ALGEBRA,

DECYZYĄ JAŚNIE WIELMOŻNEGO MINISTRA OŚWIECENIA NARODOWEGO PRZEPISANA DO UŻYTKU W SZKOŁACH OKRĘGU NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO, I NAKŁADEM TEGOŻ OKRĘGU WYDANA.

CZĘŚĆ I.

NA KLASSĘ IVtą

OBEJMUJĄCA:

Wiadomości wstępne; dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ilości algebraicznych; wykład równań stopnia pierwszego z jedną lub więcej niewiadomemi; wykład nierówności i rozdział dodatkowy z zagadnieniami dla wprawy.

Cena exemplarza z oprawą tak w Warszawie jak i na prowincyi, kop. sr. 35.

WARSZAWA

1859.

ALGEBRA.

ALGEBRA,

DECYZYĄ JAŚNIE WIELMOŻNEGO MINISTRA OŚWIECENIA NARODOWEGO PRZEPISANA DO UŻYTKU W SZKOŁACH OKRĘGU NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO, I NAKŁADEM TEGOŻ OKRĘGU WYDANA.

CZĘŚĆ I.

NA KLASSĘ IV[tą]

OBEJMUJĄCA:

Wiadomości wstępne; dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ilości algebraicznych; wykład równań stopnia pierwszego z jedną lub więcej niewiadomemi; wykład nierówności i rozdział dodatkowy z zagadnieniami dla wprawy.

Cena exemplarza z oprawą tak w Warszawie jak i na prowincyi, **kop. sr. 35.**

WARSZAWA

—

1859.

Wolno drukować, pod warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby egzemplarzy.

Warszawa, dnia 24 Listopada (6 Grudnia) 1858 roku.

p. o. Starszego Cenzora,
ASSESSOR KOLLEGIALNY, **A. Broniewski.**

W Drukarni Gazety Codziennéj.

PRZEDMOWA.

JW. Kurator Okręgu Naukowego Warszawskiego polecił mi ułożyć „*Zasady algebry*,” według nowego planu wprowadzonego do gimnazyów Okręgu.

Wywiązując się z takowego polecenia, obrałem za podstawę méj pracy dzieła francuzkich autorów, jakoto: PP. Catalau, Sonnet, Cirodde, Jariez, Mayer i Choquet i innych. Zachowałem przyjęty u nas na klassy rozkład przedmiotów i względną obszerność różnych ustępów początkowéj algebry; starałem się nadto o dobór dowodzeń odznaczających się łatwością, jasnością i zwięzłością. Nie poprzestając na opisie szczegółowych sposobów, przytaczałem ogólne rozumowania, ujęte w język matematyczny, jako przysposabiające umysły uczących się do łatwiejszego pojęcia dowodzeń wyższéj matematyki.

Dla dogodności nauczających, do każdego ustępu dodane zostały przykłady lub zadania odznaczające się rozmaitością swéj treści. Uważałem za rzecz zbyteczną zamieszczać znacznéj liczby przykładów, bowiem zebrane już poprzednio z polecenia JW. Kuratora, i wydrukowane przykłady i zadania algebraiczne, mają być i na przyszłość przez nauczających używane.

Praca niniejsza zdołała zyskać uznanie Władzy Edukacyjnéj w Królestwie Polskiém, i decyzyą JW. Ministra Oświecenia Narodowego, przepisana do użytku w szkołach Okręgu Naukowego Warszawskiego, nakładem tegoż Okręgu wydaną została.

Felix Beneveni,
Nauczyciel Matematyki.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości wstępne.

1. Rozwiązując rozmaite zagadnienia w arytmetyce, otrzymujemy żądany wypadek, który oprócz wartości na ilość niewiadomą w zagadnieniu, nie ma dla nas żadnéj innéj wagi. Nie pokazuje on bynajmniéj drogi jaką postępowaliśmy, aby go otrzymać; ztąd gdy zajdzie potrzeba rozwiązania zagadnienia zupełnie takiego jak poprzednie, w którém jednak wielkości ilości danych zostały zmienione, musimy znowu drogą rozumowania przychodzić do żądanego wypadku.

Niedogodność tę łatwo usunąć, kładąc w miejsce liczb znaki ogólne *np.* głoski—a działania jakie na danych ilościach odbywać mamy, oznaczając także pewnemi znakami; wówczas po rozwiązaniu zadania, otrzymamy wypadek ogólny, pokazujący jakie działania z ilościami wiadomemi odbyć potrzeba dla otrzymania ilości niewiadoméj. Taki wzór posłuży nam już do rozwiązania wszystkich zagadnień jednego rodzaju; potrzeba tylko w miejsce ilości danych oznaczonych ogólnie, głoskami, podstawić wartości ich liczebne dane w zagadnieniu, a następnie wykonać działania znakami wskazane.

Weźmy naprzykład takie zadanie: *Jaki jest procent pojedyńczy od kapitału 5200 rs. po latach 6-ciu przy stopie procentu* 4%?

W arytmetyce rozwiązujemy to zadanie tak:

z proporcyi:

$$1 : 4 = 6 : x$$

znajdziemy

$$x = 24$$

procent od 100 za cały czas: następnie znalazłszy wyraz niewiadomy proporcyi:

$$100 : 24 = 5200 : y \text{ tojest:}$$

$$y = 24 \times 52 = 1248$$

otrzymujemy liczbę 1248, która jest szukanym procentem.

Jeżeliby kapitał, stopa procentu i czas zmieniły się, wówczas szukając procentu należałoby przejść całą powyżej wskazaną drogę rozumowania, aby znaleźć tenże procent. Lecz właśnie oznaczając dane ilości ogólnie głoskami, możemy znaleźć ogólne prawidło, wskazujące nam, jakie działania z danemi ilościami wykonać należy, aby ilość niewiadomą otrzymać. I tak: oznaczmy dany kapitał przez K, stopę procentu przez S, liczbę lat przez C, szukany zaś procent przez P.

Stopa procentu jak wiadomo jest procentem od 100 za rok; procent więc roczny od jedności kapitału jest 100 razy mniejszy, czyli jest:

$$\frac{S}{100}$$

za lat więc C, procent od jedności kapitału musi być C razy większy, czyli:

$$\frac{CS}{100};$$

że zaś dany kapitał ma jedności K, zatém szukany procent:

$$P=\frac{KCS}{100}$$

Wyrażenie powyższe pokazuje nam, że dla otrzymania procentu od jakiegokolwiek kapitału przy danéj stopie procentu i za pewną liczbę lat, należy: kapitał dany pomnożyć przez liczbę lat i przez stopę procentu, zaś iloczyn ten podzielić przez 100.

W saméj rzeczy w poprzedniém zagadnieniu liczebném mieliśmy:

$$K=5200,\ S=4,\ C=6$$

więc:

$$P=\frac{5200\times4\times6}{100}=1248.$$

Korzyść jaką osiągamy postępując tym sposobem jest znakomita; nie potrzebujemy bowiem przechodzić całéj drogi rozumowania, prowadzącéj do rozwiązania danego zagadnienia, dosyć mieć jedno zagadnienie rozwiązane, aby wszystkie inne tego rodzaju za rozwiązane uważać.

2. Przedstawienie wszelkich ilości ogólnie głoskami, oraz wskazanie działań znakami, stanowi tak zwane *liczenie algebraiczne.*

Do oznaczenia ogólnie ilości używa się głosek łacińskiego lub greckiego abecadła. Jednozgodnie nadto przyjętem jest, że ilości dane oznaczają się początkowemi głoskami, jak: a, b, c, d, ...; niewiadome zaś końcowemi jakoto: x, y, z. Oprócz tego ilości różne, lecz zostające w pewnym między sobą związku, znaczy się często temiż samemi głoskami, a dla odróżnienia daje się nad głoskami pewne znaki; tak więc piszemy: a, a', a'', a''' i t. d. co się wymawia: a, a pierwsze, a drugie, a trzecie.

W liczeniu algebraiczném kiedy mówimy: ilość a, b, c, i t. d., to znaczy: że te ilości mogą mieć wszelką dowolną wartość liczebną i tak: może być a równe 10, 500, 1000, 1587, 10000 i t. d.

3. Już w arytmetyce poznaliśmy znaki do oznaczenia rozmaitych działań używane, dla przypomnienia jednak powtórzymy je tutaj, i tak:

$+$ (więcéj) znaczy że dwie ilości mają być dodane,
$-$ (mniéj) „ odejmowanie,
$\times$ lub . „ mnożenie,
: lub — „ dzielenie,
$\sqrt[m]{\quad}$ „ pierwiastek potęgi m z ilości pod pierwiastkiem będącéj,
$=$ „ że dwie ilości są sobie równe,
$>$ „ że jedna ilość jest większa od drugiéj,
$<$ „ że jedna ilość jest mniejsza od drugiéj.

4. Dodać nadto należy:

1° że dla wskazania iż ilość a ma być pomnożoną przez ilość b. dosyć jest napisać ab;

2° Iloczyn z m czynników równych jakiéj ilości b, oznacza się pisząc b^m, co wyraża że b podniesione jest do potęgi m; gdzie m jest wykładnikiem potęgi (показатель степени).

3° *Nawias (скобки)* znaczy: że wszystko co on w sobie zawiera, ma być uważane za jednę ilość, i tak: $(a+b-c)d$ wyraża że do a należy dodać b, od summy téj odjąć c, a dopiéro różnicę ztąd powstałą pomnożyć przez d.

5. *Wyrażeniem algebraiczném (алгебраическое выраженie)* nazywamy każde wyrażenie, w którém głoski zastępują miejsce liczb; głoski te bądź same, bądź połączone znakami działań, jak *np.* a, $a+b$, $\frac{ab}{d}$, $\sqrt[m]{a}$ i t. d. stanowią wyrażenia algebraiczne.

6. *Równością algebraiczną (алгебраическое равенство)* zowiemy połączenie dwóch wyrażeń algebraicznych znakiem równości; *np.* $a+b=c-d$; $x=a$ i t. d.

7. *Nierównością algebraiczną (неравенство)* zowiemy połączenie dwóch wyrażeń algebraicznych znakiem nierówności $>$ lub $<$ i tak: $a+b>c-d$; $\sqrt[m]{a+c}<b$ i t. d.

8. *Wzór algebraiczny (алгебраическая формула)* jest to równanie, którego pierwsza strona jest ilością niewiadomą, zaś druga jest wyrażeniem algebraiczném złożoném z ilości danych w zagadnieniu. *Np.* wyrażenie $x=a+$ $+\frac{c}{4}-\sqrt[m]{d}$ jest wzorem algebraicznym, który oznacza: że dla otrzymania wartości niewiadoméj, znając ilości dane w liczbach, należy: do ilości a dodać czwartą część ilości c, a od summy téj odjąć pierwiastek potęgi m z ilości d.

9. Wskazanie sposobów jakiemi otrzymać można wzory ogólne na ilości niewiadome w zagadnieniach, zbadanie własności równań i nierówności jest właśnie zadaniem i celem algebry.

Algebra więc jest to nauka wzorów równań i nierówności.

W nauce téj rozwiązując zagadnienia, badając własności równań i nierówności nie zwraca się bynajmniéj uwagi na wartość liczebną danych ilości, przedstawia się je ogólnie, a wypadek otrzymany pokazuje tylko: jakim zmianom uledz powinny dane ilości, jakie działania na nich odbyć potrzeba, aby wartość niewiadoméj otrzymać. Tutaj dopiéro wartość liczebna danych ilości koniecznie jest potrzebna. Żaden algebraiczny wzór nie będzie w zupełności rozwiązany, dopóty, póki w miejsce głosek t. j. bezwzględnych ilości nie wstawimy wartości liczebnych, zagadnieniem objętych.

10. *Wyrazem* lub *jednomianem (одночленъ)* nazywamy wyrażenie algebraiczne nie zawierające w sobie żadnego ze znaków $+$, $-$, $=$, $>$ i $<$. *Np.* a, ab, $5ab^2c$, $8\sqrt{ab}$ i t. d.

11. Jednomian algebraiczny składa się z trzech części: z współczynnika, głosek i wykładników.

Współczynnik (коэффициентъ) jest to liczba z lewéj strony jednomianu stojąca i oznaczająca ile razy dany jednomian ma być do siebie dodany. Tak więc: w jednomianie $5ab$, współczynnik 5 oznacza, że jednomian ab ma być 5 razy do siebie dodany, to jest: $5ab=ab+ab+ab+ab+ab$. — Jednomiany bez współczynników można uważać jako opatrzone współczynnikiem jedność, i tak: $a=1.a$; $ab=1.ab$ i t. d.

