

II 10.037

Doublet

3 c' egr

Dukel. do 6046, 6047.

TEORYA SKLEPIEŃ.



WYDZIAŁ ARCHITEKTURY  
Politechniki Warszawskiej  
№ 15917

WYDZIAŁ ARCHITEKTURY  
Politechniki Warszawskiej  
№ 5027

# TEORYA SKLEPIEN.

PRZEZ

*3 części  
dublet*

TADEUSZA CHRZANOWSKIEGO.



~~WARSZAWA~~



WARSZAWA.

DRUKIEM JÓZEFA UNGRA,

Nowolipki Nr. 2406 (3).

1877.

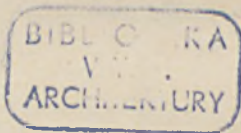
BIBLIOTEKA  
WYDZIAŁU ARCHITEKTURY  
Politechniki Warszawskiej

TEORYA SKLEPIEN



m. 469

Дозволено Цензурою.  
Варшава 30 Мая 1877 года.



II. 10. 037



к. 1/4/53

# WSTĘP.

\*\*\*\*\*

Exystujące dotąd teorye sklepień i podawane wzory dla wyznaczenia grubości sklepień, są nietylko niedostateczne, ale widocznie wadliwe. Technicy, proponujący te teorye i wzory, albo opierali rozumowanie swoje i obliczenia na niewłaściwych założeniach, albo nieprzyjmowali na uwagę bardzo ważnych danych, jak to: *ciężaru*, jaki ma znosić sklepienie, *rodzaju materiału*, zktórego sklepienie ma być zbudowane, *krzywój linii* sklepienia, i t. p. Cała zatem dotychczasowa praca specjalistów, studjujących sklepienia, daje nam bardzo słabe pojęcie o tego rodzaju konstrukcyach i nie budzi zaufania do wzorów przez tych specjalistów podawanych; wszystkie zaś wykonane sklepienia mniejszych i większych rozmiarów widocznie pobudowane zostały na zasadzie empirycznych wiadomości, lub inspiracyi budowniczych-artystów.

Takie położenie rzeczy wywołało konieczną potrzebę bliższego zbadania warunków równowagi sklepienia, i wyprowadzenia racjonalniejszych wzorów dla oznaczenia grubości sklepienia. Skutkiem téj potrzeby poświęciłem dużo pracy celem rozjaśnienia kwestyi sklepień; o ile zaś dopiąłem tego celu, zostawiam uznaniu techników, którym tę moją pracę ofiaruję.

---





## TEORYA SKLEPIEŃ.

W każdym sklepieniu, jak wiadomo z praktyki, są dwa *punkta załamania*, po jednym z każdój strony. Dwa te punkta, dzielą sklepienie na trzy części: *jedną część wierzchnią*, znajdującą się nad punktami załamania i *dwie części boczne*, znajdujące się pod punktami załamania.

Część wierzchnią można uważać jako belkę, posiadającą wszystkie trzy składowe elementy, a mianowicie: *pas górny* téj belki stanowi samo sklepienie, *pas dolny* zastąpiony jest działaniem bocznych części sklepienia, nadmurowanie zaś sklepienia zamienia *sztraby*.

Tę wierzchnią część sklepienia nazywać będziemy *sklepieniem* — *belką*. Dwie części boczne sklepienia, stanowiące opór rozpychającej sile sklepienia — belki, mogą być uważane jako przyczółki i dla tego każdą z tych części nazywać będziemy *sklepieniem* — *przyczółkiem*.

Postawiwszy tak zadanie będziemy wstanie teoryę zwyczajnej belki i przyczółka zastosować do sklepień i objaśnić własności tego rodzaju konstrukcyi. Zastosowanie to zrobimy do różnego rodzaju sklepień: *półokręgowych* (en plein cintre), *spłaszczonych* (surbaissées), *podniosłych* (surhaussées), *gotyckich*, *eliptycznych*, *parabolicznych*, *hyperbolicznych* i *kopół*.

Spłaszczonem i podniosłem sklepieniem nazywać będziemy takie sklepienie, którego podniebienie utworzone jest z mniejszej lub większej części półokręgu, to ostatnie sklepienie nazywa się: *maurytańskim*.

---

## I. Sklepienia półokręgowe.

a) Sklepienie półokręgowe równoobciążone po linii poziomej  $lm$  (fig. 1).

Sklepienie przedstawiać będziemy, dla uproszczenia zadania, jedną linią krzywą  $dabcg$ .

Oznaczymy przez:

$r$ , promień koła sklepienia.

$\alpha$ , kąt załamania  $boc$ ,

$X$  i  $Y$  współrzędne punktu załamania  $c$ ,

$X = r \sin \alpha$ ,

$Y = r \cos \alpha$ ,

$p$ , ciężar na 1<sup>śc</sup> długości linii  $lm$ , równo rozłożony po tej linii.

$A$ , ciśnienie pionowe sklepienia-belki  $abc$  na sklepienie-przechódź.

$A = pX$ ,

$\Sigma XY$ , summa momentów sił, działających w poprzecznym przekroju  $bo$ , przechodzącym przez klucz sklepienia.

Równanie równowagi sklepienia będzie:

$$\Sigma XY = AX - \frac{pX^2}{2}, \dots \dots \dots (1)$$

Wstawiając wartości za  $A$  i  $X$ , otrzymamy:

$$\Sigma XY = \frac{pr^2}{2} \sin^2 \alpha, \dots \dots \dots (2)$$

Dzieląc zaś  $\Sigma XY$  przez  $(r - Y)$  wysokości belki w przekroju *bo*, otrzymamy  $Q'$ , ciśnienie w kluczu sklepienia.

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{(r - Y)},$$

albo

$$Q' = \frac{pr}{2} (1 + \cos \alpha), \dots \dots \dots (3a) \quad ^1)$$

Moment  $M'$ , obalający sklepienie przyczółek, wyrazi się:

$$M' = Q'Y,$$

albo

$$M' = \frac{pr^2}{2} (1 + \cos \alpha) \cos \alpha, \dots \dots \dots (4)$$

Moment  $M''$ , pochodzący od oporu sklepienia-przyczółka, wyrazi się:

$$M'' = A(r - X) + p \int_X^r (r - x) dx, \dots \dots \dots (5)$$

Rozwiązując powyższe równanie i wstawiając odpowiednie wartości, otrzymamy:

$$M'' = \frac{pr^2}{2} \cos^2 \alpha, \dots \dots \dots (6b)$$

---

<sup>1)</sup> Numer z literą w nawiasie odsyła do odpowiedniego przypisku w końcu niniejszej Teorii.

Dzieląc  $M''$  przez  $Y$ , otrzymamy  $Q''$ , siłę oporu sklepienia-przyczółka,

$$Q'' = \frac{M''}{Y},$$

albo:

$$Q'' = \frac{pr}{2} \cos \alpha, \quad . . . . . (7)$$

Różnica sił  $Q' - Q''$  będzie:

$$Q' - Q'' = \frac{pr}{2}, \quad . . . . . (8)$$

Różnica zaś momentów:

$$M' - M'' = \frac{pr^2}{2} \cos \alpha, \quad . . . . . (9)$$

Mając wyrażenie dla  $Q'$  ciśnienia w kluczu i dla  $A$ , ciśnienia pionowego sklepienia-belki na sklepienie-przyczółek, możemy oznaczyć  $T$ , siłę ciśnienia w jakimkolwiek punkcie  $e$ , ( $X$ ,  $Y$ ). (fig. 2).

$$T = Q' \cos \alpha + A \sin \alpha,$$

Dla największego znaczenia  $T$ , należy brać największe  $Q'$  i największe  $A$ , a mianowicie:

$$\max Q' = pr,$$

$$\max A = pr \sin \alpha,$$

podstawiając w wyrażenie powyższe, otrzymamy:

$$T = pr (\cos \alpha + \sin^2 \alpha), \quad . . . . . (10c)$$

Zestawiając wszystkie wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu:

- 1) Ciśnienie poziome w kluczu sklepienia

$$Q' = \frac{pr}{2} (1 + \cos \alpha), \quad . . . . . (11)$$

2) Ciśnienie poziome sklepienia-przyczółka w punkcie załamania

$$Q'' = \frac{pr}{2} \cos \alpha, \quad . . . . . (12)$$

3) Różnicę sił powyższych w punkcie załamania,

$$Q' - Q'' = \frac{pr}{2}, \quad . . . . . (13)$$

4) Ciśnienie po stycznej koła w jakim kolwiek punkcie ( $\alpha$ ):

$$T = pr (\cos + \sin^2 \alpha), \quad . . . . . (14)$$

5) Moment sił, obalający sklepienie-przyczółek,

$$M' = \frac{pr^2}{2} (1 + \cos \alpha) \cos \alpha, \quad . . . . . (15)$$

6) Moment oporu sklepienia-przyczółka,

$$M'' = \frac{pr^2}{2} \cos^2 \alpha, \quad . . . . . (16)$$

7) Różnicę momentów powyższych,

$$M' - M'' = \frac{pr^2}{2} \cos \alpha, \quad . . . . . (17)$$

okazuje się:

1) Że  $Q'$ , ciśnienie w kluczu sklepienia jest *największe* przy  $\alpha = 0$ , to jest gdy punkt załamania będzie w samym kluczu,

$$\max Q' = pr, \quad . . . . . (18)$$

$Q'$  jest *najmniejsze* przy  $\alpha = 90^\circ$ , to jest gdy punkt załamania będzie na łożysku opornem  $g$  (fig. 1).

$$\min. Q' = \frac{pr}{2}, \dots \dots \dots (19)$$

2) Że  $Q''$ , siła oporu sklepienia-przyczółka, jest największem przy  $\alpha = 0$ ,

$$\max Q'' = \frac{pr}{2}, \dots \dots \dots (20)$$

$Q''$  jest najmniejszym, przy  $\alpha = 90^\circ$

$$\min Q'' = 0, \dots \dots \dots (21)$$

3) Że  $Q' - Q''$  różnica sił poziomych w punkcie załamania jest stałą, niezależną od  $\alpha$ .

Różnica  $Q' - Q''$  pokazuje, że samo sklepienie nie jest w stanie zachować równowagi i dla tego potrzebuje oddzielnego wzmożenia: albo odpowiedniego zamurowania pach sklepienia, gdy sklepienie jest z muru, albo odpowiedniego uzbrojenia sklepienia, gdy takowe jest z drzewa, lub żelaza, złożone z łuków. Uzbrojenie to powinno być wykonane za pomocą dodatkowych ferm, zbudowanych na bokach łuków.

Moment łamania sklepienia, pochodzący od siły poziomej  $Q' - Q''$  jest następujący:

$$(Q' - Q'') \frac{r - Y}{r} Y,$$

albo, podstawiając odpowiednie wartości,

$$\frac{pr^2}{2} (1 - \cos \alpha) \cos \alpha, \dots \dots \dots (22)$$

Wyrażenie powyższe jest największe przy

$$\alpha = 60^\circ, \dots \dots \dots (23d)$$

to jest w punkcie, odpowiadającym kątowi  $\alpha = 60^\circ$ , sklepienie jest najsłabsze i dla tego kąt  $\alpha$ , równający się  $60^\circ$ , w sklepieniach półokręgowych, obciążonych równo po linii poziomej, nazywa się zwyczajnie *kątem załamania*. Takich kątów załamania sklepienie posiada z obu swych stron po jednym.

4)  $T$ , ciśnienie po stycznej do krzywój koła sklepienia, jest największe, gdy

$$\alpha = 60^\circ, \quad . . . . . (24 e)$$

a wtenczas wyrażenie  $\max T$  będzie:

$$\max T = 1,250 pr, \quad . . . . . (25)$$

Z czego okazuje się, że sklepienie w punktach, odpowiadających kątowi załamania  $\alpha = 60^\circ$ , powinno posiadać największą grubość.

5) Różnica momentów,  $M - M''$ , pokazuje, że moment sklepienia - przyczółka nie może zrównoważyć momentu sklepienia - belki, a ztąd wypada, że sklepienie samo, bez zamurowania, lub uzbrojenia, nie może pozostać w równowadze.

Jakie siły i momenty sił działają w sklepieniu przy różnych  $\alpha$ , kątach załamania, objaśnia Tablica następująca:

T A B L I C A . . . . . (26)

Siły i momenty sił	Przy kącie załamania $\alpha =$				
	0°	30°	45°	60°	90°
1) $Q'$ , ciśnienie poziome w kluczu . . . =	$pr$	0,93301 $pr$	0,85355 $pr$	0,75 $pr$	0,50 $pr$
2) $Q''$ , ciśnienie poziome sklepienia-przyczółka w punkcie załamania . . . =	0,5 $pr$	0,44301 $pr$	0,35355 $pr$	0,25 $pr$	0
3) $Q' - Q''$ , różnica ciśnienia poziomego w punkcie załamania =	0,50 $pr$	0,50 $pr$	0,50 $pr$	0,50 $pr$	0,50 $pr$
4) $T$ , ciśnienie po stycznej koła w jakimkolwiek punkcie ( $\alpha$ ) . =	$pr$	1,11620 $pr$	1,20710	1,250 $pr$	$pr$
5) $M'$ , moment siły, obalającej sklepienie - przyczółek. . . =	$pr^2$	0,80802 $pr^2$	0,60356 $pr^2$	0,375 $pr^2$	0
6) $M''$ , moment oporu sklepienia-przyczółka . =	0,5 $pr^2$	0,375 $pr^2$	0,25 $pr^2$	0,125 $pr^2$	0
7) $M' - M''$ , różnica powyższych momentów . =	0,5 $pr^2$	0,43302 $pr^2$	0,35355 $pr^2$	0,25 $pr^2$	0





Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , można wyznaczyć grubość sklepienia i zamurowania.

b) Sklepienie półkregowe, nierówno obciążone po linii poziomej  $lm$  (fig. 3) a mianowicie, gdy na jednej połowie sklepienia ciężar  $p' + p''$  na 1<sup>śc</sup> długości jest równo rozłożony po linii poziomej  $lb$ , na drugiej zaś połowie tylko ciężar  $p'$  na 1<sup>śc</sup> długości równo rozłożony po linii  $bm$ .

Równanie momentów sił, działających w przekroju  $bo$ , jest

$$\Sigma XY = AX - \frac{p}{2} X^2, \dots \dots \dots (27)$$

w którym:

$$A = p' X + \frac{p''}{4} X = (p' + \frac{p''}{4}) X,$$

$$X = r \sin \alpha,$$

podstawiając w (27), otrzymamy:

$$\Sigma XY = \frac{r^2}{2} (p' + \frac{p''}{2}) \sin^2 \alpha, \dots \dots \dots (28)$$

Wyrażenie powyższe tem się tylko różni od wyrażenia (2), że zamiast  $p$ , ma  $p' + \frac{p''}{2}$ .

Wszystkie wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, otrzymamy zatem ze wzorów (11), (12), (13), (14), (15), (16) i (17), wstawiając tylko  $(p' + \frac{p''}{2})$  zamiast  $p$ . Wyrażenia te będą następujące:

$$\left. \begin{aligned}
 Q' &= \frac{r}{2} (p' + \frac{p''}{2}) (1 + \cos \alpha), \\
 Q'' &= \frac{r}{2} (p' + \frac{p''}{2}) \cos \alpha, \quad . \quad . \\
 Q' - Q'' &= \frac{r}{2} (p' + \frac{p''}{2}), \quad . \quad . \\
 T &= r (p' + \frac{p''}{2}) (\cos \alpha + \sin^2 \alpha), \\
 M' &= \frac{r^2}{2} (p' + \frac{p''}{2}) (1 + \cos \alpha) \cos \alpha, \\
 M'' &= \frac{r^2}{2} (p' + \frac{p''}{2}) \cos^2 \alpha, \quad . \quad . \\
 M' - M'' &= \frac{r^2}{2} (p' + \frac{p''}{2}) \cos \alpha, \quad .
 \end{aligned} \right\} . \quad . \quad (29)$$

Z powyższych wzorów widać, że wszystkie rozumowania i wnioski, jakie były zrobione przy rozpoznawaniu wzorów dla sklepienia (a), równo obciążonego po linii poziomej, będą te same, z tą tylko różnicą, że zamiast stałego czynnika  $p$ , wzięty będzie czynnik  $p' + \frac{p''}{2}$ ; z tego znowu się okazuje, że sklepienie (b), nierówno obciążone po linii poziomej siłą  $p'$  i  $p' + p''$ , podlegać będzie mniejszemu działaniu sił i momentów sił wewnętrznych, aniżeli sklepienie równo obciążone siłą  $p' + p''$  po linii poziomej.

e) Sklepienie półokrągowe, równoobciążone po linii krzywwej *dabcf* sklepienia (fig. 4).

Równanie momentów sił, działających w *bo* poprzecznym przekroju sklepienia, jest:

$$\Sigma XY = \Lambda X - \int_0^X p x ds, \dots \dots \dots (30)$$

w którym:  $p$ , ciężar na 1<sup>ś</sup> długości linii krzywój

$$\Lambda = \int_0^X p ds,$$

podstawivszy w (30), otrzymamy:

$$\Sigma XY = p X \int_0^X ds - p \int_0^X x ds, \dots \dots \dots (31)$$

albo

$$\Sigma XY = pr X \arcsin \left( \frac{X}{r} \right) - pr (r - \sqrt{r^2 - X^2}), \dots \dots (32 f)$$

Dzieląc zaś  $\Sigma XY$  przez wysokość belki w przekroju  $bo$ , otrzymamy  $Q'$ , ciśnienie w kluczu sklepienia:

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{r - Y},$$

albo,

$$Q' = \frac{pr X \arcsin \left( \frac{X}{r} \right)}{r - \sqrt{r^2 - X^2}} - pr,$$

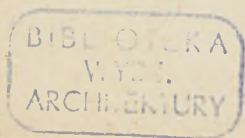
albo,

$$Q' = pr \left[ \frac{X \arcsin \left( \frac{X}{r} \right)}{r - \sqrt{r^2 - X^2}} - 1 \right] \dots \dots (33)$$

podstawivjąc w (33) zamiast  $X$  jego wartość,

$$Q' = pr \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right), \dots \dots \dots (34)$$

Teorya sklepien.



nr. 469

Moment  $M'$ , obalający sklepienie-przyczółek wyrazi się:

$$M' = Q' Y$$

albo,

$$M' = pr^2 \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right] \cos \alpha, \quad . . . . . (35)$$

$M''$ , moment przeciwdziałający momentowi powyższemu  $M'$ , pochodzący od oporu sklepienia-przyczółka, wyrazi się:

$$M'' = A(r - X) + p \int_X^r (r - x) ds,$$

Rozwiązując nitegrały, otrzymamy:

$$M'' = pr^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right), \quad . . . (36 g)$$

Dzieląc  $M''$  przez  $Y$ , otrzymamy  $Q''$ , siłę oporu sklepienia-przyczółka,

$$Q'' = \frac{M''}{Y}$$

albo,

$$Q'' = pr \left[ \frac{\pi}{2 \cos \alpha} - \alpha \operatorname{tg} \alpha - 1 \right], \quad . . . . . (37)$$

Różnica sił  $Q' - Q''$  wyrazi się:

$$Q' - Q'' = pr \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha) \cos \alpha} - \frac{\pi}{2 \cos \alpha} \right], \quad . . . (38 h)$$

Różnica momentów  $M' - M''$  będzie:

$$M' - M'' = pr^2 \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\pi}{2} \right], \quad . . . (39)$$

Mając wyrażenie dla  $Q'$ , ciśnienia w kluczu i dla  $A$  ciśnienia pionowego sklepienia-belki na sklepienie-przycółek, możemy oznaczyć  $T$ , siłę ciśnienia po stycznėj do koła w jakimkolwiek punkcie załamania ( $Y, X$ ) (fig. 4).

$$\max T = Q' \cos \alpha + A \sin \alpha,$$

a ponieważ

$$\max. Q' = pr$$

$$A = pr \alpha$$

Zatem:

$$\max. T = pr (\cos \alpha + \sin \alpha), \quad . . . . (40)$$

Zestawiając wszystkie wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= pr \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right], \quad . . . . \\ Q'' &= pr \left[ \frac{\pi}{2 \cos \alpha} - \alpha \operatorname{tg} \alpha - 1 \right], \quad . . \\ Q' - Q'' &= pr \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\pi}{2} \right] \frac{1}{\cos \alpha}, \\ T &= pr [\cos \alpha + \alpha \sin \alpha], \quad . . . . \\ M' &= pr^2 \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right] \cos \alpha, \quad . . \\ M'' &= pr^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right], \quad . . \\ M' - M'' &= pr^2 \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\pi}{2} \right], \quad . . \end{aligned} \right\} (41)$$

okazuje się:

1) Że  $Q'$ , ciśnienie w kluczu sklepienia będzie *największe* przy takim  $\alpha$ , które będzie czynić zadość równaniu:

$$\frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right] = 0, \quad \dots \quad (42)$$

Rozwiązując równanie (42), otrzymamy

$$\alpha = 0, \quad \dots \quad (43 \text{ i})$$

to jest, że przy  $\alpha = 0$ ,  $Q'$  jest największe a mianowicie

$$\text{max. } Q' = pr, \quad \dots \quad (44 \text{ k})$$

2) Różnica sił  $Q' - Q''$  pokazuje, że samo sklepienie nie jest w stanie zachować równowagi, i dla tego potrzebuje oddzielnego wzmocnienia: albo odpowiedniego zamurowania pach sklepienia, albo odpowiedniego uzbrojenia sklepienia, gdy ono jest z drzewa, lub żelaza, złożone z łuków. Uzbrojenie to powinno być wykonane, jak to już wyżej powiedziano, za pomocą dodatkowych ferm, zbudowanych na bokach łuków.

Moment łamania sklepienia, pochodzący od siły poziomej  $Q' - Q''$ , jest następujący:

$$(Q' - Q'') \frac{(r - Y)}{r} Y$$

czyli, podstawiając odpowiednie wartości:

$$pr^2 \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\pi}{2} \right] \frac{(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} \cos \alpha,$$

albo:

$$pr^2 \left[ \alpha \sin \alpha - \frac{\pi}{2} (1 - \cos \alpha) \right], \quad \dots \quad (45)$$

Wyrażenie (45) jest *największe* przy kącie załamania

$$\alpha = 60^\circ, 50', \quad \dots \quad (46.1)$$

Z powyższego widać, że w punkcie odpowiadającym kątowi  $\alpha = 60^\circ, 50'$ , sklepienie jest *najsłabsze*, i dla tego kąt ten w sklepieniach półkregowych, obciążonych równo po całej swojej

krzywój linii, nazywa się zwyczajnie *kątem załamania*. Takich kątów sklepienie posiada z obu stron po jednym.

3) Różnica momentów  $M' - M''$  wskazuje, że moment sklepienia-przyczółka nie może zrównoważyć momentu sklepienia-belki, a ztąd wypada, że sklepienie samo bez zamurowania lub uzbrojenia, pozostać w równowadze nie może.

Jakie siły i momenty sił działają w sklepieniu przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , objaśnia Tablica (47).

T A B L I C A . . . . . (47)

Siły i momenty sił	Przy kącie załamania $\alpha =$				
	0°	30°	45°	60°	90°
$Q' =$	$pr$	0,95491 $pr$	0,89613 $pr$	0,81380 $pr$	0,5708 $pr$
$Q'' =$	0,57080 $pr$	0,51139 $pr$	0,43499 $pr$	0,32636 $pr$	0
$Q' - Q'' =$	0,42920 $pr$	0,44352 $pr$	0,46114 $pr$	0,48744 $pr$	0,5708 $pr$
$T =$	$pr$	1,12783 $pr$	1,26247 $pr$	0,40690 $pr$	1,57080 $pr$
$M' =$	$pr^2$	0,82698 $pr^2$	0,63419 $pr^2$	0,40726 $pr^2$	0
$M'' =$	0,57080 $pr^2$	0,44287 $pr^2$	0,30811 $pr^2$	0,16354 $pr^2$	0
$M' - M'' =$	0,42920 $pr^2$	0,38411 $pr^2$	0,32608 $pr^2$	0,24372 $pr^2$	0

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , można wyznaczyć odpowiednie grubości sklepienia i zamurowania.

d) Sklepienie półokręgowe, nierówno obciążone po linii krzywej *dabcf* (fig. 5), a mianowicie, gdy na jednej połowie sklepienia  $p' + p''$  na 1<sup>śé</sup> długości jest równo rozłożony po linii krzywej *dab*, na drugiej zaś połowie tylko ciężar  $p'$  na 1<sup>śé</sup> długości równo rozłożony po linii *bcf*.

