KRYSTALOGRAFIA

No 283

WEDŁUG WYKŁADÓW
PROF. D^ra^
J. Morozewicza

WYDANIE II^ie^
popraw. i uzupełnione

NAKŁADEM
KÓŁKA PRZYRODNIKÓW
U. U. J.

KRAKÓW
1907.

ODBITO W LITOGR. A. JURCZYKIEWICZA KRAKÓW

Do Biblioteki Radomszczańskiego Koła Akademickiego.

Radomsko, 4 listopada 1932 r.

Kazimierz Łowraty

Jan Nowak ~~[illegible]~~

Krystalografia

Wykłady prof. Morozewicza

Wstęp.

Krystalografia współczesna jest nauką o własnościach materyi stałej, jako środowisku pewnych zjawisk fizycznych. Dawniej uważano ją tylko za naukę pomocniczą mineralogii. Z rozwojem wiedzy przekonano się jednak, że krystalografia obejmuje poniekąd szersze horyzonty, będąc w istocie działem fizyki, roztrząsającym nie tylko własności ciał mineralnych lecz i organicznych - byle jednorodnych. Będąc nauką fizyczną, krystalografia posługuje się metodami matematycznemi i dlatego powinna ~~by~~ być wykładana w łączności z innymi działami fizyki i przez fizyka lub matematyka. Lecz siłą przedawnionego nałogu wyższe uczelnie naukowe wykład jej powierzają wciąż jeszcze mineralogom i zupełnie ~~błędnie~~ zaliczają do nauk geologicznych, co sprowadza wiele trudności zarówno dla uczniów jak i dla nauczycieli, którym brak odpowiedniego przygotowania matematycznego

Katedra krystalografii powinna być odrębna i samoistna!

Ciała jednorodne - krystaliczne i bezpostaciowe.

Ciałem jednorodnem nazywamy takie, które w każdym swym punkcie posiada te same własności chemiczne i fizyczne. Ciała jednorodne mogą być albo krystaliczne albo amorficzne czyli bezpostaciowe.
Środowisko amorficzne tem się różni od krystalicznego, że jego własności fizyczne we wszystkich kierunkach są jednakowe. Jeżeli z twardego ciała jednorodnego wyciosamy walce jednakowej długości i średnicy w rozmaitych kierunkach i jeśli sztabki te będą przeprowadzać zupełnie jednakowo np. ciepło lub elektryczność, to użyte ciało twarde będzie amorficzne, w przeciwnym zaś razie będzie krystaliczne. W obu razach pręty wycięte w kierunkach równoległych będą zachowywać się jednakowo.
Ciał krystalicznych jest bez porównania więcej, niż bezpostaciowych, a w dodatku te ostatnie mogą z biegiem czasu przechodzić w ciała krystaliczne. Przykładem tego jest bezwodnik arsenawy, który jest bezpostaciowy, a z biegiem czasu krystalizuje się. Cukier topiony (cukier przechodzi w ciało krystaliczne.

Jeżeli ciało krystaliczne podczas swego tworzenia się pozostaje w stanie zawieszonym, wówczas dane są warunki aby zależnie od swych własności wewnętrznych przybrało postać wielościenną, otoczoną ścianami, które przecinają się w krawędziach. Taki wielościan krystaliczny który podczas wolnego, niczem nie krępowanego wzrostu otacza się prawidłowemi ścianami, zowie się kryształem.

Kryształ jest wielościanem przyrodzonym, wykazującym w rozmaitych kierunkach rozmaite własności fizyczne. Elementami jego są ściany, krawędzie i kąty.

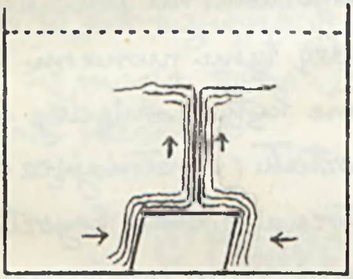
Powstawanie i wzrost kryształów.

Skoro ciało lotne lub ciekłe przechodzi w stan stały, wówczas, jak powiadamy krystalizuje się. Tak para wodna ścinająca się wskutek oziębienia powietrza na śnieg, szron lub krystalizuje się, spada lub osiada w postaci regularnych utworów krystalicznych. Woda ciekła poniżej 0° przechodzi w lód, będący aggregatem kryształów tlenku wodoru. W wulkanach lotne produkty wybuchu sublimują się, czyli w zetknięciu z zimniejszemi częściami krateru osadzają się w stanie stałym; do ciał takich należy siarka, salmiak, sól kuchenna i inne. Ciekły produkt wulkanu - lawa - stygając, wydziela również kryształy, dokładnie nie raz widzialne dla oka nieuzbrojonego.

Największe i najwspanialsze kryształy powstają z roztworów ciał stałych w cieczach. Dzieje się to za sprawą rozpuszczalnika, którym w przyrodzie bywa najczęściej woda. Kryształ powstać może tylko z roztworu przesyconego, a to albo przez wysychanie rozpuszczalnika, albo też przez opadanie temperatury roztworu. W przyrodzie tą drogą powstają np. kryształy gipsu i soli kamiennej z wysychającej w zatokach odciętych wody morskiej; tak też powstają kryształy bardzo licznych minerałów żyłowych. Te tworzą się w szczelinach, przecinających pokłady ziemskie, wypełnionych krążącymi w nich roztworami.

Bardzo doniosłego znaczenia nabierają doświadczenia laboratoryjne skierowane do otrzymywania kryształów z roztworów nasyconych. Doświadczenia w tym kierunku poczynione pozwalają wniknąć głębiej w istotę wzrostu kryształów. Zaczątek kryształu, zjawiający się na dnie naczynia, napełnionego roztworem przesyconym, od samego początku przybiera postać wielościenną. Otaczająca go bezpośrednio warstwa roztworu składa na jego powierzchni część nadmiaru (przesycenia) ciała stałego i, stając się skutkiem tego lżejszą, wznosi się z nad kryształu ku górnej powierzchni cieczy. Od dołu zaś przypływają ku kryształowi nowe ilości roztworu przesyconego, znowu oddając

-mu część przesycenia i ciągną ku górze; proces ten odbywa się tak długo, dopóki całkowity zasób przesycenia nie zostanie w ten sposób złożony na ścianach kryształu (lub raczej kryształów). Zjawisko to zostało nazwane prądami koncentracyjnymi.



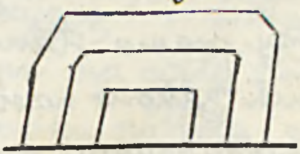
Tłomaczy ono wiele zewnętrznych właściwości kryształów.

Jeżeli skutkiem jakich zaburzeń w roztworze prądy koncentracyjne dostarczą jednej stronie kryształu więcej materyału odżywczego, to z tej strony kryształ narastać będzie szybciej. Podczas wzrostu kryształu jedne jego ściany mogą zupełnie zniknąć, inne mogą się rozrość, trzecie powstać na nowo.

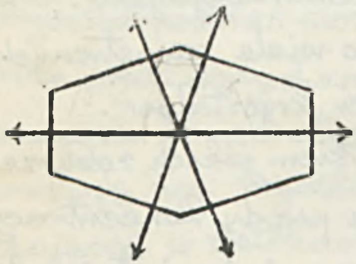
Taki mechanizm wzrostu kryształu jest źródłem wielu niedokładności jego wykształcenia zewnętrznego, które tylko rzadko odpowiada idealnym postaciom geometrycznym. Zawsze atoli ściany kryształu narastającego prze-

a.

b



suwają się równolegle do samych siebie (fig. a). Fig. b podaje schemat zanikania i powstawania ścian podczas wzrostu. Stąd wynika, że w krysztale główną rolę odgrywa nie absolutne położenie ścian, lecz ich wzajemne nachylenie czyli <u>kierunki narastania</u>. Te zaś mierzą się najprościej za pomocą pionów rzuconych z jakiegoś punktu wewnątrz kryształu na jego ściany.



Kąty między tymi pionami mierzą jednocześnie kąty pomiędzy ścianami kryształu (dopełniające do 180°).

Zewnętrzna postać kryształu i forma jego ścian może podlegać znacznym wahaniom, lecz kąty wzajemnego nachylenia ścian pozostają zawsze niezmienne.

<u>Stałość kątów kryształu</u> - <u>to pierwsze zasadnicze prawo krystalografii.</u> Dla każdego określonego ciała kąty jego kryształów są wielkościami stałemi w danej temperaturze i charakterystycznemi.

Prócz tego prawa zna krystalografia jeszcze dwa inne prawa zasadnicze: prawo racyonalności (wymierności) parametrów ścian kryształu i prawo symetryi.

Te trzy prawa stanowią treść i istotę krystalografji, i o nich tylko w następstwie będzie mowa. Nazwano je <u>empirycznemi</u> prawami krystalografii dlatego, że zostały odkryte na drodze indukcyjnej przez szczegółowe badanie i opisy brył krystalicznych. Krystalografia współczesna z tych zasadniczych praw wyprowadza drogą dedukcyi i przewiduje takie własności kryształów, których bezpośrednio dostrzedz nie można, które jednak są logicznem następstwem faktów poznanych empirycznie. Jest to już najwyższy stopień rozwoju nauki, którym poszczycić się mogą tylko astronomia, mechanika i niektóre działy fizyki.

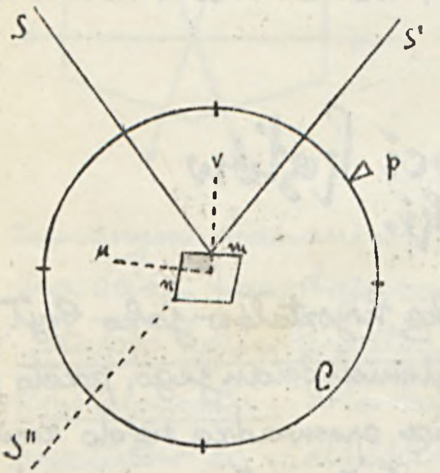
Prawo stałości kątów i jego skutki.

Ponieważ istotną charakterystykę kryształów jako brył geometrycznych stanowią kąty nachylenia ścian jego, przeto poznanie kryształu i jego oznaczenie sprowadza się do zmierzenia jego kątów. Do tego celu służą osobne przyrządy zwane goniometrami.

Goniometr ręczny (kontaktowy) jest najprostszym przyrządem tego rodzaju. Służy do pomiarów kryształów wielkich z dokładnością nie przekraczającą 1°. Składa się z półkola metalowego z podziałkami na całe stopnie i ze wskazówki umocowanej w środku półkola. Mierzony kąt kryształu umieszcza się pomiędzy krawędzią półkola i wskazówką tak, aby krawędź kryształu była prostopadła do krawędzi instrumentu.

Goniometr refleksyjny (odbijający).

Urządzenie jego polega na następującej zasadzie: rolę wskazówki materyalnej odgrywa tutaj promień światła, którego kierunek można oznaczyć bardzo ściśle. Gładkie ściany kryształu mają zdolność odbijania mniej lub więcej dokładnie promieni świetlnych. Jeżeli w S umieścimy



źródło światła, w S' oko badacza a w n ścianę kryształu tak, ażeby oko widziało w S" odbicie źródła świetlnego, wówczas otrzymamy zupełnie określony bieg promienia SnS'. Promień biegu tego nie zmieni, i oko ujrzy odbicie światła w S", jeżeli obrócimy kryształ tak, że miejsce ściany <u>n</u> zajmie ściana <u>m</u>. Obrót wykonany możemy odczytać na kole C, obracającem się obok nieruchomej wskazówki <u>p</u>. Kąt obrotu równać się będzie kątowi pomiędzy pionami μ i v, rzuconymi na ściany <u>m</u> i <u>n</u>, gdyż po dokonanym obrocie pion μ zajmie położenie pionu v, kąt zaś pomiędzy pionami (kierunkami wzrostu ścian) uważać będziemy, zgodnie z poprzedzającem, za kąt pomiędzy ścianami.

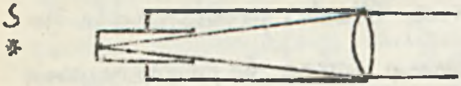
Aby pomiar wykonany był prawidłowo, trzeba, aby spełnione były następujące warunki:

1) krawędź mierzonych ścian winna biedz prostopadle do koła, czyli innemi słowy, koło winno leżeć w płaszczyźnie linijnego kąta tych ścian i mierzyć go swoim obrotem. W tym celu kryształ justuje się za pomocą osobnych urządzeń na goniometrze;

2) ściana m po dokonanym obrocie winna się znaleźć w poprzedniem położeniu ściany n, a krawędź obu ścian powinna przy tem zlewać się z osią obrotową goniometru. W tym celu kryształ centruje się za pomocą specyalnych urządzeń pomocniczych goniometru.

Do centrowania służą dwie przymocowane do osi goniometru płytki metalowe, ślizgające się na sobie pod kątem prostym, poruszane za pomocą śrub; do justowania zaś dwa cylindryczne segmenty, których osi są poziome i względem siebie prostopadłe. Segmenty te mogą także ślizgać się po sobie za sprawą odpowiednich śrubek.

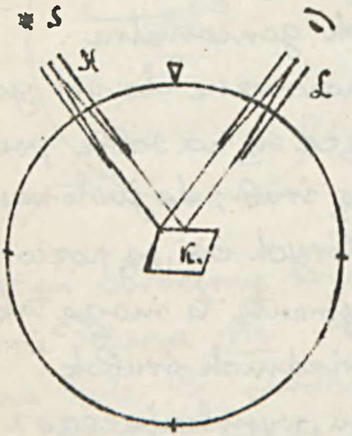
Kolimator. Aby uniknąć błędu, wynikającego z niedostatecznego centrowania, trzeba, aby promienie padające na ścianę kryształu były równoległe. Uskutecznia się to za pomocą t. zw. kolimatora, t. j. rury nieprzezroczystej o długości zmiennej, na jednym końcu zakrytej blaszką opatrzoną otworkiem; na drugim zaś zaopatrzona w soczewkę skupiającą. Otwór rury powinien się znajdować w ognisku tej soczewki.



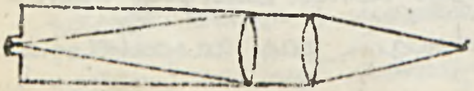
Promienie wychodzące ze źródła S, po przejściu przez soczewkę biegną równolegle, a oko umieszczone w dowolnej odległości od rury widzi otwór kolimatora jakby w nieskończoności.

Luneta, soczewka dodatkowa.

Aby nadać promieniom odbitym bieg określony, umieszczamy na ich drodze lunetę astronomiczną, ustawioną na nieskończoność. W ognisku soczewki lunetowej



znajduje się okular z naciągniętemi na krzyż nićmi. Tym sposobem otrzymujemy obraz światła powiększony i możemy go dokładnie wizować, t.j. nastawić na punkt przecięcia nici środek obrazu świetlnego. Przed objektywem lunety znajduje się jeszcze soczewka dodatkowa, którą można dowolnie wprowadzać w drogę biegu promieni, i której ogniskowa ma długość równą odległości jej od osi obrotowej instrumentu.

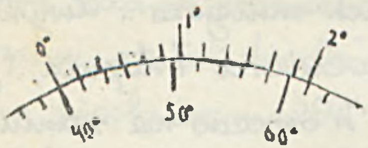


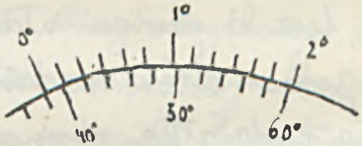
Dodając tę soczewkę, zamieniamy lunetę

na mikroskop, pozwalający rozpatrywać kryształ k, umieszczony na osi, w powiększeniu.

Nonjusz. Bardzo ważną częścią składową goniometrów są noniusze czyli werniery, zwiększające w wysokim stopniu dokładność pomiarów goniometrycznych. Jest to łuk nieruchomy, przylegający szczelnie do koła i zaopatrzony również w podziałki; zastępuje on miejsce zwykłej wskazówki. Podziałki jego są współmierne z podziałkami koła, lecz o pewien ułamek od nich mniejsze. Zwykłe koła goniometrów rozdzielone są na ćwierci 1 stopnia, t.j. każda podziałka równa się 15'. Wówczas na noniuszu robi się podziałki mniejsze np. o 1/15 od podziałek koła, tak iż 14 podziałek tego ostatniego równa się 15 podziałkom noniusza.

Pomiaru za pomocą noniusza dokonywa się jak następuje: dajmy na to, że podziałka zerowa noniusza nie zlewa się z żadną podziałką koła, gdy środek obrazu szparki kolimatora odpowiada zupełnie przecięciu się nitek okularu. Wówczas odczytujemy podziałkę koła bezpośrednio poprzedzającą podziałkę zerową noniusza i odnajdujemy tę podziałkę noniusza, która zlewa się z którąkolwiek z następnych podziałek koła. Liczba podziałek noniusza - od zera do zlewającej się z odszukaną podziałką koła - oznaczy nam ilość minut, zawartych pomiędzy odczytaną ostatnią podziałką koła a zerem noniusza. Wynika to z tego, iż do każdej podziałki noniusza, zaczynając od tej, która zlewa się z podziałką koła aż do zerowej, dodać należy po 1/15 podziałki koła, t.j. po jednej minucie, ażeby otrzymać zupełne zlanie się wszystkich podziałek noniusza i koła i zmieścić tem samem przestrzeń, dzielącą odczytaną podziałkę koła od zera noniusza.

a 

 b

Obok mamy koło o podziałkach dwustopniowych; z położenia a widać, że 11 podziałek koła odpowiada 12 podziałkom noniusza, czyli, że każda podziałka tego ostatniego jest o 1/12, t.j. 120':12 = 10', mniejszą od podziałki koła. A więc w położeniu b odczytujemy bezpośrednio 39° i 20' z noniusza, gdyż druga jego podziałka (noniusza) zlewa się z podziałką koła (2×10' = 20').

Graficzne przedstawienie kryształów.

Stałość kątów kryształu pozwala go zmierzyć i charakterystyczne jego kąty wyrazić cyframi. Cyfry jednak nie dają nam konkretnego obrazu kryształu i dlatego każdemu opisowi kryształu powinien towarzyszyć rysunek. Ten jednak wtedy tylko będzie posiadał wartość naukową, jeżeli będzie nietylko przedstawiał dany kryształ, ale go i do pewnego stopnia zastępował, t.j. jeżeli będzie można na rysunku takim w braku pierwowzoru dokonać pewnych pomiarów.

Najodpowiedniejszą powierzchnią takiego rysunku kryształu jest powierzchnia kuli. Ażeby kryształ przedstawić na kuli, dość na niej oznaczyć punkty styczne ścian z powierzchnią sfery. Punkty te otrzymalibyśmy, gdybyśmy kryształ umieszczony wewnątrz kuli zmusili do wzrostu równomiernego tak, iżby ściany jego stały się w pewnej chwili stycznemi do powierzchni kuli. Całokształt tych punktów stycznych określa w zupełności położenie ścian kryształu i może służyć za jego obraz.

Promienie, łączące punkty styczne ze środkiem kuli, są pionami do odpowiednich ścian kryształu, czyli kierunkami ich wzrostu. Punkty styczne zwiemy biegunami ścian. W tym sposobie wyobrażania kryształów na kuli krawędzie są średnicami kuli $\perp$ do wielkich kół przechodzących przez odpowiednie bieguny ścian.

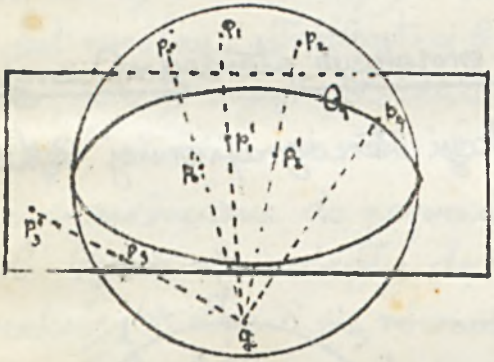
Drugi sposób przedstawiania kryształu na kuli jest odwrotny: ściany przedstawione są jako wielkie koła, a krawędzie jako punkty (końce średnic). W tym sposobie wyobrażamy, iż wszystkie ściany kryształu przechodzą przez środek kuli równolegle do położenia pierwotnego i rozrastając się odpowiednio, przecinają ją w wielkich kołach. Średnice przecięć tych kół będą krawędziami, które na kuli wyobrażą się jako punkty przecięć kół wielkich.

Pierwszy sposób przedstawiania kryształów na kuli nazywa się biegunowym (gnomonicznym), drugi kolistym (linijnym).

Na takich rysunkach kryształów na kuli łatwo jest zmierzyć kąty pomiędzy elementami kryształu, gdyż kąty te mierzą się wprost cyrklem jako kąty płaskie. Kuliste odtwarzanie kryształów ma jednak tę niedogodność, że niepodobna go wykreślić w jednej płaszczyźnie i dodawać do opisu kryształów w książkach. Wskutek tego uciekamy się do rozmaitych sposobów rysowania kryształów i ich wyobrażeń kulistych na płaszczyźnie.

Projekcya stereograficzna

Polega ona na tem, że punkty oznaczone na kuli sprowadza się na płaszczyznę jednego wielkiego koła, obrane go za <u>koło rzutu</u>. Jeżeli biegun jego (q) połączymy za pomocą prostych z punktami na kuli, które chcemy wyobrazić, to w punktach przecięcia tych prostych z płaszczyzną koła rzutowego (Q) otrzymamy projekcyę punktów na sferze. Jeżeli np. mamy na kuli dane punkty: p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 ...., to celem ich rzucenia na płaszczyznę projekcyi Q łączymy je prostemi z punktem biegunowym koła projekcyjnego. Punkty przecięć prostych z tem kołem, przedłużonem poza obręb sfery, będą rzutami punktów danych na kuli: p_0', p_1', p_2', p_3', p_4' ....



Z tego wynika, że:

1) punkty na półkuli przeciwnej biegunowi q (np.: p_0, p_1, p_2) wyobrażą się w punktach położonych wewnątrz koła projekcyjnego (p_0', p_1', p_2');

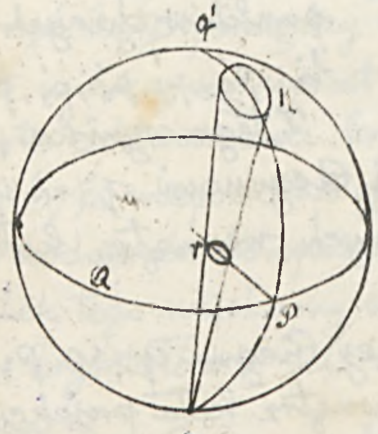
2) punkty na półkuli posiadającej biegun q (np. p_3) oddane zostaną w punktach na zewnątrz koła projekcyjnego Q (p_3');

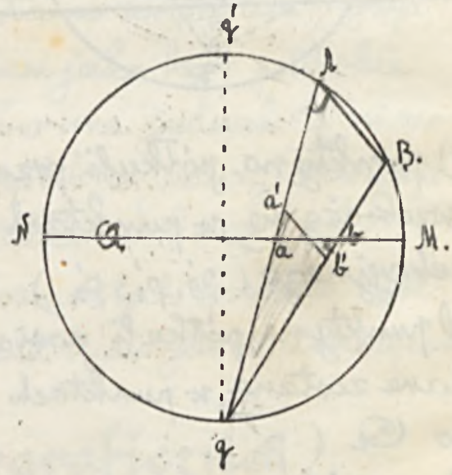
3) punkty na granicy obu półkul leżące, t. j. na koło Q (np. p_4) będą jednocześnie własnymi rzutami.

Projekcyę stereograficzną możemy sobie wyobrazić jeszcze w sposób następujący: umieśćmy oko w q i wyobraźmy sobie, że Q jest płaszczyzną przezroczysto-matową, na której będziemy rysować punkty w tych miejscach, gdzie widzimy punkty p_1, p_2, p_3 .... Miejsca te znajdą się na promieniach wzrokowych qp_1, qp_2, qp_3 ......, a więc będą rzutami punktów p_1, p_2, p_3 ...... Biegun q zwie się skutkiem tego <u>punktem wzrocznym</u> (widzenia), a sam rzut <u>perspektywą</u>.

Zasadnicze własności projekcyi stereograficznej.

Każde koło na kuli w projekcyi stereograficznej będzie również kołem.





Niechaj R będzie kołem na kuli, a <u>r</u> jego obrazem projekcyjnym na kole; r jest oczywiście przekrojem skośnego stożka, którego podstawą jest R. Stożek ten może być przecięty symetrycznie wielkiem kołem P przechodzącem przez q i q'. Przekroje kuli i stożka z tem kołem podaje figura prawa. Widzimy na niej, że Δ BAq i Δ abq są podobne, gdyż ∡ BAq = abq (oba mierzą się 1/4 obwodu koła + łuk BM). Kąt ABq = ∡ baq (oba mierzą się połową sumy łuków Aq' + 180° (Mq + Nq' + Aq' = 180 + Aq')). Trzeci kąt obu trójkątów przy q jest wspólny. Trójkąt abq możemy zatem obrócić tak, ażeby zajął położenie a'b'q', przyczem oczywiście i część stożka od r do q obróci się i zajmie położenie symetryczne do poprzedniego. W tem położeniu bok a'b' będzie równoległy do boku AB, a zarazem i cały przekrój r stanie się równoległy do przekroju R. Ponieważ w stożku przekroje równoległe są podobne, przeto i przekrój r będzie podobny do przekroju R, t.j. będzie kołem.

Przy projekcyi mamy kilka przypadków:

1) Każde koło, przechodzące przez biegun q (punkt widzenia), przedstawia się na projekcyi w postaci prostej, gdyż płaszczyzna jego dla oka umieszczonego w q zlewa się w linię prostą. Wielkie koła wyobrażą się przytem w postaci średnic koła projekcyjnego Q.

2) Wielkie koła, nieprzechodzące przez punkt q, przed-

stawią się na płaszczyźnie rzutu w postaci łuków kół, wspierających się na średnicy koła Q.

Siatka stereograficzna G. Wulfa.

Konstrukcya rzutu stereograficznego staje się rzeczą bardzo ułatwioną przez użycie siatki stereograficznej Wulfa. Jest to koło o średnicy 20 cm., na którem wyznaczone są południki i równoleżniki co 2° (dwa stopnie). Siatka wykreślona na brystolu służy jako szablon, z pomocą którego wykonywa się rysunki i konstrukcye przez cienką i przezroczystą kalkę.
Na kalce kreśli się koło zasadnicze i oznacza się jego środek i którąkolwiek z podziałek, ażeby jej można było przywrócić położenie pierwotne. Ponieważ siatka składa się z bardzo wielu kół o najrozmaitszych promieniach, więc niezbędne do konstrukcyi koło można z niej wprost od ręki na kalce kopiować. Dla kół zamkniętych należy wykonać kalką odpowiedni obrót. Cyrkiel jest tu więc całkowicie zbędny.
Ażeby zapoznać się z metodą siatki stereograficznej, rozwiążemy przy jej pomocy kilka najważniejszych zadań projekcyi stereograficznej.

1. <u>Wykreślić wielkie koło przechodzące przez 2 dane bieguny i zmierzyć ich wzajemną odległość.</u>

Kalkę należy koncentrycznie obracać na siatce, dopóki oba dane bieguny nie znajdą się na jednym południku siatki, który to południk będzie szukanem wielkiem kołem i który można skopiować od ręki. Ilość równoleżników da wprost kąt zawarty między biegunami.

2. Znaleźć biegun danego koła wielkiego.

Kalkę obracamy koncentrycznie dopóki dane koło nie zleje się z jednym z południków, a na równiku odnajdujemy punkt odległy o 90° od niego. Punkt ten będzie poszukiwanym biegunem.

Zadanie odwrotne polega na tem, że kalkę obracamy koncentrycznie dopóki biegun nie znajdzie się na równiku; gdy to nastąpi, szukamy południka odległego o 90° i kopiujemy go; będzie on poszukiwanem wielkiem kołem.

3. Znaleźć geometryczne miejsce punktów odległych od danego bieguna o daną liczbę stopni. Miejscem tem będzie oczywiście małe koło. Ażeby je wykreślić, trzeba znaleźć przynajmniej trzy leżące na niem punkty.

Na kalce leżącej koncentrycznie oznaczamy na południku, przechodzącym przez dany biegun, punkt odległy o daną ilość stopni, co uskutecznia się wprost przez przeliczenie równoleżników. Będzie to pierwszy punkt poszukiwanego małego koła. Następnie obracamy kalkę o kąt dowolny koncentrycznie i odszukujemy takiż punkt na południku przechodzącym przez dany biegun w jego nowem względem siatki położeniu. W takiż sam sposób znajdujemy trzeci punkt koła. Dla dokładności jednak nie należy poprzestać na trzech punktach, lecz oznaczyć ich możliwie dużo. Skoro punkty te zostaną wyznaczone, kalkę zsuwa się z położenia koncentrycznego i nakłada ekscentrycznie, szukając koła najdokładniej odpowiadającego znalezionym punktom i kopiuje się je od ręki.

Za pomocą siatki Wulfa można konstruować rysunki z dokładnością do ½°, co zwłaszcza do celów pedagogicznych najzupełniej wystarcza.

Kreślenie projekcyi stereograficznej kryształu na podstawie zmierzonych kątów

x

Oznaczając ściany kryształu liczbami 1, 2, 3…… umieszczamy bieguny ścian 1 i 2 na kole zasadniczem tak, żeby tworzyły między sobą kąt zmierzony. Celem znalezienia punktu trzeciego, kreślimy dwa małe koła, których środki mieszczą się w biegunach 1 i 2, a których sferyczne promienie równają się odpowiednim kątom pomiędzy biegunem trzecim a drugim i pierwszym. Biegun ściany 3 leży na jednym z punktów przecięcia obu kół. Ponieważ punktów takich jest 2, wybiera się ten, który odpowiada rzeczywistości. Ścianę 4 i następne wiąże się w ten sam sposób z dwiema już znalezionemi i t. d., dopóki wszystkie ściany, a raczej ich bieguny nie znajdą właściwego im położenia na kole projekcyjnem.

Drugie zasadnicze prawo krystalografii

i jego rozmaite wyrazy.

Ilość ścian otaczających kryształ. Ograniczenie kryształu bywa mniej lub więcej złożone. W przypadku najprostszym kryształ ograniczają cztery tylko ściany, (co jest ich liczbą minimalną) - tworzące oczywiście czworościan czyli tetraedr, będący najprostszym wielościanem krystalicznym. Z drugiej jednak strony istnieją kryształy obfitujące w ściany. Minimum ścian w rozmaitych grupach kryształów bywa rozmaite, zależnie od ich przyrodzenia i symetryi. Maximum zaś ścian nie ma właściwie granic, jakkolwiek nie bywa zbyt wielkie. Wyjątkowo tylko na rozmaitych kryształach (nie na jednym) spatu wapiennego narachowano 1520 rozmaitych ścian, na fluspacie - 1082 i t.p.

Czworościan zasadniczy. Z ogólnej liczby ścian kryształu zawsze możemy wybrać cztery ściany takie, aby przedłużone przecięły się i utworzyły czworościan. Krawędzie tego czworościanu mogą nie być obecne na krysztale, ale powstanie ich teoretycznie jest zupełnie możliwe. Trzeba tylko dla kryształu stworzyć takie warunki wzrostu, aby ściany czworościanu, rozrastając się, wzajemnie się przecięły. Krawędzie obranego tetraedru mogą więc być albo obecne na krysztale, albo możliwe teoretycznie. Tetraedr w ten sposób wybrany zwie się czworościanem zasadniczym, a ściany jego zasadniczemi ścianami kryształu.

Stałe kryształu i jego oryentacya. Niechaj

$OH_0K_0L_0$ będzie czworościanem zasadniczym, złożonym z jakichkolwiek czterech ścian kryształu. Jedno z naroży czworościanu - O nazwiemy jego początkiem a trzy wychodzące z niego krawędzie i ich przedłużenia osiami OX, OY, OZ. Osi te leżą parami w trzech ścianach tetraedru zasadniczego: H_0OK_0, K_0OL_0, L_0OH_0, które to ściany nazywamy płaszczyznami osiowemi albo ścianami osiowemi, i tworzą w tych płaszczyznach kąty α, β, γ. Kształt tetraedru zależy od wielkości tych kątów, tudzież od długości krawędzi OH_o, OK_o, OL_o. Lecz ponieważ zgodnie z pierwszem prawem ważne są nie absolutne wymiary elementów kryształu, lecz ich wzajemne ustosunkowanie, wystarcza przeto wskazać tylko stosunek krawędzi $OH_o : OK_o : OL_o$. Długości OH_o, OK_o, OL_o, odcięte od osi przez ścianę $H_oK_oL_o$, nazywają się jednostkami osiowemi, i oznacza się je głoskami a, b, c. Ściana $H_oK_oL_o$ zwie się ścianą jednostkową. Stosunek jednostek osiowych przedstawiamy zwykle w postaci $a/b : 1 : c/b = m : 1 : n$.

Z tego wynika, iż czworościan zasadniczy w danym wyborze ścian zasadniczych, czyli, jak się zwykło mówić, w danej oryentacyi kryształu, charakteryzuje się wogóle 5 wielkościami: kątami α, β, γ, oraz liczbami: m i n. Wielkości te nazywamy stałemi kryształu w danej jego oryentacyi.

W praktyce zdarzają się często kryształy, ograniczone trzema parami równoległych ścian, a więc mające kształt równoległościanu. W takich przypadkach zupełne oznaczenie stałych kryształu jest niemożliwe, albowiem ze ścian równoległościanu niepodobna utworzyć tetraedru. Trudność ta może być jednak usunięta, skoro umieścimy kryształ w odpowiednich warunkach wzrostu tak, ażeby na narożach jego zjawiły się nowe ściany, pozwalające na kompletne oznaczenie stałych.

Prawo wymierności stosunków, określające prosty związek wszystkich ścian kryształu ze ścianami tetraedru zasadniczego dowolnie wybranego, zostało odkryte w r. 1784 przez twórcę krystalografii, opata Haüy. Jest to najistotniejsze prawo krystalografii. Posiada ono trzy wyrazy (formy): arytmetyczny, geometryczny i fizyczny. Pod względem matematycznym wyznacza to prawo kryształom zasadniczo odrębne stanowisko wśród wszystkich innych wielościanów (geometrycznych), pod względem zaś fizycznym określa różnicę ciał jednorodnych krystalicznych stałych od innych gatunków tychże ciał.

Arytmetyczny wyraz zasadniczego prawa krystalografii: prawo wymierności wskaźników.

Oznaczanie ścian kryształu za pomocą wskaźników.

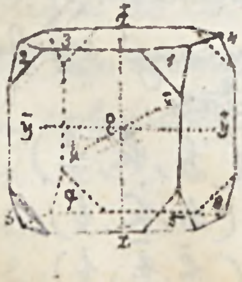
Symbol ściany. Niechaj do tetraedru zasadniczego $OH_oK_oL_o$ przyłączy się jeszcze piąta ściana HPQ. Przedłużając je znajdziemy, że przetnie ona osi OX, OY, OZ w punktach H, K, L, i że jej położenie względem

zasadniczej ściany jednostkowej wyrazić możemy za pomocą stosunków odcinków czyli <u>parametrów</u>: OH : OK : OL. <u>Doświadczenie poucza niezmiennie iż stosunek</u>:

$$\frac{OH_0}{OH} : \frac{OK_0}{OK} : \frac{OL_0}{OL} = h : k : l$$

<u>daje się zawsze wyrazić stosunkiem trzech całych liczb wymiernych</u> h : k : l włącznie z O. Na tem właśnie polega <u>arytmetyczny wyraz</u> zasadniczego prawa krystalografii, gdyż położenie ściany HKL najzupełniej określa trzy oderwane liczby h, k, l, które przyjęto nazywać wskaźnikami ściany. Wskaźniki zamknięte w nawias (h, k, l) stanowią <u>symbol ściany</u>.

<u>Osi krystalograficzne.</u>



Zwykle przez punkt wewnątrz kryształu przeprowadzamy osi OX, OY, OZ, (które wprost nazwiemy osiami: X, Y, Z) równoległe do krawędzi czworościanu, obranych za osi kryształu.

Poprowadzone w ten sposób proste zwiemy osiami krystalograficznemi kryształu.

Z poprzedniego wynika, że osi te mogą biedz równolegle z trzema jakiemikolwiek bądź krawędziami, byleby nie leżały w jednej płaszczyznie.

Z punktu środkowego O każda oś biegnie w dwu przeciwnych kierunkach, z których jeden bierze się za dodatni, drugi za ujemny. Powszechnie przyjęto koniec X zwrócony do badacza, prawy koniec osi Y, tudzież górny osi Z uważać za dodatni i odpowiednio do tego ustawiać sam kryształ.

Jeżeli ściana przecina oś w jej końcu ujemnym, to parametr na tej osi, a co za tem idzie, i wskaźnik odpowiedni będzie ujemny. Ujemny charakter wskaźnika oznacza się za pomocą znaku mniejszości, pisanego nad wskaźnikiem. Jeżeli np. ściany 1, 2, 3 ...... 8 odcinają od osi jednakowe parametry tak, iż każda z nich może być wyrażona jednakowymi wskaźnikami, to jednakże wskaźniki te będą różnić się znakami, i każda z 8* jednakowych ścian otrzyma odmienny symbol, ściśle określający jej miejsce na krysztale.