Głoski (буквы) w jednomianie są to ilości ogólne nie mające żadnéj naznaczonéj wartości liczebnéj.

Wykładnik (показатель степени) znaczy: ile razy głoska w skład jednomianu wchodząca ma być wzięta za czynnik. Tak więc $a^5=a.a.a.a.a$.

Głoski nie mające żadnego wykładnika, mogą być uważane jako mające za wykładnik jedność, t. j. $a=a^1$; $b=b^1$ i t. d.

12. Jakkolwiek w algebrze używając głosek w miejsce liczb, nie zwracamy bynajmniéj uwagi na wartość liczebną ilości z któremi rozmaite działania odbywamy, jednakże odróżniamy dwojakie ilości, mianowicie: *dodatne (положительныя количества)* i *odjemne (отрицательныя)*. Trudno jest początkującym poznać dokładnie różnicę, jaka między temi ilościami zachodzi; późniéj z postępem nauki, poznanie to samo z siebie przyjdzie; tutaj więc postaramy się dać o ile możności pierwsze, elementarne pojęcie o tém: co w algebrze rozumie się przez ilości dodatne i odjemne. W tym celu rozwiążmy następne zadanie:

Podróżny jadąc z pewnego miejsca po linii prostéj, ujechał mil a, *lecz zmuszony okolicznościami wrócił się po téjże linii mil* b. *Jak daleko jest od miejsca z którego wyjechał?*

Oczywistą jest rzeczą, że w razie gdy a jest większe od b, odległość żądaną oznaczać będzie różnica $a-b$. Lecz jeżeli przeciwnie b jest większe od a, tojest: jeżeli podróżny wrócił się więcéj mil niż ujechał, wówczas od a nie można odjąć b; odwrotnie więc od b należy odjąć a, i różnica ztąd powstała, pokaże nam, o ile mil podróżny znajduje się od miejsca swego wyjazdu, lecz z przeciwnéj strony, tojest: że wracając się, musiał przejechać przez miejsce z którego wyjechał.

Chcąc więc ogólnie wypadek podobnego rodzaju oznaczyć, w algebrze zatrzymujemy zawsze wyrażenie wynikłe w pierwszym razie, tojest $a-b$; lecz nie mogąc od a odjąć b, odejmujemy odwrotnie a od b, zaś różnicy np. c dajemy znak—; piszemy przeto $a-b=-c$; co nam dostatecznie wyjaśnia: że podróżny wrócił się więcéj mil niż poprzednio ujechał, że musiał przejeżdżać w powrocie przez miejsce swego wyjazdu, i że obecnie znajduje się od tego miejsca o mil c, lecz z przeciwnéj niż poprzednio strony. To jest początek i ogólne znaczenie ilości odjemnych. W tym samym wypadku znajdują się: zysk lub strata kupca, pośpiech lub opóźnienie się zegaru, ciepło i zimno i t. d.

Każda więc ilość może być w dwojakim stanie: dodatnim lub odjemnym. Jeżeli więc za ilości dodatne uważać będziemy majątek, zysk, pośpiech zegaru, ciepło i t. p., wówczas długi, straty, opóźnienie się zegaru. zimno i t. p. będą ilościami odjemnemi.

W algebrze ilość dodatna poprzedza się znakiem +, ilość odjemna znakiem—; ilości zaś niemające przed sobą żadnego znaku uważają się za ilości dodatne.

Każda ilość zanim ze stanu dodatniego przejdzie w odjemny, musi się zmienić w zero, o czém z poprzedzającego zadania przekonać się możemy. Dajmy bowiem, że podróżny wrócił się tyle mil ile poprzednio z miejsca danego ujechał, czyli że $a=b$: chcąc więc dojść w jakiéj jest odległości od miejsca swego pierwotnego wyjazdu, szukamy różnicy $a-b$, która jest oczywiście zerem, czyli że podróżny wrócił się do samego miejsca wyjazdu i w niém się znajduje.

Wiemy, że gdy *np.* majątek jakiego kupca uważamy za ilość dodatną, długi jego są ilościami odjemnemi. Lecz kupiec zmuszony jest zaciągać długi wtenczas dopiéro, kiedy straci cały swój majątek. Majątek więc jego coraz maleje, aż nareszcie musi przyjść do zera; jestto stan w którym znajdując się kupiec nie ma wcale majątku, lecz też nie ma i żadnego długu. Następnie tém jest biedniejszy, im więcéj ma długów.

Z powyższego rozumowania wnioskujemy: że zero jest granicą między ilościami dodatnemi i odjemnemi; że każda ilość dodatna tym sposobem jest większą od zera, zaś ilość odjemna jest mniejszą od zera; nareszcie: że ilość odjemna tém jest mniejszą, im większą posiada liczebną wartość. Bo oczywiście kupiec lepiéj stoi pod względem finansowym, gdy ma majątku zero, niż gdy majątek jego wynosi -6000 rsr.: tojest $-6000 < 0$. Woli znowu kupiec mieć długu 6000 rsr. niż 10000 rsr. czyli $-6000 > -10000$.

13. W skład zatém każdego jednomianu algebraicznego wchodzi także i znak (знакъ) $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy jednomian ten jest dodatny lub odjemny (*).

14. *Jednomiany podobne (подобные одночлены)*, są takie, które różnią się tylko znakiem lub współczynnikiem, głoski zaś i wykładniki odpowiednich głosek są w nich też same. Tak więc jednomiany: $+5a^2b^3$ i $-38a^2b^3$ oraz $6ab^4c$ i $-8ab^4c$ są podobne.

(*) P. Cauchy matematyk francuzki, odróżniając ilości dodatne i odjemne, zrobił taką uwagę: „znak $+$ lub $-$ przed wyrazem algebraicznym będący, określa nam jego stan i przymiot tak dokładnie, jak przymiotnik określa rzeczownik przed którym jest położony,"

15. Jednomiany algebraiczne połączone znakami $+$ lub $-$ składają *wielomian (многочленъ)*, który stosownie do liczby jednomianów w skład jego wchodzących, zowie się: dwumianem (двучленъ), trójmianem (трехчленъ) i t. d. Wyrażenia przeto: $b\,a^2 b + 7\,c^3 d - 8\,a^3 cf$ oraz $8\,a^5 c - \sqrt[n]{a\,b}$, są wielomianami; pierwszy z nich jest trójmianem, drugi dwumianem.

16. *Wymiarem jednomianu (измѣреніемъ одночлена)* nazywamy summę wykładników głosek w skład jednomianu wchodzących. Jednomian więc $a^2 b\,c$ jest wymiaru 4go, $a^3 b^2 c^3$—8go i t. d. Jeżeli jednomiany w skład wielomianu wchodzące są jednego wymiaru, wówczas wielomian przyjmuje nazwisko *jednorodnego (однородный многочленъ)*. I tak wielomiany: $a^2 + 2\,a\,b + b^2$; $a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3$ są jednorodne.

17. Rozmaite są rodzaje wyrażeń algebraicznych, i tak jeżeli wyrażenie algebraiczne nie zawiera w sobie żadnego znaku pierwiastkowego, wówczas zowie się *wymiernêm (раціональное количество)*. *Np.* $8\,a^2 b c + \frac{c\,d}{g}$. W przeciwnym razie zowie się *niewymiernêm (ирраціональное)* jako to: $\sqrt[m]{ab} - \frac{cd}{\sqrt{g}}$. Różnica ta ztąd pochodzi: że gdy w wyrażenie algebraiczne zamiast głosek wstawimy liczby, to każde wyrażenie nie zawierające znaków pierwiastkowych, zawsze w zupełności rozwiązane być może; w przeciwnym zaś razie bardzo często nie można go w zupełności rozwiązać, wiemy bowiem że nie wszystkie pierwiastki są wymierne.

Wyrażenie algebraiczne zowie się *całkowitêm (цѣлое количество)* gdy nie zawiera znaków dzielenia, inaczéj zowie się *ułamkowêm (дробное количество)*.

18. Z a g a d n i e n i e: Znaleźć wartość liczebną danego wzoru algebraicznego.

Niech będzie wzór:

$$x=\frac{[(a+b)\,(b+c)-b^2]\;[(b+c)\,(c+a)-c^2]}{\frac{2}{3}\,(a^2+b^2+c^2)^2}$$

Aby znaleźć wartość liczebną dla niewiadoméj x, przypuśćmy że $a=5$, $b=3$, $c=2$; wówczas:

$$x=\frac{(8\times5-9)\,(5\times7-4)}{\frac{2}{3}(25+9+4)^2}=\frac{31\times31}{\frac{2}{3}38^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{31}{38}\right)^2=$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{961}{1444}=\frac{2883}{2888}.$$

Zagadnienie powyższe dostateczne jest do obznajmienia uczących się ze sposobem, w jaki mając daną wartość liczebną głosek składających wzór algebraiczny, znajduje się wartość liczebna dla niewiadoméj.

Treść Rozdziału I.

1. Korzyści z głosek użytych w miejsce liczb i ze wskazania działań zamiast ich wykonania.—2. Liczenie algebraiczne. — 3, 4. Znaki.—5, 6, 7, 8. Określenia wyrażenia algebraicznego, równości, nierówności i wzoru.—9. Cel algebry.—10, 11. Wyraz algebraiczny i części jego składowe.—12, 13. Różnica między ilościami dodatnemi i odjemnemi.—14. Wyrazy podobne.— 15. Wielomiany algebraiczne.—16. Wymiar jednomianu, wielomiany jednorodne.—17. Różne rodzaje wyrażeń algebraicznych.— 18. Wartość liczebna wzoru algebraicznego.

ROZDZIAŁ II.

---

19. Ilości algebraiczne ogólne, równie jak i arytmetyczne, mogą być dodawane, odejmowane, mnożone i dzielone; należy więc poznać jakim sposobem wykonywają się te działania. Powiedzieliśmy już wyżej, że działania algebraiczne dają tylko wypadek ogólny, bezwzględny i wtedy dopiero w zupełności uskutecznione być mogą, gdy w miejsce głosek podstawimy liczby. Dzialania więc z ilościami algebraicznemi mogą być tylko wskazane lub nieco uproszczone.

Dodawanie ilości algebraicznych.

20 Aby dodać do siebie kilka jednomianów, należy tylko wskazać to działanie, łącząc dane jednomiany znakiem + i tak:

Summa jednomianów a, ab, c^2, df, jest $a+ab+c^2+df$.

Pamiętając zaś, że algebra przypuszcza ilości dwojakie: dodatne i odjemne, należy w wypadku pisać ilości z właściwemi znakami. Aby więc otrzymać summę ilości $a^2+(-b)+(+c)+(-8a^2)$, napiszemy: $a^2-b+c-8a^2$.

Zkąd wynika, że summa algebraiczna nie zawsze wyraża powiększanie; z tego powodu wypadkowi z dodawania ilości algebraicznych, dają zwykle nazwę *summy algebraicznéj* dla odróżnienia od *summy arytmetycznéj*, która jest zawsze zbiorem, w ścisłém znaczeniu tego wyrazu, ilości danych do dodania.

Uproszczenie summy z dodania jednomianów powstałéj, może miéć miejsce tylko na wyrazach podobnych, i tak: aby do $+5ab$ dodać $+8ab$, należy (pamiętając na znaczenie współczynników) współczynniki 5 i 8 dodać, i summę 13 wziąć za współczynnik jednomianu, którego głoski pozostają te same, więc:

$$5ab+8ab=13ab$$

gdyż: $5ab=ab+ab+ab+ab+ab$

$$\underline{8ab=ab+ab+ab+ab+ab+ab+ab+ab}$$

tojest: $5ab+8ab=13ab$.

Różnica jaką wykazaliśmy między ilościami dodatnemi i odjemnemi, prowadzi nas do wypadków:

$$8ab+(-5ab)=8ab-5ab=3ab$$
$$5ab+(-8ab)=5ab-8ab=-3ab$$
$$-5ab+(-8ab)=-5ab-8ab=-13ab,$$

zkąd wyprowadzamy takie prawidło: *że aby dodać do siebie ilekolwiek jednomianów, należy je wypisać obok siebie z właściwemi znakami, następnie uprościć wyrazy podobne, które jeżeli mają znaki jednakowe, wówczas współczynniki się dodają i pisze się znak wspólny, jeżeli zaś mają znaki różne, współczynniki się odejmują i pisze się przed różnicą znak współczynnika większego. Głoski zaś wyrazów podobnych przy ich uproszczeniu pozostają bez zmiany.*

21. Znając prawidło na dodawanie jednomianów, łatwo jest wskazać sposób dodawania wielomianów, i tak: dajmy że do wielomianu $(a+b-c)$ dodać mamy wielomian $(d-f+g)$. Gdybyśmy do wielomianu $a+b-c$ mieli dodać tylko jednomian d, wówczas otrzymalibyśmy summę $a+b-c+d$; lecz summa ta byłaby za wielka, bowiem dodać mamy jednomian d zmniejszony o jednomian f, summę więc pierwszą należy zmniejszyć o f czyli pisać:

$$a+b-c+d-f;$$

ta znowu summa jest za mala o g, gdyż mieliśmy dodać nie $d-f$ lecz $d-f+g$, dla otrzymania więc żądanéj summy powiększamy poprzedzający wypadek o g, będzie więc:

$$S=a+b-c+d-f+g.$$

Ztąd wnosimy: że aby dodać do siebie dwa wielomiany, należy wypisać je obok siebie z właściwémi znakami i następnie uprościć wyrazy podobne jeżeli się w zadaniu znajdują.