Równanie momentów sił, działających w przekroju *bo*, jest:

$$\Sigma XY = AX - \int_0^X p' x ds,$$

w którym:

$$A = p' \int_0^X ds + \frac{p''}{2r} \int (r - x) ds, \dots (48)$$

rozwiązując powyższe, otrzymamy:

$$A = p' r \alpha + \frac{p'' r}{2} [\alpha - (1 - \cos \alpha)], \quad (49 \text{ m})$$

zaś

$$\int_0^X p' x ds = p' r^2 (1 - \cos \alpha) \dots (50)$$

Podstawiając (49 m) i (50) w pierwsze równanie, otrzymamy:

$$\Sigma XY = [\alpha \sin \alpha - (1 - \cos \alpha)] (p' r^2 + \frac{p'' r^2}{2} \sin \alpha), \dots (51)$$

Dzieląc zaś  $\Sigma XY$  przez wysokość belki w przekroju *bo*, otrzymamy  $Q'$  ciśnienie w kluczu sklepienia

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{r - Y},$$

albo,

$$Q' = \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right] \left( p' r + \frac{p'' r}{2} \sin \alpha \right), \quad (52)$$

Z powyższego widzimy że dla wyznaczenia sił i momentów, działających w sklepieniu nierówno obciążonem po linii krzy-



wój, dostatecznem jest we wzorach (41) zamiast  $pr$ , podstawić  $(p'r + \frac{p''r}{2} \sin \alpha)$ , a z otrzymanych wtenczas wzorów okażą się, że sklepienie ( $d$ ) nie równo obciążone po linii krzywej siłą  $p'$  i  $p'+p''$  na 1<sup>śc</sup> długości, podlegać będzie mniejszemu działaniu sił i momentów sił wewnętrznych, aniżeli sklepienie równo obciążone siłą  $p'+p''$  na 1<sup>śc</sup> długości po całej linii krzywej.

e) Sklepienie półokręgowe, przyjmując, że ciężar sklepienia jest równo rozłożony po linii krzywej sklepienia, a ciężar dodatkowy — po linii poziomej przechodzącej po wierzchu sklepienia.

W tym przypadku wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, otrzymane będą z połączenia wzorów (11).... (17) i (41), przyjmując, że  $p'$  jest ciężar dodatkowy na 1<sup>śc</sup> długości linii poziomej  $p''$  jest ciężar sklepienia na 1<sup>śc</sup> długości linii krzywej.

Wzory te będą następujące:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{p'r}{2} (1 + \cos \alpha) + p''r \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right], \dots \\ Q'' &= \frac{p'r}{2} \cos \alpha + p''r \left[ \frac{\pi}{2 \cos \alpha} - \alpha \operatorname{tg} \alpha - 1 \right], \dots \\ Q' - Q'' &= \frac{p'r}{2} + p''r \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\pi}{2} \right] \frac{1}{\cos \alpha}, \dots \\ T &= p'r (\cos \alpha + \sin^2 \alpha) + p''r (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha), \dots \\ M' &= \frac{p'r^2}{2} (1 + \cos \alpha) \cos \alpha + p''r^2 \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right] \cos \alpha, \\ M'' &= \frac{p'r^2}{2} \cos^2 \alpha + p''r^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right], \\ M' - M'' &= \frac{p'r^2}{2} \cos \alpha + p''r^2 \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\pi}{2} \right], \dots \end{aligned} \right\} \dots (53)$$

Siły i momenty sił, działające w sklepieniu przy różnych  $\alpha$ , kątach załamania, objaśnia Tablica następująca.

TABLICA . . .

Siły i momenty sił	Przy kącie	
	0°	30°
$Q' =$	$p'r + p''r$	$0,93301p'r + 0,95401p''r$
$Q'' =$	$0,5p'r + 0,5708p''r$	$0,43301p'r + 0,51139p''r$
$Q' - Q'' =$	$0,5p'r + 0,4292p''r$	$0,5p'r + 0,44352p''r$
$T =$	$p'r + p''r$	$1,1162p'r + 1,12783p''r$
$M' =$	$p'r^2 + p''r^2$	$0,80802p'r^2 + 0,82698p''r^2$
$M'' =$	$0,5p'r^2 + 0,5708p''r^2$	$0,375p'r^2 + 0,44287p''r^2$
$M' - M'' =$	$0,5p'r + 0,4292p''r^2$	$0,43302p'r^2 + 0,38411p''r^2$

. . . . . (54)

**z a l a m a n i a**      $\alpha =$

45°	60°	90°
$0,85355p'r + 0,89613p''r$	$0,75p'r + 0,81138p''r$	$0,50p'r + 0,5708p''r$
$0,35355p'r + 0,43499p''r$	$0,25p'r + 0,32636p''r$	0 + 0
$0,50p'r + 0,46114p''r$	$0,50p'r + 0,48744p''r$	$0,50p'r + 0,5708p''r$
$1,2071p'r + 1,26247p''r$	$1,250p'r + 1,4069p''r$	$p'r + 1,5708p''r$
$0,60356p'r^2 + 0,63419p''r^2$	$0,375p'r^2 + 0,40726p''r^2$	0 + 0
$0,25p'r^2 + 0,30811p''r^2$	$0,125p'r^2 + 0,16354p''r^2$	0 + 0
$0,35355p'r^2 + 0,32608p''r^2$	$0,25p'r^2 + 0,24372p''r^2$	0 + 0

f) Zastosowanie powyższych wzorów dla oznaczenia grubości sklepień półokręgowych murowanych i grubości zamurowania sklepień.

1. Grubość sklepień.

Przypuszczając, że ciężar samego sklepienia jest równo rozłożony po krzywej sklepienia, a obciążenie sklepienia jest równo rozłożone po linii poziomej, przechodzącej po wierzchu sklepienia, równanie równowagi sił, działających w kluczu sklepienia, będzie:

$$Q' = 144 Re,$$

albo:

$$(p + \delta e) \left( r + \frac{e}{2} \right) = 144 Re, \quad . . . . (55)$$

w którym:

$p$ , jest obciążenie sklepienia w pudach, przypadające na każdą stopę długości i równo rozłożone po linii poziomej, przechodzącej po wierzchu sklepienia.

$\delta$ , oznacza ciężar w pudach jednej stopy sześciennój sklepienia.

$e$ , grubość sklepienia w kluczu, w stopach,

$r$ , promień podniebienia sklepienia, w stopach.

Uwaga. Stopy tu przyjęte, są angielskie.

$Q$ , siła ciśnienia w kluczu, wyprowadzona na zasadzie wzorów (54), z tą tylko różnicą, że zamiast  $r$ , wzięto  $\left( r + \frac{e}{2} \right)$ , a to dla tego, że przy obliczaniu sił, działających w sklepieniu, dla uproszczenia rachunku, sklepienie uważane było, jako linia koła, którego promień był  $r$ ; obecnie zaś, kiedy sklepienie posiada grubość  $e$ , należy do rachunku przyjąć linię koła, którego promień jest  $\left( r + \frac{e}{2} \right)$ , to jest takie koło, które prawie przechodzi przez środki ciężkości sklepienia.

$R$ , współczynnik wytrzymałości materiału, z którego sklepienie ma być zbudowane. Współczynnik ten wyraża się w pudach na 1<sup>en</sup> cal kwadratowy poprzecznego przekroju sklepienia.

Dla obliczenia naszego przyjmujemy jeszcze, że długość sklepienia, licząc w kierunku prostopadłym do rysunku (fig. 1), jest jedna stopa.

Rozwiązując równanie (55), otrzymamy:

$$e = - \left[ r + \frac{p}{2\delta} - 144 \frac{R}{\delta} \right] - \sqrt{\left[ r + \frac{p}{2\delta} - 144 \frac{R}{\delta} \right]^2 - \frac{2pr}{\delta}}, \quad (56n)$$

Dla oznaczenia  $e'$ , grubości sklepienia w łożysku, odpowiadającym kątowni załamania  $\alpha = 60^\circ$ , przy którym  $T$ , ciśnienie na to łożysko, jest (Tabl. 54).

$$T = 1,250p \left( r + \frac{e'}{2} \right) + 1,4069\delta e' \left( r + \frac{e'}{2} \right)$$

albo:

$$T = (1,25p + 1,4069\delta e') \left( r + \frac{e'}{2} \right)$$

weźmiemy równanie równowagi:

$$(1,25p + 1,4069\delta e') \left( r + \frac{e'}{2} \right) = 144 Re'.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy:

$$e' = - \left[ r + 0,444 \frac{p}{\delta} - 102,35 \frac{R}{\delta} \right] \pm \sqrt{\left[ r + 0,444 \frac{p}{\delta} - 102,35 \frac{R}{\delta} \right]^2 - 1,777 \frac{pr}{\delta}}, \quad \dots \quad (57. o)$$

Dla oznaczenia  $e''$ , grubości sklepienia w łożysku, odpowiadającym kątowni załamania  $\alpha = 90^\circ$ , przy którym  $T$  ciśnienie na to łożysko jest (Tabl. 54).

$$T = p \left( r + \frac{e''}{2} \right) + 1,5708 \delta e'' \left( r + \frac{e''}{2} \right)$$

albo

$$T = (p + 1,5708 \delta e'') \left( r + \frac{e''}{2} \right)$$

weźmiemy równanie równowagi:

$$(p + 1,5708 \delta e'') \left( r + \frac{e''}{2} \right) = 144 R e''$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy:

$$e = - \left[ r + 0,3183 \frac{p}{\delta} - 91,673 \frac{R}{\delta} \right] - \sqrt{\left[ r + 0,3183 \frac{p}{\delta} - 91,673 \frac{R}{\delta} \right]^2 - 1,2732 \frac{p r}{\delta}}, \dots (58)$$

**Uwaga.** W równaniu powyższém, wyrażenie pod znakiem pierwiastka nie może być odjemne, a najmniejsze znaczenie jego może być tylko zero, a mianowicie:

$$\left[ r + 0,3183 \frac{p}{\delta} - 91,673 \frac{R}{\delta} \right]^2 - 1,2732 \frac{p r}{\delta} = 0,$$

Przypuszczając, że  $p = 0$ , to jest że sklepienie wcale nie jest obciążone i ma znosić li tylko ciężar swój własny, wtenczas równanie będzie:

$$r - 91,673 \frac{R}{\delta} = 0, \dots (59)$$

Z równania (59) możemy oznaczyć największe promienie, jakie mogą być dane sklepieniom, nieobciążonym żadnym ciężarem, a znoszącym li tylko ciężar własny.

Największe te promienie zależą od gatunku materyału, z jakiego sklepienie ma być zbudowane, to jest od wytrzymałości  $R$  i ciężaru  $\delta$  tego materyału (59).

Tablica następująca objaśni ten stosunek.

T A B L I C A . . . . . (60)

Materiał z którego sklepienie zbudowane	$R$ , współczynnik wytrzymałości materiału, w pu- dach na 1 □ cal	$\delta$ , ciężar jednej stopy sześciennnej materiału, w pu- dach	$r$ , największy promień podnie- bienia sklepienia, w stopach,
Cegła . . . . .	1,6	2,7	54,08
Kamień wapienny .	12	4,5	244,45
Granit . . . . .	15	5,	275,01
Drzewo sosnowe .	12	1,	1100,04
Żelazo kute . . .	260	13,31	1791,23
Żelazo lane . . .	420	12,5	3080,11

Dla sklepień murowanych z *cegly* w równaniach (56), (57) i (58), należy zamiast  $R$  i  $\delta$  podstawić ich wartości, a mianowicie:  $R = 1,6$ , i  $\delta = 2,7$ ; a wtenczas otrzymamy:

1) Dla  $e$ , grubości sklepienia w kluczu:

$$e = -\left(r + \frac{p}{5,4} - 85,33\right) - \sqrt{\left(r + \frac{p}{5,4} - 85,33\right)^2 - \frac{pr}{1,35}} \quad (61)$$

Przy różnych  $p$ , obciążeniach sklepienia i różnych  $r$ , promieniach podniebienia sklepień, otrzymamy różne znaczenia dla  $e$ , jak to tablica (62) objaśnia.

T A B L I C A . . . . . (62)

grubości sklepień w kluczu, murowanych z cegły, przy rozmaitem obciążeniu i różnych promieniach.

$p$ w pudach na 1' □	$e$ grubość w kluczu w stopach	$r$ , w stopach									
		2,5'	5'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	70'	80'
2	$e =$	0,03	0,05	0,11	0,24	0,43	0,68	1,09	1,87	4,05	√-1
5	„	0,06	0,12	0,26	0,68	1,03	1,70	2,81	5,18	√-1	
10	„	0,12	0,22	0,51	1,18	2,12	3,55	5,07	13,08		
20	„	0,24	0,55	1,05	2,48	4,50	7,89	15,50	√-1		
30	„	0,37	0,78	1,62	3,84	7,21	13,44	√-1			
40	„	0,50	1,03	2,22	5,37	10,41	22,03				
50	„	0,64	1,32	2,87	7,15	13,27	√-1				
60	„	0,78	1,63	3,59	8,94	19,29					
70	„	0,93	1,96	4,31	11,08	26,89					
80	„	1,10	2,30	5,12	13,55	√-1					
90	„	1,28	2,68	6,00	16,50						
100	„	1,43	3,08	6,95	20,17						
110	„	1,66	3,50	8,00	25,17						
120	„	1,98	4,28	9,94	√-1						
130	„	2,09	4,46	10,46							
140	„	2,33	4,91	11,96							
150	„	2,58	5,59	13,64							
160	„	2,87	6,23	15,65							
200	„	4,24	9,91	√-1							
312,85	„	√-1	√-1								

2) Dla  $e'$ , grubości sklepienia w łożysku, odpowiadającym kątowi załamania  $\alpha = 60^\circ$ , z równania (57, o), podstawivszy  $R = 1,6$ , a  $\delta = 2,7$ , otrzymamy:

$$e' = - (r + 0,164p - 60,65) - \sqrt{(r + 0,164p - 60,65)^2 - 0,66pr} \quad (63)$$



Przy różnym  $p$ , obciążeniu sklepienia i różnych  $r$  promieniach podniebienia sklepienia, otrzymamy różne znaczenia dla  $e'$  jako Tablica (64) objaśnia.

T A B L I C A . . . . . (64)

grubości  $e'$  sklepienia murowanego z cegły w łożysku, odpowiadającym kątowni załamania  $\alpha = 60^\circ$ , przy rozmaitem obciążeniu  $p$  i różnych  $r$ , promieniach podniebienia.

$p$ , w pudach na 1' □	$e'$ , w stopach	$r$ , w stopach							
		2,5'	5'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
2	$e' =$	0,03	0,06	0,16	0,33	0,66	1,45	3,96	$\sqrt{-1}$
5	"	0,08	0,16	0,34	0,84	1,71	3,63	$\sqrt{-1}$	
10	"	0,15	0,31	0,68	1,74	3,65	9,15		
20	"	0,31	0,63	1,42	3,73	8,59	$\sqrt{-1}$		
30	"	0,47	1,13	2,23	6,06	17,49			
40	"	0,65	1,68	3,11	8,91	$\sqrt{-1}$			
50	"	0,84	1,78	4,09	12,63				
60	"	1,04	2,22	5,19	18,27				
70	"	1,26	2,59	6,43	$\sqrt{-1}$				
80	"	1,50	3,23	7,89					
90	"	1,75	3,81	9,55					
100	"	2,03	4,46	11,60					
150	"	3,92	9,40	$\sqrt{-1}$					
200	"	7,67	$\sqrt{-1}$						
234,65	"	$\sqrt{-1}$							

3) Dla  $e''$ , grubości sklepienia w łożysko, odpowiadającym kątowni  $\alpha = 90^\circ$ , w równaniu (58), podstawivszy  $R = 1,6$ , oraz  $\delta = 2,7$ , otrzymamy:

$$e'' = (54,09 - r - 0,118p) - \sqrt{(54,09 - r - 0,118p)^2 - 0,471pr},$$

Przy różnem  $p$ , obciążeniu sklepienia, i różnych  $r$ , promieniach podniebienia sklepienia, otrzymany różne znaczenia dla  $e'$ , jakto Tablica następująca objaśnia.

T A B L I C A . . . . . (64)'

grubości  $e''$  sklepienia, murowanego z cegły, w łożysku, odpowiadającym kąтови  $\alpha = 90^\circ$ , przy rozmaitem obciążeniu  $p$ , i różnych  $r$ , promieniach podniebienia.

$p$ , w pudach na 1' $\square$	$e''$ w stopach	$r$ , w s t o p a c h,						
		2,5'	5'	10'	20'	30'	40'	50'
2	$e'' =$	0,03	0,05	0,11	0,28	0,60	1,44	$\sqrt{-1}$
5	„	0,06	0,13	0,18	0,72	1,56	3,60	
10	„	0,13	0,25	0,56	1,45	3,33	$\sqrt{-1}$	
20	„	0,23	0,51	1,15	3,02	7,97		
30	„	0,37	0,78	1,79	5,05	$\sqrt{-1}$		
40	„	0,51	1,08	2,48	7,33			
50	„	0,65	1,39	3,22	10,20			
60	„	0,81	1,72	4,04	13,20			
70	„	0,97	2,08	4,96	32,24			
80	„	1,14	2,46	5,95	$\sqrt{-1}$			
90	„	1,43	2,87	7,09				
100	„	1,51	3,31	8,41				
150	„	2,72	6,25	$\sqrt{-1}$				
200	„	4,50	8,85					
282,31	„	$\sqrt{-1}$	$\sqrt{-1}$					

Z dwóch Tablic (64) i (64)' biorąc największe i możliwe znaczenia dla  $e'''$  grubości sklepienia, otrzymamy następującą Tablicę:

TABLICA . . . . . (64)''

p, w pudach na 1' □	e''' w stopach	r, w stopach,						
		2,5'	5'	10'	20'	30'	40'	50'
2	e''' =	0,03	0,06	0,16	0,33	0,66	1,45	√-1
5	„	0,08	0,16	0,34	0,84	1,71	3,36	
10	„	0,15	0,31	0,68	1,74	3,65	√-1	
20	„	0,31	0,63	1,42	3,73	8,59		
30	„	0,47	1,13	2,23	6,06	√-1		
40	„	0,65	1,68	3,11	8,91			
50	„	0,84	1,78	4,09	12,63			
60	„	1,04	2,22	5,19	18,27			
70	„	1,26	2,59	6,43	√-1			
80	„	1,50	3,23	7,89				
90	„	1,75	3,81	9,55				
100	„	2,03	4,46	11,60				
150	„	3,92	9,40	√-1				
200	„	7,67	√-1					
234,65	„	√-1						

Z Tablic powyższych otrzymujemy niektóre grubości tak małe, że sklepienie jest pozbawione sztywności.

Wiadomem jest z praktyki, że warunek równowagi słupa gniecionego jest pewien stosunek grubości słupa od jego wysokości. W razie niezachowania tego stosunku, słup może się zgiąć i w następstwie się złamać.

Sklepienie, będąc gniecione w całej swojej długości, [licząc tę długość po krzywej sklepienia pomiędzy punktami załamania  $\alpha = -60^{\circ}$  i  $\alpha = +60^{\circ}$ ], może być uważane za krzywy gnieciony słup, którego długość będzie  $\frac{2}{3} \pi r$ , a grubości—e, grubość sklepienia.

Dla uniknięcia zgięcia się sklepienia, to jest, dla zachowania sztywności, potrzeba aby był pewien zachowany stosunek pomiędzy  $\frac{2}{3} \pi r$ , długością sklepienia, i  $e$ , jego grubością.

Stosunek wysokości do grubości słupów murowanych z cegły może być przyjęty następujący:

Przy ciśnieniu w pudach na 1 cal kw.	Stosunek
1,60	12
1,20	18
0,80	24
0,60	36
0,50	42
0,40	48
0,30	72
0,20	96

Przyjmując pod uwagę powyższy warunek sztywności, jak również przyjmując najmniejszą grubość sklepienia na 0,5 stopy, czyli na pół cegły, poprawione Tablice grubości sklepień będą następujące:



TABLICA (poprawiona). . . . . (66)

największej grubości  $e'''$  sklepień, murowanych z cegły, w łożysku odpowiadajacem kątowni załamania  $\alpha = 60^\circ$ , lub  $\alpha = 90^\circ$ , przy rozmaitem obciążeniu  $p$ , i różnych  $r$ , promieniach podniebienia.

$p$ , w pudach na 1' □	$e'''$ , w stopach	$r$ , w stopach						
		2,5'	5'	10'	20'	30'	40'	50'
2	$e''' =$	0,50	0,50	0,50	1,50	2,50	4	$\sqrt{-1}$
5	„	0,50	0,65	0,82	1,80	3,00	5	
10	„	0,50	0,70	0,13	2,25	3,65	$\sqrt{-1}$	
20	„	0,50	0,80	1,44	3,73	8,59		
30	„	0,50	1,13	2,23	6,06	$\sqrt{-1}$		
40	„	0,65	1,68	3,11	8,91			
50	„	0,84	1,78	4,09	12,63			
60	„	1,04	2,22	5,19	18,27			
70	„	1,26	2,59	6,43	$\sqrt{-1}$			
80	„	1,50	3,23	7,89				
90	„	1,75	3,81	9,55				
100	„	2,03	4,46	11,60				
150	„	3,92	9,40	$\sqrt{-1}$				
200	„	7,67	$\sqrt{-1}$					
234,65	„	$\sqrt{-1}$						

Objaśnienia użycia Tablicy (66).

Weźmy naprzykład sklepienie, którego promień podniebienia  $r = 30$  stóp; a obciążenie sklepienia jest  $p = 20$  pud, odpowiednia grubość sklepienia z Tablicy (66) będzie  $e' = 8,59$  stóp.

Z uwagi, że sklepienie z cegły murują się zawsze jednój grubości po całej linii krzywój, zatem do użycia praktycznego wyłącznie służyć będzie, dla oznaczenia grubości sklepienia, Tablica (66).

Dla nadania sklepieniu sztywności w kierunku poziomym, należy długość sklepienia, którą przyjmujemy w kierunku prostopadłym do rysunku (fig. 1) dać nie mniejszą od  $r$ , to jest: sklepienie półokregowe pełne należy budować takie tylko, którego długość nie będzie mniejszą od połowy jego otwartości.

## 2) Grubość zamurowania sklepienia.

Grubość zamurowania otrzymaną będzie z równania równowagi dwóch momentów: jednego obalającego

$$M' - M'' = 0,5 (p + \delta e) \left(r + \frac{e}{2}\right)^2,$$

a drugiego momentu oporu zamurowania (fig. 6)

$$\delta (r + e) \frac{l^2}{2},$$

Równanie to będzie:

$$0,5 (p + \delta e) \left(r + \frac{e}{2}\right)^2 = \delta (r + e) \frac{l^2}{2}, \quad (67)$$

W równaniu tem:

$p$ , oznacza obciążenie sklepienia w pudach równo rozłożone po linii poziomój, przechodzącój przez wierzch sklepienia.

$\delta$ , ciężar 1<sup>ści</sup> objętości muru w pudach.

$e$ , grubość sklepienia w stopach.

$r$ , promień podniebienia sklepienia w stopach.

$l$ , grubość przymurowania w stopach  $l = mn$ , (fig. 6).

Rozwiązując równanie (67) otrzymamy:

$$l = \left( r + \frac{e}{2} \right) \sqrt{\frac{p + \delta e}{\delta (r + e)}}, \dots \dots (68)$$

Do równania (67), (68), nie jest wprowadzony moment nadsklepienia  $bmge$ . Ciężar tego nad sklepienia pójdzie zatem na korzyść równowagi stałej.

Przyjmując, że sklepienie i przymurowanie są wyprowadzone z cegły, należy w równaniu (68), zamiast  $\delta$  podstawić jego wartość to jest  $\delta = 2,7$  pud., a wtenczas otrzymamy:

$$l = \left( r + \frac{e}{2} \right) \sqrt{\frac{p + 2,7 e}{2,7 (r + e)}}, \dots \dots (69)$$

Dając różne znaczenia dla  $p$  i  $r$ , dla  $e$  zaś biorąc wartości odpowiednie z Tablicy (66), otrzymamy różne wartości dla  $l$ , co bliżej Tablica następująca (70) objaśnia.



T A B L I C A . . . . . (70)

grubości  $l$  przymurowania z cegły (fig. 6) przy sklepieniach murowanych też z cegły, przy różnem  $p$ , obciążeniu sklepienia i  $e$  różnej grubości jego.

$p$ w pudach	$l$ , w stopach	$r$ , w stopach					
		5'	10'	20'	30'	40'	50'
2	$l = \text{stop.}$	2,52	3,50	6,64	10,00	13,86	$\sqrt{-1}$
5	„	3,51	5,10	8,57	12,07	16,57	
10	„	4,65	6,97	10,77	14,95	$\sqrt{-1}$	
20	„	6,37	9,43	14,86	21,95		
30	„	7,84	11,55	18,65	$\sqrt{-1}$		
40	„	9,11	13,40	22,00			
50	„	10,25	15,18	25,52			
60	„	11,24	16,87	34,37			
70	„	12,26	18,49	$\sqrt{-1}$			
80	„	13,21	19,35				
90	„	14,14	21,71				
100	„	15,11	23,70				
150	„	20,56	$\sqrt{-1}$				
200	„	$\sqrt{-1}$					

**Uwaga.** Gdyby naprzykład sklepienie złożone było z żelaznych łuków, to dla zrównoważenia siły  $Q' - Q''$ , jak to wyżej, powiedziano, należy uzbroić łuki za pomocą dodatkowych ferm, zbudowanych na bokach łuków.

## II. Sklepienia okręgowe spłaszczone.

- a) Gdy ciężar jest równo rozłożony po linii poziomej, przechodzącej przez wierzch sklepienia (fig. 7).