Ściana 1 otrzyma symbol (h, k, l)

— " — 2 — " — $(h, \bar{k}, l)$

— " — 3 — " — $(\bar{h}, \bar{k}, l)$

Ściana 4 otrzyma symbol $(\bar{h}, k, l)$
—"— 5 —"— $(h, k, \bar{l})$
—"— 6 —"— $(h\, \bar{k}\, \bar{l})$
—"— 7 —"— $(\bar{h}, \bar{k}, \bar{l})$
—"— 8 —"— $(\bar{h}, k, \bar{l})$

Doświadczenie poucza, że liczba ścian na krysztale nie bywa zbyt wielka, i że ściany te mają zazwyczaj wskaźniki proste, składające się z pierwszych liczb naturalnych, włączając w nie i zero. Wskaźniki rzadko kiedy przenoszą liczbę 10.

Symbole ścian tetraedru zasadniczego.

Przecz jasne, że wskaźniki h, k, l ściany jednostkowej: $H_0K_0L_0$ winny być

$$h:k:l = \frac{OH_0}{OH_0} : \frac{OK_0}{OK_0} : \frac{OL_0}{OL_0} = 1:1:1$$

a symbol jej (111).

Co się tyczy ścian osiowych, to, jak wiemy, każda z nich zawiera 2 osi i może być zastąpiona przez ścianę równoległą do tych osi a przecinającą oś trzecią. Ściana równoległa do osi przecina ją w nieskończoności. Skutkiem tego ściany osiowe OH_0K_0, OK_0L_0, OH_0L_0 — otrzymają wskaźniki.

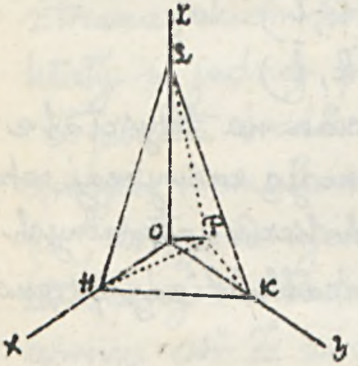
$$h:k:l = \frac{OH_0}{\infty} : \frac{OK_0}{\infty} : \frac{OL_0}{OL} = 0:0:1$$

$$h:k:l = \frac{OH_0}{OH} : \frac{OK_0}{\infty} : \frac{OL_0}{\infty} = 1:0:0$$

$$h:k:l = \frac{OH_0}{\infty} : \frac{OK_0}{OK} : \frac{OL_0}{\infty} = 0:1:0$$

Odpowiednie symbole tych ścian będą: (001), (100) i (010).

Wyrażenie parametrów za pomocą cos kątów pomiędzy pionem ściany a osiami.



Niechaj x, y, z będą osiami, a HKL jakąkolwiek ścianą. Rzućmy normalną Op z początku O na ścianę HKL. Koniec pionu p połączmy z H, K i L. Otrzymamy trzy prostokątne trójkąty z kątem prostym w punkcie p: OpH, OpK, OpL. Z trójkątów tych znajdziemy:

$$\frac{Op}{OH} = \cos(p,x); \quad \frac{Op}{OK} = \cos(p,y); \quad \frac{Op}{OL} = \cos(p,z) \quad \text{czyli}$$

$$OH = \frac{Op}{\cos(p,x)}; \quad OK = \frac{Op}{\cos(p,y)}; \quad OL = \frac{Op}{\cos(p,z)}; \quad \text{skąd}$$

$$OH : OK : OL = \frac{Op}{\cos(p,x)} : \frac{Op}{\cos(p,y)} : \frac{Op}{\cos(p,z)}, \quad \text{czyli}$$

$$OH : OK : OL = \frac{1}{\cos(p,x)} : \frac{1}{\cos(p,y)} : \frac{1}{\cos(p,z)}, \quad \text{t. j.}$$

parametry (odcinki osiowe) ściany są odwrotnie proporcjonalne do cos kątów pomiędzy jej pionem a osiami.

Jednostki osiowe otrzymamy z takichże stosunków pomiędzy ścianą jednostkową a jej pionem p:

$$a : b : c = OH_0 : OK_0 : OL_0 = \frac{1}{\cos(p_0,x)} : \frac{1}{\cos(p_0,y)} : \frac{1}{\cos(p_0,z)}$$

czyli
$$a/b : 1 : c/b = m : 1 : n = \frac{\cos(p_0,y)}{\cos(p_0,x)} : \frac{\cos(p_0,y)}{\cos(p_0,y)} : \frac{\cos(p_0,y)}{\cos(p_0,z)}$$

$$m : 1 : n = \frac{\cos(p_0,y)}{\cos(p_0,x)} : 1 : \frac{\cos(p_0,y)}{\cos(p_0,z)}$$

Wskaźniki h, k, l znajdę odpowiedni wyraz:

$$h : k : l = \frac{\cos(p,x)}{\cos(p_0,x)} : \frac{\cos(p,y)}{\cos(p_0,y)} : \frac{\cos(p,z)}{\cos(p_0,z)}$$

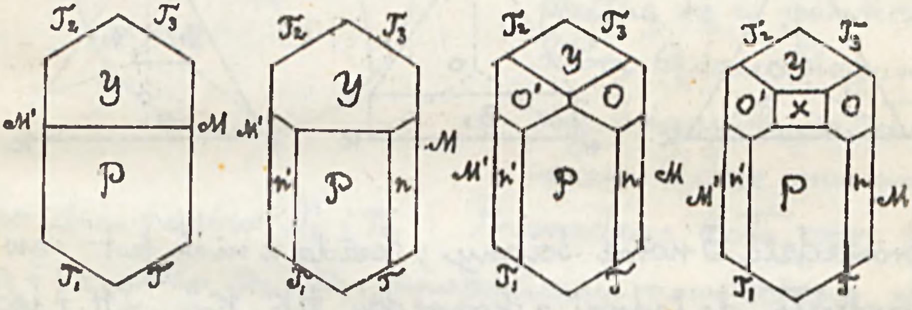
[Wiemy, że $h : k : l = \frac{OH_0}{OH} : \frac{OK_0}{OK} : \frac{OL_0}{OL}$; podstawiając OH_0 i OH w powyższe wyrażenie, otrzymamy stosunek wskazany]. Zależności tylko co wyprowadzone są bardzo ważne, gdyż na nich opierają się wszystkie obliczenia kryształu. W istocie wiemy już, że kryształ można wyobrazić na kuli w postaci punktów p_1, p_2, p_3 ......, będących punktami stycznymi kuli z normalnemi ścian. Na projekcyi stereograficznej można także oznaczyć bieguny osi x, y, z. Wówczas kąty (px), (py), (pz) dają się zmierzyć bezpośrednio na projekcyi stereograficznej, a za pomocą wyprowadzonych wyżej wzorów dają się tem samem obliczyć zarówno jednostki osiowe jak i wskaźniki ścian kryształu.

Przybliżone obliczenie stałych kryształu za pomocą siatki stereograficznej. Mając projekcyę stereograficzną kryształu, oznacza się naprzód bieguny osi x, y, z, dokonawszy wpierw wyboru ścian osiowych: (001), (100) i (010). Oś x będzie biegunem wielkiego koła, przechodzącego przez bieguny ścian (010) i (001), oś y będzie biegunem wielkiego koła ścian (100) i (001), wreszcie oś z będzie biegunem wielkiego koła ścian (100) i (010). Za pomocą siatki stereograficznej mierzy się następnie kąty pomiędzy osiami i wszystkiemi ścianami (biegunami) kryształu, poczem odszukuje się odpowiednie cosinusy i ich znaczenia liczbowe i dzieli wszystkie otrzymane w ten sposób liczby przez odpowiednie liczby ściany jednostkowej. W rezultacie otrzymujemy ze ścisłością 1/2° wskaźniki ścian kryształu. Tym prostym sposobem daje się jednocześnie sprawdzić zasadnicze prawo krystalografii.

Wyraz geometryczny prawa zasadniczego. Prawo pasowe.

Pasy ścian. Swoistą własnością wielościanów krystalograficznych jest to, iż krawędzie jego tworzą kilka układów linii równoległych. Krzysztof Weiss pierwszy ocenił doniosłość geometryczną tej właściwości i nazwał zespół ścian, przecinających się w krawędziach, pasem. Pasy z łatwością dają się skonstatować za pomocą goniometru refleksyjnego. Jeżeli kryształ umieścimy na podstawce wierzchołkowej tak, iżby dwie jego ściany biegły równolegle z osią obrotu koła, to podczas całkowitego obrotu koła wszystkie ściany, należące do pasa owych dwu ścian odbijają po kolei światło, padające z kolimatora.

Treść prawa pasowego. Ściana, należąca jednocześnie do dwóch pasów i przecinająca się ze ścianami tych pasów, ma 2 pary równoległych krawędzi. Ponieważ 2 krawędzie różnokierunkowe określają położenie ściany, przez nie przechodzącej, to z dwu pasów wielościanu można wyprowadzić nową ścianę, wspólną obu pasom. Czy jednak ściana ta będzie możliwą ścianą kryształu? Chr. Weiss pytanie to rozstrzygnął empirycznie. Układając kryształy jednego i tego samego minerału w szeregi wedle liczby ścian dostrzegł, że nowe ściany kryształów, bardziej w nie obfitujących są już zupełnie oznaczone przez ściany kryształów uboższych. Na ortoklazie np. nowe ściany n, o, x,



przyłączające się do już istniejących ścian T, M, P, y, układają się za każdym razem w dwa pasy ścian dawnych.

Pasy M, P i T, y oznaczają ścianę n

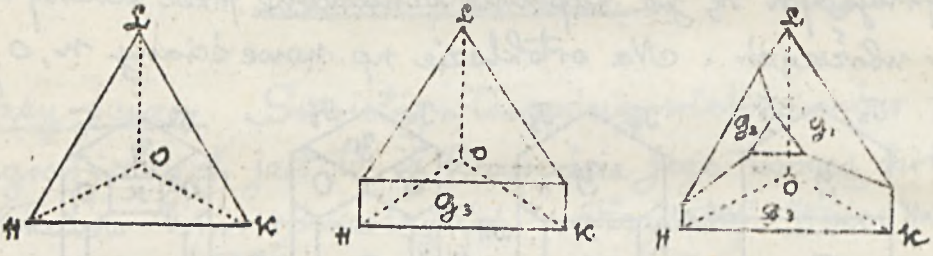
—„— T_3 P i T n y ——„—— o

—„— M, o i y, P ——„—— x

Tego rodzaju spostrzeżenia prowadzą do nieuniknionego wniosku, będącego treścią prawa pasowego: możliwe ściany kryształu dają się wyprowadzić geometrycznie z kilku ścian zasadniczych, albowiem każdą ścianę nową określają już istniejące dwa pasy ścian.

Wyprowadzenie nowych ścian z tetraedru zasadniczego.

Najmniejszą ilością ścian, z których dadzą się wyprowadzić za pomocą prawa pasowego nowe ściany, są 4 ściany tetraedru zasadniczego. Jeżeli HKLO jest tetraedrem zasadniczym, to z łatwością dadzą się zeń

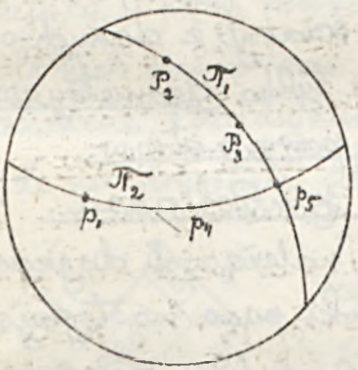


wyprowadzić 3 nowe ściany; każda z nich jest równocześnie równoległa do jednej z krawędzi HK, KL, LH i jednej z osi OH, OK i OL. Np. ściana g_3 biegnie równolegle do HK i OL, podobnie też ściany g_2 i g_1. Te trzy nowe ściany przecinają się w krawędziach o zgoła nowych kierunkach, skąd rodzi się możliwość dalszej dedukcji przez przeprowadzanie ścian nowych równolegle do jednej krawędzi nowej i jednej starej.

Zależność pasowa na projekcji stereograficznej.

Wyprowadzenie nowych ścian sposobem wskazanym staje się bardzo wyrazistem na projekcyi stereograficznej. Na kuli bieguny, należące do tegoż samego pasa leżą na jednem wielkiem kole, które zwie się skutkiem tego kołem pasowem.

Niechaj p_1, p_2, p_3 i p_4 będą biegunami ścian tetraedru zasadniczego na kuli. Poprowadźmy przez pary biegunów p_1 i p_4, p_2 i p_3 koła pasowe π_2 i π_1. Koła te przetną się w punkcie p_5, który będzie biegunem możliwej ściany kryształu, albowiem będzie ona należała do dwu pasów π_2 i π_1. Prowadząc koła przez bieguny p_1 i p_2, albo p_3 i p_4, znajdziemy nowe ściany w punkcie przecięcia tych kół i t. d.



Prawo pasowe daje się łatwo sprawdzić na projekcyi stereograficznej za pomocą siatki Wulfa. Projekcyę (kalkę) nakłada się na siatkę i obraca koncentrycznie, dopóki dwa jakieś bieguny nie znajdą się na jednym południku, który wyrysujemy od ręki. Zauważymy przytem, że koło południka przejdzie i przez inne bieguny-my do tegoż należące pasa. Konstatujemy w ten sposób obecność pasów na krysztale. Skoro przeprowadzimy koła pasowe przez rozmaite pary biegunów, spostrzeżemy, że przez każdy biegun przechodzą co najmniej dwa koła pasowe, co jest dowodem prawdziwości prawa pasowego, wedle którego możliwa ściana kryształu jest określona przez dwa pasy.

Prawo pasowe, wyprowadzające tylko za pomocą konstrukcyi geometrycznej nowe ściany z danych o wskaźnikach racyonalnych, jest więc tylko <u>geometrycznym wyrazem prawa wymierności parametrów.</u>

<u>Wskaźniki pasa i symbol pasa.</u>

Mając wskaźniki dwu ścian, należących do jednego pasa, znaleźć można wskaźniki pasa następującym sposobem. Wskaźniki ściany p_1 i p_2 piszemy dwukrotnie obok siebie w dwu szeregach i odrzucając skrajne liczby mnożymy je na krzyż i iloczyny odejmujemy. Jeżeli więc ściana p_1 ma wskaźniki h_1, k_1, l_1, ściana zaś p_2 wskaźniki h_2, k_2, l_2, to otrzymamy

$$\begin{array}{c|cccc|c} h_1 & k_1 & l_1 & h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 & h_2 & k_2 & l_2 \end{array}$$

$$\underbrace{k_1 l_2 - l_1 k_2}_{u}\,;\ \underbrace{l_1 h_2 - h_1 l_2}_{v}\,;\ \underbrace{h_1 k_2 - k_1 h_2}_{w}$$

Te różnice iloczynów są wskaźnikami pasa: u, v, w

a symbol jego będzie $[u\,v\,w]$.

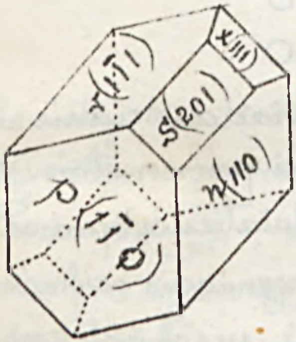
Ażeby ściana trzecia p_3 mogła należeć do pasa $[u\,v\,w]$, musi ona czynić zadość równaniu:

$$u h_3 + v k_3 + w l_3 = 0$$

(h_3, k_3, l_3 są wskaźnikami ściany p_3).

Znachodzenie symbolu ściany z symbolów dwu pasów, do których ściana należy.

Jeżeli mamy na krysztale ścianę, należącą do 2 pasów, (= mającą 2 pary równoległych krawędzi), to odnalazłszy symbole tych pasów przez postępowanie schematyczne wyżej wskazane, znajdujemy symbol tej ściany. Dajmy na to, że na krysztale aksynitu znane nam symbole ścian „r" i „n", oraz „x" i „p", wówczas z łatwością już znajdziemy symbole ściany S. Niechaj $r = (1\bar{1}1)$, $n = (110)$, $x = (111)$, $p = (1\bar{1}0)$



Symbol pasa px

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \multicolumn{6}{c}{\bar{1}-0;\ 0-1;\ 1+1} \end{array}$$

$$[\bar{1}\ \bar{1}\ 2]$$

Symbol pasa r-n

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{6}{c}{0-1;\ 1-0;\ 1+1} \end{array}$$

$$[\bar{1}\ 1\ 2]$$

Symbol ściany S:

$$\begin{array}{c|cccc|c} \bar{1} & 1 & 2 & \bar{1} & 1 & 2 \\ \bar{1} & \bar{1} & 2 & \bar{1} & \bar{1} & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$2+2 \; ; \; \bar{2}+2 \; ; \; 1+1$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad S = (201)$$

Sprawdzenie. Jeśli symbol (201) istotnie odpowiada ścianie S, to musi on czynić zadość równaniom:

$$u2 + v0 + w1 = 0$$

$$u'2 + v'0 + w'1 = 0$$

Podstawiając zamiast $[u\,v\,w]$ i $[u'\,v'\,w']$ ich wartości, otrzymamy:

$$(\bar{1}.2) + (1.0) + (2.1) = 0$$

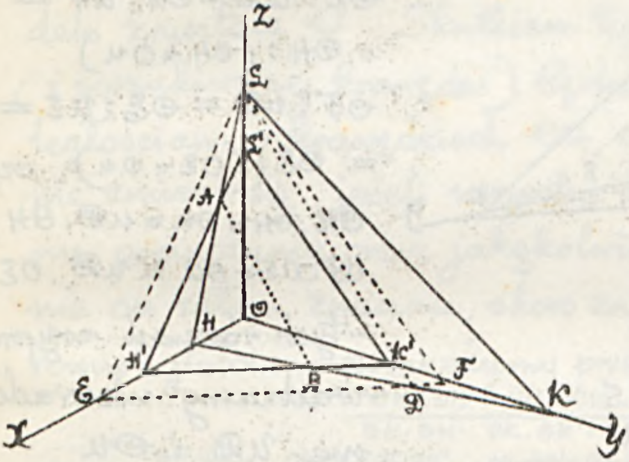
$$(\bar{1}.2) + (\bar{1}.0) + (2.1) = 0$$

A więc symbol (201) istotnie odpowiada ścianie S. Wynika stąd, że prawa wymierności parametrów i pasów są identyczne, albowiem ich działanie sprowadza jednakowe skutki, daje też same wymierne wskaźniki.

Uzasadnienie postępowania mechanicznego w wyprowadzaniu wskaźników ze związku pasowego.

Ponieważ ściana należąca do dwu pasów jest przez pasy te oznaczona i ponieważ położenie ściany określają 2 różnokierunkowe krawędzie, to istota prawa pasowego sprowadza się do oznaczenia krawędzi za pomocą parametrów (wskaźników) 2 ścian paso-

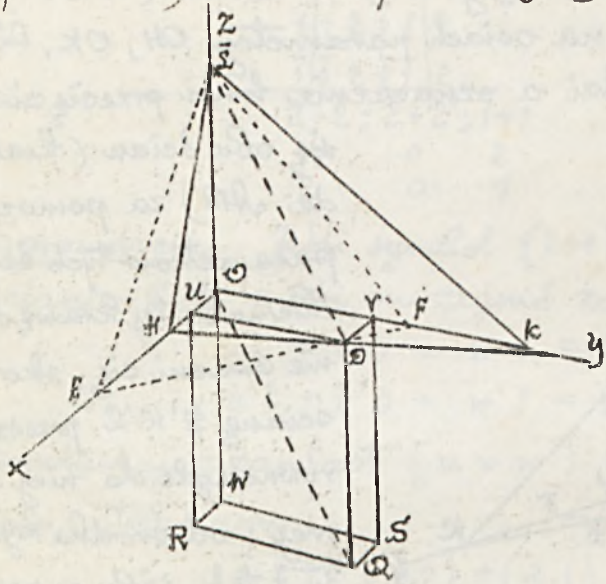
wych (tautazonalnych).
Dajmy, że mamy 2 ściany o wskaźnikach (hkl) i $(h'k'l')$, przecinające na osiach parametry OH, OK, OL i OH', OK', OL'. Chodzi o oznaczenie linii przecięcia



się obu ścian (krawędzi AB) za pomocą parametrów tych ścian. Kierunek tej krawędzi nie zmieni się, skoro ścianę $H'K'L'$ przesuniemy równolegle do niej samej (od środka kryształu) tak, iżby w nowem położeniu odcinała parametry OE, OF i OL. Parametry wszystkie zwiększyły się zatem $\frac{OL}{OL'}$ razy:

$$OE = OH' \cdot \frac{OL}{OL'}\ ;\quad OF = OK' \cdot \frac{OL}{OL'}\ ;\quad OL = OL' \cdot \frac{OL}{OL'} = OL$$

Linią przecięcia się jest teraz krawędź LD, której jeden punkt L jest znany (odległość od O na osi $Z = OL$), a drugi D należy znaleźć. W tym celu poprowadźmy $Dv \parallel OX$, $Du \parallel OY$. Wówczas punkt D będzie oznaczony przez parametry $Ou (= Dv)$ i $Ov (= Du)$. Zadanie polega teraz na oddaniu długości Ou i Ov przez parametry ścian HKL i $H'K'L'$ (na rysunku poprzednim). Uważmy, że trójkąty ΘKH i UDH, tudzież trójkąty ΘFE i UDE są podobne i że zatem:



$\Theta K : UD = \Theta H : UH =$
$= \Theta H : (OH - OU)$
$\Theta F : UD = \Theta E : UE =$
$= \Theta E : (OE - OU)$, czyli
$\Theta K . OH - OU = UD . \Theta H$,
$\Theta F . OE - \Theta U = UD . OE$.

Z tych równań wyprowadzamy niewiadome UD i ΘU

$$\Theta U = \frac{OE.OK.OH - OF.OE.OH}{OE.OK - OH.OF} = \Theta E.\Theta H \frac{OK - OF}{OE.OK - OH.OF}$$

$$\Theta V = UD = \frac{OK.OF.OE - OK.OH.OF}{OE.OK - OH.OF} = \Theta K.OF \frac{OE - OH}{OE.OK - OH.OF}$$

Podstawiając znaczenie dla $OE = OH' \frac{OL}{OL'}$ i $OF = \Theta K' \frac{OL}{OL'}$, otrzym.:

$$\Theta U = \frac{OH.OH'}{OL'} \cdot \frac{OK.OL' - OL.OK'}{OK.OH' - OH.OK'}$$

$$\Theta V = \frac{OK.OK'}{OL'} \cdot \frac{OL.OH' - OH.OL'}{OK.OH' - OH.OK'},$$

A więc obydwa punkty prostej LD oznaczone są przez parametry ścian HKL i $H'K'L'$; punkt L przez param. OL, punkt D przez param. ΘU i ΘV, t.j. przez ich powyżej wyprowadzone znaczenia.

Ażeby wyrażeniom tych parametrów nadać postać bardziej symetryczną, na ujemnym końcu osi Z weźmy długość $-\Theta W = -OL$ i na bokach ΘW, OV i ΘU zbudujmy równoległościan OUDVWRQS . Przekątna jego OQ również będzie poszukiwaną krawędzią przecięcia się ścian (hkl) i $(h'k'l')$, gdyż otrzymamy ją przesuwając równolegle do siebie prostą LD tak, iżby ona przeszła przez środek kryształu O . Skutkiem tego kierunek tej przekątnej (i poszukiwanej krawędzi) będzie oznaczony przez równoległościan o krawędziach OU, OV ; OW . Kierunek ten nie zmieni się, jeżeli wszystkie krawędzie równoległościanu pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę m . Nie ulegnie on zatem zmianie, skoro znaczenia trzech krawędzi równoległościanu pomnożymy przez wyrażenie :

$$\frac{OK.OH-OH'.OK'}{OH.OH'.OK.OK'.OL}$$ Wówczas otrzymamy :

$$OU=\frac{\cancel{OH.OH'}}{OL'}\cdot\frac{OK.OL'-OL.OK'}{\cancel{OK.OH'-OH.OK'}}\cdot\frac{\cancel{OK.OH'-OH.OK'}}{\cancel{OH.OH'}OK.OK'.OL}=\frac{\cancel{OK.OL'}}{\cancel{OL'.OK}.OK'.OL}-\frac{\cancel{OL.OK'}}{OL'.OK.\cancel{OK'.OL}}=\frac{1}{OL.OK'}-\frac{1}{OK.OL'}$$

$$OV=\frac{\cancel{OK.OK'}}{OL'}\cdot\frac{OL.OH'-OH.OL'}{\cancel{OK.OH'-OH.OK'}}\cdot\frac{\cancel{OK.OH'-OH.OK'}}{OH.OH'.\cancel{OK.OK'}.OL}=\frac{\cancel{OL.OH'}}{OL'.OH.\cancel{OH'.OL}}-\frac{\cancel{OH.OL'}}{\cancel{OL'.OH}.OH'.OL}=\frac{1}{OH.OL'}-\frac{1}{OL.OH'}$$

$$OW=-OL\,\frac{OK.OH'-OH.OK'}{OH.OH'.OK.OK'.OL}=\frac{\cancel{OH.OK'.OL}}{\cancel{OH}.OH'.OK.\cancel{OK'.OL}}-\frac{\cancel{OL.OK.OH'}}{OH.\cancel{OH'.OK}.OK'.\cancel{OL}}=\frac{1}{OK.OH'}-\frac{1}{OH.OK'}$$

Każda z krawędzi równoległościanu, oznaczającego kierunek poszukiwanej krawędzi, otrzymała tym sposobem wyrażenie proste, oddane za pomocą parametrów ścian, przecinających się w owej krawędzi .

Każdy z parametrów ściany HKL i $H'K'L'$ możemy zastąpić przez wskaźniki :

$$OH=\frac{a}{h}\ ,\ OK=\frac{b}{k}\ ,\ OL=\frac{c}{l}$$

$$OH'=\frac{a}{h'}\ ,\ OK'=\frac{b}{k'}\ ,\ OL=\frac{c}{l'}$$

Wprowadźmy te znaczenia parametrów w otrzymane powyżej równania:

$$OU = \frac{1}{OL \cdot OK'} - \frac{1}{OK \cdot OL'} = \frac{lk' - kl'}{bc} = \frac{kl' - lk'}{bc}$$

$$OV = \frac{1}{OH \cdot OL'} - \frac{1}{OL \cdot OH'} = \frac{hl' - lh'}{ac} = \frac{lh' - hl'}{ac}$$

$$OW = \frac{1}{OK \cdot OH'} - \frac{1}{OH \cdot OK'} = \frac{kh' - hk'}{ab} = \frac{hk' - kh'}{ab}$$

Oznaczając różnicę iloczynów przez u, v i w, oraz mnożąc wszystkie wyrażenia przez abc, otrzymamy

$$OU = au \; ; \; OV = bv \; ; \; OW = cw$$

a ponieważ a, b, c są jednostkami, więc ostatecznie:

$$OU = kl' - lk' = u \; ; \; OV = lh' - hl' = v \; ; \; OW = hk' - kh' = w$$

Wielkości u, v i w dające się wyrazić zapomocą różnic iloczynów wskaźnikowych, muszą być również liczbami całemi i wymiernemi. Wielkości te ujęte w nawias $[u\ v\ w]$ nazywamy zatem symbolem pasa albo krawędzi, w której się przecinają 2 ściany pasowe (tautozonalne).

Powyżej podaliśmy schematyczny sposób znajdowania wskaźników pasa u, v i w.

Podobnież znajdziemy kierunek krawędzi, w której przecina się z dwiema poprzedniemi trzecia ściana, do tegoż należąca pasa. Niechaj to będzie ściana $H''K''L''$ o wskaźnikach h'', k'', l''. Kierunek tej nowej krawędzi oznaczy również równoległobok zbudowany podobnie jak poprzedni. Krawędzie jego niechaj będą równe u', v', w'. Dla obu równoległościanów otrzymamy zatem, zgodnie z poprzedniem :

1) $u = kl' - lk'$; $v = lh' - hl'$; $w = hk' - kh'$

2) $u' = k'l'' - l'k''$; $v' = l'h'' - h'l''$; $w' = h'k'' - k'h''$

Obydwa te równoległościany (których przekątne są oczywiście równoległe i oznaczają kierunek krawędzi pasowych) są do siebie podobne, różniąc się tylko wymiarami krawędzi. Niechaj krawędzie 2go równoległościanu będą c razy dłuższe od takichże krawędzi równoległościanu 1go.

Wówczas możemy napisać równania :

$$kl' - lk' = c(k'l'' - l'k'') \ldots\ldots 1)$$
$$lh' - hl' = c(l'h'' - h'l'') \ldots\ldots 2)$$
$$hk' - kh' = c(h'k'' - k'h'') \ldots\ldots 3)$$

Mnożąc pierwsze równanie przez h'', drugie przez k'', trzecie przez l'' i dodając wszystkie trzy równania, otrzymamy:

$$h''(kl' - lk') + k''(lh' - hl') + l''(hk' - kh') = 0 \quad \text{czyli}$$
$$h''u + k''v + l''w = 0$$

Równanie to wyraża, że wskaźniki trzeciej ściany $H''K''L''$ pomnożone przez wskaźniki pasa dają w sumie zero – i to jest warunek niezbędny należenia tej ściany do pasa $[u\ v\ w]$.

Skoro zatem ściana kryształu należy jednocześnie do dwu pasów, to wskaźniki jej pomnożone przez wskaźniki obu pasów muszą za każdym razem dać w sumie zero. Niechaj ściana $H''K''L''$ należy jednocześnie do pasa [u v w] i do pasa [u'v'w']. Mnożąc wskaźniki pasów przez h"k"l" otrzymamy:

$$u h'' + v k'' + w l'' = 0$$

$$u' h'' + v' k'' + w' l'' = 0 \text{ , skąd}$$

$$h'' = l'' \frac{v w' - w v'}{u v' - v u'}$$

$$k'' = l'' \frac{w u' - u w'}{u v' - v u'}$$

Oznaczając wskaźnik l" przez $uv' - vu'$ znajdziemy:

$$h'' = v w' - w v'$$

$$k'' = w u' - u w'$$

$$l'' = u v' - v u'$$

Wskaźniki trzeciej ściany pasowej zostały zatem wyrażone zapomocą różnic iloczynów wskaźników pasowych, które to różnice możemy znaleźć i sposobem schematycznym:

$$\begin{array}{cccccc} u & v & w & u & v & w \\ u' & v' & w' & u' & v' & w' \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{h''}{vw' - wv'} \; ; \; \underset{k''}{wu' - uw'} \; ; \; \underset{l''}{uv' - vu'}$$

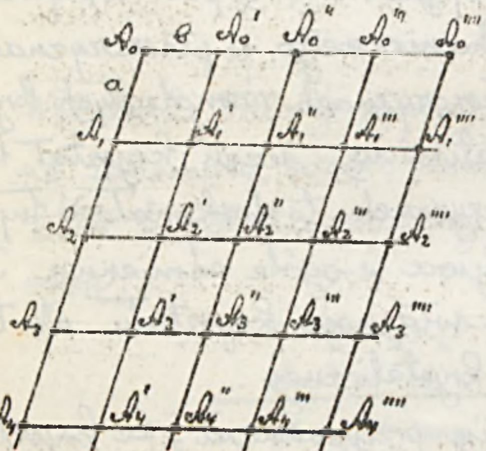
Wyraz fizyczny zasadniczego prawa krystalografii: Prawo jednorodności krystalicznej.

Wyżej określiliśmy krystaliczne ciało jednorodne, jako środowisko, przedstawiające w rozmaitych kierunkach rozmaite własności fizyczne, w równoległych zaś jednakowe. Pod kierunkiem należy przytem rozumieć zespół wszystkich równoległych, biegnących w jedną stronę. Kryształ będzie jednorodny, jeżeli rozmaite jego części o jednakowych własnościach nie tylko są równoległe ale i jednakowo ugrupowane.

Wyrazem zewnętrznym jednorodności krystalicznej jest między innymi w wielu ciał krystalicznych dostrzegana łupliwość t. j. zdolność rozłupywania się pod wpływem uderzenia lub nacisku mechanicznego w płaszczyznach zupełnie określonych. W płaszczyznach równoległych kryształ łupie się z jednakową łatwością. Jeżeli kryształ łupie się w kilku innych płaszczyznach, to doskonałość łupliwości w płaszczyznach tych bywa w ogóle odmienna. To samo stosuje się i do innych własności kryształu. Na tem polega prawo jednorodności krystalicznej.

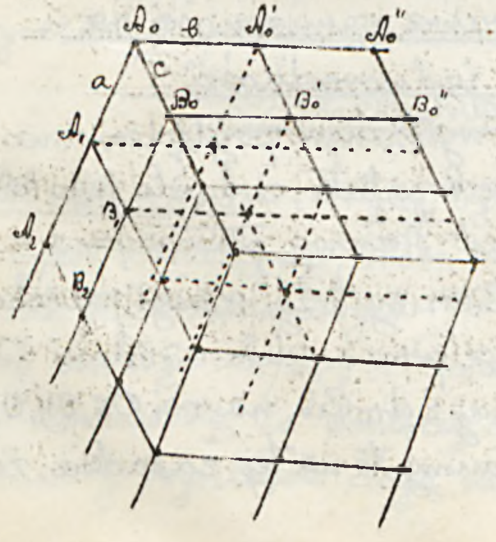
Siatki przestrzenne. Haüy przypuszczał, że kryształy obdarzone łupliwością są zbudowane z molekułów posiadających postać bardzo drobnych sześcianów, rombościánów i t. p., t. j. wogóle równoległościanów, otrzymywanych przez odłupywanie. Pojęcie o takich molekułach wynika z ciągłości procesu rozłupywania, którego kresem jest drobina krystaliczna, nie dająca się już w dalszym ciągu dzielić bez utraty swych przyrodzonych

własności. Haüy mniemał, że molekuły te przylegają do siebie bokami szczelnie, jak cegły w murze.
Nowoczesna teorya molekularna takiemu poglądowi zaprzecza. Twierdzi ona, że molekuły muszą być przedzielone drobnemi przestrzeniami międzymolekularnemi, gdyż w przeciwnym razie nie mogłyby wykonywać ruchu, związanego z pojęciem materyi. Bravais (w r. 1849) wysnuł teoryę budowy krystalicznej, polegającej w krótkości na następującem rozumowaniu: Niechaj A_0



będzie jakimś punktem wewnątrz kryształu. Ponieważ kryształ jest ciałem jednorodnem, więc musi mieć nieskończoną liczbę takichże punktów A_0 o własnościach takich samych. Będą to <u>punkty analogiczne</u>. Zgodnie z zasadniczem pojęciem o materyi, jako o środowisku nieciągłem, musimy przyjąć, że punkty te będą przedzielone pewnemi bardzo drobnemi przerwami. Jeżeli przez dwa analogiczne punkty A_0 i A_1 poprowadzimy prostą nieskończoną, przyczem pomiędzy punktami A_0 i A_1 nie będzie żadnego innego punktu analogicznego, to skutkiem jednorodności prosta ta musi posiadać nieskończoną ilość punktów analogicznych z dwoma początkowymi. Wszystkie te punkty będą od siebie odległe o długość $A_0A_1 = a$. W ten sposób otrzymamy szereg punktów o równej odległości: A_0, A_1, A_2, A_3 ......

W pobliżu punktu A_0, lecz poza linią A_0A_1 weźmy punkt trzeci A_0' najbliższy punktowi A_0 na nieskończonej A_0A_1. Przedłużając tę prostą otrzymamy znów szereg punktów A_0, A_0', A_0'' ....., odległych od siebie o stałą wielkość b. Jeżeli przez A_1, A_2 .... z jednej strony, a przez A_0' i A_0'' z drugiej przeprowadzimy proste równoległe do A_0A_1 i A_0A_0', to otrzymamy dwa układy prostych równoległych, z których jeden jest usiany punktami o odległości



a, drugi raś punktami o odległości b, a cała płaszczyzna zamieni się na sieć, w której węzłach znajdować się będą punkty analogiczne.

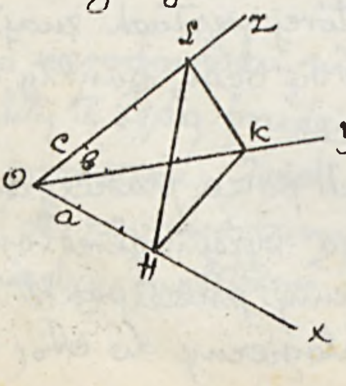
Jeżeli po za płaszczyzną sieciową wyżej wykreśloną znajdziemy jeszcze punkt B_0 analogiczny do A_0 (i najbliższy) to prosta A_0B_0 da znowu szereg punktów analogicznych, lecz odległych od siebie o inną długość c. Przeprowadzając przez B_0 płaszczyznę równoległą do płaszczyzny już znalezionej, otrzymamy drugą płaszczyznę sieciową z tymże samym układem punktów i t. d.

Z tej samej konstrukcyi wynika, że całą przestrzeń środowiska krystalicznego jednorodnego zapełniają punkty analogiczne, leżące na rogach równoległoboków jednakowych tworzonych przez przecięcie się 3 układów płaszczyzn równoległych, jednakowo od siebie odległych. Całokształt tych punktów tworzy sieć przestrzenną, w której tylko węzły są materyalne i stanowią środki ciężkości drobin.

