2 - 4AA' = a$, $2(BB' - 2AB'') = b$, $B'^2 - 4AA'' = c$,
$2(BC - 2AC') = d$, $2(B'C - 2AC'') = e$, $C^2 - 4AF = f$,

$$z = -\frac{By + B'x + C}{2A}$$

$$\pm \frac{1}{2A}\sqrt{(ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f)} \quad (2).$$

Nadaiąc dopiero dla x, y wszelkie wartości, otrzymalibyśmy za pomocą równania (2) odpowiadaiące wartości dla z a tem samem położenie różnych punktow w przestrzeni, których mieyscem geometrycznem iest pewna powierzchnia oznaczona równaniem (1).

Aby tę powierzchnią wykreślić, uważaymy ilość $-\frac{By + B'x + C}{2A}$ za wartość rzędney z płasczyzny, którey równanie

$$z = -\frac{By + B'x + C}{2A}.$$

Wziąwszy $x = 0$, $y = 0$, otrzymamy rzędną, punktu w którym płasczyzna przecina oś OZ (fig. 180),

$$z = -\frac{C}{2A} = Oc.$$

Wziąwszy $z = 0$, $y = 0$, otrzymamy rzędną, punktu w którym płasczyzna przecina oś OX,

$$x = -\frac{C}{B'} = Oa,$$

wziąwszy nareszcie $z = 0$, $x = 0$, otrzymamy rzędną, punktu w którym płasczyzna przecina oś OY,

$$y = -\frac{C}{B} = Ob$$

i tak wyznaczymy położenie płasczyzny *abc* którą oznacza to które uważamy równanie. Biorąc dopiero dla x, y, wartości iakiekolwiek wyznaczymy punkt N tey płasczyzny i mieć będziemy rzędną

$$PN = -\frac{1}{2A}(By + B'x + C)$$

którey spodek P znayduie się na płasczyźnie XY. Chcąc teraz otrzymać punkta powierzchni krzywey odpowiadaiące punktowi N płasczyzny *abc* ; trzeba, poczynaiąc od N, przydać z każdey strony na przedłużeniu linii PN odległość NM, NM′ równą ilości

$$\frac{1}{2A}(ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f)$$

a punkta M, M′ należyć będą do powierzchni.

253. Lecz być mogą przypadki w których równanie (1) żadney nie oznacza powierzchni. Nastąpi taki przypadek gdy polynom

$$ay^2 + (bx + d)y + cx^2 + ex + f \quad (3)$$

w równanie (2) wchodzący, będzie ilością odiemną, bo wartość dla z wypadnie w tym razie uroioną: aże dla y można nadać wartość taką że znak ilości a będzie znakiem polynomu niezalegle od wartości x; więc wartość dla z będzie uroioną gdy

$$a < 0, \text{ czyli } B^2 - 4AA' < 0 \quad (a).$$

Wiemy z algebry że polynom drugiego stopnia iest iloczynem z dwóch czynnikow uroionych gdy ma znak pierwszego wyrazu: z polynomu więc który uważamy utworzywszy równanie, wartość

$$y = -\frac{bx + d}{2a}$$

$$\pm \frac{1}{2a}\left[(b^2 - 4ac)x^2 + 2(bd - 2ae)x + d^2 - 4af\right]$$

będzie uroioną, a zatem

$$b^2-4ac<0 \quad (b).$$

Można znowu nadać niewyznaczoney x polynomu

$$(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af$$

wartość taką, aby znak tego polynomu był ten sam co znak spółczynnika b^2-4ac, więc także wartość

$$x=-\frac{bd-2ae}{b^2-4ac}$$

$$\pm\frac{1}{b^2-4ac}\sqrt{[(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)]}$$

będzie uroioną, a zatem

$$(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)<0 \quad (c) \; (*),$$

254. A tak równanie (1) nie będzie oznaczało ża-

(*) *Objaśnienie.* Gdy polynom drugiego stopnia px^2+qx+r iest iloczynem z czynników uroionych; zatrzyma zawsze znak pierwszego wyrazu, biorąc dla x wszelką wartość rzeczywistą.

Albowiem podzieliwszy i rozmnożywszy wyrazy polynomu przez $4p$ a dodawszy i odiąwszy q^2, będzie

$$px^2+qx+r=\frac{1}{4p}(4p^2x^2+4pqx+q^2+4pr-q^2)$$

$$=\frac{1}{4p}[(2px+q)^2+4pr-q^2]$$

Ponieważ polynom założony iest iloczynem z czynnikow uroionych, więc iak wiemy z teoryi równań 2go stopnia, ilość q^2-4pr iest odiemną czyli $4pr-q^2$ dodatną: aże $(2px+q)^2$ iest także dodatną ilością, więc znak polynomu px^2+qx+r iest taki sam iak spółczynnika $\frac{1}{4p}$ czyli p.

I odwrotnie, gdy polynom drugiego stopnia mieć będzie znak pierwszego swego wyrazu px^2, na ów czas czynniki polynomu będą uroione, w każdym bowiem razie czy p będzie dodatną ilością czy odiemną, będzie $(2px+q)^2+4pr-q^2$ a zatem $4pr-q^2$ dodatną czyli q^2-4pr odiemną ilością; a skoro q^2-4pr iest odiemną, więc pierwiastki rów: $px^2+qx+r=0$, czyli czynniki polynomu px^2+qx+r są uroione.

dney powierzchni gdy się sprawdzą warunki (a) (b) (c). Oznaczaią one iż ilości a, c. f czyli

$$B^2 - 4AA', \quad B'^2 - 4AA'', \quad C^2 - 4AF$$

maią znak iednakowy, to iest odiemny. Skąd wniesiemy że ilości A, A', A'', F maią także, w razie który uważamy, znak iednakowy: gdy więc zaydzie ta ostatna okoliczność, równanie (1) żadney powierzchni oznaczać nie będzie.

255. Równanie (1) oznacza punkt albo liniią prostą w przypadkach w których się sprawdzą warunki (a) (b) (c), czyli w których nie oznacza żadney powierzchni.

Aby dowieść tę prawdę, podzielimy i pomnożymy polynom (3), to iest

$$ay^2 + (bx+d)y + cx^2 + ex + f$$

przez $4a$ a dodamy i odciągniemy $(bx+d)^2$: będzie

$$\frac{1}{4a}[4a^2y^2 + 4a(bx+d)y + (bx+d)^2$$
$$+ 4acx^2 + 4aex + 4af - (bx+d)^2]$$

czyli

$$\frac{1}{4a}[2ay + bx + d)^2 - (b^2 - 4ac)x^2$$
$$- 2(bd - 2ae)x - (d^2 - 4af)]$$

czyli, naznaczywszy $b^2 - 4ac = a'$, $bd - 2ae = b'$, $d^2 - 4af = c'$,

$$\frac{1}{4a}[(2ay + bx + d)^2 - (a'x^2 + 2b'x + c')]$$

aże podobnie

$$a'x^2 + 2b'x + c' = \frac{1}{a'}[(a'x + b')^2 - (b'^2 - a'c')],$$

czyli $a'x^2 + 2bx' + c' = \dfrac{1}{a'}[(a'x + b')^2 - Q]$,

gdzie $Q = b'^2 - a'c'$

więc $\frac{1}{4a}\left\{(2ay+bx+d)^2-\frac{1}{a'}(a'x+b')^2+\frac{Q}{a'}\right\}$

czyli nareszcie

$$\frac{1}{4a}(2ay+bx+d)^2-\frac{1}{4aa'}(a'x+b')^2+\frac{Q}{4aa'}:$$

i wartość dla z według równania (2) będzie

$$z=-\frac{1}{2A}(By+B'x+C)$$

$$\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\left\{\frac{1}{4a}(2ay+bx+d)^2-\frac{1}{4aa'}(a'x+b')^2+\frac{Q}{4aa'}\right\}}$$

więc $(2Az+By+B'x+C)^2-\frac{1}{4a}(2ay+bx+d)^2$

$$+\frac{1}{4aa'}(a'x+b')^2-\frac{Q}{4aa'}=0 \quad (4)$$

Wniesiemy dopiero że, ieżeli a, a', Q są odiemne, wszystkie wyrazy pierwszey strony równania (4) są dodatne, a zatem ich summa nie może być $=0$ i pierwiastki względem któreykolwiek zmienney będą uroione. Jest zaś

$a=B^2-4AA'$, $a'=b^2-4ac$, $Q=b'^2-a'c'$
$=(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)$

więc gdy się sprawdzą trzy następuiące warunki

$B^2-4AA'<0$, $b^2-4ac<0$,
$(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)<0$

równanie (1) żadney powierzchni drugiego rzędu oznaczać nie będzie.

Gdy będzie $Q=0$, a i a' odiemne; równanie (4) sprawdzi się ieżeli każdy z-iego wyrazów równy będzie zero, skąd wypadnie

$2Az+By+B'x+C=0$, $2ay+bx+d=0$, $a'x+b'=0$

trzy te równania są dostateczne do wyznaczenia spółrzędnych x, y, z poiedynczego punktu, w tym więc razie równanie (1) wyraża punkt w przestrzeni.

Gdyby oprócz $Q=0$, było iescze $a'=0$, $b'=0$, mielibyśmy tylko równania

$$2Az+B y+B x+C=0, 2ay+bx+d=0$$

które należą do linii prostey położoney w przestrzeni i na spólnem przecięciu dwóch płaszczyzn: a tak równanie (1) wyraża linią położoną w przestrzeni gdy iest $Q=0$, $a'=0$, $b'=0$, czyli

$$(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)=0,$$
$$b^2-4ac=0,\ bd-2ae=0$$

Według tych równań, ilości a, c, e, f muszą mieć znak iednakowy, aby zaś odkryć ten znak, nadamy równaniu $2ay + bx+d=0$ postać

$$\frac{ya}{\sqrt{a}}+\frac{bx}{2\sqrt{a}}+\frac{d}{2\sqrt{a}}=0$$

czyli $$y\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}x+\frac{d}{2\sqrt{a}}=0$$

gdyby a było ilością odiemną, $\sqrt{a}$ byłby uroioną: a zatem nie byłoby płaszczyzny, ilość a musi więc być dodatną, a zatem będą także dodatnemi ilości c, e, f. A tak ostatecznie, równanie (1) oznacza punkt albo linią prostą w przypadkach w których nie oznacza żadney powierzchni.

256. Pozostaie odkryć przypadki w których równanie

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Bzy+B'xz+B''xy$$
$$+Cz+C'y+C''x+F=0 \quad (1)$$

oznacza powierzchnią krzywą. W tym zamiarze naznaczymy $=0$ w równaniu (1) iedną ze zmiennych x, y, z, a wypadek będzie równaniem pewney linii drugiego rzędu według którey można przeciąć szukaną powierzchnią: aże ta liniia krzywa może być (93) albo zamkniętą albo nieograniczenie rostwartą; więc takiemiż będą i powierzchnie szukane. Zastanówmy się nad pierwszym z tych przypadkow.

Aby powierzchnia była zamkniętą, musi z-iey przecięcia przez płaszczyznę wyniknąć liniia krzywa zamknięta. Wystawmy sobie liniią prostą którąby powierzchnią wskroś przeszywała a wypadała z przecięcia spólnego dwóch płaszczyzn wewnątrz powierzchni: niech będą równania linii prostey

$$x = \alpha z + \beta,\ y = \alpha' z + \beta'$$

w których α, α', β, β' są ilościami stałemi. Za pomocą tych równań i ich spółczesnego (1), znaydziemy warunki przypadku w którym równanie (1) należy do powierzchni zamkniętey. Wyruguiemy w tym zamiarze x lub y z równania (1) a wypadkowe wyrażać będzie liniią drugiego rzędu, warunki zaś pod iakiemi wypadkowe wyraża linią zamkniętą, będą temi pod iakiemi równanie (1) wyraża powierzchnią zamkniętą. Wyrugowawszy x, otrzymamy

$$(A + B'\alpha + A''\alpha^2)z^2 + (B + B''\alpha)yz + A'y^2 +$$
$$+ (C'\alpha + 2A''\beta\alpha + C + B'\beta)z + (B''\beta + C)y +$$
$$+ A''\beta^2 + C'\beta + F = 0$$

czyli, dla skrócenia,

$$a'z^2 + b'yz + c'y^2 + d'z + e'y + f' = 0.$$

Aby to równanie należało do linii drugiego rzędu zamkniętey, ilość $b'^2 - 4a'c'$ musi być odiemną (93) to iest musi być

$$(B + B''\alpha)^2 - 4(A + B'\alpha + A''\alpha^2)A' < 0$$

czyli

$$(B''^2 - 4A'A'')\alpha^2 + 2(BB'' - 2B'A')\alpha + B^2 - 4AA' < 0 \quad (5)$$

skąd wniesiemy według (254) iż

$$B''^2 - 4A'A'' < 0 \quad (d)$$

stąd zaś iż spółczynniki A' i A'' maią znak iednakowy, *np* dodatny. Ponieważ polynom (5) zostanie zawsze odiemnym niezalegle od wartości rzeczywistey α, więc zrównawsszy go zero i rozwiązawszy względem α; pierwiastki wypadną uroione, i w tym razie będzie

$$(BB'' - 2A'B')^2 - (B^2 - 4AA')(B''^2 - 4A'A'') < 0 \quad (e)$$

lub, rozwinąwszy i skróciwszy

$$AB''^2+A'B'^2+A''B^2-BB'B''-4AA'A''<o \quad (f)$$

z warunkow (e) i (d) wniesiemy że

$$B^2-4AA'<o \quad (g)$$

z tego zaś i (d); iż trzy spółczynniki A, A', A'' muszą mieć znak iednakowy a żaden z nich nie może być $=o$: a tak warunki (d), (e), (g) służą na przypadek w którym równanie (1) należy do powierzchni drugiego rzędu zamkniętey.

Wykonawszy taki sam rozbiór równań (1) i $y=\alpha z+6'$; otrzymamy podobne wypadki: w tym razie dość będzie w znalezionych przemieniwszy, ieden na drugi, spółczynniki przywiązane do x i y, wziąć zamiast liter

$$A,\ A',\ A'',\quad B,\ B',\ B'';$$

odpowiadaiące

$$A,\ A'',\ A',\quad B',\ B,\ B'':$$

a wypadną te same trzy co wyżey formuły (d), (e), (f) i czwarta $B'^2-4AA''<o \quad (g')$

a tak tylko cztery warunki (g) (g') (d), (e) służą na przypadek w którym równanie (1) oznacza powierzchnią zamkniętą.

Te cztery warunki sprawdzą się na równaniu $x^2+y^2+z^2=R^2$, to więc należy do powierzchni zamkniętey.

257. Dogodnieyszym sposobem odkryiemy cechy równań i powierzchni 2° rzędu tak zamkniętych iak nieograniczenie rostwartych, gdy przywiedziemy równanie (1) do prostszey postaci. Rozwiążemy to zadanie, zmieniaiąc układ osi spółrzędnych. Zmieńmy więc naprzód zaczęcie osi, i nazwiymy α, 6, γ spółrzędne nowego zaczęcia, a x', y', z' spółrzędne brane w nowym układzie: będzie (49).

$$x=x'+\alpha,\quad y=y'+6,\quad z=z'+\gamma$$

wstawiwszy wartości x, y, z w równanie (1), to zamieni się na

$$
(i)\quad \begin{cases}
Az'^2 + A'y'^2 + A''x'^2 + Bz'y' + B'z'x' + \\
+ B''x'y' + (2A\gamma + B\beta + B'\alpha + C)z' + \\
+ (2A'\beta + B\gamma + B''\alpha + C')y' + \\
+ (2A''\alpha + B\gamma + B'\beta + C'')x' + \\
+ A\gamma^2 + A'\beta^2 + A''\alpha^2 + B\gamma\beta + B'\gamma\alpha + B''\alpha\beta + \\
+ C\gamma + C'\beta + C''\alpha + F = o.
\end{cases}
$$

Aby oczyścić to równanie z wyrazow zawieraiących x', y', z'; założymy równania

$$
(k)\quad \begin{cases}
2A\gamma + B\beta + B'\alpha + C = o,\quad 2A'\beta + B\gamma + B''\alpha + C' = o \\
2A''\alpha + B'\gamma + B'\beta + C'' = o
\end{cases}
$$

i za ich pomocą wyznaczymy trzy niewiadome α, β, γ, których wartości wstawiwszy w (i) i oznaczywszy przez L summę wyrazow wiadomych, wypadnie

$$(l)\ Az'^2 + A'y'^2 + A''x'^2 + Bz'y' + B'z'x' + B''x'y' + L = o.$$

Równanie to nie zmieni swey postaci gdy w niem weźmiemy $-x', -y', -z'$, za $+x', +y', +z'$, a zatem poprowadziwszy przez nowe zaczęcie spółrzędnych linią prostą, której równania są

$$x' = mz',\ y' = nz',$$

punkta w których ta linia przetnie powierzchnią, będą miały spółrzędne, ieden $+x', +y', +z'$, drugi $-x', -y', -z'$, więc owa linia wewnątrz powierzchni uważana podzieloną iest w zaczęciu osi na dwie równe części, a to zaczęcie iest środkiem powierzchni: i tak równanie (l) należy do powierzchni maiących środek.