22. *Przykład 1.* Znaleźć summę następujących wielomianów:

$$\begin{array}{rrrrrr}
A= & -8a^4 & +2a^3b & -2a^2b^2 & +11ab^3 & +\ 7b^4 \\
B= & 2a^4 & +7a^3b & -5a^2b^2 & -20ab^3 & +10b^4 \\
C= & 13a^4 & -9a^3b & +2a^2b^2 & +\ 4ab^3 & -17b^4 \\
\hline
S= & 7a^4 & & -5a^2b^2 & -\ 5ab^3. &
\end{array}$$

Widzimy, że zamiast wypisywać dane wielomiany do dodawania jeden za drugim, dogodniéj jest pisać je pod sobą, jak w dodawaniu arytmetycznem, starając się przytém umieszczać wyrazy podobne pod sobą, ułatwia się bowiem przez to ich uproszczenie.

Przykład 2. Dodać do siebie wielomiany:

$$\begin{array}{rrrrrr}
A= & 7ab^3 & -5a^2b^4 & +\ 8ab^5 & -8ab^6d & \\
B= & -8ab^3 & +5a^2b^4 & -11ab^5 & +9ab^6f & \\
C= & 2ab^3 & -7a^2b^4 & +\ 4ab^5 & +9ab^6d & \\
\hline
S= & ab^3 & -7a^2b^4 & +\ ab^5 & +ab^6d & +9ab^6f.
\end{array}$$

Odejmowanie ilości algebraicznych.

23. *Odejmowanie algebraiczne tak jak i arytmetyczne jest działanie, za pomocą którego znając summę i jedne jéj część znajdujemy część drugą.*

Dla wyprowadzenia prawidła na odejmowanie jednomianów, przypuśćmy że od jednomianu a mamy odjąć jednomian b.

Wiemy, że $a = a - b + b$, odrzucając z obu stron $+b$, pozostaje $a - b$, tojest $a - (+b) = a - b$;

odrzucając zaś $-b$, otrzymamy $a + b$, tojest:

$$a - (-b) = a + b.$$

Ztąd prawidło: *aby dwa jednomiany od siebie odjąć, należy w jednomianie danym do odjęcia czyli w odjemniku przemienić znak na przeciwny i napisać go obok odjemnéj.*

Jeżeli jednomiany dane do odejmowania są podobne, wówczas prawidła podane wyżéj na ich uproszczenie w zupełności się stosują.

24. To co się wyżéj o odejmowaniu jednomianów powiedziało, ułatwi nam wyprowadzenie prawidła na odejmowanie wielomianów.

Dajmy że od wielomianu P. mamy odjąć wielomian P'. Oznaczmy zbiór wyrazów dodatnych w wielomianie P. przez A, zbiór wyrazów odjemnych przez B, zbiór wyrazów dodatnych w wielomianie P' przez C, zaś zbiór wyrazów odjemnych przez D; idzie więc o to, aby od $A - B$ odjąć $C - D$. Gdybyśmy od $A - B$ mieli odjąć tylko C, otrzymalibyśmy różnicę $A - B - C$, że zaś nie mamy odjąć C, lecz ilość o D mniejszą od C, więc różnica otrzymana jest za mała o D; aby mieć różnicę prawdziwą, należy do poprzednio otrzymanéj dodać D, czyli będzie:

$$A - B - C + D.$$

Widzimy więc, że w wielomianie danym do odjęcia, wszystkie wyrazy dodatne są wzięte ze znakami odjemnemi, zaś wszystkie odjemne bierzemy ze znakami dodatnemi.

Ztąd prawidło: *aby dwa wielomiany od siebie odjąć, należy w wielomianie danym do odjęcia, przemienić znaki na przeciwne i w tym stanie napisać go obok wielomianu będącego odjemną.*

Rozumie się, że uproszczenie jakieby na wyrazach podobnych uskutecznić można, powinno być zrobione na zasadach wyżéj wskazanych.

25. *Przykład 1.*

Od wielomianu $2a^3-3a^2b+4ab^2-6b^3$

odjąć wielomian $a^3-5a^2b+7ab^2+4b^3$.

Według prawidła wyżéj wskazanego w odjemniku zmieniamy znaki na przeciwne i tak zmieniony wielomian piszemy pod odjemną dla łatwiejszéj redukcyi, będzie więc:

$$\begin{array}{r} 2a^3-3a^2b+4ab^2-6b^3 \\ -a^3+5a^2b-7ab^2-4b^3 \\ \hline \end{array}$$

a uskuteczniwszy uproszczenie na wyrazach podobnych, otrzymamy na żądaną różnicę:

$$a^3+2a^2b-3ab^2-10b^3.$$

Przykład 2.

Od wielomianu $7a^5+8a^4b-9a^3b^2+10b^4$

odjąć wielomian $11a^4b+7a^3b^2-8b^3$

postępując jak wyżéj jest:

$$\begin{array}{r} 7a^5+8a^4b-9a^3b^2+10b^4 \\ -11a^4b-7a^3b^2+8b^3 \\ \hline \end{array}$$

a po uproszczeniu otrzymamy na żądaną resztę:

$$7a^5-3a^4b-16a^3b^2+10b^4+8b^3.$$

Mnożenie ilości algebraicznych.

26. *Mnożenie algebraiczne tak jak i arytmetyczne jest to działanie za pomocą którego mając mnożną (множное) i mnożnik (множитель) szukamy iloczynu (произведение), któryby tak powstał z mnożnéj jak mnożnik powstał z jedności dodatnéj.*

27. Wiemy z poprzedzającego, że każdy jednomian składa się ze znaku, współczynnika, głosek i wykładników; zastanawiając się więc nad mnożeniem jednomianów, wyprowadzimy prawidła na każdą z powyższych części jednomianu.

28. *Prawidło na znaki:*

Dajmy że jednomian a mnożyć mamy przez jednomian b. Natrafimy w tym razie na cztery przypadki:

$$1)\ +a\times+b$$
$$2)\ -a\times+b$$
$$3)\ +a\times-b$$
$$4)\ -a\times-b$$

W pierwszych dwóch przypadkach mnożenie nie przedstawia żadnych trudności, i tak: pomnożyć $+a$ lub $-a$ przez $+b$, znaczy $+a$ lub $-a$ dodać do siebie tyle razy: ile $+b$ ma w sobie jedności, tojest: b razy. Dodając więc b ilości dodatnych $=+a$, summa musi być dodatną i równa się $+ab$. Dodając znowu b ilości odjemnych $=-a$, summa musi być odjemna i równa się $-ab$.

W trzecim i czwartym przypadku chcąc mieć iloczyn z $+a$ lub $-a\times-b$, uważamy, że $-b$ powstało z dodania do siebie jedności dodatnej b razy, lecz w summie przemieniono znak na przeciwny, iloczyny więc szukane muszą także powstać z dodania do siebie b razy $+a$ lub $-a$, lecz w summie $+ab$ lub $-ab$ należy przemienić znak na przeciwny; otrzymamy więc:

$$+a\times-b=-ab$$
$$\text{zaś } -a\times-b=+ab.$$

Toż samo otrzymamy dla trzeciego i czwartego przypadku, przypominając sobie znaczenie ilości odjemnych. I tak: $-b$ uważać możemy za wypadek z odejmowania $m-n$, gdy n większe jest od m o ilość b; zkąd wypada, że

$$n=m+b\ \ldots\ldots\ (1)$$

Chcąc teraz mnożyć $+a\times-b$, pomnóżmy $+a$ przez wartość nadaną dla $-b$, tojest mnóżmy:

$$+a\times(m-n).$$

Gdybyśmy mieli mnożyć $+a\times+m$, otrzymalibyśmy iloczyn $+am$, lecz że nie mieliśmy mnożyć przez $+m$, lecz przez ilość mniejszą od $+m$ o ilość n, przeto iloczyn otrzymany jest za wielki o ilość a powtórzoną n razy czyli o an, aby więc był prawdziwy, trzeba od niego odjąć an, czyli:

$$a(m-n)=am-an$$

podstawiając za n wartość znalezioną w równowaniu (1) otrzymamy:

$$a(m-n)=am-a(m+b),$$

czyli wykonywając mnożenie $a(m+b)$ widzimy, że od am trzeba odjąć am i ab, czyli:

$$a(m-n)=am-am-ab \text{ lub też } a(m-n)=-ab$$

że zaś $a(m-n)=+a\times-b$, więc:

$$a\times-b=-ab.$$

Gdy nakoniec w czwartym przypadku, $-a$ mnożyć przychodzi przez $-b$, załóżmy jak i poprzednio:

$$-b=m-n.$$

Gdzie n większe jest od m o ilość b, czyli:

$$n=m+b \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

zamiast następnie mnożyć $-a\times-b$, mnożymy $-a$ przez wartość nadaną dla $-b$, czyli mnożymy:

$$-a\times(m-n).$$

Rozumując jak poprzednio, mnożymy $-a$ przez m i uważamy że iloczyn tym sposobem otrzymany $-am$ jest większy od prawdziwego o ilość $-a$ powtórzoną n razy, czyli o $-an$; należy więc od $-am$ odjąć $-an$, czyli zmieniając w odjemniku znak na przeciwny:

$$a\times(m-n)=-am+an;$$

podstawiając wartość za n znalezioną w równaniu (2) otrzymamy:

$$-a(m-n)=-am+a(m+b);$$

pomnożywszy a przez $m+b$, widzimy, że do $-am$ należy dodać am i ab, czyli:

$$-a(m-n)=-am+am+ab,$$

am dodane i odjęte zniesie się i jest:

$$-a(m-n)=+ab$$

$$\text{a że } -a(m-n)=-a\times-b$$

$$\text{więc } -a\times-b=+ab.$$

Rozbierając więc cztery przypadki, na jakie w mnożeniu jednomianów natrafić możemy, co do znaków otrzymaliśmy, że:

$$+a\times+b=+ab$$
$$-a\times-b=+ab$$
$$+a\times-b=-ab$$
$$-a\times+b=-ab$$

zkąd prawidło:

Jeżeli dwa jednomiany dane do mnożenia mają znaki jednakowe, iloczyn jest dodatny, jednomiany zaś ze znakami przeciwnemi, wydają iloczyn odjemny.

29. *Prawidło na współczynniki.*

Chcąc jednomian $5a$ pomnożyć przez jednomian $3b$, przypuśćmy, że $5a$ pomnożyć mamy tylko przez b; wówczas należałoby $5a$ powtórzyć b razy, czyli otrzymalibyśmy $(5a)b$; lecz że mnożnik nie zawiera w sobie b jedności, lecz ilość 3 razy większą od b, przeto i mnożną należy powtórzyć nie b razy lecz $3b$ razy, czyli iloczyn poprzednio otrzymany jest 3 razy za mały, powiększając go więc mamy: $(5a)b\times3$, a zmieniając porządek mnożników:

$$5a\times3b=5.3ab=15ab$$

ztąd prawidło: *współczynnik iloczynu dwóch jednomia-*

nów, równa się iloczynowi współczynników danych jednomianów.

30. Co się tyczy głosek, to oczywistą jest rzeczą, że wszystkie głoski tak w mnożnej jak i w mnożniku znajdujące się, napisać należy obok siebie w dowolnym porządku; wiemy bowiem z arytmetyki, że porządek czynników iloczynu nie zmienia.