Wyrażenie dla  $Q'$ , ciśnienia w kluczu sklepienia, będzie takie same jak (3a), a mianowicie:

$$Q = \frac{pr}{2} (1 + \cos \alpha), \quad . . . . . (71)$$

$M'$ , moment zaś obalający sklepienie-przyczółek:

$$M' = Q' (Y - \eta)$$

albo

$$M' = \frac{pr^2}{2} (1 + \cos \alpha) (\cos a - \cos \alpha) . . . (72)$$

$M''$ , moment oporu przyczółka-sklepienia, będzie:

$$M'' = A (\bar{x} - X) + p \int_X^{\bar{x}} (\bar{x} - x) dx$$

albo:

$$M'' = \frac{pr^2}{2} (\sin^2 a - \sin^2 \alpha), \quad . . . . . (73 p)$$

Zatem:

$$M' - M'' = \frac{pr^2}{2} (\cos \alpha - \cos a - \cos a \cos \alpha + \cos^2 a) \dots (74)$$

$Q''$ , siła oporu sklepienia przyczółka:

$$Q'' = \frac{M''}{Y - \eta} = \frac{pr}{2} (\cos \alpha + \cos a) \dots (75)$$

zaś:

$$Q' - Q'' = \frac{pr}{2} (1 - \cos a), \dots (76)$$

$T$ , siła ciśnienia w sklepieniu po stycznej do koła będzie, jak w (10 c), a mianowicie:

$$T = pr (\cos \alpha + \sin^2 \alpha), \dots (77)$$

Zestawiając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{pr}{2} (1 + \cos \alpha), \dots \\ Q'' &= \frac{pr}{2} (\cos \alpha + \cos a), \dots \\ Q' - Q'' &= \frac{pr}{2} (1 - \cos a), \dots \\ T &= pr (\cos \alpha + \sin^2 \alpha), \dots \\ M' - M'' &= \frac{pr^2}{2} (\cos \alpha - \cos a - \cos a \cos \alpha + \cos^2 a), \dots \end{aligned} \right\} (78)$$

Z powyższego okazuje się, że:

- 1)  $Q'$ , ciśnienie w kluczu jest największe, przy  $\alpha = 0$ .
- 2)  $Q' - Q''$ , jest stałą wielkością niezależną od  $\alpha$ .

Moment łamania sklepienia, pochodzący od siły poziomej  $Q' - Q''$ , jest następujący:

$$(Q' - Q'') \frac{(r - Y)}{(r - \eta)} (Y - \eta)$$

Moment ten jest największy przy

$$\cos \alpha = \frac{1 + \cos a}{2}, \quad \dots \dots \dots (79 \text{ q})$$

to jest, że w punkcie, odpowiadającym kątowi  $\alpha$ , sklepienie jest najsłabsze. Punkt ten znajduje się na połowie wysokości sklepienia, jak to widać z wyrażenia (79 q).

3)  $M' - M''$ , różnica momentów pokazuje, że samo sklepienie nie może pozostać w równowadze, i że dla zachowania równowagi potrzebuje zamurowania, lub uzbrojenia.

Dla bliższego objaśnienia sił i momentów sił, działających w sklepieniu okręgowem spłaszczonem, przy różnych kątach  $a$  i różnych kątach załamania  $\alpha$ , podajemy następującą Tablicę (80):

T A B L I C A . . . . . (80)

Kat $\alpha$	Sily i momenty	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
90°	$Q' =$	<i>pr</i>	0,93301 <i>pr</i>	0,85355 <i>pr</i>	0,75 <i>pr</i>	0,50 <i>pr</i>
90°	$Q' - Q'' =$	0,5 <i>pr</i>	0,50 <i>pr</i>	0,50 <i>pr</i>	0,50 <i>pr</i>	0,50 <i>pr</i>
90°	$T =$	<i>pr</i>	1,11620 <i>pr</i>	1,2071 <i>pr</i>	1,250 <i>pr</i>	<i>pr</i>
90°	$M' - M'' =$	0,5 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,43302 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,35355 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,25 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0
60°	$Q' =$	<i>pr</i>	0,93301 <i>pr</i>	0,85355 <i>pr</i>	0,75 <i>pr</i>	"
60°	$Q' - Q'' =$	0,25 <i>pr</i>	0,25 <i>pr</i>	0,25 <i>pr</i>	0,25 <i>pr</i>	"
60°	$T =$	<i>pr</i>	1,1162 <i>pr</i>	1,2071 <i>pr</i>	1,250 <i>pr</i>	"
60°	$M' - M'' =$	0,125 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,09151 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,05177 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0	"
45°	$Q' =$	<i>pr</i>	0,93301 <i>pr</i>	0,85355 <i>pr</i>	"	"
45°	$Q' - Q'' =$	0,14645 <i>pr</i>	0,14645 <i>pr</i>	0,14645 <i>pr</i>	"	"
45°	$T =$	<i>pr</i>	1,1162 <i>pr</i>	1,2071 <i>pr</i>	"	"
45°	$M' - M'' =$	0,04289 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,02327 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0	"	"
30°	$Q' =$	<i>pr</i>	0,93301 <i>pr</i>	"	"	"
30°	$Q' - Q'' =$	0,06699 <i>pr</i>	0,06699 <i>pr</i>	"	"	"
30°	$T =$	<i>pr</i>	1,1162 <i>pr</i>	"	"	"
30°	$M' - M'' =$	0,00897 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0	"	"	"

b) Sklepienia okręgowe spłaszczone, równo obciążone po linii krzywój *abc* sklepienia (fig. 8).

$Q'$ , ciśnienie w kluczu sklepienia wyrazi się tak samo jak (34), a mianowicie:

$$Q' = pr \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right) \dots \dots \dots (81)$$

$M'$ , moment obalający sklepienie-przyczółek, będzie:

$$M' = Q' (Y - \eta)$$

albo,

$$M' = pr^2 \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right) (\cos \alpha - \cos a), \dots \dots \dots (82)$$

$M''$ , moment oporu sklepienia-przyczółka, wyrazi się:

$$M'' = A (\xi - X) + p \int_X^\xi (\xi - x) ds,$$

rozwiązując, otrzymamy:

$$M'' = pr^2 (a \sin a - \alpha \sin \alpha + \cos a - \cos \alpha), \dots \dots \dots (83 r)$$

Różnica tych momentów będzie:

$$M' - M'' = pr^2 \left[ \frac{(1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos a)} \alpha \sin \alpha - a \sin a \right], \dots \dots \dots (84)$$

Różnica sił poziomych  $Q' - Q''$  w punkcie załamania  $\alpha$ , będzie:

$$Q' - Q'' = \frac{M' - M''}{Y - \eta},$$

albo:

$$Q' - Q'' = pr \left[ \frac{(1 - \cos a)}{(1 - \cos \alpha)} \alpha \sin \alpha - a \sin a \right] \frac{1}{\cos \alpha - \cos a}, \dots \dots \dots (85)$$

Ciśnienie poziome sklepienia-przyczółka w punkcie załamania:

$$Q'' = pr \left[ \frac{a \sin a - \alpha \sin \alpha}{\cos a - \cos \alpha} - 1 \right], \dots \dots (86)$$

Ciśnienie  $T$  po stycznej koła jak wzór (40).

$$T = pr (\cos a + \alpha \sin \alpha), \dots \dots (87)$$

Zestawiając wszystkie wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu.

$$\left. \begin{aligned} Q' &= pr \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right), \dots \dots \dots \\ Q'' &= pr \left[ \frac{a \sin a - \alpha \sin \alpha}{\cos a - \cos \alpha} - 1 \right], \dots \dots \dots \\ Q' - Q'' &= pr \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)} (1 - \cos a) - a \sin a \right], \dots \\ T &= pr (\cos a + \alpha \sin^2 a), \dots \dots \dots \\ M' &= pr^2 \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right) (\cos a - \cos \alpha), \dots \dots \dots \\ M'' &= pr^2 (a \sin a - \alpha \sin \alpha + \cos a - \cos \alpha), \dots \dots \dots \\ M' - M'' &= pr^2 \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)} (1 - \cos a) - a \sin a \right], \dots \end{aligned} \right\} \dots (88)$$

okazuje się:

1) Że  $Q'$ , jest największe przy  $\alpha = 0$ , i ze wzoru (44 k),

$$\max. Q' = pr$$

2) Różnica sił  $Q' - Q''$ , oraz różnica momentów  $M' - M''$  pokazują, że sklepienie samo zostać w równowadze nie może i że równowaga ta osiągniętą być może przez odpowiednie zamurowanie sklepienia, i odpowiednie uzbrojenie łuków sklepienia.

Dla bliższego objaśnienia sił i momentów sił, działających w sklepieniu *okręgowem spłaszczonem* przy różnych kątach  $a$  i przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , podajemy następującą Tablicę (89).

T A B L I C A . . . . . (89)

kat $\alpha$	Sily i momenty	przy $\alpha = 0^\circ$	przy $\alpha = 30^\circ$	przy $\alpha = 45^\circ$	przy $\alpha = 60^\circ$	przy $\alpha = 90^\circ$
90°	$Q' =$	$pr$	0,95491 $pr$	0,89613 $pr$	0,81380 $pr$	0,5708 $pr$
90°	$Q' - Q'' =$	0,443920 $pr^2$	0,44352 $pr$	0,46114 $pr$	0,48744 $pr$	0,5708 $pr$
90°	$T =$	$pr$	1,12783 $pr$	1,26247 $pr$	1,4069 $pr$	1,5708 $pr$
90°	$M' - M'' =$	0,42920 $pr^2$	0,38411 $pr$	0,32608 $pr^2$	0,24372 $pr^2$	0
60°	$Q' =$	$pr$	0,95491 $pr$	0,89613 $pr$	0,81380 $pr$	"
60°	$Q' - Q'' =$	0,18620 $pr$	0,19239 $pr$	0,19878 $pr$	0,20921 $pr$	"
60°	$T =$	$pr$	1,12783 $pr$	1,26247 $pr$	1,4069 $pr$	"
60°	$M' - M'' =$	0,09310 $pr^2$	0,07055 $pr^2$	0,04116 $pr^2$	0	"
45°	$Q' =$	$pr$	0,95491 $pr$	0,89613 $pr$	"	"
45°	$Q' - Q'' =$	0,10386 $pr$	0,10823 $pr$	0,11073 $pr$	"	"
45°	$T =$	$pr$	1,12783 $pr$	1,26247 $pr$	"	"
45°	$M' - M'' =$	0,03042 $pr^2$	0,01711 $pr^2$	0	"	"
30°	$Q' =$	$pr$	0,95491 $pr$	"	"	"
30°	$Q' - Q'' =$	0,04583 $pr$	0,05001 $pr$	"	"	"
30°	$T =$	$pr$	1,12783 $pr$	"	"	"
30°	$M' - M'' =$	0,00614 $pr^2$	0	"	"	"



### III. Sklepienia okręgowe podniosłe (maurytańskie).

Do obliczenia przyjmuje się, że obciążenie sklepienia jest równo rozłożone po linii krzywój koła (sklepienia), (fig. 9).

Dla sił i momentów sił tego sklepienia będą wzory wszystkie te same, jakie są dla sklepienia okręgowego spłaszczonego (88), z tą tylko różnicą, że dla sklepień podniosłych kąt  $\alpha$  jest większy od  $90^\circ$ , we wzorach zaś dla sklepień spłaszczonych kąt  $\alpha$  jest mniejszy od  $90^\circ$ .

Wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu okręgowem podniosłem będą następujące:

$$\left. \begin{aligned}
 Q' &= pr \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
 Q'' &= pr \left[ \frac{\alpha \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos \alpha} - 1 \right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
 Q' - Q'' &= pr \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} (1 - \cos \alpha) - \alpha \sin^2 \alpha \right] \frac{1}{\cos \alpha - \cos \alpha} \\
 T &= pr (\cos \alpha + \alpha \sin^2 \alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
 M' &= pr^2 \left[ \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right) (\cos \alpha - \cos \alpha) \right], \quad . \quad . \quad .
 \end{aligned} \right\} \quad . \quad (90)$$

$$\left. \begin{aligned} M'' &= pr^2 [a \sin a - \alpha \sin \alpha + \cos a - \cos \alpha], \dots \\ M' - M'' &= pr^2 \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} (1 - \cos a) - a \sin a \right], \dots \end{aligned} \right\} \dots (90)$$

Przyjawszy, że  $a = 120^\circ$ , wzory główniejsze będą następujące:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= pr \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right), \dots \\ Q'' &= pr \left( \frac{1,8138 - \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha - 0,50} - 1 \right), \dots \\ Q' - Q'' &= pr \left( \frac{1,5 \alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1,8138 \right) \frac{1}{\cos \alpha - 0,50}, \dots \\ T &= pr \left[ \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right) \cos \alpha + \alpha \sin^2 \alpha \right], \dots \\ M' - M'' &= pr^2 \left[ \frac{1,5 \alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1,8138 \right], \dots \end{aligned} \right\} \dots (91)$$

Dla bliższego objaśnienia sił i momentów sił, działających w sklepieniu maurytańskim, przy kącie  $a = 120^\circ$ , a przy różnych  $\alpha$  podajemy Tablicę (93).

Kąt $\alpha$	Sily i momenty	przy $\alpha = 0^\circ$	przy $\alpha = 30^\circ$	przy $\alpha = 45^\circ$	przy $\alpha = 60^\circ$	przy $\alpha = 90^\circ$	przy $\alpha = 120^\circ$
120°	$Q' =$	<i>pr</i>	0,95491 <i>pr</i>	0,89613 <i>pr</i>	0,81380 <i>pr</i>	0,5708 <i>pr</i>	0,2092 <i>pr</i>
120°	$Q'' =$	0,2092 <i>pr</i>	0,1361 <i>pr</i>	0,04252 <i>pr</i>	-0,0931 <i>pr</i>	-0,5140 <i>pr</i>	-1,20919 <i>pr</i>
120°	$Q' - Q'' =$	0,7908 <i>pr</i>	0,81884 <i>pr</i>	0,85360 <i>pr</i>	0,9069 <i>pr</i>	1,0848 <i>pr</i>	1,41839 <i>pr</i>
120°	$T =$	<i>pr</i>	1,12783 <i>pr</i>	1,26247 <i>pr</i>	1,4069 <i>pr</i>	1,5708 <i>pr</i>	1,7092 <i>pr</i> (*)
120°	$M - M'' =$	1,1862 <i>pr</i> <sup>2</sup>	1,11856 <i>pr</i> <sup>2</sup>	1,03039 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,9069 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,5424 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0

(\*) 1,7092 *pr*, otrzymane zostało, ze wzoru:

$$T = pr \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \cos \alpha \right]$$

wyprowadzonego przy kącie załamania  $\alpha$ , i przyjmując, że  $\alpha = 120^\circ$ .

**Uwaga.** Przy  $\alpha = a = 180^\circ$  będziemy mieli:

$$Q' = -pr$$

$$Q'' = pr$$

$$Q' - Q'' = 2pr$$

$$T = -pr$$

$$M' - M'' = 0.$$

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , można wyznaczyć odpowiednie grubości sklepienia i zamurowania.

---

#### IV. Sklepienia gotyckie.

Utrzymując te same znaczenia dla wszystkich liter, jakie były użyte przy rozpoznawaniu sklepień półokręgowych i przypuszczając, że sklepienie równo jest obciążone po linii krzywej sklepienia, równanie momentów sił, działających w przekroju  $bb'$  sklepienia (fig. 10 i 11), będzie:

$$\Sigma XY = Ar (\sin \alpha - \sin u) - p \int_{r \sin u}^{r \sin \alpha} (x - r \sin u) ds,$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymamy:

$$\Sigma XY = pr^2 [(\alpha - u) \sin \alpha - (\cos u - \cos \alpha)], \quad \dots \quad (95, s)$$

Dzieląc  $\Sigma XY$  przez wysokość belki w przekroju  $bb'$ , otrzymamy  $Q'$ , ciśnienie w kluczu sklepienia:

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{r (\cos u - \cos \alpha)},$$

albo:

$$Q' = pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 \right], \quad \dots \quad (96)$$

Moment  $M'$  obalający sklepienie-przyczółek, wyrazi się:

$$M' = Q'Y,$$

albo:

$$M' = pr^2 \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 \right] \cos \alpha, \dots (97)$$

$M''$ , moment, działający przeciwko momentowi  $M'$ , wyrazi się:

$$M'' = Ar (1 - \sin \alpha) + p \int_r^r \frac{(r - x) ds}{r \sin \alpha},$$

rozwiązując powyższe równanie, otrzymamy:

$$M'' = pr^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha - \cos \alpha \right], \dots (98, t)$$

Dzieląc  $M''$ , przez  $Y$ , otrzymamy  $Q''$ , siłę oporu sklepienia-przyczółka.

$$Q'' = \frac{M''}{Y}$$

albo:

$$Q'' = pr \left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha - \cos \alpha \right] \frac{1}{\cos \alpha},$$

albo:

$$Q'' = pr \left[ \frac{\left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 \right], \dots (99)$$

Różnica zaś sił  $Q' - Q''$ , będzie:

$$Q' - Q'' = pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{\cos u - \cos \alpha} - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right] \frac{1}{\cos \alpha}, \dots (100, u)$$

Różnica momentów  $M' - M''$  będzie:

$$M' - M'' = pr^2 \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{\cos u - \cos \alpha} - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right], \dots (101)$$

Mając wyrażenie ciśnienia  $Q'$  i  $A$ , ciśnienia pionowego sklepienia-belki na sklepienie-przyczółek, możemy oznaczyć  $T$ , siłę ciśnienia po stycznej do koła w jakimkolwiek punkcie ( $\alpha$ ) (fig. 10).

Ponieważ:

$$\text{max. } Q' = pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 \right],$$

w którym,  $\alpha = 60^\circ$

$$A = pr (\alpha - u),$$

otrzymamy:

$$T = \text{max. } Q' \cos \alpha + A \sin \alpha,$$

albo

$$T = \text{max. } Q' \cos \alpha + pr (\alpha - u) \sin \alpha \dots (102)$$

Zestawiając wszystkie wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 \right], \dots \\ Q'' &= pr \left[ \frac{\left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 \right], \dots \\ Q' - Q'' &= pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{\cos u - \cos \alpha} - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right] \frac{1}{\cos \alpha} \\ T &= \text{max. } Q' \cos \alpha + pr (\alpha - u) \sin \alpha, \dots \\ M' &= pr^2 \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 \right] \cos \alpha, \dots \end{aligned} \right\} (104)$$

$$\left. \begin{aligned} M' &= pr^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha - \cos \alpha \right], \dots \\ M - M' &= pr^2 \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{\cos u - \cos \alpha} - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right], \dots \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

okazuje się, że:

1)  $Q'$ , ciśnienie poziome w kluczu sklepienia, przy  $\alpha = u$ , jest najmniejsze, a mianowicie  $Q' = 0$ ; największe zaś jest przy  $\alpha = 90^\circ$ , . . . . . (105)

2)  $Q' - Q''$ , różnica sił poziomych w punkcie załamania  $\alpha$ , jest odjemną przy  $\alpha = u$ , a dodatnią przy  $\alpha = 90^\circ$ , jak to widać z Tablic (106) i (107).

3)  $M - M'$ , różnica momentów sił jest przy jednych  $\alpha$  odjemną, przy drugich  $\alpha$  dodatnią, jak to widać z Tablic (106) i (107). Momenty dodatnie mogą być zrównoważone momentem zamurowania, momenty odjemne mogą być tylko zrównoważone momentem od ciężaru dodatkowego  $P$  (fig. 12), umieszczonego w kluczu sklepienia.

Dla objaśnienia bliższego sił i momentów sił, działających w sklepieniu *gotyckiem*, przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , ułożone zostały dwie następujące Tablice (106) i (107). Dla Tablicy pierwszej przyjęto, że  $u = 30^\circ$ ; dla Tablicy drugiej,  $u = 45^\circ$ .



Kąt $\alpha =$	Sily i momenty	przy $\alpha = 30^\circ$	przy $\alpha = 60^\circ$	przy $\alpha = 60^\circ$	przy $\alpha = 90^\circ$
$30^\circ$	$Q' =$	0	0,16486 <i>pr</i>	0,23878 <i>pr</i>	0,20918 <i>pr</i>
$30^\circ$	$Q'' =$	0,20919 <i>pr</i>	0,21915 <i>pr</i>	0,18751 <i>pr</i>	0
$30^\circ$	$Q' - Q'' =$	- 0,20919 <i>pr</i>	- 0,05429 <i>pr</i>	0,05127 <i>pr</i>	0,20918 <i>pr</i>
$30^\circ$	$T =$	0,22940 <i>pr</i>	0,37242 <i>pr</i>	0,58589 <i>pr</i>	1,04720 <i>pr</i>
$30^\circ$	$M' =$	0	0,11658 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,11941 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0
$30^\circ$	$M'' =$	0,18117 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,15497 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,09375 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0
$30^\circ$	$M' - M'' =$	- 0,18117 <i>pr</i> <sup>2</sup>	- 0,03839 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,02566 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0

**Uwaga.** *max.*  $Q'$  jest przy  $\alpha = 65^\circ$ , i wtenczas

*max.*  $Q' = 0,26489$  *pr.*

T A B L I C A . . . . . (107)

Kąt $\alpha =$	Sily i momenty	przy $\alpha = 45^\circ$	przy $\alpha = 60^\circ$	przy $\alpha = 90^\circ$
45°	$Q' =$	0	0,09469 $pr$	0,11071 $pr$
45°	$Q'' =$	0,11071 $pr$	0,11735 $pr$	0
45°	$Q' - Q'' =$	- 0,11071 $pr$	- 0,02266 $pr$	0,11071 $pr$
45°	$T =$	0,09183 $pr$	0,29165 $pr$	0,78540 $pr$
45°	$M =$	0	0,04734 $pr^2$	0
45°	$M'' =$	0,07829 $pr^2$	0,05868 $pr^2$	0
45°	$M' - M'' =$	- 0,07829 $pr^2$	- 0,01134 $pr^2$	0

**Uwaga.** *max.*  $Q'$  jest przy  $\alpha = 78^\circ, 30'$ , i wtenczas

*max.*  $Q' = 0,12987 pr$ .

Z powyższych wzorów i Tablic widać, że sklepienie gotyckie nie może pozostać w równowadze, bez wprowadzenia dodatkowych odpowiednich sił. Dla zrównoważenia momentu odjemnego  $M' - M''$  potrzeba w kluczu sklepienia zawiesić pewien ciężar  $P$ , dla zrównoważenia zaś momentów dodatnich potrzeba zbudować przy sklepieniu odpowiednie zamurowanie.

Ciężar  $P$ , powinien być tak wielki aby moment  $M' - M''$  nie był odjemnym (fig. 12).

Przypuszczając, że sklepienie jest równoobciążone po liniach, krzywych sklepienia, równanie równowagi momentów sił, działających w  $bb'$  przekroju poprzecznym sklepienia będzie, (vid. 95 s.):

$$\Sigma XY = \frac{P}{2} r (\sin \alpha - \sin u) - pr^2 [(\alpha - u) \sin \alpha - (\cos u - \cos \alpha)], \quad (108)$$

Dzieląc  $\Sigma XY$  przez wysokość belki w przekroju  $bb'$ , otrzymamy  $Q'$ , ciśnienie w kluczu sklepienia:

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{r (\cos u - \cos \alpha)}$$

albo:

$$Q' = \frac{P}{2} \frac{(\sin \alpha - \sin u)}{(\cos u - \cos \alpha)} + pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 \right], \quad (109)$$

Moment  $M'$ , obalający sklepienie-przyczółek wyrazi się:

$$M' = Q'Y$$

albo:

$$M' = \frac{Pr}{2} \frac{(\sin \alpha - \sin u) \cos \alpha}{(\cos u - \cos \alpha)} + pr^2 \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 \right] \cos \alpha, \quad (110)$$

$M''$ , moment oporu sklepienia-przyczółka, wyrazi się (98, t):

$$M'' = \frac{Pr}{2} (1 - \sin \alpha) + pr^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha - \cos \alpha \right], \dots (111)$$

Dzieląc  $M''$  przez  $Y$ , otrzymamy  $Q''$ , siłę poziomą oporu sklepienia-przyczółka, a mianowicie:

$$Q'' = \frac{M''}{Y},$$

albo:

$$Q'' = \frac{P(1 - \sin \alpha)}{2 \cos \alpha} + pr \left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha - \cos \alpha \right] \frac{1}{\cos \alpha}, \dots (112)$$

Różnica sił poziomych  $Q' - Q''$  w punkcie załamania będzie:

$$Q' - Q'' = \frac{P}{2} \left[ \frac{\cos \alpha (1 - \sin u) - \cos u (1 - \sin \alpha)}{(\cos u - \cos \alpha) \cos \alpha} \right] + pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{(\cos u - \cos \alpha)} - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right] \frac{1}{\cos \alpha}, \dots (113)$$

Różnica momentów  $M' - M''$ , będzie:

$$M' - M'' = \frac{Pr}{2} \left[ \frac{(\sin \alpha - \sin u) \cos \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - (1 - \sin \alpha) \right] + pr^2 \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{\cos u - \cos \alpha} - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right], \dots (114)$$

Aby  $M' - M''$  było dodatnie, potrzeba, aby przynajmniej było:

$$M' - M'' = 0$$

z czego wypada, że:

$$P = 2 pr \left[ \frac{(\frac{\pi}{2} - u) (\cos u - \cos \alpha) - (\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{(\sin \alpha - \sin u) \cos \alpha - (1 - \sin \alpha) (\cos u - \cos \alpha)} \right], \quad (115)$$

$P$ , powinno być takim, aby ono zadość czyniło warunkom równowagi sklepienia przy każdym kącie załamania  $\alpha$ . A ponieważ największe  $P$  jest przy  $\alpha = u$ , jakto widać z równania (115) zatem, *max.*  $P$  będzie:

$$\text{max. } P = \frac{2 pr \left[ (\frac{\pi}{2} - u) - \cos u \right] \sin u}{1 - \sin u}, \quad \dots \dots \dots (116, w)$$

Dla każdego sklepienia gotyckiego  $P$  należy oznaczyć z równania (116).