Gdyby spólny mianownik

$$AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - BB'B'' - 4AA'A'',$$

wartości wyznaczonych za pomocą równań (k) dla spółrzędnych α, β, γ środka powierzchni wypadł $=o$; równania (k) byłyby, iak wiemy z Algebry, niedorzeczne a spółrzędne α, β, γ nieskończenie wielkie: w tym razie środek powierzchni leżałby w nieskończoney odległości, to iest powierzchnie nie miałyby środka. Gdyby iescze i liczniki znalezionych wartości były $=0$; iedno z równań (k) byłoby wypadkowem dwóch innych, w tym zaś razie maiąc dwa tylko równania z trzema ilościami niewiadomemi, te wypadłyby $=\frac{0}{0}$; ma więc taka powierzchnia (na przykład walca), nieograniczoną liczbę środków, a tych mieyscem geometrycznem iest linija prosta której położenie można wyznaczyć za pomocą dwóch równań. (**)

(**) *Ob-iaśnienie.* Rozwiązawszy trzy równania z trzema niewiadomemi

$$ax+by+cz=d,\quad a'x+b'y+c'z=d',\quad a''x+b''y+c''z=d'':$$

gdyby wypadła każda z niewiadomych $=\frac{1}{0}$, albo $=\frac{0}{0}$; z-iakich przyczyn pochodziłyby takie wypadki?

Rozmnóżmy obie strony pierwszego równania przez spółczynnik niewyznaczony k, drugiego przez l i odciągniymy trzecie od summy dwóch pierwszych; wypadnie

$$(ka+la'-a'')x+(kb+lb'-b'')y+(kc+lc'-c'')z=kd+ld'-d''$$

daymy na to iż spółczynniki k i l maią takie wartości iż

1, $ka+la'-a''=0$

2, $kb+lb'-b''=0$ skąd $z=\dfrac{kd+ld'-d''}{kc+lc'-c''}$

3, $ka+la'-a''=0$

4, $kc+lc'-c''=0$ . . $y=\dfrac{kd+ld'-d''}{kb+lb'-b''}$

5, $kb+lb'-b''=0$

6, $kc+lc'-c''=0$ . . $x=\dfrac{kd+ld'-d''}{ka+la'-a''}$.

Wartości spółczynników k i l wchodzących w wartość z a wyznaczonych przez równania 1 i 2, nie są te same co wartości spółczynników temiż literami k, l oznaczonych, wchodzących w wartość y i przez równania 3 i 4 mogących być wyznaczonemi: to samo powiemy względem wartości x.

Gdyby się zdarzyło naprzód iżby ieden z mianownikow wartości z, y, x, był $=0$ naprzykład wartości z; na ów czas mianowniki dwóch innych niewiadomych y, x byłyby także $=0$, o czem łatwo się przekonać zastanowiwszy się nad układem równań 1, 2, 3, 4, 5, 6: wartości więc niewiadomych x, y, z byłyby $=\frac{1}{0}$. W tym razie trzy założone

258. Zostawiamy nadal rozbiór powierzchni nie maiących środka, tu zaś zatrudnimy się powierzchniami które maią środek i których równanie iest
$Az'^2+A'y'^2+A''x'^2+By'z'+B'x'z'+B''x'y'+L=o$ (I).
Aby temu równaniu nadać prostszą postać, zmieńmy kierunek osi spółrzędnych na inny także prostokątny, nie zmieniaiąc zaczęcia które iest w środku powierzchni a to w zamiarze oczyszczenia równania (I) z wyrazow zawieraiących iloczyny zmiennych ilości x', y', z'. Oznaczmy przez x'', y'', z'' nowe spółrzędne; przez X, Y, Z, kąty które oś według x'' czynić będzie z trzema osiami x', y', z'; przez X', Y', Z' kąty które oś według y'', nareszcie przez X'', Y'', Z'' kąty które oś według z'' czynić będzie z temiż osiami x', y', z'. W tym razie (78)

$$x'=x''.dwsX+y''.dwsX'+z''.dwsX''$$
$$y'=x''.dwsY+y''.dwsY'+z''.dwsY''$$
$$z'=x''.dwsZ+y''.dwsZ'+z''.dwsZ''$$

---

równania byłyby niedorzeczne: dwa bowiem pierwsze daią rownanie

$$(ka+la')x+(kb+lb')y+(kc+lc')z=kd+ld'$$

czyli, na mocy równań 1, 2, 4,

$$a''x+b''y+c''z=kd+ld':$$

porównawszy zaś z tem równaniem trzecie

$$a''x+b''y+c''z=d'',$$

widzimy iż byćby musiało $kd+ld'=d''$, co być nie może ponieważ w razie który uważamy żaden z licznikow wartości x, y, z nie iest zerem, trzy więc równania w przypadku nieskończonych wartości x, y, z, są niedorzeczne.

Gdyby się zdarzyło *powtóre* izby iedna z wartości x, y, z, była $=\frac{o}{o}$, w ów czas dwie inne niewiadome także byłyby $=\frac{o}{o}$, aże w tym razie byłoby $kd+ld'-d''=o$, więc, iak wypada z poprzedzaiącego przypadku, iedno z trzech założonych równań byłoby wypadkowem dwóch innych, i tak mielibyśmy tylko dwa równania z trzema niewiadomemi.

skąd

$$z'^2 = x''^2.dws^2Z + y''^2.dws^2Z' + z''^2.dws^2Z'' + \\ + 2x''y''.dwsZdwsZ' + 2x''z''.dwsZdwsZ'' + \\ + 2y''z''.dwsZ'dwsZ''$$

$$y'^2 = x''^2.dws^2Y + y''^2.dws^2Y' + z''^2.dws^2Y'' + \\ + 2x''y'.dwsYdwsY' + 2x''z'.dwsYdwsY'' + \\ + 2y''z''.dwsY'dwsY''$$

$$x'^2 = x''^2.dws^2X + y''^2.dws^2X' + z''^2.dws^2X'' + \\ 2x''y''.dwsXdwsX' + 2x''z''.dwsXdwsX'' + \\ + 2y''z''.dwsX'dwsX''$$

$$y'z' = x''^2.dwsYdwsZ + y''x''.dwsY'dwsZ + \\ + z''x''.dwsY''dwsZ + x''y''.dwsYdwsZ' + \\ + y''^2.dwsY'dwsZ' + y''z''.dwsY''dwsZ' + \\ + z''x''.dwsYdwsZ'' + y''z''.dwsY'dwsZ'' + z''^2.dY''dZ''$$

$$x'z' = x''^2.dwsXdwsZ + y''x''.dwsX'dwsZ + \\ z''x''.dwsX''dwsZ + x''y''.dwsXdwsZ' + y''^2.dX'dZ' + \\ + y''x''dwsX''dwsZ' + z''x''dwsXdwsZ'' + \\ y''z''dwsX'dwsZ'' + z''^2dwsX''dwsZ''$$

$$x'y' = x''^2.dwsXdwsY + y''x''.dwsX'dwsY + \\ z''x''.dwsX''dwsY + x''y''.dwsXdwsY' + \\ + y''^2.dwsX'dwsY' + y''x''.dwsX''dwsY' + \\ + z''x''.dwsXdwsY'' + y''z''.dwsX'dwY'' + z''^2 aX''dY''.$$

Wstawiwszy te wartości w równanie (I), wypadnie

$$(Adws^2Z + A'dws^2Y + A''dws^2X + BdwsYdwsZ + \\ B'dwsXdwsZ + B''dwsXdwsY)x''^2$$

$$+ (Adws^2Z' + A'dws^2Y' + A''dws^2X' + BdwsY'dwsZ' + \\ + B'dwsX'dwsZ' + B''dwsX'dwsY')y''^2$$

$$+ (Adws^2Z'' + A'dws^2Y'' + A''aws^2X'' + BdwsY''dwsZ'' + \\ + B'dwsX''dwsZ'' + B''dwsX''dwsY'')z''^2$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 2AdwsZdwsZ' + 2A'dwsYdwsY' + \\ + 2A''dwsXdwsX' + B(dwsY'dwsZ + \\ + dwsYdwsZ') + B'(dwsX'dwsZ + \\ + dwsXdwsZ') + B''(dwsX'dwsY + \\ + dwsXdwsY') \end{array} \right\} x''y''$$

$$+\left.\begin{pmatrix}2A\,dwsZ\,dwsZ''+2A'\,dwsY\,dwsY''+\\+2A'\,dwsX\,dwsX''+B(dwsY''\,dZ+\\+dwsY\,dwsZ'')+B'(dwsX''\,dwsZ+\\+dwsX\,dwsZ'')+B''(dwsX''\,dwY+\\+dwsX\,dwsY'')\end{pmatrix}\right. x''z''$$

$$+\left.\begin{pmatrix}2A\,dwsZ'\,dwsZ''+2A'\,dwsY'\,dwsY''+\\+2A''\,dwsX'\,dwsX''+B(dwsY''\,dZ'+\\+dwsY'\,dwsZ'')+B'(dusX''\,dwsZ'+\\+dusX'\,dwsZ'')+B''(dusX''\,dwsY'+\\+dwsX'\,dwsY''\end{pmatrix}\right. y''z''$$

$$+L=0 \quad (m);$$

założywszy równania

$$(n)\left\{\begin{array}{l}2A\,dwsZ\,dwsZ'+2A'\,dwsY\,dwsY'+2A''\,dwsX\,dwsX'+\\+B(dwsY'\,dwsZ+dwsY\,dwsZ')+B'(dwsX'\,dwsZ+\\+dwsX\,dwsZ')+B''(dusX'\,dwsY+dwsX\,dwsY')=0\\2A\,dwsZ\,dwsZ''+2A'\,dwsY\,dwsY''+2A''\,duX\,dwX''+\\+B(dwsY''\,dwsZ+dwsY\,dwsZ'')+B'(dwsX''\,dwsZ+\\+dwsX\,dwsZ'')+B''(dwsX''\,dwsY+dwsX\,dwY'')=0\\2A\,dwsZ'\,dwsZ''+2A\,dusY'\,dwY''+2A''\,duX'\,dwX''+\\+B(dwsY''\,dwsZ'+dwsY'\,dwsZ'')+B'(dwsX''\,dwZ'+\\+dwsX'\,dwsZ'')+B''(dwsX''\,dwsY'+dwX'\,dwY'')=0\end{array}\right.$$

i przydawszy sześć następujących (79)

$$(o)\left\{\begin{array}{l}dwsX\,dwsX'+dwsY.dwsY'+dwsZ.dwsZ'=0\\dwsX.dwsX''+dwsY.dwsY''+dwsZ.dwsZ''=0\\dwsX'.dwsX''+dwsY'.dwsY''+dwsZ'.dwsZ''=0\\dws^2X+dws^2Y+dws^2Z=1\\dws^2X'+dws^2Y'+dws^2Z'=1\\dws^2X''+dws^2Y''+dws^2Z''=1\end{array}\right.$$

będziemy mieli dziewięć równań na wyznaczenie dziewięciu niewiadomych X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''. Wstawiwszy dopiero znalezione dziewięć wartości w równanie (m); to zamieni się na

$$Mx''^2+M'y'^2+M''z''^2+L=0 \quad (p).$$

Aby do tey nayprostszey postaci było przywiedzione równanie (m); wartości dla dziewięciu niewiadomych ilości powinny być rzeczywiste: że takiemi wypadłyby, przekonamy się następującym sposobem.

Ponieważ dziewięć równań (n) (o) są symetryczne, to iest zachowaią swe postaci gdy w każdem zamienimy X, Y, Z, na X′, Y′, Z′ lub X″, Y″, Z″ i odwrotnie; więc gdybyśmy mogli za pomocą tych równań utworzyć inne z samemi X, Y, Z, pozostałoby tylko doyść czy te ilości są rzeczywiste, bo ieśli te więc, według symetryi równań, i innych sześć ilości będą rzeczywistemi. Aby wyrugować X′, Y′, Z′, X″, Y″, Z″ z dziewięciu równań, rozmnożymy pierwsze z równań (n) przez $dwsY''$, drugie przez $dwsY'$ i to od tamtego odciągniemy: wypadnie

$$(q)\quad \begin{aligned} &(2A\,dwsZ+B\,dwsY+B'\,dwsX)\times \\ &(dwsZ'.dwsY''-dwsZ''.dwsY')+ \\ &+(2A''dwsX+B'dwsZ+B''dwsY)\times \\ &(dwsX'.dwsY''-dwsX''.dwsY')\;=o \end{aligned}$$

Rozmnożywszy pierwsze z równań (n) przez $dwsX'$, drugie przez $dwsX'$ i odiąwszy stronami drugie od pierwszego wypadnie

$$(r)\quad \begin{aligned} &(2A.dwsZ+B\,dwsY+B'dwsX)\times \\ &(dwsZ'dwsX''-dwsZ''.dwsX')+ \\ &+(2A'dwsY+B\,dwsZ+B'dwsX)\times \\ &(dwsY'.dwsX''-dwsY''dwsX')=o. \end{aligned}$$

Rozmnożywszy także pierwsze z równań (o) *naprzód* przez $dwsY''$, drugie przez $dwsY'$, *powtóre* pierwsze przez $dwsX''$, drugie przez $dwsX'$ i odiąwszy stronami drugie od pierwszego, otrzymamy

$$(s)\quad \begin{aligned} &dwsX(dwsX'dwsY'-dwsX''dwsY')+ \\ &+dwsZ(dwsZ'dwsY'-dwsZ'dwsY')=o, \end{aligned}$$

$$(t)\quad \begin{aligned} &dwsY(dwsY'dwsX'-dwsY''dwsX')+ \\ &+dwsZ(dwsZ'dwsX'-dwsZ'dwsX')=o. \end{aligned}$$

Wyrugowawszy z czterech równań (q) (r) (s) (t) czynniki w które wchodzą X, Y, Z kreskowane; otrzymamy dwa równania z samemi X, Y, Z bez kresek.

Aby tym dogodniey to wyrugowanie wykonać, naznaczymy czynniki z-ilościami X, Y, Z bez kresek

$$2A\,dwsZ+B\,dwsY+B'\,dwsX=M$$

$$2A''dwsX+B'dwsZ+B''dwsY=P$$

$$2A'dwsY+B\,dwsZ+B''dwsX=N$$

czynniki zaś z kreskowanemi X, Y, Z,

$$dwsZ'dwsY''-dwsY'dwsZ''=T,$$

$$dwsX'dwsY''-dwsY'dwsX''=U,$$

$$dwsZ'dwsX''-dwsX'dwsZ''=V;$$

i równania (q) (r) (s) (t) zamienią się na

$$1^{\circ}\ MT+PU=0,\quad 2^{\circ}\ MV+NU=0$$

$$3^{\circ}\ UdwsX+TdwsZ=0,\quad 4^{\circ}\ UdwsY+VdwsZ=0$$

z których trzeba wyrugować T, U, V. Wstawiwszy wartość T wziętą z pierwszego w trzecie, wypadnie

$$M.dwsX-P.dwsZ=0$$

wstawiwszy wartość V wziętą z drugiego w czwarte, wypadnie

$$MdwsY-NdwsZ=0$$

wyrugowawszy $dwsZ$ z tych dwóch ostatnych, wypadnie

$$PdwsY-NdwsX=0:$$

trzy znalezione równania, przywróciwszy wartości dla M, N, P, zamienią się na

$$(u)\left\{\begin{array}{l} 2(A-A'')dwsXdwsZ+BdwsXdwsY+ \\ \quad +B'(dws^2X-dws^2Z)-B''dwsYdwsZ=0, \\ 2(A-A')dwsYdwsZ+B'dwsXdwsY+ \\ \quad +B(dws^2Y-dws^2Z)-B''dwsXdwsZ=0, \\ 2(A''-A')dwsYdwsX+B'dwsZdwsY+ \\ \quad +B''(dws^2Y-dws^2X)-BdwsXdwsZ=0: \end{array}\right.$$

są one i równanie

$$dws^2X+dws^2Y+dws^2Z=1$$

temi które trzeba nam było znaleźć. Z pierwszych trzech dwa którekolwiek połączone z czwartem będą dostateczne do wyznaczenia trzech niewiadomych X, Y, Z. Aby te niewiadome wyznaczyć naydogodniey i razem przekonać się że są rzeczywistemi, naznaczymy

$$dwsX = m.dwsZ, \quad dwsY = n.dwsZ$$

i, według czwartego, otrzymamy

$$dwsZ = \frac{1}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}}$$

skąd wypadnie

$$dwsX = \frac{m}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}},$$

$$dwsY = \frac{n}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}}.$$

pozostaie nareszcie wyznaczyć wartość dla m, n, a przynaymniey przekonać się że są rzeczywistemi.