Sieci przestrzenne wyrażają zarazem budowę molekularną kryształu (według koncepcyi Bravaisa)

Wyprowadzenie prawa wymierności parametrów z pojęcia jednorodności.

Załóżmy zgodnie z wyżej wyłożonym poglądem na budowę kryształu, że każda jego ściana jest sieciową płaszczyzną.



Wybierzmy trzy szeregi przechodzące przez środek ciężkości O jednej z drobin na osi Ox, Oy, Oz. Czynimy to na tej zasadzie, że każdy szereg można upodobnić do krawędzi kryształu, gdyż leży on na przecięciu się dwóch płaszczyzn siatkowych. Niechaj ściana HKL przecina wszystkie trzy osi i przechodzi przez 3 punkty analogiczne tych osi. Odległość tych punktów od początku O będzie zawsze wielokrotną długości a, b, c tak, że $OH = ma$, $OK = nb$, $OL = pc$. Dla jakiejś innej ściany otrzymamy:

$$OH' = m'a, \quad OK' = n'b, \quad OL' = p'c$$

Liczby m, m', n, n', p, p' są liczbami całemi. Stąd wynika, że stosunki:

$$\frac{OH}{OH'}, \quad \frac{OK}{OK'}, \quad \frac{OL}{OL'}$$

muszą być wymierne, a stosunek

$$\frac{OH}{OH'} : \frac{OK}{OK'} : \frac{OL}{OL'}$$

da się przedstawić stosunkiem liczb całych: $h : k : l$.

Tak więc prawo jednorodności fizycznej jest tylko osobnym wyrazem fizycznym zasadniczego prawa krystalografii.

Obliczanie kryształu.

Cel obliczania. Wyżej była już mowa o tem, że kryształ jest oznaczony, skoro znamy pięć jego stałych: stosunek jednostek osiowych $a/b : 1 : c/b$ i trzy kąty pomiędzy osiami: α, β, γ. Prócz tego każda ściana kryształu oznacza się za pomocą swego symbolu $(h\,k\,l)$. Pomiary kryształów dają nam tylko kąty pomiędzy ścianami. Stąd konieczną jest rzeczą obliczyć stałe kryształu na podstawie tychże kątów — to jedno zadanie. Drugie polega na sprawdzeniu pomiarów: na podstawie stałych oblicza się kąty wzajemnego nachylenia ścian.

Oryentacya kryształu. Zanim przystąpi się do obliczenia kryształu należy go zoryentować, t. j. wybrać na nim tetraedr zasadniczy, czyli, co na jedno wychodzi, wybrać z pomiędzy jego krawędzi osi krystalograficzne i przecinającą je wszystkie ścianę jednostkową. Zwykle za płaszczyzny osiowe (100), (001) i (010) wybieramy jakieś szczególnie ważne ściany kryształu, bądź to płaszczyznę łupliwości, bądź płaszczyznę symetryi, które, jak się o tem niebawem dowiemy, są zawsze możliwemi ścianami kryształu. Osi kryształu bywają nieraz osiami symetryi, które też są możliwemi krawędziami kryształu.

Ponieważ wybór ścian tetraedru zasadniczego jest rzeczą dowolną, więc i oryentacya kryształu nie jest bynajmniej czemś stałem, lecz jest rzeczą umowy. Lecz jeżeli w wyborze kierować się będziemy względami wyżej wymienionymi, to dowolność ta się zacieśnia, a w niektórych przypadkach wysokiej symetryi kryształy mogą być oryentowane tylko w jeden sposób.

Wyżej poznaliśmy sposób przybliżonego oznaczania kryształu za pomocą siatki stereograficznej. Metoda obliczania jest o wiele ściślejsza, lecz wymaga biegłości w trygonometryi sferycznej i dla tego dla początkujących musi być pominiętą.

III. PRAWO KRYSTALOGRAFII
PRAWO SYMETRYI.

Postaci proste i skombinowane. Nasza definicya kryształu określała go jako środowisko jednorodne, którego własności fizyczne w kierunkach równoległych są jednakowe, w nierównoległych zaś różne. W istocie jednak jest to określenie zbyt ogólnikowe. Znamy bowiem kryształy, które nawet w pewnych kierunkach nierównoległych posiadają jednakowe własności fizyczne. Tego rodzaju kierunki nazywamy kierunkami jednakowego znaczenia = jednoznacznymi, a odpowiednio do tego i ściany o jednakowych własnościach fizycznych także nazywamy jednoznacznemi.

Całokształt ścian jednoznacznych kryształu, t. j. wykazujących jednakowe własności fizyczne, nazywamy postacią prostą. Kilka takich postaci prostych może jednocześnie otaczać kryształ i tworzyć t. zw. <u>kombinacye postaci prostych.</u>

Niekiedy postaci napozór proste, składające się ze ścian jednakowych geometrycznie, przy bliższem rozpatrzeniu ścian poszczególnych okazują się kombinacyami, np. ośmiościan blendy, sześcian pirytu, dwupiramida sześciograniasta kwarcu i t. p. Niejednakowość fizyczna tych ścian wyraża się bądź zmatowieniem jednych ścian a połyskliwością naprzemianległych, bądź też w inny sposób. Te różnice fizyczne nie zawsze jednak wyraźnie występują — i dlatego z jednakowej formy ścian nie należy sądzić o tem, czy dany kryształ jest postacią prostą, czy złożoną. A to tem bardziej, że jak już wiemy, forma ściany zależy od wielu przypadkowych wpływów podczas wzrostu kryształu. Tylko na idealnych modelach kryształów możemy z formy ścian wnosić o ich jedno- lub różnorodności, a tem samem odróżniać kombinacye od postaci prostych.

<u>Prawo symetryi.</u> Obserwacya poucza, że ugrupowanie ścian jednoznacznych na krysztale zawsze odznacza się pewną prawidłowością, którą nazywamy symetryą, i że kryształy różne substancyonalnie możemy skupiać w gromady systematyczne,

odznaczające się rozmaitą symetryą. Na tem właśnie polega trzecie empiryczne prawo krystalografii - prawo symetryi. Aby dokładnie zrozumieć jego istotę, należy naprzód zapoznać się z pojęciem symetryi.

Symetrya - jej rodzaje i elementy.

Prawidłowość rozmieszczenia ścian na krysztale może być poznana i uwidoczniona kilkoma sposobami. Są liczne kryształy, przez których środek przeprowadzając płaszczyznę równoległą do jednej ze ścian obecnych lub możliwych, podzielimy je na 2 zupełnie równe i symetryczne połowy, mające się do siebie tak, jak przedmiot i jego odbicie w zwierciadle. Takie zatem płaszczyzny nazywamy płaszczyznami symetryi lub płaszczyznami zwierciadlanemi. Płaszczyzn takich może posiadać kryształ 1, 2, 3, 4, 6, 9 - zależnie od swej symetryi.

Symetrya innych kryształów uwidocznia się przez obrót koło osi, również przeprowadzonej przez środek kryształu i równoległej bądź do obecnej na krysztale krawędzi, bądź tylko do możliwej teoretycznie. Podczas obrotu całkowitego kryształ może zlać się ze sobą, t.j. przybrać położenie zupełnie identyczne z poprzedniem 2, 3, 4 lub 6 razy, zależnie od swej symetryi. Osi te nazywamy osiami symetryi. Do takich kryształów należy 24-ścian pentagonalny.

Wreszcie są kryształy, które nie posiadają ani płaszczyzny symetryi, ani osi symetryi, pomimo że ściany ich wykazują widoczny ład w ugrupowaniu, mianowicie są do siebie symetryczne parami. O ścianach tych mówimy, że są ugrupowane symetrycznie względem centrum symetryi, t.j. względem punktu środkowego kryształu.

Płaszczyzna, oś i centrum symetryi stanowią elementy symetryi.

Przypuszczano początkowo, że elementy symetryi nie dadzą się zastąpić jedne przez drugie, i że przy rozważaniu systematycznem rozmaitych rodzajów symetryi (grup kryształów) wszystkie muszą być brane pod uwagę. Tymczasem okazało się, że np. centrum symetryi może być zastąpione przez oś obrotu o 180° i prostopadłą do niej płaszczyznę symetryi (t.zw. symetrya złożona albo drugiego rodzaju).

Prof. G. Wulf dowiódł także, że i oś symetryi jest pojęciem poniekąd zbędnem, i że wszystkie gatunki symetryi dadzą się w sposób dość prosty wyprowadzić z jednego tylko pojęcia o płaszczyźnie symetryi czyli płaszczyźnie zwierciadlanej – pojęcia znanego wszystkim z życia codziennego.

W następstwie pójdziemy śladem rozumowań Wulfa i zapoznamy się naprzód z własnościami płaszczyzn zwierciadlanych.

Określenie płaszczyzn zwierciadlanych i ich symetryi.

1) Płaszczyzna, zdolna odbijać promienie światła obu swemi stronami i dawać wyobrażenia przedmiotów, nazywa się płaszczyzną zwierciadlaną.

2.) Symetryą zowiemy ten stosunek przestrzenny, w jakim pozostają przedmiot i jego odbicia w jednej lub w kilku płaszczyznach zwierciadlanych.

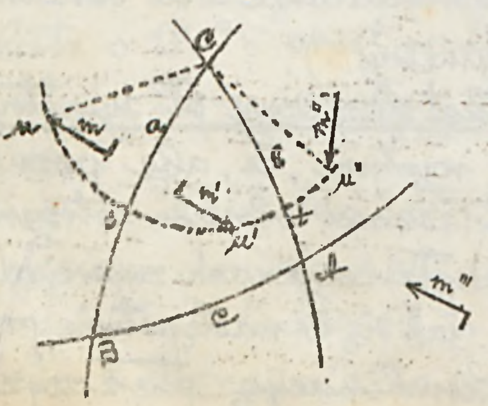
3.) Płaszczyzna zwierciadlana zowie się płaszczyzną symetryi tylko wtedy, jeżeli bierze się pod uwagę symetryę tylko przez nią samą wywołaną (więc jeśli np. symetryę wywoła oś obrotu o 180° i związana z nią prostopadła płaszczyzna zwierciadlana – ta ostatnia nie będzie płaszczyzną symetryi.)

Kąt trójścienny i trójkąt sferyczny pł. symetryi.

Z określeń przytoczonych wypływa, że, aby poznać symetryę, należy zbadać własności obrazów otrzymanych w jednej lub kilku płaszczyznach zwierciadlanych. Najprostszą, a zarazem, jak się w następstwie przekonamy, najogólniejszą kombinacyą płaszczyzn

zwierciadlanych są trzy płaszczyzny, tworzące razem
kąt trójścienny (trójgraniasty), t.j. przecinające się
w jednym punkcie.
W następstwie jednak rozpatrywać będziemy nie kąt
trójścienny bryłowy płaszczyzn zwierciadlanych, lecz
ze względów dogodności trójkąt, jaki te 3 płaszczyzny
wytworzą, przecinając się z powierzchnią kuli, opisa-
ną koło kryształu z wierzchołka kąta trójgraniastego.
Trójkąt ten będzie oczywiście trójkątem sferycznym, któ-
ry odtąd nazywać będziemy <u>trójkątem sferycznym</u>
40. <u>płaszczyzn zwierciadlanych albo płaszczyzn symetrji.</u>
Boki jego oznaczać będziemy głoskami: a, b, c, a kąty
przeciwległe głoskami A, B, C. Wszystkie więc konstruk-
cje prowadzić będziemy na kuli, a kulę wyobrażać będzie-
my na płaszczyźnie za pomocą projekcji stereograficznej.

<u>Trzy rodzaje odbić zwierciadlanych. Przemiany symetryczne.</u>



Niechaj ABC będzie trójkątem sferycznym płaszczyzn zwierciadlanych. Figurze odbijanej dla wyrazistości nadajemy kształt strzałki o końcu zagiętym w jedną stronę. Kolejne odbicia (obrazów) w płasz-

czyznach a, b, c niechaj będą m', m'' i m''', na których tymczasowo poprzestaniemy. Każde z nich pozostaje w pewnym swoistym stosunku do przedmiotu m.
1. Obraz m' jest bezpośredniem, zwyczajnem odbiciem przedmiotu m w płaszczyźnie a, tak że figura m' jest równa i symetrycznie położona względem figury m. Sposób otrzymania m' z m nazwiemy prostą przemianą symetryczną. Płaszczyznę zwierciadlaną, sprawiającą taką przemianę, nazwiemy płaszczyzną symetryi prostej, czyli płaszczyzną odbicia prostego.
2. Obraz m'' powstaje z m przez kolejne odbicie się w dwu płaszczyznach zwierciadlanych: a i b. Figury m i m'' są sobie równe, lecz nie są względem siebie symetryczne. Łatwo dostrzedz, że figurę m'' otrzymać można z m, obracając tę ostatnią koło średnicy kuli, przechodzącej przez C o kąt dwa razy większy od kąta C.
Przeprowadźmy przez trzy odpowiednie punkty μ, μ' i μ'' figur m, m', m'' koło, którego płaszczyzna będzie prostopadła do płaszczyzny a i b i do średnicy, przechodzącej przez C, będącej przecięciem się płaszczyzn a i b. Punkt μ obracany koło średnicy C przejdzie przez μ' i μ''. Niechaj punkty przecięcia się koła z płaszczyznami a i b będą s i t. Wówczas, rzecz oczywista, iż:

$$\mu\mu'' = \mu s + \mu'' t + C$$

Ponieważ jednak $\mu s = \mu' s$ a $\mu'' t = \mu' t$, przeto

$$\mu\mu'' = \mu' s + \mu' t + C$$

$$\mu\mu'' = 2C$$

To samo oczywiście dotyczy i innych punktów figury m i jej odbić m' i m''. Skąd dochodzimy do twierdzenia, iż <u>wspólne działanie dwóch płaszczyzn zwierciadlanych wyraża się w obrocie przedmiotu koło prostej, będącej ich przecięciem się o kąt dwa razy większy od kąta zawartego pomiędzy temi płaszczyznami</u>. Prosta przecięcia się dwu płaszczyzn zwierciadlanych nazywa się przeto <u>osią kongruencyi</u> czyli <u>osią symetryi</u>.

Jednoczesne działanie dwu płaszczyzn zwierciadlanych nazwiemy <u>dwoistą (złożoną) przemianą symetryczną</u>, a dwie płaszczyzny zwierciadlane, związane warunkiem działania wspólnego (jednoczesnego) i dające odrazu wspólny rezultat tego działania, nazwiemy <u>płaszczyznami symetryi dwoistej (złożonej)</u>, <u>czyli płaszczyznami odbicia dwoistego</u>.

3. Figury m''', otrzymanej przez odbicie się m'' w płaszczyźnie zwierciadlanej C, niepodobna otrzymać bezpośrednio z m, ani przez prosty tylko obrót, ani przez proste tylko odbicie w jednej płaszczyźnie zwierciadlanej. Przemiana figury m

w m''' może polegać tylko na wspólnem działaniu obrotu i odbicia; figurę m należy koło osi C obrócić o kąt $2C$ i odbić w płaszczyźnie c. Figury m i m''' są symetryczne i równe. Proces otrzymania m''' z m nazwiemy troistą przemianą symetryczną, a płaszczyzny a, b, c, przemianę taką wywołujące, nazwiemy płaszczyznami symetryi troistej, czyli troistego odbicia.

Celem otrzymania efektu przemiany troistej, należy trzy płaszczyzny zwierciadlane związać warunkiem działania wspólnego i dawania rezultatu tylko końcowego.

Oczywista, iż przemiana symetryczna troista niczem nie jest więcej, jak symetryą złożoną (2-go rodzaju) wyżej wspomnianą.

Innych sposobów działania płaszczyzn zwierciadlanych, prócz omówionych, niema, gdyż figura m''', odbita w płaszczyźnie czwartej da nam znów fig. początkową m. Trójścienny kąt płaszczyzn zwierciadlanych jest zatem najogólniejszą ich kombinacyą.

Podział przemian symetrycznych ze względu na ilość otrzymanych obrazów (odbić).

1. Przemiana symetryczna dwoista sprowadza tylko połowę całej możliwej ilości odbić. A to dlatego, że przy tego rodzaju przemianie z każdej pary odbić

przedmiotu jedno pomijamy, a mianowicie symetrycz-ne i równe przedmiotowi odbitemu.

2. Przemiana symetryi troista daje tylko ćwierć całkowitą możliwej liczby odbić.

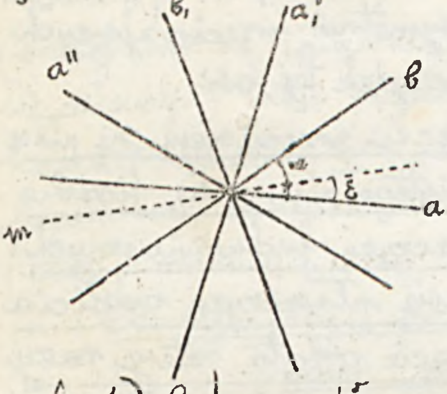
Płaszczyzna odbicia troistego, odbijająca w sobie obraz, odrzucony dwiema drugiemi płaszczyznami, nie podwaja go, jakby uczyniła, będąc płaszczyzną odbicia zwyczajnego; a ponieważ dwie drugie płaszczyzny odbiły tylko połowę możliwej liczby obrazów, więc płaszczyzna odbicia potrójnego odbije tylko czwartą część liczby możliwej, t.j. tej, którą by się otrzymało, gdyby płaszczyzny te działały niezależnie.

Nazwijmy przypadki symetryi, cechujące się obecnością płaszczyzn odbicia prostego, holosymetryą; przypadki, w których działają płaszczyzny odbicia dwoistego, nazwijmy hemisymetryą; wreszcie przypadki, w których działają płaszczyzny odbicia troistego, tetartosymetryą (symetryą ćwiartkową).

Kąty między płaszczyznami symetryi.

Kąt pomiędzy dwiema płaszczyznami symetryi powinien być całkowitą częścią 180°, jeśli ilość płaszczyzn symetryi jest skończona.

Niechaj a i b będą płaszczyznami symetryi, zawierającemi kąt α. Dajmy na to, że kąt α nie jest współmierny z ∢ 180°. Pł. symetryi odbijają się



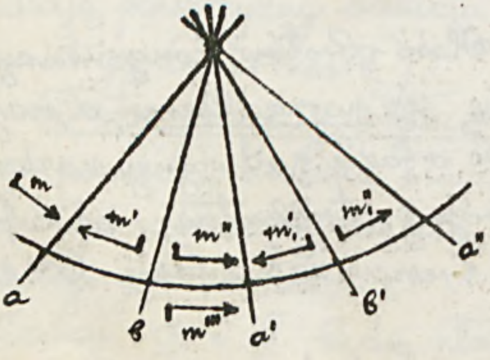
jedna w drugiej kalejdoskopowo tak, iż pł. b odbija pł. a, skutkiem czego otrzymamy pł. a'. ta odbija b, tak, iż otrzymamy pł. b' i t.d. Dojdziemy w ten sposób do płaszczyzny m, tworzącej z pł. a kąt ε, (mniejszy od α) będący różnicą kąta α i reszty pozostałej przez podzielenie 180° przez kąt α. Powtórzymy tę samą konstrukcyę dla pł. symetryi, zawierających kąt ε. Jeżeli i ten kąt nie jest współmierny z ∢ 180°, to otrzymamy znów resztę, tak, iż pomiędzy płaszczyznami a i m otrzymamy nową pł. symetryi. Rzecz jasna, że będziemy tą drogą otrzymywali coraz to nowe płaszczyzny symetryi aż do nieskończoności, jeżeli kąt α nie jest współmierny ze 180°.

<u>Porządek osi symetryi</u>. Ilość obrotów kongruencyi koło osi symetryi nazywa się jej <u>porządkiem</u>, a najmniejszy kąt obrotu <u>fazą</u>. Oś o fazie podwójnej nazwaliśmy <u>dwukrotną</u>, oś o fazie potrójnej – <u>trójkrotną</u>, oś o fazie poczwórnej – <u>czterokrotną</u>, wreszcie zaś o fazie 6 – <u>sześciokrotną</u>.

Rzecz prosta, że oś symetryi nie jest niczem innem, jak tylko linią przecięcia się dwu lub kilku płaszczyzn symetryi. Stąd ilość płaszczyzn symetryi, przecinających się w osi symetryi, określa porządek tej osi.

1. Porządek osi symetryi, będącej przecięciem się płaszczyzn odbicia prostego lub dwoistego, równa się liczbie przecinających się w niej płaszczyzn jednoznacznych.
2. Prosta, będąca przecięciem się płaszczyzn odbicia troistego, jest osią symetryi o kącie obrotu cztery razy większym od kąta między płaszczyznami symetryi.

Twierdzenie to wynika z powyżej wyłożonej własności płaszczyzn odbicia troistego, według którego troista przemiana symetryczna daje tylko 1/4 ilości możebnych odbić. Innemi słowy oś symetryi odbicia troistego odrzuci ścianę o kąt 4 razy większy od kąta pomiędzy płaszczyznami symetryi zwykłej. Widoczne to jest także z następującej konstrukcyi. Niechaj a, b, c będą płaszczyznami odbicia troistego, a m figurą, podlegającą przemianie symetrycznej. Płaszczyzny a i b odbiją się kalejdoskopowo w a', b', a''. Figura m da odbicie m', m''



i m''', z których tylko m'' jest realne (jako ostateczny rezultat). Atoli przy kalejdoskopowem powtarzaniu się (odbijaniu się) płaszczyzn i figur niezbędnie znaleźć się winny i takie figury m', m'', m''' które dadzą kolejne odbicia m', m'' i m''' a ich rezultatem będzie figura m'' kongruentna z figurą m przez obrót o kąt (aa'') równający się czterokrotnemu kątowi (ab).

Osi symetryi dwubiegunowe i jednobiegunowe (polarne).

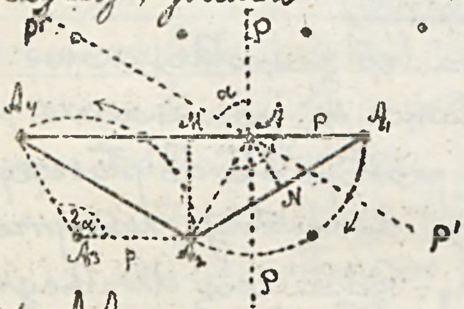
Osi symetryi bywają dwu lub jednobiegunowe zależnie od tego, czy obydwa ich końce są jednoznaczne, czy różnoznaczne. Tak np. oś prostopadła do płaszczyzny symetryi lub do osi symetryi dwukrotnej, lub przechodząca przez centrum symetryi, - będzie osią dwubiegunową, w innych przypadkach będzie ona jednobiegunową (polarną).

Symetrya krystalograficzna.

Po tych uwagach ogólnych przechodzimy do bliższego rozpoznania własności symetryi krystalograficznej. Zasadnicze prawo symetryi krystalograficznej opiewa, iż płaszczyzny symetryi mogą przecinać się tylko pod kątami 0°, 30°, 45°, 60°, 90° i 180°.

Twierdzenie to w najprostszy sposób daje się udowodnić na podstawie pojęcia o jednorodności krystalicznej. Jednorodność tą, jak już wiemy, polega na tem, że jednoznaczne punkty środowiska krystalicznego leżą na prostych w jednakowej od siebie odległości. Proste zaś o rozmaitych kierunkach usiane są punktami, oddalonymi od siebie dla każdego kierunku inaczej.

Przypuśćmy, iż przez punkt A środowiska krystalicznego przechodzą 2 płaszczyzny symetrji prostopadłe do płaszczyzny rysunku. W pobliżu A weźmy punkt A_1 (analogiczny) tak, aby pomiędzy A i A_1 nie było żadnego innego punktu analogicznego.



Odległość AA_1 oznaczamy przez p. Ponieważ chodzi nam o znalezienie kąta pomiędzy dwiema pł. symetrji, przechodzącemi przez punkt A, przeto musimy wziąć pod uwagę rezultat działania obu pł. symetrji, t.j. obrót, którego wielkość będzie, zgodnie z powyższem 2α, jeżeli kąt między pł. symetrji będzie α. Na skutek tego obrotu punkt A_1 znajdzie się w A_2, a ponieważ przytem cały kryształ zleje się sam ze sobą, to punkt A_2 będzie analogiczny punktowi A_1, a punkt A_3 odległy od A o długość $AA_3 = A_1A_2$, a od A_2 o długość $AA_1 = p$, będzie analogiczny punktowi A. Przez punkt A_3 możemy przeto przeprowadzić 2 płaszczyzny symetryi lub zastępującą je oś symetryi. Jeżeli obrócimy cały układ koło osi, przechodzącej przez A_3 (prostopadle do płaszczyzny rysunku) o kąt 2α w kierunku odwrotnym, to punkt A_2 sprowadzimy w położenie A_4 na prostej AA_1. Odległość A_1A_4 może się jednak równać tylko wielokrotnej całkowitej liczbie długości AA_1, skutkiem czego

$$A_1A_4 = mp$$

gdzie m jest liczbą całą. Z konstrukcyi widać, że

$$\sphericalangle A_4A_2A_1 = \sphericalangle A_2AA_1$$

Ponieważ
$$A_1M = A_1A_2 \sin\alpha, \text{ zaś}$$
$$AN = A_1A \sin\alpha = p\sin\alpha, \text{ skąd}$$
$$A_1A_2 = 2p\sin\alpha, \text{ otrzymamy}$$
$$A_1M = 2p\sin^2\alpha, \text{ czyli}$$
$$A_1A_4 = 4p\sin^2\alpha = mp, \text{ skąd}$$
$$m = 4\sin^2\alpha$$

Wartości liczby m leżą między 0 a 4 (gdyż $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$)

$$4 \geqq m \geqq 0$$

Podstawiając zamiast m rozmaite całe liczby w tych granicach leżące, otrzymamy następujące znaczenia dla kąta α:

1) $4\sin^2\alpha = 1$ 2) $4\sin^2\alpha = 2$ 3) $4\sin^2\alpha = 3$

$\sin^2\alpha = 1/4$ $\sin^2\alpha = 1/2$ $\sin^2\alpha = 3/4$

$\sin\alpha = 1/2$ $\sin\alpha = \sqrt{1/2}$ $\sin\alpha = \sqrt{3/4} = 1/2\sqrt{3}$

4) $4\sin^2\alpha = 4$

$\sin^2\alpha = 1$; $\sin\alpha = 1$.

m	$\sin^2\alpha$	$\sin\alpha$	α
0	0	0	$\{0°, 180°$
1	1/4	1/2	30°
2	1/2	$\sqrt{1/2}$	45°
3	3/4	$\sqrt{3/4}$	60°
4	1	1	90°

Te więc znaczenia α będą jedynie możliwymi kątami pomiędzy płaszczyznami symetryi krystalograficznej. Twierdzenie to jest podstawą nauki o symetryi kryształów.

Wyprowadzenie możliwych gatunków holosymetryi.

Na podstawie poprzedzającego twierdzenia z łatwością już możemy wyprowadzić możliwe kombinacye płaszczyzn symetryi krystalograficznej. Mamy tu 3 przypadki: 1) jedna płaszczyzna symetryi, 2) dwie pł. symetryi, 3) trzy pł. symetryi.

1. Przypadek jednej pł. symetryi na kuli przed –

stawi się w postaci jednego wielkiego koła. Przypadek ten nazwijmy przypadkiem półkuli; $\alpha = 180°$

2. Dwie pł. tworzyć mogą kąty 30°, 45°, 60° i 90°. Otrzymamy tu więc 4 przypadki dwukątów, albowiem na kuli 2 płaszczyzny wyrażą się w postaci 2 wielkich kół, tworzących dwukąty.

3. Trzy pł. symetryi sprowadzą przypadki trójkątów. Ażeby znaleźć możliwe, należące tutaj gatunki trójkątów, musimy ułożyć wszystkie możliwe kombinacye z kątów 30°, 45°, 60° i 90° po trzy i wybrać z tych kombinacyi tylko te, które nie przeczą zasadniczej własności trójkąta sferycznego, w którym suma kątów powinna być większą od 180°, lecz mniejszą od 3x180°=540°. Te możliwe kombinacye trójkątów sferycznych utworzonych przez pł. symetryi krystalograficznej będą następujące

30	30	30									
30	30	45									
30	30	60									
30	30	90									
30	45	45	45	45	45						
30	45	60	45	45	60						
30	45	90	45	45	90						
30	60	60	45	60	60	60	60	60			
30	60	90	45	60	90	60	60	90			
30	90	90	45	90	90	60	90	90	90	90	90

Wynika stąd, że wszystkich możliwych gatunków holosymetryi jest 11: sześć gatunków trójkąta, 4 dwukąta i 1 półkuli.

Symbole oznaczające kombinacye płaszczyzn symetryi.

Kąty trójkąta sferycznego oznaczmy w częściach 180° tak, iż przybiorą one kształt $180/6$, $180/4$, $180/3$, $180/2$, $180/1$. Umówmy się oznaczać wielkość kątów trójkąta mianownikami odpowiedniego ułamka, a boki trójkąta mierzmy wielkością przeciwległych kątów. Dla oznaczenia całego trójkąta napiszmy trzy liczby, oznaczające wielkość jego kątów, zamknijmy je w nawias, a przed nawiasem połóżmy głoskę $\underline{s}$, a otrzymamy symbol trójkąta.

Np. $s(234)$ jest symbolem trójkąta o kątach 90°, 60° i 45°. Głoska $\underline{s}$ oznacza przytem, iż mamy tu do czynienia z symbolem symetryi a nie z symbolem krystalograficznym ściany.

Używając tego sposobu, otrzymamy następujące symbole dla kombinacyi wyżej wyprowadzonych:

$s(234)$, $s(233)$ - trójkąty prostokątne; $s(226)$, $s(224)$, $s(223)$, $s(222)$ - trójkąty o 2 lub 3 prostych kątach.

Oznaczenie to możemy zastosować i do dwukątów i do półkuli, rozpatrując pierwsze jako trójkąty, w których jeden kąt $= 180^\circ$, inne zaś są sobie równe, a półkulę jako trójkąt, w którym wszystkie kąty $= 180^\circ$:

s(111) - półkula
s(166), s(144), s(133), s(122) – dwukąty.
Symbole te możemy przedstawić prościej. Ponieważ dwukąty cechują się jednym tylko kątem, możemy ten tylko kąt uwzględnić w symbolu. Zaliczając do dwukątów i półkulę otrzymamy:
zamiast: s(111), s(122), s(133), s(144), s(166)
wprost: s(1), s(2), s(3), s(4), s(6).

Wyprowadzenie możliwych gatunków krystalograficznej hemisymetryi.

Ponieważ hemisymetrya polega na działaniu płaszczyzn symetryi po dwie odrazu, przeto każdy trójkąt sferyczny może dać cztery przypadki hemisymetryi, zależnie od tego, czy boki jego działać będą parami jednocześnie, czy też tylko jedna para będzie czynna. Przypadki, w których dwie pary boków trójkąta stają się płaszczyznami odbicia dwoistego, nie dają nic nowego, albowiem sprowadzają się do przypadku pierwszego, gdyż w 2 parach boków trójkąta obecne są wszystkie jego boki:

1. AB i BC, BC i AC, AC i AB — jednocześnie	2. tylko AB i BC
	3. albo tylko BC i AC
	4. –"– AC i AB

1. Skoro wszystkie boki trójkąta pł. symetryi zwiążemy warunkiem, aby działały parami, to otrzymamy przypadek hemisymetryi zupełnej. Boki trójkątów tracą przytem znaczenie płaszczyzn rzeczywistych i mogą być zastąpione całkowicie przez osi symetryi w wierzchołkach trójkąta. Oczywista, że wszystkie (11) gatunków trójkąta sferycznego mogą wytworzyć tego rodzaju hemisymetryę.

2. Skoro jedna tylko para boków trójkąta podlegać będzie warunkom hemisymetryi, to otrzymamy przypadek hemisymetryi niezupełnej, która jak wyżej wskazano, może dać trzy przypadki dla każdego trójkąta. Otrzymalibyśmy zatem 33 gatunki hemisymetryi niezupełnej. W rzeczywistości jednak liczba ta jest znacznie mniejszą i redukuje się, jak to zaraz zobaczymy, do siedmiu.

Rzecz oczywista, że ani półkula s(1), ani dwukąty s(2), s(3), s(4), s(6) nie mogą wytworzyć tej hemisymetryi niezupełnej, albowiem mają one tylko po jednej parze boków.

3. Trójkąt s(222) może wytworzyć tylko jeden gatunek hemisymetryi niezupełnej, albowiem wszystkie kombinacye jego boków po dwa niczem się różnić nie będą.

<u>Twierdzenie.</u> Jeżeli boki trójkąta zawierają kąt równy nieparzystej części 180° ($\frac{180°}{3} = 60°$), to możliwy jest ten tylko przypadek hemisymetryi, kiedy obydwa te boki stają się płaszczyznami odbicia dwoistego.

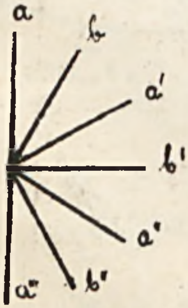
<u>Dowód.</u> Jeżeli jeden tylko z dwóch boków trójkąta zawierających kąt α, stanie się płaszcz. odbicia dwoistego, to kąt pomiędzy dwiema sąsiedniemi pł. odbicia dwoistego przez kalejdoskopowe odbicie się boków w tym samym wierzchołku staje się $= 2\alpha$, a kąt obrotu $= 4\alpha$. Jeżeli $\alpha = 180° : (2n+1)$, co jest liczbą nieparzystą, bo <u>n</u> jest liczbą całą, t. j., jeżeli α stanowi nieparzystą część 180°, to kąt obrotu $4\alpha = \frac{4 \times 180°}{2n+1}$

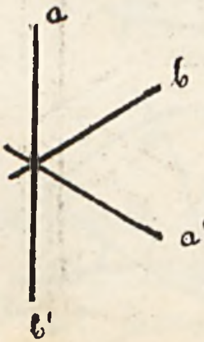
Porządek osi obrotu będzie wówczas $= 360 : \frac{4 \times 180°}{2n+1} =$

$$= \frac{360°(2n+1)}{4 \times 180°} = \frac{2n+1}{2},$$

co nie może być liczbą całą, a więc i sama oś będzie niemożliwa.

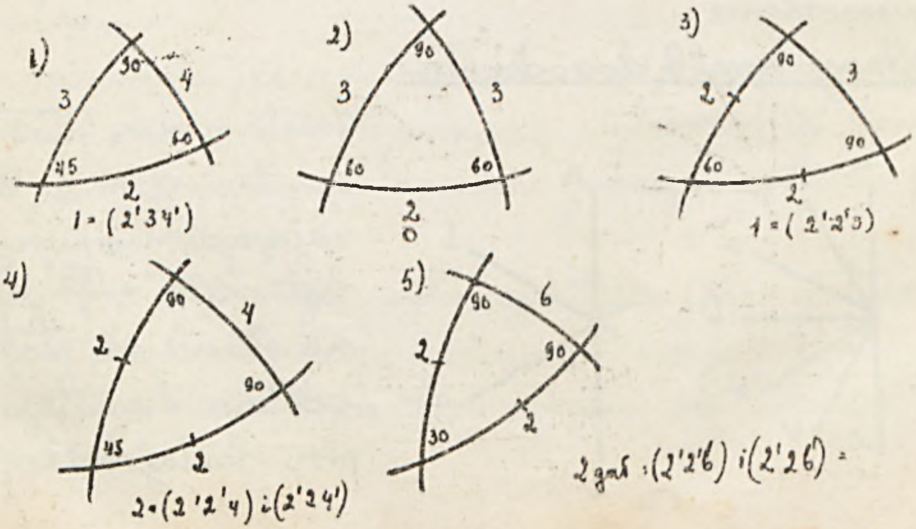
<u>Inny sposób dowodzenia.</u>





Jeżeli z dwu płaszczyzn symetryi <u>A</u> i <u>B</u>, zawierających nieparzysty kąt α ($60° = \frac{180°}{3}$), jedna stanie się płaszczyzną odbicia dwoistego, to przy kalejdoskopowem powtarzaniu się tych płaszczyzn jedna w drugiej dalszym ciągiem $\underline{a}$ może być albo odbicie $\underline{a}'''$, albo odbicie $\underline{b}'$. Pierwsze nastąpi przy α parzystem, drugie przy α nieparzystem. W tym ostatnim przypadku płaszczyzna $\underline{a}$ łącznie ze swem przedłużeniem ($\underline{b}'$) musiałaby być jednocześnie płaszczyzną odbicia dwoistego i prostego, co jest niemożliwe. A więc, jeżeli α nieparzyste, to i pł. $\underline{b}$ musi być płaszczyzną odbicia dwoistego.

Stąd wynika, iż z trójkątów s(234), s(233), s(226), s(224) i s(223) trójkąt s(233) zgoła nie da hemisymetryi niezupełnej, trójkąty zaś s(234) i s(223) dadzą po jednym jej rodzaju, wreszcie trójkąty: s(226) i s(224) dadzą po dwa gatunki hemisymetryi niezupełnej. Widać to jasno na trójkątach.



Widzimy więc, że możliwych jest tylko 7 przypadków hemisymetryi niezupełnej.

Symbole wyrażające hemisymetryę.