31. Należy nakoniec wskazać prawidło na wykładniki. Dajmy, że a^3 mnożyć mamy przez a^2.

$$\text{Wiemy, że: } a^3 = a.\ a.\ a.$$
$$\text{zaś } a^2 = a.\ a.$$

a mnożąc, mamy $a^3 \times a^2 = a.\ a.\ a.\ a.\ a. = a^5$, ztąd wnosimy: *że w mnożeniu jednomianów, wykładniki tych samych głosek dodają się, i summa taka pisze się w iloczynie za wykładnik tejże głoski.*

32. *Przykład.* Pomnożyć przez siebie jednomiany:

$$\begin{aligned}
5a^2bc \times 7adb^3 &= +35a^3b^4cd \\
-8a^3cf \times 9abf^2 &= -72a^4bcf^3 \\
9a^2dg \times -7ad^3g &= -63a^3d^4g^2 \\
-6abc \times -7a^2b^2c^2 &= +42a^3b^3c^3.
\end{aligned}$$

33. Znając prawidło na mnożenie jednomianów, łatwo jest wyprowadzić prawidło na mnożenie wielomianów, i tak: dajmy że wielomian $(a+b-c)$ mnożyć mamy przez jednomian d.

Gdybyśmy mieli tylko a pomnożyć przez d, wówczas iloczyn byłby ad; lecz że nie mieliśmy a mnożyć przez d, lecz summę dwóch ilości $a+b$, przeto iloczyn otrzymany za mały jest o ilość d wziętą b razy czyli o bd: dodawszy więc otrzymamy $ad+bd$; ten znowu iloczyn jest za wielki, gdyż nie chcieliśmy mnożyć $a+b$ przez d, lecz ilość mniejszą od $a+b$ o ilość c, i za wielki jest mianowicie o ilość d wziętą c razy czyli o cd, co odjąwszy, otrzymamy, że:

$$(a+b-c)d = ad+bd-cd,$$

ztąd wypada: *że aby wielomian pomnożyć przez jednomian, należy każdy wyraz wielomianu pomnożyć przez jednomian, mając wzgląd na znaki; a summa algebraiczna ztąd powstałych jednomianów daje wielomian, który jest iloczynem żądanym.*

Oczywistą jest rzeczą, że iloczyn otrzymany z pomnożenia wielomianu przez jednomian, jest wielomianem, i zawiera tyle jednomianów, ile ich miał wielomian dany do mnożenia.

34. Wielomian $7a^3b—6a^2b^2+10ab^3—8b^4$ pomnożyć przez jednomian $6ab$.

Mnożąc każdy wyraz wielomianu przez dany jednomian, i pamiętając powyżéj wskazane prawidła na mnożenie jednomianów, otrzymamy na iloczyn wielomian następujący:

$$42a^4b^2—36a^3b^3+60a^2b^4—48ab^5.$$

35. Pozostaje nam wreszcie wskazać prawidło na mnożenie dwóch wielomianów.

Dajmy, że dane są do pomnożenia dwa wielomiany P przez P'. Oznaczmy zbiór wyrazów dodatnich w wielomianie pierwszym przez A, zbiór wyrazów odjemnych B; zbiór wyrazów dodatnich w wielomianie drugim C, zaś odjemnych D; otrzymamy:

$$P=A—B$$
$$P'=C—D$$

idzie więc o to, aby pomnożyć $(A—B)$ przez $(C—D)$, gdybyśmy $(A—B)$ chcieli pomnożyć tylko przez C, otrzymalibyśmy:

$$(A—B)\ C=AC—BC;$$

lecz iloczyn ten byłby od żądanego za wielki o $(A—B)$ wzięte D razy, należy go więc o tyleż zmniejszyć, czyli odjąć od niego iloczyn z $(A—B)$ przez D, czyli odjąć $AD—BD$, zmieniając więc w odjemniku znaki na przeciwne, otrzymamy:

$$(A—B)\ (C—D)=AC—BC—AD+BD;$$

ponieważ wielomiany A i C mają wszystkie wyrazy że znakami dodatniemi, więc iloczyn AC jest oczywiście zbiorem iloczynów cząstkowych otrzymanych z pomnożenia każdego wyrazu dodatnego mnożnéj, przez każdy wyraz dodatny mnożnika. Iloczyn BC pokazuje nam, że każdy wyraz odjemny mnożnéj pomnożyć trzeba przez każdy wyraz dodatny mnożnika, i zbiór tych iloczynów cząstkowych odjąć od pierwszego iloczynu AC; od różnicy téj odjąć znowu wypada iloczyn trzeci AD, który powstał z pomnożenia każdego wyrazu dodatnego mnożnéj przez każdy wyraz odjemny mnożnika. Nareszcie dodać wypada iloczyn ostatni BD, powstały z pomnożenia każdego wyrazu odjemnego mnożnéj przez każdy wyraz odjemny mnożnika.

Wiedząc to, weźmy dwa wielomiany:

$$P=2a^3+3a^2b-4ab^2-5b^3$$
$$P'=7a^2+5ab-2b^2$$

w wielomianie P:

$$A=2a^3+3a^2b$$
$$B=4ab^2+5b^3$$

w wielomianie P':

$$C=4a^2+5ab$$
$$D=2b^2 \text{ więc}$$
$$AC=8a^5+12a^4b+10a^4b+15a^3b^2$$
$$BC=16a^3b^2+20a^2b^3+20a^2b^3+25ab^4$$
$$AD=4a^3b^2+6a^2b^3$$
$$BD=8ab^4+10b^5.$$

Pamiętając, że od iloczynu cząstkowego AC trzeba odjąć dwa iloczyny BC i AD i dodać iloczyn BD, otrzymamy na całkowity iloczyn dwóch wielomianów P i P' (zmieniając w iloczynach BC i AD znaki na przeciwne) następujący wielomian.

$$8a^5+12a^4b+10a^4b+15a^3b^2-16a^3b^2-$$
$$-20a^2b^3-20a^2b^3-25ab^4-4a^3b^2-$$
$$-6a^2b^3+8ab^4+10b^5.$$

Tak otrzymany wielomian powstał z pomnożenia każdego wyrazu mnożnéj przez każdy wyraz mnożnika; należy w téj summie algebraicznéj wszystkich jednomianów uprościć jeszcze wyrazy podobne, co uskuteczniwszy, otrzymamy:

$$P\times P'=8a^5+22a^4b-5a^3b^2-46a^2b^3-17ab^4+10b^5.$$

Z poprzedzającego wynika: *że aby pomnożyć przez siebie dwa wielomiany, należy każdy wyraz mnożnéj pomnożyć przez każdy wyraz mnożnika ze względem na znaki, te iloczyny cząstkowe zebrać w summę algebraiczną, w któréj uprościć tylko wypada wyrazy podobne dla ukończenia działania.*

Zwykle dla dogodniejszego uproszczenia wyrazów podobnych, mnożenie algebraiczne wykonywa się jak w arytmetyce, tojest piszą się iloczyny cząstkowe pod sobą, z tą jednak różnicą, że działanie rozpoczyna się nie z prawéj lecz z lewéj strony czynników.

Oto wzór podobnego działania:

$$\begin{array}{rl}
P = & 2a^3+3a^2b-4ab^2-5b^3 \\
P' = & 4a^2+5ab-2b^2 \\
\hline
 & 8a^5+12a^4b-16a^3b^2-20a^2b^3 \\
 & \qquad +10a^4b+15a^3b^2-20a^2b^3-25ab^4 \\
 & \qquad\qquad -4a^3b^2-6a^2b^3+8ab^4+10b^5 \\
\hline
\text{iloczyn} & 8a^5+22a^4b-5a^3b^2-46a^2b^3-17ab^4+10b^5
\end{array}$$

Uwaga. -- Wielomian zowie się uporządkowanym podług potęg malejących jakiéj głoski (по уменьшающимся степенямъ какой либо буквы), wtedy gdy wykładnik téj głoski w wyrazie pierwszym jest największy i następnie zmniejsza się aż do ostatniego. Jeżeli zaś w wielomianie wykładnik jakiéj głoski w wyrazie pierwszym jest najmniejszy, następnie powiększa się aż do wyrazu ostatniego, wówczas mówią: że wielomian uporządkowany jest według potęg rosnących téj głoski (многочленъ расположенный по возрастающимъ степенямъ какой либо буквы).

Iloczyn więc powyżéj otrzymany $8a^5+22a^4b-5a^3b^2-$ $-46a^2b^3-17ab^4+10b^5$ uporządkowany jest podług potęg malejących głoski a, a podług potęg rosnących głoski b.

Wielomian otrzymany z pomnożenia dwóch wielomianów, posiada dosyć ważne własności, które tu podać wypada.

36. Twierdzenie.— *Jeżeli iloczyn i czynniki z których powstał, uporządkowane są podług potęg tejże saméj głoski, wówczas pierwszy wyraz iloczynu równa się iloczynowi pierwszych wyrazów czynników, zaś wyraz ostatni iloczynu równy jest iloczynowi ostatnich wyrazów czynników.*

Dla okazania téj prawdy, weźmy pod uwagę iloczyn otrzymany powyżéj z pomnożenia dwóch wielomianów P i P', uporządkowanych podług potęg malejących głoski a. W każdym z jednomianów cząstkowych, *np.* w jednomianie $-16a^3b^2$, wykładnik głoski a równy jest summie wykładników tejże głoski w czynnikach $-4ab^2$ i $4a^2$; summa ta będzie największą, gdy weźmiemy za czynniki dwa pierwsze wyrazy $2a^3$ i $4a^2$; iloczyn więc z tych dwóch wyrazów, tojest $8a^5$, nie może mieć sobie podobnego jednomianu i uprościć się nie da, a porządkując iloczyn podług potęg malejących głoski a, będzie pierwszym jego wyrazem, co było do okazania.

Toż samo dowodzenie stosuje się do iloczynu ostatnich wyrazów danych czynników.

37. Twierdzenie.—*Liczba wyrazów iloczynu dwóch wielomianów, równa się najmniéj dwom wyrazom, a najwięcéj iloczynowi z liczby wyrazów wielomianów danych do mnożenia.*

Pierwsza część tego twierdzenia jest wnioskiem z poprzedzającego; powiedzieliśmy tam, że wyrazy pierwszy i ostatni iloczynu nie mogą mieć sobie podobnych, inne zaś wyrazy jeżeli mają sobie podobne i gdy summa współczynników dodatnych będzie równa summie współczynników odjemnych, zupełnie mogą się poznosić; w iloczynie więc pozostaną tylko dwa wyrazy i mniéj ich być nie może.

Druga część twierdzenia staje się widoczną, skoro weźmiemy pod uwagę: że dla otrzymania iloczynu dwóch wielomianów, mnoży się każdy wyraz mnożnéj przez każdy wyraz mnożnika. Jeżeli więc upraszczając wyrazy podobne, takowe się nie zniosą, wówczas liczba wyrazów w iloczynie równa się iloczynowi wyrazów danych czynników, co było do okazania.

38. Twierdzenie. — *Iloczyn dwóch wielomianów jednorodnych jest jednorodny, a wymiar jego równa się summie wymiarów danych czynników.*

Z prawidła wskazanego powyżéj, na wykładniki w mnożeniu jednomianów wynika: że wymiar każdego iloczynu cząstkowego, jest summą wymiarów danych czynników; że zaś wszystkie wyrazy mnożnéj są jednego wymiaru, i takiemi są wszystkie wyrazy mnożnika, więc skoro dane wielomiany są jednorodne, iloczyn ich również jest wielomianem jednorodnym, i wymiar jego jest summą wymiarów danych czynników.

39. Przykłady mnożenia:

1) $\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad - \quad b^2 \end{array}$

co znaczy: *kwadrat z summy dwóch wyrazów równa się kwadratowi z wyrazu pierwszego, więcéj podwójny iloczyn z wyrazu pierwszego przez drugi, więcéj kwadrat z wyrazu drugiego; kwadrat z różnicy dwóch wyrazów, równa się kwadratowi z wyrazu pierwszego mniéj podwójny iloczyn* *z wyrazu pierwszego przez drugi, więcéj kwadrat z wyrazu drugiego.*

Iloczyn z summy dwóch wyrazów, przez ich różnicę równa się różnicy kwadratów z tychże wyrazów.

Uwaga. — Porządkując wielomian podług potęg jakiéj głoski, zdarza się często, że kilka wyrazów danego wielomianu zawiera w sobie tęż głoskę w jednéj potędze; w wyrazach takich głoska porządkująca wyrzuca się za nawias, a w nawiasie pozostaje summa pozostałych części wyrazów.

I tak, porządkując wielomian:

$$2a^3+4a^2b-a^2+5ab^2-2ab-4b^3$$

podług potęg malejących głoski a, widzimy, że dwa wyrazy: $4a^2b$ i $-a^2$, zawierają tęż głoskę w potędze drugiéj; dwa wyrazy znowu: $5ab^2$ i $-2ab$ w potędze pierwszéj, zamiast więc wielomianu danego, piszemy wielomian uporządkowany w ten sposób:

$$2a^3+(4b-1)\,a^2+(5b^2-2b)\,a-4b^3.$$

Nawiasy $(4b-1)$ i $(5b^2-2b)$ zowią się współczynnikami wyrazów wielomianu uporządkowanego, a nie mogą nigdy zawierać w sobie głoski, podług któréj wielomian jest uporządkowany.