W tym zamiarze wstawimy wartości $dwsZ$, $dwsY$, $dwsX$ w dwa pierwsze równania (u) i otrzymamy

$$\left.\begin{array}{l} 2(A-A')n + B(n^2-1) + B'mn - B''m = 0 \\ 2(A-A'')m + B'(m^2-1) + Bmn - B''n = 0 \end{array}\right\} (v)$$

Z tych równań, pierwsze da iedną wartość dla m, drugie da ich dwie gdy n mieć będzie poiedynczą: to samo powiedzielibyśmy o ilości n: gdybyśmy zatem wyrugowali z tych rownań iedną z-ilości m, n; równanie wypadkowe byłoby trzeciego stopnia względem drugiey. Gdyby to równanie ieden tylko miało pierwiastek rzeczywisty, wartości dla $dwsX$, $dwsY$, $dwsZ$ wypadłyby poiedyncze; gdyby ich miało trzy, każda wartość wypadłaby potroyna. W pierwszym razie tylko iedney, w drugim wszystkich trzech, osi możnaby wyznaczyć położenie.

Wiemy że równanie 3go stopnia ma ieden przynaymniey pierwiastek rzeczywisty: przypuśćmy iż oś któreybyśmy wyznaczyli położenie za pomocą tego pierwiastku iest według z'' i że ma położenie dawney osi z: poprowadźmy dwie inne osi y'', x'' przez zaczęcie i na płasczyźnie prostopadłey do z'', pod ką-

tem prostym. Względem tak poprowadzonych osi x'', y'', z'' uczyniwszy takie samo rozumowanie iak względem osi x', y', z'; doydziemy do tych samych co wyżey wypadkow, to iest do równań (u), znaki tylko wypadną różne, lecz na te możemy nie mieć względu. Ponieważ oś z'' czyni, z dawną z, kąt $=$ o, z osiami zaś x, y czyni kąty proste; więc $dws\mathrm{Z}=1$, $dws\mathrm{X}=0$, $dws\mathrm{Y}=0$, i pierwsze z równań (u) zamieni się na $\mathrm{B}'=0$, drugie na $\mathrm{B}=0$, a zatem równanie
$\mathrm{A}z''^2+\mathrm{A}'y''^2+\mathrm{A}''x''^2+\mathrm{B}z''y''+\mathrm{B}'z''x''+\mathrm{B}''x''y''+\mathrm{L}=0$
odnoszone do układu, który uważamy, przeydzie na

$$\mathrm{A}z''^2+\mathrm{A}'y''^2+\mathrm{A}''x''^2+\mathrm{B}''x''y''+\mathrm{L}=0.$$

Uczyniwszy iescze względem tego równania rozumowanie iak w poprzedzaiącym przypadku, doydziemy do równań (u). Równania te będzie można sprawdzić, dawszy nowey osi według z położenie prostopadłe do osi z'': wypadnie $dws\mathrm{Z}=0$, i sprawdzą się dwa pierwsze równania (u). Dwa inne kąty X, Y, które czyni nowa oś według z z dwiema innemi poprzednie naznaczonemi, będą dane przez trzecie z równań (u) które, dla tego że $dws\mathrm{Z}=0$, zamieni się na

$$2(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')dws\mathrm{Y}dws\mathrm{X}+\mathrm{B}''(dws^2\mathrm{Y}-dws^2\mathrm{X})=0$$

przez czwarte które w tym razie iest

$$dws^2\mathrm{X}+dws^2\mathrm{Y}=1$$

i tak pozostaie rozwiązać ten ostatny przypadek Mamy naprzód

$$dws\mathrm{Y}=\pm\sqrt{(1-dws^2\mathrm{X})},\ \text{czyli}\ dws\mathrm{Y}=\pm wst\mathrm{X}$$

kąt więc Y iest dopełnieniem lub spełnieniem kąta X według znaku iaki się utrzyma. Aby ten znak odkryć, wstawmy $wst\mathrm{X}$ za $dws\mathrm{Y}$ w równanie

$$2(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')dws\mathrm{Y}dws\mathrm{X}+\mathrm{B}''(dw^2\mathrm{Y}-dws^2\mathrm{X})=0$$

i podzielmy obie strony przez $dws^2\mathrm{X}$, wypadnie równanie

$$stycz^2\mathrm{X}+\frac{2(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')}{\mathrm{B}''}stycz\mathrm{X}-1=0$$

którego ostatny wyraz ponieważ iest odiemny, wniesiemy 1° iż pierwiastki tego równania są rzeczywiste, 2° iż z dwóch kątow X ieden iest spełnieniem drugiego więc

$$dws\mathrm{X} = - wst\mathrm{X}, \text{ czyli } dws\mathrm{X} = - dws\mathrm{Y}$$

a tak można wyznaczyć kąty Y, X i ieden iest spełnieniem drugiego.

Można więc po ostatney przemianie układu wyznaczyć położenie wszystkich trzech osi, bo trzy pierwiastki równania stopnia trzeciego które nas zatrudnia, są rzeczywiste, a zatem także rzeczywiste wypadną wartości dziewięciu niewiadomych w dziewięć równań (p) i (o) wchodzących: nakoniec równanie powierzchni 2^go^ rzędu maiących środek, może mieć nayprostszą postać

$$\mathrm{M}z^2 + \mathrm{M}'y^2 + \mathrm{M}''x^2 + \mathrm{L} = 0.$$

Gdyby w równaniu ogólnem (1) było $\mathrm{A} = \mathrm{A}' = \mathrm{A}''$, $\mathrm{B} = 0$ $\mathrm{B}' = 0$, $\mathrm{B}'' = 0$, wypadłoby z równań (v), $m = \frac{0}{0}$, $n = \frac{0}{0}$: a zatem powierzchnia którey równanie

$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}} = 0$ ma nieograniczoną liczbę układow osi spółrzędnych prostokątnych.

ROZDZIAŁ DRUGI

O powierzchniach drugiego rzędu uważanych pod względem na ich osi.

259. Równania (u) poprzedzaiącego paragrafu maią tę własność iż za ich pomocą i zmieniaiąc kierunek osi spółrzędnych można zawsze oczyścić równanie

$$\mathrm{A}z^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''x^2 + \mathrm{B}zy + \mathrm{B}'xz + \mathrm{B}''xy +$$
$$+ \mathrm{C}z + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''x + \mathrm{F} = 0 \quad (1)$$

z wyrazow zawieraiących iloczyny zy, xz, xy. Gdybyśmy w poprzedzaiących §§ byli zaczęli rozwiązanie zadania o zmianie układu osi spółrzędnych od zmiany kierunku osi nie zmieniaiąc ich zaczęcia; bylibyśmy doszli do tych samych równań (u), i oczyścilibyśmy równanie (1) ze spomnionych wyrazow: to zatem przeszłoby na

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+Kz+K'y+K''x+F=o \quad (y).$$

W tey postaci należy ono nie tylko do wszelkich powierzchni ale i do płasczyzny gdy tylko będzie $M=o$ $M'=o$, $M''=o$: w szczególności zaś należy do powierzchni które maią środek i które go nie maią.

W każdym razie wystawimy sobie że zaczęcie układu osi do których odnoszone iest równanie (y), znayduie się w środku powierzchni rzeczywistym lub położonym w nieskończoney odległości. Zmieńmy dopiero zaczęcie, zostawiaiąc ten sam kierunek osi i oznaczmy przez a, a', a'' spółrzędne nowego zaczęcia a przez z', y', x' spółrzędne nowe: będzie $z=z'+a$, $y=y'+a$, $x=x'+a''$ i równanie (y) przeydzie na

$$\begin{aligned}&Mz'^2+M'y'^2+M''x'^2+(2Ma+K)z'+\\&+(2M'a'+K')y'+(2M''a''+K'')x'+\\&+Ma^2+M'a'^2+M''a''^2+Ka+K'a'+\\&+K''a''+F=o \quad (y')\end{aligned}$$

które, ieśli należy do powierzchni maiących środek rzeczywisty, będzie można przywieść do postaci

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+L=o$$

a to za pomocą równań

$$2Ma+K=o,\ 2M'a'+K'=o,\ 2M''a''+K''=o,$$

i w tym razie będą rzeczywiste spółrzędne środka

$$a=-\frac{K}{2M},\ a'=-\frac{K'}{2M'},\ a''=-\frac{K''}{2M''}.$$

Jeżeli zaś równanie (y′) ma należyć do powierzchni nie maiących środka, czyli maiących go w nieskończoney odległości; niektóre ze spółrzędnych środka będą nieskończenie wielkie, a tak będzie albo $M=o$, albo $M'=o$, albo $M''=o$: to iest, równanie (y') należyć będzie do powierzchni nie maiących środka gdy w niem braknąć będzie iednego lub dwóch z trzech pierwszych wyrazow zawieraiących drugą potęgę zmiennych x, y, z.

Gdybyśmy nowe zaczęcie którego spółrzędne są a, a', a'' obrali na samey powierzchni, wyraz ostatny równania (y'), to iest

$$Ma^2+M'a'^2+M''a''^2+Ka+K'a'+K''a''+F$$

znaczyłby to samo co pierwsza strona równania (y'), a zatem byłby zerem i równanie (y') zamieniłoby się, opuściwszy kreski i naznaczywszy

$$2Ma+K=H,\ 2M'a'+K'=H',\ 2M''a''+K''=H''$$

na

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+Hz+H'y+H''x=o \quad (y'')$$

to więc ostatnie równanie należy do powierzchni ze środkiem gdy ma trzy pierwsze wyrazy; do powierzchni zaś bez środka gdy z tych wyrazow iednego lub dwóch braknie.

I. *O powierzchniach maiących środek.*

260. Poznamy powierzchnie maiące środek za pomocą równania

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+L=o.$$

Rozwiązawszy to równanie względem którey kolwiek ze zmiennych x, y, z; wypadną dwie wartości równe ze znakami przeciwnemi: a zatem każda z płaszczyzn spółrzędnych dzieli powierzchnią na dwie równe i symetryczne części, zaczęcie zaś spółrzędnych znayduie się w środku powierzchni. Slady płaszczyzn spółrzędnych na powierzchni, zowią się *przecięciami głównemi* a osi powierzchni, które także są osiami spółrzędnych, zowią się *osiami głównemi*.

Przeciąwszy powierzchnią przez płaszczyznę równoodległą od płas: XY w odległości $z=\gamma$, tudzież w odległości $y=\beta$ od XZ, nareszcie w odległości $x=\alpha$ od ZY w każdym razie równoodlegle od płaszczyzn spółrzędnych; przecięcia będą liniiami drugiego rzędu i posłużą do odkrycia postaci powierzchni. Przecięcia te będą różne według różności znakow spółczynnikow M, M′, M″. Biorąc raz na zawsze M za ilość dodatną, mogą być

M′ i M″ 1° *dodatne*, 2° *odiemne*;

3° M′ *dodatne*, M″ *odiemne i odwrotnie*:

aże w którymkolwiek z przypadkow 2° i 3° dwa ze spółczynnikow M, M′, M″ maią znak iednakowy, więc te dwa przypadki wychodzą na ieden i dla tego dość będzie uważać tylko dwa pierwsze, to iest 1° i 2°. Gdy M, M′, M″ będą dodatne naznaczywszy z osobna $z=\gamma$, $y=\beta$, $x=\alpha$, równania przecięć powierzchni będą

$$Mz^2+M'y^2+M''\alpha^2+L=0$$
$$Mz^2+M''x^2+M'\beta^2+L=0 \quad \text{(A)}$$
$$M'y^2+M''x^2+M\gamma^2+L=0$$

Przecięcia te są, iak widzimy, ellipsami których środki znayduią się na osiach x, y, z. Wziąwszy z osobna $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, otrzymamy równania przecięć głównych

$$Mz^2+M'y^2+L=0,\quad Mz^2+M''x^2+L=0,$$
$$M'y^2+M''x^2+L=0$$

Gdyby L było dodatną ilością, przecięcia równoodległe od płaszczyzn spółrzędnych a zatem i powierzchnia byłyby uroione. Gdyby L było $=0$, przecięcia byłyby punktem w zaczęciu położonym. Równanie bowiem, na przykład

$$Mz^2+M'y^2+M''\alpha^2=0$$

w którym wszystkie wyrazy są dodatne, aby się sprawdziło, musi być $z=0$, $y=0$, $\alpha=0$. Gdyby L było odiemną ilością, przecięcia byłyby rzeczywiste lecz w tym razie, $-L+M''\alpha^2$, $-L+M'\beta^2$, $-L+M\gamma^2$

muszą być odiemne, czyli L musi być większe od każdego z wyrazow $M''\alpha^2$, $M\beta^2$, $M\gamma^2$. Gdyby było $L=M''\alpha^2$, $L=M\beta^2$, $L=M\gamma^2$, przecięcia byłyby punktami. Gdyby nareszcie L było mnieysze od każdego z wyrazow $M''\alpha^2$, $M\beta^2$, $M\gamma^2$, przecięcia byłyby uroione. Wszystkie te cechy służą powierzchni zamkniętey: taką więc iest ta którą poznać chcemy. Zowie się ona ELLIPSOIDĄ ponieważ iey przecięcia są ellipsami.

Wziąwszy razem $y=0$; $z=0$ w równaniu ellipsoidy

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+L=0$$

w którem L iest ilością odiemną, wartość wypadaiąca dla x będzie = połowie osi OC według x, którą nazwawszy A, iest

$$A=\pm\sqrt{\frac{L}{M''}}$$

skąd $A^2=\frac{L}{M''}$, $M''=\frac{L}{A^2}$ Wziąwszy razem $z=0$, $x=0$, nakoniec $y=0$, $x=0$; otrzymamy w pierwszym razie (fig. 181)

$$\text{OD czyli } B=\pm\sqrt{\frac{L}{M'}},\ \text{skąd } B^2=\frac{L}{M'},\ M'=\frac{L}{B^2}$$

w drugim

$$\text{OB czyli } C=\pm\sqrt{\frac{L}{M}},\quad C^2=\frac{L}{M},\ M=\frac{L}{C^2}$$

wstawiwszy otrzymane wartości dla M, M′, M″ w równanie ellipsoidy, to zamieni się na

$$\frac{z^2}{C^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1$$

czyli na

$$A^2B^2z^2+A^2C^2y^2+B^2C^2x^2=A^2B^2C^2$$

taka iest postać zwyczayna równania ellipsoidy.

Gdy $A=B$; wszelkie przecięcie od XY równoodległe iest kołem, a zatem z przecięcia według osi OZ wyniknie zawsze iednakowa ellipsa: w tym więc razie ellipsoida może być utworzoną przez obrót ellipsy około osi OZ, i dla tego zowie się *obrotową* (*de revolution*), a iey równanie iest

$$B^2z^2+C^2y^2+C^2x^2=B^2C^2.$$

Gdy nakoniec $A=B=C$; ellipsoida iest kulą a zatem równanie kuli iest

$$x^2+y^2+z^2=A^2$$

261. Wziąwszy L za ilość stałą; C, B, A za zmienne, widzimy według wypadkow

$$M=\frac{L}{C^2};\ M'=\frac{L}{B^2},\ M''=\frac{L}{A^2}$$

że spółczynniki M, M', M'' maleią gdy osi C, B, A, rosną. Gdy więc iedna z osi, na przykład A, stanie się nieskończenie wielką; będzie $M''=o$, ellipsoida zamieni się na WALEC a równanie iego powierzchni będzie

$$Mz^2+M'y^2+L=o.$$

Oznacza ono iż podstawa walca równoodległa od płaszczyzny ZY i każde iego przecięcie, byleby nie według iego osi, iest ellipsą.

Gdy $M=M'$; walec iest prosty, a iego podstawa kołem. Gdy nareszcie $M'=o$, równanie walca zamieni się na $Mz^2+L=o$, skąd $z=\pm\sqrt{\frac{L}{M}}$: w tym więc razie mamy dwie liniie proste równoodległe od płaszczyzny XY, z których iedna iest nad, druga pod tą płaszczyzną.

262. Rozbierzmy teraz przypadek odiemnych spółczynnikow M' i M''. W tym przypadku równanie powierzchni iest

$$Mz^2-M'y^2-M''x^2+L=o$$

równania zaś przecięć równoodległych od płasczyzn spółrzędnych są

$$Mz^2 - M'y^2 - M''\alpha^2 + L = o$$
$$Mz^2 - M''x^2 - M'\beta^2 + L = o \quad (A)$$
$$M'y^2 + M''x^2 - M\gamma^2 - L = o$$

z których dwa pierwsze oznaczaią hyperbole, trzecie ellipsę: nareszcie równania przecięć głównych są

$$Mz^2 - M'y^2 + L = o,\ Mz^2 - M''x^2 + L = o,$$
$$M'y^2 + M''x^2 - L = o \quad (B).$$

Według dwóch pierwszych równań tak (A) iak (B) przecięcia równoodległe od ZY i od ZX, tudzież główne według tych płasczyzn są zawsze rzeczywistemi hyperbolami niezalegle od znaku ilości L.