Tablica następująca objaśnia, jakie ma znaczenia  $P$  przy różnych kątach  $u$ , na zasadzie równania (116).

T A B L I C A . . . . . (117)

przy $u =$	$P =$
0	0
30°	0,36234 <i>pr</i>
45°	0,37794 <i>pr</i>
45°,10'	0,37888 <i>pr</i>
<u>45°,20'</u>	<u>0,37902 <i>pr</i></u>
45°,30'	0,37760 <i>pr</i>
60°	0,30496 <i>pr</i>
90°	0

Z Tablicy powyższej widać że  $P$  jest największe przy

$$u = 45^{\circ}, 20'.$$

Mając wyrażenie dla  $Q'$ , ciśnienia poziomego w kluczu i dla  $A$ , ciśnienia pionowego sklepienia-belki na sklepienie-przycółek, możemy oznaczyć  $T$ , siłę ciśnienia po stycznnej do koła w jakikolwiek punkcie koła, odpowiadającym kątowni załamania  $\alpha$ . (fig. 10).

$$T = \max. Q' \cos \alpha + A \sin \alpha,$$

podstawiając odpowiednie znaczenie zamiast  $Q'$  i  $A$ , otrzymamy:

$$T = \max. Q' \cos \alpha + \left[ \frac{P}{2} + pr (\alpha - u) \right] \sin \alpha, \quad \dots \dots (118)$$

Wyrażenia wszystkich sił i momentów sił, działających w sklepieniu gotyckim, mającym już dodatkowy ciężar  $P$ . (fig. 12), będą:

$$\left. \begin{aligned} P &= 2pr \frac{\left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) - \cos u \right] \sin u}{(1 - \sin u)}, \dots \dots \dots \\ Q' &= \frac{P}{2} \frac{(\sin \alpha - \sin u)}{(\cos u - \cos \alpha)} + pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 \right], \\ Q'' &= \frac{P}{2} \frac{(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} + \\ &+ pr \left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha - \cos \alpha \right] \frac{1}{\cos \alpha}, \dots \dots \\ Q' - Q'' &= \frac{P}{2} \left[ \frac{(1 - \sin u) \cos \alpha - (1 - \sin \alpha) \cos u}{\cos u - \cos \alpha} \right] \frac{1}{\cos \alpha} + \\ &+ pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{\cos u - \cos \alpha} - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right] \frac{1}{\cos \alpha}, \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (119)$$

$$\begin{aligned}
 T &= \max. Q' \cos \alpha + \left[ \frac{P}{2} + pr (\alpha - u) \right] \sin \alpha, \dots \\
 M' &= \frac{Pr}{2} \frac{(\sin \alpha - \sin u) \cos \alpha}{(\cos u - \cos \alpha)} + \\
 &+ pr^2 \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 \right] \cos \alpha, \dots \\
 M'' &= \frac{Pr}{2} (1 - \sin \alpha) + \\
 &+ pr^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha - \cos \alpha \right], \dots \\
 M' - M'' &= \frac{Pr}{2} \left[ \frac{(\sin \alpha - \sin u) \cos \alpha}{\cos u - \cos \alpha} (1 - \sin \alpha) \right] + \\
 &+ pr^2 \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{\cos u - \cos \alpha} - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right], \dots
 \end{aligned}
 \tag{119}$$

Dla bliższego objaśnienia sił i momentów sił, działających w sklepieniu gotyckim, przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , ułożone zostały następujące dwie Tablice (123) i (124).

Dla sił i momentów sił w pierwszej Tablicy przyjętem zostało, że kąt  $u = 30^\circ$ , dla sił zaś i momentów sił w drugiej Tablicy przyjętem zostało, że kąt  $u = 45^\circ$ .

T A B L I C A . . . . . (123)

Kąt $\alpha =$	Sily i momenty sil	przy $\alpha = 30^\circ$	przy $\alpha = 45^\circ$	przy $\alpha = 60^\circ$	przy $\alpha = 90^\circ$
$30^\circ$	$P =$	$0,36234 pr$	$0,36234 pr$	$0,36234 pr$	$0,36234 pr$
$30^\circ$	$Q' =$	$0,31379 pr$	$0,40097 pr$	$0,41995 pr$	$0,31378 pr$
$30^\circ$	$Q'' =$	$0,31378 pr$	$0,29419 pr$	$0,23605 pr$	0
$30^\circ$	$Q' - Q'' =$	0	$0,19678 pr$	$0,18390 pr$	$0,31378 pr$
$30^\circ$	$T =$	$0,45963 pr$	$0,61046 pr$	$0,82035 pr$	$1,22837 pr$
$30^\circ$	$M' =$	$0,27175 pr^2$	$0,28361 pr^2$	$0,20999 pr^2$	0
$30^\circ$	$M'' =$	$0,27175 pr^2$	$0,20803 pr^2$	$0,11802 pr^2$	0
$30^\circ$	$M' - M'' =$	0	$0,07558 pr^2$	$0,09197 pr^2$	0

Uwaga.  $max. Q'$  jest przy  $\alpha = 57^\circ$ , i wtenczas

$$max. Q' = 0,42037 pr.$$



T A B L I C A . . . . . (124)

Kąt $\alpha =$	Sily i momenty sil	przy $\alpha = 45^\circ$	przy $\alpha = 60^\circ$	przy $\alpha = 90^\circ$
$45^\circ$	$P =$	0,37794 <i>pr</i>	0,37794 <i>pr</i>	0,37794 <i>pr</i>
$45^\circ$	$Q' =$	0,18897 <i>pr</i>	0,23970 <i>pr</i>	0,18898 <i>pr</i>
$45^\circ$	$Q'' =$	0,18897 <i>pr</i>	0,16808 <i>pr</i>	0
$45^\circ$	$Q' - Q'' =$	0	0,07162 <i>pr</i>	0,18898 <i>pr</i>
$45^\circ$	$T =$	0,30702 <i>pr</i>	0,51199 <i>pr</i>	0,97436 <i>pr</i>
$45^\circ$	$M' =$	0,13363 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,11988 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0
$45^\circ$	$M'' =$	0,13363 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,08400 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0
$45^\circ$	$M' - M'' =$	0	0,03588 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0

**Uwaga.** *max. Q'* jest przy  $\alpha = 75^\circ$ , i wtenczas

*max. Q' = 0,24523 pr*

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, gotyckiem, przy różnych kątach  $u$  i różnych kątach załamania  $\alpha$ , można wyznaczyć odpowiednie grubości sklepienia i zamurowania, oraz oznaczyć wielkość obciążenia odpowiedniego w kluczu.

The image shows a large, faint grid table with multiple columns and rows. A horizontal line is drawn across the middle of the grid. The text within the grid is extremely faint and illegible, appearing to be bleed-through from the reverse side of the page. The grid is approximately 10 columns wide and 10 rows high.

## V. Sklepienia eliptyczne.

a) Sklepienie eliptyczne równo obciążone po linii poziomej *fg.* (fig. 14).

Przyjmując, że:

$X, Y$ , są współrzędne punktu załamania,  
 $A$ , ciśnienie sklepienia-belki na sklepienie przyczółek,  
 $p$ , obciążenie sklepienia na 1<sup>śc</sup> długości linii poziomej,  
 $\Sigma XY$ , summa momentów sił, działających w przekroju 10-przecznym  $oY$ , przechodzącym przez klucz sklepienia,

równanie równowagi będzie:

$$\Sigma XY = AX - \frac{pX^2}{2}, \quad . . . . . (125)$$

A ponieważ:

$$A = pX,$$

równanie zaś elipsy,

$$X^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - Y^2),$$

Zatem równanie (125) będzie:

$$\Sigma XY = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b^2 - Y^2), \dots \dots \dots (126)$$

Dzieląc zaś  $\Sigma XY$  przez wysokość belki w przekroju  $oY$ , otrzymamy  $Q'$  ciśnienie w kluczu sklepienia.

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{b - Y},$$

albo,

$$Q' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b + Y), \dots \dots \dots (127)$$

Moment  $M'$ , obalający sklepienie-przyczółek wyrazi się:

$$M' = Q' Y$$

albo,

$$M' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b + Y) Y, \dots \dots \dots (128)$$

$M''$ , moment oporu sklepienia-przyczółka, wyrazi się:

$$M'' = A(a - X) + p \int_X^a (a - x) dx, \dots \dots (129)$$

albo,

$$M'' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} Y^2, \dots \dots \dots (130, x)$$

Dzieląc  $M''$  przez  $Y$ , otrzymamy  $Q''$ , siłę poziomą oporu sklepienia-przyczółka.

$$Q'' = \frac{M''}{Y}$$

albo,

$$Q'' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} Y, \dots \dots \dots (131)$$

Różnica sił poziomych w punkcie załamania będzie:

$$Q' - Q'' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b}, \quad \dots \dots \dots (132)$$

Różnica momentów

$$M' - M'' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b} Y, \quad \dots \dots \dots (133)$$

Mając wyrażenie dla  $Q'$  i  $A$ , możemy oznaczyć  $T$ , ciśnienie po stycznėj do krzywėj sklepienia, a mianowicie:

$$T = \max. Q' \cos \alpha + A \sin \alpha, \quad \dots \dots (134)$$

Zestawiając wszystkie wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b + Y), \quad \dots \dots \dots \\ Q'' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} Y, \quad \dots \dots \dots \\ Q' - Q'' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b}, \quad \dots \dots \dots \\ T &= \max. Q' \cos \alpha + A \sin \alpha, \quad \dots \dots \dots \\ M' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b + Y) Y, \quad \dots \dots \dots \\ M'' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} Y^2, \quad \dots \dots \dots \\ M' - M'' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b} Y, \quad \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (135)$$

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu eliptycznym, przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , można wyznaczyć grubości sklepienia i zamurowania.

b) Sklepienie eliptyczne spłaszczone, równo obciążone po linii poziomej  $fy$  (fig. 16).

Wyrażenie dla  $Q'$ , ciśnienia w kluczu będzie takie jak (127), a mianowicie:

$$Q' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b + Y), \quad . . . . . (136)$$

Moment  $M'$ , obalający sklepienie-przyczółek, będzie:

$$M' = Q' (Y - \eta)$$

albo

$$M' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b + Y) (Y - \eta), \quad . . . (137)$$

Moment zaś oporu sklepienia przyczółka,  $M''$  będzie:

$$M'' = A (\bar{y} - X) + p \int_X^{\bar{y}} (\bar{y} - x) dx,$$

albo:

$$M'' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (Y^2 - \eta^2), \quad . . . . . (138, z)$$

Różnica tych momentów  $M' - M''$  będzie:

$$M' - M'' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (Y - \eta) (b - \eta), \quad . (139)$$

$Q''$ , siła oporu przyczółka-sklepienia w punkcie załamania:

$$Q'' = \frac{M''}{Y - \eta}$$

albo:

$$Q'' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (Y + \eta), \dots \dots \dots (140)$$

zaś

$$Q' - Q'' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b - \eta), \dots \dots \dots (141)$$

$T$ , ciśnienie po stycznej w punkcie ( $\alpha$ ) będzie takie jak (134).

Zestawiając powyższe wyrażenia otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned}
Q' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b + Y), \dots \dots \dots \\
Q'' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (Y + \eta), \dots \dots \dots \\
Q' - Q'' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b - \eta), \dots \dots \dots \\
T &= \max. Q' \cos \alpha + A \sin \alpha, \dots \dots \dots \\
M' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (b + Y) (Y - \eta), \dots \dots \dots \\
M'' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (Y^2 - \eta^2), \dots \dots \dots \\
M' - M'' &= \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (Y - \eta) (b - \eta), \dots \dots \dots
\end{aligned} \right\} \dots (143)$$

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , można wyznaczyć grubość sklepienia i zamurowania.

c) Sklepienia eliptyczne (pełne), równo obciążone po linii krzywój sklepienia, (fig. 17).

Równanie równowagi będzie:

$$\Sigma XY = AX - p \int_0^X x ds, \quad . . . . . (146)$$

po podstawieniu odpowiednich wartości, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Sigma XY = pa^2 \left[ \frac{n^4}{160} \sin^4 \gamma \cos \gamma + \left( \frac{n^2}{12} + \frac{13n^4}{960} \right) \sin^2 \gamma \cos \gamma + \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{n^2}{4} - \frac{3n^4}{64} \right) \gamma \sin \gamma + \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{n^2}{3} - \frac{n^4}{15} \right) \cos \gamma - \left( 1 - \frac{n^2}{3} - \frac{n^4}{15} \right) \right], \quad . . . . . (147 \text{ ab}) \end{aligned}$$

W powyższem równaniu  $n = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ,

Dzieląc zaś  $\Sigma XY$  przez wysokości belki w przekroju  $oo$ , otrzymamy  $Q'$ , ciśnienie w kluczu sklepienia.

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{(b - Y)},$$

albo

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{b(1 - \cos \gamma)}, \quad . . . . . (148 \text{ ac})$$



Moment  $M'$ , obalający przyczólek-sklepienie, będzie:

$$M' = Q'Y,$$

albo

$$M' = \Sigma XY \frac{\cos \gamma}{(1 - \cos \gamma)}, \dots \dots \dots (149)$$

$M''$ , moment oporu sklepienia-przyczółka, wyrazi się:

$$M'' = A(a-X) + p \int_X^a (a-x) ds,$$

albo:

$$M'' = pa^2 \left(1 - \frac{n^2}{4} - \frac{3n^4}{64}\right) \frac{\pi}{2} - pa^2 \left(1 - \frac{n^2}{3} - \frac{n^4}{15} - \Sigma XY, \right. \\ \left. (150 \text{ ad})\right)$$

Różnica momentów  $M' - M''$ , będzie:

$$M' - M'' = \frac{\Sigma XY}{1 - \cos \gamma} - pa^2 \left(1 - \frac{n^2}{4} - \frac{3n^4}{64}\right) \frac{\pi}{2} + \\ + pa^2 \left(1 - \frac{n^2}{3} - \frac{n^4}{15}\right), \dots \dots \dots (151)$$

$Q''$ , siła oporu sklepienia:

$$Q'' = \frac{M''}{b \cos \gamma}, \dots \dots \dots (152)$$

Różnica zaś  $Q' - Q''$ :

$$Q' - Q'' = \frac{\Sigma XY}{b(1 - \cos \gamma)} - \frac{M''}{b \cos \gamma}, \dots \dots (153)$$

$T$ , siła ciśnienia działająca po stycznej do krzywej sklepienia przy punkcie  $(\alpha)$ , będzie:

$$T = \max. Q' \cos \alpha + A \sin \alpha, \dots \dots (154)$$

Mając wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , można wyznaczyć odpowiednie grubości sklepienia i zamurowania.

---

## VI. Sklepienie paraboliczne.

- a) Sklepienie paraboliczne, równoobciążone po linii poziomej  $oX$ , przechodzącej przez wierzch sklepienia, (fig. 18).

Przyjmując że:

$X, Y$ , są współrzędne punktu załamania  $\alpha$ ,  
 $A$ , ciśnienie sklepienia-belki, na sklepienie-przyczółek.  
 $p$ , obciążenie sklepienia na 1<sup>śc</sup> długości linii poziomej  $X$ ,  
 $\Sigma XY$ , summa momentów sił, działających w poprzecznym przekroju  $oY$ , przechodzącym przez klucz sklepienia.

Równanie równowagi sklepienia będzie:

$$\Sigma XY = AX - \frac{pX^2}{2},$$

$\Lambda$  ponieważ:

$$A = pX,$$

$X = \sqrt{2eY}$ , równanie paraboli,  
podstawując zatem w równanie równowagi otrzymamy:

$$\Sigma XY = pqY, \quad . . . . . (155)$$

Dzieląc zaś  $\Sigma XY$  przez wysokość belki w przekroju  $Y_0$ , otrzymamy  $Q'$ , ciśnienie w kluczu sklepienia:

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{Y},$$

albo:

$$Q' = p_0, \dots \dots \dots (155)$$

$M'$ , moment obalający przyczółek - sklepienie, wyrazi się, (fig. 18).

$$M' = Q' (b - Y)$$

albo:

$$M' = p_0 (b - Y), \dots \dots \dots (156)$$

$M''$ , moment oporu sklepienia-przyczółka, wyrazi się:

$$M'' = A (a - X) + p \int_X^a (a - x) dx,$$

czyli

$$M'' = p_0 (b - Y), \dots \dots \dots (157, ae)$$

Dzieląc  $M''$  przez  $(b - Y)$ , otrzymamy  $Q''$ , siłę poziomą oporu sklepienia-przyczółka.

$$Q'' = \frac{M''}{b - Y}$$

albo

$$Q'' = p_0, \dots \dots \dots (158)$$

Różnica sił poziomych  $Q' - Q''$  w punkcie załamania, będzie:

$$Q' - Q'' = 0, \dots \dots \dots (159)$$

Różnica momentów:

$$M - M'' = 0, \dots \dots \dots (160)$$

$T$ , siła ciśnienia po stycznej do krzywój sklepienia w punkcie ( $\alpha$ ) wyrazi się:

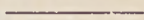
$$T = Q' \cos \alpha + A \sin \alpha,$$

czyli:

$$T = \frac{p\varrho(1 + 2Y)}{\sqrt{1 + 2\varrho Y}}, \dots \dots \dots (161 \text{ af})$$

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , można wyznaczyć grubości sklepienia.

Sklepienie paraboliczne, równo obciążone po linii poziomej, niepotrzebuje zamurowania, ponieważ  $Q' - Q'' = 0$ , a także  $M' - M'' = 0$ .



b) Sklepienie paraboliczne, równoobciążone po linii krzywój sklepienia (fig. 19).

Równanie równowagi będzie:

$$\Sigma XY = AX - p \int_0^X x ds.$$

albo:

$$\begin{aligned} \Sigma XY = \frac{p}{2} \left[ X^2 \sqrt{1 + \frac{X^2}{\varrho^2}} + \varrho X \log \left( \frac{X}{\varrho} + \sqrt{1 + \frac{X^2}{\varrho^2}} \right) \right] - \\ - \frac{p}{3} \varrho \left[ \left( 1 + \frac{X^2}{\varrho^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right], \dots \dots (162, \text{ ag}) \end{aligned}$$

Dzieląc zaś  $\Sigma XY$  przez  $Y$ , wysokość belki otrzymamy  $Q'$ , ciśnienie w kluczu:

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{Y}, \quad . . . . . (163)$$

$M'$ , moment obalający sklepienie-przyczółek będzie:

$$M' = \frac{\Sigma XY}{Y} (b - Y), \quad . . . . . (164)$$

Moment oporu sklepienia-przyczółka  $M''$ , będzie:

$$M'' = A (a - X) + p \int_X^a (a-x) ds,$$

$a$ , oznacza połowę otwartości sklepienia, (fig. 18).

Rozwiązując równanie powyższe, otrzymamy:

$$M'' = \frac{pa}{2} \left[ a \sqrt{1 + \frac{a^2}{e^2}} + e \log \left( \frac{a}{e} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{e^2}} \right) \right] -$$

$$- \frac{p}{3} e^2 \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{e^2} \right) - 1 \right] - \Sigma XY, \quad . . . . . (165, \text{ah})$$

$Q''$ , siła oporu sklepienia-przyczółka, wyrazi się:

$$Q'' = \frac{M''}{b - Y}, \quad . . . . . (166)$$

Różnica momentów będzie:

$$M' - M'', \quad . . . . . (167)$$

Różnica sił poziomych w punkcie załamania:

$$Q' - Q'' = \frac{\Sigma XY}{Y} - \frac{M''}{b - Y}, \quad . . . . . (168)$$

$T$ , ciśnienie po stycznej do krzywój sklepienia, w punkcie  $d$  będzie:

$$T = \max. Q' \cos \alpha + A \sin \alpha, . . . . (169)$$

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , można oznaczyć odpowiednie grubości sklepienia i zamurowania.

## VII. Sklepienie hyperboliczne.

- a) Sklepienie hyperboliczne, równo obciążone po linii poziomej  $gi$ , przechodzącej przez wierzch sklepienia (fig. 20).

Oznaczmy przez:

$X, Y$ , współrzędne punktu załamania  $d$ ,

$A$ , ciśnienie sklepienia-belki na sklepienie-przyczółek,

$p$ , obciążenie sklepienia na 1<sup>śc</sup> długości linii poziomej  $gi$ .

$l$ , połowę otworu sklepienia,

$\Sigma XY$ , summe momentów sił, działających w poprzecznym przecięciu, przechodzącym przez klucz sklepienia

Sklepienie uważa się, dla uproszczenia rachunku, jak to miało miejsce i przy poprzednich sklepieniach, jako linia krzywa (obecnie hyperbola).

Równanie równowagi będzie:

$$\Sigma XY = AX - \frac{pX^2}{2},$$

a ponieważ

$$A = pX$$



a równanie hyperboli:

$$b^2 y^2 - a^2 x^2 = a^2 b^2$$

$$x^2 = \frac{b^2}{a^2} (y^2 - a^2)$$

zatem:

$$\Sigma XY = \frac{p}{2} \frac{b^2}{a^2} (Y^2 - a^2), \dots \dots \dots (170)$$

$Q'$ , ciśnienie w kluczu, wyrazi się:

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{Y - a},$$

albo:

$$Q' = \frac{p}{2} \frac{b^2}{a^2} (Y + a), \dots \dots \dots (171)$$

$M'$ , moment obalający sklepienie-przyczółek, będzie:

$$M' = Q' (h - Y)$$

albo:

$$M' = \frac{p}{2} \frac{b^2}{a^2} (Y + a) (h - Y), \dots \dots \dots (172)$$

$M''$ , moment oporu sklepienia-przyczółka będzie:

$$M'' = A (l - X) + p \int_X^l (l - x) dx,$$

albo:

$$M'' = \frac{p}{2} \frac{b^2}{a^2} (h^2 - Y^2), \dots \dots \dots (173, ai)$$

$Q''$ , opór przyczółka-sklepienia

$$Q'' = \frac{M''}{h - Y},$$

albo:

$$Q'' = \frac{p}{2} \frac{b^2}{a^2} (h + Y), \quad \dots \quad (174)$$

Różnica sił i momentów sił będzie:

$$Q' - Q'' = \frac{p}{2} \frac{b^2}{a^2} (a - h), \quad \dots \quad (175)$$

$$M' - M'' = \frac{p}{2} \frac{b^2}{a^2} (h - a) (Y - h), \quad \dots \quad (176)$$

Z powyższego widać że  $Q' - Q''$ , oraz  $M' - M''$ , są *odjemne* podobnie jak w sklepieniach gotyckich.

$T$ , siła ciśnienia po stycznej do krzywej sklepienia, w punkcie ( $\alpha$ ) będzie:

$$T = \max. Q' \cos \alpha + A \sin \alpha, \quad \dots \quad (177)$$

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w sklepieniu, przy różnych punktach załamania można oznaczyć grubości sklepienia i zamurowania.

---

b) Sklepienie hyperboliczne, równo obciążone po linii krzywój sklepienia, (fig. 20).

Równanie równowagi

$$\Sigma XY = AX - p \int_{\sigma}^X x ds$$

albo:

$$\begin{aligned} \Sigma XY = pa X [ \operatorname{tg} \varphi' - \frac{\varphi'}{2n} - \frac{\sin \varphi' \cos \varphi' + \varphi'}{16 n^3} - \\ - \frac{\sin \varphi' \cos^3 \varphi' + 1,5 \sin \varphi' \cos \varphi' + 1,5 \varphi'}{64 n^5} - \dots ] - \\ - pab [ \frac{n}{2 \cos^2 \varphi'} + \frac{\log. \cos \varphi'}{2n} + \frac{\cos^2 \varphi'}{16 n^3} + \frac{\cos^4 \varphi'}{64 n^5} + \dots - \\ - \dots - \frac{n}{2} - \frac{1}{16 n^3} - \frac{1}{64 n^5} - \dots ], \dots \dots \dots (178 \text{ al}) \end{aligned}$$

W powyższem równaniu:

$$n = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{X}{b},$$

Mając wyrażenie (178) łatwo oznaczyć  $Q'$  ciśnienie w kluczu.

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{Y - a}, \dots \dots \dots (179)$$

$M'$ , moment obalający sklepienie-przyczółek,

$$M' = \frac{\Sigma XY}{(Y - a)} (h - Y), \dots \dots \dots (180)$$

$M''$ , moment oporu sklepienia-przyczółka będzie:

$$\begin{aligned}
M'' &= A(l-X) + p \int_X^l (l-x) ds = \\
&= pl \int_0^l ds - p \int_0^l x ds - \Sigma XY,
\end{aligned}$$

nazywając

$$B = pl \int_0^l ds - p \int_0^l x ds$$

otrzymamy:

$$M'' = B - \Sigma XY, \quad . . . . . (181)$$

Różnica momentów wyrazi się:

$$\begin{aligned}
M' - M'' &= \Sigma XY \frac{(h-Y)}{(Y-a)} B + \Sigma XY = \\
&= \frac{h-a}{Y-a} \Sigma XY - B, \quad . . . . . (182)
\end{aligned}$$

$Q''$ , siła oporu sklepienia-przyczółka w punkcie załamania:

$$Q'' = \frac{B - \Sigma XY}{h - Y}, \quad . . . . . (183)$$

Różnica sił poziomych w punkcie załamania:

$$\begin{aligned}
Q' - Q'' &= \frac{\Sigma XY}{(Y-a)} - \frac{B}{(h-Y)} + \frac{\Sigma XY}{(h-Y)} = \\
&= \frac{(h-Y)}{(Y-a)(h-Y)} \Sigma XY - \frac{B}{h-Y}, \quad . . . (184)
\end{aligned}$$

$T$ , ciśnienie po stycznej do krzywej sklepienia w punkcie ( $\alpha$ ) wyrazi się:

$$T = \max. Q' \cos \alpha + A \sin \alpha, \dots (185)$$

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił działających w sklepieniu, możemy oznaczyć grubości sklepienia i zamurowania.