Zwyczajnie jednak miejsce nawiasu zastępuje linia pionowa; po prawéj jéj stronie pisze się potęga głoski, podług któréj wielomian się porządkuje, zaś z lewéj strony pisze się jedna pod drugą części pozostałe wyrazów, z których taż głoska jako w jednéj i téj saméj potędze będąca, wyrzuconą została. Tak więc wielomian poprzedni napisać można w ten sposób:

$$\begin{array}{c|c|c|l} 2 & a^3+4b & a^2+5b^2 & a-4b^3 \\ & -1 & -2b & \end{array}$$

Wskażemy tu, jakim sposobem mnożą się dwa wielomiany tak uporządkowane. Dajmy, że:

mnożna jest:

2	a^3+4b	a^2+5b^2	$a-4b^3$
	-1	$-2b$	

mnożnik zaś:

5	a^2+2b	$a\ -3b^2$
	-3	

10	a^5+20b	a^4+25b^2	a^3-20b^3	$a^2-\ 8b^4$	$a+12b^5$
	$-\ 5$	$-10b$	$+10b^3$	$+12b^3$	
	$+\ 4b$	$+\ 8b^2$	$-\ 4b^2$	$-15b^4$	
	$-\ 6$	$-\ 2b$	$-15b^2$	$+6b^3$	
		$-12b$	$+\ 6b$		
		$+\ 3$	$-12b^3$		
		$-\ 6b^2$	$+\ 3b^2$		

czyli po uproszczeniu wyrazów podobnych będzie:

10	a^5+24b	a^4+27b^2	a^3-22b^3	a^2-23b^4	$a+12b^5$
	-11	$-24b$	$-16b^2$	$-18b^3$	
		$+\ 3$	$+\ 6b$		

Dla otrzymania bowiem iloczynu dwóch wielomianów, mnoży się każdy wyraz mnożnej przez każdy wyraz mnożnika; tak więc całą mnożną mnożyć musimy przez $5a^2$. W tym celu mnożymy przedewszystkiem potęgi głoski a, w wyrazach mnożnej przez a^2, i otrzymamy:

$$|a^5 \ |a^4 \ |a^3 \ |a^2.$$

następnie mnożymy przez 5 wszystkie wyrazy mnożnej z lewej strony linij pionowych znajdujące się, i mamy:

10	$+20b$	$+25b^2$	$-20b^3$
	$-\ 5$	$-10b$	

a łącząc tak otrzymane współczynniki z odpowiedniemi potęgami głoski a, wypadnie na pierwszy iloczyn cząstkowy:

10	a^5+20b	a^4+25b^2	a^3-20b^3	a^2
	$-\ 5$	$-10b$		

Drugim wyrazem mnożnika, tojest wyrazem $\begin{array}{r|l} +2b & a \\ -3 & \end{array}$ mnożymy znowu całą mnożną. Dlatego przedewszystkiém mnożymy przez a wszystkie potęgi téj głoski w mnożnéj; lecz mnożąc a^3 przez a, otrzymamy a^4, potęgę głoski a, która już znajduje się w poprzednio otrzymanym pierwszym iloczynie cząstkowym; dlatego więc mnożymy tylko współczynniki, tojest 2 $(2b-3)$, a iloczyn $4b-6$ piszemy w dalszym ciągu z lewéj strony linijki oddzielającéj a^4. Współczynniki znowu $(2b-3)$ i $(4b-1)$ mnożymy przez siebie, i iloczyn $8b^2-12b-2b+3$ piszemy w dalszym ciągu z lewéj strony linijki oddzielającéj w poprzednim iloczynie cząstkowym a^3; tym sposobem dwa iloczyny cząstkowe tak się przedstawią:

10	a^5+20b	a^4+25b^2	a^3-20b^3	a^2-8b^4	a
	-5	$-10b$	$+10b^3$	$+12b^3$	
	$+4b$	$+8b^2$	$-4b^2$		
	-6	$-12b$	$-15b^2$		
		$-2b$	$+6b$		
		$+3$			

Postępując podobnie, otrzymać możemy inne iloczyny cząstkowe; te łącząc z sobą podług potęg głoski a, znajdziemy powyżéj wskazany iloczyn całkowity, w którym uprościć tylko wypada wyrazy podobne.

Dzielenie ilości algebraicznych.

40. *Dzielenie algebraiczne tak jak i arytmetyczne, jest to działanie, za pomocą którego mając iloczyn i jeden z czynników, szukamy czynnika drugiego.*

Wypadek z dzielenia zowie się ilorazem (частное).

41. Zastanawiać się przedewszystkiém będziemy nad dzieleniem jednomianów, i wskażemy prawidła na znaki, współczynniki, głoski i wykładniki.

42. *Prawidło na znaki.*

Dajmy, że jednomian a dzielić chcemy przez jednomian b, zachodzić tu mogą cztery przypadki:

$$1) \quad \frac{+a}{+b}$$

$$2) \quad \frac{+a}{-b}$$

$$3) \quad \frac{-a}{+b}$$

$$4) \quad \frac{-a}{-b}$$

W pierwszym przypadku dzieląc $+a$ przez $+b$, i pamiętając, że dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz, szukamy ilorazu, któryby pomnożony przez $+b$, wydał $+a$. Że zaś iloczyn jest dodatny, gdy oba czynniki są jednego znaku, a tu jeden z czynników $+b$ jest dodatny, więc i szukany iloraz musi być dodatny, tojest:

$$\frac{+a}{+b} = +c$$

W drugim przypadku dzieląc $+a$ przez $-b$, szukamy ilorazu, któryby pomnożony przez $-b$, wydał $+a$: lecz że iloczyn dodatny powstaje z pomnożenia dwóch czynników jednoznakowych, a tu jeden czynnik $-b$ jest odjemny, więc i iloraz c musi być także odjemny, tojest:

$$\frac{+a}{-b} = -c$$

Takim sposobem dalej rozumując, wsparci na prawidłach wyprowadzonych dla znaków w mnożeniu, otrzymamy:

$$\frac{+a}{+b} = +c$$

$$\frac{+a}{-b} = -c$$

$$\frac{-a}{+b}=-c$$

$$\frac{-a}{-b}=+c$$

Ztąd wynika, że: *gdy dzielna i dzielnik mają znaki jednakowe, iloraz jest dodatny; jeżeli zaś dzielna i dzielnik są znaków przeciwnych, iloraz jest odjemny.*

43. *Prawidło na współczynniki.*

Dajmy, że $8a$ podzielić chcemy przez $4a$. Współczynnik dzielnéj 8, jest iloczynem z współczynnika 4, przez szukany współczynnik ilorazu. Idzie więc o to, aby mając iloczyn i jeden z czynników, znaleźć czynnik drugi; do tego dojdziemy dzieląc 8 przez 4, otrzymane 2 będzie współczynnikiem ilorazu szukanego.

Współczynnik więc ilorazu otrzymuje się: dzieląc współczynnik dzielnéj przez współczynnik dzielnika.

44. Wyprowadzone powyżej prawidło na wykładniki przy mnożeniu jednomianów, okazuje: że jak w mnożeniu jednomianów dodawaliśmy wykładniki tych samych głosek, tak w dzieleniu *wykładnik głoski w dzielniku odjąć należy od wykładnika tejże saméj głoski w dzielnéj, aby otrzymać wykładnik w ilorazie.* Oczywiście bowiem dzieląc a^5 przez a^3, szukamy ilorazu, któryby pomnożony przez a^3, wydal a^5.

Mamy więc 5, summę dwóch ilości i jednę z nich 3, szukamy ilości drugiéj; ta więc równa się:

$$5-3=2, \text{ tojest } \frac{a^5}{a^3}=a^{5-3}=a^2.$$

Jeżeli jednéj i téj saméj głoski wykładniki w dzielnéj i w dzielniku są sobie równe, wówczas wykładnik tejże głoski w ilorazie będzie 0, bowiem:

$$\frac{a^5}{a^5}=a^{5-5}=a^0.$$

Jeżeli zaś wykładnik jakiéj głoski w dzielnéj mniejszy jest od wykładnika tejże głoski w dzielniku, wówczas w ilorazie głoska ta będzie z wykładnikiem odjemnym, i tak:

$$\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}.$$

45. Twierdzenie. — *Każda ilość w potędze 0 równa się jedności.*

Powiedzieliśmy wyżéj, że:

$$\frac{a^5}{a^5}=a^{5-5}=a^0\ldots.. \quad (1)$$

lecz z arytmetyki wiemy, że iloraz dwóch ilości równych jest jednością, więc.

$$\frac{a^5}{a^5}=1\ldots.. \quad (2)$$

łącząc równość pierwszą z drugą, wynika, że $a^0=1$, co było do okazania.

46. Twierdzenie.—*Każda ilość w potędze odjemnéj równa się ułomkowi, który ma za licznik jedność, a za mianownik tęż samą ilość w potędze dodatnéj.*

Wiemy, że:

$$\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2} \quad (1)$$

podzielmy oba wyrazy ułomku $\frac{a^3}{a^5}$ przez a^3, wartość jego się nie zmieni, i otrzymamy:

$$\frac{a^3}{a^5}=\frac{\frac{a^3}{a^3}}{\frac{a^5}{a^3}}=\frac{1}{a^2} \quad (2)$$

porównywając zaś wyrażenia (1) z (2), mamy, że:

$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}$$

co było do okazania.

47. Co się tyczy prawidła dla głosek w dzieleniu jednomianów, to ponieważ dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz szukany, a nadto, jak powyżej okazaliśmy, ponieważ w iloczynie zawierają się wszystkie głoski jakie są w danych czynnikach, oczywistą przeto jest rzeczą, że: dla otrzymania głosek ilorazu należy z dzielnéj wyrzucić wszystkie głoski wspólne z dzielnikiem, i posiadającéj jednakowe wykładniki: pozostałe zaś głoski będą głoskami ilorazu, i tak:

$$\frac{a^4b^2cd}{abc}=\frac{a^3a.b.bcd}{abc}=a^3bd.$$

48. Na mocy tego, możemy wyliczyć przypadki, w których dzielenie jednomianów, nie może być uskutecznione, jeżeli nie chcemy mieć w ilorazie ani współczynników ułamkowych, ani wykładników odjemnych; przypadki te są:

1) Gdy współczynnik dzielnika nie mieści się bez reszty w współczynniku dzielnéj.

2) Gdy dzielnik zawiera takie głoski, których niema w dzielnéj, i nakoniec:

3) Gdy wykładnik jakiéj głoski w dzielnéj, mniejszy jest od wykładnika tejże głoski w dzielniku.

Jeżeli więc dzielenie dwóch jednomianów nie może być uskutecznione, wówczas to działanie ogranicza się na wskazaniu go w postaci ułamku, którego licznikiem jest dzielna, mianownikiem zaś dzielnik.

Następnie ułamek ten można przywieść do prostszéj postaci, pamiętając, że przez rozdzielanie dzielnika i dzielnéj przez jednakową ilość, iloraz się nie zmienia.

Mając *np.* jednomian $9a^3b^2c$ podzielić przez jednomian $-4a^2b^3cd$, otrzymamy iloraz ułamkowy:

$$\frac{9a^3b^2c}{-4a^2b^3cd}=-\frac{9a^2.a.b^2c}{4a^2.b^2b.cd}=-\frac{9a}{4bd},$$

lub chcąc podzielić $-3ab$ przez $4a^2bc$ będzie:

$$\frac{-3ab}{4a^2bc}=\frac{-3ab}{4a.abc}=\frac{-3}{4ac}.$$

49. Dzielenie wielomianu przez jednomian wykonywa się dzieląc każdy wyraz wielomianu przez jednomian; to usprawiedliwić można przez następujące rozumowanie: Dzielna jest iloczynem z dzielnika przez szukany iloraz, w każdym więc wyrazie wielomianu będącego dzielną zawiera się jednomian który jest dzielnikiem, chcąc przeto wynaleźć iloraz, należy każdy wyraz dzielnéj podzielić przez ten jednomian, i tak:

$$\frac{8a^4b^2+12b^3a^3-16a^2b^4}{2ab^2}=4a^3+6a^2b-8ab^2.$$

Nie zawsze jednak wszystkie wyrazy dzielnéj dadzą się zupełnie dzielić przez jednomian, który jest dzielnikiem, w takim razie ograniczyć się należy na wskazaniu dzielenia.