Według trzeciego z równań tak (A) iak (B), gdy *naprzód* L iest ilością dodatną, przecięcie którego równanie

$$M'y^2 + M''x^2 - (M\gamma^2 + L) = o$$

i główne odpowiadaiące, którego równanie

$$M'y^2 + M''x^2 - L = o$$

pierwsze równoodległe od XY, drugie na płas. XY, są rzeczywistemi ellipsami.

A tak co do przecięć hyperbolicznych, tych oś druga będzie na OZ, (fig. 182) a położenie takie iak NN', *nn'*. Powierzchnią tu odkrytą, nieograniczoną, otaczaiącą w około oś OZ, przecinaiąc płasczyznami równoodległemi od ZX i ZY; pozostałe na niey ślady NN', *nn'* będą hyperboliczne, przecinaiąc zaś równoodlegle od XY przecięcie będzie zawsze ellipsą. Jestto powierzchnia HYPERBOLOIDY O IEDNEY POWŁOCE (à une nappe).

Gdy *powtóre* L iest ilością odiemną; przecięcia równoodległe od XY oznaczone równaniem

$$M'y^2 + M''x^2 - (M\gamma^2 - L) = o$$

są rzeczywistemi ellipsami gdy $M\gamma^2 > L$; są punktem gdy $M\gamma^2 = L$, są uroione gdy $M\gamma^2 < L$ lub gdy $\gamma = o$, więc główne przecięcie którego równanie $M'y^2+M''x^2+L=o$, iest także uroioną ellipsą.

A tak dwa pierwsze równania (A) należą do hyperbol których pierwsze czyli rzeczywiste osi są na OZ (fig. 183), drugie zaś czyli uroione osi są w pierwszym razie na OY w drugim na OX. Według tak odkrytych własności cechuiących powierzchnią, wystawmy sobie hyperboloidę którey przecięcia DBC równoodległe od XZ, i przecięcia D'B'C' równoodległe od YZ są hyperbolami, przecięcia zaś równoodległe od płaszczyzny XY, byle nie między punktami B i B' zawarte, bo ta przestrzeń iest próżną, są ellipsami. Jest to powierzchnia HYPERBOLOIDY O DWOCH POWŁOKACH, (à deux nappes).

Aby równaniu hyperboloidy o iedney powłoce

$$Mz^2-M'y^2-M''x^2+L=o$$

w którem L iest ilością dodatną, nadać postać symetryczną; oznaczymy iey półosi przez A, B, C i, rozumuiąc iak w poprzedzaiącym §, otrzymamy ie

$$A=\pm\sqrt{\frac{L}{M''}},\ B=\pm\sqrt{\frac{L}{M'}},\ C=\pm\sqrt{\frac{-L}{M}}:$$

z tych, półoś C według OZ iest uroiona i równa $C\sqrt{-1}$: otrzymamy daley

$$M''=\frac{L}{A^2},\ M'=\frac{L}{B^2},\ M=\frac{-L}{-C^2}=\frac{L}{C^2}$$

a zatem równanie hyperboloidy o iedney powłoce iest

$$\frac{z^2}{C^2}-\frac{y^2}{B^2}-\frac{x^2}{A^2}=-1$$

lub $\quad A^2B^2z^2-A^2C^2y^2-B^2C^2x^2=-A^2B^2C^2.$

Gdy A=B, hyperboloida iest obrotowa a iey równanie

$$B^2z^2-C^2y^2-C^2x^2=-B^2C^2:$$

powierzchnia ta może być utworzoną przez obrót hyperboli około osi OZ, tak iż z każdego iey przecięcia równoodległego od XY wypada koło, o czem z-iey równania przekonać się można. Aby także równaniu hyperboloidy o dwóch powłokach

$$Mz^2 - M'y^2 - M''x^2 - L = o$$

w którem L iest odiemną ilością, nadać postać symetryczną, oznaczymy tak iak wyżey połosi tey powierchni i otrzymamy ie

$$A = \pm \sqrt{\frac{-L}{M''}}, \quad B = \pm \sqrt{\frac{-L}{M'}}, \quad C = \pm \sqrt{\frac{L}{M}},$$

z tych dwie półosi A i B są uroione a iedna C według OZ iest rzeczywista: równanie więc hyperboloidy o dwóch powłokach wypadnie

$$\frac{z^2}{C^2} - \frac{y^2}{B^2} - \frac{x^2}{A^2} = 1$$

ub $\quad A^2B^2z^2 - A^2C^2y^2 - B^2C^2x^2 = A^2B^2C^2,$

obrotowey zaś, gdy $A = B$,

$$B^2z^2 - C^2y^2 - C^2x^2 = B^2C^2.$$

263. Wyrażenie $A^2 = \frac{L}{M''}$ oznacza iż, gdy $M'' = o$, oś A według x iest nieskończona, a zatem hyperboloida iest WALCEM HYPERBOLICZNYM, tego zaś równanie

$$Mz^2 - M'y^2 + L = o$$

ieżeli L iest dodatną, a

$$Mz^2 - M'y^2 - L = o \text{ lub } M'y^2 - Mz^2 + L = o$$

ieżeli L iest odiemną ilością. Obadwa walce będą miały położenie prostopadłe do płaszczyzny ZY, lecz w pierwszym oś według z w drugim oś według y są uroione.

264. Gdy ilość L dodatna lub odiemna w wyrażenie $C = \frac{L}{M}$ wchodząca, maleć, oś C zbliżać się do zera będzie, zniknie zaś zupełnie gdy L stanie się ze-

rem. W tym razie odległość BB′ (fig. 183) punktem, a hyperbole DBC, D′B′C′ staną się liniiami prostemi ponieważ ich oś rzeczywista iest punktem: hyperboloida nakoniec stanie się OSTROKREGIEM ELLIPTYCZNYM a równanie iego powierzchni iest

$$Mz^2-M'y^2-M''x^2=0$$

265. Można i bezpośrednie dowieść iż równanie

$$Mz^2-M'y^2-M''x^2+L=0$$

należy do hyperboloidy. Przeciąwszy powierzchnią szukaną przez płasczyznę, według osi OZ pionowey do YOX, i nazwawszy r ślad OM (fig. 184) płasczyzny przecinaiącey na XY, równanie tey płasczyzny będzie

$$y=x.stycz\varphi.$$

W tròykącie OMm iest $x=r.dwms\varphi$, $y=r.wst\varphi$. Wstawiwszy te wartości w równanie założone, otrzymamy

$$Mz^2-r^2(M'wst^2\varphi+M''dwms^2\varphi)+L=0$$

równanie hyperboli odnoszone do spółrzędnych x i r, przecięcie zatem iest hyperbolą a powierzchnia hyperboloidą.

Gdy L będzie zerem, równanie to zamieni się na

$$Mz^2-r^2(M'wst^2\varphi+M''dwms^2\varphi)=0$$

skąd $$z=\pm r\sqrt{\left(\frac{M'wst^2\varphi+M''dwms^2\varphi}{M}\right)}$$

aże w tey postaci wyraża dwie liniie proste prowadzone przez zaczęcie na płasczyznie MOZ; więc w razie który uważamy hyperboloida ostrokręgiem a iego powierzchni równanie iest

$$Mz^2-M'y^2-M''x^2=0.$$

Wartość otrzymana dla z oznacza iescze iż liniia tworząca ostrokrąg czyni z osią OZ kąty zmienne według swego położenia, czyli według wartości φ: równanie zaś ostrokręgu, iż przecięcie iego równoodległe od płaszczyzny XY iest ellipsą.

Lecz gdyby było $M'=M''$, wartość $z=\pm r\sqrt{\frac{M'}{M}}$ iako niezawisła od kąta zmiennego φ oznaczałaby iż linija tworząca, w każdem położeniu iednakowo iest pochylona do osi OZ, a zatem ostrokrąg iest prosty i kołowy.

266. Aby się dowiedzieć w-iakiem powinowactwie zostaie ostrokrąg z hyperboloidą, oznaczmy przez z rzędne punktu powierzchni ostrokręgowey a przez z' hyperboloidy, odpowiadaiące iednymże x i y. Zrównań

$Mz^2-M'y^2-M''x^2=0$, $Mz'^2-M'y^2-M''x^2+L=0$

mamy

$$z^2=\frac{M'y^2+M''x^2}{M},\quad z'^2=\frac{M'y^2+M''x^2-L}{M}$$

i $$z-z'=\frac{L}{M(z+z')}.$$

Jeżeli $z>z'$, ostrokrąg iest opisany na hyperboloidzie a to gdy L iest ilością dodatną, ponieważ taką iest $z-z'$. Jeżeli $z<z'$, ostrokrąg iest wpisany w hyperboloidę, a to gdy L będzie ilością odiemną ponieważ taką iest $z-z'$. Im bardziey powiększą się ilości z, z' tym bardziey zmnieyszy się ułomek $\frac{L}{M(z+z')}$ czyli różnica $z-z'$ spółrzędnych odpowiadaiących ostrokręgu i hyperboloidy: powierzchnia więc ostrokręgu względem powierzchni hyperboloidy, iest tem czem asymptota względem hyperboli.

267. Zobaczymy nareszcie iż hyperboloida o iedney powłoce może być utworzoną przez obrót li-

nii prostey. Przeciąwszy hyperboloidę przez płaszczyznę równoodległą od ZY czyli prostopadłą do osi OX; przecięcie, iakeśmy widzieli, będzie hyperbolą którey równanie iest

$$Mz^2 - M'y^2 - M''\alpha^2 + L = 0.$$

Tu mogą być dwa przypadki: 1°, $-M''\alpha^2 + L > 0$, 2°, $-M''\alpha^2 + L = 0$. W pierwszym oś OY przecięcia hyperbolicznego iest rzeczywistą, OZ uroioną: w drugim obwód hyperboli przecinaiącey iest liniią prostą a tey równanie

$$z = \pm y \sqrt{\frac{M'}{M}}. \quad \text{(m)}$$

Liniia ta znaydować się będzie na płaszczyźnie równoodległey od ZY czyli prostopadłey do osi OX: można więc przeciąć hyperboloidę o iedney powłoce tak iż ślad przecięcia będzie liniią prostą.

Z równania $-M''\alpha^2 + L = 0$, wypada $\alpha = \pm \sqrt{\frac{L}{M''}}$.

aże (262) $A = \pm \sqrt{\frac{L}{M''}}$, więc obwód hyperboli przecinaiącey iest liniią prostą wtenczas gdy α równe iest połowie A osi według x: a tak płaszczyzna przetnie oś x w-iey końcu C (fig. 182) i ten iest zaczęciem spółrzędnych do których odniesiemy równanie (m): czyli liniia prosta tworząca powierzchnią hyperboloidy przechodzi przez punkt C, pod kątem pochyłości do płaszczyzny XY którego styczna $= \sqrt{\frac{M'}{M}}$, nad i pod płaszczyzną XY.

Wartość podwóyna α oznacza iż takąż liniią prostą poprowadzić można na hyperboloidzie i przez drugi koniec osi A, ta zaś liniia będzie równoodległą od pierwszey ponieważ iedno równanie służy obudwom.

Chcąc tedy sporządzić materyialną hyperboloidę obrotową o iedney powłoce, nakreślilibyśmy dwa koła równe na dwóch płaszczyznach od siebie równoodległych: podzielilibyśmy każdy okrąg na 100, naprzykład, równych części: poprowadzilibyśmy liniie proste od punktow podziału iednego okręgu do punktow odpowiadaiących drugiego pod pochyłością dobraną i tak aby te liniie były zawsze równoodległe od iedney z płaszczyzn spółrzędnych pierwszych *np* ZY, koła zaś zostały horizontalne. Mieyscem geometrycznem wszystkich tych liniy, będzie hyperboloida obrotowa o iedney powłoce.

II. *O powierzchniach nie maiących środka.*

268. Powierzchnie nie maiące środka wyprowadzimy z równania (259)

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+Hz+H'y+H''x=0.$$

Widzieliśmy, iż w razie który uważamy, ieden lub dwa ze spółczynnikow M, M', M'' muszą być=0. Roztrząśniemy więc dwa przypadki: 1° gdy ieden, 2° gdy dwa z tych spółczynników są=0. Przypuściwszy iż Mz^2 zostaie w równaniu i ma zawsze znak dodatny: rozbiór następuiący ściągać się będzie tylko do spółczynnikow M' i M''.

Pierwszy przypadek M''=0. Widzieliśmy (259) iż zmieniwszy zaczęcie spółrzędnych, zostawiaiąc ten sam kierunek, i nazwawszy a, a', a'' spółrzędne nowego zaczęcia iest

$$H=2Ma+K,\quad H'=2M'a'+K',\quad H''=2M''a''+K''.$$

Z tych równań trzecie daie H''=K'' ponieważ M''=0; a zatem, po przemianie, wyraz założonego równania zawieraiący x utrzyma się. Co się tyczy dwóch innych wyrazow zawieraiących z i y; będzie można naznaczyć H czyli $2Ma+K=0$, H' czyli $2M'a'+K'=0$, i równanie założone zamieni się na

$$Mz^2 + M'y^2 + H''x = o.$$

Biorąc z osobna x, y, z za ilości stałe; równania przecięć równoodległych od płaszczyzn YZ, XZ, XY będą

$$Mz^2 + M'y^2 + H''\alpha = o$$
$$Mz^2 + H''x + M'\beta^2 = o \quad (B)$$
$$M'y^2 + H''x + M\gamma^2 = o$$

z których dwa ostatne oznaczaią przecięcia paraboliczne i są zawsze rzeczywiste: pierwsze zaś oznacza przecięcie elliptyczne gdy M i M′ maią znaki iednakowe, hyperboliczne zaś gdy M i M′ maią znaki różne. Wziąwszy $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$; równania przecięć głównych będą

$$Mz^2 + M'y^2 = o, \quad Mz^2 + H''x = o, \quad M'y^2 + H''x = o$$

z których pierwsze wyraża punkt gdy M i M′ maią znaki równe, lub dwie linie gdy M i M′ maią znaki przeciwne, dwa inne równania wyrażaią przecięcia paraboliczne.

1° M′ *dodatne.* Gdy M i M′ są dodatne, $H''\alpha$ odiemne; pierwsze z równań (B) wyraża ellipsę, i w tym razie H″ i α muszą mieć znaki przeciwne. Jeśli H″ iest dodatne, α będzie odiemne, czyli powierzchnia ciągnąć się będzie tylko w stronie odiemnych x. Gdy H″ iest odiemne, α będzie dodatne, czyli powierzchnia ciągnąć się będzie tylko w stronie dodatnych x.

Weźmy z tych przypadkow ten w którym H″ iest dodatne: powierzchnia ma w tym razie położenie takie iak BOB′ (fig. 185), a iey przecięciem równoodległem od ZY iest według pierwszego z równań (B) ellipsa BxB′, przecięciami zaś równoodległemi od XZ, YX są według dwóch ostatnych równań (B), parabole.

Gdy H″ iest odiemne, powierzchnia będzie się ciągnęła w stronie dodatnych x nad i pod płaszczyzną XY z obudwóch stron płaszczyzny XZ: iey przecięciem równoodległem od ZY iest ellipsa EE′, (fig. 186) przecięciami zaś równoodległemi od dwóch innych płasczyzn spółrzędnych są parabole.

W obudwóch razach iest równanie

$$Mx^2+M'y^2+H''x=o$$

powierzchni PARABOLOIDY ELLIPTYCZNEY.

2° M' *odiemne.* Równanie powierzchni w tym razie iest

$$Mz^2-M'y^2+H''x=o:$$

równania przecięć równoodległych od płasczyzn ZY, ZX, XY są

$$Mz^2-M'y^2+H''\alpha=o$$

$$Mz^2+H''x-M'\beta^2=o$$

$$M'y^2-H''x-M\gamma^2=o$$

z których pierwsze oznacza iż przecięcie powierzchni równoodległe od ZY iest hyperbolą MCN, *mcn*, (fig. 187) drugie iż przecięcie równoodległe od ZX iest parabolą AOA' położoną w stronie odiemnych x, trzecie iż przecięcie równoodległe od XY iest parabolą BOB' w stronie dodatnych x. A tak powierzchnia PARABOLOIDY HYPERBOLICZNEY złożona iest z dwóch powłok AOA', BOB' stykaiących się w punkcie O.

Równania przecięć głównych są

$$Mz^2-M'y^2=o,\quad Mz^2+H''x=o,\quad M'y^2-H''x=o$$

z tych pierwsze daie

$$z=\pm y\sqrt{\frac{M'}{M}}$$

i oznacza iż z przecięcia powierzchni przez płasczyznę ZY wynikaią dwie liniie proste przechodzące przez zaczęcie nad i pod osią OY. Niech będą takiemi liniiami L*l*, L'*l'*: ponieważ kąty wierzchołkiem przeciwległe, między temi liniiami zawarte, są równe; więc powierzchnia ma dwie powłoki ciągnące się w strony sobie przeciwne. Co do dwóch innych równań, iedno $Mz^2 + H''x = o$ oznacza iż przecięcie główne według płaszczyzny ZX daie parabolę w stronie odiemnych x, drugie zaś $M'y^2 - H''x = o$, iż przecięcie główne według płaszczyzny XY daie także parabolę w stronie dodatnych x.