Umówmy się bok trójkąta, będący płaszczyzną odbicia dwoistego oznaczać przecinkiem. Wówczas dla znalezionych i jedynie tylko możliwych gatunków hemisymetryi otrzymamy symbole:

Hemisymetrya		
Zupełne	Niezupełne	
s(2'3'4')	—	s(2'34')
s(2'3'3')	—	—
s(2'2'6')	s(2'2'6)	s(2'26')
s(2'2'4')	s(2'2'4)	s(2'24')
s(2'2'3')	s(2'2'3)	—
s(2'2'2')	s(2'2'2)	—
s(6')	—	—
s(4')	—	—
s(3')	—	—
s(2')	—	—
s(1')	—	—

Wyprowadzenie możliwych gatunków tetartosymetryi.

Gatunków tych jest jeszcze mniej, niż hemisymetrtryczných. Oczywista, iż dwukąty nie mogą dać tetartosymetryi, albowiem ta możliwą jest tylko wtedy, kiedy mamy do czynienia z trójkątem płaszczyzn zwierciadlanych.

<u>Twierdzenie</u>: <u>Płaszczyzny odbicia troistego nie mogą zawierać kąta, będącego nieparzystą częścią 180°.</u>

Niechaj jeden z kątów pomiędzy płaszczyznami odbicia troistego równa się $\frac{180°}{2n+1}$, gdzie <u>n</u> jest liczbą całą. Wówczas kąt obrotu względem prostej, będącej przecięciem się tych płaszczyzn, będzie $= 4 \times \frac{180°}{2n+1}$, a porządek tej osi $= 360 : \left[4 \times \frac{180°}{2n+1}\right] = \frac{360(2n+1)}{4 \cdot 180°} = \frac{2n+1}{2}$, co nie jest liczbą całą; a więc oś taka jest niemożliwa.

Stąd wynika, iż trójkąty, które są zdolne do wytworzenia tetartosymetryi będą tylko: s(222), s(224) i s(226).

Symbole ich wyrazimy, jak następuje, przez oznaczenie każdego boku trójkąta płaszczyzn zwierciadlanych, odpowiadających płaszczyznom odbicia troistego za pomocą 2 przecinków:

s(2"2"2"), s(2"2"4"), s(2"2"6").

Z poprzedniego wynika więc, że liczba możliwych gatunków symetryi krystalograficznej równa się 32. Z nich 11 przypada na holosymetryę, tyleż na hemisymetryę zupełną, 7 na hemisymetryę niezupełną i trzy na tetartosymetryę.

Holosymetrya	Hemisymetrya zupełna	Hemisymetrya niezupełna		Tetartosymetrya
s(234)	s(2'3'4')	———	2'34'	
s(233)	s(2'3'3')	———	———	
s(226)	s(2'2'6')	s(2'2'6)	s(2'26')	s(2"2"6")
s(224)	s(2'2'4')	s(2'2'4)	s(2'24')	s(2"2"4")
s(223)	s(2'2'3')	s(2'2'3)	———	———
s(222)	s(2'2'2')	s(2'2'2)	———	s(2"2"2")
s(6)	s(6')	———	———	———
s(4)	s(4')	———	———	———
s(3)	s(3')	———	———	———
s(2)	s(2')	———	———	———
s(1)	s(1')	———	———	———

Powtarzanie się kalejdoskopowe trójkątów płaszczyzn symetryi na kuli. Ilość kierunków jednoznacznych.

Proponowane symbole mają tę dogodność, że przy ich pomocy możemy odrazu określić ilość jednoznacznych kierunków dla danego gatunku symetryi. Każdy trójkąt (lub dwukąt) sferyczny, odbijający się w swych własnych ścianach powtórzy się kalejdoskopowo i utworzy sieć jednakowych trójkątów, pokrywających bez przerwy całą powierzchnię kuli. Rzecz prosta, że największa ilość kierunków jednoznacznych równa się w ogóle liczbie trójkątów, pokrywających sferę. Ta zaś liczba równa się stosunkowi powierzchni kuli do powierzchni danego trójkąta sferycznego. Jeżeli symbol trójkąta jest $S(m\,n\,p)$, i jeżeli $\underline{r}$ jest promieniem kuli, to powierzchnia trójkąta $P(ABC)$ będzie:

$$P(ABC) = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - 1\right)\pi r^2.$$

[Wiadomo bowiem, że powierzchnia trójkąta sferycznego $P(ABC) = r^2\pi\frac{\varepsilon}{180^\circ}$, ε zaś, czyli przewyżka wartości kątów ponad $180^\circ = \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$, stąd $P(ABC) = \pi r^2\left(\frac{\alpha}{180} + \frac{\beta}{180} + \frac{\gamma}{180} - 1\right)$, więc dla trójkąta $S(2\,3\,4)$ otrzymamy:

$$P(2\,3\,4) = \pi r^2\left(\frac{90}{180} + \frac{60}{180} + \frac{45}{180} - 1\right), \text{ czyli}$$

$$P(2\,3\,4) = \pi r^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1\right)\Big]$$

Liczba zaś kierunków jednoznacznych N wyrazi się tak:

$$N = \frac{4\pi r^2}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - 1\right)\pi r^2} = \frac{4}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - 1} \quad \text{czyli}$$

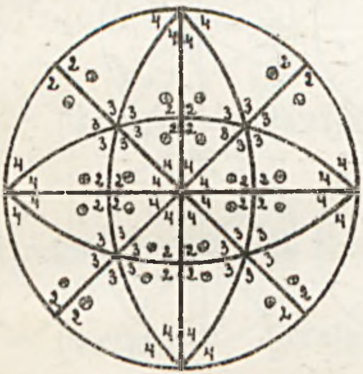
$$N(m\,n\,p) = \frac{4\,m\,n\,p}{mn + mp + np - mnp}$$

Dla gatunków hemisymetrji i tetartosymetrji liczbę tę należy zmniejszyć dwa, względnie cztery razy.

Ze skróconymi symbolami dwukątów rzecz się ma prościej: cyfra umieszczona w nawiasie zdwojona da liczbę kierunków jednoznacznych gatunku holosymetrycznego, np. $S(4)$ odpowiada ośmiu kierunkom jednoznacznym, lecz symbol hemisymetryczny $S(4')$ będzie odpowiadał tylko czterem takim kierunkom.

Oczywista, że to maximum jednoznacznych kierunków będzie jednocześnie oznaczać i największą liczbę ścian postaci prostej danego gatunku symetryi, mianowicie tak zw. postaci ogólnej, posiadającej największą liczbę ścian.

Np. trójkąt $S(234)$, powtórzywszy się kalejdoskopowo da sieć trójkątów, przedstawioną na rysunku. Liczba trójkątów będzie 48, jak to widzimy z rachunku:



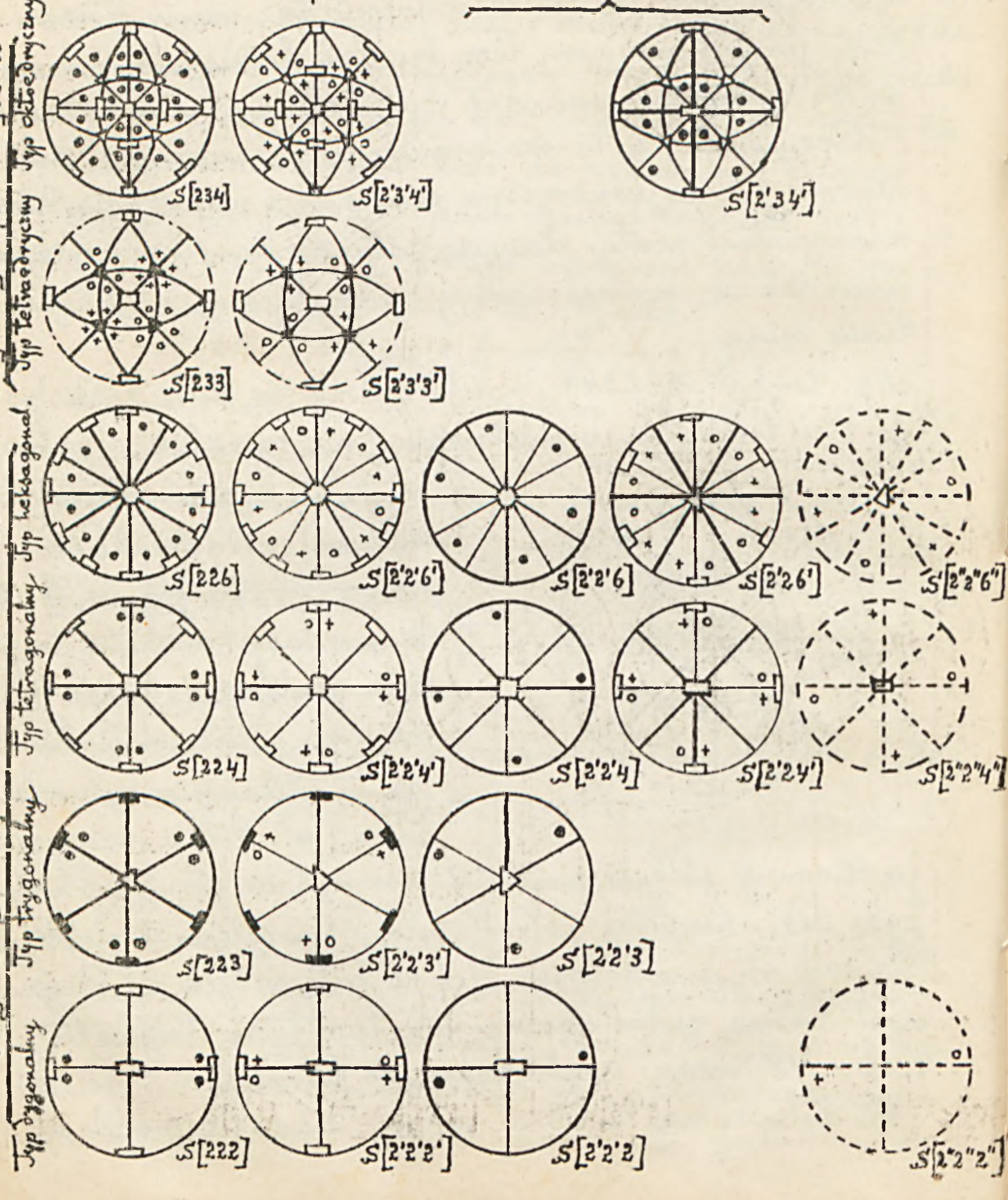
$$N = \frac{4\,(2\times3\times4)}{2\times3+2\times4+3\times4-2\times3\times4} = \frac{96}{2} = 48$$

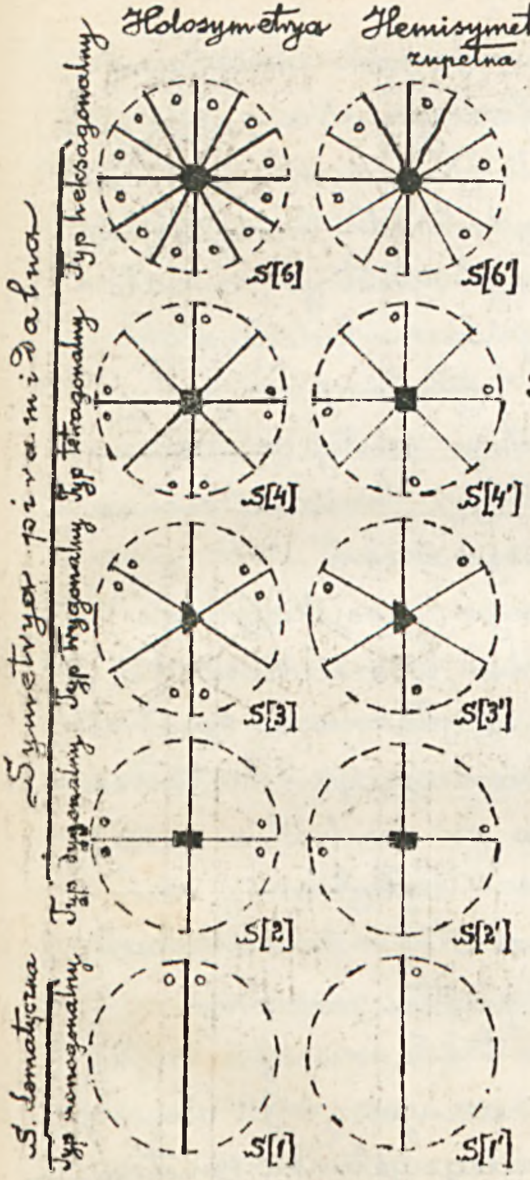
Biegun dany wewnątrz trójkąta powtórzy się także 48 razy na powierzchni kuli, jak to widać na rysunku, gdzie (⊕) kółka oznaczają bieguny półkuli przedniej (względnie górnej), krzyżyki zaś - bieguny półkuli tylnej (względnie dolnej).

Ściany styczne do powierzchni kuli w tych 48 biegunach tworzą postać ogólną dla tego typu trójkąta, t. zw. 48-ścian czyli heksakis tetraedr.

Na dołączonej tablicy mamy oddane projekcye

Holosymetrya — Hemisymetrya (zupełna, niezupełna) — Tetartosymetrya





Płaszcz. odbić pojedynczych oznacz. liniami grub.
" " podwójnych " " cienk.
" " potrójnych " " przeryw.

Obwód koła przerywany nie ma dla symetryi znaczenia.

▭ oś symetryi dwukrotna
△ " " trzykrotna
□ " " czterokrotna
⬡ " " sześciokrotna

Osi polarne zaczernione.

o bieguny ścian półkuli przedniej
\+ " " " tylniej

stereograficzne wszystkich wyprowadzonych powyżej 32 gatunków symetryi krystalograficznej. Na projekcyach tych przedstawiono podział kuli płaszczyznami symetryi na części symetryczne, z których każda tworzy trójkąt lub dwukąt sferyczny płaszczyzny symetryi, a całokształt wszystkich części jest wynikiem kalejdoskopowego powtórzenia oddzielnych trójkątów (względnie dwukątów). Płaszczyzny symetryi prostej oznaczono liniami grubszemi, hemisymetryi - liniami cieńszemi, tetartosymetryi zaś - przerywanemi.
Jeżeli obwód koła zasadniczego (projekcyjnego) nie ma dla symetryi znaczenia, to oznaczono go linią przerywaną. Przecięcie się płaszczyzn symetryi oznaczono wielokątami, odpowiadającymi kształtem swoim porządkowi osi, a więc osi dwukrotne oznaczono prostokątami, trójkrotne - trójkątami, czworokrotne - kwadratami, sześciokrotne - sześciobokami. Osi różnobiegunowe (polarne) przytem zaczerniono.
Na rzutach tych przedstawiono także wewnątrz trójkątów bieguny kierunków jednoznacznych, t.j. bieguny ścian ogólnej postaci prostej każdego gatunku symetryi. Pierwszy szereg pionowy zawiera holosymetryę, drugi, trzeci i czwarty - hemisymetryę, piąty - tetartosymetryę. Szeregi poziome charakteryzują się jedna-

kowym kształtem trójkąta symetryi.

Związek pomiędzy oddzielnymi gatunkami symetryi wyraża się formą trójkąta płaszczyzn symetryi, która w szeregach tablicy poziomych jest jednakowa. Nie trudno jednak dostrzedz pokrewieństwo i pomiędzy gatunkami szeregów pionowych, np. pomiędzy s(226) i s(6), albo pomiędzy s(224) i s(4) i t.d.

Holoedrya, hemiedrya i tetartoedrya w stosunku do symetryi.

Znamy wiele takich wielościanów krystalograficznych, które dadzą się wyprowadzić z innych przez opuszczenie połowy ścian obecnych i przez rozszerzenie pozostałych do wzajemnego przecięcia się. Tego rodzaju związek zachodzi np. pomiędzy ośmiościanem a tetraedrem.

Postaci z największą liczbą ścian nazwano holoedrycznemi (całkowitemi), formy z połową ścian możliwych otrzymały nazwę hemiedrycznych (połówkowych). Wreszcie zdarzają się także wielościany, wykazujące tylko 1/4 ścian możliwych - te nazwano tetartoedrycznymi (ćwiartkowymi). Wielościany hemiedryczne i tetartoedryczne w ogóle nazwane zostały mezoedrycznymi.

Wyłożone wyżej pojęcia symetryi, mające za podstawę najważniejszy element symetryi - płaszczyznę - najzupełniej objaśniają zjawisko meroedryi. Rzecz jasna, że wielościany holoedryczne odpowiadają holosymetryi, jako też kombinacyi płaszczyzn symetryi, która daje największą liczbę ścian (odbić), gdy hemiedrya odpowiada hemisymetryi, a tetartoedrya - tetartosymetryi.

Niektórzy krystalografowie odróżniają jeszcze ogdoedryę, t.j. takie przypadki wielościanów, które wykazują tylko 1/8 wszystkich możliwych ścian. Atoli ogdoedrya nie wypływa z ogólnego określenia symetryi i jest tylko wynikiem sztucznego zestawienia wielościanów wyprowadzanych z rozmaitych holosymetrycznych kombinacyi płaszczyzn symetryi.

Osobnym rodzajem meroedryi jest hemimorfizm, polegający na rozmaitem znaczeniu obu końców osi symetryi.

Jakkolwiek pojęcie meroedryi jest sztuczne i dowolne, to jednak niepodobna mu odmówić znaczenia dydaktycznego, dzięki któremu utrzymuje się ono do dziś dnia w podręcznikach mineralogii (zwłaszcza niemieckich.

Krystalograficzne znaczenie płaszczyzn i osi symetryi.

Dla dopełnienia naszych wiadomości o symetryi krystalograficznej i jej gatunkach należy jeszcze pamiętać o następujących prostych twierdzeniach, wypływających wprost z danych objętych dołączoną tablicą.

1 Płaszczyzny odbić prostych są zawsze możliwemi ścianami krystalograficznemi.

2. Osi symetryi są możliwemi krystalograficznemi krawędziami, a płaszczyzny do nich prostopadłe są krystalograficznie możliwe.

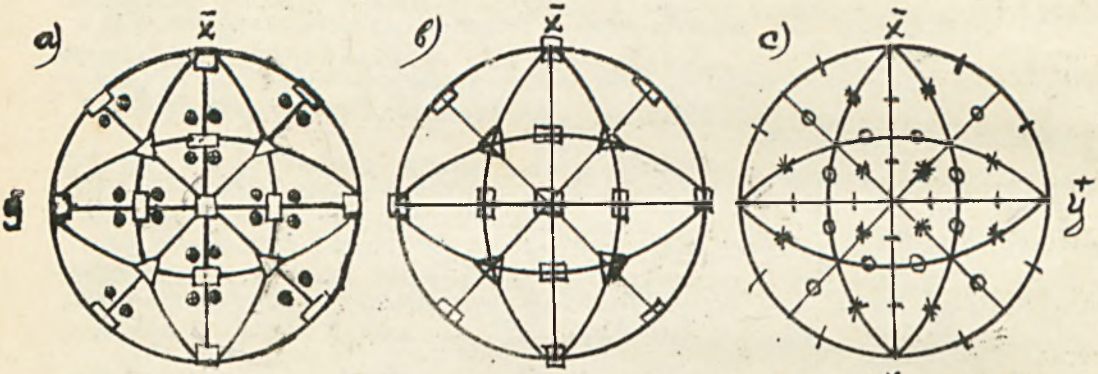
3. Płaszczyzny odbić dwoistych i troistych są tylko wtedy możliwe krystalograficznie, kiedy się w nich przecinają conajmniej dwie osi symetryi lub jeżeli są one prostopadłe do osi symetryi.

Postaci ogólne i szczegółowe.

Każdy gatunek symetryi (klasa kryształów) posiada jedną prostą postać o największej liczbie ścian. Postać tę otrzymamy skoro początkowy biegun ściany umieścimy wewnątrz jednego z trójkątów, na które zostaje podzielona powierzchnia kuli płaszczyznami symetryi. Wówczas biegun ten powtórzy się w każdym trójkącie, lub tylko w niektórych, zależnie od tego, czy boki jego będą ścianami prostego, czy też dwoistego lub troistego odbicia. Taki wielościan prosty będzie dla danej klasy kryształów postacią w ściany najobfitszą czyli postacią ogólną.

Jeżeli natomiast umieścimy biegun początkowy nie w środku trójkąta, lecz na jego boku lub w kącie, nającym znaczenie realnego elementu symetryi, wówczas otrzymamy postać szczególową.

Weźmy np. gatunek symetryi o symbolu $S\left(234\right)$ z dziewięcioma płaszczyznami symetryi. 45



$\{hkl\}$ $\{110\}$ $\{110\}$ $\{100\}$ $\{hk0\}$, $\{hhk\}$, $\{hkk\}$

Skoro początkowy biegun ściany umieścimy wewnątrz trójkąta, powtórzy się on na kuli 48 razy i da ogólną postać tej klasy, czyli t. zw. 48-ścian (rys. a).

Biegun początkowy umieszczony w kącie trójkąta 45° t.j. w biegunie osi 4 krotnej, powtórzy się tylko 6 razy i da postać szczególową - sześcian (rys. b).

Tenże biegun umieszczony w kącie 60° (biegunie osi 3 krotnej) powtórzy się 8 razy i da ośmiościan (rys. b), wreszcie umieszczony w kącie 90° (biegun osi 2-krotnej) powtórzy się 12 razy i da dwunastościan (rys. b).

Podobnież umieszczając biegun początkowy kolejno na bokach trójkąta 2, 3, 4 otrzymamy trzy szeregi 24-ścianów,

które też będą postaciami szczególowemi typu S(234) - rys. C.
Z tego wynika, że znając znaczenie elementu trójkąta, na którym umieszczany biegun, możemy a priori powiedzieć, ile dana postać szczególowa będzie miała ścian. Jeżeli tym elementem jest bok trójkąta, będący realną płaszczyzną symetryi, to ilość ścian postaci ogólnej zmniejszy się 2 razy; jeżeli będzie nim wierzchołek trójkąta, przez który przechodzi oś n-tego porządku, to ilość ścian postaci ogólnej zmniejszy się 2n razy; jeżeli będzie nim wierzchołek trójkąta, przez który przechodzi oś n-tego porządku, to ilość ścian postaci ogólnej zmniejszy się 2n razy.
Postaci szczególowe (i ogólne) będą jedynemi w swoim rodzaju, skoro bieguny ich zajmują na kuli jedyne w swoim rodzaju miejsca, np. wierzchołek trójkąta lub środek jego boków. Tak np. wyprowadzane wyżej postaci szczególowe: sześcian, ośmiościan i 12-ścian są postaciami jedynemi w swoim rodzaju: ściany ich przecinają się stale pod tymi samymi kątami, skutkiem czego posiadają one stałe wskaźniki ścian i symbole: {100}, {111}, {110}. Przeciwnie 48-ścian i wspomniane 3 szeregi 24-ścianów mają położenie biegunów na właściwych sobie elementach trójkąta zmienne, i dlatego jest niepodobna a priori wiedzieć ani kątów pomiędzy

ich ścianami, ani oznaczyć ściśle wskaźników (symboli).

<u>Symetrya ścian postaci prostych.</u>

Każda ze ścian kryształu jest położona w pewien sposób względem pierwiastków symetryi. Jeżeli jest ona prostopadła do osi symetryi lub pł. symetryi, będzie symetryczną; w przeciwnym razie będzie asymetryczną, czyli pozbawioną symetryi. Jeżeli ściana jest prostopadła do osi symetryi, to, zależnie od porządku tej osi, nazwiemy ścianę <u>dwu</u>-, <u>trój</u>-, <u>cztero</u>-, lub <u>sześciomierną</u> (posiadającą środek obrotu 2-go, 3-go, 4-go lub 6-go porządku: C_2, C_3, C_4, C_6). Jeżeli ściana jest prostopadła do 1, 2, 3, 4 lub 6 płaszczyzn symetryi, to nazwiemy ją <u>jedno</u>-, <u>dwu</u>-, <u>trój</u>-, <u>cztero</u>-, lub <u>sześcio-symetryczną</u>.
Z powyższego wynika, że ściany postaci ogólnej będą asymetryczne, ściany zaś postaci poszczególnych będą symetryczne.

Pomiędzy ilością ścian postaci prostej poszczególnej a jej symetryą zachodzi bardzo prosta zależność, a mianowicie: <u>iloczyn z liczby ścian postaci prostej przez liczbę jednoznacznych kierunków każdej ściany równa się liczbie ścian postaci ogólnej danego gatunku symetryi</u>. Widać to na rys. <u>a</u> i <u>b</u>, podanych wyżej. Na 48-ścianie jednoznacznych kierunków jest oczywiście tyle co ścian, t.j. 48. Postać szczególna, np. sześcian powstaje niejako przez zlanie się 8 trójkątów schodzących się w biegunie O (rys. b). Stąd każda ściana kostki będzie oczywiście wykazywać tyle kierunków jednoznacznych, z ilu ścian postaci ogólnej powstała, t. j. w danym przypadku z 8. Innemi słowy każda ściana postaci szczególnej wykaże tyle kierunków jednoznacznych, ile razy liczba jej ścian jest mniejszą od liczby ścian postaci ogólnej. (Jest to t. zw. prawo zachowania jednoznacznych kierunków).

Symetrya geometryczna a krystalograficzna.

Rzut oka na projekcyę stereograficzną płaszczyzn symetryi dwu pierwszych poziomych jej szeregów, obejmujących gatunki S(2 3 4), S(2'3'4'), S(2'3 4'), S(2 3 3) i S(2'3'3) przekona nas, że umieszczając biegun początkowy na biegunie osi czterokrotnej lub dwukrotnej, otrzymamy we wszystkich pięciu gatunkach symetryi jedną i tąsamą geometrycznie postać poszczególną, której wszystkie bieguny będą od siebie odległe o 90°, a więc dadzą sześcian.

Rozpatrując w podobny sposób inne gatunki symetryi znajdziemy, że sześcian, odpowiadający tylko pierwszemu prawu krystalografii, t. j. stałości kątów, jako zespół 6 prostopadłych ścian, jest możliwy jeszcze w innych 11 przypadkach. Lecz tylko wyżej wspomnianych 5 gatunków sześciann będzie oczywiście postaciami prostemi, inne będą kombinacyami.

Geometrycznie wszystkie te sześciany nie dadzą się odróżnić (wszystkie wykazują jedną i tęż samą syngonię). Lecz skoro uciekniemy się do symetryi ścian każdego z pięciu wyżej wspomnianych sześcianów, to zdołamy je z łatwością odróżnić. – Ściany sześcianu będą:

w $S(234)$ czterosymetryczne

$S(2'3'4')$ czteromierne (z centrum obrotu 4go porządku)

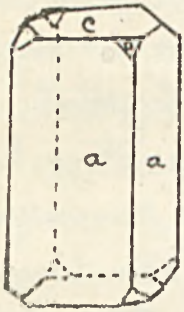
$S(2'34')$ dwusymetryczne względem boków

$S(233)$ —— " —— " —— przekątni

$S(2'3'3')$ dwumierne (z centrum obrotu 2go porządku).

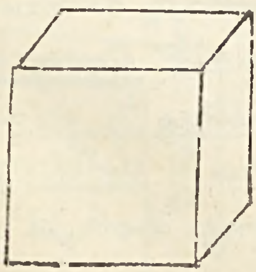
Tak więc tylko w przypadku pierwszym $S(234)$ symetrya geometryczna sześcianu odpowiada jego symetryi krystalograficznej, w pozostałych zaś czterech przypadkach jest niższą od geometrycznej. Przyczyna tej różnicy polega na tem, że kryształ nie jest li tylko bryłą geometryczną, lecz środowiskiem materyi stałej o właściwem mu swoistem rozmieszczeniu własności fizycznych, zależnem od prawa jednorodności. Każdą ścianę kryształu należy rozpatrywać jako płaszczyznę materyalną, której właściwości fizyczne bynajmniej nie zależą ani od rozległości ściany, ani od jej formy. Stąd całkowita charakterystyka ściany musi polegać na zbadaniu jej fizycznej natury.

Niekiedy możemy ją rozpoznać po pewnych cechach zewnętrznych, np. po kolorze, jak to się ma z kryształami



cyanku platyny i magnezu, których ściany najwidoczniej rozpadają się na 3 grupy: 1) cztery ściany <u>a</u> jaskrawo zielonego koloru o blasku metalowym tworzą same przez się słup kwadratowy; ośm ścian <u>o</u> ciemno-czerwonego koloru nawzajem się przecinając dadzą podwójną piramidę o podstawie kwadratowej, wreszcie 2 ściany <u>c</u> koloru ciemno-czerwonego matowego tworzą dwie równoległe płaszczyzny wierzchołkowe. W tym więc przypadku z łatwością odróżniamy ściany do jednej prostej postaci należące.

Ściany kostki pirytu dwusymetryczność swoją względem boków kwadratu wykazują wyraźnie przez prążki, które odrazu pozwalają zaliczyć kostki do typu S(2' 3 4').



Wszystkie ściany są jednak zbrożdżone jednakowo i widocznie posiadają jednakową naturę fizyczną, skutkiem czego zaliczyć je musimy do jednej i tejże samej postaci prostej.

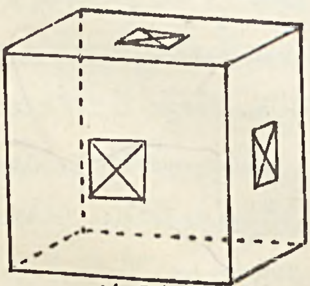
W większości jednak przypadków prosta obserwacja powierzchownych właściwości ścian nie jest dostateczną i, aby oznaczyć ich symetryę z całą pewnością, należy przedsięwziąć osobne badania, polegające przedewszystkiem na trawieniu ścian cieczami, które rozpuszczają w mniejszym lub większym stopniu substancyę kryształu.

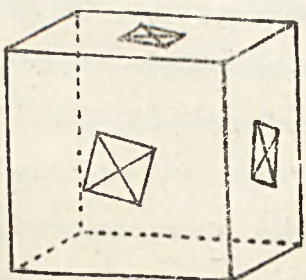
Z powyższego wynika, iż, badając symetryę kryształu, nie możemy poprzestawać li tylko na oznaczeniu jego własności geometrycznych, lecz zawsze winniśmy pamiętać o tem, że czysto geometryczna symetrya kryształu częstokroć przewyższa jego symetryę istotną, krystalograficzną.

Oznaczanie symetryi ścian za pomocą trawienia.

Najważniejsza metoda oznaczania symetryi polega na badaniu działania, jakie wywierają na kryształ ciecze lub gazy nagryzające jego ściany, krawędzie lub naroża. Na ścianach kryształu zwilżonego reagującą nań cieczą, przy zachowaniu pewnych ostrożności (rozcieńczenia odczynnika i czasu działania), powstają w rozmaitych kierunkach krystalograficznych rozmaite figury wytrawione, odznaczające się zawsze symetryą tej ściany, na której zostały wywołane. Są to t. zw. dołki i pagórki wytrawione, przybierające zwykle formę drobnych wklęsłych lub wypukłych piramidek.

Weźmy dla przykładu dwa ciała, krystalizujące się w sześcianach regularnych: sól kamienną (NaCl) i sylwin (KCl). Sześcian otoczony jest 6 jednoznacznymi kwadratami. Każdy kwadrat geometrycznie posiada po 2 pary linii symetryi, równoległych do boków i przekątnych (jest czterosymetryczny). - Obracany koło środka przecięcia się linii symetryi (centrum 4go porządku C_4) zleje się sam z sobą 4 razy (jest czteromierny). Związek pomiędzy elementami sześcianu i kwadratu jest oczywisty. Każda linia symetryi ściany kwadratowej kostki jest linią przecięcia się tej ściany z prostopadłą do niej pł. symetryi, a przez środek ściany przechodzi prostopadła do niej czterokrotna oś symetryi. Ażeby znaleźć istotną symetryę danego sześcianu, należy porównać symetryę otrzymanych na jego ścianach figur wytrawionych z symetryą geometryczną kwadratu i znaleźć elementy wspólne, których całokształt określi istotną symetryę kostki. Sól kamienna (NaCl) wytrawiona wodą pokryje się dołkami kwadratowymi, których symetrya niczem się nie różni od symetryi geometrycznej kwadratu.


NaCl

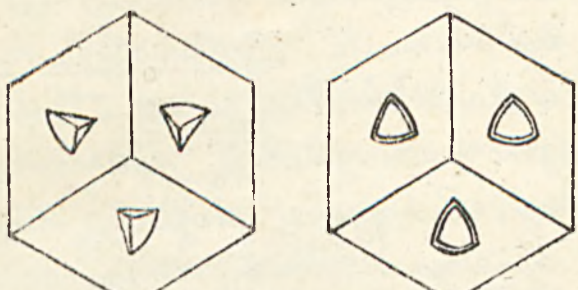

KCL

Stąd wnosimy, że sześciany soli kamiennej wykazują całkowitą symetryę sześcianu, t.j. mają 9 płaszczyzn symetryi, 13 osi symetryi oraz centrum symetryi.

Co innego jednak zauważymy na KCl. Skoro sześcian jego wystawimy na działanie wilgotnego powietrza, to również otrzymamy figury wytrawione kwadratowe, ale położenie ich względem ścian kwadratowych kryształu będzie odmienne. Będą one posiadały z temi ostatniemi tylko jeden wspólny pierwiastek symetryi, mianowicie środek symetryi 4go porządku (4-krotny). Ani jednej wspólnej pł. symetryi niepodobna przeprowadzić przez sześcian sylwinu i powstałe na jego ścianie figury wytrawione. Tylko 13 osi symetryi są im wspólne.

Drugą parę przykładów stanowią romboedry kalcytu ($CaCO_3$) i dolomitu ($MgCaC_2O_6$). Romboedr jest postacią, której symetrya geometryczna wykazuje trzykrotną oś symetryi, 3 prostopadłe do niej osi dwukrotne, 3 pł. symetryi prostopadłe do tych osi i do ścian romboedru. Pod wpływem kwasu solnego na kalcycie powstają figury zupełnie odpowiadające tej symetryi. Przeciwnie romboedry dolomitu odznaczają się niesymetrycznemi figurami wytrawienia oraz niekiedy ścięciami krawędzi, z czego wynika, że romboedry te posiadają tylko 1 oś trzykrotną oraz centrum symetryi.

Jakkolwiek romboedry kalcytu i dolomitu geometrycznie ujawniają jednakową symetryę, to jednak figury, wytrawione dowodzą, że krystalograficznie postaci tych minerałów należą do różnych gatunków symetryi.



$CaMgC_2O_6$ Dolomit $CaCO_3$ Kalcyt

Klasyfikacya kryształów.

<u>Klasy kryształów</u>. Powyżej na podstawie prawa symetryi i wymierności stosunków wyprowadziliśmy drogą czystej dedukcyi 32 możliwe gatunki symetryi krystalograficznej. Poznane dotychczas kryształy, zarówno ze świata minerałów, jak otrzymane w pracowni, zawsze odpowiadają jednemu z 32 wyprowadzonych gatunków symetryi. Zaledwie dla 3 gatunków symetryi: S(223), S(2'2'3) i S(2"2"4") nie znaleziono dotychczas niewątpliwych przykładów.

Zespół kryształów, należących do danego gatunku symetryi, nazwiemy <u>klasą</u>, czyli zasadniczą jednostką klasyfikacyjną, opartą na zasadzie symetryi. Te zasadnicze jednostki ładzą ę następnie skupiać w grupy, obejmujące po kilka klas pojedynczych. Zasady tego grupowania klas mogą być rozmaite. Systematyka racjonalna, przeprowadzająca konsekwentnie jedną i tąsamą zasadę, a więc w danym razie symetrye, mieści się na znanej już nam tablicy, obejmującej projekcye stereograficzną 32 gatunków symetryi. Każdy szereg poziomy charakteryzuje się kształtem trójkąta sferycznego pł. symetryi i obejmuje klasy: holosymetryczną, hemisymetryczną względnie tetartosymetryczną. Jedenaście szeregów poziomych odpowiada jedenastu typom systematycznym. Typy dadzą się zebrać w 4 gromady: sferoedryczną, bipiramidalną, piramidalną i domatyczną.

Układy krystalograficzne. W praktyce jednak utarła się oddawna systematyka klas formalna, nadająca się bardziej do obliczania kryształów i dzieląca klasy na t. zw. układy (systemy). Jak wiemy z poprzedniego, kryształ geometrycznie oznacza się pięcioma stałemi, a mianowicie stosunkiem jednostek osiowych $a:b:c\left(=\frac{a}{b}:1:\frac{c}{b}\right)$ oraz kątami przecięcia się osi krystalograficznych (α, β, γ), na których owe jednostki zostały odcięte. Charakterystyka ta, zależnie od symetryi kryształu może się jednak znacznie uprościć a to przez nadanie wymienionym pięciu danym znaczeń prostych.

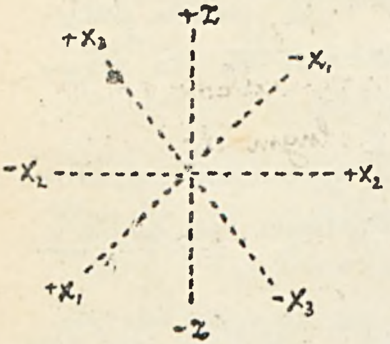
W stosunku jednostek osiowych uproszczenie polega na tem, że nietylko wyraz $\underline{b}$ lecz i $\underline{a}$, a nawet i $\underline{c}$ może przybrać znaczenie jednostki, w kątach zaś na tem, że przybierają one znaczenie stałe 90°, 60°, 45° i t. p.