50. Dzielenie jednomianu przez wielomian nigdy uskutecznioném być nie może, a to z téj przyczyny:

Dzielna ma być iloczynem z dzielnika przez iloraz, dzielnik jest wielomianem, a więc iloczyn z wielomianu choćby przez jednomian musi zawierać, jakeśmy to wyżéj okazali najmniéj dwa wyrazy: że zaś tu dzielna jest jednowyrazowa, przeto niepodobna aby była iloczynem z danego dzielnika przez szukany iloraz; ztąd wynika: że iloraz z takiego dzielenia nie istnieje. Podobne więc działanie może być tylko wskazane; a wyrażenie ztąd otrzymane zowie się ułamkiem algebraicznym. I tak *np.* wyrażenie:

$$\frac{8a^2b}{5a^3b+7a^4b^2-6a^5b}$$

jest ułamkiem algebraicznym.

51. *Dzielenie dwóch wielomianów.*

Cała teorya dzielenia dwóch wielomianów wypływa z powyżéj podanych własności iloczynu dwóch wielomianów uporządkowanych. Aby je przypomnieć, pomnóżmy następujące dwa wielomiany uporządkowane:

$$
\begin{array}{lllll}
 & a^2-3ab-3b^2 & & & \\
 & a^2+5ab-b^2 & & & \\
\hline
\text{iloczyn cząstkowy } 1^{\text{szy}} & a^4-3a^3b-3a^2b^2 & & & \\
\qquad\qquad 2^{\text{gi}} & \quad +5a^3b-15a^2b^2-15ab^3 & & & \\
\qquad\qquad 3^{\text{ci}} & \qquad\quad -a^2b^2+3ab^3+3b^4 & & & \\
\hline
\text{iloczyn całkowity} & a^4+2a^3b-19a^2b^2-12ab^3+3b^4. & & &
\end{array}
$$

Wiemy, że pierwszy wyraz a^4 w iloczynie całkowitym, powstał z pomnożenia pierwszych wyrazów czynników i nie ma sobie podobnego;—ostatni zaś wyraz $3b^4$ jest iloczynem ostatnich wyrazów czynników i także uproszczony być nie może.

Uważmy nadto, że odjąwszy od iloczynu całkowitego pierwszy iloczyn cząstkowy, wyraz pierwszy reszty pozostałéj jest $5a^3b$, i powstaje z pomnożenia pierwszego wyrazu mnożnéj przez drugi wyraz mnożnika. Odjąwszy znowu od całkowitego iloczynu dwa pierwsze iloczyny cząstkowe, reszta miałaby za wyraz pierwszy jednomian $-a^2b^2$ powstały z pomnożenia pierwszego wyrazu mnożnéj przez trzeci wyraz mnożnika. Ponieważ dzielną uważać można za iloczyn z dzielnika przez iloraz, więc uporządkowawszy tak dzielną jako i dzielnik podług potęg jednéj głoski, pierwszy wyraz dzielnéj powstał z pomnożenia pierwszego wyrazu dzielnika przez pierwszy wyraz szukanego ilorazu. Odwrotnie, chcąc więc znaleźć pierwszy wyraz ilorazu, należy pierwszy wyraz dzielnéj podzielić przez pierwszy wyraz dzielnika.

Iloczyn z tak otrzymanego pierwszego wyrazu ilorazu przez cały dzielnik, da nam pierwszy iloczyn cząstkowy, który odjęty od dzielnéj, da na resztę summę pozostałych iloczynów cząstkowych. Pierwszy wyraz téj reszty przedstawia nam iloczyn, z pierwszego wyrazu dzielnika przez drugi wyraz ilorazu. Dzieląc więc ten pierwszy wyraz reszty przez pierwszy wyraz dzielnika, otrzymamy drugi wyraz ilorazu. Iloczyn z pomnożenia całego dzielnika przez tak otrzymany drugi wyraz ilorazu, jest drugim iloczynem cząstkowym, który odjąwszy od pierwszej reszty, otrzymamy drugą resztę, będącą summą pozostałych iloczynów cząstkowych i t. d.

Zastosujmy to do podzielenia iloczynu:

$$a^4+2a^3b-19a^2b^2-12ab^3+3b^4$$

powyżej otrzymanego przez dzielnik $a^2-3ab-3b^2$; działanie tak się przedstawia:

$$\begin{array}{r|l}
a^4+2a^3b-19a^2b^2-12ab^3+3b^4 & a^2-3ab-3b^2 \\ \cline{2-2}
-a^4\mp 3a^3b\mp 3a^2b^2 \qquad\qquad\qquad & a^2+5ab-b^2 \\ \cline{1-1}
5a^3b-16a^2b^2-12ab^3+3b^4 & \\
-5a^3b\mp 15a^2b^2\mp 15ab^3 \qquad & \\ \cline{1-1}
-a^2b^2+3ab^3+3b^4 & \\
\mp a^2b^2\pm 3ab^3\pm 3b^4 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

Jakoż na mocy powyższego, dzieląc pierwszy wyraz dzielnej a^4 przez pierwszy wyraz dzielnika a^2 otrzymamy iloraz $\frac{a^4}{a^2}=a^2$ na pierwszy wyraz ilorazu: mnożąc następnie cały dzielnik, przez a^2 wypadnie pierwszy iloczyn cząstkowy:

$$a^4-3a^3b-3a^2b^2,$$

który odjąć wypada od całej dzielnej, w tym celu zmieniamy w odjemniku znaki na przeciwne, upraszczamy wyrazy podobne i otrzymamy:

$$5a^3b-16a^2b^2-12ab^3+3b^4$$

na pierwszą resztę, będącą summą pozostałych iloczynów cząstkowych. Pierwszy wyraz $5a^3b$ téj reszty dzieląc przez pierwszy wyraz dzielnika, otrzymamy:

$$\frac{5a^3b}{a^2}=5ab$$

na drugi wyraz ilorazu. Mnożąc cały dzielnik przez $5ab$, wypadnie na drugi iloczyn cząstkowy wielomian:

$$5a^3b-15a^2b^2-15ab^3;$$

aby go odjąć od pierwszéj reszty, zmieniamy znaki na przeciwne, upraszczamy wyrazy podobne; tym sposobem powstanie druga reszta: $-a^2b^2+3ab^3+3b^4$ która jest summą pozostałych iloczynów cząstkowych. Pierwszy wyraz $-a^2b^2$ drugiéj reszty dzieląc przez a^2 pierwszy wyraz dzielnika znajdziemy $\frac{-a^2b^2}{a^2}=-b^2$ na trzeci wyraz ilorazu. Mnożąc $-b^2$ przez cały dzielnik, otrzymamy wielomian $-a^2b^2+3ab^3+3b^4$. Wielomian ten odejmujemy od drugiéj reszty, zamieniając w nim znaki na przeciwne, upraszczamy wyrazy podobne i otrzymujemy na trzecią resztę 0. To znaczy, że wielomian $a^2+5ab-b^2$ jest ilorazem zupełnym danych dwóch wielomianów.

Można więc podać następujące prawidło na dzielenie dwóch wielomianów.

Aby dwa wielomiany przez siebie podzielić, należy tak dzielną jako i dzielnik uporządkować podług potęg tejże saméj głoski; następnie podzielić pierwszy wyraz dzielnéj przez pierwszy wyraz dzielnika, a iloraz otrzymany będzie pierwszym wyrazem ilorazu. Mnożąc tak otrzymany pierwszy wyraz ilorazu, przez cały dzielnik, iloczyn ztąd powstały odejmuje się od całéj dzielnéj dla otrzymania pierwszéj reszty. Dzieląc znowu pierwszy wyraz téj reszty przez pierwszy wyraz dzielnika, otrzymuje się drugi wyraz ilorazu. Tym wyrazem mnoży się cały dzielnik, iloczyn odejmuje się od pierwszéj reszty, ztąd powstaje druga reszta, któréj pierwszy *wyraz podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika da trzeci wyraz ilorazu i t. d.*

52. Jeżeliby pierwszy wyraz którejkolwiek reszty nie był podzielny przez pierwszy wyraz dzielnika, wówczas dzielenie jest zatrzymane; oznacza to, że w takim razie nie można otrzymać ilorazu zupełnego danych dwóch wielomianów.

Niech będzie *np.* wielomian $a^2-3ab+b^2$ do podzielenia przez $a-b$, uskuteczniając dzielenie mamy:

$$\begin{array}{l|l} a^2-3ab+b^2 & a-b \\ \hline a^2\mp ab & a-2b \\ \hline \quad -2ab+b^2 & \\ \quad \mp 2ab\pm 2b^2 & \\ \hline \qquad\quad -b^2 & \end{array}$$

ostatnia reszta $-b^2$ nie jest podzielna przez a.

Iloraz więc danych dwóch wielomianów, równa się $a-2b$ więcej resztą $-b^2$ podzieloną przez dzielnik; czyli równa się:

$$a-2b+\left(\frac{-b^2}{a-b}\right)$$

dzielenie $\dfrac{-b^2}{a-b}$ nie może być uskutecznione; widzieliśmy bowiem że jednomian nie może być podzielny przez wielomian, działanie w tym razie może być tylko wskazane.

Z tego co poprzedziło, wnioskujemy: że uporządkowawszy dzielną i dzielnik, podług potęg jednej głoski, działanie nie może być uskutecznione, gdy pierwszy wyraz dzielnej, nie jest podzielny przez pierwszy wyraz dzielnika.

53. Podamy teraz wzór dzielenia dwóch wielomianów, uporządkowanych podług potęg tejże samej głoski. I tak. uskutecznijmy następujące dzielenie:

						Dzielnik
	$30b$	a^4 $+20b^2$ $-63b$	a^3 $-67b^2$ $+44b$	a^2 $+56b^2$ $-32b$ $-40b^3$	a $+64b^3$	$6a^3+4b$ -3 | a^2-7b $+4$ | $a-8b^2$
pierwszy iloczyn cząstkowy, który odjąć trzeba od dzielnéj	$-30b$	a^4 $\pm 20b^2$ $\mp 15b$	a^3 $\mp 35b^2$ $\pm 20b$	a^2 $\pm 40b^3$	a	$5ba \quad -8b$
pierwsza reszta		$-48b$	a^3 $-32b^2$ $+24b$	a^2 $+56b^2$ $-32b$	a $+64b^3$	
drugi iloczyn cząstkowy który należy odjąć od pierwszéj reszty,		$\mp 48b$	a^3 $\mp 32b^2$ $\pm 24b$	a^2 $\pm 56b^2$ $\mp 32b$	a $\pm 64b^3$	

reszta druga 0.

Ponieważ dane do dzielenia dwa wielomiany uporządkowane są podług potęg malejących jednéj i téj samej głoski, więc dla otrzymania pierwszego wyrazu ilorazu (pamiętając że dzielna jest iloczynem z dzielnika przez szukany iloraz), dzielimy $30ba^4$ pierwszy wyraz dzielnéj, przez $6a^3$ pierwszy wyraz dzielnika, a iloraz otrzymany $5ba$ jest pierwszym wyrazem szukanego ilorazu dwóch danych wielomianów. Tym pierwszym wyrazem mnożąc cały dzielnik i odejmując wielomian ztąd otrzymany (jako pierwszy iloczyn cząstkowy) od dzielnéj, różnica ztąd powstała jest pierwszą resztą.

Pierwszy wyraz $-48ba^3$ reszty dzieląc przez $6a^3$ pierwszy wyraz dzielnika, jednomian $-8b$ jest drugim wyrazem ilorazu. Tym wyrazem mnożąc całą dzielną, iloczyn drugi ztąd powstały, odejmujemy od pierwszéj reszty i otrzymujemy na drugą resztę 0. Co znaczy że dane wielomiany są zupełnie podzielne, a ich ilorazem jest dwumian $5ba-8b$.

54. Może się zdarzyć, że dzielnik nie zawiera wcale téj głoski, podług któréj uporządkowaliśmy dzielną. Aby dzielenie w tym razie mogło być zupełne, tojest bez reszty uskutecznione, potrzeba: aby wszystkie współczynniki téj głoski w dzielnéj podzielne były przez dzielnik. Dajmy bowiem że dzielna jest wielomianem:

$$Aa^3+Ba^2+Ca+D$$

(gdzie A, B, C i D są wielomianem lub jednomianami nie zawierającemi w sobie głoski a). Niech będzie M dzielnikiem, który głoski a w sobie nie zawiera. Skoro dzielnik nie zawiera w sobie głoski a, to szukany iloraz musi zawierać tęż głoskę w takich potęgach, w jakich ją zawiera dzielna: tojest szukany iloraz zupełny przedstawi się w postaci:

$$A'a^3+B'a^2+C'a+D'$$

a że dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz, więc:

$$Aa^3+Ba^2+Ca+D=(A'a^3+B'a^2+C'a+D')M=$$
$$=A'Ma^3+B'Ma^2+C'Ma+D'm$$

zkąd znowu wypada, że:

$$A=A'm; \quad B=B'm; \quad C=C'm; \quad D=D'm$$

czyli

$$A'=\frac{A}{M}; \quad B'=\frac{B}{M}; \quad C'=\frac{C}{M}; \quad D'=\frac{D}{M}$$

co było do okazania.