Nareszcie, ponieważ w równaniu $Mz^2 - M'y^2 + H''\alpha = o$ może α być *dodatną* lub *odiemną*, H'' zostaiąc dodatną ilością; więc hyperbole równoodległe od ZY będą miały w pierwszym razie pierwszą czyli rzeczywistą oś CC' równoodległą od OY, w drugim rzeczywista oś AA' hyperbol PAP', $pA'p'$ będzie równoodległą od OZ: odnogi PAP', $pA'p'$ zamienią się na linie proste Ll, $L'l'$ gdy przecięcie będzie według płaszczyzny ZY. Można więc poprowadzić liniie proste na powierzchni paraboloidy hyperboliczney.

Nie można tak łatwo nadać postać symetryczną równaniom paraboloid iak ellipsoid i hyperboloid. Równania bowiem paraboloid, które nie maią ani środka ani osi skończonych są odnoszone tylko do osi spółrzędnych prostokątnych poczynaiących się na powierzchni, i dla tegoto obraliśmy w § 259 zaczęcie osi spółrzędnych na powierzchni chcąc znaleźć równanie (y''). Z resztą w dziale następuiącym mieć będziemy prostsze równania paraboloid.

269. *Drugi przypadek* $M' = o$. $M'' = o$. W tym razie równanie

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + Hz + H'y + H''x = o$$

zamieni się na

$$Mz^2 + H'y + H''x = o \quad (c)$$

bo H może zniknąć iakeśmy widzieli na początku § poprzedzaiącego. Aby się dowiedzieć iakie powierzchnie to równanie oznacza, weźmiemy w niem z osobna x, y, z za ilości stałe i otrzymamy

$$Mz^2 + H'y + H''\alpha = o$$

$$Mz^2+H''x+H'\beta=0$$
$$H'y+H''x+My^2=0$$

równania przecięć, powierzchni szukanych, według płaszczyzn równoodległych od ZY, ZX, YX, z których dwa pierwsze oznaczaią parabole, trzecie liniią prostą, więc równanie (c) oznacza powierzchnią WALCA PARABOLICZNEGO.

Równania przecięć głównych są

$$Mz^2+H'y=0,\ Mz^2+H''x=0.\ H'y+H''x=0$$

dwa pierwsze oznaczaią parabolę, trzecie liniią prostą. Styczna trygonometryczna tey linii prostey iest zawsze $=\frac{H''}{H'}$, więc można uważać powierzchnią walca parabolicznego za utworzoną przez liniią prostą obracaiącą się około dwóch parabol tak iż zawsze zostaie równoodległą od pierwiastkowego swego położenia pochylonego do osi OX pod kątem którego styczna trygonometryczna $=\frac{H''}{H'}$.

Wziąwszy za oś spółrzędnych liniią równoodległą od tey która tworzy powierzchnią walca, będzie można nadać prostszą postać równaniu tey powierzchni. W tym zamiarze zmienimy osi OX, OY nie zmieniaiąc OZ, kąta ani zaczęcia, oznaczymy przez α kąt który ma czynić nowa oś OX' z dawną OX a wartości (5o. 5o)

$$x=x'.dws\alpha-y'.wst\alpha,\quad y=x'.wst\alpha+y'.dws\alpha$$

wstawiwszy w równanie (c), otrzymamy

$$Mz^2+(H'dws\alpha-H''wst\alpha)y'+$$
$$+(H'wst\alpha+H''dws\alpha)x'=0.$$

Aby to równanie oczyścić ze zmienney x'; naznaczymy

$$H'wst\alpha+H''dws\alpha=0$$

skąd $\quad styczα=-\frac{H''}{H'}.$

Ten wypadek oznacza iż nowa oś OX' iest równoodległą od linii tworzącey: w tym razie równanie walca parabolicznego iest

$$Mz^2+(H'dwsa-H''wsta)y'=0$$

czyli krocey

$$Mz^2+Ny=0.$$

270. W ogólności sposób dochodzenia postaci powierzchni drugiego rzędu za pomocą danego równania, polega na odkryciu linii krzywey iaka wypadnie, przeciąwszy przez płasczyznę powierzchnią szukaną. Sposób ten można iescze tak wyłożyć.

Widzieliśmy (§ 80. str. 91) iż, chcąc przeyść z układu spółrzędnych x, y, z prostokątnych, do innego spółrzędnych x', y', z' także prostokątnych, wyznaczenie położenia trzech nowych osi zawisło od dwóch następuiących ilości: 1° kąta θ który płasczyzna X'Y' czyni z pł. XY, 2° kąta ψ który oś OX czyni ze śladem pł. X'Y' zostawionym na płasczyźnie XY i wziętym za nową oś OX': zaczęcie nareszcie zatrzymawszy to samo, znaleźliśmy spółrzędne dawne w funkcyi tych ilości i spółrzędnych nowych

$$x=x'.dws\psi+y'.dws\theta wst\psi+z'.wst\theta wst\psi$$
$$y=-x'.wst\psi+y'.dws\theta dws\psi+z'.wst\theta.dws\psi$$
$$z=-y'.wst\theta+z'.dws\theta.$$

To założywszy, weźmy na płasczyźnie, przecinaiącey powierzchnią i przechodzącey przez zaczęcie, osi nowe OX', OY' trzecią zaś OZ' do tych prostopadłą. Równanie płasczyzny przecinaiącey i iey śladu na powierzchni, będzie

$$z'=0$$

a zatem trzy ostatne równania, zmieniwszy nadto zaczęcie którego spółrzędne nazwiemy a, b, c, przeydzie na

$$x=a+x'.dws\psi+y'.dws\theta wst\psi$$
$$y=b-x'.wst\psi+y'.dws\theta dws\psi$$
$$z=c-y'.wst\theta.$$

Wstawiwszy te wartości x, y, z w równanie

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+Hz+H'y+H''x=o$$

otrzymamy następuiące linii drugiego rzędu, według iakiey można przeciąć powierzchnią szukaną, równanie

$$(M.wst^2\theta+M'.dws^2\theta dws^2\psi+M''.dws^2\theta wst^2\psi)y'^2$$
$$+(M'.wst^2\psi+M''.dws^2\psi)x'^2+2(M''-M')d\psi d\theta w\psi.x'y'$$
$$+[(2M''a+H'')d\theta w\psi+(2M'b+H')d\theta d\psi-(2Mc+H)w\theta]y'$$
$$+[(2M''a+H'')dws\psi-(2M'b+H')wst\psi]x'$$
$$+Mc^2+M'b^2+M''a^2+Hc+H'b+H''a=o$$

które ma tę samą postać co równanie ogólne (88)

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F=o$$

liniy drugiego rzędu: można więc wyznaczyć postać linii krzywey wypadaiącey z przecięcia powierzchni płaszczyzną i postać samey powierzchni. Można także wynaleźć dla kątow θ i ψ, od których zawisło położenie płaszczyzny przecinaiącey, wartości potrzebne do otrzymania takiey linii drugiego rzędu iaka wypaść może z przecięcia powierzchni. Aby na przykład tą liniią był okrąg koła; muszą spółczynniki kwadratow y'^2, x'^2 być równe co do wartości i co do znakow, równania więc

$$M.wst^2\theta+M'dws^2\theta dws^2\psi+M''dws^2\theta wst^2\psi-M'wst^2\psi$$
$$-M''dws^2\psi=o$$

$$dws\psi dws\theta wst\psi=o$$

posłużą w tym razie do wyznaczenia wartości kątow θ i ψ. Sprawdzi się drugie wziąwszy $dws\theta=o$, skąd $wst\theta=1$, i pierwsze zamieni się na

$$M-M'.wst^2\psi-M''.dws^2\psi=o$$

czyli $$M(1+stycz^2\psi)-M'stycz^2\psi-M''=o$$

skąd $$stycz\psi=\sqrt{\left(\frac{M''-M}{M-M'}\right)}.$$

A tak aby z przecięcia powierzchni wynikło koło, musi kąt θ pochyłości płaszczyzny przecinaiącey do płaszczyzny XY być prosty a styczna kąta ψ który czyni oś OX′ z osią OX ma być $= \sqrt{\left(\frac{M''-M}{M-M'}\right)}$, ta zaś styczna będzie rzeczywistą gdy ilość $\frac{M''-M}{M-M'}$, iest dodatną. Nie może więc być $M''=M'$ ponieważ owa ilość byłaby odiemną: aże równanie $M''=M'$ oznacza powierzchnią obrotową około osi OZ, więc w razie obecnym nie można przeciąć powierzchni obrotowey według koła, chyba że będzie $M=M'=M''$, bo w ten czas wypadnie *stycz*$\psi=0$, skąd $\psi=0$ albo $\psi=200^\circ$, co znaczy iż tylko kulę można przeciąć płaszczyzną według iakieykolwiek pochyłości do XY a zawsze z przecięcia wyniknie koło, albo, iż tylko w tenczas otrzymamy koło z przecięcia powierzchni obrotowey iakieykolwiek, gdy przecięcie będzie równoodległegle od pł. XY czyli prostopadłe do osi obrotu OZ.

Przez podobne rozumowania, możnaby dowieść że, z przecięcia ostrokręgu prostego, wypadną, według różnych pochyłości płaszczyzny przecinaiącey do płaszczyzny XY, ellipsa, hyperbola i parabola.

ROZDZIAŁ TRZECI

O płaszczyźnie styczney z powierzchnią drugiego rzędu.

271. Ponieważ liniia styczna ieden tylko punkt ma spólny z liniią krzywą drugiego rzędu; wypada z poznanych własności powierzchni tegoż rzędu że przez punkt wzięty na powierzchni tego rodzaiu, można prowadzić nieograniczoną liczbę liniy prostych które ten tylko iedyny punkt mieć będą spólny z powierzchnią. Aże można ten punkt dotknięcia uważać za punkt fizyczny, więc owe liniie styczne

prostopadłemi są do iedneyże linii prostey, a ich mieyscem geometrycznem iest płaszczyzna, która także ieden tylko ów punkt ma spólny czyli iest styczną z powierzchnią.

Aby znaleźć równanie takowey płaszczyzny, oznaczymy przez x', y', z' spółrzędne punktu dotknięcia, i w tym razie równanie powierzchni 2go rzędu

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Cz+C'y+C''x+L=o \quad (1)$$

przeydzie na

$$Az'^2+A'y'^2+A''x'^2+Cz'+C'y'+C''x'+L=o \quad (2)$$

Poprowadźmy przez punkt dotknięcia liniią prostą pod iakiemkolwiek nachyleniem: iey równania będą

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z')$$

a w tych a, b oznaczaią styczne trygonometryczne kątow które, rzuty linii prostey na płaszczyzny XZ, YZ, czynią z osią OZ.

To założywszy, szukaymy równania ze spółrzędnemi x, y, z punktu któregokolwiek powierzchni i x', y', z' punktu dotknięcia a znalezione równanie, wyrażaiąc powinowactwo między punktami powierzchni i punktem dotknięcia, będzie należało do płaszczyzny styczney. W tym zamiarze wstawimy wartość L wziętą z równania (2) w równanie (1) i wypadnie równanie

$$A(z^2-z'^2)+A'(y^2-y'^2)+A''(x^2-x'^2)+$$
$$+C(z-z')+C'(y-y')+C''(x-x')=o \quad (3)$$

którego summę wyrazow dodatnych naznaczywszy $=o$; otrzymamy równanie powierzchni 2go rzędu ze zmiennemi x, y, z za pomocą którego można wyznaczać punkta powierzchni nadaiąc zmiennym x, y wartości stałe. Także summę wyrazow odiemnych naznaczywszy $=o$ otrzymamy równanie potrzebne do wyznaczenia punktu dotknięcia. Złączenie więc tych równań w-iedno, to iest równanie (3) oznacza liniią prostą która przez owe dwa punkta przechodzi i powierzchnią przecina. A ponieważ spółrzędne x, y, z

są zmienne; x', y', z' stałe, więc (3) iest równaniem wszystkich siecznych, czyli ich mieysca geometrycznego, płaszczyzny przecinaiącey powierzchnią. Aby równanie (3) wyrażało tę okoliczność iż wszystkie sieczne leżą na iedney płaszczyźnie, nadamy mu postać

$$A(z+z')(z-z')+A'(y+y')(y-y')+A''(x+x')(x-x')$$
$$+C(z-z')+C'(y-y')+C''(x-x')=0$$

wstawimy w nie wartości $x-x'$, $y-y'$ wzięte z równań linii prostey, i podzielimy przez $z-z'$ obiedwie iego strony: wypadnie

$$A(z+z')+A'b(y+y')+A''a(x+x)+$$
$$C+C'b+C''a=0$$

równanie płasczyzny przecinaiącey powierzchnią i utworzoney przez obrót linii prostey około punktu stałego. Niech dopiero płasczyzna, obracaiąc się około punktu dotknięcia wychodzi z głębi powierzchni. W tym razie spółrzędne x, y, z będą się zbliżały do spółrzędnych x', y', z', a gdy im staną się względnie równe; płasczyzna styczną a tey równanie będzie

$$2Az'+2A'by'+2A''ax'+C+C'b+C''a=0$$

czyli, wyrugowawszy ilości a, b, za pomocą równań linii prostey,

$$(2Az'+C)(z-z')+(2Ay'+C')(y-y')+$$
$$+(2A''x'+C'y')(x-x')=0$$

czyli nareszcie, rozwinąwszy i używszy równania (2),

$$(2Az'+C)z+(2A'y'+C')y+(2A''x'+C'')x+$$
$$+Cz'+C'y'+C''x'+2L=0 \quad (4)$$

ta iest nayogólnieysza postać równania płasczyzny styczney z powierzchnią 2go rzędu.

Gdy powierzchnia ma środek a ten weźmiemy za zaczęcie osi spółrzędnych; będzie $C=0$, $C'=0$, $C''=0$ a zatem równanie płasczyzny styczney z taką powierzchnią iest

$$Azz'+A'yy'+A''xx'+L=0 \quad (5).$$

272. Aby utworzyć równanie linii *normalney* do powierzchni, zważymy *naprzód* iż ta liniia ma przechodzić przez punkt dotknięcia płaszczyzny styczney, a zatem równania normalney są w ogólności

$$x-x'=a'(z-z'), \quad y-y'=b'(z-z')$$

powtóre iż ma być prostopadłą do teyże płaszczyzny daney przez równanie (4), a zatem sprawdzić się muszą warunki prostopadłości (74, 1°)

$$2A''x'+C''=a'(2Az'+C'), \quad 2A'y'+C'=b'(2Az'+C):$$

z których wypada

$$a'=\frac{2A''x'+C''}{2Az'+C}, \quad b'=\frac{2A'y'+C'}{2Az'+C}.$$

Wstawiwszy wartości a' i b' w równania normalney; te zamienią się na

$$x-x'=\frac{2A''x'+C''}{2Az'+C'}(z-z'),$$

$$y-y'=\frac{2A'y'+C'}{2Az'+C}(z-z')$$

1°. Gdy powierzchnia ma środek, równania normalney są

$$x-x'=\frac{A''x'}{Az'}(z-z'), \quad y-y'=\frac{A'y'}{Az'}(z-z')$$

2° Gdy nadto powierzchnia iest obrotową około osi OY; iest $A''=A$, a zatem równania normalney są

$$x-x'=\frac{x'}{z'}(z-z'), \quad y-y'=\frac{A'y'}{Az'}(z-z').$$

Z tych pierwsze, dla tego że ie można obrócić na

$$x=\frac{x'}{z'}z,$$

oznacza iż rzut normalney na płaszczyznę XZ przechodzi przez zaczęcie, sama zaś normalna przez oś obrotu OY, a tak normalne do powierzchni obrotowey, przedłużywszy ie, przetną oś obrotu.

3° W równaniu powierzchni kuli iest $A=A'=A''$, a zatem równania normalney do kuli są

$$x-x'=\frac{x'}{z'}(z-z'),\ y-y'=\frac{y'}{z'}(z-z')$$

czyli

$$xz'=x'z,\ yz'=y'z,\ \text{skąd}\ x=\frac{x'}{z'}z,\ y=\frac{y'}{z'}z$$

nareszcie wyrugowawszy z, $y=\frac{y'}{x'}x$. Trzy ostatne wyrażenia oznaczaią iż rzuty normalney na płaszczyzny spółrzędne XZ, YZ, YX, a zatem i normalna, przechodzą przez zaczęcie wzięte w środku kuli.