---

## VIII. K o p u ł a.

Przyjmujemy, że kopuła stanowi powierzchnię półkolistą i że jest równoobciążona po całej swój powierzchni (fig. 21).

Dzieląc całą kopułę na wycinki  $abc$ , przyjmując dolny bok  $bc$  każdego wycinku za 1<sup>śé</sup>, i utrzymując poprzednie znaczenia dla tychże liter, otrzymamy równanie równowagi jednego wycinka kopuły.

$$\Sigma XY = AX - \int p' xr ds, \quad . . . . (186)$$

w którym,  $p'$  oznacza obciążenie jednoścí długoścí wycinka przy punkcie  $(X, Y)$ . Nazywając przez  $p$ , obciążenie 1<sup>éj</sup> stopy  $\square$  powierzchni kopuły, otrzymamy

$$p' = \frac{2ps}{\pi},$$

podstawiając w równanie (186) i rozwiązując takowe, otrzymamy.

$$\Sigma XY = \frac{pr^2}{\pi} [(\alpha^2 - 2) \sin \alpha + 2 \alpha \cos \alpha], \quad . . (187, am)$$

$Q'$ , ciśnienie w kluczu kopuły na jeden wycinek, przy kącie załamania  $\alpha$ , będzie:

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{r - Y},$$

albo:

$$Q' = \frac{pr}{\pi} [(\alpha^2 - 2) \sin \alpha + 2 \alpha \cos \alpha] \frac{1}{(1 - \cos \alpha)}, \dots \dots \dots (188)$$

Chcąc się przekonać jakie ma znaczenie  $Q'$ , przy kącie załamania  $\alpha = 0$ , należy wziąć drugą pochodną licznika i mianownika w wyrażeniu (188):

Pochodna 1<sup>sza</sup> będzie:

$$\frac{\alpha^2 \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

Pochodna 2<sup>ga</sup>:

$$(2 - \operatorname{tg} \alpha) \alpha,$$

wyrażenie to jest zero, przy  $\alpha = 0$ , z czego się okazuje, że  $Q' = 0$ , przy  $\alpha = 0$

$M'$  moment obalający sklepienie - przyczólek odcinka, wyrazi się:

$$M' = Q' Y,$$

albo:

$$M' = \frac{pr^2}{\pi} [(\alpha^2 - 2) \sin \alpha + 2 \alpha \cos \alpha] \frac{\cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)}, \dots \dots \dots (189)$$

$M''$ , moment oporu sklepienia-przyczołka odcinka, będzie:

$$M'' = A (r-X) + \int_X^r p'r (r-x) ds,$$

rozwiązując powyższe równanie, otrzymamy:

$$M'' = \frac{2pr^2}{\pi} \left[ \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha^2 \sin \alpha}{2} - 1 \right] + \frac{pr^2 \pi}{4}, \quad . \quad (190, an)$$

$Q''$ , siła oporu sklepienia-przyczołka odcinka w punkcie załamania, wyrazi się:

$$Q'' = \frac{M''}{Y},$$

albo:

$$Q'' = \frac{2 pr}{\pi \cos \alpha} \left[ \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \cos \alpha - 1 \right] + \frac{pr \pi}{4 \cos \alpha}, \quad . \quad (191)$$

Różnicy sił i momentów,  $Q' - Q''$ ,  $M' - M''$ , znajdziemy z wyrażeń (188), (191), (189) i (190).

Jakie siły i momenty sił działają w sklepieniu-odcinku przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , objaśnia Tablica (192).



T A B L I C A . . . . . (192)

sił i momentów sił w sklepieniu-odcinku kopuły przy różnych kątach załamania  $\alpha$ .

Siły i momenty	przy $\alpha = 0^\circ$	przy $\alpha = 30^\circ$	przy $\alpha = 45^\circ$	przy $\alpha = 60^\circ$	przy $\alpha = 90^\circ$
$Q' =$	0	0,10449 <i>pr</i>	0,14419 <i>pr</i>	0,16860 <i>pr</i>	0,14878 <i>pr</i>
$Q'' =$	0,14879 <i>pr</i>	0,15564 <i>pr</i>	0,14433 <i>pr</i>	0,12898 <i>pr</i>	0
$Q' - Q'' =$	- 0,14879 <i>pr</i>	- 0,05115 <i>pr</i>	- 0,00014 <i>pr</i>	0,03962 <i>pr</i>	0,14878 <i>pr</i>
$M =$	0	0,09049 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,10195 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,08430 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0
$M' =$	0,14879 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,13479 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,10206 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,06449 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0
$M - M' =$	- 0,14879 <i>pr</i> <sup>2</sup>	- 0,04430 <i>pr</i> <sup>2</sup>	- 0,00011 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,01981 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0

Z powyższej Tablicy okazuje się, że  $Q' - Q''$ , różnica sił poziomych, oraz  $M' - M''$ , różnica momentów sił są odjemne, jak to ma miejsce w sklepieniach gotyckich, i dla tego równowaga kopuły, bez dodania obciążenia w kluczu, jest niemożliwą.

Zwyczajnie obciążenie to daje się w praktyce w kształcie wieży wspartej na pierścieniu, (fig. 22) lub w kształcie samego pierścienia.

Przyjmując, że kopuła jest obciążona w kluczu ciężarem  $P$ , w kształcie wieży z pierścieniem, lub samego pierścienia, równanie równowagi wtenczas będzie, (fig. 23).

$$\Sigma XY = \left(\frac{P}{2\pi r} + A\right) (X - r \sin u) - r \int_r^X \frac{p'}{r \sin u} (x - r \sin u) ds,$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymamy:

$$\Sigma XY = \frac{P}{2\pi} (\sin \alpha - \sin u) + \frac{pr^2}{\pi} [\sin \alpha (\alpha^2 - u^2 - 2) + 2 (\alpha \cos \alpha + \sin u - u \cos u)], \quad \dots \quad (193, as)$$

$Q'$ , ciśnienie wycinka  $u$  wieży przy kącie załamania  $\alpha$ , będzie:

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{r (\cos u - \cos \alpha)}, \quad \dots \quad (194)$$

$M'$ , moment obalający wyrazi, się:

$$M' = \frac{\cos \alpha}{(\cos u - \cos \alpha)} \Sigma XY, \quad \dots \quad (195)$$

$M''$  moment oporu, wyrazi się:

$$M'' = \left(\frac{P}{2\pi r} + A\right) (r - X) + r \int_X^r \frac{p'}{X} (r - x) ds,$$

rozwiązując powyższe równanie, otrzymamy:

$$M' = \frac{P}{2\pi} (1 - \sin \alpha) + \frac{pr^2}{\pi} [\sin \alpha (2 + u^2 - \alpha^2) - 2 \alpha \cos \alpha + \\ + \frac{\pi^2}{4} - u^2 - 2], \dots \dots \dots (196, ap)$$

$Q''$ , opór od sklepienia-przyczółka wycinka:

$$Q'' = \frac{M'}{r \cos \alpha}, \dots \dots \dots (197)$$

Aby różnica momentów sił była dodatnią, potrzeba, aby przynajmniej:

$$M' - M'' = 0, \dots \dots \dots (198)$$

Z równania (198) można znaleźć *max. P*, to jest takie *P*, które przy każdym  $\alpha$ , czyniło by  $M' - M''$  dodatniem. Z Tablicy (192) widzimy, że im mniejsze ma znaczenie  $\alpha$ , tem większe ma odjemne znaczenie  $M' - M''$ , a zatem dla otrzymania *max. P* (198) należy przyjąć:  $\alpha = u$ , i zatem:

$$P = \frac{2 pr^2 \sin u}{(1 - \sin u)} [2 (\sin u - u \cos u - 1) + \frac{\pi^2}{4} - u^2], \dots (199, aq)$$

Dla każdej kopuły *P*, ciężar wieży, lub samego pierścienia, nie może być mniejszym od *P*, oznaczonego ze wzoru (199).

Tablica następując objaśnia znaczenie jakie ma *P* przy różnych *u*, z równania (199).

T A B L I C A . . . . . (200)

przy $u =$	$P =$
0	0
$14^{\circ}, 28' 39''$	$0,27618 pr^2$
$30^{\circ}$	$0,57272 pr^2$
$45^{\circ}$	$0,74779 pr^2$
$60^{\circ}$	$0,71953 pr^2$
$90^{\circ}$	0

$Q' - Q''$ , różnica sił poziomych w punkcie załamania ( $\alpha$ ) znajdzie się z wyrażen: (194) i (197).

$$Q' - Q'' = \frac{\Sigma XY}{r (\cos u - \cos \alpha)} - \frac{M''}{r \cos \alpha}, \quad . . . (201)$$

$T$ , ciśnienie po stycznej do krzywój linii kopuły, wyrazi się:

$$T = Q' \cos \alpha + \left( \frac{P}{2 \pi r} + A \right) \sin \alpha,$$

albo:

$$T = \max. Q' \cos \alpha + \left[ \frac{P}{2 \pi r} + \frac{pr}{\pi} (\alpha^2 - u^2) \right] \sin \alpha, \quad . . (202)$$

Dla bliższego objaśnienia sił i momentów sił, działających w każdym odcinku kopuły przy różnych  $\alpha$  kątach załamania, ułożoną została następująca Tablica (203), przyjmując, że  $u = 14^{\circ}, 28', 39''$ , to jest, że średnica więzy jest czwartą częścią średnicy kopuły.

siły i momentów sił, działających w kopule, obciążonej wieżą przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , w suppozycji że kąt  $u = 14^\circ, 28', 39''$ .

Siły i momenty sił	$\alpha = 14^\circ, 28', 39''$	przy $\alpha = 30^\circ$	przy $\alpha = 45^\circ$	przy $\alpha = 60^\circ$	przy $\alpha = 90^\circ$
$P =$	0,27618 <i>pr</i>	0,27618 <i>pr</i>	0,27618 <i>pr</i>	0,27618 <i>pr</i>	0,27618 <i>pr</i>
$\Sigma XY =$	0	0,01822 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,05124 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,09716 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,16483 <i>pr</i> <sup>2</sup>
$Q' =$	0,17020 <i>pr</i>	0,17829 <i>pr</i>	0,19622 <i>pr</i>	0,20752 <i>pr</i>	0,17024 <i>pr</i>
$Q'' =$	0,17020 <i>pr</i>	0,16925 <i>pr</i>	0,16044 <i>pr</i>	0,13526 <i>pr</i>	0
$Q' - Q'' =$	0	0,00904 <i>pr</i>	0,03578 <i>pr</i>	0,07224 <i>pr</i>	0,17024 <i>pr</i>
$T =$	0,21198 <i>pr</i>	0,23512 <i>pr</i>	0,30223 <i>pr</i>	0,42648 <i>pr</i>	0,80899 <i>pr</i>
$M' =$	0,16480 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,15432 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,13874 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,10364 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0
$M'' =$	0,16480 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,14658 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,11345 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,06763 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0
$M' - M'' =$	0	0,00774 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,02529 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0,03601 <i>pr</i> <sup>2</sup>	0

**Uwaga 1.** *max.*  $Q'$  jest przy  $\alpha = 60^\circ$ , i wtenczas

$$\textit{max. } Q' = 0,20752 \textit{ pr.}$$

**Uwaga 2.** Jeżeli ciężar wieży ze swoim pierścieniem, lub ciężar pierścienia, zbudowanego bez wieży, będzie większy od  $P$  Tablicy (204), w takim razie do wzorów powyższych należy przyjąć ciężar rzeczywisty. Ciężar  $P$  jest ciężar tylko minimalny.

Mając powyższe wyrażenia sił i momentów sił, działających w kopule przy różnych kątach załamania  $\alpha$ , można wyznaczyć grubości kopuły i zamurowania, odpowiednio do największych sił i momentów.

W razie budowy kopuły z żelaznych łuków, zamiast zamurowania należy projektować w różnych przekrojach poziomych kopuły pierścienie żelazne, równoważące  $Q' - Q'$ , siły w wycinkach.

---

Grubość pierścienia w kierunku poziomym oznaczyć można ze wzoru:

$$l = \frac{Q''_r}{Rh}, \dots \dots \dots (205, ar)$$

---

## IX. Wyznaczenie grubości przyczółków, podtrzymujących sklepienia. (fig. 24).

Nazywając przez:

$Q'$ , ciśnienie największe w kluczu sklepienia,

$r$ , promień podniebienia sklepienia,

$e$ , grubość sklepienia,

$H$ , wysokość przyczółka,

$\delta$ , ciężar 1<sup>ści</sup> objętości muru przyczółka,

$P$ , ciężar nadsklepienia.

$l'$ , odległość środka ciężkości nadsklepienia do linii pionowej *cd*.

Równanie równowagi będzie następujące:

$$Q' \left( H - \frac{e}{2} \right) = P (l' - l) + \frac{\delta l^2 H}{2}$$

Rozwiązując równanie powyższe, i przypuszczając, że  $H = \infty$ , otrzymamy:

$$l = \sqrt{\frac{2Q}{\delta}}, \quad \dots \dots \dots (206, \text{ as})$$

Wzór powyższy może być zastosowany do przyczółków, podtrzymujących jakiekolwiek sklepienie, byleby  $Q'$  było wzięte największe, jakie może być w danem sklepieniu.

Zastosujmy wzór (205) do przyczółków murowanych z cegły, podtrzymujących pół okrągowe sklepienie z cegły, przy różnem  $p$  obciążeniu sklepienia i przy różnych  $r$ , promieniach podniebienia.

We wzorze (205) wstawiając zamiast  $Q'$  odpowiednie znaczenie,

$$Q' = (p + \delta e) \left( r + \frac{e}{2} \right)$$

otrzymamy:

$$l = \sqrt{\left( \frac{p}{\delta} + e \right) (2r + e)}, \dots \dots (207)$$

Dla różnych  $p$  i  $r$ , odpowiednie  $e$  będziemy brać z Tablicy (66) przytem przyjmując, że  $\delta = 2,70$  pud., otrzymamy ze wzoru (207) różne wartości dla  $l$ , grubości przyczółków, wymurowanych z cegły, jak to bliżej Tablica następująca (208) objaśnia.



T A B L I C A . . . . . (208)

grubości przyczółków murowanych z cegły, podtrzymujących sklepienie okrągowe również murowane z cegły, przy różnych  $r$  promieniach podniebienia i różnych  $p$  obciążeniach sklepienia.

$p$ , w pudach	$l$ w stopach	$r$ , w s t o p a c h,						
		2,5'	5'	10'	20'	30'	40'	50'
2	$l =$	2,61	3,60	5,04	9,62	14,20	19,93	$\sqrt{-1}$
5	„	3,60	5,16	7,46	12,11	17,48	24,13	
10	„	4,81	6,86	10,11	15,86	21,64	$\sqrt{-1}$	
20	„	6,60	9,42	13,76	22,08	33,13		
30	„	8,00	11,68	17,23	28,13	$\sqrt{-1}$		
40	„	9,36	13,90	20,38	34,71			
50	„	10,64	15,43	23,35	46,36			
60	„	11,86	17,29	26,29	48,39			
70	„	13,06	18,96	29,26	$\sqrt{-1}$			
80	„	14,23	20,86	32,37				
90	„	15,40	22,66	35,62				
100	„	16,58	24,51	39,22				
150	„	23,02	35,48	$\sqrt{-1}$				
200	„	32,20	$\sqrt{-1}$					
265	„	$\sqrt{-1}$						

Przy projektowaniu przyczółków należy mieć na uwadze osadzenie się przyczółków w skutek ich ciężaru i ciśnienia sklepienia, oraz ściśliwość gruntu, na którym przyczółki mają być wzniesione. Osadzenie się to winno być pionowe, równe i jednostajne dla obu przyczółków; w przeciwnym bowiem razie sklepienie będzie się rysować i pękać.



## PRZYPISKI.

(3, a)

$$Q' = \frac{\Sigma XY}{r-Y} = \frac{pr^2}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{r(1-\cos \alpha)} = \frac{pr}{2} (1 + \cos \alpha).$$

---

(6 b).

$$\begin{aligned} M'' &= A(r-X) + p \int_X^r (r-x) dx = \\ &= prX - pX^2 + pr \int_X^r dx - p \int_X^r x dx = \\ &= prX - pX^2 + pr(r-X) - \frac{p}{2}(r^2 - X^2) = \\ &= \frac{p}{2}(r^2 - X^2) = \frac{pr^2}{2} \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

---

(10, c).

Ciśnienie  $T$  w punktach zaś załamania ( $\alpha$ ), przy  $Q'$ , odpowiadającym temu kątowi załamania, będzie:

$$\begin{aligned} T &= Q' \cos \alpha + A \sin \alpha = \\ &= \frac{pr}{2} (1 + \cos \alpha) \cos \alpha + pr \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{pr}{2} (\cos \alpha - \cos^2 \alpha + 2) = \\ &= \frac{pr}{2} (1 + \cos \alpha + \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

---

(23, d).

---

Wyrażenie

$$\frac{pr^2}{2} (1 - \cos \alpha) \cos \alpha.$$

jest największe przy  $\alpha$ , zadość czyniącemu równaniu:

$$\frac{d}{d\alpha} [(1 - \cos \alpha) \cos \alpha] = 0,$$

z czego wypada, że

$$\cos \alpha = \frac{1}{2},$$

czyli że,

$$\alpha = 60^\circ.$$

---

(24, e).

Wyrażenie

$$T = pr (\cos \alpha + \sin^2 \alpha)$$

będzie największe wtenczas, gdy  $\alpha$  będzie czynić zadość równaniu

$$\frac{d}{d\alpha} (\cos \alpha + \sin^2 \alpha) = 0$$

Różniczkując to równanie otrzymamy:

$$- \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

---

(32, f).

$$\Sigma XY = pX \int_0^X ds - p \int_0^X x ds,$$

•a ponieważ,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

a z równania koła mamy

$$dy = - \frac{x}{y} dx,$$

albo:

$$dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{(r^2 - x^2)},$$

podstawiając w wyrażenie  $ds$ ,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{(r^2 - x^2)}} = \\ &= \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \\ &= \frac{r d\left(\frac{x}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}, \end{aligned}$$

podstawiając w pierwsze równanie, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Sigma XY &= pr X \int_0^X \frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} - pr \int_0^X \frac{x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \\ &= pr X \cdot \text{arc. sin} \left(\frac{X}{r}\right) - pr (r - \sqrt{r^2 - X^2}) \end{aligned}$$


---

(36, g)

$$M' = A (r - X) + p \int_X^r (r - x) ds, \dots (a)$$

a ponieważ:

$$A = p r \alpha$$

---

$$\int_X^r (r - x) ds = r \int_X^r ds - \int_X^r x ds, \dots (b)$$

zaś

$$\int_X^r ds = \int_0^r ds - \int_0^X ds =$$

$$= \left[ r \operatorname{arc} \sin \left( \frac{x}{r} \right) \right]_0^r - \left[ r \operatorname{arc} \sin \left( \frac{x}{r} \right) \right]_0^X =$$

$$= \frac{r \pi}{2} - r \operatorname{arc} \sin \left( \frac{X}{r} \right) =$$

$$= r \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right), \dots (c)$$

---

$$\int_X^r x ds = \int_0^r x ds - \int_0^X x ds =$$

$$= \left[ -r \sqrt{r^2 - x^2} \right]_0^r - \left[ -r \sqrt{r^2 - x^2} \right]_0^X =$$

$$= r^2 + r \sqrt{r^2 - X^2} - r^2 = r \sqrt{r^2 - X^2}, \dots \dots \dots (d)$$

podstawując (c) i (d) w (b), otrzymamy:

$$\int_X^r (r - x) ds = r^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - r^2 \cos \alpha, \dots (e)$$

podstawiając zaś (e) w równanie (a) otrzymamy:

$$M'' = pr^2 \alpha (1 - \sin \alpha) + pr^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha - \cos \alpha \right),$$

albo:

$$M'' = pr^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right)$$

---

(38, h)

$$Q' - Q'' = pr \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 - \frac{\pi}{2 \cos \alpha} + \alpha \operatorname{tg} \alpha + 1 \right) =$$



$$p' \left[ \frac{\alpha \sin \alpha \cos \alpha + \alpha \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) \cos \alpha} - \frac{\pi}{2 \cos \alpha} \right]$$

$$p' \left[ \frac{\alpha \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha) \cos \alpha} - \frac{\pi}{2 \cos \alpha} \right].$$

---

(43, i).

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right) = 0$$

czyli,

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) = 0$$

$$\frac{\sin \alpha + \alpha \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\alpha \sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} = 0$$

$$\frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha) + \alpha \cos \alpha (1 - \cos \alpha) - \alpha \sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} = 0$$

$$\frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha) - \alpha (1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha)^2} = 0.$$

$$\frac{\sin \alpha - \alpha}{1 - \cos \alpha} = 0.$$

Aby zadość uczynić równaniu powyższemu, potrzeba, żeby

$$\sin \alpha - \alpha = 0$$

czyli,

$$\alpha = 0.$$

Dla przekonania się, czy rzeczywiście wyrażenie  $\frac{\sin \alpha - \alpha}{1 - \cos \alpha}$  przy  $\alpha = 0$ , jest też 0, weźmiemy drugie pochodne licznika i mianownika tego wyrażenia; a mianowicie:

$$\frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}, \dots \dots \dots (f)$$

Wyrażenie (f) przy  $\alpha = 0$ , jest równe 0, a zatem i wyrażenie  $\frac{\sin \alpha - \alpha}{1 - \cos \alpha}$  jest równe 0, przy  $\alpha = 0$ .

(44, k)

Dla oznaczenia rzeczywistego znaczenia  $Q'$ , przy  $\alpha = 0$ ,

$$Q' = \text{pr} \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right)$$

należy znaleźć znaczenie wyrażenia

$$\frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \dots \dots \dots (g)$$

Wyrażenie to przy  $\alpha = 0$  jest nieokreślonym.



(46, 1).

Wyrażenie

$$pr^2 \left[ \alpha \sin \alpha - \frac{\pi}{2} (1 - \cos \alpha) \right], \dots \dots (i)$$

jest *największe* przy  $\alpha = 60^\circ, 50'$ , jak to widać z następującej tablicy:

Przy $\alpha =$	Wyrażenie (i) =
0	0
30°	0,05136 $pr^2$
45°	0,09534 $pr^2$
60°	0,12150 $pr^2$
60°, 20'	0,12159 $pr^2$
60°, 30'	0,12172 $pr^2$
60°, 40'	0,12179 $pr^2$
60°, 45'	0,12183 $pr^2$
<u>60°, 50'</u>	<u>0,12185 <math>pr^2</math></u>
60°, 55'	0,12181 $pr^2$
61°	0,12168 $pr^2$
90°	0

(49, m).

$$\begin{aligned}
 A &= p' \int_0^X ds + \frac{p''}{2r} \int_0^X (r-x) ds = \\
 &= p' \int_0^X ds + \frac{p''}{2r} \left[ r \int_0^X ds - \int_0^X x ds \right], \quad \dots \quad (i)
 \end{aligned}$$

Z (32 f) biorąc rozwiązane integraly i zamiast  $X$  podstawiając jego wartość,  $X = r \sin \alpha$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \int_0^X ds &= r \alpha \\
 \int_0^X x ds &= r^2 (1 - \cos \alpha).
 \end{aligned}$$

Podstawiając w równanie (i), będziemy mieli,

$$A = p' r \alpha + \frac{p'' r}{2} [\alpha - (1 - \cos \alpha)],$$

---

(56, n).

$$(p + \delta e) \left( r + \frac{e}{2} \right) = 144 R e,$$

$$\frac{\delta}{2} e^2 + \left( \delta r + \frac{p}{2} - 144 R \right) e - p r,$$

$$e^2 + 2 \left( r + \frac{p}{2\delta} - 144 \frac{R}{\delta} \right) e = - \frac{2pr}{\delta},$$

$$\left( e + r + \frac{p}{2\delta} - 144 \frac{R}{\delta} \right)^2 = \left( r + \frac{p}{2\delta} - 144 \frac{R}{\delta} \right)^2 - \frac{2pr}{\delta}$$

$$e = - \left( r + \frac{p}{2\delta} - 144 \frac{R}{\delta} \right) \pm \sqrt{\left( r + \frac{p}{2\delta} - 144 \frac{R}{\delta} \right)^2 - \frac{2pr}{\delta}}.$$

(57, o).

$$(1,25 p + 1,4069 \delta e') \left( r + \frac{e'}{2} \right) = 144 R e'$$

$$1,25 pr + 1,4069 \delta e' r + 0,625 p e' + 0,70345 \delta e'^2 = 144 R e'$$

$$e'^2 + e' \left( 2r + 0,8885 \frac{p}{\delta} - 204,705 \frac{R}{\delta} \right) = - 1,7768 \frac{pr}{\delta}$$

$$\left( e' + r + 0,444 \frac{p}{\delta} - 102,35 \frac{R}{\delta} \right)^2 =$$

$$= \left( r + 0,444 \frac{p}{\delta} - 102,35 \frac{R}{\delta} \right)^2 - 1,777 \frac{pr}{\delta}$$

$$e' = - \left( r + 0,444 \frac{p}{\delta} - 102,35 \frac{R}{\delta} \right) \pm$$

$$\pm \sqrt{\left( r + 0,444 \frac{p}{\delta} - 102,35 \frac{R}{\delta} \right)^2 - 1,777 \frac{pr}{\delta}}.$$

(73, p).

$$M' = A(\xi - X) + p \int_X^\xi (\xi - x) dx,$$

a że:

$$A = pX,$$

$$\begin{aligned} \int_X^\xi (\xi - x) dx &= \xi(\xi - X) - \frac{1}{2}(\xi^2 - X^2) = \\ &= \frac{\xi^2}{2} - \xi X + \frac{X^2}{2} = \\ &= \frac{(\xi - X)^2}{2}. \end{aligned}$$

Podstawiając w wyrażenie  $M'$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} M'' &= p\xi X - pX^2 + \frac{p}{2}(\xi - X)^2 = \\ &= \frac{p}{2}(\xi^2 - X^2) = \frac{pr^2}{2}(\sin^2 a - \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

to jest, że

$$M'' = \frac{pr^2}{2}(\sin^2 a - \sin^2 \alpha).$$

---

(79, q).