Symetrja kryształów zezwala na pięć przypadków uproszczenia, które łącznie z przypadkiem ogólnym dają sześć układów krystalograficznych.

1. **Układ regularny (równoosiowy)**. Należy tu 5 klas: s(234), s(2'3'4'), s(2'34'), s(233), s(2'3'3'). Wszystkie one charakteryzują się obecnością 3 jednoznacznych nawzajem prostopadłych, 4 krotnych lub 2-krotnych osi symetrji, które wybieramy za osi krystalograficzne. Kąty więc pomiędzy osiami ($\alpha = \beta = \gamma = 90°$) są tu sobie równe i proste. Jednostki osiowe również są sobie równe, gdyż stanowią odcinki jednoznacznych kierunków. Klasy, należące do układu równoosiowego, cechuje nadto obecność 4 trzykrotnych osi symetrji.

2. **Układ heksagonalny** obejmuje klasy z 1 sześciokrotną lub 1 trzykrotną osią symetrji. Oś tę obieramy za oś krystalograficzną $\underline{z}$ (pionową). Jednostkę osiową na niej znaczymy przez $\underline{c}$. Zgodnie z symetrją należących tutaj klas, oprócz osi pionowej przyjmujemy jeszcze 3 prostopadłe do niej osi poziome, których kierunki dodatnie tworzą między sobą kąty 120°,

a które oznaczymy przez x_1, x_2, x_3. Te trzy osi poziome o jednostce osiowej <u>a</u> nazywamy osiami <u>pobocznemi</u>, oś zaś do nich pionową zowiemy <u>główną</u>.



Mamy tu więc kąty: $\gamma = 120$, $\beta = \alpha = 90°$, stosunki zaś osiowe $a = b, c$. Ponieważ przyjmujemy tu 4 osi, to i symbole ścian będą się składały z czterech wskaźników, o czem później.

Do układu tego należą klasy kryształów o symbolach symetryi: s(226), s(2'2'6'), s(2'2'6), s(2'26'), s(2''2''6''), s(223), s(2'2'3'), s(2'2'3), s(6), s(6'), s(3) i s(3').

3. <u>Układ tetragonalny</u> składa się z klas: s(224), s(2'2'4'), s(2'2'4), s(2'24'), s(2''2''4''), s(4) i s(4').

Klasy te posiadają zawsze albo 1 czterokrotną albo 1 dwukrotną oś symetryi. Do tej osi zawsze dadzą się znaleźć 2 prostopadłe jednoznaczne kierunki. Oś pierwsza pionowa zwie się i tutaj <u>główną</u>. W niej przecinają się 4 pł. symetryi realne lub urojone. Oznaczamy ją przez <u>z</u>, a jednostkę osiową na niej przez <u>c</u>. Dwie inne osi (x, y) do niej prostopadłe (poziome) nazwiemy znów <u>pobocznemi</u>. Są one jednoznaczne, i stąd jednostki osiowe na nich odcięte są sobie równe. Mamy więc tutaj: $\gamma = \beta = \alpha = 90°$; $a = b, c$.

4. <u>Układ rombowy</u> obejmuje tylko 3 klasy: $S(222)$, $S(2'2'2')$ i $S(2)$. Odpowiednio do symetryi wyróżniają go 3 nawzajem prostopadłe osi krystalograficzne niejednoznaczne: x, y, z. Za osi te możemy wybrać trzy nawzajem prostopadłe dwukrotne osi symetryi w klasach $S(222)$ i $S(2'2'2')$, w klasie zaś $S(2)$ za oś <u>z</u> jedną dwukrotną, za osi zaś <u>x</u> i <u>y</u> dwa do niej prostopadłe kierunki, leżące w płaszczyznach symetryi tej klasy. A więc: $\alpha = \beta = \gamma = 90°$; a, b, c. niezależne

5. <u>Układ jednoskośny</u> skupia w sobie klasy: $S(2'22)$, $S(2')$ i $S(1)$. Jedna oś krystalograficzna <u>y</u> zlewa się z osią dwukrotną w klasach $S(2'2'2)$ i $S(2')$ i biegnie prostopadle do pł. symetryi w klasie $S(1)$. Dwie inne osi <u>x</u> i <u>z</u> wybieramy w pł. prostopadłej do osi <u>y</u>, a kąt β pomiędzy niemi jest dowolny. Jednostki osiowe także od siebie niezależne. W układzie jednoskośnym mamy zatem następujące uproszczenia: $\alpha = \gamma = 90°$; β; zmienny trzeba go znaleźć a, b, c.

6. <u>Układ trójskośny</u> składa się z 2 klas: $S(2''2''2'')$ i $S(1')$. Tutaj wszystkie wielkości określające czworościan zasadniczy są od siebie niezależne tak, iż stałe krystalograficzne są zupełnie od siebie niezależne i kąty również zmienne, gdyż są niezależne mają postać najogólniejszą t.j. α, β, γ; a, b, c.

Oprócz dążności do uproszczenia stosunku osi krystalograficznych należy jeszcze przy wyborze tego lub innego układu mieć także na uwadze, ażeby jednoznaczne ściany postaci prostych otrzymały jednakowe symbole i wskaźniki, różniące się tylko następstwem i znakiem. W tetraedrze regularnym moglibyśmy np. wybrać osi tak (przyjmując za nie jego 3 krawędzie), że ściany jego otrzymałyby symbole (100), (010), (001) i (111). Nie odpowiadałoby to jednak jednoznaczności tych ścian. Stąd musimy za osi krystalograficzne wybrać dwukrotne osi symetrii, a wówczas ściany tetraedru otrzymują znaki (111), $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(1\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}1\bar{1})$ - zgodnie z ich jednoznacznością.

Każdy z 6 układów mieści po kilka klas kryształów, podzielonych na grupy: holoedryczną, hemiedryczną, tetraedryczną, a nawet ogdoedryczną.

Podział na układy polega zatem na zasadzie uproszczenia stosunku osi krystalograficznych zależnie od symetrii. Zasada ta, jako czysto metodologiczna, nie ma trwałych podstaw. Wynika to już z tego, że zasada doprowadziła w swoim czasie do wyodrębnienia osobnego układu dwuskośnego ($\alpha = 90°, \beta, \gamma$; a, b, c), który miał zapełnić lukę pomiędzy układem jednoskośnym a trójskośnym. Układ ten jednak pozostaje w sprzeczności z symetrią kryształów, chociaż

możliwy jest z punktu widzenia zasady uproszczenia.
Sztuczność podziału na układy wynika i stąd, że niektórzy autorowie z układu heksagonalnego wyodrębniają klasy o 3-krotnej osi symetryi i tworzą z nich osobny układ trygonalny. Autorowie zaś, nie uznający samodzielności układu trygonalnego, zmuszeni są do przyjęcia ogdoedryi, nieprzewidywanej przez prawo symetryi.
Pomimo to jednak podział na układy ze względu na dogodności przy obliczaniu, tudzież ze względu na bardzo dawny i zakorzeniony zwyczaj, jest do dziś dnia ogólnie używany.

<u>Układy i klasy.</u> W następującem zestawieniu podane są układy wraz z wchodzącemi w ich skład klasami. Nazwy klas pochodzą od nazw charakterystycznych postaci ogólnych (według Grotha).

I. <u>Układ osi regularny.</u>

1. $S(234)$ kl. 48-ścianu (heksakisoktaedru). 9 płaszczyzn symetryi 3 równo[illegible] do ścian kryształu (34) 6 P. [illegible]
2. $S(2'3'4')$ kl. 24-ścianu pentagonalnego (pentagon-ikositetraedru).
3. $S(2'34')$ kl. 12-ścianu podwójnego (dyakisdodekaedru).
4. $S(233)$ kl. 4-ścianu pozióstnego (heksakistetraedru).
5. $S(2'3'3')$ kl. 12-ścianu tetraedryczno-pentagonalnego.

II. <u>Układ osi heksagonalny.</u>

a. <u>Oddział heksagonalny</u> (L^6)

6. $S(226)$ kl. bipiramidy 12-graniastej (dyheksagonalnej).

7. S(2'2'6') kl. trapezoedru heksagonalnego
8. S(2'2'6) kl. bipiramidy heksagonalnej (6-graniastej).
9. S(6) kl. piramidy dyheksagonalnej.
10. S(6') kl. piramidy heksagonalnej.

B. Oddział trygonalny (L^3).

11. S(2'2'6') kl. skalenoedru dytrygonalnego.
12. S(2"2"6") kl. romboedryczna.
13. S(223) kl. bipiramidy dytrygonalnej.
14. S(2'2'3') kl. trapezoedru trygonalnego.
15. S(2'2'3) kl. bipiramidy trygonalnej.
16. S(3) kl. piramidy dytrygonalnej.
17. S(3') kl. piramidy trygonalnej.

III. Układ osi tetragonalny.

18. S(224) kl. bipiramidy dytetragonalnej.
19. S(2'2'4') kl. trapezoedru tetragonalnego.
20. S(2'2'4) kl. bipiramidy tetragonalnej.
21. S(2'24') kl. skalenoedru tetragonalnego.
22. S(2"2"4") kl. bisfenoidu tetragonalnego.
23. S(4) kl. piramidy dytetragonalnej.
24. S(4') kl. piramidy tetragonalnej.

IV. Układ osi rombowy.

25. S(222) kl. bipiramidy rombowej.
26. S(2'2'2') kl. bisfenoidu rombowego.
27. S(2) kl. piramidy rombowej.

V. Układ osi jednoskośny (monokliniczny).

28. $s(2'2'2)$ kl. pryzmatyczna.
29. $s(1)$ kl. domatyczna.
30. $s(2')$ kl. sfenoidalna.

VI. Układ osi trójskośny (trykliniczny).

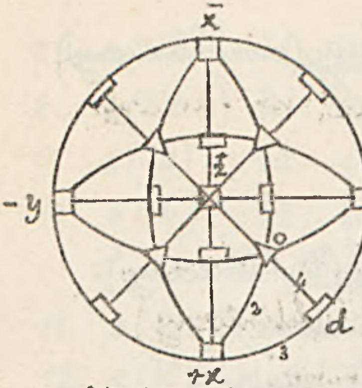
31. $s(2''2''2'')$ kl. pinakoidalna (dwuścianowa)
32. $s(1')$ kl. pedyonalna (asymetryczna).

W następstwie rozpatrzymy bliżej tylko te klasy kryształów, które szczególniejszą posiadają wagę dla mineralogii. Wykład nasz prowadzić będziemy za pomocą modeli, rysunki perspektywiczne będą więc w notatkach niniejszych pominięte.

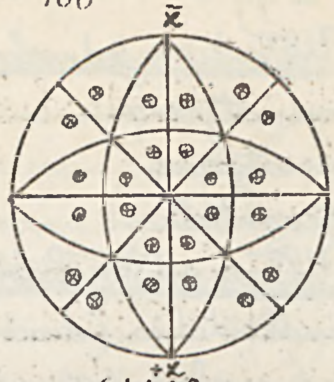
I Układ osi regularny.

1. Klasa 48-ścianu (heksakisoktoedryczna).

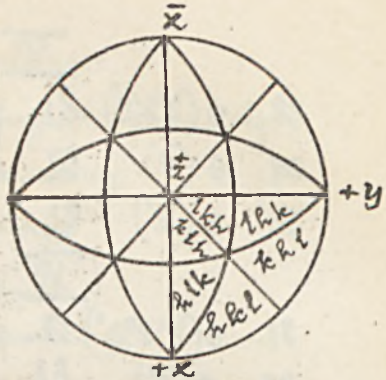
Trójkąt pł. symetryi $s(234)$ powtórzy się na kuli 48 razy, skutkiem czego powstanie 9 pł. symetryi zwykłej, przecinających się w 13 osiach symetryi: 3 czterokrotnych, 4 trzykrotnych i 6 dwukrotnych. Osi te są dwubiegunowe. Na skutek 3 prostopadłych płaszczyzn symetryi obecny jest środek (centrum) symetryi. Za osi krystalograficzne służą 3 czterokrotne osi symetryi:



$3\pi, 6P; 3L^4, 4L^3, 6L^2, C$



$\{hkl\}$



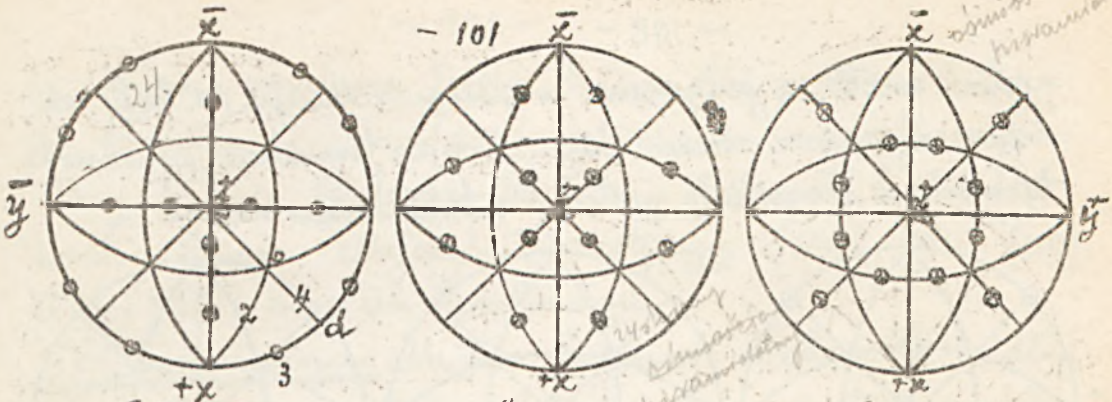
wskaźniki oktantu $+x, +y, +z$

Postacią ogólną jest 48-ścian $\{hkl\}$. Zgodnie z poprzedzającem biegun 48-ścianu leży wewnątrz trójkąta pt. symetryi. Jeżeli biegun pierwotny umieszczać będziemy kolejno na bokach i wierzchołkach trójkąta, otrzymamy następujących sześć postaci szczegółowych.

Biegun, umieszczony na boku xd, powtórzy się 24 razy i da 24-ścian, zwany <u>sześcianem piramidalnym</u> (tetrakisheksaedr) $\{hko\}$, którego ściany będą jednosymetryczne względem boku trójkąta <u>3</u>.

Skoro biegun początkowy umieścimy na boku xO trójkąta pt. symetryi, to otrzymamy również 24-ścian, którego ściany będą jednosymetryczne względem boku trójkąta <u>2</u>, a który zwie się 24-ścianem deltoidowym (ikositetraedrem) i ma symbol ogólny $\{hkk\}$ (rys. na str. 101).

Wreszcie, jeżeli biegun początkowy umieścimy na boku Od trójkąta pt. symetryi, to otrzymamy trzeci 24-ścian, zwany ośmiościanem piramidalnym (tetrakisoktaedr)

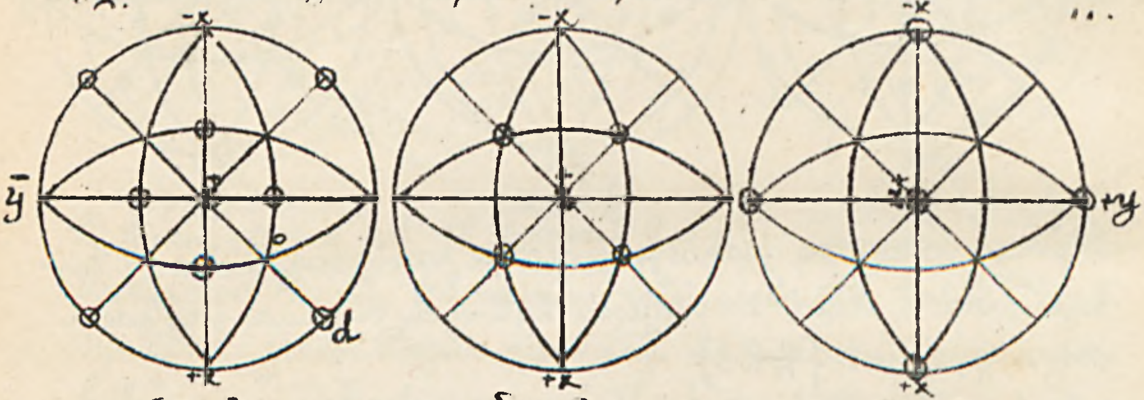


$\{hko\}$ $\{hkk\}$ $\{hhl\}$

którego ściany są jednosymetryczne względem boku 4 trójkąta, jak to widać z odległości kątowych bieguna względem osi x, y, z jest $\{hhl\}$.

Zarówno 48-ścian, jak wyprowadzone tylko co trzy 24-ściany, odznaczają się zmiennością kątów pomiędzy ścianami i symboli zależnie od położenia bieguna wewnątrz trójkąta, względnie na jego bokach.

Ażeby otrzymać dalsze możliwe w tej klasie postaci szczegółowe, umieśćmy biegun pierwotny kolejno na wierzchołkach trójkąta xym. Skoro go umieścimy na wierzchołku d, otrzymamy 12-ścian rombowy $\{110\}$ o ścianach dwusymetrycznych; umieszczony na wierzchołku o da nam ośmiościan $\{111\}$ o ścianach trójsymetrycznych; wreszcie wyznaczając mu miejsca w wierzchołku x trójkąta, otrzymamy sześcian $\{100\}$, którego ściany są czterosymetryczne. Ponieważ położenie bieguna na wierzchołku trójkąta pł. symetryi jest stałe, więc i otrzymane trzy postaci proste są jedynemi w swoim rodzaju, a kąty ich ścian są zawsze niezmienne, a co za tem idzie, wskaźniki tych ścian i symbole postaci są także niezmienne.



{110} {111} {100}

Umówmy się nazywać ściany, które przecinają wszystkie 3 osi – piramidalnemi; ściany, które biegną równolegle do jednej osi nazwijmy pryzmatycznemi; wreszcie ścianom, które są równoległe do 2 osi dajmy miano ścian podstawowych (wierzchołkowych, pinakoidalnych).

Rozpoznane postaci proste zestawimy w następującej tabelce.

Nazwa	Symbol	Symetrya ścian	Typ ściany
1. 48-ścian	{hkl}	Asymetryczn.	piramidalny
2. 24-ścian deltoidowy	{hkk}	jedno symetr.	— " —
3. 8-ścian piramidalny	{hhl}	— " —	— " —
4. 6-ścian piramidalny	{hk0}	— " —	pryzmatyczny
5. 12-ścian rombowy	{110}	dwu symetr.	— " —

6. 8-ścian regularny $\{111\}$ trójsymetr. – piramidalny
7. 6-ścian $\{100\}$ czterosymetr. – podstawowy

Przykłady: <u>Galena</u> PbS ma doskonałą łupliwość według $\{100\}$. Najczęściej występuje: $\{100\}$, $\{111\}$, $\{110\}$, $\{211\}$ i $\{221\}$ oraz ich kombinacye.

<u>Sól kamienna</u> $NaCl$. Łupliwość doskonała według $\{100\}$. Występuje stale w $\{100\}$. Inne postaci należą do rzadkości. Sztucznie można je otrzymać przez dodanie do roztworu rozmaitych chlorków metalicznych.

<u>Flusspat</u> (Fluoryt) CaF_2 doskonale łupliwy według $\{111\}$. Najczęściej tworzy $\{100\}$. Samodzielnie występuje także $\{111\}$. W kombinacyach prócz postaci wymienionych biorą jeszcze udział: $\{110\}$, $\{310\}$, $\{211\}$, $\{331\}$, $\{421\}$.

<u>Magnetyt</u> Fe_3O_4. Najczęściej $\{111\}$, także $\{110\}$, którego ściany zrysowane są równolegle do dłuższej przekątni.

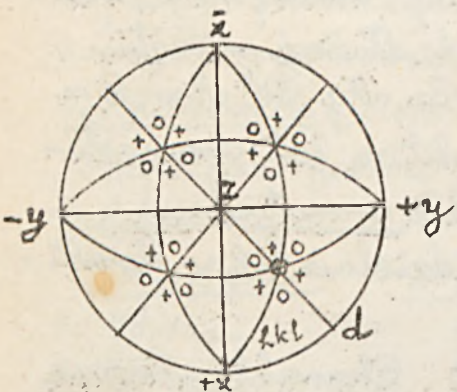
<u>Granat</u> $Me_3R_2Si_3O_{12}$ ($Me = Ca, Mg, Fe^{II}, Mn$; $R = Fe^{III}, Al, Cr$). Postacią najpospolitszą jest dwunastościan rombowy $\{110\}$, zwany także <u>granatoedrem</u>. Często też zdarza się $\{211\}$ samodzielnie lub w kombinacyi z $\{110\}$ a także z $\{321\}$.

<u>Analcym</u> $Na_2Al_2Si_4O_{12} \cdot 2H_2O$. Charakterystyczną postacią jest 24-ścian deltoidowy.

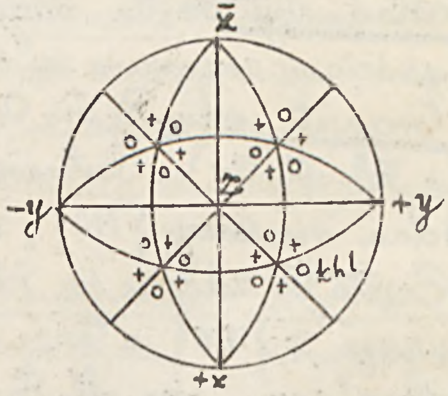
Wreszcie wymienić tu należy kryształy <u>spinelu</u> ($Mg(Fe)Al_2O_4$); należą tu także ałuny: $K_2SO_4 \cdot Al_2(SO_4)_3 \cdot 24H_2O$

2. <u>Klasa 24-ścianu pentagonalnego : $S(2'3'4')$</u>.

W klasie tej 9 płaszczyzn symetryi traci znaczenie elementów realnych i staje się urojonemi płaszczyznami symetryi dwoistej. Realne znaczenie posiada tylko 13 osi symetryi: 3 czterokrotne, 4 trzykrotne i 6 dwukrotnych. Osi krystalograficzne zlewają się z 3 osiami 4-krotnemi. Postać ogólna - 24-ścian pentagonalny, otoczony nieprawidłowymi 5-ciobokami. Może on być dwojakiego rodzaju, zależnie od tego, czy biegun początkowy umieścimy w lewym (xod) trójkącie oktantu dodatniego xyz, czy też w prawym (doy). W pierwszym przypadku otrzymamy lewy 24-ścian pentagonalny $\{hkl\}$, w drugim prawy $\{khl\}$. Te dwa 24-ściany



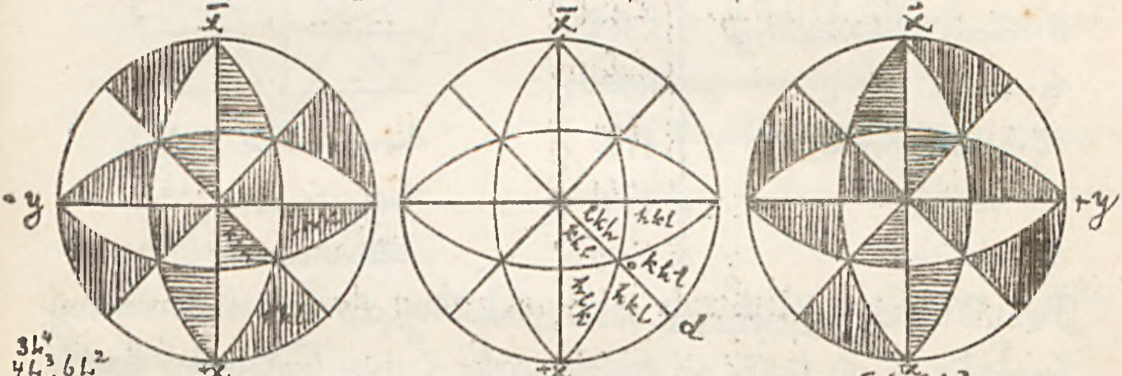
lewy $\{hkl\}$



prawy $\{khl\}$

nazywamy nawzajem sobie odpowiadającymi, czyli <u>odpowiednimi</u>. Mają one tę szczególną własność, że jakkolwiek symetrycznie są sobie równe, to jednak zlać się ze sobą nie mogą, nie są nawzajem kongruentne. Dwie takie postaci nazwano enantiomorficznemi. Ściany tych postaci mają położenie naprzemianległych ścian 48-ścianu klasy poprzedniej, z którego je dawniej wyprowadzano hemiedrycznie.

Ponieważ boki trójkąta symetrii nie mają w tej klasie znaczenia płaszczyzn realnych, przeto postaci, których



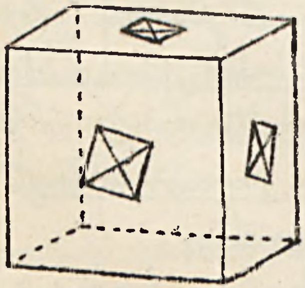
lewy {hkl} 24 śc. pentag. | 48-ścian | prawy {khl} 24 śc. pentag.

bieguny na bokach tych leżą, nie są tu formami szczegółowemi, lecz szczególnymi przypadkami postaci ogólnej, mającymi z nią jednakową liczbę asymetrycznych (krystalograficznie) ścian. Postaci te są: sześcian piramidalny o biegunie na boku xd, 24-ścian deltoidowy o biegunie na boku xo oraz ośmiościan piramidalny o biegunie na boku do trójkąta symetrii.

Postaciami poszczególnemi będą: dwunastościan rombowy (biegun w d), ośmiościan (biegun w o) i sześcian (biegun w x). Postaci te będą się jednak różniły od opisanych w klasie poprzedniej symetrją swych ścian.

Postać	Symbol	Symetrja ścian
24-ścian pentag. lewy	{h k l}	asymetryczna
— " — prawy	{k h l}	— " —
— " — deltoidowy	{h k k}	— " —
8-ścian piramidalny	{h h l}	— " —
6-ścian — " —	{h k 0}	— " —
12-ścian romb.	{110}	dwumierne (C_2)
8-ścian	{111}	trójmierne (C_3)
6-ścian	{100}	czteromierne (C_4)

Przykład: Sylwin KCl, podobny do soli kamiennej, krystalizuje się także w sześcianach i ma łupliwość kostkową. Atoli powietrze wilgotne wytrawia na nim dołki o zarysie kwadratowym, których boki odchylone są o 15° na prawo względem krawędzi sześcianu. Stąd widać,



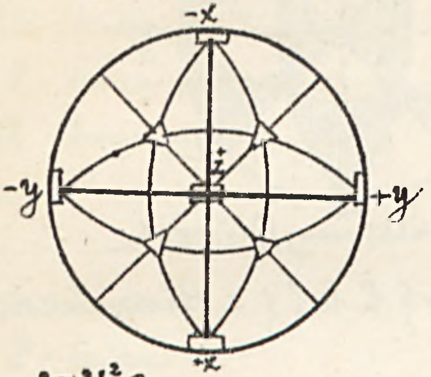
że ściany sześcianu, zarówno jak figury wytrawione mają tylko czterokrotną oś symetryi.

Należy tu także kupryt Cu_2O i salmiak NH_4Cl.

3. Klasa 12-ścianu podwójnego (dyakisdodekaedryczna)

$s(2'3 4')$.

Trójkąt symetryi $s(2'3 4')$, powtarzając się na kuli, da 3 płaszczyzny względem siebie prostopadłe odbicia prostego,



$3\pi, 3L^2, C$

oraz 6 płaszczyzn odbicia dwoistego (urojonych). Pierwsze przecinają się w 3 dwukrotnych osiach symetryi, drugie - w 4 trzykrotnych osiach dwubiegunowych.

Osi krystalograficzne odpowiadają 3 dwukrotnym osiom symetryi.

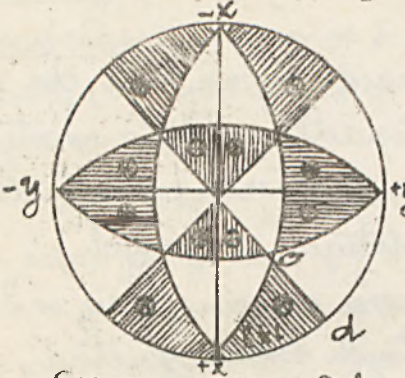
Postacią ogólną jest 12-ścian podwójny, otoczony 24 trapezami.

Możliwe są 2 takie 24-ściany: prawy $\{khl\}$ z biegunem początkowym wewnątrz prawego trójkąta $(do y)$ w oktancie dodatnim $(+x, +y, +z)$ oraz lewy $\{hkl\}$ - z biegunem początkowym wewnątrz lewego trójkąta $(x o d)$ w tymże oktancie.

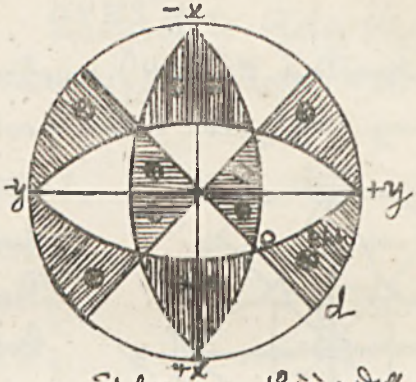
Te 2 postaci odpowiednie są nawzajem kongruentne przez obrót około linii, przechodzącej przez bieguny osi dwukrotnej (z) o 90°.

Szczególnemi postaciami 12-ścianu podwójnego będą tu:

24-ścian deltoidowy {hkk} z biegunem na boku



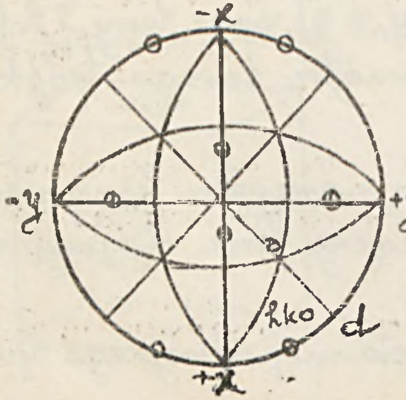
{hkl} lewy 12 ścian podst.

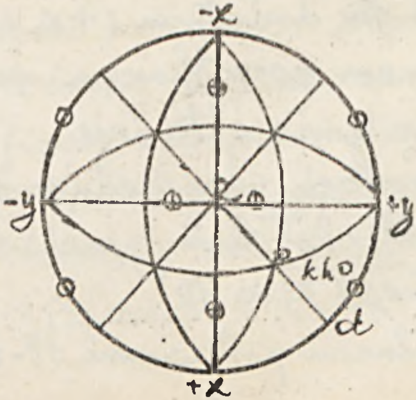


{khl} prawy 12 ść. podst.

xo i ośmiościan piramidalny {hhl} z biegunem na boku do.

Postaci szczególowe: dwunastościan pentagonalny (pięciokątny) prawy {kho} z biegunem początkowym na łuku dy i lewy {hko} z biegunem początkowym na łuku xd; ośmiościan {111} z biegunem w x. Szczególną postacią 12-ścianu pentagonalnego jest 12-ścian rombowy {110} z biegunem w d.





Mamy więc w tej klasie postaci następujące:

Nazwa	Symbol	Symetrya ścian
12-ścian podwójny lewy	{hkl}	asymetryczne
—"—"— prawy	{khl}	—"—
24-ścian deltoidowy	{hkk}	—"—
8-ścian piramidalny	{hhl}	—"—
12-ścian pentag. lewy	{hk0}	jednosymetryczne
—"— " — prawy	{kh0}	—"—
—"— rombowy	{110}	—"—
6-ścian	{100}	dwusymetryczne
8-ścian	{111}	trójmierne (C_3)

Przykład. Wybitnym przykładem tej klasy jest piryt (FeS_2). Najpospoliciej występuje w postaci {100} pojedynczej i skombinowanej. Na 5603 kryształów z Elby i Piemontu - Strüver znalazł tylko 64 takich, na których nie było sześcianu. Ośmiościan zdarza się niezbyt często. Rzadkim jest dwunastościan {110}. Pospolitą natomiast postacią jest 12-ścian pentagonalny {210}, zwłaszcza w kombinacyi z {100} lub z {111} i {321}. Strüver znalazł go na 4613 kryształach. Z 12-ścianów podwójnych najpospolitszym jest {321}, lecz zdarza się on tylko w kombinacyach.

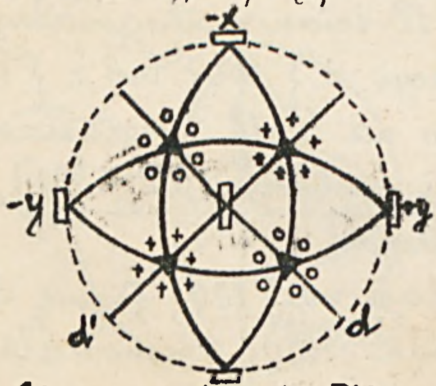
Trawienie wódką królewską daje na {100} figurę dwusymetryczną. Prążkowanie ścian {100} równolegle do jednej tylko pary boków kwadratu dowodzi także przynależności pirytu do klasy $s(2'34')$.

4. Klasa czworościanu poszóstnego $s(233)$ (heksakistetraedryczna).

Klasę tę cechuje sześć płaszczyzn symetrii prostej, które się przecinają w 7 osiach symetrii: 3 dwukrotnych dwubiegunowych i 4 trójkrotnych jednobiegunowych (polarnych). Osi krystalograficzne zlewają się z 3 osiami dwukrotnemi.

Postacią ogólną jest 24-ścian zwany czworościanem poszóstnym czyli heksakistetraedrem. Może on być dwojakiego rodzaju: dodatni $\{hkl\}$ i ujemny $\{h\bar{k}l\}$. Postaci te są nawzajem symetryczne i równe (zlewają się przez obrót koło osi 2 krotnej o 90°). Fizycznie różnią się one bardzo dzięki obecności jednobiegunowych osi trzykrotnych (hemimorfizm).

Szczególnym przypadkiem postaci ogólnej jest sześcian piramidalny $\{hk0\}$ z biegunem na łuku xd.



$\{hkl\}$ $\{h\bar{k}l\}$

$6P, 3L^2, 4L^3$

Szczegółowemi postaciami tej klasy są dwunastościany: t.zw. trójczworościan (triakistetraedr) i dwunastościan deltoidowy. A jeden i drugi może być dodatni $\{hkk\}$, względnie $\{hhl\}$ i ujemny $\{h\bar{k}k\}$ względnie $\{h\bar{h}l\}$.

Początkowe bieguny ich leżą na xo, względnie na xo', tudzież na od, względnie na $o'd'$. Szczególną formą 12-ścianu deltoidowego jest 12-ścian rombowy z biegunem w d. Typową postacią tej klasy jest czworościan z biegunem w o. Tu odróżniamy również formę czworościanu dodatnią $\{111\}$ i ujemną $\{1\bar{1}1\}$. Wreszcie biegun umieszczony w x da sześcian. Mamy więc tu następujące postaci:

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Heksakistetraedr dodat.	$\{hkl\}$	asymetryczne
—— " —— ujemny	$\{h\bar{k}l\}$	—— " ——
Sześcian piramidalny	$\{hk0\}$	—— " ——
Trójczworościan dodatni	$\{hkk\}$	jednosymetryczne
—— " —— ujemny	$\{h\bar{k}k\}$	—— " ——
12-ścian deltoidowy dod.	$\{hhl\}$	—— " ——
—— " —— ujemny	$\{h\bar{h}l\}$	—— " ——
12-ścian rombowy	$\{110\}$	—— " ——
Sześcian	$\{100\}$	dwusymetryczne
Czworościan dodatni	$\{111\}$	trójsymetryczne
—— " —— ujemny	$\{1\bar{1}1\}$	—— " ——

Przykłady. Blenda cynkowa (ZnS), doskonale łupliwa według $\{110\}$. Do postaci najpospolitszych nale-

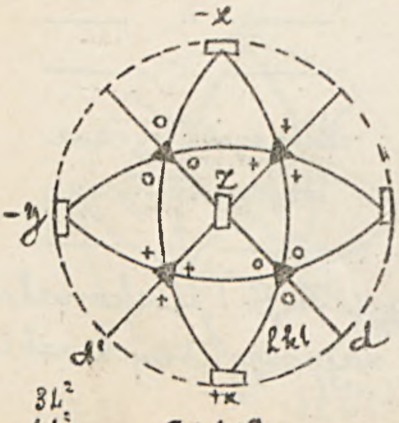
$\{110\}$, $\{100\}$, prawie zawsze obecny czworościan dodatni $\{111\}$, czworościan ujemny $\{1\bar{1}1\}$, trójczworościan dodatni $\{311\}$ i trójczworościan ujemny $\{3\bar{1}1\}$. Odmienne własności fizyczne obu czworościanów zaznaczone są przez odmienne właściwości powierzchniowe ich ścian (prążkowanie). Pagórki wytrawione na $\{110\}$ są wyraźnie jednosymetryczne.

Tetraedryt $(Cu_2, Fe, Zn)_4 (As\, Sb)_2 S_7$. Czworościan zawsze dominuje, stąd nazwa. Kombinacye pospolite: $\{111\}$, $\{211\}$ lub $\{111\}$, $\{211\}$, $\{110\}$.