273. Aby dowieść że powierzchnia hyperboloidy o iedney powłoce dotkniętą iest przez płaszczyznę styczną według dwóch liniy prostych; z czterech następuiących równań

$$\begin{aligned}
&1^{o}\ Az^2-A'y^2-A''x^2+L=0\\
&2^{o}\ Azz'-A'yy'-A''xx'+L=0\\
&3^{o}\ Az'^2-Ay'^2-A''x'^2+L=0\\
&4^{o}\ y-y'=a(x-x')
\end{aligned}$$

(z których ostatne wyraża rzut na płaszczyznę XY linii prostey łączącey punkta spólne powierzchni hyperboloidy i płaszczyzny styczney, ieśli ich więcey nad ieden maią) wyruguiemy x, y, z w zamiarze otrzymania równania ze spółrzędnemi x', y', z' punktu dotknięcia. Za pomocą tak otrzymanego równania będziemy mogli odkryć własności punktow dotknięcia. Rozmnożywszy wyrazy równania (2) przez -2 i dodawszy ie do summy odpowiadaiących wyrazow 1go i 3go; wypadnie

$$A(z-z')^2-A'(y-y')^2-A''(x-x')^2=0 \quad (A).$$

Odiąwszy stronami równanie (3) od (2), wypadnie

$$Az'(z-z')-A'y'(y-y')-A''x'(x-x')=0,$$

skąd $$A(z-z')^2 = \frac{[A'y'(y-y')+A''x'(x-x')]^2}{Az'^2}:$$

wstawiwszy tę wartość $A(z-z')^2$ w równanie (A), otrzymamy

$$[A'y'(y-y')+A''x'(x-x')]^2$$
$$-AA'z'^2(y-y')^2-AA''z'^2(x-x')^2=0:$$

wstawiwszy nakoniec w to równanie wartość $y-y'$ wziętą z równania (4), otrzymamy z samemi x', y', z' równanie

$$(A'ay'+A''x')^2-AA'a^2z'^2-AA''z'^2=0$$

które, ułożywszy względem a, przeydzie na
$$A'(A'y'^2-Az'^2)a^2+2A'A''y'x'a+A''(A''x'^2-A'z^2)=0$$
czyli, na mocy równania (3), na

$$A'(L-A''x'^2)a^2+2A'A''y'x'a+A''(L-A'y'^2)=0$$

i da

$$a = \frac{-A'A''y'x' \pm \sqrt{[A'A''L(A'y'^2+A''x'^2-L)]}}{A'(L-A''x'^2)}$$

czyli, na mocy równania (3),

$$a = \frac{-A'A''y'x' \pm \sqrt{(AA'A''Lz'^2)}}{A'(L-A''x'^2)}.$$

Ta podwóyna wartość a iest rzeczywistą bo iloczyn $AA'A''$ tak iak i L są dodatne: a zatem równanie (4) służy dwom liniiom prostym rzeczywistym po których prowadzona płaszczyzna dotyka się powierzchni hyperboloidy o iedney powłoce.

274. Aby poprowadzić płaszczyznę styczną z powierzchnią drugiego rzędu przez punkt za powierzchnią dany którego spółrzędne oznaczymy przez x'', y'', z'', musielibyśmy rozwiązać, oznaczywszy przez x', y', z' spółrzędne punktu dotknięcia, dwa równania

$$(2Az'+C)z''+(2A'y'+C')y''+(2A''x'+C')x''+$$
$$+Cz'+C'y'+C''x'+2L=0,$$
$$Az'^2+A'y'^2+A''x'^2+Cz'+C'y'+C''x'+L=0:$$

aże te nie są dostateczne do wyznaczenia trzech niewiadomych x', y', z'; więc przez punkt dany za powierzchnią można prowadzić nieograniczoną liczbę płaszczyzn stycznych z powierzchnią drugiego rzędu. W tym razie, mieyscem geometrycznem wszystkich punktow dotknięcia będzie liniia 2go rzędu. Wyrugowawszy bowiem x' lub y' z równań (1) i (2) otrzymalibyśmy w pierwszym razie równanie rzutu tey linii krzywey na płaszczyznę ZY, w drugim na płaszczyznę XZ te zaś wypadkowe równania byłyby 2go stopnia. Liniia krzywa dotknięć iest ta sama według którey dotykałaby się powierzchnia powłoki ostrokręgu utworzonego przez liniią prostą opieraiącą się na punkcie danym zewnętrznym i przebiegaiącą punkta dotknięcia.

Można wyznaczyć położenie płaszczyzny styczney, gdy będzie dany drugi punkt przez który ma przechodzić. Oznaczywszy bowiem przez x''', y''', z''' spółrzędne tego punktu, mamy równanie

$$(2Az'+C)z'''+(2A'y'+C)y'''+(2A''x'+C'')x'''+$$
$$+Cz'+C'y'+C''x'+2L=0$$

które i dwa poprzedzaiące posłużą do wyznaczenia niewiadomych x', y', z'.

Można otrzymać podobne wypadki, założywszy iż płaszczyzna styczna ma przechodzić przez liniią prostą daną przez równania

$$x-x''=a(z-z''),\quad y-y''=b(z-z'')$$

w których a i b są wiadome. Ponieważ x'', y'', z'' maią sprawdzić równanie płaszczyzny styczney (4), więc warunkiem pod iakim linia dana znayduie się na płaszczyźnie styczney iest równanie (73)

$$Az' + A'by' + A''ax' = 0$$

które i dwa powyższe są dostateczne do wyznaczenia niewiadomych x', y', z', aże równanie (4) iest 2go stopnia, więc dla x', y', z' wypadną podwóyne wartości, czyli przez daną liniią prostą można poprowadzić dwie płaszczyzny styczne z powierzchnią 2go rzędu.

DZIAŁ DRUGI

O TWORZENIU RÓWNAŃ WYRAŻAIĄCYCH NAZNACZONĄ WŁASNOŚĆ POWIERZCHNI DRUGIEGO RZĘDU.

275. Aby rzecz, którą przedsiębierzemy, zacząć od nayprostszego iuż skądinąd wiadomego zadania i nadać iednostayność wykładowi obecney materyi która iest odwrotną względem materyi działu poprzedzaiącego; utworzymy naprzód według naznaczoney własności, równanie powierzchni pierwszego rzędu czyli płaszczyzny.

Niech będą BD i CD (fig. 188) dwie linie w przestrzeni, przechodzące przez punkt D obrany na osi OZ. Przez punkt M wzięty na płasczyźnie zakończoney temi dwiema liniiami, poprowadźmy inną płasczyznę ABC równoodległą od XY: iey ślad BC będzie równoodległy od XY. Można więc uważać płasczyznę CDB za utworzoną przez liniią prostą odprawiaiącą bieg po liniiach DB, DC tak, iż w każdem swoiem położeniu iest równoodległą od XY, a zatem równanie linii tworzącey BC za równanie płasczyzny.

Aby znaleźć równanie linii BC naznaczmy spółrzędne punktu M, AP$=x$, PM$=y$, AO$=z$. Naznaczmy daley AB$=x'$, AC$=y'$: równania śladow DB, DC, będą według tego naznaczenia

$$z=ax'+c,\ z=by'+c \quad (1)$$

w których c oznacza rzędną OD. Równanie linii BC przechodzącey przez punkt B, którego spółrzędne $y=0$, $x=x'$, iest

$$y=a'(x-x')$$

a, iako przechodzącey przez punkt C, którego spółrzędne $y=y'$; $x=0$, iest

$$y-y'=a'x, \text{ skąd } a'=\frac{y-y'}{x}:$$

gdy tę wartość a' wstawimy w równanie poprzedzaiące, otrzymamy

$$y=-\frac{y'}{x'}x+y'$$

w to zaś wstawiwszy wartości x', y' wzięte z równań (1), otrzymamy równanie płasczyzny

$$z=by+ax+c$$

I. POWIERZCHNIE WALCOWE.

276. Wystawmy sobie w przestrzeni dwie liniie zB i $z'C$, (fig. 189) któreby przecinały oś OZ w punktach z i z', i prowadźmy przez nie płasczyzny ABC równoodległe od XY. Liniia CB łącząca dwa punkta C i B w których płasczyzna ACB przecina dwie liniie zB i $z'C$, będzie równoodległą od pł. XY. Według tego założenia niech liniia CB odprawia bieg po liniiach zB i $z'C$, na których się opiera, tak iż w każdem położeniu iest równoodległą od płasczyzny XY: w tym biegu zakreśli w przestrzeni pewną powierzchnią krzywą.

Powierzchnie krzywe utworzone przez liniią prostą, ruchomą według pewnego prawidła, iak na przykład w obecnym razie, nazywaią się *powierzchniami wichrowatemi* (surfaces gauches). Zmieniaiąc gatunek i położenie liniy zB, $z'C$ byleby te zawsze przecinały oś OZ w dwóch punktach, zmieniać się będą i powierzchnie wichrowate, utworzone przez liniią prostą odprawiaiącą bieg po liniiach zB i $z'C$ prostych lub krzywych na których opiera się tak iż w swym biegu iest zawsze równoodległą od płasczyzny XY.

Założywszy iż liniie zB i $z'C$ są proste, przedsięweźmy doyść co za powierzchnia utworzona iest tym sposobem przez liniią prostą CB. W tym zamiarze oznaczmy przez x', odciętą punktu B, przez y' rzędną punktu C: równanie linii

zB iest $z=ax'+c$

$z'C$. $z=by'+c'$

CB . $y=-\dfrac{y'}{x'}x+y'$ (275)

x, y, z oznaczaią tu spółrzędne iakiegokolwiek punktu M powierzchni. Wstawiwszy w ostatne równanie wartości y', x' wzięte z dwóch poprzedzaiących; otrzymamy równanie powierzchni

$$z^2-byz-axz-(c+c')z+bcy+ac'x+cc'=0 \quad (A)$$

które oznacza iż powierzchnia szukana iest drugiego rzędu. Porownawszy to równanie z ogólnem

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy+$$
$$+Cz+C'y+C''x+F=0$$

postrzeżemy że $A=1$, $A'=0$, $A''=0$, $B=-b$, $B'=-a$ $B''=0$, $C=-(c+c')$, $C'=bc$, $C''=ac'$, $F=cc'$.

Przenieśmy zaczęcie spółrzędnych w środek powierzchni którego spółrzędne oznaczymy przez α, β, γ: i w równanie (A) wstawmy $x'+\alpha$, $y'+\beta$, $z'+\gamma$ za x, y, z: według (257) otrzymamy na wyznaczenie niewiadomych α, β, γ, trzy równania

$$2\gamma-b\beta-a\alpha-c-c'=0,\ -b\gamma+bc=0,$$
$$-a\gamma+ac'=0:$$

aże z dwóch ostatnych wypada $\gamma=c$, $\gamma=c'$; wniesiemy iż trzy otrzymane równania są niedorzeczne, czyli że powierzchnia szukana nie ma środka. A tak nie zmieniwszy zaczęcia, zmienimy tylko kierunek osi spółrzędnych, zatrzymuiąc zawsze ukłąd prostokątny, i znikną w równaniu (A) iloczyny spółrzędnych. W tym razie równania (§ 259. str. 282)

$$2(A-A')n+B(n^2-1)+B'mn-B''m=0$$

$$2(A-A'')m+B'(m^2-1)+Bmn-B''n=0$$

zamienią się na

$$2n-b(n^2-1)-amn=0$$

$$2m-a(m^2-1)-bmn=0$$

z których trzeba wyprowadzić wartości niewiadomych, m, n w funkcyi ilości wiadomych a, b. W tym zamiarze wyruguiemy m z tych równań rozmnożywszy wyrazy drugiego przez an^2, a w rozmnożone wstawiwszy wartość amn wziętą z pierwszego, i wypadnie

$$(a^2+b^2)n^2-2bn-b^2=0$$

skąd
$$n=\frac{b\pm b\sqrt{(1+a^2+b^2)}}{a^2+b^2}$$

a
$$m=\frac{a\pm a\sqrt{(1+a^2+b^2)}}{a^2+b^2}$$

Wstawiwszy te wartości n i m w wyrażenia (str. 282)

$$dwsX=\frac{m}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}}$$

$$dwsY=\frac{n}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}}$$

$$dwsZ=\frac{1}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}},$$

znaydziemy wartości sześciu niewiadomych $dwsX$, $dwsY$, $dwsZ$, $dwsX'$, $dwsY'$, $dwsZ'$ a tem samem kąty które uczynią osi OX′, OY′, z dawnemi OX, OY, OZ. Wziąwszy więc według tych wypadkow nowe osi OX′, OY′ na płasczyźnie XY, oś nowa OZ zeydzie się z dawną OZ. A tak będzie można oczyścić równanie (A) z wyrazow zawieraiących zy, xz, to zaś — zważaiąc że w ogólnem równaniu (m) (§ 258 str. 278) iest $dwsZ''=1$, $dwsX''=0$, $dwsY''=0$, dla tego że oś OZ' schodzi się z osią OZ, i używszy równań stronicy 277, — zamieni się na

$$(dws^2 Z - b.dwsYdwsZ - a.dwsXdwsZ)x'^2 +$$
$$+(dws^2 Z' - b.dwsY'dwsZ' - a.dwsX'dwsZ')y'^2 + z'^2 +$$
$$+(ac'.dwsX + bc.dwsY - (c+c')dwsZ)x' +$$
$$+(ac'.dwsX' + bc.dwY' - (c+c')dZ')y' - (c+c')z' + cc' = 0$$

Przypuściwszy iż płasczyzna XY przechodzi przez punkt z' równoodległe od swego pierwszego położenia będzie c' czyli $Oz'=0$, iest zaś nadto $dwsZ'=0$, $dwsZ=0$ dla tego że oś OZ' schodzi się z osią OZ; więc ostatne równanie przeydzie na

$$z'^2 + bc.dwsY.y' + bc.dwsY.x' - cz' = 0$$

i teraz c oznacza zz'. Mamy więc ten sam przypadek któryśmy rozebrali w § 269, gdzie było $M'=0$, $M''=0$: i otrzymane równanie, wziąwszy zaczęcie na powierzchni, będzie można zamienić na

$$z^2 + H'y + H''x = 0$$

które należy do WALCA PARABOLICZNEGO, taką więc powierzchnią oznacza równanie (A): to iest, liniia prosta BC odprawiaiąca bieg po liniiach prostych $z'C$, zB danych w przestrzeni i w swym biegu zawsze równoodległa od płas: XY, zakreśla powierzchnią walca parabolicznego. Przecięcia tego walca według płaszczyzn równoodległych od ZY lub od ZX zostawiaią na iego powierzchni parabole, przecięcia zaś według płasczyzn równoodległych od XY zostawiaią, na teyże powierzchni, linie proste.

277. Po liniiach krzywych BE, CF (fig. 190) położonych w przestrzeni, niech liniia prosta BC odprawia bieg taki, iż zawsze zostaie równoodległą od XY: w tym biegu zakreśli BC pewną powierzchnią. Aby znaleźć równanie tak utworzoney powierzchni, ozna-

czmy równanie rzutu linii krzywey BE na ZX przez

$$z=fx' \quad (1),$$

rzutu FC na ZY przez

$$z=\varphi y' \quad (2):$$

równanie linii tworzącey CB, iest (275)

$$y=-\frac{y'}{x'}x+y'$$

czyli $\quad y'=\dfrac{x'y}{x'-x} \quad (3)$

Wstawiwszy w równanie (3) wartość y' i x' wziętą z dwóch poprzedzaiących (1) i (2), otrzymamy szukane równanie powierzchni. W tym zamiarze przywiedziemy naprzód równanie (2) na mocy równania (3) do postaci

$$z=\varphi\left(\frac{x'y}{x'-x}\right)$$

a w to gdy wstawimy wartość x' wziętą z pierwszego: otrzymamy równanie powierzchni w postaci

$$z=\varphi\left(\frac{y.\mathrm{f}z}{\mathrm{f}z-x}\right).$$

278. Gdy liniie krzywe BE, CF są parabolami, ich równania będą

$$z^2=px', \quad z^2=qy':$$

z tych wziąwszy wartość dla x' i y' i wstawiwszy w równanie

$$y=-\frac{y'}{x'}x+y'$$

otrzymamy

$$z^2=qy+px$$

równanie powierzchni *walca parabolicznego* (276).

279. Niech liniia prosta DN (fig. 191) opieraiąca się stale na ellipsie CNB i na osi OZ, odprawia bieg, zostaiąc zawsze równoodległą od płaszczy-

zny XY. Powierzchnia tym sposobem zakreślona przez liniią ruchomą DN, nazywa się *powierzchnią konoidy zakończoney sklepieniem wichrowatem* (surface du conoïde de la voûte d'arrête en tour ronde)

Aby znaleźć równanie tey powierzchni nazwiymy A połowę AC wielkiey osi, ellipsy BNC, równoodległey od OY, B połowę AB małey osi równoodległey od OZ, y' odciętą Ap punktu N w którym liniia tworząca DN schodzi się z obwodem ellipsy: według tego naznaczenia równanie ellipsy DNC iest

$$\frac{y'^2}{A^2}+\frac{z^2}{B^2}=1.$$

Ponieważ wszystkie przecięcia powierzchni równoodległe od ellipsy CNB są elliptyczne; otrzymamy ich ogólne czyli powierzchni równanie, wyrugowawszy y' z ostatnego. Mamy zaś równanie, rzutu Op linii DN,

$$y=\alpha z$$

czyli, wziąwszy x=OA=a skąd y=Ap=y',

$$y'=\alpha a$$

tak iż $$\alpha=\frac{y'}{a},\ y=\frac{y'x}{a};$$ nareszcie

$$y'=\frac{ay}{x};$$

więc, wstawiwszy tę wartość y' w równanie ellipsy, otrzymamy

$$\frac{a^2y^2}{A^2x^2}+\frac{z^2}{B^2}=1$$

równanie powierzchni konoïdy wichrowatey.