$M'''$ , moment łamania sklepienia:

$$M''' = (Q' - Q'') \frac{(r - Y)}{(r - \eta)} (Y - \eta)$$

a że:

$$Q' - Q'' = \frac{pr^2}{2} (1 - \cos \alpha)$$

$$r - Y = r (1 - \cos \alpha)$$

$$Y - \eta = r (\cos \alpha - \cos a)$$

$$r - \eta = r (1 - \cos a),$$

podstawiając powyższe w wyrażenie momentu łamania, otrzymamy

$$M''' = \frac{pr^2}{2} (1 - \cos \alpha) (\cos \alpha - \cos a)$$

$M'''$ , będzie największe wtenczas, gdy  $\alpha$  będzie czynić za-  
dość równaniu:

$$\frac{d}{d\alpha} [(1 - \cos \alpha) (\cos \alpha - \cos a)] = 0.$$

Różniczkując to równanie, otrzymamy,

$$\sin \alpha (\cos \alpha - \cos a) - (1 - \cos \alpha) \sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{1 + \cos a}{2}.$$


---



(83, r).

$$M'' = A (\xi - X) + p \int_X^{\xi} (\xi - x) ds$$

Δ ponieważ:

$$A = pr^{\alpha}$$

$$\xi = r \sin a$$

$$X = r \sin \alpha$$

$$(\xi - X) = r (\sin a - \sin \alpha)$$

$$\int_X^{\xi} ds = r (a - \alpha)$$

$$\int_X^{\xi} x ds = r^2 (\cos \alpha - \cos a),$$

podstawiając w  $M''$ , otrzymamy:

$$M'' = pr^2 \alpha (\sin a - \sin \alpha) + pr^2 [\sin a (a - \alpha) - (\cos \alpha - \cos a)]$$

albo:

$$M'' = pr^2 (a \sin a - \alpha \sin \alpha + \cos a - \cos \alpha),$$

---

(95, s).

$$\Sigma XY = A (r \sin \alpha - r \sin u) - p \int_{r \sin u}^{r \sin \alpha} (x - r \sin u) ds,$$

albo:

$$\Sigma XY = Ar (\sin \alpha - \sin u) - p \int_{r \sin u}^{r \sin \alpha} x ds + pr \sin u \int_{r \sin u}^{r \sin \alpha} ds$$

a ponieważ:

$$A = p \int_{r \sin u}^{r \sin \alpha} ds = pr (\alpha - u)$$

$$\int x ds = r \int \frac{x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -r \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$\int_{r \sin u}^{r \sin \alpha} \frac{x ds}{r \sin u} = \left[ -r \sqrt{r^2 - x^2} \right]_{r \sin u}^{r \sin \alpha} = r^2 \frac{\sin \alpha}{r \sin u} (\cos u - \cos \alpha).$$

Podstawiawszy w pierwsze równanie, otrzymamy:

$$\Sigma XY = pr^2 (\alpha - u) (\sin \alpha - \sin u) - pr^2 (\cos u - \cos \alpha) + pr^2 \sin u (\alpha - u),$$

albo,

$$\Sigma XY = pr^2 [(\alpha - u) \sin \alpha - (\cos u - \cos \alpha)].$$


---

(98, t).

$$\begin{aligned}
 M'' &= Ar (1 - \sin \alpha) + p \int_r^r (r - x) ds = \\
 &= r (1 - \sin \alpha) p \int_r^r \frac{\sin \alpha}{\sin u} ds + pr \int_r^r \frac{ds}{\sin \alpha} - p \int_r^r \frac{x ds}{\sin \alpha} = \\
 &= pr^2 (1 - \sin \alpha) (\alpha - u) + pr^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - pr^2 \cos \alpha,
 \end{aligned}$$

albo:

$$M'' = pr^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha - \cos \alpha \right]$$

---

(100, u).

$$\begin{aligned}
 Q' - Q'' &= pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha} - 1 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left( \frac{\pi}{2} - u \right) - (\alpha - u) \sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right] = \\
 &= pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos \alpha + (\alpha - u) \sin \alpha (\cos u - \cos \alpha)}{\cos u - \cos \alpha} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \frac{1}{\cos \alpha} = \\
 & = pr \left[ \frac{(\alpha - u) \sin \alpha \cos u}{\cos u - \cos \alpha} - \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \frac{1}{\cos \alpha} \right].
 \end{aligned}$$

---

(105, v).

Wyrażenie  $\frac{(\alpha - u) \sin \alpha}{\cos u - \cos \alpha}$ , przy  $\alpha = u$ , jest nieokreślone. Dla oznaczenia wartości weźmiemy pierwszą pochodną licznika i mianownika, a mianowicie:

$$\frac{\frac{d}{d\alpha} [(\alpha - u) \sin \alpha]}{\frac{d}{d\alpha} (\cos u - \cos \alpha)} = \frac{(\alpha - u) \cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha}.$$

Wyrażenie powyższe przy  $\alpha = u$ , równa się 1<sup>ści</sup>, a zatem przy  $\alpha = u$ , ciśnienie poziome w kluczu

$$Q' = 0.$$


---

(116, w).

$$\begin{aligned}
 \max. P = 2pr \frac{\frac{d}{d\alpha} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - u \right) (\cos u - \cos \alpha) - (\alpha - u) \sin \alpha \cos u \right]}{\frac{d}{d\alpha} \left[ (\sin \alpha - \sin u) \cos \alpha - (1 - \sin \alpha) (\cos u - \cos \alpha) \right]}
 \end{aligned}$$

albo:

$$\begin{aligned} \max. P = 2pr \left[ \frac{\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \sin \alpha - (\alpha - u) \cos \alpha \cos u -}{\cos^2 \alpha - (\sin \alpha - \sin u) \sin \alpha +} \right. \\ \left. \frac{- \sin \alpha \cos u}{+ \cos \alpha (\cos u - \cos \alpha) - (1 - \sin \alpha) \sin \alpha} \right]. \end{aligned}$$

Podstawiając  $u$  zamiast  $\alpha$ , otrzymamy:

$$\max. P = 2pr \left[ \frac{\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \sin u - \sin u \cos u}{\cos^2 u - (1 - \sin u) \sin u} \right]$$

albo:

$$\max. P = 2pr \left[ \left(\frac{\pi}{2} - u\right) - \cos u \right] \frac{\sin u}{1 - \sin u}.$$

---

(130, x).

$$\begin{aligned} M' &= A(a - X) + p \int_X^a (a - x) dx = \\ &= pX(a - X) + pa \int_X^a dx - p \int_X^a x dx = \\ &= \frac{p}{2} (a^2 - X^2), \end{aligned}$$

a ponieważ, równanie elipsy:

$$X^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - Y^2),$$

otrzymamy:

$$M' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} Y^2$$

---

(138, z).

$$M'' = A (\xi - X) + p \int_X^\xi (\xi - x) dx,$$

a ponieważ

$$A = pX,$$

podstawiając w równanie pierwsze i całkując to równanie, otrzymamy:

$$M'' = pX (\xi - X) + p\xi (\xi - X) - \frac{p}{2} (\xi^2 - X^2).$$

A że równanie elipsy jest:

$$X^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - Y^2)$$

$$\xi^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - \eta^2),$$

podstawiając w  $M'$ , otrzymamy:

$$M'' = \frac{p}{2} \frac{a^2}{b^2} (Y^2 - \eta^2)$$

---

(147, ab).

$$\Sigma XY = \Delta X - p \int_0^X x ds, \dots \dots \dots (k)$$

W powyższym równaniu:

$$1) \Delta = p \int_0^X ds, \dots \dots \dots (l)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

albo:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \dots \dots \dots (m)$$

Z równania elipsy, mamy:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{bx}{a \sqrt{a^2 - x^2}}, \dots \dots \dots (n)$$

Podstawiając (n) w (m), otrzymamy:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} dx,$$

Niechaj,  $x = a \sin \gamma$

$$dx = a \cos \gamma d\gamma$$

$$a^2 - x^2 = a^2 (1 - \sin^2 \gamma) = a^2 \cos^2 \gamma,$$

zatem:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{b^2 \sin^2 \gamma}{a^2 \cos^2 \gamma}} a \cos \gamma d\gamma$$

albo:

$$ds = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \gamma} d\gamma$$

Niechaj  $a^2 - b^2 = a^2 n^2$ ,

$$ds = a \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \gamma} d\gamma. \quad \dots \dots \dots (o)$$

Podstawiając (o) w (l), otrzymamy:

$$A = pa \int_0^\gamma \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \gamma} d\gamma$$

albo:

$$A = pa \int_0^\gamma (1 - n^2 \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}} d\gamma =$$



$$= pa \int_0^\gamma \left[ 1 - \frac{1}{2} n^2 \sin^2 \gamma - \frac{1}{2} \frac{1}{4} n^4 \sin^4 \gamma - \frac{1.3 n^6}{2.4.6} \sin^6 \gamma - \right. \\ \left. - \frac{1.3.5. n^8}{2.4.6.8} \sin^8 \gamma - \dots \right] d\gamma,$$

albo:

$$A = pa \int_0^\gamma \left[ 1 - 0,5 n^2 \sin^2 \gamma - 0,125 n^4 \sin^4 \gamma - 0,0625 n^6 \sin^6 \gamma - \right. \\ \left. - 0,03906 n^8 \sin^8 \gamma - \dots \right] d\gamma \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

Dla rozwiązania integralów w równaniu (p) weźmy ogólne wyrażenie:

$$\int \sin^m \gamma d\gamma,$$

Całkując częściami, otrzymamy:

$$\int \sin^m \gamma d\gamma = - \sin^{(m-1)} \gamma \cos \gamma + (m-1) \int \sin \gamma \cos^2 \gamma d\gamma,$$

albo:

$$\int \sin^m \gamma d\gamma = - \sin^{(m-1)} \gamma \cos \gamma + (m-1) \int \sin \gamma d\gamma - \\ - (m-1) \int \sin^m \gamma d\gamma,$$

zyli:

$$\int \sin^m \gamma \, d\gamma = - \frac{\sin^{(m-1)} \gamma \cos \gamma}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{(m-2)} \gamma \, d\gamma.$$

Podstawiając zamiast  $m$  różne liczby, otrzymamy:

$$\text{przy } m = 1, \int_0^\gamma \sin \gamma \, d\gamma = 1 - \cos \gamma,$$

$$\text{przy } m = 2, \int_0^\gamma \sin^2 \gamma \, d\gamma = \frac{\gamma}{2} - \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{2}$$

$$\text{przy } m = 3, \int_0^\gamma \sin^3 \gamma \, d\gamma = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cos \gamma - \frac{1}{3} \sin^2 \gamma \cos \gamma,$$

$$\text{przy } m = 4, \int_0^\gamma \sin^4 \gamma \, d\gamma = \frac{1.3}{2.4} \gamma - \frac{1.3}{2.4} \sin \gamma \cos \gamma -$$

$$- \frac{1}{4} \sin^3 \gamma \cos \gamma,$$

$$\text{przy } m = 5, \int_0^\gamma \sin^5 \gamma \, d\gamma = \frac{2.4}{3.5} - \frac{2.4}{3.5} \cos \gamma - \frac{4}{3.5} \sin^2 \gamma \cos \gamma -$$

$$- \frac{1}{5} \sin^4 \gamma \cos \gamma,$$

i t. d.

Podstawiając powyższe w (p) i przyjmując tylko wyrazy do  $n^4$ , z uwagi na znaczenie ułamkowe  $n$ , otrzymamy:

$$A = pa \left[ \gamma - 0,5 n^2 \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{2} \right) - 0,125 n^4 \left( \frac{1,3}{2,4} \gamma - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1,3}{2,4} \sin \gamma \cos \gamma - \frac{\sin^3 \gamma \cos \gamma}{4} \right] , \dots \quad (q)$$

$$\int_0^X x ds = a^2 \int_0^\gamma \sin \gamma (1 - n^2 \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}} d\gamma = \\ = a^2 \int_0^\gamma \left[ \sin \gamma - \frac{n^2}{2} \sin^3 \gamma - \frac{n^4}{2,4} \sin^5 \gamma - \dots \right] d\gamma = \\ = a^2 \left[ 1 - \cos \gamma - \frac{n^2}{2} \left( \frac{2}{2} - \frac{\sin^2 \gamma \cos \gamma}{3} - \frac{2}{3} \cos \gamma \right) - \right. \\ \left. - \frac{n^4}{2,4} \left( \frac{2,4}{3,5} - \frac{\sin^2 \gamma \cos \gamma}{5} - \frac{4}{3,5} \sin^2 \gamma \cos \gamma - \frac{2,4}{3,5} \cos \gamma \right) \right] , \dots \quad (r)$$

Podstawiając (q) i (r) w (k) otrzymamy:

$$\Sigma XY = pa^2 \left[ \gamma - 0,5 n^2 \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{2} \right) - 0,125 n^4 \left( \frac{1,3}{2,4} \gamma - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1,3}{2,4} \sin \gamma \cos \gamma - \frac{\sin^3 \gamma \cos \gamma}{4} \right) \right] \sin \gamma - pa^2 \left[ 1 - \cos \gamma - \right.$$

$$- 0,5 n^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{\sin^2 \gamma \cos \gamma}{3} - \frac{2}{3} \cos \gamma \right) - \frac{n^4}{2,4} \left( \frac{2,4}{3,5} - \frac{\sin^4 \gamma \cos \gamma}{5} - \frac{4}{3,5} \sin^2 \gamma \cos \gamma - \frac{2,4}{3,5} \cos \gamma \right),$$

albo:

$$\begin{aligned} \Sigma XY = pa^2 & \left[ \frac{n^4}{160} \sin^4 \gamma \cos \gamma + \left( \frac{n^2}{12} + \frac{13 n^4}{960} \right) \sin^2 \gamma \cos \gamma + \right. \\ & \left. + \left( 1 - \frac{n^2}{4} - \frac{3n^4}{64} \right) \gamma \sin \gamma + \left( 1 - \frac{n^2}{3} - \frac{n^4}{15} \right) \cos \gamma - \right. \\ & \left. - \left( 1 - \frac{n^2}{3} - \frac{n^4}{15} \right) \right]. \end{aligned}$$

---

(148 ac).

$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ , równanie elipsy, a ponieważ przyjęliśmy wyżej, że:

$$x = a \sin \gamma,$$

podstawivszy w równanie elipsy znaczenie  $x$ , otrzymamy:

$$y = b \cos \gamma.$$


---

(150, ad).

$$\begin{aligned}
 M'' &= A(a-X) + p \int_X^a (a-x) ds = \\
 &= Aa - AX + pa \int_X^a ds - p \int_X^a x ds = \\
 &= Aa - AX + pa \int_0^a ds - pa \int_0^X ds - p \int_0^a x ds + p \int_0^X x ds = \\
 &= ap \int_0^X ds - AX + pa \int_0^a ds - pa \int_0^X ds - p \int_0^a x ds + p \int_0^X x ds,
 \end{aligned}$$

zatem:

$$M'' = pa \int_0^a ds - p \int_0^a x ds - \Sigma XY, \dots (s)$$


---

$$\int_0^a ds = a \int_0^{90^\circ} (1 - n^2 \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}} d\gamma, \quad [\text{vid. (o)}].$$

$$\int_0^a ds = a \int_0^{90^\circ} \left(1 - \frac{n^2}{2} \sin^2 \gamma - \frac{n^4}{2.4} \sin^4 \gamma\right) d\gamma =$$

$$\begin{aligned}
 &= a \left[ \gamma - \frac{n^2}{2} \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n^4}{2.4} \left( \frac{3\gamma}{2.4} - \frac{3 \sin \gamma \cos \gamma}{2.4} - \frac{\sin^3 \gamma \cos \gamma}{4} \right) \right]_0^{90^\circ} = \\
 &= a \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{n^2}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{3n^4}{2.4.8} \frac{\pi}{2} \right],
 \end{aligned}$$

albo:

$$\int_0^a ds = a \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{n^2}{4} - \frac{3n^4}{64} \right], \dots \dots \dots (t)$$

$$\int_0^a ds = a^2 \int_0^{90^\circ} (1 - n^2 \sin^2 \gamma) \sin \gamma \, d\gamma, \quad [\text{vid. (r)}].$$

$$\int_0^a ds = a^2 \int_0^{90^\circ} (\sin \gamma - \frac{n^2}{2} \sin^3 \gamma - \frac{n^4}{2.4} \sin^5 \gamma) \, d\gamma =$$

$$= a^2 \left[ -\cos \gamma + \frac{n^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \gamma \cos \gamma}{3} + \frac{2}{3} \cos \gamma \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n^4}{2.4} \left( \frac{\sin^4 \gamma \cos \gamma}{5} + \frac{4}{3.5} \sin^2 \gamma \cos \gamma + \frac{2.4}{3.5} \cos \gamma \right) \right]_0^{90^\circ} =$$

$$= a^2 \left[ 1 - \frac{n^2}{3} - \frac{n^4}{15} \right],$$

czyli że,

$$\int_0^a x \, ds = a^2 \left[ 1 - \frac{n^2}{3} - \frac{n^4}{15} \right], \quad \dots \dots \dots (u)$$

Podstawiając wyrażenie (t) i (u) w (s), otrzymamy:

$$M'' = pa^2 \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{n^2}{4} - \frac{3n^4}{64} \right) - pa^2 \left( 1 - \frac{n^2}{3} - \frac{n^4}{15} \right) - \Sigma XY,$$

(157, ae).

$$\begin{aligned} M'' &= A(a - X) + p \int_X^a (a - x) \, dx = \\ &= pXa - pX^2 + pa^2 - pXa - \frac{pa^2}{2} + \frac{pX^2}{2} = \\ &= \frac{p}{2} (a^2 - X^2) \end{aligned}$$

albo:

$$M'' = p\varrho (b - Y).$$

(161, af).

$$T = Q' \cos \alpha + A \sin \alpha,$$

a ponieważ:

$$Q' = p e$$

$$A = p \sqrt{2eY}.$$

Z równania zaś paraboli  $x^2 = 2eY$  otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2eY}.$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2eY}{1 + 2eY}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2eY}},$$

podstawiając w wyrażenie  $T$ , otrzymamy:

$$T = \frac{pe(1 + 2Y)}{\sqrt{1 + 2eY}},$$

(162, ag).

$$\Sigma XY = AX - p \int_0^X x ds.$$



a ponieważ:

$$A = p \int_0^X ds, \dots \dots \dots (w)$$

a z równania paraboli  $x^2 = 2cy$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{c}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{c^2}} dx, \dots \dots \dots (x)$$

podstawiając (x) w (w), otrzymamy:

$$A = p \int_0^X \sqrt{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2} dx$$

Całkując częściami:

$$A = p \left[ x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right]_0^X - \frac{p}{c^2} \int_0^X \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{c^2}}}, \dots \dots (z)$$

mnożąc zaś i dzieląc wyrażenie (y) przez

$$\sqrt{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2},$$

otrzymamy:

$$A = p \int_0^X \frac{(1 + \frac{x^2}{c^2}) dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2}} = p \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2}} +$$

$$+ \frac{p}{e^2} \int_0^X \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{e}\right)^2}},$$

albo:

$$A = p \left[ e \log \left( \frac{x}{e} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{e}\right)^2} \right) \right]_0^X +$$

$$+ \frac{p}{e^2} \int_0^X \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{e}\right)^2}}, \dots \dots (ab)$$

dodając (z) do (ab), otrzymamy:

$$2A = p \left[ x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{e}\right)^2} \right]_0^X + p \left[ e \log \left( \frac{x}{e} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{e}\right)^2} \right) \right]_0^X,$$

czyli:

$$A = \frac{p}{2} \left[ X \sqrt{1 + \frac{X^2}{e^2}} + e \log \left( \frac{X}{e} + \sqrt{1 + \frac{X^2}{e^2}} \right) \right], \dots \dots (ac)$$

$$\begin{aligned}
 p \int_0^X x ds &= p \int_0^X x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\varrho}\right)^2} dx = \\
 &= p \int_0^X \left(1 + \frac{x^2}{\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{x^2}{\varrho^2}\right) \frac{\varrho^2}{2} = \\
 &= \left[\frac{p\varrho^2}{3} \left(1 + \frac{x^2}{\varrho^2}\right)\right]_0^X
 \end{aligned}$$

czyli że:

$$p \int_0^X x ds = \frac{p\varrho^2}{3} \left(1 + \frac{X^2}{\varrho^2}\right) - \frac{p\varrho^2}{3}, \quad \dots \quad (\text{ad})$$

Podstawiając (ac) i (ad) w równanie równowagi, otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \Sigma XY &= \frac{p}{2} \left[ X^2 \sqrt{1 + \frac{X^2}{\varrho^2}} + \varrho X \log \left( \frac{X}{\varrho} + \sqrt{1 + \frac{X^2}{\varrho^2}} \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{p\varrho^2}{3} \left[ \left(1 + \frac{X^2}{\varrho^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

(165, ah).

$$\begin{aligned}
 M' &= A(a - X) + p \int_X^a (a - x) ds = \\
 &= Aa - AX + pa \int_0^a ds - pa \int_0^X ds - p \int_0^a x ds + p \int_0^X x ds = \\
 &= pa \int_0^a ds - p \int_0^a x ds - \Sigma XY, \dots \dots \text{(ae)}
 \end{aligned}$$

A ponieważ (vid. 162 ag).

$$\begin{aligned}
 pa \int_0^a ds &= \frac{pa}{2} \left[ x \sqrt{1 + \frac{x^2}{e^2}} \right]_0^a + \\
 &+ \frac{pa}{2} \left[ e \log \left( \frac{x}{e} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{e^2}} \right) \right]_0^a = \\
 &= \frac{pa}{2} \left[ a \sqrt{1 + \frac{a^2}{e^2}} + e \log \left( \frac{a}{e} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{e^2}} \right) \right], \dots \text{(af)}
 \end{aligned}$$

zaś:

$$p \int_0^a x ds = \left[ \frac{p}{3} e^2 \left( 1 + \frac{X^2}{e^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a =$$

$$= \frac{p}{3} \varrho^2 \left(1 + \frac{a^2}{\varrho^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{p}{3} \varrho^2, \dots \dots \dots \text{(ag)}$$

---

Podstawiając (af) i (ag) w (ae), otrzymamy:

$$M'' = \frac{pa}{2} \left[ a \sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}} + \varrho \log \left( \frac{a}{\varrho} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}} \right) \right] - \\ - \frac{p}{3} \varrho^2 \left[ \left(1 + \frac{a^2}{\varrho^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] - \Sigma XY.$$

---

(173, ai).

$$M'' = A (l - X) + p \int_X^l (l - x) dx = \\ = pX (l - X) + p \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_X^l = \\ = pX (l - X) + p \left( l^2 - \frac{l^2}{2} - lX + \frac{X^2}{2} \right) = \\ = \frac{p}{2} (l^2 - X^2)$$

czyli:

$$M'' = \frac{p}{2} (l^2 - X^2),$$

Zamiast  $l$  i  $X$  podstawiając ich wartości, otrzymane z równania hyperboli:

$$l^2 = \frac{b^2}{a^2} (h^2 - a^2)$$

$$X^2 = \frac{b^2}{a^2} (Y^2 - a^2)$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} M'' &= \frac{p}{2} \left[ \frac{b^2}{a^2} (h^2 - a^2) - \frac{b^2}{a^2} (Y^2 - a^2) \right] = \\ &= \frac{p}{2} \frac{b^2}{a^2} (h^2 - Y^2) \end{aligned}$$

---

(178, al).

$$\Sigma XY = AX - p \int_0^X x ds,$$

A ponieważ:

$$A = p \int_0^X ds,$$

równanie hyperboli:

$$b^2 y^2 - a^2 x^2 = a^2 b^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{a^2 x}{b^2 y} = - \frac{a}{b} \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}},$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{a^2 x^2}{b^2 (b^2 + x^2)}} dx,$$