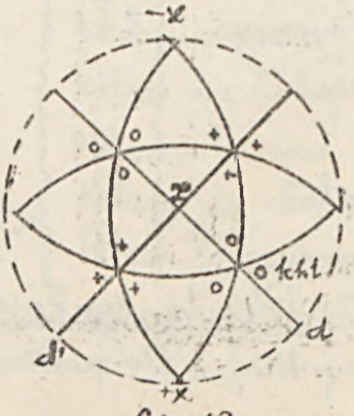
Należą tu również Boracyt $(Mg_7 B_{16} O_{30} Cl_2)$ i dyament (C_n) odznaczający się dokładną łupliwością według $\{111\}$.

5. Klasa 12-ścianu tetraedryczno-pentagonalnego: $\frac{1}{2}(2'3'3')$.

Płaszczyzny symetryi klasy poprzedzającej stają się tu urojonemi płaszczyznami odbić dwoistych, lecz 7 osi zachowuje znaczenie realne. Osi krystalograficzne również

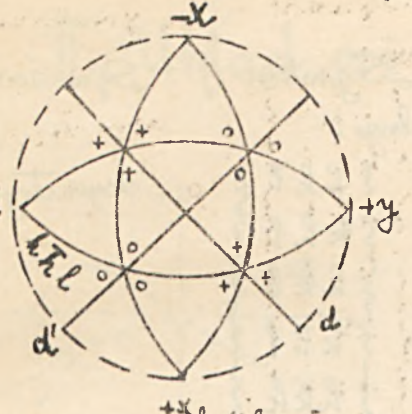


$\{hkl\}$



$\{khl\}$

$\{hk\bar{l}\}$



Ogólną postacią jest 12-ścian tetraedryczno-pentagonalny z biegunami wewnątrz trójkątów symetryi. Zależnie od położenia bieguna początkowego odróżniamy 4 jego rodzaje: 1) dodatni lewy $\{hkl\}$ z biegunem w trójkącie xod, 2) dodatni prawy $\{khl\}$ z biegunem w trójkącie doy, 3) ujemny lewy $\{h\bar{k}l\}$ z biegunem w trójkącie xod' i 4) ujemny prawy $\{k\bar{h}l\}$ z biegunem w trójkącie $d'o\bar{y}$. Projekcye tych czterech 12-ścianów odpowiednich podano wyżej.

Postać ogólna tej klasy posiada nadto cztery przypadki szczególne, a mianowicie: 1) trójczworościan dodatni i ujemny (jak w klasie poprzedzającej), 2) dodatni i ujemny 12-ścian deltoidowy, 3) prawy i lewy 12-ścian pentagonalny i 4) 12-ścian rombowy – wszystkie geometrycznie podobne do postaci rozpatrzonych w klasach poprzedzających.

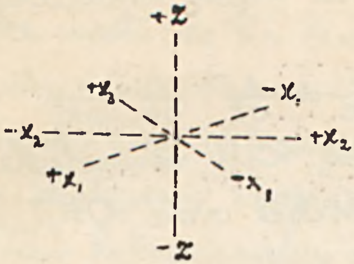
Postaciami szczególnemi są: sześcian i czworościan dodatni i ujemny.

Na ogół więc do klasy tej należą następujące formy:

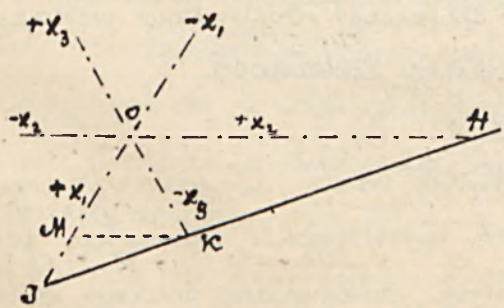
Nazwa	Symbol	Sym. ścian.
12-ścian tetraedryczno-pentagonalny:		
——— " ——— dodatni lewy	{hkl}	asymetryczne
——— " ——— prawy	{khl}	"
——— " ——— ujemny lewy	{h$\bar{k}$l}	"
——— " ——— prawy	{k$\bar{h}$l}	"
Trójczworościan dodatni	{hkk}	"
——— " ——— ujemny	{h$\bar{k}$k}	"
12-ścian deltoid. dodatni	{hhl}	"
——— " ——— ujemny	{h$\bar{h}$l}	"
12-ścian pentagonalny lewy	{hko}	"
——— " ——— prawy	{kho}	"
12-ścian rombowy	{110}	"
Sześcian	{100}	C_2
Czworościan dodatni	{111}	C_3
——— " ——— ujemny	{1$\bar{1}$1}	"

Przykłady. W świecie minerałów przykłady nie znane. Znane są jednak liczne sole, otrzymywane sztucznie w pracowniach, do tej klasy należące: chloran sodowy ($NaClO_3$), na którym występuje jednocześnie 12-ścian pentagonalny i czworościan, dalej saletry: barowa, strontowa, ołowiana: $Ba(NO_3)_2$, $Sr(NO_3)_2$, $Pb(NO_3)_2$.

II. Układ osi heksagonalny.



W układzie tym skupiamy klasy o jednej 6-krotnej i jednej 3-krotnej osi symetryi, które obieramy za pionową oś krystalograficzną $\underline{z}$. Trzykrotna oś symetryi pozwala na wybranie co 120° jeszcze trzech osi krystalograficznych, prostopadłych do osi pionowej. Wobec tego i symbole ścian kryształów heksagonalnych otrzymają cztery wskaźniki, z których wszakże tylko trzy są od siebie niezależne, czwarty zaś wskaźnik, odnoszący się do jednej z osi $\underline{x}$ daje się wyprowadzić z dwóch drugich osi $\underline{x}$ sposobem następującym.



Niechaj x_1 x_2 x_3 będą osiami układu heksagonalnego, wychodzącemi ze wspólnego punktu O, i niechaj JKH będzie prostą, w której jakakolwiek ściana przecina płaszczyznę osi $x_1 x_2 x_3$. Ponieważ osi te są jednoznaczne, więc i jednostki osiowe na nich będą sobie równe. Oznaczmy je przez <u>a</u>. Wówczas wskaźniki tej ściany i, h, k na trzech wskazanych osiach wykażą stosunek:

$$i : h : k = \frac{a}{OJ} : \frac{a}{OH} : \frac{a}{OK} = \frac{1}{OJ} : \frac{1}{OH} : \frac{1}{OK}$$

Skoro z <u>K</u> poprowadzimy prostą KM równolegle do OH, otrzymamy dwa trójkąty MKJ oraz OHJ, z których podobieństwa wynika, że

$$\frac{MK}{OH} = \frac{JM}{OJ} = \frac{OJ - OM}{OJ}$$

Podstawiając zamiast MK i OM równe im OK, otrzymamy:

$$\frac{OK}{OH} = \frac{OJ - OK}{OJ} \quad \text{czyli}$$

$$\frac{OK}{OH} = \frac{OJ}{OJ} - \frac{OK}{OJ}, \quad \text{inaczej}$$

$$\frac{OK}{OH} + \frac{OK}{OJ} = \frac{OJ}{OJ}.$$

Mnożąc mianowniki przez OK, otrzymamy

$$\frac{OK}{OH.\,OK} + \frac{OK}{OJ.\,OK} = \frac{OJ}{OJ.\,OK} \quad \text{czyli}$$

$$\frac{1}{OJ} + \frac{1}{OH} = \frac{1}{OK}$$

Wreszcie podstawiając zamiast odcinków wskaźniki, dochodzimy do poszukiwanej zależności:

$$i + h = k$$

Widzimy więc, że wskaźnik trzeci, wprowadzany dla symetryi jest sumą dwóch pierwszych. Pamiętać jednak należy, że jest on ujemny, albowiem ściana JH prze-

cina oś x_3 w końcu ujemnym.
Rzecz prosta, że ten czwarty wskaźnik dodajemy tylko dla symetrji i jednostajności znakowania ścian postaci heksagonalnych. Przy obliczaniu kryształu pomijamy go zupełnie i poprzestajemy zawsze na trzech tylko wskaźnikach.
Układ heksagonalny podzielimy na dwie gromady. pierwsza obejmie klasy z 1 osią sześciokrotną, druga - klasy z 1 osią trzykrotną.

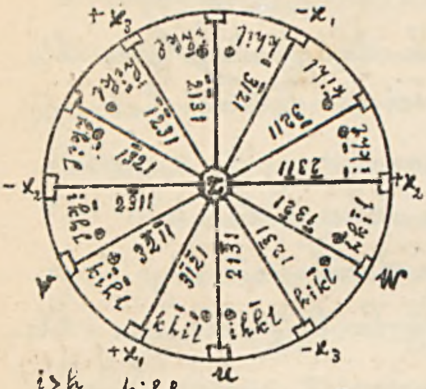
a) <u>Kryształy heksagonalne z 6-krotną osią sym.</u>

6. <u>Klasa bipiramidy dyheksagonalnej</u>

s (226).

W klasie tej obecnych jest 7 pł. symetrji zwykłej. Sześć z nich przecina się w 1 sześciokrotnej dwubiegunowej osi symetrji zwanej <u>osią główną</u>. Siódma płaszczyzna biegnie prostopadle do osi głównej i, przecinając się z pierwszemi sześcioma płaszczyznami, daje 6 dwukrotnych osi symetrji, zwanych <u>pobocznemi</u>. Sześć pł. przecinających się w osi głównej, są jednoznaczne tylko co druga, taksamo odpowiadające im osi dwukrotne. Obecne jest centrum symetrji.
Za pionową oś krystalograficzną (z) wybieramy zawsze oś sześciokrotną; za osi x_1, x_2, x_3 trzy jednoznaczne osi poboczne (dwukrotne).
Postacią ogólną jest 24-ścian zwany dwupiramidą

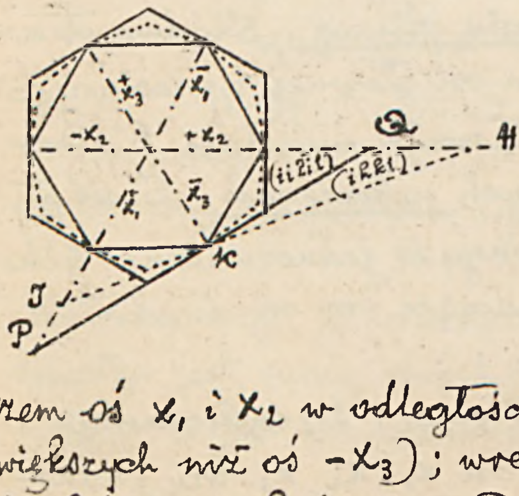
dyheksagonalną z biegunem wewnątrz trójkąta pł.



symetryi (u, z, $-x_3$) i symbolem $\{ih\bar{k}l\}$, w którym $i>h$. (Znakowanie górnych 12 dodekantów).

$i>h$ $\quad k\bar{i}hl$
$i+h=k$ $\quad 3\bar{2}\bar{1}1$ $\quad \pi, 3P, 3P', \Lambda^6, 6L^2, C$
$(3L^2+3L'^2)$

Postaci szczegółowe są następujące: Biegun umieszczony na boku uz da dwupiramidę heksagonalną $\{i0\bar{i}l\}$ pierwszego rodzaju. Skoro zaś biegun początkowy umieścimy na boku $z(-x_3)$ otrzymamy dwupiramidę heksagonalną drugiego rodzaju $\{ii\bar{2i}l\}$. Względny stosunek trzech wymienionych piramid podaje figura.



Ściana dwupiramidy dyheks. przecina osi x_1, x_2 i x_3 po linii JH, ściana dwupiramidy heksag. 2go rodzaju przetnie osi po linii PQ, przyczem oś x_1 i x_2 w odległościach jednakowych (2 razy większych niż oś $-x_3$); wreszcie ściana dwupiramidy heksagonalnej 1go rodzaju przetnie oś x_1 i $-x_3$

w odległościach równych, do trzeciej zaś osi x_2 biegnie równolegle. Ściana dwupiramidy dyheksagonalnej JH leży pomiędzy ścianami dwupiramidy heksag. 1 go rodzaju (MK) i 2 go rodzaju (NK), które są jej kresami.

Połóżmy teraz biegun na boku $u(-x_3)$ a otrzymamy graniastosłup dyheksagonalny $\{ih\bar{k}0\}$, odpowiadający dwupiramidzie dyheksagonalnej. Biegun początkowy umieszczony kolejno na wierzchołkach trójkąta $\underline{u}$ i $-\underline{x}_3$ da graniastosłupy heksagonalne 1go i 2go rodzaju, odpowiadające takimże piramidom. Symbol pierwszego jest $\{10\bar{1}0\}$, drugiego $-\{11\bar{2}0\}$.

Wreszcie, umieszczając biegun w trzecim wierzchołku trójkąta $\underline{I}$, otrzymamy dwuścian podstawowy $\{0001\}$.

<u>Zadanie</u>. Wykreślić projekcyę stereograficzną kryształu (berylu), będącego kombinacyą postaci $\{21\bar{3}1\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{20\bar{2}1\}$, $\{11\bar{2}1\}$, $\{21\bar{3}0\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$ i $\{0001\}$. (Słup $\{11\bar{2}0\}$ należy umieścić w $-x_3$).

W następującej tabelce streszczamy wyprowadzone powyżej postaci tej klasy.

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Dwupiramida dyheksag.	$\{ih\bar{k}l\}$	asymetr.
" heks. 1go rodz.	$\{i0\bar{i}l\}$	jednosymetr.

Dwupiramida heks. 2go rodz.	$\{i\,i\,\overline{2i}\,l\}$	jednosym.
Graniastosłup dyheksag.	$\{i\,h\,\bar{k}\,o\}$	"
—— " —— heks. 1go rodz.	$\{10\bar{1}0\}$	dwusymetr.
—— " —— " 2go rodz.	$\{11\bar{2}0\}$	"
Dwuścian podstawowy	$\{0001\}$	sześciosym.

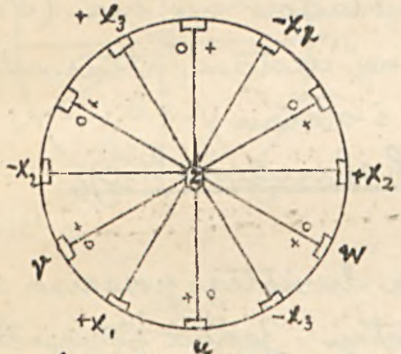
Przykład. Beryl ($Be_3Al_2Si_6O_{18}$). Jednostki osiowe $a:c = 1:0{\cdot}4989$. Najpospoliciej tylko słup 1go rodzaju $\{10\bar{1}0\}$ i dwuścian podstawowy $\{0001\}$. Towarzyszy im niekiedy słup 2go rodzaju $\{11\bar{2}0\}$. Pospolitsze dwupiramidy: heksagonalne 1go rodzaju $\{10\bar{1}1\}$, z której wyprowadzono powyższe jednostki osiowe, tudzież dwupiramida 2go rodzaju $\{11\bar{2}1\}$, dwupiramida 1go rodzaju $\{20\bar{2}1\}$ i dwupiramida dyheksagonalna $\{21\bar{3}1\}$. Trzy ostatnie symbole wyprowadzają się wprost ze związku pasów (obacz wyżej: zadanie).

7. Klasa trapezoedru heksagonalnego

$S\,(2'2'6')$.

Siedem płaszczyzn symetryi odbicia dwoistego. Sześć z nich przecina się w osi 6-krotnej głównej; siódma zaś przecina je prostopadle, dając 6 osi sym. dwukrotnych, pobocznych, które są jednoznaczne co druga. Krystalograficzna oś z zlewa się z osią 6-krotną; osi zaś x_1, x_2, x_3 odpowiadają jednoznacznym osiom pobocznym. Osi zatem są jedynymi realnymi pierwiastkami symetryi.

Postacią ogólną jest 12-ścian, zwany *trapezoedrem heksagonalnym*, który może być dwojakiego rodzaju: *prawy* z biegunem wewnątrz trójkąta $\underline{a}_2$ i lewy z biegunem wewnątrz trójkąta $\underline{a}_1$. Symbol pierwszej postaci jest $\{i h \bar{k} l\}$, drugiej – $\{k h \bar{i} l\}$. Postaci te są enancyomorficzne.



$L^6, 6L^2 (3+3')$

Umieszczając biegun początkowy kolejno na bokach trójkąta: zu, $z(-x_3)$ i $u(-x_3)$, otrzymamy *heksagonalne piramidy 1go rodzaju*, *2go rodzaju* oraz *dyheksagonalne graniastosłupy*, które będą szczególnemi postaciami trapezoedru.

Postaci szczegółowe: *heksagonalny słup 1go rodzaju* (biegun w $\underline{u}$), *2go rodzaju* (biegun w $-x_3$) i dwuścian podstawowy (biegun w $\underline{Z}$).

Nazwa	Symbol	Symetrya ścian
Trapezoedr prawy	$\{i h \bar{k} l\}$	asymetryczne
lewy	$\{k h \bar{i} l\}$	"
Dwupiramidy heks. 1go rodz.	$\{i o \bar{i} l\}$	"
– " – " – 2go rodz.	$\{i i \bar{2i} l\}$	"

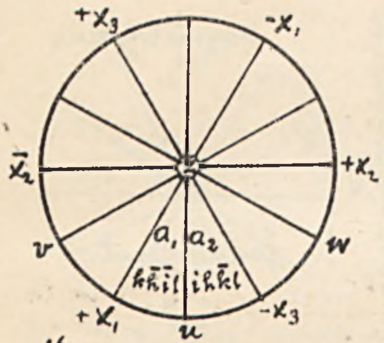
Dyheksagonalne słupy	$\{i h \bar{k} o\}$	asymetryczne
Heksagonalny słup 1go rodz.	$\{10\bar{1}0\}$	C_2
——" —— " - 2go "	$\{11\bar{2}0\}$	C_2
Dwuścian podstawowy	$\{0001\}$	C_6

Wśród minerałów klasa ta przykładów nie ma. (Należą do niej kryształy soli podwójnej azotanu potasowego i prawego winianu antymonylu i ołowiu).

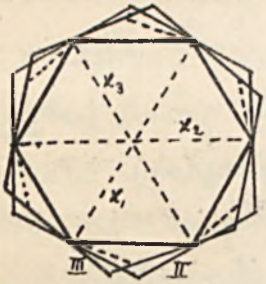
8. Klasa bipiramidy heksagonalnej
S(2'2'6).

Sześć płaszczyzn symetryi odbicia dwoistego przecina się w 1 sześciokrotnej głównej osi symetryi. Jedna pł. symetryi prostej przecina prostopadle oś symetryi główną. Osi symetryi pobocznych niema. Jest centrum symetryi.

Za oś Z służy sześciokrotna oś symetryi. Położenie osi x_1, x_2, x_3 jest nieokreślone, albowiem płaszczyzny odbicia dwoistego nie mają tu znaczenia krystalograficznego. Za osi te wybieramy jakiekolwiek krawędzie kryształu rzeczywiste lub tylko możliwe i przeprowadzamy przez nie płaszczyzny odbić dwoistych. Przez analogię do klas poprzedzających wybór ten czynimy tak, aby urojone płaszczyzny tej klasy odpowiadały rzeczywistym innych klas heksagonalnych. Postacią ogólną tej klasy jest dwupiramida heksagonalna IIIgo rodzaju z biegunem początkowym albo wewnątrz trójkąta $\underline{a_2}$, albo wewnątrz trójkąta $\underline{a_1}$. W pierwszym przypadku otrzymujemy <u>prawą</u> $\{ih\bar{k}l\}$, w drugim <u>lewą</u> $\{k\bar{h}\bar{i}l\}$ <u>piramidę III go rodzaju</u>.



π, L^6, c



Szczególnemi formami tej postaci ogólnej będą dwupiramida Igo rodzaju (biegun na boku <u>zu</u>) i 2go rodzaju (biegun na boku <u>z(-X₃)</u>) Rysunek obok podany wyjaśnia stosunek wszystkich trzech bipiramid heksagonalnych. Te trzy piramidy geometrycznie są zupełnie do siebie podobne, lecz różnią się położeniem osi krystalograficznych. Ten sam rysunek objaśnia wzajemny stosunek 3 poszczególnych postaci pryzmatycznych: <u>słupa heksagonalnego</u> IIIgo, IIgo i Igo rodzaju z biegunami na łuku $(+X_1)(-X_3)$ w wierzchołku $(-X_3)$ i u. Słup IIIgo rodzaju ma przytem 2 postaci odpowiednie: <u>prawą</u> z biegunem na <u>$u(-X_3)$</u> i <u>lewą</u> z biegunem na <u>$(+X_1)u$</u>.

Wreszcie dwuścian podstawowy będzie ostatnią postacią szczegółową.

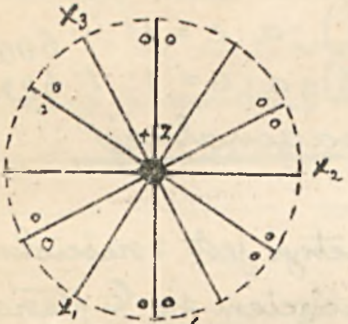
Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Dwupiramidy III rodz. prawe	$\{ih\bar{k}l\}$	asymetryczne
—— " —— lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}l\}$	"
—— " —— II rodz.	$\{ii\bar{2i}l\}$	"
—— " —— I "	$\{io\bar{i}l\}$	"
Słupy III rodz. prawe	$\{ih\bar{k}o\}$	jednosymetr.
—— " —— lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}o\}$	"
Słupy II rodz.	$\{11\bar{2}0\}$	"
— " — I rodz.	$\{10\bar{1}0\}$	"
Dwuścian	$\{0001\}$	C_6

Przykład. Wybitnym przykładem tej grupy jest apatyt $(F,Cl)Ca_5(PO_4)_3$. $a:c = 1:0{,}744$. Najczęściej zdarzają się kombinacye dwuścianu $\{0001\}$ ze słupem 1go rodz. $\{10\bar{1}0\}$. Na kombinacyach bardziej skomplikowanych występują prócz tego: dwupiramida IIIgo rodzaju $\{21\bar{3}1\}$ i słup IIIgo rodzaju $\{21\bar{3}0\}$, dwupiramidy 1go rodzaju $\{20\bar{2}1\}$, 2go rodzaju $\{11\bar{2}1\}$ i $\{11\bar{2}2\}$, tudzież słup 2go rodzaju $\{11\bar{2}0\}$. Figury trawień na słupie Igo rodzaju wykazują istotną symetryę kryształu.

9. Klasa piramidy dyheksagonalnej
S(6).

Klasa ta charakteryzuje się obecnością sześciu naprzemian jednoznacznych pł. symetryi, przecinających się w 1 sześciokrotnej osi jednobiegunowej (polarnej).

Oś sześciokrotna jest osią Z. Osi X_1, X_2, X_3 są liniami przecięcia się jednoznacznych pł. symetryi z płaszczyzną prostopadłą do osi sześciokrotnej. Postaci tej klasy są w ogóle



$3P + 3P', L^6_p$

podobne do klasy dwupiramidy dyheksagonalnej s(226) z tą tylko różnicą, że tu zamiast dwupiramid występują piramidy. Dwupiramida s(226) rozpada się tu niejako na dwie postaci: piramidę górną ($\overset{+}{Z}$) i dolną ($\overset{-}{Z}$).

Toż samo dotyczy dwuściana, który rozpada się na ścianę wierzchołkową i podstawową. Ponieważ oś sześciokrotna jest tu różnobiegunowa, więc kryształy tej grupy mają wygląd hemimorficzny i są na obu swych końcach rozmaicie wykształcone.

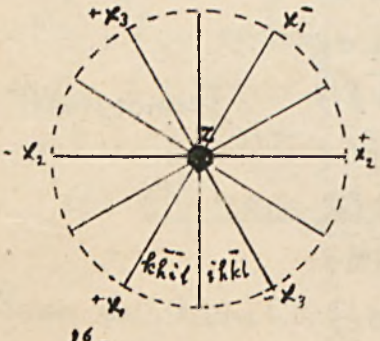
Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Piramidy dyheks. górne	$\{ih\bar{k}l\}$	asymetryczne
——— " —— dolne	$\{ih\bar{k}\bar{l}\}$	"
Słupy "	$\{ih\bar{k}o\}$	"
Piramidy heksag. 1go rodz. górne	$\{io\bar{i}l\}$	jednosymetr.
dolne	$\{io\bar{i}\bar{l}\}$	"
2go rodz. górne	$\{ii\bar{2i}l\}$	"
dolne	$\{ii\bar{2i}\bar{l}\}$	"
Słup heksag. 1-y	$\{10\bar{1}0\}$	"

Słup heks. 2-i $\{11\bar{2}0\}$ jednosymetr.
Ściana wierzchołkowa $\{0001\}$ exterosymetr.
—"— podstawowa $\{000\bar{1}\}$ "

Przykłady. Wurcyt (ZnS); a : c = 1 : 1·6004
Grenockit (CdS); a : c = 1 : 1·6218

10. Klasa piramidy heksagonalnej $s(6')$.

Jedynym realnym elementem symetryi jest 1 sześciokrotna oś symetryi (polarna), będąca przecięciem się 6 płaszczyzn odbicia dwoistego (urojonych). Osią z jest Z^6_p. Za osi x_1, x_2, x_3 wybieramy 3 linie przecięcia się płaszczyzn odbić dwoistych z płaszczyzną prostopadłą do Z^6_p.
Postaci tej klasy tem się tylko różnią od postaci klasy $s(\bar{2}'2'6)$, że ściany skupione koło dodatniego końca osi z są niezależne od ścian skupionych koło ujemnego końca tejże osi. Pierwsze tworzą formy górne drugie dolne.



L^6_p

Postacią ogólną jest heksagonalna piramida 3go rodzaju, która może być górna i dolna, prawa i lewa. Inne postaci, jak w klasie $s(\bar{2}'2'6)$. Tylko dwuścian podstawowy rozpada się na ścianę wierzchołkową i podstawową. Ogólny wygląd kryształów tej klasy jest również hemimorficzny: koniec osi +z otaczają inne ściany niż koniec −z tejże osi.

Nazwa	Symbol	Sym. ść.
Heksag. piramidy III rodz. górne prawe	$\{ih\bar{k}l\}$	asymetr.
— " — " — " — lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}l\}$	"
— " — " — dolne prawe	$\{ih\bar{k}\bar{l}\}$	"
— " — " — " lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}\bar{l}\}$	"
— " — II rodz. górne	$\{ii\bar{2i}l\}$	"
— " — " — dolne	$\{ii\bar{2i}\bar{l}\}$	"
— " — I rodz. górne	$\{io\bar{i}l\}$	"
— " — " — dolne	$\{io\bar{i}\bar{l}\}$	"
Słupy III rodz. prawe	$\{ih\bar{k}o\}$	"
— " — lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}o\}$	"
Słup II rodzaju	$\{11\bar{2}0\}$	"
— " — I — " —	$\{10\bar{1}0\}$	"
Ściana wierzchołkowa	$\{0001\}$	C_6
— " — podstawowa	$\{000\bar{1}\}$	"

Przykłady. Nefelin ($K_2Na_8Al_{10}Si_{11}O_{43}$); $a:c = 1:0{\cdot}839$
Kryształy napozór dwubiegunowe: $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{0001\}$ $\{10\bar{1}1\}$ w istocie są zrostkami indywiduów hemimorficznych, jak tego dowodzą asymetryczne figury trawienia.

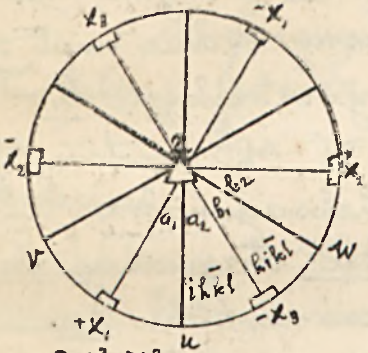
Kryształy dwu grup ostatnich [i w ogóle posiadające 1 oś polarną łącznie z klasami S(1) i S(1′)] odznaczają się bardzo charakterystyczną własnością - piroelektrycznością, wzbudzającą się w nich pod wpływem ogrzewania. Oba końce osi polarnej wykazują wtedy odmienne ładunki elektryczności. Biegunem analogicznym kryształu nazywamy (za Riessem i Rosem) ten, który elektryzuje się dodatnio podczas ogrzewania, a ujemnie podczas ochładzania, antylogicznym zaś ten, który zachowuje się odwrotnie. Kundt znalazł praktyczny sposób odróżniania tych dwóch ładunków elektryczności. Kryształ stygnący opyla on mieszaniną kwiatu siarkowego i minii - wówczas na biegunie analogicznym (-) osiada minia, na antylogicznym zaś (+) siarka. Tym sposobem kryształy wymienionych grup (hemimorficzne) dają się z łatwością oznaczyć jako takie (bez uciekania się do trawienia).

6.) Oddział trygonalny (L^3).

11. Klasa skalenoedru dytrygonalnego

$S(2'26')$

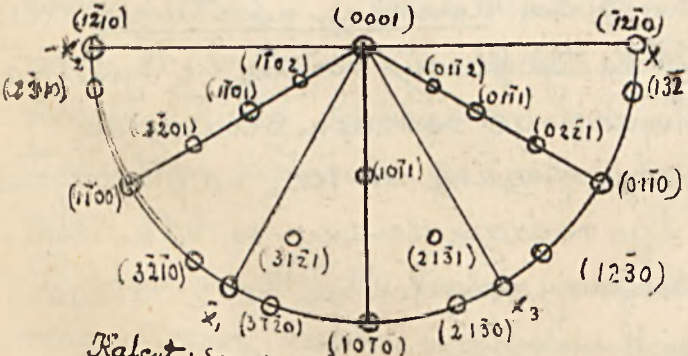
Trzy płaszczyzny sym. prostej, oraz trzy odbicia dwoistego, leżące naprzemian pomiędzy pierwszemi, przecinają się w 1 trzykrotnej osi symetrji (dwubiegunowej). Płaszczyzny odbicia dwoistego, przecinając się z prostopadłą do nich urojoną płaszczyzną symetryi (siódmą) dają trzy dwukrotne dwubiegunowe osi symetryi prostopadłe do płaszczyzn symetryi rzeczywistej.



$3P, L^3\ 3L^2.\ \bar{c}$

Osią krystalograficzną z jest oś L^3. Za osi poboczne wybieramy trzy dwukrotne osi sym. (x_1, x_2, x_3).

Trójkąty a_1 i a_2 nazwano prostymi b_1 i b_2 - odwróconymi. Postacie, których bieguny początkowe mieszczą się w trójkątach a_1 i a_2 lub na ich bokach, nazwano prostemi, formy zaś o biegunach wewnątrz lub na bokach trójkątów b_1 i b_2 otrzymały nazwę odwróconych.



Kalcyt: {0001}, {10$\bar{1}$0}, {11$\bar{2}$0}, {10$\bar{1}$1}, {01$\bar{1}$1}, {01$\bar{1}$2}, {02$\bar{2}$1}, {21$\bar{3}$1}, {21$\bar{3}$0}

Ogólną postacią tej klasy jest 12-ścian, zwany skalenoedrem ditrygonalnym, mającym dwie odpowiadające sobie formy - prostą i odwróconą. Obie postaci są sobie równe i kongruentne przez obrót o 60° koło osi z. W przyjętem powyżej znakowaniu dla dwupiramidy dyheksagonalnej skalenoedr prosty z biegunem początkowym w trójkącie a_2 otrzyma symbol $\{i\,h\,\bar{k}\,l\}$, skalenoedr zaś odwrócony będzie miał symbol $\{h\,i\,\bar{k}\,l\}$ i biegun początkowy w trójkącie b_1.

Biegun, umieszczony na boku $z(-x_3)$, powtórzy się 12 razy i utworzy dwupiramidę heksagonalną $\{i\,i\,\overline{2i}\,l\}$. Umieszczając biegun na boku zu otrzymamy romboedr prosty $\{i\,o\,\bar{i}\,l\}$; kładąc go zaś na boku zw dojdziemy do romboedru odwróconego $\{o\,i\,\bar{i}\,l\}$. Biegun początkowy wzięty na boku $u(-x_3)$ da słupy dyheksagonalne $\{i\,h\,\bar{k}\,o\}$. Słupy heksagonalne będą dwojakiego rodzaju: 1-szy rodzaj z biegunem początkowym w u $\{10\bar{1}0\}$, 2-gi rodzaj w $(-x_3)$ $\{11\bar{2}0\}$. Wreszcie biegun pomyślany w z da dwuścian podstawowy $\{0001\}$.

Słupy heksagonalne tej klasy różnią się symetrją swoich ścian: w słupie 1-go rodzaju ściany są jednosymetryczne (gdyż bieguny ich leżą na płaszczyźnie symetrji), w słupie 2-go rodzaju ściany są tylko dwumierne (C_2), gdyż bieguny ich zlewają się z biegunami osi symetrji dwukrotnej.

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Skalenoedr prosty	$\{i\,h\,\bar{k}\,l\}$	asymetr.

Skalenoedr odwrócony	$\{hi\bar{k}l\}$	asymetr.
Słupy dyheksagonalne	$\{ih\bar{k}o\}$	"
Dwupiramidy heksagonalne	$\{ii\bar{2}\bar{i}l\}$	"
Romboedr prosty	$\{io\bar{i}l\}$	jednosymetr.
— " — odwrócony	$\{oi\bar{i}l\}$	"
Słup heksag. 1go rodz.	$\{10\bar{1}0\}$	"
— " — 2go. — " —	$\{11\bar{2}0\}$	C_2
Dwuścian	$\{0001\}$	trójsymetr.

Przykłady. Wybitnym przykładem tej klasy jest kalcyt, którego nieskazitelnie przezroczyste odmiany zwane są także spatem islandzkim ($CaCO_3$); $a:c = 1:0.8543$ Łupliwość doskonała romboedryczna, równoległa do $\{10\bar{1}1\}$. Do najpospolitszych postaci tego nader w formy proste obfitującego minerału należą: słup heksagonalny 1go rodz. $\{10\bar{1}0\}$, dwuścian $\{0001\}$, romboedr odwrócony $\{01\bar{1}2\}$. [Jeżeli romboedr łupliwości oznaczymy przez R, to ten ostatni będzie ½ R]. Dalej skalenoedr prosty $\{21\bar{3}1\}$, którego krawędzie zygzakowate mają tenże sam kierunek, co i odpowiednie krawędzie romboedru R.

Podana na str. 129 figura przedstawia projekcyę stereograficzną sześciu przednich dodekantów kryształu kalcytu, będącego kombinacyą postaci: $\{21\bar{3}1\}$, $\{21\bar{3}0\}$, $\{02\bar{2}1\}$, $\{01\bar{1}1\}$, $\{01\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{10\bar{1}0\}$ i $\{0001\}$

Dalsze przykłady: Błyszcz żelaza (Fe_2O_3), korund (Al_2O_3).

12. Klasa romboedryczna s(2"2"6").

Sześć płaszczyzn odbicia troistego przecina się w 1 trzykrotnej dwubiegunowej osi symetryi, siódma płaszczyzna jest do nich prostopadła. Rzeczywistymi pierwiastkami symetryi są tylko: 1 oś symetryi trzykrotna oraz środek symetryi.

Trzykrotna oś symetryi jest krystalograficzną osią z (główną). Osie x_1, x_2, x_3 leżą w płaszczyźnie prostopadłej do osi trzykrotnej i odpowiadają trzem możliwym krawędziom krystalograficznym. Przez analogię do klas poprzednich przeprowadzamy je przez trzy płaszczyzny symetryi troistej.

Nazwijmy trójkąty a_1 i a_2 prostymi, trójkąty zaś b_1 i b_2 odwróconymi, nadto trójkąty a_1 i b_1 – lewymi, trójkąty zaś a_2 i b_2 – prawymi. Wówczas postaci, których bieguny początkowe znajdą się w tych trójkątach, otrzymają nazwy takież same.

Postacią ogólną jest sześcian, zwany romboedrem trzeciego rodzaju. Może on mieć cztery odpowiednie formy sobie równe i kongruentne: prostą lewą $\{k\bar{h}il\}$ i prostą prawą $\{ih\bar{k}l\}$, odwróconą lewą $\{hi\bar{k}l\}$ i odwróconą prawą $\{\bar{h}kil\}$. Ponieważ żaden element trójkąta pt. symetryi, z wyjątkiem wierzchołka z, nie ma tu znaczenia rzeczywistego pierwiastka symetryi, przeto wszystkie postaci, których bieguny leżą na bokach i wierzchołkach trójkąta symetryi, będą tu tylko szczególnymi przypadkami formy ogólnej t. j. romboedru, z wyłączeniem dwuściannu, którego biegun spoczywa w z. Te szczególne postaci romboedru są następujące: romboedr Igo rodzaju prosty (z biegunem na z u) i odwróc. z bieg. na zw i romboedry IIgo rodzaju: prawy [biegun na z $(-x_3)$] i lewy [biegun na z $(+x_1)$]; słup heksagonalny IIIgo rodzaju prawy [biegun na u $(-x_3)$] i lewy [biegun na u $(+x_1)$]; słup heksagonalny 2go rodzaju (biegun w $-x_3$) i słup heksagonalny 1go rodzaju (biegun w u).