55. *Warunki podzielności summy lub różnicy jednakowych potęg dwóch ilości, przez summę lub różnicę tychże ilości.*

Zachodzić tu mogą cztery następujące przypadki:

1) gdy $a^m - b^m$ dzielić mamy przez $a-b$;
2) „ $a^m + b^m$ „ „ „ $a-b$;
3) „ $a^m + b^m$ „ „ „ $a+b$;
4) „ $a^m - b^m$ „ „ „ $a+b$.

Idzie o wskazanie, kiedy w każdym z poprzedzających przypadków, dzielenie może być uskutecznione bez reszty.

Co do 1-go:

Podzielmy $a^m - b^m$ przez $a-b$ będzie:

$$\begin{array}{l|l} a^m - b^m & a-b \\ \hline -a^m \mp a^{m-1}b & a^{m-1} + a^{m-2}b \\ \hline a^{m-1}b - b^m & \\ -a^{m-1}b \mp a^{m-2}b^2 & \\ \hline a^{m-2}b^2 - b^m & \end{array}$$

i t. d. . . . . .

Z pierwszej reszty $a^{m-1}b - b^m$ wziąwszy b za nawias otrzymamy:

$$b(a^{m-1} - b^{m-1})$$

z drugiej reszty wziąwszy b^2 za nawias. mamy tę drugą resztę w postaci:

$$b^2(a^{m-2} - b^{m-2});$$

łatwo widzieć jaki jest kształt reszt następujących; wykładniki głoski b przed nawiasem będącej o jedność się powiększają, zaś wykładniki głosek a i b w nawiasie, o jedność się zmniejszają. Zatem reszta n^{ta} będzie w postaci:

$$b^n(a^{m-n} - b^{m-n}),$$

aby więc dane dzielenie mogło być uskutecznione bez reszty, potrzeba aby reszta ta była podzielona przez $a-b$. Lecz ilość b^n nie jest podzielona przez $a-b$; dla podzielności więc danych dwumianów, koniecznie potrzeba aby druga część tej reszty, tojest $a^{m-n} - b^{m-n}$ była podzielna przez $a-b$. Mając jednak na uwadze, że wykładniki głosek a i b w nawiasach zmniejszają się, przyjdziemy koniecznie do reszty $b^{m-1}(a-b)$, która jest podzielną przez $a-b$; przeto i poprzednie reszty są również podzielne przez $a-b$: a więc i dany dwumian a^m-b^m zawsze jest podzielny przez $a-b$.

Takie więc dwumiany jak a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4 i a^5-b^5 są podzielne przez $a-b$.

Co do 2-go:

Chcąc dojść, czy a^m+b^m da się podzielić bez reszty przez $a-b$, rozpocznijmy to działanie i otrzymamy:

$$\begin{array}{r|l} a^m+b^m & a-b \\ \cline{2-2} -a^m \mp a^{m-1}b & a^{m-1}+a^{m-2}b \\ \cline{1-1} \text{pierwsza reszta } a^{m-1}b+b^m & \\ -a^{m-1}b \mp a^{m-2}b^2 & \\ \cline{1-1} \text{druga reszta } a^{m-2}b^2+b^m & \end{array}$$

pierwszą resztę, biorąc w niéj b za nawias, można przedstawić w postaci:

$$b(a^{m-1}+b^{m-1})$$

druga, biorąc w niéj b^2 za nawias jest kształtu:

$$b^2(a^{m-2}+b^{m-2})$$

w ogólności reszta n^{ta} jest:

$$b^n(a^{m-n}+b^{m-n}).$$

Że zaś wykładnik głoski b przed nawiasem rośnie, a wykładniki głosek a i b w nawiasie maleją, musimy przeto przyjść do reszty:

$$b^{m-1}(a+b).$$

Żaden z czynników téj reszty nie jest podzielny przez $a-b$, więc i cała reszta nie jest podzielną, a ztąd i dany dwumian a^m+b^m nie da się nigdy podzielić bez reszty przez dwumian $a-b$.

Więc dwumiany, jak: a^5+b^5, a^6+b^6, a^3+b^3 i t. d. nie są podzielne nigdy przez $a-b$.

Co do 3-go:

Dzielić chcemy a^m+b^m przez $a+b$, rozpocznijmy działanie; będzie:

$$\begin{array}{rr|l}
 & a^m+b^m & a+b \\
\cline{3-3}
 & -a^m \pm a^{m-1}b & a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2 \\
\cline{2-2}
\text{reszta pierwsza} & -a^{m-1}b+b^m & \\
 & \mp a^{m-1}b \mp a^{m-2}b^2 & \\
\cline{2-2}
\text{reszta druga} & a^{m-2}b^2+b^m & \\
 & -a^{m-2}b^2 \pm a^{m-3}b^3 & \\
\cline{2-2}
\text{reszta trzecia} & a^{m-3}b^3+b^m. &
\end{array}$$

z pierwszéj reszty wziąwszy $-b$ za nawias, otrzymamy:

$$-b(a^{m-1}-b^{m-1})$$

z drugiéj reszty wziąwszy b^2 za nawias, mamy:

$$+b^2(a^{m-3}+b^{m-2})$$

i wogólności łatwo jest dostrzedz, że każda reszta n^{ta} jest postaci:

$$-b^n(a^{m-n}-b^{m-n})$$

gdy n jest nieparzyste, lub ma kształt:

$$b^n(a^{m-n}+b^{m-n})$$

gdy n jest parzyste. Wiedząc to dajmy, że m jest nieparzyste; wówczas dojdziemy koniecznie albo do reszty $-b^{m-2}(a^2-b^2)$ lub też do reszty $+b^{m-1}(a+b)$, bo jeżeli n jest także nieparzyste, to różnica $m-n$ dwóch ilości nieparzystych jest parzystą: lecz jeden z czynników każdéj z tych dwóch reszt czy to a^2-b^2 czy też $a+b$, podzielny jest przez $a+b$, więc i dany dwumian a^m+b^m podzielny być musi przez $a+b$, ale to wtenczas, gdy m jest nieparzyste.

Gdy bowiem m jest parzyste, wówczas ostatnia reszta byłaby albo kształtu:

$$-b^{m-1}(a-b), \text{ lub } +b^{m-2}(a^2+b^2)$$

że zaś żadna z nich nie jest podzielną przez $a+b$, przeto i dany dwumian a^m+b^m wrazie gdy m jest parzyste nie jest podzielny przez $a+b$ bez reszty.

Dwumiany więc a^3+b^3, a^5+b^5, a^7+b^7 i t. d. podzielne są przez $a+b$; zaś a^4+b^4, a^6+b^6, a^2+b^2, a^8+b^8 nie sa podzielne przez $a+b$.

Co do 4-go:

Rozpocznijmy dzielenie dwumianu a^m-b^m przez dwumian $a+b$, będzie:

$$\begin{array}{rl|l}
 & a^m-b^m & a+b \\ \cline{3-3}
 & -a^m \pm a^{m-1}b & a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2 \\ \cline{2-2}
\text{pierwsza reszta} & -a^{m-1}b-b^m & \\
 & \mp a^{m-1}b \mp a^{m-2}b^2 & \\ \cline{2-2}
\text{druga reszta} & +a^{m-2}b^2-b^m & \\
 & \pm a^{m-2}b^2 \pm a^{m-3}b^3 & \\ \cline{2-2}
\text{trzecia reszta} & -a^{m-3}b^3-b^m & \\
\end{array}$$

i t. d.

pierwszą resztę można przedstawić w postaci:

$$-b(a^{m-1}+b^{m-1})$$

drugą zaś w postaci:

$$+b^2(a^{m-2}-b^{m-2})$$

oczywistą przeto jest rzeczą, że każda reszta n^{ta} będzie kształtu:

$$-b^n(a^{m-n}+b^{m-n})$$

gdy n jest nieparzyste, albo też:

$$+b^n(a^{m-n}-b^{m-n})$$

w razie gdy n jest parzyste.

Wiedząc to, przypuśćmy że m jest parzyste; uskuteczniając wtedy dzielenie, ostatnia reszta będzie kształtu:

$$-b^{m-1}(a+b)$$

lub też:

$$b^{m-2}(a^2-b^2)$$

a że obie te reszty są podzielne przez $a+b$; więc i dany dwumian a^m-b^m da się podzielić przez $a+b$.

Jeżeli zaś m jest nieparzyste, to dojdziemy do reszty:

$$-b^{m-2}(a^2+b^2)$$

lub też:

$$+b^{m-2}(a-b)$$

z których żadna nie jest podzielna przez $a+b$, nie jest więc takim i dany wielomian a^m-b^m.

Więc dwumiany:

$$a^4-b^4,\ a^6-b^6,\ a^2-b^2,\ a^8-b^8$$

są podzielne bez reszty przez $a+b$.

I tak, otrzymaliśmy: że: a^m-b^m da się zawsze podzielić bez reszty przez $a-b$, a^m+b^m nie da się nigdy podzielić bez reszty przez $a-b$; a^m+b^m w tedy jest zupełnie podzielne przez $a+b$ gdy m jest nieparzyste i nakoniec a^m-b^m da się podzielić przez $a+b$ bez reszty, lecz gdy m jest parzyste.

56. Zajmowaliśmy się dotąd dzieleniem wielomianów uporządkowanych podług potęg jakiéj głoski; jeżeli dane wielomiany nie mogą być w taki sposób ułożone, lub gdy uporządkowawszy jak można najlepiéj dzielną i dzielnik, pierwszy wyraz dzielnéj nie daje się podzielić przez pierwszy wyraz dzielnika, wówczas dzielenie nie może być uskutecznione i ograniczamy się tylko na wskazaniu działania, które na danych ilościach algebraicznych wykonać należało.

Ztąd powstają *ułamki algebraiczne (алгебраическiя дроби)*. Ułamki są tylko wskazaniem dzielenia, którego uskutecznić nie można. Licznik ułamku (числитель) jest dzielna, a mianownik (знаменатель) jest dzielnikiem. Wszystkie własności ułamków podane w arytmetyce dadzą się wprost zastosować do ułamków algebraicznych, i tak: z dwóch ułamków mających liczniki jednakowe, ten jest większy, którego mianownik jest mniejszy i odwrotnie; chcąc ułamki algebraiczne do siebie dodać lub odjąć, należy je sprowadzić przedewszystkiem do jednakowego mianownika. Mnożenie ułamków algebraicznych tak jak i arytmetycznych dokonywa się mnożąc przez siebie ich liczniki i mianowniki i t. d.

Nie będziemy tu dowodzić tych własności, wskażemy tylko parę przykładów dla wprawy uczących się w działania z ułamkami algebraicznemi; i tak:

Dodawanie.

1) $$\frac{2a}{a-b}+\frac{5a^2-2b^2}{3ab}=\frac{2a\times 3ab+(5a^2-2b^2)(a-b)}{(a-b)\,3ab}=$$
$$=\frac{6a^2b+5a^3-2ab^2-5a^2b+2b^3}{3a^2b-3ab^2}=\frac{5a^3+a^2b-2ab^2+2b^3}{3a^2b-3ab^2}$$

2) . . . . $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$

3) . . . . $a+\frac{b^2}{(a-b)}=\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

4) $$\frac{d}{ab}+\frac{3c^2d}{a^2b}+\frac{5d}{a^2b^2}+\frac{8d}{ab^2}=\frac{abd+3bc^2d+5d+8ad}{a^2b^2}$$

W ostatnim przykładzie chcąc dane ułamki do dodania sprowadzić do jednakowego mianownika, uważamy: że wszystkie mianowniki mieszczą się bez reszty w mianowniku a^2b^2, można więc go wziąć za wspólny mianownik; należy tylko oba wyrazy pierwszego ułamku pomnożyć przez ab, drugiego przez b, trzeci ułamek pozostanie bez zmiany, oba zaś wyrazy czwartego ułamku mnożyć przez a, otrzymamy więc na summę następujący ułamek:

$$\frac{abd+3bc^2d+5d+8ad}{a^2b^2}$$

Przy sprowadzaniu ułamków algebraicznych do jednakowych mianowników, starać się należy o wyszukanie najmniejszego wspólnego mianownika, do czego posłużyć może prawidło, podług którego w tym razie postępujemy w arytmetyce, t. j. w najmniejszym wspólnym mianowniku danych ułamków, mieścić się powinny bez reszty wszystkie mianowniki danych ułamków.