Zatem:

$$A = p \int_0^X \sqrt{1 + \frac{a^2 x^2}{b^2 (b^2 + x^2)}} dx,$$

Przyjmując że:

$$x = b \operatorname{tg} \varphi,$$

$$dx = \frac{b d\varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$A = p \int_0^{\varphi'} \sqrt{1 + \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}} \frac{b d\varphi}{\cos^2 \varphi} =$$

$$= p \int_0^{\varphi'} \sqrt{\frac{(b^2 + a^2) - a^2 \cos^2 \varphi}{(b^2 + a^2) - a^2 \cos^2 \varphi}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$\text{niech } n^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

$$A = pan \int_0^{\varphi'} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{n}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} =$$

$$= pan \int_0^{\varphi'} \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} =$$

$$= pan \int_0^{\varphi'} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \varphi}{n} - \frac{1}{2.4} \frac{\cos^4 \varphi}{n^2} - \frac{1.3}{2.4.6} \frac{\cos^6 \varphi}{n^3} - \dots\right) \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} =$$

$$= pa \left[ ntg \varphi' - \frac{\varphi'}{2n} - \frac{1}{8n^3} \left( \frac{\sin \varphi' \cos \varphi'}{2} + \frac{\varphi'}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{48n^5} \left( \frac{\sin \varphi' \cos^3 \varphi'}{4} + \frac{3}{4} \frac{\sin \varphi' \cos \varphi'}{2} + \frac{3\varphi'}{8} - \dots \right) \right]$$

albo:

$$A = pa \left[ ntg \varphi' - \frac{\varphi'}{2n} - \frac{\sin \varphi' \cos \varphi' + \varphi'}{16 n^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin \varphi' \cos^3 \varphi' + 1,5 \sin \varphi' \cos \varphi' + 1,5 \varphi'}{64 n^5} - \dots \right].$$



$$\begin{aligned}
 p \int_0^X x ds &= pabn \int_0^{\varphi'} \left[ 1 - \frac{\cos^2 \varphi}{2n^2} - \frac{1}{2.4.n^4} \cos^4 \varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1.3}{2.4.6 n^6} \cos^6 \varphi - \dots \right] \frac{tg \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\
 &= pabn \int_0^{\varphi'} \left[ \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} - \frac{1}{2n^2} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{1}{2.4n^4} \sin \varphi \cos \varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1.3}{2.4.6 n^6} \sin \varphi \cos^3 \varphi - \dots \right] d\varphi = \\
 &= pabn \left[ \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} + \frac{\log. \cos \varphi}{2 n^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{2.4.2 n^4} + \frac{3 \cos^4 \varphi}{2.4.6.4 n^6} + \dots \right]_{\varphi'} \\
 &= pabn \left[ \frac{1}{2 \cos^2 \varphi'} + \frac{\log. \cos \varphi'}{2 n^2} + \frac{\cos^2 \varphi'}{2.4.2 n^4} + \frac{3 \cos^4 \varphi'}{2.4.6.4 n^6} + \dots \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} - \frac{1}{16 n^4} - \frac{1}{64 n^6} - \dots \right]
 \end{aligned}$$

Czyli że:

$$\begin{aligned}
 p \int_0^X x ds &= pab \left[ \frac{n}{2 \cos^2 \varphi'} + \frac{\log. \cos \varphi'}{2 n} + \frac{\cos^2 \varphi'}{16 n^3} + \frac{\cos^4 \varphi'}{64 n^5} + \dots \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n}{2} - \frac{1}{16 n^3} - \frac{1}{64 n^5} - \dots \right],
 \end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \Sigma XY = pa X \left[ \operatorname{ntg} \varphi' - \frac{\varphi'}{2n} - \frac{\sin \varphi' \cos \varphi' + \varphi'}{16 n^3} - \right. \\ \left. - \frac{\sin \varphi' \cos^3 \varphi' + 1,5 \sin \varphi' \cos \varphi' + 1,5 \varphi'}{64 n^5} - \dots \right] - \\ - pab \left[ \frac{n}{2 \cos^2 \varphi'} + \frac{\log. \cos \varphi'}{2n} + \frac{\cos^2 \varphi'}{16 n^3} + \frac{\cos^4 \varphi'}{64 n^5} + \dots - \right. \\ \left. - \frac{n}{2} - \frac{1}{16 n^3} - \frac{1}{64 n^5} - \dots \right], \end{aligned}$$

(187, am).

$$\Sigma XY = AX - r \int p' x ds,$$

w którym

$$p' = \frac{2ps}{\pi},$$

$$A = \int_0^X p' r ds = \frac{2pr}{\pi} \int_0^\alpha s ds =$$

$$= \frac{2pr}{\pi} \frac{\alpha^2}{2}$$

czyli że:

$$A = \frac{pr^2 \alpha^2}{\pi},$$

$$\begin{aligned} r \int p'x \, ds &= \frac{2pr^2}{\pi} \int_0^\alpha s \sin s \, ds = \\ &= \frac{2pr^2}{\pi} (\sin s - s \cos s) \Big|_0^\alpha = \\ &= \frac{2pr^2}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

Podstawiając w równanie pierwsze otrzymamy:

$$\Sigma XY = \frac{pr^2}{\pi} [\alpha^2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha + 2 \alpha \cos \alpha]$$

albo:

$$\Sigma XY = \frac{pr^2}{\pi} [(\alpha^2 - 2) \sin \alpha + 2 \alpha \cos \alpha].$$

---

(190, an).

$$M' = A(r-X) + r \int_X^r p'(r-x) \, ds =$$

$$= A (r - X) + r^2 \int_X^r p' ds - r \int_X^r p' x ds,$$

A ponieważ z (187, am. Przypiski).

$$A = \int_0^X p' r ds$$

zatem:

$$\begin{aligned} M'' &= r^2 \int_0^X p' ds - rX \int_0^X p' ds + r^2 \int_0^r p' ds - \\ &- r^2 \int_0^X p' ds - r \int_0^r p' x ds + r \int_0^X p' x ds = \\ &= - rX \int_0^X p' ds + r^2 \int_0^r p' ds - r \int_0^r p' x ds + r \int_0^X p' x ds, \end{aligned}$$

A ponieważ z (187, am. Przypiski).

$$p' = \frac{2 ps}{\pi},$$

$$\int_0^X p' ds = \frac{p a^2}{\pi},$$

$$\int_0^X p'x \, ds = \frac{2 pr}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

$$X = r \sin \alpha,$$

$$\int_0^r p' ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 ps}{\pi} ds = \frac{p\pi}{4},$$

$$\int_0^r p'x \, ds = \frac{2 pr}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s \sin s \, ds = \frac{2 pr}{\pi},$$

podstawiając w wyrażenie  $M'$ , otrzymamy:

$$M' = \frac{2pr^2}{\pi} \left[ \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \sin \alpha - 1 \right] + \frac{pr^2\pi}{4},$$

---

(193, ao).

$$\Sigma XY = \left( \frac{P}{2\pi r} + A \right) (X - r \sin u) - r \int_0^X \frac{p'}{r \sin u} (x - r \sin u) \, ds,$$

a ponieważ

$$A = r \int_{r \sin u}^X p' ds = \frac{2 pr}{\pi} \int_u^\alpha s ds = \frac{pr}{\pi} (\alpha^2 - u^2)$$

$$X = r \sin \alpha$$

$$r \int_{r \sin u}^X p' (x - r \sin u) ds =$$

$$= r \int_{r \sin u}^X p' x ds - r^2 \sin u \int_{r \sin u}^X p' ds =$$

$$= \frac{2pr^2}{\pi} \int_u^\alpha s \sin s ds - \frac{2pr^2}{\pi} \sin u \int_u^\alpha s ds =$$

$$= \frac{2pr^2}{\pi} \left[ \sin s - s \cos s - \sin u \frac{s^2}{2} \right]_u^\alpha =$$

$$= \frac{2 pr^2}{\pi} \left[ \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \sin u \frac{\alpha^2}{2} - \sin u + \right.$$

$$\left. + u \cos u + \frac{u^2}{2} \sin u \right]$$

podstawiawszy w równanie  $\Sigma XY$ , otrzymamy:

$$\Sigma XY = \frac{P}{2\pi} (\sin \alpha - \sin u) + \frac{pr^2}{\pi} [\sin \alpha (\alpha^2 - u^2 - 2) + \\ + 2 (\alpha \cos \alpha + \sin u - u \cos u)].$$

---

(196, ap).

$$M'' = \left( \frac{P}{2\pi r} + A \right) (r - X) + r \int_X^r \frac{p'}{X} (r - x) ds,$$

a ponieważ:

$$A = \frac{pr}{\pi} (\alpha^2 - u^2)$$

$$X = r \sin \alpha$$

$$r \int_X^r p' (r - x) ds = \frac{2pr}{\pi} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} s (r - r \sin s) ds =$$

$$= \frac{2pr^2}{\pi} \left[ \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} s ds - \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} s \sin s ds \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2pr^2}{\pi} \left[ \frac{s^2}{2} - \sin s + s \cos s \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = \\
 &= \frac{2pr^2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{8} - 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \right],
 \end{aligned}$$

podstawiając w równanie momentu,

$$\begin{aligned}
 M' &= \left[ \frac{P}{2\pi} + \frac{pr^2}{\pi} (\alpha^2 - u^2) \right] (1 - \sin \alpha) + \\
 &+ \frac{2pr^2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{8} - 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \right] = \\
 &= \frac{P}{2\pi} (1 - \sin \alpha) + \frac{pr^2}{\pi} [\sin \alpha (2 + u^2 - \alpha^2) - 2 \alpha \cos \alpha + \\
 &+ \frac{\pi^2}{4} - u^2 - 2].
 \end{aligned}$$

---

(199, aq).

$$\begin{aligned}
 M - M' &= \left\{ \frac{P}{2\pi} (\sin \alpha - \sin u) + \frac{pr^2}{\pi} [\sin \alpha (\alpha^2 - u^2 - 2) + \right. \\
 &+ 2 (\alpha \cos \alpha + \sin u - u \cos u) \left. \right\} \frac{\cos \alpha}{\cos u - \cos \alpha} -
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \frac{P}{2\pi} (1 - \sin \alpha) - \frac{pr^2}{\pi} [\sin \alpha (2 + u^2 - \alpha^2) - \\
 & \quad - 2 \alpha \cos \alpha + \frac{\pi^2}{4} - u^2 - 2]
 \end{aligned}$$

$$\text{Przy } M - M' = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{P}{2} [ (\sin \alpha - \sin u) \cos \alpha - (1 - \sin \alpha) (\cos u - \cos \alpha) ] + \\
 & \quad + pr^2 [ \alpha^2 \sin \alpha - u^2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha + 2 (\alpha \cos \alpha + \\
 & \quad + \sin u - u \cos u) \cos \alpha - pr^2 [ 2 \sin \alpha + u^2 \sin \alpha - \\
 & \quad - \alpha^2 \sin \alpha - 2 \alpha \cos \alpha + \frac{\pi^2}{4} - 2 - u^2 ] (\cos u - \cos \alpha) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P = 2 pr^2 [ & \frac{\sin \alpha \cos u (2 + u^2 - \alpha^2) + \cos \alpha (2 + u^2 - \sin u + \\
 & \quad + 2 u \cos u - 2 \alpha \cos u - \frac{\pi^2}{4}) + \cos u (\frac{\pi^2}{4} - 2 - u^2)}{\sin \alpha \cos u +} \\
 & \quad + \cos \alpha (1 - \sin u) - \cos u. ]
 \end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie powyższe przy  $\alpha = u$ , jest równe 0, wzięwszy zatem pierwsze pochodne licznika i mianownika, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 P = 2pr^2 [ & \frac{\cos \alpha \cos u (2 + u^2 - \alpha^2) - 2 \alpha \sin \alpha \cos u - \sin \alpha (2 + \\
 & \quad + u^2 - 2 \sin u + 2 u \cos u - 2 \alpha \cos u - \frac{\pi^2}{4}) - 2 \cos \alpha \cos u}{\cos \alpha \cos u -} \\
 & \quad - \sin \alpha (1 - \sin u) ]
 \end{aligned}$$

a przyjmując, że  $\alpha = u$ , otrzymamy:

$$P = \frac{2 pr^2 \sin u}{(1 - \sin u)} \left[ 2 (\sin u - u \cos u - 1) + \frac{\pi^2}{4} - u^2 \right].$$

---

(205, ar).

Przyjmując, że:

$l$ , pozioma grubość pierścienia w przekroju poprzecznym,

$h$ , grubość pierścienia w kierunku pionowym,

$R$ , współczynnik wytrzymałości materiału, z którego pierścień zbudowany,

$r_1$ , promień pierścienia.

$\delta$ , długość na którą pierścień został ściśnięty, mierząc po promieniu  $r_1$ ,

$q_1$ , siła pozioma, ściskająca pierścień i działająca na 1<sup>śc</sup> długości koła pierścienia,

napiżemy równanie równowagi pierścienia

$$Rlh [2\pi r_1 - 2\pi (r_1 - ) \delta] = 2\pi r_1 q_1 \delta.$$

czyli, że

$$l = \frac{q_1 r_1}{Rh},$$

A ponieważ,

$$r_1 = r \sin u,$$

$$q_1 = \frac{Q''}{\sin u},$$

otrzymamy:

$$l = \frac{Q''r}{Rh},$$

$Q''$  znajdziemy ze wzoru (191), w którym  $\alpha = u$ .

---

(206, as).

$$Q' \left( H - \frac{e}{2} \right) = P (l' + l) + \frac{\delta l^2 H}{2}$$

$$l^2 + \frac{2Pl}{2H} = \frac{2Q}{\delta} \left( 1 - \frac{e}{2H} \right) - \frac{2Pl'}{\delta H}$$

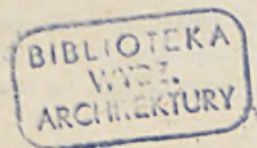
przyjmując, że  $H = \infty$ , otrzymamy:

$$l^2 = \frac{2Q}{\delta}$$

albo:

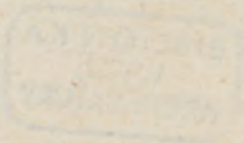
$$l = \sqrt{\frac{2Q}{\delta}},$$


---





nr. 469



## PORZĄDEK RZECZY.

Wstęp. . . . .	Str. 5
----------------	--------

### I. Sklepienie półokrągowe.

a) równo obciążone po linii poziomej. . . . .	8
b) nierówno obciążone po linii poziomej. . . . .	15
c) równo obciążone po linii krzywej sklepienia . . . . .	16
d) nierówno obciążone po linii krzywej sklepienia . . . . .	22
e) gdy ciężar sklepienia jest równo rozłożony po linii krzywej sklepienia, a ciężar dodatkowy równo rozłożony po linii poziomej. . . . .	23
f) grubość sklepienia murowanego i grubość zamurowania . . . . .	26

### II. Sklepienie półokrągowe spłaszczone.

a) równo obciążone po linii poziomej. . . . .	40
b) równo obciążone linii krzywej sklepienia . . . . .	44

III. Sklepienie okrągowe podniosłe (maurytańskie) . . . . .	47
---	----

IV. Sklepienie gotyckie. . . . .	51
----------------------------------	----

### V. Sklepienie eliptyczne.

a) równo obciążone po linii poziomej. . . . .	65
b) spłaszczone równo obciążone po linii poziomej . . . . .	68
c) równo obciążone po linii krzywej sklepienia . . . . .	70

## VI. Sklepienie paraboliczne.

a) równo obciążone po linii poziomej . . . . .	73
b) równo obciążone po linii krzywej sklepienia . . . . .	75

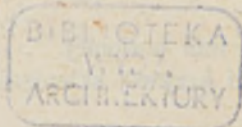
## VII. Sklepienie hyperboliczne.

a) równo obciążone po linii poziomej . . . . .	78
b) równo obciążone po linii krzywej sklepienia . . . . .	81

VIII. Kopała . . . . .	84
------------------------	----

IX. Wyznaczenie grubości przyczółków podtrzymujących sklepienie . . . . .	93
---	----

Przypiski . . . . .	97
---------------------	----



nr. 469

Fig. 1.

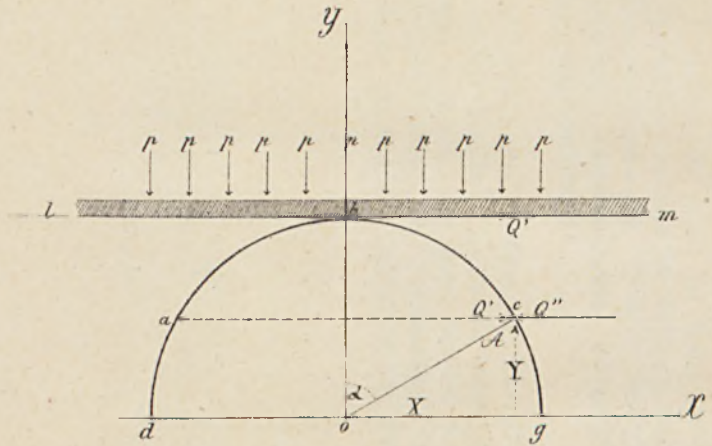
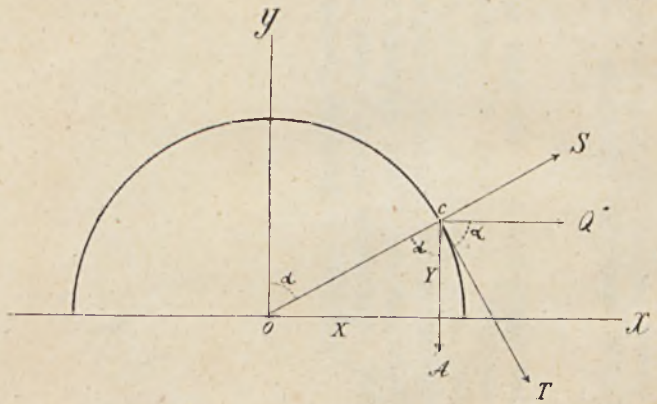


Fig 2.





№ 469



Fig. 3

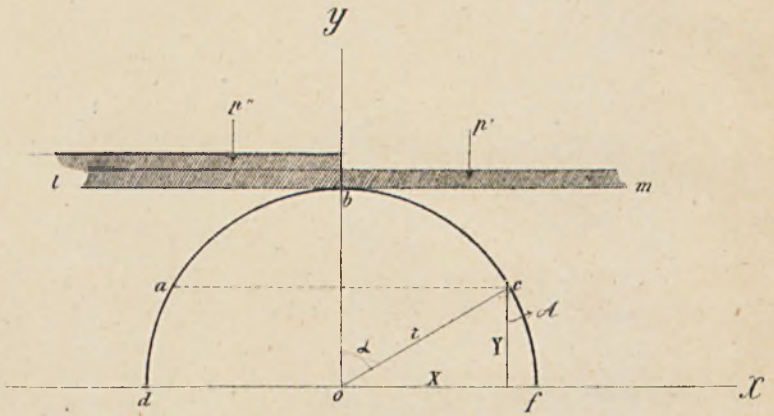
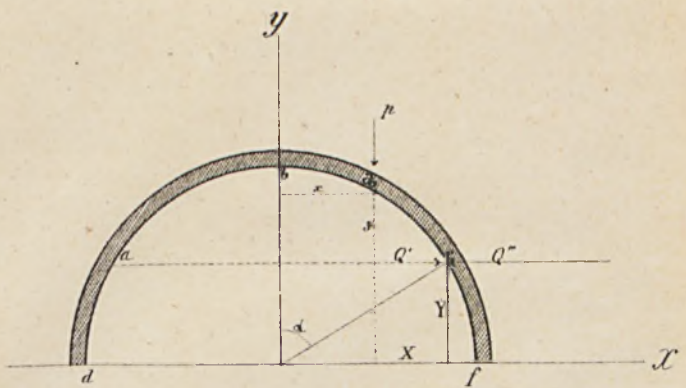


Fig. 4





nr. 469

Fig 5

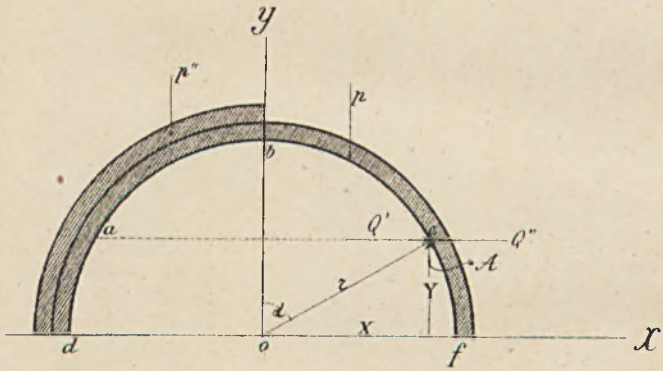
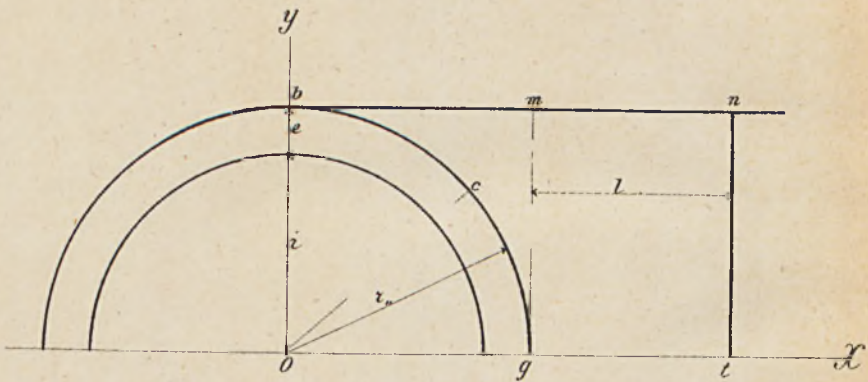


Fig 6.





№. 469

Fig. 7.

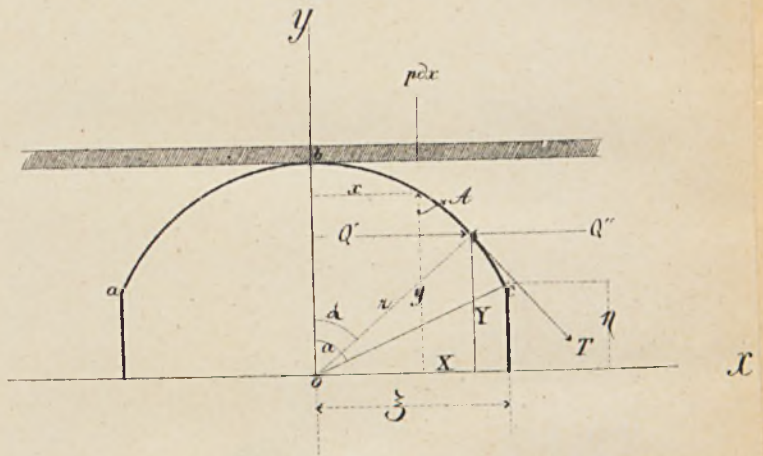
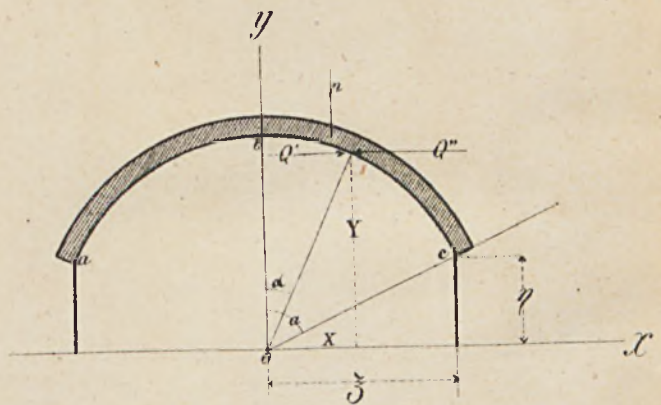


Fig. 8.





nr. 469

Fig 9

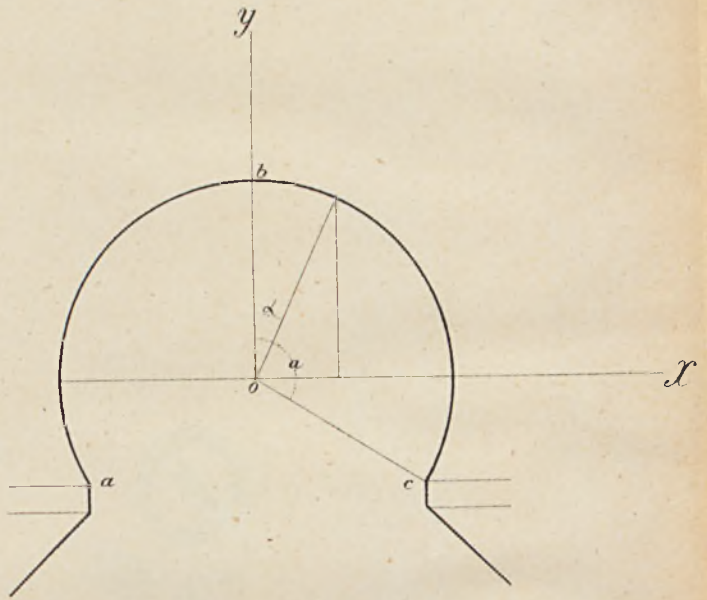
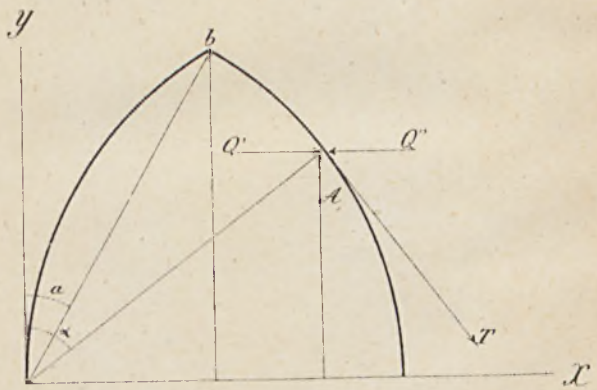


Fig. 10.





nr. 469



Fig. 11.