Nazwa	Symbol	Sym. ść
Romboedry III rodz. proste prawe	$\{ih\bar{k}l\}$	asymetr.
— " — " — lewe	$\{k\bar{h}il\}$	"
— " — odwróc. prawe	$\{hk\bar{i}l\}$	"
— " — lewe	$\{hi\bar{k}l\}$	"
— " — II rodz. prawe	$\{ii\bar{2i}l\}$	"
— " — " — lewe	$\{2i\bar{i}\bar{i}l\}$	"

Romboedry I rodz. proste	$\{i0\bar{i}l\}$	asymetr.
——"——"— odwrócone	$\{0i\bar{i}l\}$	"
Heksag. słupy III rodz. prawe	$\{ih\bar{k}0\}$	"
——"——"— lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}0\}$	"
—"— słup II rodz.	$\{11\bar{2}0\}$	"
—"— I rodz.	$\{10\bar{1}0\}$	"
Dwuścian podstawowy	$\{0001\}$	C_3

Wybitnym przykładem tej klasy jest dolomit $MgCaC_2O_6$ $a:c = 1:0{\cdot}8322$. Łupliwość doskonała według romboedru bardzo zbliżonego do romboedru łupliwości kalcytu i przyjmowanego za romboedr jednostkowy $\{10\bar{1}1\}$. Figury wytrawione, jak wiemy z poprzedniego, wykazują wyraźnie symetrię tego romboedru różną od symetryi romboedru kalcytu. Niekiedy też i postać zewnętrzna kombinacyi symetrię tę unaocznia.

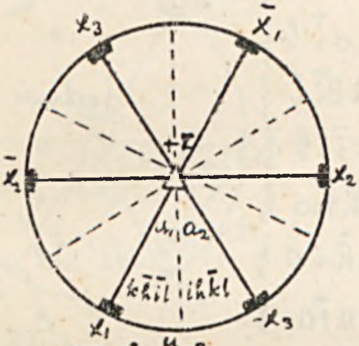
Należą tu także kryształy dioptazu (H_2CuSiO_4), fenakitu (Be_2SiO_4) i wilemitu (Zn_2SiO_4).

13. Klasa dwupiramidy dytrygonalnej

S (223).

Pierwiastki symetryi tej klasy są następujące: cztery pł. symetryi prostej, z których trzy przecinają się w trzykrotnej dwubiegunowej osi sym. (głównej), a czwarta do tamtych prostopadła przecina je w 3 jednobiegunowych dwukrotnych (bocznych) osiach symetryi.

Za oś krystalograficzną wybieramy oś trzykrotną, za osi X_1, X_2, X_3 - trzy dwukrotne osi sym. Dla zachowania analogii z klasami poprzedniemi przeprowadzamy pomiędzy pł. $X_1(-X_1), X_2(-X_2)$ i $X_3(-X_3)$ płaszczyzny środkowe zu, zv, zw, możliwe krystalograficznie.



$\pi, 3P, L^3, 3L^2p$

Wówczas zależnie od tego, czy biegun początkowy znajduje się wewnątrz trójkąta a_2 czy a_1, otrzymamy dwie dytrygonalne dwupiramidy: prawą $\{ih\bar{k}l\}$ i lewą $\{k\bar{h}\bar{i}l\}$, które są postaciami ogólnemi tej klasy. Szczególnymi przypadkami tej formy ogólnej będą dwupiramidy heksagonalne z biegunami na wysokości zu $\{i0\bar{i}l\}$.

Postaci szczegółowe: trygonalne dwupiramidy, lewa i prawa: $\{2i\,\bar{i}\,\bar{i}\,l\}$ i $\{i\,i\,\overline{2i}\,l\}$, których bieguny wypadają na bokach $z(+X_1)$ i $z(-X_3)$; słupy dytrygonalne: lewe $\{k\bar{h}\bar{i}0\}$ i prawe $\{ih\bar{k}0\}$, których przypadkiem poszczególnym jest słup heksagonalny $\{10\bar{1}0\}$ z biegunem w u; słupy trygonalne: lewy $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$ i prawy $\{11\bar{2}0\}$, wreszcie dwuścian $\{0001\}$. Mamy więc tu następujące postaci:

Nazwa	Symbol	Sym. śc.
Dwupiramidy dytryg. prawe	$\{ih\bar{k}l\}$	asymetr.
— " — " — lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}l\}$	"
— " — heksagonalne	$\{i0\bar{i}l\}$	"
— " — trygonalne prawe	$\{ii\bar{2i}l\}$	jednos.
— " — " — lewe	$\{2i\bar{i}\bar{i}l\}$	"
Słupy dytrygon. prawe	$\{ih\bar{k}0\}$	"
— " — lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}0\}$	"
Słup heksagonalny	$\{10\bar{1}0\}$	"
— " — trygonalny prawy	$\{11\bar{2}0\}$	"
— " — " — lewy	$\{2\bar{1}\bar{1}0\}$	"
Dwuścian	$\{0001\}$	trójsymetr.

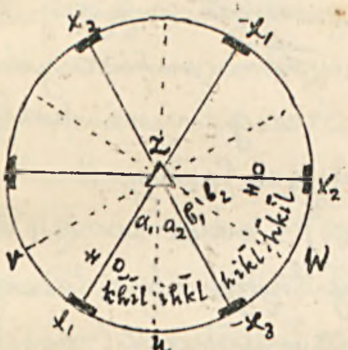
Przykładów na tę klasę symetryi dotychczas jeszcze nie znaleziono.

14. Klasa trapezoedru trygonalnego

$$S(2'2'3').$$

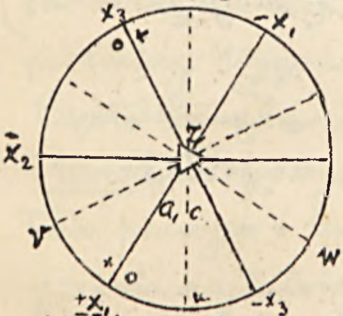
Z czterech płaszczyzn odbić dwoistych trzy przecinają się w osi symetryi trzykrotnej (głównej), czwarta przecina je prostopadle w trzech dwukrotnych jednobiegunowych osiach symetryi (bocznych). Za osi krystalograficzne, jak w klasie poprzedniej wybieramy: $z = L^3$, $x_1, x_2, x_3 = L^2p_1, L^2p_2, L^2p_3$.

Trójkąty równoramienne płaszczyzn symetryi dwoistej $x_1 z(-x_3)$, $(-x_3)z(+x_2)$ i t. d. podzielmy wysokościami zv, zu, zw na trójkąty a_1 i a_2, b_1 i b_2 i t.d. Trójkąt $(+x_1)\,z\,(-x_3)$ nazwiemy <u>prostym</u>, zaś trójkąt $(-x_3)\,z\,(+x_2)$ - odwróconym. Wówczas trójkąty a_1 i b_1 możemy nazwać <u>lewymi</u>, trójkąty zaś a_2 i b_2 - <u>prawymi</u>. Odpowiednio do tej umowy i postaci zwać będziemy prostemi i odwróconemi, prawemi i lewemi, a to zależnie od tego jak umieścimy początkowy ich biegun.

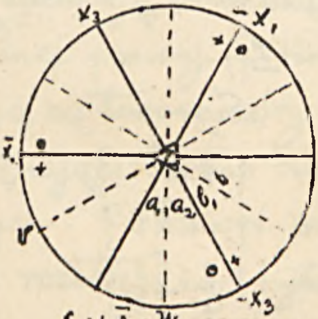


$L^3, 3L^2p$

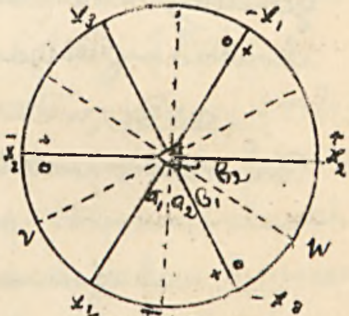
Postacią ogólną jest <u>trapezoedr trygonalny</u>.



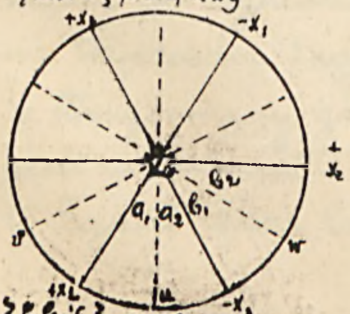
{kh̄il̄} prosty lewy



{ihkl̄} prosty prawy



{hik̄l} odwrócony lewy



{h̄kil̄} odwrócony prawy

Trapezoedry mogą być czterech gatunków: <u>proste lewe</u> i <u>proste prawe</u>, <u>odwrócone lewe</u> i <u>odwrócone prawe</u>. Pierwsze dwa i drugie dwa są enancyomorficzne, przeciwnie pierwszy i trzeci oraz drugi i czwarty są kongruentne przez obrót koło osi $\underline{z}$, jak to widać z porównania projekcyi stereograficznych tych 4 postaci, podanych powyżej. Szczególnymi przypadkami trapezoedrów są następujące formy: Romboedry proste (bieguny na $\underline{z\,u}$) i odwrócone (bieguny na $z\,(w)$), dwupiramidy trygonalne lewe (bieguny na $z(+x_1)$) i prawe (bieguny na $z(-x_3)$); słupy dytrygonalne lewe (bieguny na $(+x_1)u$) i prawe (bieguny na $u(-x_3)$); słup heksagonalny, którego biegun leży w punkcie $\underline{u}$. Postaci szczególne: słup trygonalny lewy (biegun w $+x_1$) i prawy (biegun w $-x_3$), dwuścian (biegun w $\underline{z}$).

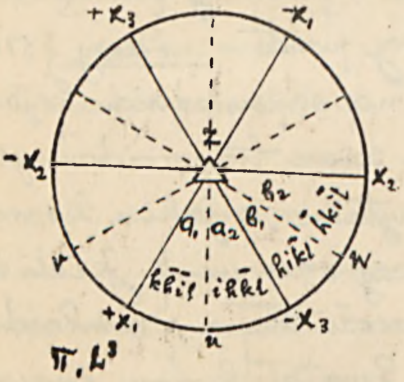
Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Trapezoedry proste lewe	$\{h\bar{k}\bar{i}l\}$	asymetryczne
— " — " — prawe	$\{ih\bar{k}l\}$	"
— " — odwrócone lewe	$\{hi\bar{k}l\}$	"
— " — " — prawe	$\{\bar{h}k\bar{i}l\}$	"
Romboedry proste	$\{io\bar{i}l\}$	"
— " — odwrócone	$\{oi\bar{i}l\}$	"
Dwupiramidy trygon. prawe	$\{ii\overline{2i}l\}$	"
— " — " — lewe	$\{2i\bar{i}\bar{i}l\}$	"
Słupy dytryg. prawe	$\{ih\bar{k}o\}$	"
— " — lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}o\}$	"

Słup heksagonalny	$\{10\bar{1}0\}$	asymetryczne
Słup trygonalny prawy	$\{11\bar{2}0\}$	C_2
—— " —— " — lewy	$\{2\bar{1}\bar{1}0\}$	"
Dwuścian	$\{0001\}$	C_3

Znakomitym przykładem tej klasy są kryształy kwarcu (SiO_2). $a:c = 1:1{\cdot}0999$. Wielce charakterystyczną jest kombinacya słupa heksagonalnego $\{10\bar{1}0\}$ i dwu romboedrów: prostego $\{10\bar{1}1\}$ i odwróconego $\{01\bar{1}1\}$, nadająca kryształom kwarcu pozorną symetryę dwupiramidy dyheksagonalnej. Ściany słupa stale są poprzecznie prążkowane. Kryształy przybierają właściwą sobie symetryę, skoro się na nich zjawiają równoległoboczne ścianki dwupiramidy trygonalnej prawej $\{11\bar{2}1\}$ i lewej $\{2\bar{1}\bar{1}1\}$. Często też zdarzają się trapezoedry proste – prawy $\{51\bar{6}1\}$ i lewy $\{6\bar{1}\bar{5}1\}$, występujące osobno na odpowiednich kryształach prawych i lewych. Obecność ścian trapezoidalnych pozwala najłatwiej rozstrzygnąć pytanie, z jakim kwarcem mamy do czynienia, z prawym czy z lewym? Jeżeli ściana trapezoedru znajdzie się na narożu słupa i romboedru ze strony prawej górnej, to będzie kryształ kwarcu prawy, jeżeli zaś ściana ta znajdzie się u góry ze strony lewej – to kryształ będzie lewy).

15. Klasa dwupiramidy trygonalnej
$s(2'2'3)$.

Cztery płaszczyzny symetryi: 3 płaszczyzny odbicia dwoistego przecinają się w dwubiegunowej trzykrotnej osi symetryi (głównej), czwarta płaszczyzna jest płaszczyzną realną i biegnie prostopadle do osi trzykrotnej i pł. odbicia dwoistego. Krystalograficzna oś z zlewa się z osią trzykrotną. Ponieważ pł. odbicia dwoistego nie mają znaczenia realnego, przeto położenie osi x_1, x_2, x_3 nie jest dane a priori. Wybieramy na nie trzy możliwe krawędzie w pł. symetryi prostej i prowadzimy przez nie płaszczyzny odbicia dwoistego.



π, L^3

Ogólną postacią jest dwupiramida trygonalna III go rodzaju. Tej mogą być 4 gatunki: prosta lewa i prosta prawa, odwrócona lewa i odwrócona prawa, zależnie od tego, czy biegun początkowy znajdzie się w trójkącie a_1 lub a_2, czy też w b_1 lub b_2 (analogicznie do tego, cośmy widzieli przy trapezoedrze trygonalnym, z tą tylko różnicą, że tu bieguny ścian dolnych i górnych zlewają się w jeden ⊕).

Szczególnymi przypadkami postaci ogólnej są:

dwupiramida trygonalna 1go rodzaju prosta (biegun na $\underline{z}\,u$) i odwrócona (biegun na $\underline{z}\,w$), tudzież dwupiramida trygonalna 2go rodzaju lewa (biegun na $z(+X_1)$) i prawa (biegun na $z(-X_3)$).

Formy szczegółowe: słupy trygonalne III go rodzaju proste lewe (biegun na $+X_1 u$) i proste prawe (biegun na $-X_3 u$), odwrócone lewe (biegun na $-X_3 w$) i odwrócone prawe (biegun na $+X_2 w$); słup trygonalny 2go rodzaju lewy (biegun w $+\underline{X}_1$) i prawy (biegun w $-X_3$); słup trygonalny 1go rodzaju prosty (biegun w $\underline{u}$) i odwrócony (biegun w $\underline{w}$); wreszcie dwuściań z biegunem w $\underline{Z}$.

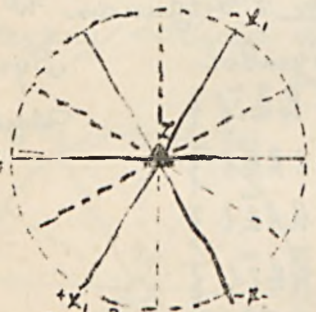
Nazwa	Symbol	Sym. śc.
Dwupiramidy tryg. III r. proste lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}l\}$	asymetr.
—— " —— " —— prawe	$\{ih\bar{k}l\}$	"
—— " —— " — odwróc. lewe	$\{hi\bar{k}l\}$	"
—— " —— " —— " — prawe	$\{\bar{h}ki\bar{l}\}$	"
—— " —— II rodz. prawe	$\{2\bar{i}\bar{i}\bar{i}l\}$	"
—— " —— " —— lewe	$\{ii\bar{2}\bar{i}l\}$	"
—— " —— I rodz. proste	$\{io\bar{i}l\}$	"
—— " —— " — odwrócone	$\{o\bar{i}\bar{i}l\}$	"
Słupy — " — III r. proste lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}o\}$	jednosym.
— " —— " —— prawe	$\{ih\bar{k}o\}$	"
— " —— " odwróc. lewe	$\{hi\bar{k}o\}$	"
— " —— " — " — prawe	$\{\bar{h}k\bar{i}o\}$	"

Słup tryg. II r. lewy {$2\bar{1}\bar{1}0$} jednosymetr.
——"—— " — prawy {$11\bar{2}0$} "
——" —— I r. prosty {$10\bar{1}0$} "
——" —— " — odwrócony {$01\bar{1}0$} "
Dwuścian podstawowy {0001} C_3

Przykłady realne tej klasy nie zostały dotychczas odkryte.

16. Klasa piramidy dytrygonalnej
s(3)

Trzy płaszczyzny odbicia zwykłego przecinające się w 1 osi trzykrotnej polarnej. Oś trzykrotna jest zarazem krystalograficzną osią z, zaś osi x_1, x_2, x_3 wybieramy 3 krawędzie prostopadłe do płaszczyzn symetrji i do osi trzykrotnej. Taki wybór osi zbliża znakowanie postaci tej klasy do klasy s(2'2 6') t.j. do klasy skalenoedru dytrygonalnego. Podobnie jak



3P, L^3p

tam, tak i tu dodekant $+x_1, +z, -x_3$ nazwiemy prostym, dodekant zaś $-x_3, z, +x_2$ odwróconym a odpowiednio do tego zwać będziemy i odnośne postaci. Prócz tego odróżniamy tu jeszcze formy górne ze wskaźnikiem na z dodatnim i dolne - ze wskaźnikiem ujemnym.

Należące tutaj postaci są też same, co i w klasie s(2'26') z tą tylko różnicą, że zamiast skalenoedrów występują tu piramidy dytrygonalne, jako postać ogólna, a zamiast romboedrów – piramidy trygonalne. Słupy są tu tylko szczególnymi przypadkami odpowiednich postaci ogólnych i szczegółowych.

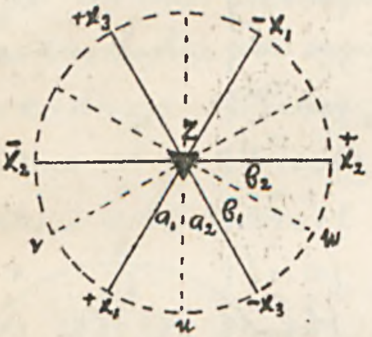
Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Piramidy dytryg. proste górne	$\{ih\bar{k}l\}$	asymetr.
—— " —— " – dolne	$\{ih\bar{k}\bar{l}\}$	"
—— " —— odwróc. górne	$\{hi\bar{k}l\}$	"
—— " —— " – dolne	$\{hi\bar{k}\bar{l}\}$	"
Słupy dytryg. proste	$\{ih\bar{k}0\}$	"
—— " —— odwrócone	$\{hi\bar{k}0\}$	"
Piramidy heksag. górne	$\{ii\bar{2i}l\}$	"
—— " —— " – dolne	$\{ii\bar{2i}\bar{l}\}$	"
Słup heksagonalny	$\{11\bar{2}0\}$	"
Piramidy tryg. proste górne	$\{i0\bar{i}l\}$	jednosym.
—— " —— " – dolne	$\{i0\bar{i}\bar{l}\}$	"
—— " —— odwr. górne	$\{0i\bar{i}l\}$	"
—— " —— " – dolne	$\{0i\bar{i}\bar{l}\}$	"
Słup trygon. prosty	$\{10\bar{1}0\}$	"
—— " —— odwrócony	$\{01\bar{1}0\}$	"
Ściana wierzchołkowa	$\{0001\}$	trójsymetr.
— " — podstawowa	$\{000\bar{1}\}$	"

Bardzo znany przykład tej klasy stanowią kryształy turmalinu [glino i boro-krzemiany magnu, żelaza i alkalii]. Najpospoliciej występuje słup heksagonalny $\{11\bar{2}0\}$ i słupy trygonalne $\{01\bar{1}0\}$ i $\{10\bar{1}0\}$. Często obecny jest tylko jeden słup trygonalny. Piramidzie trygonalnej, leżącej nad ścianami słupa $\{01\bar{1}0\}$ przypisujemy symbol $\{10\bar{1}1\}$, stąd stosunek osiowy $a : c = 1 : 0{\cdot}4480$, który jednak zmienia się zależnie od niestałego składu chemicznego. Na górnym końcu kryształu zdarzają się jeszcze piramidy trygonalne $\{02\bar{2}1\}$, na dolnym zaś $\{01\bar{1}\bar{1}\}$, $\{10\bar{1}\bar{2}\}$, oraz ściana podstawowa $\{000\bar{1}\}$. Kryształy wybitnie piroelektryczne: w powyższej oryentacyi górny koniec przy ostudzeniu jest elektr. dodatnio. Należą tu także kryształy pirargirytu (Ag_3SbS_3); $a:c = 1:0{\cdot}7892$.

17. Klasa piramidy trygonalnej: $\mathfrak{S}(3')$.

Symetrya tej klasy polega na obecności 3 urojonych płaszczyzn symetryi odbicia dwoistego, przecinających się w trzykrotnej osi symetryi. Oś tą jest osią krystalograficzną z; za osi x_1, x_2, x_3 wybieramy 3 możliwe lub obecne na krysztale krawędzie, prostopadłe do osi trzykrotnej.

Oznaczenie postaci tej klasy daje się zbliżyć do symbolizacyi klasy $\mathfrak{S}(2'3'3')$. Dodekant $+x_1, z, -x_3$ nazwiemy prostym, dodekant zaś: $-x_3, z, +x_2$ – odwróconym. I jeden i drugi podzielimy nadto na trójkąty prawe (a_1, b_1) i lewe (a_2, b_2). Stąd postaci ogólnych tej klasy jest 8 rodzajów: 1) <u>górne proste lewe</u>, 2) <u>górne proste prawe</u>, 3) <u>górne odwrócone lewe</u>, 4) <u>górne odwrócone prawe</u>, 5) <u>dolne proste lewe</u>, 6) <u>dolne proste prawe</u>, 7) <u>dolne odwrócone lewe</u>, 8) <u>dolne odwrócone prawe</u>.



Postaci te są te same, co i w klasie 8 (2'2'3'), ale wskutek hemimorfizmu trapezoedry, dwupiramidy trygonalne i romboedry zamieniają się tu (z wyjątkiem dwuścianu) na <u>piramidy trygonalne III go, II go i I go rodzaju</u>.

Klasa ta obfituje zatem w postaci proste, jak to widać z następującego spisu:

Nazwa	Symbol	Sym. śc.
Piramidy tryg. III r. górne proste lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}l\}$	asymetr.
—— " —— " — prawe	$\{ihk\bar{l}\}$	"
—— " —— " odwr. lewe	$\{hi\bar{k}l\}$	"
—— " —— " —" – prawe	$\{\bar{h}k\bar{i}l\}$	"
—— " — dolne proste lewe	$\{k\bar{h}\bar{i}\bar{l}\}$	"
—— " —— " —— " — prawe	$\{ih\bar{k}\bar{l}\}$	"
—— " —— odwr. lewe	$\{hi\bar{k}\bar{l}\}$	"
—— " —— " —— prawe	$\{\bar{h}k\bar{i}\bar{l}\}$	"
—— " —— II r. górne lewe	$\{2i\bar{i}\bar{i}l\}$	"

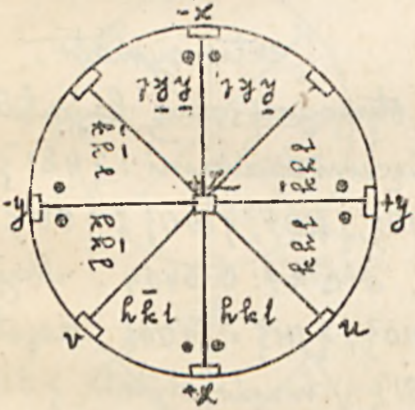
Piramidy tryg. II rodz.	górne prawe	$\{i\,i\,\bar{2i}\,l\}$	asymetr.
	dolne lewe	$\{\overline{2i}\,\bar{i}\,\bar{l}\}$	"
	prawe	$\{i\,i\,\bar{2i}\,\bar{l}\}$	"
I r.	górne proste	$\{i\,0\,\bar{i}\,l\}$	"
	odwróc.	$\{0\,i\,\bar{i}\,l\}$	"
	dolne proste	$\{i\,0\,\bar{i}\,\bar{l}\}$	"
	odwróc.	$\{0\,i\,\bar{i}\,\bar{l}\}$	"
Słupy tryg. III r. proste	lewe	$\{k\,\bar{h}\,\bar{i}\,0\}$	"
	prawe	$\{i\,h\,\bar{k}\,0\}$	"
S odwróc.	lewe	$\{h\,i\,\bar{k}\,0\}$	"
	prawe	$\{\bar{h}\,k\,\bar{i}\,0\}$	"
Słup tryg. II r.	lewy	$\{2\bar{1}\bar{1}0\}$	"
	prawy	$\{11\bar{2}0\}$	"
I r.	prosty	$\{10\bar{1}0\}$	"
	odwrócony	$\{01\bar{1}0\}$	"
Ściana wierzchołkowa		$\{0001\}$	C_3
	podstawowa	$\{000\bar{1}\}$	C_3

Do tej klasy należą kryształy nadjodanu sodowego ($NaJO_4 . 3H_2O$)., $a:c = 1:1'094$.

III. Układ osi tetragonalny.

18. Klasa dwupiramidy dytetragonalnej S(224).

Z pięciu płaszczyzn symetrji zwykłej cztery przecinają się w czterokrotnej dwubiegunowej osi symetryi (głównej), piąta zaś jest do nich prostopadła i tworzy z niemi 4 dwubiegunowe dwukrotne osi symetryi (poboczne), jednoznaczne tylko co druga. Obecny jest środek symetryi. Krystalograficzna oś z zlewa się z osią główną, osi zaś x i y – z osiami pobocznemi.



$\pi, 2P+2P', \Lambda^4, 2L^2+2L'^2, C$

Ogólną postacią jest 16-ścian zwany dwupiramidą dytetragonalną {hkl}, której bieguny leżą wewnątrz trójkątów symetryi. Krawędzie utworzone przez ściany zbiegające się ku osi głównej (po 8) są jednoznaczne tylko co druga. Postaci poszczególne mogą być następujące: Biegun położony na boku zu da dwupiramidę tetragonalną Igo rodz. {hhl}. Umieszczając biegun na boku z(+x) otrzymamy dwupiramidę tetrag. IIgo rodz. {h0l}. Gdy biegun początkowy znajdzie się na łuku (+x)u, wówczas powstanie słup dytetragonalny {hk0}. Biegun umieszczony na wierzchołku u da słup tetrag. Igo rodz. {110}, umieszczony zaś w +x utworzy słup tetrag. IIgo rodz. {100}. Wreszcie, umieszczając biegun w +z otrzymamy dwuścian podstawowy {001}. Naogół więc możliwe są w tej klasie następujące formy:

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Dwupiramidy dytetrag.	$\{hkl\}$	asymetryczne
Słupy —"—	$\{hk0\}$	jednosymetr.
Dwupiramidy tetrag. I r.	$\{hhl\}$	"
—"— II r.	$\{h0l\}$	"
Słupy —"— I r.	$\{110\}$	dwusymetr.
—"— II r.	$\{100\}$	"
Dwuścian podstawowy	$\{001\}$	czterosymetr.

Ćwiczenie: Wykreślić projekcyę stereograficzną kryształu (wezuwianu), otoczonego następującemi ścianami: $\{421\}$, $\{211\}$, $\{111\}$, $\{221\}$, $\{101\}$, $\{201\}$, $\{210\}$, $\{110\}$, $\{100\}$ i $\{001\}$.

Przykłady: Cyrkon = $ZrSiO_4$, $a:c = 1:0·6404$. Najpospolitsza kombinacya $\{111\}$, $\{110\}$, $\{111\}$ i $\{100\}$, często też występuje dwupir. tetrag. $\{331\}$ i dwupir. dytetr. $\{311\}$.

Kasyteryt = SnO_2, $a:c = 1:0·6724$

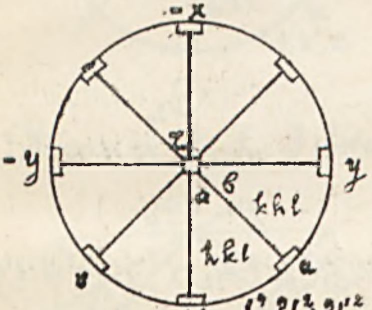
Rutyl = TiO_2, $a:c = 1:0·6442$

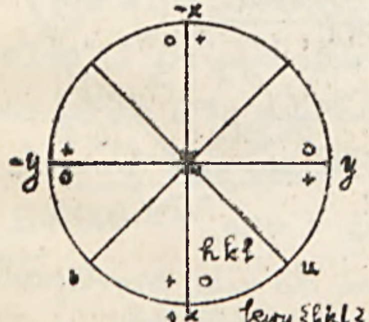
Wezuwian = $H_4Ca_{12}Al_6Si_{10}O_{43}$, $a:c = 1:0·5358$. Najpospolitsze postaci: dwuścian $\{001\}$, słupy $\{110\}$, $\{100\}$, $\{210\}$, dwupir. tetrag. $\{111\}$, $\{331\}$, $\{101\}$ i dwupir. dytetr. $\{311\}$.

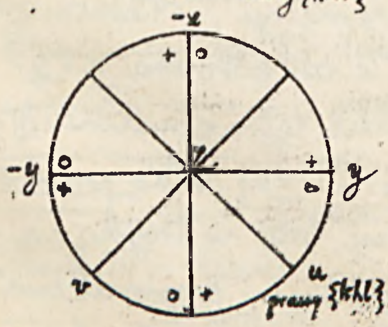
Apofilit = $H_7KCa_4Si_8O_{24} + 4\frac{1}{2}H_2O$, $a:c = 1:1·2515$.

Klasa trapezoedru tetragonalnego
S(2'2'4').

Pięć płaszczyzn odbicia dwoistego (urojonych). Z nich cztery przecinając się dają dwubiegunową czterokrotną oś sym. (główną); piąta do nich prostopadła, przecinając się z tamtemi tworzy 4 dwukrotne osi sym. (boczne) jednoznaczne co druga. Osi są jedynymi realnymi pierwiastkami symetryi. Krystalog. oś Z zlewa się z osią sym. czterokrotną, osi zaś X i Y z dwukrotnemi.







Postać ogólna jest ośmiościanem zwanym trapezoedrem tetragonalnym, który może być dwojakiego rodzaju: lewy (hkl) i prawy (khl), zależnie od tego, czy biegun początkowy znajdzie się naprzód wewnątrz trójkąta a czy b. Obydwa te odpowiadające sobie trapezoedry są postaciami enancyomorficznemi. Szczególnymi przypadkami postaci ogólnej są: 1) dwupiramida 1go rodzaju (biegun na Zu) 2) dwupiramida 2go rodzaju (biegun na Z(+X)); 3) słup dytetragonalny (biegun na +Xu). Formy szczegółowe: 1) słup 1go rodz. (biegun w u), 2) słup 2go rodz. (biegun w +X), oraz 3) dwuścian podstawowy.

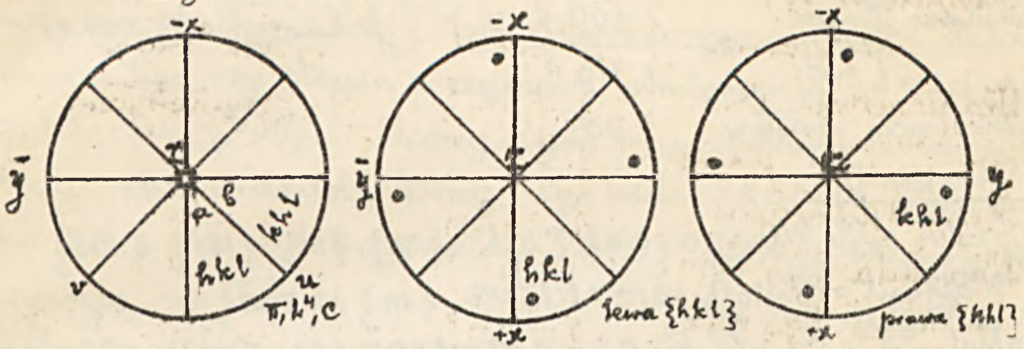
(Biegun w Z).

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Trapezoedry lewe	{hkl}	asymetryczne
—"— prawe	{khl}	"
Słupy dytetragon.	{hko}	"
Piramida Igo rodz.	{hhl}	"
—"— 2go rodz.	{hol}	"
Słupy 1go rodz.	{110}	C_2
2go rodz.	{100}	"
Dwuścian podstawowy	{001}	C_4

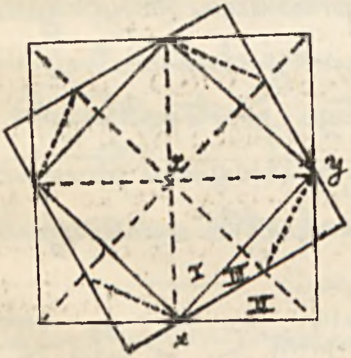
Przykład: Siarczan niklowy $NiSO_4 \cdot 6H_2O$, $a:c = 1:1{,}9061$

20. Klasa dwupiramidy tetragonaln.: s(2'2'4).

Cztery urojone pł. odbić dwoistych przecinają się w czterokrotnej osi sym. dwubiegunowej. Do tych pł. i do tej osi prostopadła jest pł. sym. zwykłej. Obecny jest środek sym. Krystal. oś Z zlewa się z osią 4° krotną sym. Za osi X i Y wybieramy dwie do niej prostopadłe możliwe krawędzie w płaszczyźnie symetryi. Płaszcz. odbicia dwoistego prowadzimy przez te osi poboczne X i Y. Postacią ogólną jest dwupiramida tetragonalna IIIgo rodzaju, która może być albo lewa {hkl}, albo prawa {khl}, biegun wyjściowy pierwszej leży w trójkącie a, drugiej w trójkącie b. Jej szczególnymi przypadkami są: dwupiramida Igo rodz. (biegun na zu), dwupiramida II go rodz. (biegun na zx).



Stosunek tych 3 dwupiramid do siebie podaje schemat:



Formy poszczególne: słupy I go, II go i III go rodzaju z odpowiednimi biegunami w u, +x i na +xu względnie u+y. Zależnie od tego słupy III rodzaju bywają lewe i prawe. Wreszcie dwuścian podstawowy z biegunami w z.

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Dwupiramidy III r. lewe	{hkl}	asymetryczne
— " — prawe	{khl}	"
— " — II rodz.	{h0l}	"
— " — I rodz.	{hhl}	"
Słupy III r. lewe	{hk0}	jednosymetr
— " — prawe	{kh0}	

Słupw II rodz. $\{100\}$ jednosymetryczne

I rodz: $\{110\}$ "

Dwuścian podstaw. $\{001\}$ C_4

<u>Przykłady</u>:

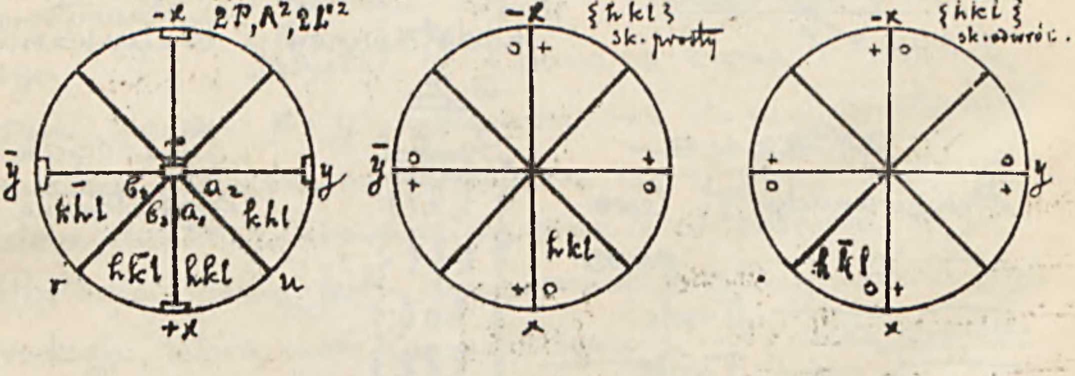
Szelit = $CaWO_4$, a : c = 1 : 1'536 . $\{101\}$, $\{111\}$, $\{131\}$, $\{313\}$

Wulfenit = $PbMoO_4$, a : c = 1 : 1'574 $\{111\}$, $\{430\}$

Mejonit = $Ca_4Al_6Si_6O_{25}$, a : c = 1 : 0'4393, $\{100\}$, $\{110\}$, $\{111\}$, $\{311\}$.

21. <u>Klasa skalenoedru tetragonalnego</u>: $\mathfrak{S}(2'2'4')$.

Tu występują cztery pł. symetryi, naprzemian zwyczajne, dwoiste, przecinające się w dwubiegunowej dwukrotnej osi sym. (głów.) i piąta pł. odbicia dwoistego prostopadła do tamtych. Płaszczyzna ta przecinając się z drugiemi płaszczyznami odbicia dwoistego,, daje dwie dwukrotne dwubiegunowe osi sym. (poboczne).



Oś <u>z</u> zlewa się z osią sym. główną, osi zaś <u>x</u> z osiami sym. bocznemi.

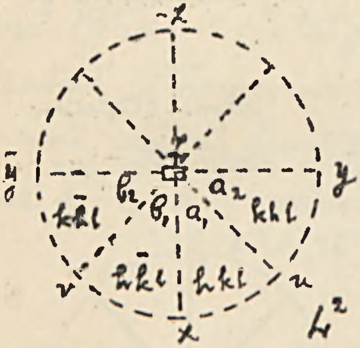
Ogólną postacią jest <u>skalenoedr tetragonalny</u>, który może być prostym $\{hkl\}$ lub odwróconym $\{h\bar{k}l\}$ zależnie od tego, czy biegun początkowy umieścimy w trójkątach a_1 i a_2 lub b_1 i b_2. Szczególnymi przypadkami skalenoedru będą: dwupiramida tetrag. 2go rodz. $\{h0l\}$ z biegunem na zx i słup dytetragonalny $\{hk0\}$, którego bieguny spoczywają na łukach równikowych. Formy pojedyncze: tetragon. bisfenoid prosty $\{hkl\}$ o biegunie na zv i odwrócony $\{h\bar{h}l\}$ o biegunie na boku zu; słup tetragonalny $\{110\}$ I rodz. biegun w u. słup tetragon. 2go rodz. $\{100\}$ o biegunie w x; wreszcie dwuścian podstawowy $\{001\}$ z biegunem w z.