A tak wszelkie przecięcia konoïdy równoodległe od założoney ellipsy BC są ellipsami, których połosiami są $\frac{Ax}{a}$ i B: a ponieważ zmienna x wchodzi w wartość wielkiey osi, więc między wartościami x znayduie się taka, że

$$\frac{Ax}{a}=B$$

i w tym razie przecięcie konoïdy iest kołem. Takową wartość x znaydziemy przez proporcyią z ostatnego równania wyprowadzoną

$$A:B=a:x$$

równanie zaś koła iest

$$y^2+z^2=B^2.$$

Uważaymy iż powierzchnia konoïdy wichrowatey iest czwartego rzędu, bo iey równanie iest czwartego stopnia.

280. W ogólności, odkryiemy równanie powierzchni wichrowatey, utworzoney przez liniią prostą CB, odprawiaiącą bieg po dwóch krzywych EB i FC (fig. 190) tak że zawsze iest równoodległą od pewney płaszczyzny daney, następuiącym sposobem.

Oznaczywszy przez x', y', z' spółrzędne punktu B, przez x'', y'', z'' punktu C; będą równania linii

EB, $z'=fx'$, $y'=f_1x'$

FC; $z''=Fx''$, $y''=F_1x''$

tworzącey CB; $z=z'$, $z=z''$, $y-y'=\dfrac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$:

(3)

z tych siedmiu równań wyrugowawszy sześć ilości x', y', z', x'', y'', z''; wypadkowe będzie szukanem równaniem powierzchni. Równania (3) przeydą naprzód na

$$z=fx',\ z=Fx'',\ y-f_1x'=\frac{f_1x'-F_1x''}{x'-x''}(x-x')$$

po czem, z tych trzech pozostanie wyrugować x' i x'': aże z pierwszego wywiedlibyśmy wartość w postaci $x'=\varphi z$, z drugiego $x''=\varphi_1 z$; więc, wstawiwszy ie w równanie trzecie, otrzymamy szukane powierzchni równanie w postaci

$$y-\varphi' z = \varphi, z(x-\varphi z).$$

Niechby na przykład linie EB, FC były liniiami prostemi, ich równania będą

$$y' = ax' + b,\ z' = cx' + d;\ \text{i}\ y'' = ax'' + \beta,\ z'' = \gamma x'' + \delta$$

z których i z równań (3) wyrugowawszy x', y', z'; x'', y'', z''; otrzymamy równanie powierzchni.

Drugie i czwarte z równań liniy prostych zamienią się naprzód na

$$z = cx' + d,\quad z = \gamma x'' + \delta$$

a ostatne z równań (3) na

$$y-(ax'+b) = \frac{ax'-ax''+b-\beta}{x'-x''}(x-x'):$$

pozostaie wyrugować x' i x'' z tych trzech równań: aże pierwsze dwa daią $x' = \frac{z-d}{c}$, $x'' = \frac{z-\delta}{\gamma}$ więc ostatne przeydzie na

$$y-\frac{a(z-d)}{c}-b =$$

$$= \frac{a\gamma(z-d)-ac(z-\delta)+\gamma c(b-\beta)}{\gamma(z-d)-c(z-\delta)}\left(x-\frac{z-d}{c}\right):$$

to równanie iest drugiego stopnia a zatem oznacza powierzchnią drugiego rzędu, to iest *walca parabolicznego* (276)

281. Takimże sposobem znaleźlibyśmy równanie powierzchni utworzoney przez liniią prostą DC (fig. 192) biegaiącą po trzech krzywych DD', BB', CC' tak iż w każdem położeniu iest równoodległą od daney płaszczyzny.

Niech będą x', y', z' spółrzędne punktu D
x'', y'', z'' . . . . . . B
x''', y''', z''' C
$y' = \mathrm{f}x'$, $z' = \mathrm{f}_{,}x'$ równania krzywey DD'
$y'' = \varphi x''$, $z'' = \varphi_{,}x''$ . . . . . BB'
$y''' = \psi x'''$, $z''' = \psi_{,}x'''$ . . . . . CC'

równania nareszcie linii tworzącey CD przechodzącey przez trzy punkta C, B, D, są

$$y-y' = \frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x'),\ z-z' = \frac{z'-z''}{x'-x''}(x-x')$$

$$y'''-y = \frac{y'-y''}{x'-x''}(x'''-x),\ z'''-z = \frac{z'-z''}{x'-x''}(x'''-x)$$

Wyrugowawszy x'. y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' z tych dziesięciu równań; równanie wypadkowe będzie szukanem równaniem powierzchni.

Gdyby na przykład trzy liniie DD′, BB′, CC′ były proste, ich równania byłyby,

pierwszey, $y'=ax'+a'$, $z'=bx'+b'$
drugiey $y''=cx''+c'$, $z''=dx''+d'$
trzeciey $y'''=ex'''+e'$, $z'''=gx''+g'$

z których i z czterech poprzedzaiących wyrugowawszy dziewięć wymienionych ilości, otrzymalibyśmy szukane równanie powierzchni z trzema zmiennemi x, y, z.

282. Utwór powierzchni walcowych; zwłascza zamkniętych, można iescze wyłożyć następuiącym sposobem.

Niech liniia prosta MM′ (fig. 193) obraca się około krzywey BM′C; na którey się opiera, tak aby zawsze była równoodległą od linii prostey daney OA: mamy znaleźć równanie powierzchni walcowey tym sposobem utworzoney. Niech będą

$$x=az,\quad y=bz$$

równania linii prostey OA; x, y, z spółrzędne punktu M na powierzchni walcowey, x', y', z' punktu M′ wziętego na linii krzywey CM′B, którey równania oznaczymy przez

$$f(x',\ y',\ z')=0,\quad F(x',\ y',\ z')=0:$$

równania nareszcie linii MM′, są

$$x-x'=a(z-z'),\quad y-y'=b(z-z').$$

Wyrugowawszy x', y', z' z czterech ostatnych równań otrzymamy równanie powierzchni ze zmiennemi x, y, z.

Aby skazać działanie wyrugowania, przywiedziemy dwa ostatne równania, do postaci

$$x'=az'+x-az,\quad y'=bz'+y-bz$$

dwa zaś poprzedzaiące, naznaczywszy $x-az=P$, $y-bz=Q$, do następuiącey

$$f(az'+P,\ bz'+Q,\ z')=0,\quad F(az'+P,\ bz'+Q,\ z')=0.$$

Widzimy dopiero że gdy z tych dwóch równań wyruguiemy z'; wypadkowe zawierać będzie tylko P, Q z-ilościami zmiennemi x, y, z, więc Q iest pewną funkcyią P, czyli

$$Q=\varphi P$$

czyli $\quad y-bz=\varphi(x-az)$.

taka iest postać równania powierzchni założoney.

283. Niechby na przykład trzeba było znaleźć równanie powierzchni sklepienia walcowego elliptycznego utworzoney przez liniią MM' obiegaiącą obwód ellipsy BM'A (fig. 194) tak iż zawsze zostaie równoodległą od OD.

Dla ułatwienia rozwiązania, założymy iż oś pozioma OX przechodzi przez środek C ellipsy, tey zaś płasczyznę weźmiemy za pionową i do osi OX prostopadłą. Oznaczymy daley przez x, y, z spółrzędne punktu M powierzchni, przez x', y', z' spółrzędne punktu M' ellipsy, naznaczymy OC=A, CA=B, CE=C, i mieć będziemy równania, ellipsy

$$x=A,\quad \frac{y'^2}{B^2}+\frac{z'^2}{C^2}=1;$$

linii tworzącey MM'

$$z-z'=b(x-x'),\quad y-y'=a(x-x');$$

z tych czterech równań wyrugowawszy x', y', z'; otrzymamy równanie powierzchni walcowey elliptyczney.

$$\frac{[y-a(x-A)]^2}{B^2}+\frac{[z-b(x-A)]^2}{C^2}=1$$

II. POWIERZCHNIE OSTROKRĘGOWE.

284. Powierzchnia ostrokręgowa może być utworzoną przez liniją prostą MM′ (fig. 195) opieraiącą się na punkcie stałym D i przebiegaiącą obwód linii krzywey AM′B.

Aby znaleźć równanie tey powierzchni oznaczmy przez x, y, z spółrzędne iakiegokolwiek punktu M wziętego na powierzchni, przez x', y', z' punktu M′ linii krzywey AM′B przez a, b, c spółrzędne punktu stałego D. Według tego naznaczenia równania linii M′D są (62)

$$x-a=\frac{x'-a}{z'-c}(z-c),\quad y-b=\frac{y'-b}{z'-c}(z-c).$$

Naznaczmy daley równania kierownicy AM′B

$$f(x',\ y',\ z')=0,\quad F(x',\ y',\ z')=0:$$

z tych czterech równań wyrugowawszy x', y', z' otrzymamy równanie powierzchni krzywey. Aby to wyrugowanie wykonać; wywiedziemy z równań przedostatnych wartości

$$x'=a+(z'-c)\frac{x-a}{z-c},\quad y'=b+(z'-c)\frac{y-b}{z-c},$$

te wstawimy w równania kierownicy, a oznaczywszy $\frac{x-a}{z-c}$ przez P, $\frac{y-b}{z-c}$ przez Q, otrzymamy równania

$$f[a+(z'-c)P,\ b+(z'-c)Q,\ z']=0.$$
$$F[a+(z'-c)P,\ b+(z'-c)Q,\ z']=0.$$

Z tych nakoniec wyrugowawszy z', wypadnie z-ilościami P, Q równanie powierzchni ostrokręgowey w postaci

$$Q=\varphi P$$

czyli

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

285. Między powierzchniami ostrokręgowemi umieścimy następuiącą:

Wystawmy sobie koło, ruchome w ten sposób, że iego środek M′ (fig. 196) przebiega liniią krzywą M′A′ a okrąg posuwa się po inney linii krzywey M″A″ tak, iż to koło w każdem położeniu zmienia swóy promień, iego zaś płasczyzna iest zawsze równoodległą od daney. Powierzchnia tym sposobem utworzona przez koło ruchome zmieniaiące swóy promień, będzie miała podobieństwo do powierzchni zgiętey ostrokręgu: mamy utworzyć równanie takiey powierzchni.

Naznaczmy równanie płasczyzny koła

$$z+Ax+By=C$$

x', y', z' spółrzędne punktu M′ linii krzywey M′A′
x'', y'', z'' . . . . . . M″ . . . . . M″A″
x, y, z . . . . M okręgu
nareszcie, wyrażenie analityczne równania MM′=M″M′ iest

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=$$
$$=(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2 \quad (1).$$

Ponieważ płasczyzna koła przechodzi przez punkt M′ więc

$$z'+Ax'+By'=C$$

odiąwszy stronami to równanie od naypierwszego, wypadnie

$$z-z'+A(x-x')+B(y-y')=0 \quad (2)$$

równanie oznaczaiące iż płasczyzna koła przechodzi przez punkt M′. Także równanie

$$z''-z'+A(x''-x')+B(y''-y')=0 \quad (3)$$

wyraża iż płasczyzna koła przechodzi przez M″. Niech nareszcie będą równania

$$(4)\begin{cases} x'=fz', \ y'=f_1z' & \text{linii A'M'} \\ x''=Fz'', y''=F_1z'' & \text{. A'M''} \end{cases}$$

z tych siedmiu równań wyrugowawszy x', y', z'; x'', y'', z''; wypadkowe ze zmiennemi x, y, z będzie szukanem równaniem powierzchni.

III. POWIERZCHNIE OBROTOWE.

286. Gdy liniia A'M' (fig. 196) iest prostą i prostopadłą do płasczyzny koła M''M, powierzchnia utworzona przez obrót płasczyzny zakończoney liniią krzywą A'M'' około linii prostey A'M' iako osi, będzie z rodzaiu tych które nazywaią obrotowemi (de revolution).

Aby znaleźć równanie ogólne powierzchni obrotowey trzeba wyrugować 6 ilości x', y', z'; x'', y'', z'', z siedmiu następuiących równań

$$1^\circ, \ x'=Az'+a, \ y'=Bz'+b, \text{ linii A'M'}$$

i

$$2^\circ, \ (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=$$
$$(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2$$
$$3^\circ, \ (z-z'+A(x-x')+B(y-y')=0$$
$$4^\circ, \ z''-z'+A(x''-x')+B(y''-y')=0$$
$$5^\circ, \ x''=Fz'', \ y''=F_1z''$$

z których pięć ostatne były znalezione w poprzedzaiącym paragrafie.

Nadamy naprzód równaniu (2) na mocy równań (1) postać

$$(x-Az'-a)^2+(y-Bz'-b)^2+(z-z')^2$$
$$=(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2$$

czyli

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-2z'(Ax+By+z)+$$
$$+2(Aa+Bb)z'+(A^2+B^2+1)z'^2=$$
$$=(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2,$$

powtóre równaniu (3) postać

$$z+Ax+By=z'+Ax'+By'$$

a oznaczywszy $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2$ przez P, $z+Ax+By$ przez Q; siedm równań z których trzeba wyrugować sześć wymienionych ilości, są

$$P-2z'Q+2(Aa+Bb)z'+(A^2+B^2+1)z'^2$$
$$=(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2$$
$$x'=Az'+a,\quad y'=Bz'+b$$
$$Q=z'+Ax'+By'$$
$$z''-z'+A(x''-x')+B(y''-y')=0$$
$$x''=Fz'',\quad y''=F_1z''.$$

Rozwinąwszy dopiero 6 ostatnych równań względem x', y', z'; x'', y'', z'', te ilości będą wyrażone w funkcyi Q: więc wstawiwszy ie w równanie pierwsze to zawierać będzie tylko P i Q i przybierze postać taką

$$P=\varphi Q:$$

przywróciwszy więc wartości P i Q, równanie *ogólne powierzchni obrotowych* iest

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(Ax+By+z)$$

Gdy A'M' będzie osią OZ; równania tey osi obrotu będą $x'=0$, $y'=0$, a zatem $a=0$, $b=0$, $z=z'=z''$, równania zaś z których mamy wyrugować spomnione ilości, są

$$x^2+y^2=x''^2+y''^2,\quad z=z',\quad z=z'',$$
$$z''=Fx'',\quad y''=F_1x''.$$

Wyrugowawszy naprzód z', z'', x'', y'', wypadnie

$$x^2+y^2=x''^2+(F_1x'')^2,\quad z=Fx''$$

z tych zaś wyrugowawszy x'', otrzymamy równanie powierzchni obrotowey w postaci

$$z=\varphi(x^2+y^2)$$

287. Gdy liniia A'M' (fig. 196) iest prostą i prostopadłą do płaszczyzny którey rów: $z+Ax+By=C$: gdy także liniia A''M'' iest prostą a iey równania są

$$x'=A'z'+a',\quad y'=B'z'+b';$$

znaydziemy równanie powierzchni utworzoney przez tę ostatnią liniią, wyrugowawszy x', y', z'; x'', y'', z'' z siedmiu następuiących równań

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=(x''-x')^2+$$
$$+(y''-y')^2+(z''-z')^2$$
$$(z-z')+A(x-x')+B(y-y')=0$$
$$z''-z'+A(x''-x')+B(y''-y')=0$$
$$x'=Az'+a,\ y'=Bz'+b$$
$$x''=A'z''+a',\ y''=Bz''+b'.$$

Aby to wyrugowanie ułatwić, weźmiemy oś obrotu A'M' na osi OZ, w tym razie będzie $x'=0$, $y'=0$ skąd $A=0$, $B=0$, $a=0$, $b=0$, siedm zaś równań poprzedzaiących zamienią się na

$$x^2+y^2+(z-z')^2=x''^2+y''^2+(z''-z')^2$$
$$z-z'=0,\ z''-z'=0,\ x''=A'z''+a'$$
$$y''=B'z''+b'$$

z których, wyrugowawszy z', x'', y'', z''; wypadnie

$$x^2+y^2=(B'z+a')^2+(B'z+b')^2.$$

Gdyby nadto liniie A'M', A''M'' były równoodległe, mielibyśmy $A=A'$, $B=B'$, to iest powierzchnia byłaby walcową i miałaby równanie

$$x^2+y^2=(Az+a')^2+(Bz+b')^2.$$

288. Założywszy iż liniie A'M', A''M'' (fig. 196) są proste i przecinaią się w punkcie którego spółrzędne są a, b, c; wyruguiemy x', y', z'; x'', y'', z'' z siedmiu równań

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=(x''-x')^2+$$
$$+(y''-y')^2+(z''-z')^2$$
$$z-z'+A(x-x')+B(y-y')=0$$
$$z''-z'+A(x''-x')+B(y''-y')=0$$
$$x'-a=A(z'-c),\ y'-b=B(z'-c)$$
$$x''-a=A'(z''-c),\ y''-b=B'(z''-c)$$

a wypadkowe będzie należało do powierzchni ostrokręgu prostego kołowego.