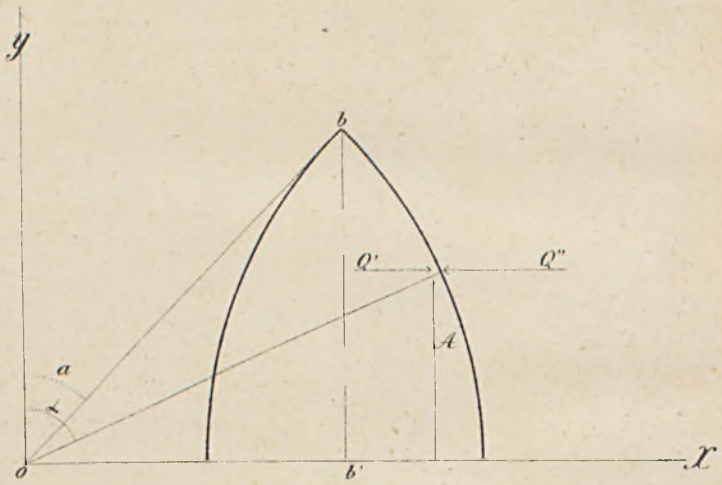
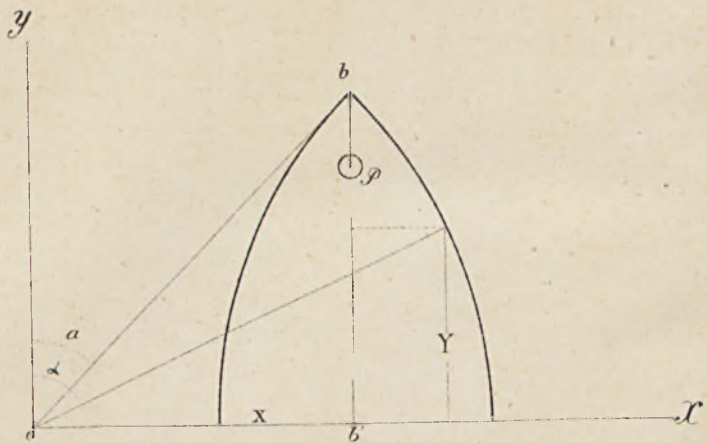


Fig. 12





nr. 469

Fig 13

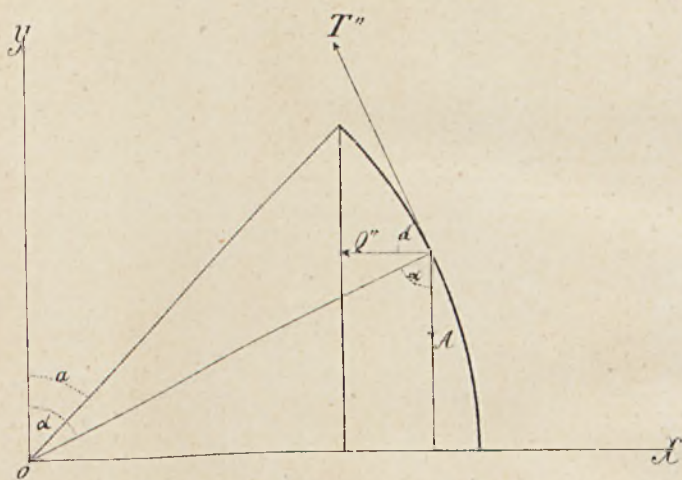
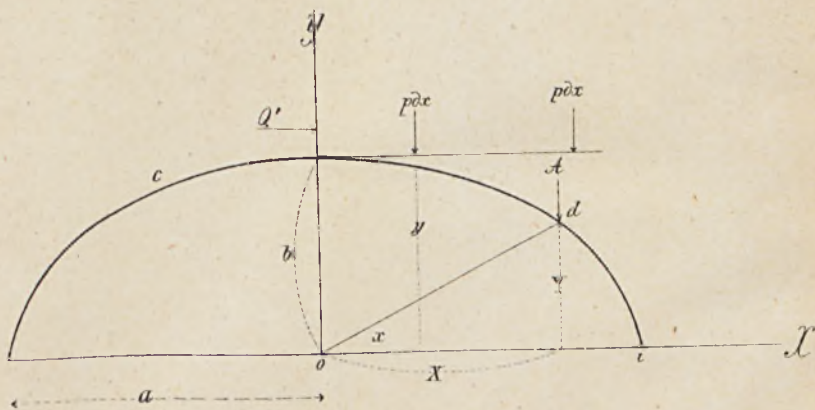


Fig 14





nr. 469

Fig. 15.

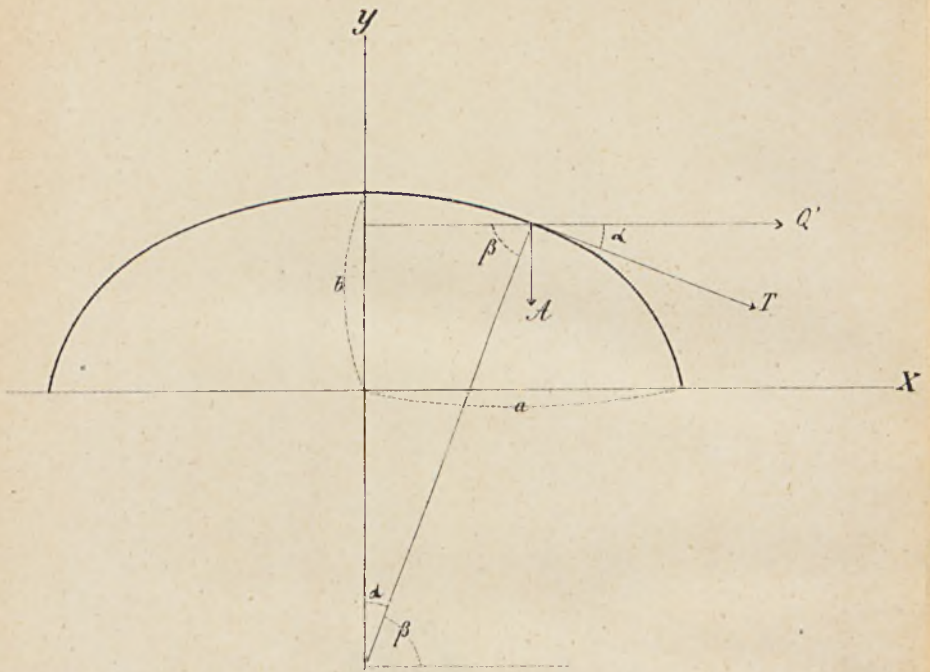
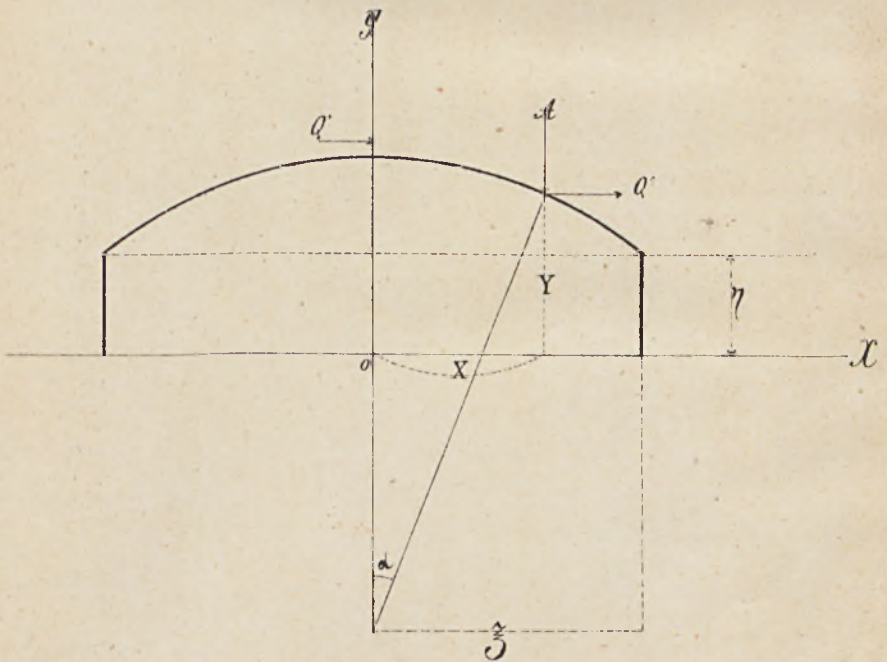


Fig. 16.





nr. 469

Fig. 17.

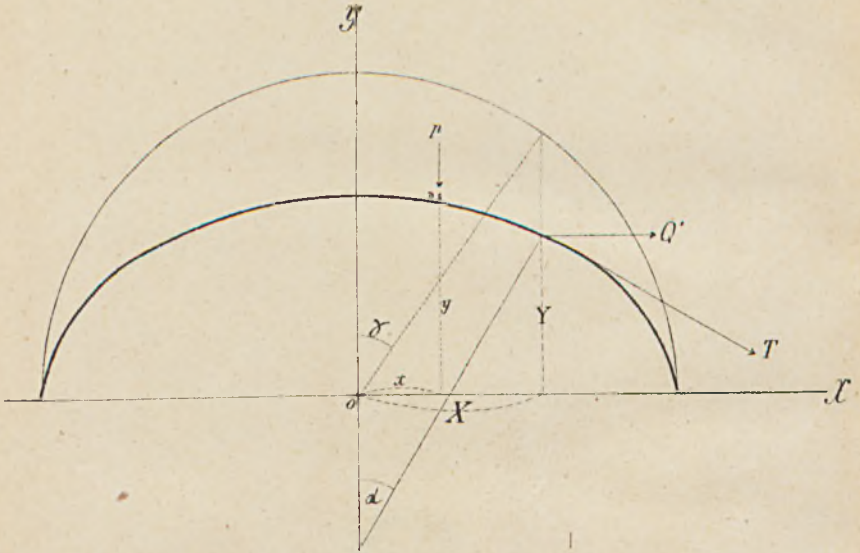
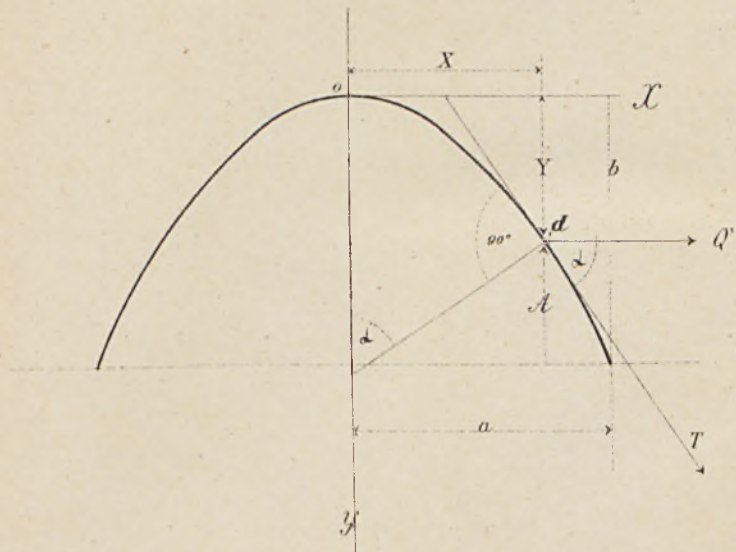


Fig. 18.





№ 469



Fig. 19.

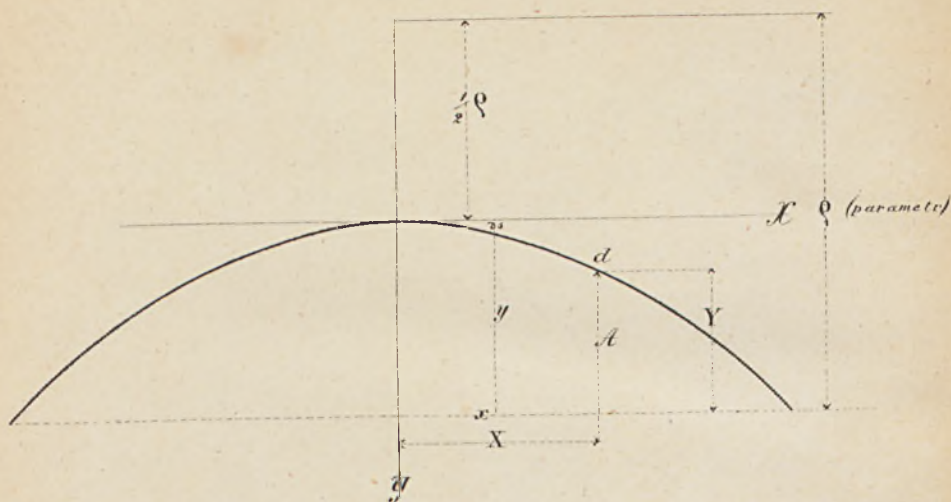
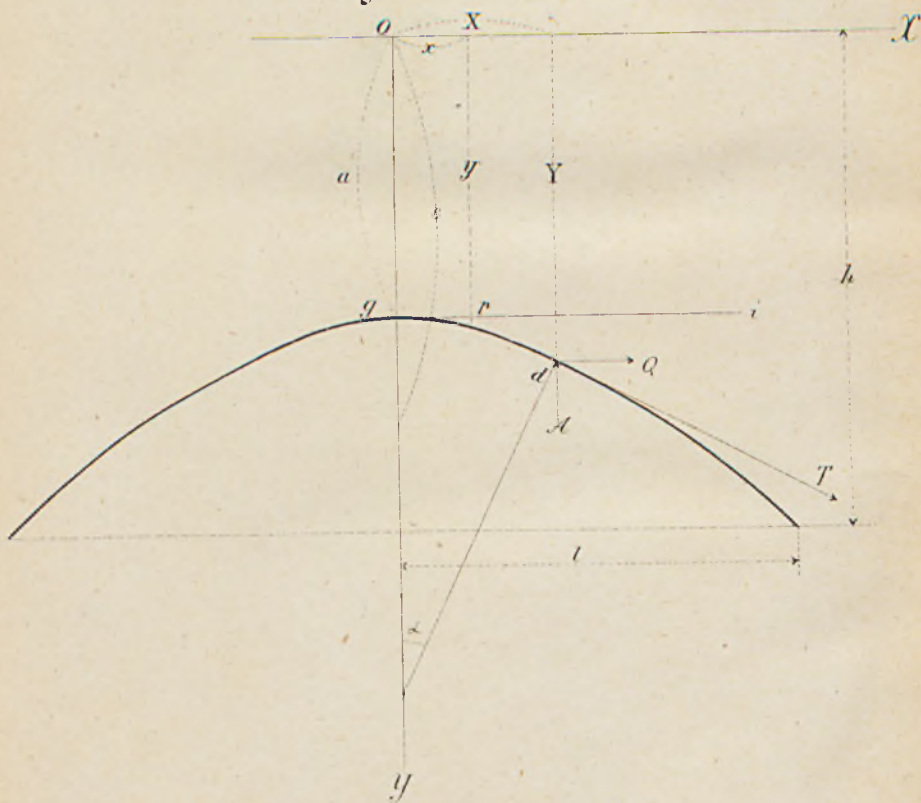


Fig. 20.





№ 469

Fig 21

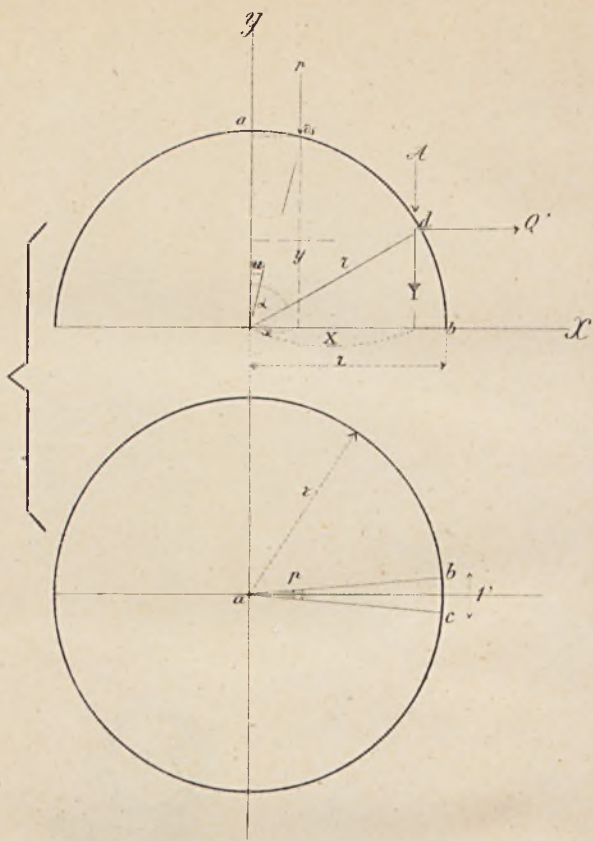
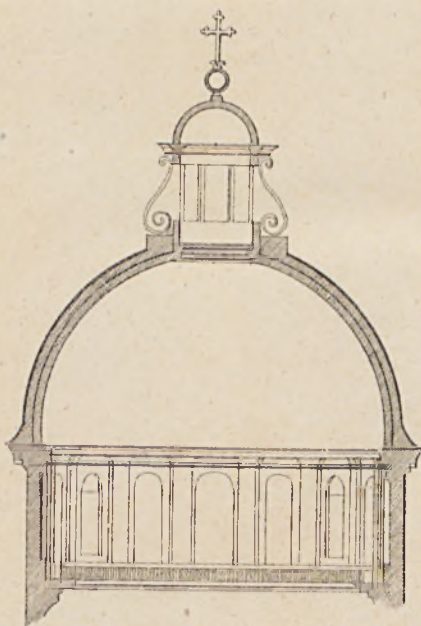


Fig 22.





MP. 469

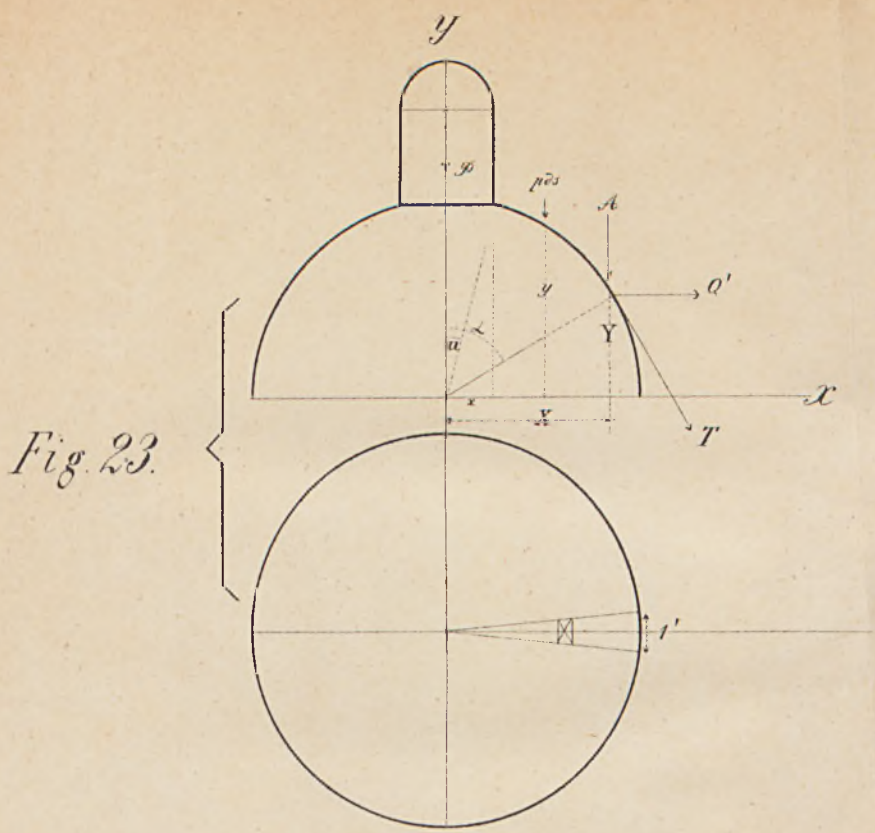
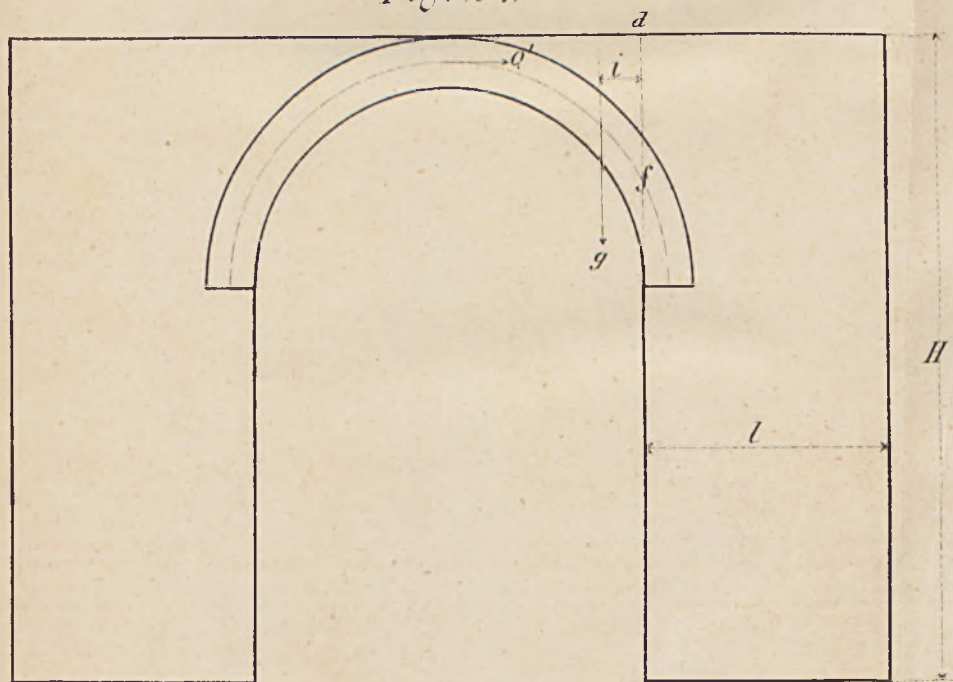
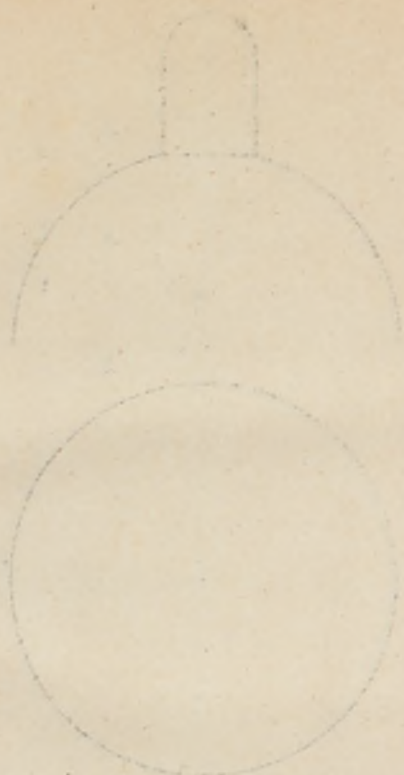
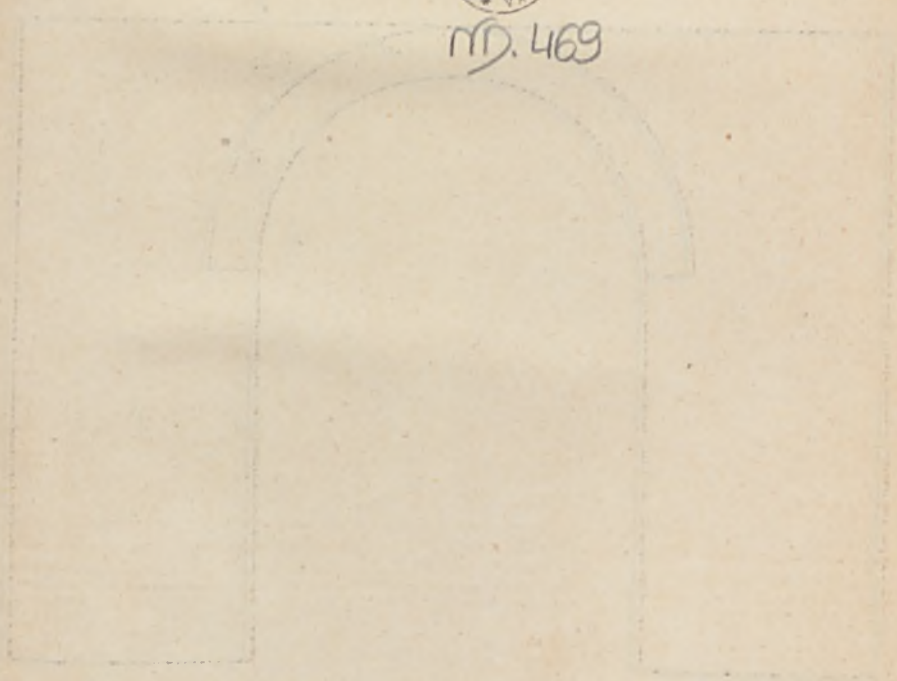


Fig. 24.





nr. 469



II.10037

BIBLIOTEKA GŁÓWNA  
Politechniki Warszawskiej

ND.0469



400000000136794