Nazwa		Symbol	Sym. ścian
Skalenoedry tetrag. proste		$\{hkl\}$	asymetryczne
—— " ——	odwróc.	$\{h\bar{k}l\}$	"
Słupy dytetragonalne		$\{hk0\}$	"
Dwupiramidy tetrag. 2 rodz.		$\{h0l\}$	"
Bisfenoidy tetrag. proste		$\{hhl\}$	jednosymetr.
—— " ——	odwróc.	$\{h\bar{h}l\}$	"
Słupy — " —	1go rodz.	$\{110\}$	"
	2go rodz.	$\{100\}$	C_2
Dwuścian podstawowy		$\{001\}$	dwusymetr.

Wybitny przykład tej klasy stanowi chalkopiryt $= CuFeS_2$ $a:c = 1:0{\cdot}9784$. Najczęściej występuje kombinacya $\{111\}$, $\{1\bar{1}1\}$, $\{201\}$, przyczem bisfenoid $\{111\}$ dominuje.

22. Klasa bisfenoidu tetragonalnego: $s(2''2''4'')$

Obecne są tylko pł. odbić ~~troistych~~ w liczbie 5-u. Cztery z nich przecinają się w dwukrotnej dwubiegunowej osi sym., piąta pł. jest do nich prostopadła. Oś krystalogr. Z zlewa się z osią sym. dwukrotną. Położenie osi x i y nieokreślone, ponieważ pł. sym. ~~troistej~~ przechodzące przez Z nie mają znaczenia krystalograficznego. Za osi x i y wybieramy dwie możliwe lub obecne krawędzie kryształu leżące w pł. sym. prostopadłej do osi dwukrotnej, która to pł. jest możliwą pł. krystalograficzną.



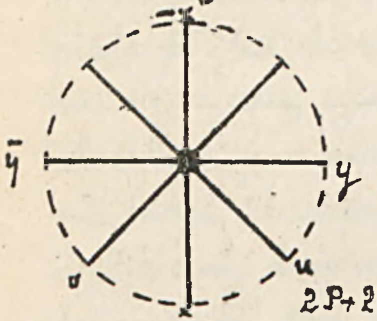
Postacią ogólną jest czterościan zwany bisfenoidem tetragonalnym IIIgo rodz. Może on być czworakiego rodzaju: prosty lewy {hkl}, prosty prawy {khl}, odwrócony prawy {hkl} i odwrócony lewy {khl}; biegun pierwszego leży w a_1, 2go w a_2, trzeciego w b_1, czwartego w b_2. Szczególne przypadki formy ogólnej stanowią: bisfenoidy I rodz. (biegun na zu), bisfenoidy II rodz (bieguny na zx), także słupy tetrag. 1go rodz. (biegun w u), 2go rodz. (biegun w x) i 3go rodz. (bieguny na łukach równikowych). Słupy dzielą się także na proste i odwrócone prawe i lewe. Jedyną postacią szczegółową jest dwuścian podstawowy o bieg. $^{0}/_{1}$.

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Bisfenoidy III rodz. proste lewe	$\{hkl\}$	asymetryczne
— " — " — prawe	$\{khl\}$	"
— " — " — odwróc. prawe	$\{h\bar{k}l\}$	"
— " — " — lewe	$\{k\bar{h}l\}$	"
— " — II rodz. lewe	$\{h0l\}$	"
— " — " — prawe	$\{0kl\}$	"
— " — I rodz. proste	$\{hkl\}$	"
— " — " — odwróc.	$\{h\bar{h}l\}$	"
Słupy tetrag. III rodz. proste lewe	$\{hk0\}$	"
— " — " — prawe	$\{kh0\}$	"
— " — odwróc. prawe	$\{h\bar{k}0\}$	"
— " — " — lewe	$\{k\bar{h}0\}$	"
Słup " II rodz. lewy	$\{100\}$	"
— " — " — prawy	$\{010\}$	"
— " — I rodz. prosty	$\{110\}$	"
— " — lewy	$\{1\bar{1}0\}$	"
Dwuścian podstawowy	$\{001\}$	C_2

Przykład należący do tej klasy znalazł Z. Weyberg w Warszawie na syntetycznie otrzymanym związku.

23. <u>Klasa piramidy dytetragonalnej</u> $\mathfrak{S}(4)$.

Cztery naprzemian jednoznaczne pł. symetrji zwykłej przecinają się w jednej czterokrotnej polarnej osi symetrji. Oś krystalogr. <u>z</u> zlewa się z osią czterokrotną, osie zaś <u>x</u> i <u>y</u> leżą w dwu jednoznacznych pł. symetrji. Postacie tej klasy różnią się od form klasy s(224) tem tylko, że piramidy i ściany podstawowe są tu dwojakiego rodzaju: górne i dolne, zależnie od tego, czy przecinają górny (dodatni), czy dolny (ujemny) koniec osi Z.

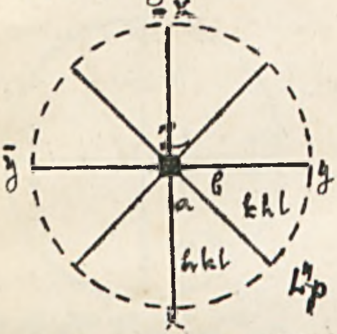


$2P+2P', L^4 p$

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Piramidy dytetrag. górne	$\{hkl\}$	asymetryczne
— " — dolne	$\{hk\bar{l}\}$	"
Słupy dytetragonalne	$\{hk0\}$	"
Piramidy tetrag. II r. górne	$\{h0l\}$	jednosymetr.
— " — " — dolne	$\{h0\bar{l}\}$	"
— " — I r. górne	$\{hhl\}$	"
— " — " dolne	$\{hh\bar{l}\}$	"
Słup " — II r.	$\{100\}$	"
— " — I r.	$\{110\}$	"
Ściana wierzchołkowa	$\{001\}$	czterosymetr.
— " — podstawowa	$\{00\bar{1}\}$	"

24. Klasa piramidy tetragonalnej s(4').

Tu cztery pł., przecinające się w osi sym. czterokrotnej, nie mają znaczenia realnego, lecz stają się pł. odbić dwoistych. Oś krystalogr. Z zlewa się z osią sym. czterokrotną, ca osie zaś x i y wybieramy dwie jednoznaczne krawędzie prostopadłe do z, przez które przeprowadzamy pł. odbić dwoistych.



Postacią ogólną jest piramida tetragonalna trzeciego rodzaju z biegunami wewnątrz trójkąta sym. Jest ona lewa {hkl}, jeżeli biegun początkowy leży w trójkącie a, prawa {khl} zaś, jeżeli biegun począt. leży w trójkącie b.

Prócz tego piramidy te mogą być górne {hkl} i {khl} i dolne $\{hk\bar{l}\}$ i $\{kh\bar{l}\}$. Wszystkie inne formy piramidalne i pryzmatyczne są tylko szczególnymi przypadkami tej postaci ogólnej. Są to: piramidy tetrag. 1go rodz. górne i dolne {hhl} i $\{hh\bar{l}\}$, oraz 2go rodz. górne i dolne {hol} i $\{ho\bar{l}\}$; słupy tetragonalne 3go rodzaju lewe {hko} i prawe {kho}, słup tetragonalny 1go rodz. {110} i słup tetrag. 2-go rodz {100}. Postaciami szczegółowemi są tylko: ściana wierzchołkowa {001} i podstawowa $\{00\bar{1}\}$. Mamy więc tu następujące postaci proste:

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Piramidy tetrag. IIIr. górne lewe	{hkl}	asymetryczne
—— " —— " — prawe	{khl}	"
—— " —— " - dolne lewe	$\{hk\bar{l}\}$	"
—— " —— " — prawe	$\{kh\bar{l}\}$	"
		"

Piramidy tetr. II rodz. górne	$\{h0l\}$	asymetr.
— „ — „ — dolne	$\{h0\bar{l}\}$	„
— „ — I r. górne	$\{hhl\}$	„
— „ — „ — dolne	$\{hh\bar{l}\}$	„
Słupy — „ — III r. lewe	$\{hk0\}$	„
— „ — „ — prawe	$\{kh0\}$	„
Słup — „ — II r.	$\{100\}$	„
— „ — I r.	$\{110\}$	„
Ściana wierzchołkowa	$\{001\}$	C_4
— „ — podstawowa	$\{00\bar{1}\}$	„

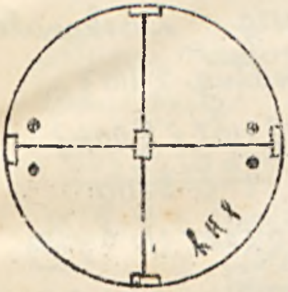
Przykładem tej klasy jest prawy winian baru i antymonylu $Ba(SbO)_2(C_4H_4O_6)_2 . H_2O$; $a : c = 1 : 0{,}4406$.

IV. Układ osi rombowy.

Układ osi rombowy tworzą trzy prostopadłe względem siebie krawędzie niejednoznaczne. Kryształy tego układu ustawiamy zwykle tak, ażeby jedna oś (krótsza) biegła do badacza, druga (dłuższa) z prawej strony ku lewej, wówczas trzecia będzie prostopadła. Jednostki osiowe $a : b : c$ są tu od siebie niezależne.

25. Klasa dwupiramidy rombowej: $\delta(222)$.

Trzy nawzajem prostopadłe pł. symetryi prostej przecinają się w trzech nawzajem prostopadłych dwubiegunowych niejednoznacznych dwukrotnych osiach symetryi. Osie krystalog. zlewają się z osiami symetryi dwukrotnemi. Obecne jest centrum symetryi. Postacią ogólną jest <u>dwupiramida rombowa</u> będąca ośmiościanem. Formami szczegółowemi będą <u>słupy rombowe i dwuściany</u>. Zarówno pierwsze jak drugie różnią się swem położeniem względem osi krystalograficznych. Odróżniamy <u>słupy pionowe</u> (biegun początkowy na <u>xy</u>), <u>poprzeczne</u> (biegun na <u>xz</u>) t.j. równoległe do osi <u>y</u> i podłużne (biegun na <u>zy</u>), t.j. równoległe do osi <u>x</u>.



$P+P'+P''\ L^2+L'^2+L''^2;\ C$

Analogicznie do tego odróżniamy <u>dwuścian poprzeczny</u> (biegun w <u>x</u>), <u>podłużny</u> (biegun w <u>y</u>) i podstawowy (bieg. w <u>z</u>).

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Dwupiramidy rombowe	{hkl}	asymetr.
Słupy pionowe	{hk0}	jednosym.
Słupy poprzeczne	{h0l}	"
— " — podłużne	{0kl}	"
Dwuścian poprzeczny	{100}	dwusymetr.
— " — podłużny	{010}	"
— " — podstawowy	{001}	"

<u>Przykłady</u>:

<u>Siarka</u> a:b:c = 0·8130:1:1·9030 {111}, {113}, {011}, {001}

Aragonit = $CaCO_3$ $a:b:c = 0{\cdot}6224:1:0{\cdot}7206$. $\{110\}, \{010\}$, $\{011\}; \{111\}, \{121\}$

Anhydryt = $CaSO_4$; $a:b:c = 1{\cdot}005:1:0{\cdot}894$.

Baryt = $BaSO_4$; $a:b:c = 0{\cdot}8148:1:1{\cdot}3127$. Doskonale łupliwy według $\{001\}$, mniej dokładnie według $\{110\}$. Często w tablicach rombowych otoczonych $\{110\}$ i $\{001\}$.

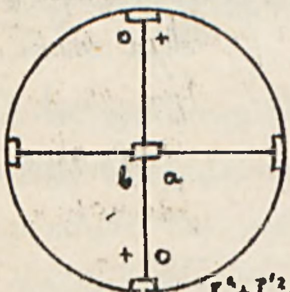
Chryzoberyl $BeAl_2O_4$; $a:b:c = 0{\cdot}4700:1:0{\cdot}5800$

Topaz = $5Al_2SiO_5 \cdot Al_2SiF_{10}$; $a:b:c = 0{\cdot}5285:1:0{\cdot}9539$ łupliwość doskonała $\{001\}$. często $\{110\}, \{120\}, \{011\}, \{111\}, \{001\}$.

Staurolit = ~~H~~ $\cdot FeAl_5Si_2O_{13}$ = $a:b:c = 0{\cdot}4725:1:0{\cdot}6804$ $\{110\}, \{010\}, \{001\}, \{101\}$.

26. Klasa bisfenoidu rombowego: $s(2'2'2')$.

Trzy pł. odbicia dwoistego przecinają się w 3^{ch} dwukrotnych osiach symetryi, które są jednocześnie osiami krystalog.



$L^2 + L'^2 + L''^2$

Postacią ogólną jest bisfenoid rombowy, który może być dwojakiego rodzaju: prawy (biegun w trójkącie a), lewy (biegun w trójkącie b).

Szczególnym przypadkiem postaci ogólnej są słupy rombowe z biegunami na bokach trójkąta sym. xzy.

Postaciami szczegółowemi są dwuściany z biegunami na wierzchołkach trójkąta x, y, z.

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Bisfenoidy prawe	$\{hkl\}$	asymetr.
lewe	$\{h\bar{k}l\}$	"
Słupy rombowe	$\{hko\}, \{okl\}, \{hol\}$	"
Dwuściany	$\{100\}, \{010\}, \{001\}$	C_{2v}

Przykład: Siarkan magnezowy (sól gorzka) $MgSO_4 \cdot 7H_2O$

$a:b:c = 0{\cdot}990 : 1 : 0{\cdot}57$.

27. Klasa piramidy rombowej: $c(2)$

Dwie pł. symetryi zwyczajnej przecinają się w dwukrotnej polarnej osi sym. Ta ostatnia jest krystalograficzną osią z. Za osi x i z przyjmujemy linie przecięcia się 2 pł. symetryi z pł. do nich prostopadłą. Ogólną postacią jest piramida

rombowa, której szczególnym przypadkiem jest słup rombowy $\{hko\}$.. Piramidy mogą być górne i dolne. Postaciami szczegółowemi są t. zw. daszki z biegunami na xz i zy, które również mo-

P+P', d²p

gą być górne i dolne; dwuścian poprzeczny (x) i dwuścian podłużny (y), wreszcie ściana wierzchołkowa i ściana podstawowa.

Nazwa	Symbol	Sym. ściany
Piramidy rombowe górne	$\{hkl\}$	asymetr.
— " — " — dolne	$\{hk\bar{l}\}$	"
Słupy — " —	$\{hko\}$	"

Daszki górne podłużne	$\{0kl\}$	jednosym.
— „ — poprzeczne	$\{h0l$	"
— „ — dolne podłużne	$\{0k\bar{l}$	"
— „ — poprzeczne	$\{h0\bar{l}$	"
Dwuściany poprzecz. i podł.	$\{100\},\{010\}$	"
Ściana wierzchołkowa	$\{001\}$	dwusymetr.
— „ — podstawowa	$\{00\bar{1}\}$	"

Znanym przykładem tej klasy jest kalamin (galman) $H_2Zn_2SiO_5$; $a:b:c = 0.7835:1:0.4778$. Kryształy wybitnie hemimorficzne na dolnym (elektr. +) końcu mają piramidy $\{12\bar{1}\}$, na górnym (elektr. −) daszki $\{101\},\{301\}$, $\{011\},\{031\}$ i ściany wierzchołkowe $\{001\}$.

Prenit = $H_2Ca_2Al_2Si_3O_{12}$, $a:b:c = 1.1272:1:0.8420$.

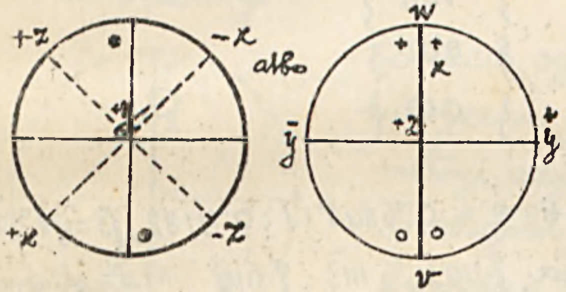
V. Układ osi jednoskośny.

Układ osi jednoskośny tworzą trzy krawędzie a, b, c, z których $\underline{b}$ jest prostopadła do $\underline{a}$ i $\underline{c}$. Zwykle kryształom jednoskośnym nadajemy taką oryentacyę, ażeby oś b (y) była poprzeczna, c (z) pionowa, a (x) zaś żeby biegła ku badaczowi ukośnie z góry na dół. Stałe geometryczne określające kryształ jednoskośny są: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \beta$.

28. <u>Klasa pryzmatyczna</u> : $s(2'2'2)$. [2 2' 2']

Dwie nawzajem prostopadłe pł. odbicia dwoistego przecinają się w dwukrotnej osi symetryi i są prostopadłe do trzeciej pł. odbicia prostego, co zarazem sprawia, iż klasa ta ma także centrum symetryi.

Za oś krystalogr. y stale przybieramy dwukrotną oś sym. a w płaszcz. symetryi, do niej prostopadłej wybieramy dwie inne osi x i z, tworzące między sobą dowolny kąt β.



P, L^2, C

Projekcyę stereogr. możemy przedstawić dwojako: raz pł. symetryi jest koło projekcyjne, drugi raz jest nią 1-y południk. Ten drugi obraz bardziej odpowiada powszechnie przyjętej oryentacyi kryształów tej klasy.

Postacią ogólną jest pryzmat o 4 ścianach typu piramidalnego, przecinających wszystkie 3 osi (skutkiem czego zwano go dawniej hemipiramidą = (½ piramidy 8º ściennej). Szczególnymi jej przypadkami są słup pionowy $\{hk0\}$ i podłużny $\{0kl\}$. Formami szczegółowemi są dwuściany t.zw. hemidoma (półdaszek) $\{h0l\}$, dwuścian poprzeczny $\{100\}$ dwuścian podstawowy $\{001\}$ i jedyny w swoim rodzaju dwuścian podłużny $\{010\}$ prostopadle do osi symetryi.

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Pryzmat o ścianach piramidy	$\{hkl\}$	asymetr.
Słup pionowy	$\{hko\}$	"
–"– podłużny	$\{okl\}$	"
Półdaszek (dwuścian)	$\{hol\}$	jednosymetr.
Dwuścian poprzeczny	$\{100\}$	"
–"– podstawowy	$\{001\}$	"
–"– podłużny	$\{010\}$	C_2

Przykłady:

Gips = $CaSO_4 . 2H_2O$ $a:b:c = 0·6895:1:0·4132$, $\beta = 98°58'$
Najpospolitsza kombinacya $\{110\}$, $\{111\}$, $\{010\}$. Łupliwość nadzwyczaj dokładna równolegle do $\{010\}$ mniej dokładna ‖ do $\{100\}$.

Epidot = $HCa_2(Al, Fe)_3Si_3O_{13}$ $a:b:c = 1·5807:1:1·8057$, $\beta = 115°24'$. Kryształy rozwinięte w kierunku osi sym. Najczęściej występują postacie $\{001\}$, $\{100\}$, $\{101\}$, $\{\bar{1}11\}$.

Mika (Muskowit) = $H_2KAl_3Si_3O_{12}$ $a:b:c = 0·577:1:2·217$, $\beta = 95°5'$. Najdokładniejsza łupliwość równolegle do $\{001\}$.

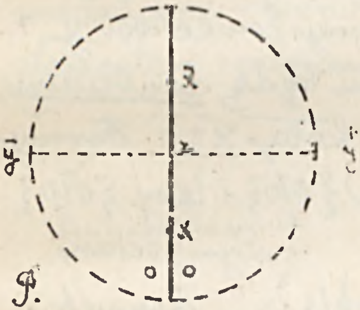
Dyopsyd = $(Mg, Fe)CaSi_2O_6$ $a:b:c = 1·092:1:0·589$, $\beta = 105°49'$. Najpospolitsze postaci: $\{100\}$, $\{010\}$, $\{110\}$, $\{001\}$, $\{111\}$, $\{\bar{2}21\}$. Łupliwość ‖ $\{110\}$.

Ortoklaz = $K_2Al_2Si_6O_{16}$ $a:b:c = 0·6538:1:0·5526$, $\beta = 116°3'$. Łupliwość dokładna równolegle do $\{001\}$

i $\{010\}$. Najpospolitsze połączenie form $\{001\}$, $\{010\}$, $\{110\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{2}01\}$, $\{\bar{1}11\}$ i $\{021\}$ — (porównaj ćwiczenia projekcyjne).

29. Klasa domatyczna (daszkowa): $S(1)$. (po Maul.)

Jedna tylko pł. symetryi prostej. Oś y biegnie prostopadle do niej, za osi x i z wybieramy dwie krawędzie leżące w pł. symetryi.



P.

ściany pojedyncze.

Postacią ogólną jest para ścian symetrycznie położona względem pł. symetryi, czyli doma (daszek). Szczególnym jej przypadkiem jest dwuścian $\{010\}$ podłużny. Postaciami szczególowemi będą pediony, których bieguny będą leżały na pł. sym.

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Domy (daszki)	$\{hkl\}$	asymetryczne
Dwuścian podłużny	$\{010\}$	"
Pediony	$\{h0l\}$	jednosym.

Przykładem tej klasy jest skolecyt $= CaAl_2Si_3O_{10} \cdot 3H_2O$
$a:b:c = 0{\cdot}976 : 1 : 0{\cdot}343$, $\beta = 90°42'$.

30. Klasa sfenoidalna: $S(2')$.

Dwie względem siebie pł. odbicia dwoistego (urojone) przecinają się w dwukrotnej polarnej osi sym., będącej jedynym realnym pierwiastkiem symetryi tej klasy. Oś krystal. y zlewa się z osią dwukrotną, za osi zaś x i z wybieramy krawędzie leżące w pł. prostopadłej do niej.

L.p.

Ogólną postacią jest sfenoid, składający się z 2 równych i kongruentnych ścian. Sfenoidy bywają prawe $\{hkl\}$ i lewe $\{h\bar{k}l\}$, zależnie od tego, czy ściany ich przecinają dodatni, czy ujemny koniec osi y.

Szczególnym przypadkiem sfenoidu będą dwuściany, których bieguny leżą na obwodzie koła xz. Formy szczegółowe stanowią pedion prawy $\{010\}$ i lewy $\{0\bar{1}0\}$.

Nazwa	Symbol	Sym. ścian
Sfenoidy prawe	$\{hkl\}, \{hk0\}, \{0kl\}$	asymetr.
—"— lewe	$\{h\bar{k}l\}, \{h\bar{k}0\}$ $\{0\bar{k}l\}$	"
Dwuściany	$\{h0l\}$ $\{001\}$ $\{100\}$	"
Pedion prawy	$\{010\}$	C_2
—"— lewy	$\{0\bar{1}0\}$	"

Znanym przykładem tej klasy są kryształy lewego i prawego kwasu winnego $= C_4H_6O_6$ $a:b:c = 1{\cdot}2747 : 1 : 1{\cdot}0266$, $\beta = 100°17'$; cukier trzc. $= C_{12}H_{22}O_{11}$ $a:b:c = 1{\cdot}259 : 1 : 0{\cdot}878$ $\beta = 103°30'$ i in.

VI. Układ osi trójskośny.

Za osi krystalogr. wybieramy trzy dowolne krawędzie przecinające się pod kątami również dowolnymi. Mamy więc tu pięć stałych a, b, c (=1), α, β, γ. – W wyborze kierujemy się tem, aby ściany ważne fizycznie (np. płaszczyzny łupliwości) stały się płaszczyznami osiowemi.

dwugałęzna ważna

31. <u>Klasa pinakoidalna (dwuścianowa)</u>: ◦(2''2''2'').
Mamy tu 3 nawzajem prostopadłe pł. odbić troistych, sprowadzające obecność centrum symetryi, które jest jedynym elementem realnym tej klasy. ogólna postać ma tylko 2 ściany.

C.

Jedyną postacią jest <u>pinakoid</u> (dwuścian), składający się z 2 równoległych jednakowych ścian związanych środkiem sym. Każda para ścian jest zatem fizycznie różna od innych par. Tylko obydwa końce jednej i tejże samej prostej są jednoznaczne. Dwie proste lub dwie płaszczyzny nierównoległe mają różne własności fizycz. Na obu przeciwległych ścianach pinakoidu następstwo odpowiednich krawędzi i kątów jest odwrotne.
Analogicznie do innych układów moglibyśmy tu odróżnić:
Dwuściany piramidalne {hkl} (tzw. ¼ piramidy)
—— " —— pryzmatyczne {hk0}, {0kl}, {h0l}
—— " —— właściwe {100}, {010}, {001}
<u>Przykłady</u>: <u>Aksynit</u> – $H_2Ca_4(AlB)_4Si_6O_{23}$, a : b : c = = 0·4928 : 1 : 0·4809, α = 82°44', β = 91°56', γ = 131°31'

$Na_2Al_2Si_6O_{16}$; $CaAl_2Si_2O_8$

typowa kombinacya: {110}, {1̄10}, {111}, {1̄11} i {201}.

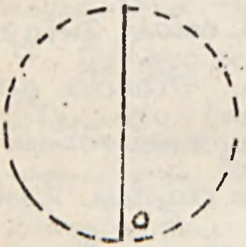
__Plagioklazy__ – szereg ważnych bardzo minerałów, na których czele stoją:

		$a : b : c$	α	β	γ
__Albit__	$Na_2Al_2Si_6O_{16}$.	0·6335 : 1 : 0·5577,	94°3′	116°29′	88°9′
__Anortyt__	$CaAl_2Si_2O_8$	0·6347 : 1 : 0·5502,	93°13′	115°56′	91°12′

Do najpospolitszych postaci należą: {001}, {010}, {110}, {1̄10}, {1̄01}, {1̄1̄1}.

__Dysten__ Al_2SiO_5 $a : b : c = 0{\cdot}899 : 1 : 0{\cdot}709$, $\alpha = 90°5'$, $\beta = 101°2'$, $\gamma = 105°44'$. — Zwykle tylko: {100}, {010}, {001}, {1̄10}

32. Klasa pedyonalna: $S(1')$.



$\alpha = 180$
$2\alpha = 360$

Jedna tylko pł. odbicia dwoistego, którą tu przypuszczamy tylko z racyi ciągłości zasady przeprowadzonej w niniejszym wykładzie. Płaszczyzna ta odbija napowrót biegun dany na kuli, kładąc odbicie na przedmiot. Skutkiem tego w rzeczywistości nie otrzymamy tu żadnego innego bieguna. Żaden kierunek w kryształach tej klasy nie ma sobie równego, tak iż klasa ta charakteryzuje się brakiem symetryi (nazywają też ją asymetryczną). W klasie tej postaci proste składają się tylko z pojedynczych ścian zwanych __pedionami__. Postać ogólna nie różni się zatem od szczegółowej. Mogą tu być kryształy lewe i prawe (enancyomorficzne). Przykłady wśród minerałów dotychczas nieznane. Asymetryczna

Bliźniaki.

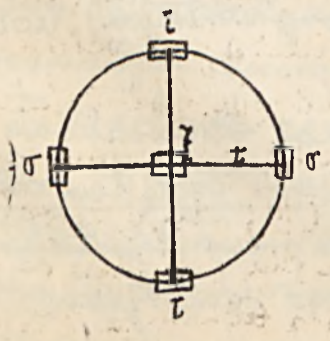
Powyżej roztrząsaliśmy własności geometr. kryształów, mając na uwadze wyłącznie tylko ich osobniki pojedyncze, ograniczone ścianami, należącemi bądź do jednej tylko postaci prostej, bądź do ich kombinacyi. Tego rodzaju indywidua powstają z roztworów przesyconych przez równoległe narastanie warstw molekularnych na zarodkach krystalicznych. Drobinka, wydzielająca się z roztworu przesyconego, zanim osiądzie na powierzchni kryształu, musi oczywiście przybrać (przez pewien obrót w przestrzeni) takie położenie, aby się ułożyć analogicznie do swoich poprzedniczek i utworzyć z nimi sieć o molekułach analogicznych. W środowisku krystalizacyjnem mogą jednak zachodzić pewne komplikacye, stojące na przeszkodzie takiemu równoległemu szykowaniu się cząstek, przechodzących w stan stały. Wówczas dane są warunki, w których mogą powstać nie pojedyncze osobniki, lecz zespolenia dwu osobników zrosłych ze sobą w sposób prawidłowy, tak, iż kierunki jednoznaczne obu indywiduów różnią się o 180°. Gdyby drobiny, dające początek takiemu zespołowi wykonały były dodatkowy obrót o 180° i uszykowały się zupełnie równolegle, powstałby osobnik pojedynczy. Niemożność wykonania tego obrotu prowadzi do powstania kryształu bliźniaczego, czyli wprost bliźniaka przez dalsze zgodne układanie się drobin na obu stronach zarodka.

Większość znaczna bliźniaków ma tę własność, że obydwie ich połowy są symetryczne względem pewnej ściśle określonej płaszczyzny (zwanej pł. bliźniaczą). Prosta prostopadła do tej pł. zwie się osią bliźniaczą. Przez obrót jednego indywiduum koło tej osi o 180° (t.zw. inwersyę) dwie symetryczne połowy bliźniaka zlewają się w kryształ pojedynczy). Dwa bliźniacze kryształy mogą się zrastać albo pł. bliźnięcą, albo też powierzchnia ich zetknięcia może być nieprawidłowa, przyczem jednak elementy geometryczne obu kryształów pozostają symetryczne względem pł. bliźniaczej. Często zdarzają się bliźniaki nie tylko zrosłe, lecz i przerosłe, np. dwa ośmiościany lub dwa sześciany, których pł. bliźniaczą jest ściana oktaedru. Zewnętrzną cechą tego rodzaju bliźniaków są kąty wklęsłe. Dwa przerastające się nawzajem ośmiościany symetryczne względem ściany (111) dają zespół tego rodzaju, że oś bliźniacza, będąca dla każdego osobnika trzykrotną osią symetryi jest dla bliźniaka przerozłego osią symetryi sześciokrotną. Prócz tego dwojak taki jest symetryczny do trzech przez oś tę przechodzących płaszczyzn, którychto normalne są dlań dwukrotnemi osiami sym. (dla dwojaka) (okaz na modelu).

Rzecz oczywista, że płaszcz. bliźniaczą nie może być pł. symetryi, gdyż w takim razie obydwa kryształy byłyby równoległe i dwojaka wytworzyć by nie mogły. Pł. bliźniacza biegnie najczęściej równolegle do obecnej lub możliwej ściany kryształu (nie będącej pł. symetryi) o wskaźnikach zazwyczaj prostych. Często bywa nią pł. łupliwości. W innych razach pł. bliźniacza jest prostopadła do możliwej ściany kryształu a jednocześnie równoległa do leżącej w tej ścianie krawędzi.

W bliźniakach symetrycznych względem płaszczyzny dwa przypadki ogólne:

a) kryształ bliźniaczy składa się z indywiduów posiadających centrum symetryi. Wówczas normalna ⟂ do płasz. bliźniaczej (z) będzie n-krotną (a więc co najmniej 2-krotną) osią symetryi dwojaka. Nie może ona być 2-krotną osią sym. kryształu pojedynczego, gdyż w takim razie pł. z byłaby płaszczyzną symetryi.



Często zdarza się, że pł. bliźniaczą z jest prostopadła do pł. sym. $\underline{s}$ i $\underline{t}$ każdego indywiduum tak, iż normalne do tych płaszcz. $\underline{s}$ i $\underline{t}$ są 2-krotnemi osiami sym. kryształu bliźniaczego.

<u>Przykład:</u> dwa przerosłe ośmiościany lub dwa przerosłe sześciany;

6.) osobniki bliźniacze <u>pozbawione są centrum symetrji.</u> Wówczas płaszczyzna normalna (z) do pł. bliźniaczej (3) może być jednocześnie 2-krotną osią sym. kryształu pojedynczego. Przykład takiego dwojaka mamy w przerastających się nawzajem dwu czworościanach (dyamentu), symetrycznych względem {100}.

Podobne stosunki wykazują dwa przerosłe kryształy kwarcu lewego i prawego. Obydwa kryształy bliźniacze są symetryczne względem 3 płaszczyzn pionowych prostopadłych do ścian słupa, a normalne tych ścian są dwukrotnemi osiami sym. kryształów pojedynczych. Oczywista, że ten rodzaj bliźniaczości jest niemożliwy dla 2 kryształów kwarcu lewych lub 2 prawych (kongruentnych), lecz tylko dla 2 enancyomorficznych.

Drugą mniej rozpowszechnioną grupę bliźniaków stanowią kryształy bliźniacze <u>symetryczne względem osi.</u> Do tych należą np. dwa lewe lub dwa prawe kryształy kwarcu, tworzące dwojaki. Nie są one symetryczne względem żadnej pł., lecz tylko względem osi pionowej, która jest dwukrotną osią sym. kryształu dwoistego. Oba osobniki bliźniacze przerastają się często nawzajem tak, iż granica ich bynajmniej nie jest pł. równą, lecz nieprawidłową. To przerastanie może być tak zupełne iż oba kryształy tworzą jakby osobnik (bez kątów wklęsłych). Wówczas oś pionowa, będąca dla każdego osobnika osią sym. 3 krotną, staje się dla dwojaka osią sym. sześciokrotną.

Przykłady:

Do najpospolitszych dwojaków układu regularnego należą:

Fluspat tworzy często dwojaki przerosłe sym. do $\{111\}$.
Magnetyt i spinel dają często dwojaki zrosłe ścianą oktaedru [t.zw. prawo spinelowe].
Piryt. - Dwojaki przerosłe sym. do $\{110\}$.
Blenda. Pojedyncze osobniki, będące kombinacyą dwu tetraedrów, zrastają się ścianami należącemi do rozmaitych czworościanów.
To zrastanie powtarza się wielokrotnie, skoro indywidua bliźniacze przybierają kształt cienkich blaszek.
Tetraedryt. Dwojaki przerosłe dwu tetraedrów symetrycznych względem pł. $\{211\}$. Oś trzykrotna krawędzi pojedynczych jest tu 6-krotną osią bliźniaczą.

W układzie tetragonalnym zrastanie się bliźniacze najczęściej zdarza się u ciał następujących:
Kalcyt. Dwa kryształy zrastają się symetrycznie do $\{0001\}$. Znacznie pospoliciej zdarzają się jednak bliźniaki wielokrotne symetryczne do romboedru odwróconego $\frac{1}{2}r\,\{01\bar{1}2)$.
Indywidua przybierają tu postać cienkich blaszek powtarzających się wielokrotnie.
Kwarc. Dwa najważniejsze prawa poznaliśmy już wyżej. Najczęściej zdarzają się bliźniaki dwu lewych i dwu prawych kryształów. Rzadziej dwa kryształy enancyomorficzne zrastają się do płaszczyzn pionowych prostopadłych do ścian słupa $\{10\bar{1}0\}$.
Typowe przykłady bliźniaków układu tetragonalnego:
Kasyteryt i rutyl tworzą bliźniaki „kolankowe" - dwa kryształy leżą symetrycznie do ściany dwupiramidy 2-go rodzaju $\{h0l\}$.
W układzie rombowym płaszczyzną bliźniaczą bywają najczęściej ściany słupa $\{110\}$. Tą ścianą zrastają się np. kryształy aragonitu, skupiając się po kilka. Cztery kryszt. staurolitu zrastają się nakształt krzyża sym. do ścian $\{032\}$. Kalamin tworzy dwojaki sym.

do {001}, gdyż ściana ta w jego klasie nie odgrywa roli pł. symetryi.

Układ jednoskośny.

Gips tworzy pospolite dwojaki („jaskółcze ogony") symetrycz. do {100}. Epidotu bliźniaki są sym. do {100}. Ortoklaz tworzy bliźniaki według 3 praw. pł. bliźniaczą jest {100}, {001} lub {021}.

Układ trójskośny:

Bliźniaki, powtarzające się wielokrotnie, stanowią zjawisko wielce charakterystyczne dla plagioklazów. Najczęstszą zasadą zrastania się bliźniaczego jest to, że osobniki leżą sym. do {010} i powtarzają się naprzemian wielokrotnie. Rzadziej osobniki zrastają się w ten sposób, że pł. bliźniaczą dla nich jest pł. prostopadła do ściany {001} i równoległa do leżącej w niej krawędzi. —

Koniec

Cennik

skryptów wydanych nakładem „Kółka Przyrodników U. U. J."

	dla członków		dla nieczł.	
	kor.	hal.	kor.	hal.
Prof. Dr. Morozewicz:				
Krystalografia, wyd. II popraw. i uzupeł.	3	40	5	—
Minerały skałotwórcze wydanie I				
Prof. Dr. M. Siedlecki:				
Fizyologia zwierząt domowych	4	80	6	—

<u>Uwaga</u>: Członkowie „Kółka Chemików" oraz „Kółka Matem.-fizycz." mogą nabywać powyższe skrypta za pośrednictwem swego Wydziału po cenach naznaczonych dla członków „Kółka Przyrodników".

12