IV. POWIERZCHNIE PARABOLOÏD.

289. Wystawmy sobie nieograniczoną liczbę parabol takich iak BMC (fig. 197) których wierzchołek znayduie się na linii prostey BO, przechodzącey przez zaczęcie spółrzędnych i położoney na płaszczyźnie ZOX: niech płaszczyzna tey paraboli będzie prostopadłą do osi OZ czyli równoodległą od pł: XY, niech iey oś BA leży także na pła: ZX równoodlegle od osi OX, niech nareszcie każde z-iey ramion iak na przykład BC przecina ramie OC, inney paraboli położoney na płaszczyźnie YOZ maiącey oś na OZ, a wierzchołek w zaczęciu O. Mieyscem geometrycznem wszystkich paraboloïd takich iak DMC, iest powierzchnia PARABOLOIDY PARABOLICZNEY.

Aby utworzyć równanie tey powierzchni, naznaczmy spółrzędne któregokolwiek punktu M na niey wziętego, AP $=x$ PM$=y$, AO$=z$, punktu zaś B, AB $=x'$; punktu C, AC$=y'$. Według tego naznaczenia równanie linii OB iest

$$(1)\quad x'=pz$$

w którem $p=stycz$ BOA; paraboli OC

$$(2)\quad y'^2=qz,$$

paraboli CMB,

$$y^2=r(x'-x)$$

w którem $x'-x=$PB; wziąwszy tu $x=0$, a zatem $y=y'$; znaydziemy $r=\dfrac{y'^2}{x'}$ i zamienimy równanie paraboli CMB na

$$(3)\quad y^2=\frac{y'^2}{x'}(x'-x)$$

wyrugowawszy dopiero y' i x' z równań (1), (2), (3); otrzymamy równanie paraboloidy paraboliczney

$$\frac{y^2}{q}+\frac{x}{p}=z$$

które oznacza walec paraboliczny (278). Że otrzymane równanie oznacza walec paraboliczny można bezpośrednie okazać następuiącym sposobem. Równanie ogólne powierzchni walcowych (282) iest

$$y-qz=\varphi(x-pz)$$

w którem $y-qz=0$, $x-pz=0$ są równaniami linii tworzącey powierzchnią walca: aże równanie paraboloidy paraboliczney

$$y=\sqrt{\frac{q}{p}}\,\surd(pz-x)$$

ma taką samą postać iaką poprzedzaiące równanie powierzchni walcowey, więc obadwa oznaczaią iednakową powierzchnią: w szczególności więc ostatne, czyli

$$\frac{y^2}{q}+\frac{x}{p}=z$$

oznacza powierzchnią walcową utworzoną przez linią prostą którey równania są $y=0$, $x-pz=0$: iakoż te równania służą linii OB, więc linie proste równoodległe od OB prowadzone przez punkta C lub M powierzchni, leżą na tey powierzchni.

290. Powierzchnia PARABOLOÏDY ELLIPTYCZNEY (fig 198) może być utworzoną przez ellipsę ruchomą BMA, równoodległą od płaszczyzny ZY, opieraiącą się na dwóch parabolach OB, OA z których iedna leży na płaszczyźnie XZ druga na XY, a obiedwie maią spólną oś OX. Mamy utworzyć równanie powierzchni tym sposobem utworzoney.

Nazwiymy x odciętą Ox punktu M dowolnie wziętego na obwodzie ellipsy czyli na powierzchni, y' rzędną Ax punktu A która iest osią ellipsy, z' rzędną Bx punktu B która iest drugą osią ellipsy. Niech będzie równanie paraboli OA,

$$y'^2 = p^2 x \quad (1),$$

paraboli OB

$$z'^2 = q^2 x \quad (2)$$

w których parametry w postaci kwadratow są wyrażone na znak iż są dodatne.

Oznaczywszy daley przez z, y dwie inne spółrzędne punktu M ellipsy AMB, iey równanie iest

$$\frac{z^2}{z'^2} + \frac{y^2}{y'^2} = 1$$

gdy w to wstawimy wartości z', y' wzięte z równań (1) i (2), otrzymamy równanie paraboloïdy elliptyczney

$$\frac{z^2}{q^2} + \frac{y^2}{p^2} = x$$

291. Powierzchnia PARABOLOÏDY HYPERBOLICZNEY może być utworzoną przez hyperbolę MB (fig. 199) leżącą na płaszczyźnie AxB równoodległey od ZOY, odprawiaiącą bieg taki, iż iedna, z-iey zmiennych półosi, Bx iest rzędną z' punktu paraboli OB leżącey na płaszczyźnie ZX, druga Ax iest rzędną y' punktu inney paraboli OA leżącey na płasczyźnie YX. Mamy utworzyć równanie tey powierzchni.

Równanie paraboli OA iest $y'^2 = p^2 x$

. . . . . . OB, $z'^2 = q^2 x$

. . . hyperboli MB, $\dfrac{z^2}{z'^2} - \dfrac{y^2}{y'^2} = 1.$

W to ostatne wstawiwszy wartości z' i y' wzięte z dwóch pierwszych, wypadnie równanie paraboloïdy hyperboliczney

$$\frac{z^2}{q^2} - \frac{y^2}{p^2} = x$$

292. Własności paraboloïdy hyperboliczney są na-

stępuiące. *Naprzód*: gdy w-iey równaniu weźmiemy $x = 0$, otrzymamy

$$\frac{z^2}{q^2} = \frac{y^2}{p^2}, \text{ czyli } z = \pm \frac{q}{p} y:$$

to równanie należy do dwóch liniy OC, OC′ (fig. 199) przechodzących przez zaczęcie O i leżących na płaszczyźnie ZY, ta więc płaszczyzna przecina powierzchnią paraboloïdy hyperboliczney według dwóch liniy OC, OC′ które z osią OZ czynią kąty równe ZOC, ZOC′.

Powtóre: wartość

$$z = \pm \frac{q}{p} y \sqrt{\left(1 + \frac{p^2 x}{q^2 y}\right)}$$

wywiedziona z równania paraboloïdy hyperboliczney oznacza iż gdy rzędna y będzie wzrastała, a x zatrzyma wartość stałą, rzędna z powierzchni będzie się coraz bardziey przybliżała do rzędney płaszczyzn COX, C′OX których równania $z = \pm \frac{q}{p} y$ a rzuty na płaszczyznę ZY są OC, OC′: te więc płaszczyzny są asymptotycznemi powierzchni, czyli ta zamkniętą iest między płaszczyznami COX, C′OX. Płaszczyzna więc BxA przecinaiąca powierzchnią według hyperboli MB, przecinać będzie dwie płaszczyzny asymptotyczne według dwóch liniy prostych xD, xD′ a iak powierzchnia będzie utworzoną przez hyperbolę BM tak płaszczyzny COX′ C′OX przez iey asymptoty xD, xD′.

Potrzecie: dawszy odciętey x wartość odiemną $- x'$ (fig. 200) równanie powierzchni paraboloïdy hyperboliczney będzie

$$\frac{y^2}{p^2} - \frac{z^2}{q^2} = x'.$$

Oznacza ono iż przeciąwszy powierzchnią płaszczyzną $B'x'A'$ równoodległą od ZY, w odległości — x' od zaczęcia; zostanie na powierzchni hyperbola $A'M'$ którey półosi są $A'x'$ i $B'x'$, a ich wartości $p\sqrt{x'}$, $q\sqrt{x'}$: z tych pierwsza przecina hyperbolą w A', a obiedwie są rzędnemi dwóch parabol, oznaczonych równaniami

$$y^2=p^2x',\quad z^2=q^2x',$$

i równych dwom parabolom OB, OA lecz w przeciwną stronę obróconych. Paraboloïda hyperboliczna składa się więc z dwóch powłok równych, stykaiących się w punkcie O i zawartych między płaszczyznami asymptotycznemi COX, C'OX.

V. POWIERZCHNIA ELLIPSOÏDY.

293. Powierzchnia ELLIPSOÏDY może być utworzoną przez ellipsę NRM (fig. 201) odprawiaiącą bieg, równoodlegle od płaszczyzny XY, opieraiącą się stale na dwóch różnych ellipsach ca, cb z których iedna znayduie się na płaszczyźnie ZX, druga na płaszczyźnie ZY. Mamy utworzyć równanie tey powierzchni.

Oznaczywszy osi Oa, Ob, Oc przez a, b, c; odciętą PM punktu M przez x' a rzędną PN punktu N przez y', będzie równanie

ellipsy ac, $$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

. . . cb, $$\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Niech x oznacza odciętą PQ punktu R ellipsy tworzącey NRM, y rzędną QR tegoż punktu: ponieważ półosi tey ellipsy są $PM=x'$, $PN=y'$, więc iey równanie iest

$$\frac{x^2}{x'^2}+\frac{y^2}{y'^2}=1:$$

gdy w to wstawimy wartości x i y' wzięte z dwóch poprzedzaiących, wypadnie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

czyli

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2$$

równanie powierzchni ellipsoïdy.

1°. Gdy $Oa=Ob$ czyli $a=b$, ellipsoïda obrotową względem osi OZ a iey równanie będzie

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

czyli $$c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2=b^2c^2$$

2°. Gdy $Oa=Ob=Oc$ czyli $a=b=c$, ellipsoïda kulą, równanie zaś kuli iest

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

VI. POWIERZCHNIE HYPORBOLOÏD.

294. Powierzchnia HYPERBOLOÏDY O IEDNEY POWŁOCE może być utworzoną przez ellipsę DMC (fig. 202) odprawiaiącą bieg równoodległe od płaszczyzny XY, a opieraiącą się stale na dwóch różnych hyperbolach Ca, Db z których iedna leży na płaszczyźnie ZX, druga na ZY. Mamy utworzyć równanie tey powierzchni.

Oznaczywszy półosi Oa, Ob, Oz hyperbol przez a, b, c; odciętą punktu C przez x', rzędną punktu D przez y'; będzie równanie

hyberboli aC, $$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

. . . bD, $$\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Oznaczywszy przez x, y, z spółrzędne punktu M ellipsy tworzącey DMC, iey równanie będzie

$$\frac{x^2}{x'^2}+\frac{y^2}{y'^2}=1:$$

gdy w to wstawimy wartości x', y' wzięte z dwóch poprzedzaiących, wypadnie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

czyli

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2$$

czyli

$$a^2b^2z^2-a^2c^2y^2-b^2c^2x^2=-a^2b^2c^2$$

równanie powierzchni hyperboloïdy o iedney powłoce.

Gdy $a=b$; hyperboloïda obrotową względem osi OZ, a iey równanie iest

$$b^2z^2-c^2y^2-c^2x^2=-b^2c^2.$$

295. HYPERBOLOÏDA O DWÓCH POWŁOKACH może być utworzoną następuiącym sposobem (fig. 203).

Niech będą EC, E'C' dwa ramiona iedney hyperboli; ED, E'D' dwa ramiona drugiey. Powierzchnia, iedney z powłok hyperboloïdy będzie utworzoną przez ellipsę DMC odprawiaiącą bieg równoodlegle od XY i opieraiącą się ciągle na ramionach EC i ED dwóch różnych hyperbol; drugiey zaś przez ellipsę DM'C' odprawiaiącą bieg według takiego samego prawa iak w pierwszym razie. Mamy utworzyć równanie tey powierzchni.

Oznaczywszy przez x', y' odcięte punktow C i D; przez x, y, z spółrzędne punktu M ellipsy tworzącey DMC; będzie równanie

hyperboli EC, E'C'; $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x'^2}{a^2}=1$

. . . . . ED, E'D'; $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y'^2}{b^2}=1$

ellipsy DMC, $\dfrac{x^2}{x'^2}+\dfrac{y^2}{y'^2}=1$

w to ostatne wstawiwszy wartości x', y' wzięte z dwóch pierwszych, wypadnie

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

czyli

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2$$

czyli

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = -a^2b^2c^2$$

równanie hyperboloidy o dwóch powłokach.

Gdy $a = b$, hyperboloïda obrotową a iey równanie iest

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2 + x^2}{a^2} = 1$$

czyli

$$a^2z^2 - c^2y^2 - c^2x^2 = a^2c^2.$$

KONIEC.

Układał Józef Piłatowski, ze szczególnem autora ukontentowaniem.

W I D O K

RZECZY W TEM DZIELE ZAWARTYCH.

DZIAŁ TRZECI

PRZYSTOSOWANIA POPRZEDZAIACYCH TEORYY.

CZĘŚĆ TRZECIA

O POWIERZCHNIACH DRUGIEGO RZĘDU.

DZIAŁ PIERWSZY

TEORYIA OGÓLNA POWIERZCHNI DRUGIEGO RZĘDU

DZIAŁ DRUGI

O TWORZENIU RÓWNAŃ WYRAŻAIACYCH NAZNACZONĄ WŁASNOŚĆ POWIERZCHNI DRUGIEGO RZĘDU.

OMYŁKI.

Stron.	*Wiersz*	*Zamiast*	*ma być*
2.	11.	$\frac{1}{4}b$	$\frac{1}{2}b$
2.	24	ac^2	ac'^2
4.	15	tyko	tylko
8.	§7	geh	ghl
		gh	pq
10.	19	$ba=ax$	$bc=ax$
15.	22	$+$	$-$ przy $ss'(s+s')$
	26	b^2+c	b^2+c^2
16.	7	$cs=bs'$	$cs'=bs$
	11	$s=\frac{ab}{b+c}$	$s'=\frac{ab}{b+c}$
	4 od końca	z	x
18,	13	AB=2AF	AB=2AE
	2 i 3 od końca,	b^2	$2b$, w mianowniku
20.	11	$\sqrt{\frac{mb^2}{2}}$	$\sqrt{\frac{b^2}{2}}$
22,	3 od końca,	AM″	A′M″
24,	6	na OX	na OY
24,	12 po słowie *przez*	dodaj	*Dekarta*
25,	2 od końca	M	m'
	ostatny	—PM′	—PM″
26,	1	—PM‴	—PM″
	3	—OP′	—OP′
	4 od końca	fig. 14	fig. 15
27,	7	$Mm'=z$	$Mm=z$
	1 § 28		fig. 15
29,	6	$Ay+Bx=C=0$,	$Ay+Bx+C=0$
	2 od końca	$=-\frac{c}{A}$	$-\frac{c}{A}$
30,	4. § 32	$x.y$	$x:y$
46,	14	y	y'
49,	6	y'	y
56,	3 § 55	po MQ dopisz	MR
63.	15	1^2	1
71.	3	$Fz=$	$Fz=0$

Stron.	*Wiersz,*	*zamiast*	*ma być*
71.	ost.	słowo *one* wymaż.	
73,	4 i 5	$\frac{r'^2}{z'^2}$	$\frac{r'^2}{z'}$
	9	XY	ZY
74,	13	$\frac{r'^2}{z'^2}$	$\frac{r'^2}{z'}$
77,	5	x',y',x'',y''	$x',y',z';x'',y'',z''$.
87,	6 § 78	y'	y
92,	4	danych	dawnych
104,	18	równanie	zadanie
112,	4 od końca	D^2+4AF	D^2-4AF
168,	5 od końca		$y-y'=\frac{A^2y'}{B^2x'}(x-x')$
170,	10	F'MT	FMT
171,	11 od końca	x	x'
174,	ost	$-(2B)^2$	$+(2B)^2$
176,	3 od koń,	$1-wst^2\alpha$ za $d^2\alpha'$,	$1-ws^2\alpha$ za $dw^2\alpha$
179,	8	A'o	A'^2
192,	3		fig 133
204,	13	141.. 142	140,.. 141
221,	17		Mf^2.
216,	8	$z=-A(1-e)$,	$-A(1+e)$
256,	6 od końca,	$x=a.\frac{x'+x''}{2}$	$y=a\frac{x'+x''}{2}+b$

w figurach.

Tabl. I. fig. 2 zamiast KL ma być KL
13 punkt prz. OY i M''M'' ma być oz. lite. Q'
23 KK i MM' N
II. 51 OA i krzywey E
52 N B' i krzywey QQ' N''
III. 68 lin. pr. OA, OB, OP, PP' maią być sobie równe.
V. 116 prostop. wyprow. z punktu P' ma być P'N'
P PN
VI. 148 zamiast C pod liniią OA ma być C'
VII. 150 zamiast lit. X którą iest oznaczona prostopadła wyprowadzona z pun. O lin. OB ma być lit. Y.