Odejmowanie.

1) $\frac{3a}{2bc}-\frac{5ab-1}{4b^2}=\frac{12ab^2-10ab^2c+2bc}{8b^3c}=\frac{6ab-5abc+c}{4b^2c}$

2) . . . . $\frac{8a+7c}{2ab}-\frac{6ac+2b}{b^2-a^2b}=$

$$=\frac{8ab^2+7b^2c-8a^3b-7a^2bc-12a^2bc-4ab^2}{2ab^3-2a^3b^2}=$$

$$=\frac{4ab^2+7b^2c-8a^3b-19a^2bc}{2ab^3-2a^3b^2}$$

Mnożenie.

1) $\frac{2a}{a-b}\times\frac{5a^2-2b^2}{3ab}=\frac{2a(5a^2-2b^2)}{3ab(a-b)}=\frac{2(5a^2-2b^2)}{3b(a-b)}=\frac{10a^2-4b^2}{3ab-3b^2}$

2) . . . . $\frac{a+b}{c+d}\times\frac{a-b}{c-d}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$

Dzielenie.

1) $\frac{2a}{a-b}:\frac{5a^2-2b^2}{3ab}=\frac{2a\times 3ab}{(5a^2-2b^2)(a-b)}=\frac{6a^2b}{(a-b)(5a^2-2b^2)}=$

$$=\frac{6a^2b}{5a^3-2ab^2-5a^2b+2b^3}.$$

2) . . . . $\frac{a+b}{c+d}:\frac{c-d}{a-b}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$.

Treść Rozdziału II.

19. Działania algebraiczne.—20. Dodawanie jednomianów.—21. Dodawanie wielomianów.—22. Przykłady.— 23. Odejmowanie jednomianów.— 24. Odejmowanie wielomianów.—25. Przykłady.— 26. Mnożenie algebraiczne.—27. Mnożenie jednomianów.—28, 29, 30, 31. Prawidło na znaki, współczynniki, głoski i wykładniki.—32. Przykład. — 33, 34. Mnożenie wielomianu przez jednomian.—35. Mnożenie dwóch wielomianów.—36, 37, 38. Własności iloczynu.—39. Przykłady.—40. Dzielenie algebraiczne.—41. Dzielenie jednomianów.—42, 43, 44, 45, 46, 47. Prawidło na znaki, współczynniki głoski, wykładniki, oraz znaczenie ilości w potędze zero i w potędze odjemnéj.—48. Przypadki, w których dzielenie jednomianów nie może być w zupełności uskutecznione.—49, 50. Dzielenie wielomianu przez jednomian, i odwrotnie.—51, 52, 53, 54. Dzielenie dwóch wielomianów—55. Warunki podzielności summy lub różnicy potęg dwóch ilości, przez summę lub różnicę tych ilości.—56. Przypadki, w których dzielenie nie może być uskutecznione, ułamki algebraiczne i działania z niemi.

ROZDZIAŁ III.

57. Z arytmetyki wiemy, że równość (равенство) jestto połączenie dwóch ilości znakiem $=$.

W algebrze jednak *równością* zowią połączenie znakiem równości takich dwóch ilości algebraicznych, które są jednakowe po wykonaniu wskazanych w nich działań, lub też w skutek prawd poprzednio już dowiedzionych. I tak wyrażenie:

$$(a+b+c)\ (-a+b+c)=-a^2+b^2+2bc+c^2$$

jest równością, bo wykonawszy wskazane na pierwszéj stronie mnożenie dwóch wielomianów, i w iloczynie uprościwszy wyrazy podobne, otrzymamy stronę drugą téj równości.

Równość przyjmuje nazwę *tożsamości (тождество)* gdy obie jéj strony są jednakowe, lub stają się takiemi przy pomocy bardzo prostego przekształcenia. I tak, wyrażenia:

$$a=a;\ a+b=a+b;\ o=o;\ (a+b)\ (a-b)=a^2-b^2,$$

są tożsamościami.

Jeżeli zaś równość algebraiczna przechodzi w tożsamość, dopiero za nadaniem pewnéj wartości liczebnéj, szczególnéj (głosce w jéj skład wchodzącéj) wówczas równość taka zowie się *równaniem (уравненіе).*

Równość naprzykład:

$$2x+3x=9-4x$$

jest równaniem, bo wtedy tylko gdy $x=1$, równość powyższa zmienia się na tożsamość:

$$2+3=9-4.$$

Ilość, któréj nadawać trzeba pewne szczególne wartości, aby równanie na tożsamość zamienić, zowie się *niewiadomą równania (неизвѣстная).*

58. Stosownie do liczby niewiadomych równania są z jedną niewiadomą, z dwoma, z trzema, i t. d. niewiadomemi. Niewiadome te, zwykle się oznaczają końcowemi głoskami łacińskiego abecadła; tak więc z dwóch równań:

$$3x+7x=18-2x$$
$$\text{i}\quad 5x-8y=17+4y$$

pierwsze jest z jedną niewiadomą, drugie z dwoma.

59. Wymiar wyrazu, w którym summa wykładników niewiadomych w równaniu jest największa, stanowi stopień równania; i tak, równanie

$$3x+8y=17$$

jest stopnia pierwszego, gdyż niewiadome wchodzą tylko w stopniu pierwszym; równania zaś

$$8x+5xy=16$$
$$\text{i}\quad 3x^2+7xy=4y^2-5$$

są stopnia drugiego; bo chociaż w pierwszém z nich, niewiadome wchodzą tylko w stopniu pierwszym, lecz że wyraz xy jest wymiaru drugiego, więc i równanie jest stopnia drugiego. Tym sposobem równania:

$$8x^2+5x^2y=18-5y$$
$$\text{i}\quad ax^2+bx^2y+y^2=c$$

są stopnia trzeciego i t. d.

60. Jeżeli równanie zawiera w sobie jednę tylko niewiadomą, wówczas *pierwiastkiem (корень)* równania jest wartość liczebna, która podstawiona za niewiadomą, sprawdza równanie, tojest przemienia je na tożsamość. Pierwiastkami więc równania:

$$x^2+6=5x$$

są liczby 2 i 3, bowiem

$$2^2+6=5.2 \text{ tojest } 4+6=10,$$
$$\text{oraz } 3^2+6=15 \text{ tojest } 9+6=15.$$

Pierwiastkami równań zawierających kilka niewiadomych x, y, z,... zowiemy system wartości, dla tych niewiadomych, które równanie zamieniają na tożsamość; i tak równania:

$$x^2+3xy=4$$
$$2xy+y^2-x=2$$

mają dwa systemy pierwiastków;

w pierwszym:

$$x=1$$
$$y=1$$

tojest:

$$1+3=y$$
$$2+1-1=2;$$

w drugim:

$$x=-2$$
$$y=0,$$

więc:

$$(-2)^2+3(-2)0=4$$
$$2(-2)0+0^2-(-2)=2,$$

czyli:

$$4+0=4$$
$$0+0+2=2.$$

61. *Rozwiązać równanie (рѣшить уравненіе)*, znaczy znaleźć taką wartość dla niewiadomej, która podstawiona w równanie, zamienia je na tożsamość.

Sprawdzić równanie, jestto przekonać się, czy rzeczywiście wartości otrzymane dla niewiadomych wstawione w to równanie, zmieniają je na tożsamość.

Własności równań, na których zasadza się ich rozwiązanie.

62. *Własność pierwsza:*

W każdém równaniu nie zmieniając wartości niewiadomych, można do obu stron równania dodać lub odjąć jednakową ilość.

Jeżeli bowiem w równanie dane $A=B$ podstawiając wartości, za niewiadome x, y, z.... zawarte w wielomianach A i B, otrzymujemy tożsamość, to wartości które podstawić należy w równania $A+C=B+C$ lub $A-C=B-C$, aby je także zamienić na tożsamość, niczém się od poprzednich różnić nie mogą.

63. Z téj własności wypływa prawidło na przenoszenie wyrazów w równaniu, które brzmi tak:

Aby pewien wyraz przenieść z jednéj strony równania na drugą, należy go na téj stronie skréślić a na drugiéj napisać, lecz z przeciwnym znakiem.

Niech będzie bowiem równanie:

$$2x+5x-4=4x+8.$$

Dodajmy po obu stronach tego równania po 4, a odejmijmy po $4x$, otrzymamy:

$$2x+5x-4+4-4x=4x+8-4x+4,$$

czyli 4 dodane i odjęte na pierwszéj stronie, oraz $4x$ dodane i odjęte na drugiéj stronie równania zniesie się i będzie:

$$2x+5x-4x=8+4.$$

Widzimy więc, że 4 które było na pierwszéj stronie równania ze znakiem odjemnym, jest teraz na stronie drugiéj lecz ze znakiem dodatnym; zaś $4x$ przeszło na stronę pierwszą, lecz także z przeciwnym znakiem.

64. *Własność druga:*

Nie zmieniając wartości niewiadoméj, można pomnożyć lub podzielić obie strony równania przez jednakową ilość, byleby tylko ta ilość była niezależną od niewiadoméj, tojest nie zawierała jéj w sobie.

Przeniosłszy wszystkie wyrazy danego równania z drugiéj strony na pierwszą, równanie to przyjmie kształt:

$$A=o..... \quad (1)$$

gdzie A jest wielomianem zawierającym wszystkie wyrazy danego równania.

Przypuśćmy, że m jest pewna ilość skończona niezależna od niewiadoméj, więc iloczyn:

$$mA=o.... \quad (2)$$

wiemy bowiem, że iloczyn jest zerem, gdy jeden z czynników jest zerem, a tu właśnie $A=o$.

Porównywając równanie (1) z (2), mamy:

$$A=mA,$$

co nam pokazuje, że też same wartości dla niewiadomych, które sprawdzają dane równanie (1), sprawdzą także równanie (2) i odwrotnie:

Uwaga. — Dzieląc obie strony równania przez ilość zależną od niewiadoméj, pierwiastki tego równania ulegają zmianie. I tak, równanie:

$$x^2-4x+3=x-1,$$

ma za pierwiastki 1 i 4; podzieliwszy zaś obie strony tego równania przez $x-1$, otrzymamy nowe równanie:

$$x-3=1,$$

które ma za pierwiastek tylko 4.

65. Opierając się na powyższéj własności, wyprowadzamy następne prawidło na znoszenie mianowników w równaniu.

Chcąc w równaniu wyraz ułamkowy zamienić na całkowity, należy wszystkie wyrazy, wyjąwszy wyraz ułamkowy, pomnożyć przez mianownik ułamku.

Niech będzie równanie:

$$3x^2+\frac{8x}{3}=6.$$

Dla zniesienia mianownika 3, pomnóżmy obie strony równania przez 3, otrzymamy:

$$3.\,3x^2+\frac{3.\,8.\,x}{3}=6.\,3,$$

3 które mnoży i dzieli drugi wyraz równania, zniesie się i pozostanie:

$$9x^2+8x=18.$$

Widzimy więc, że przez zniesienie mianownika 3, wszystkie wyrazy, oprócz ułamkowego, pomnożone zostały przez ten mianownik.

W ogólności, dla zniesienia ilukolwiek mianowników należy wszystkie wyrazy równania mnożyć przez ilość podzielną przez każdy z tych mianowników.

W równaniu *np.*

$$\tfrac{2}{3}x+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{7}{12}x+\tfrac{13}{24}=\tfrac{3}{8}x+1,$$

mnożąc wszystkie wyrazy przez 24, mamy nowe równanie:

$$16x+18x-14x+13=9x+24,$$

równe poprzedniemu, lecz nie zawierające już mianowników.

66. *Własność trzecia:*

Mając dwa równania z ilukolwiek niewiadomemi, można, nie zmieniając wartości dla niewiadomych, dane równania zastąpić przez dwa inne, z których pierwsze jest jedném z danych równań, a drugie jest summą lub różnicą danych równań (*).

(*) Dodać lub odjąć dwa równania, znaczy dodać lub odjąć odpowiednie strony tych równań: i tak dodając do równania $A=B$ równanie $C=D$, otrzymamy na summę równanie $A+C=B+D$. Różnicą znowu dwóch równań $A=B$ i $C=D$ jest równanie $A-C=B-D$.

Dla okazania téj prawdy, przypuśćmy, że w obu danych równaniach, wszystkie wyrazy z drugiéj strony przenieśliśmy na pierwszą, tak, że na drugich stroną danych równań pozostały zera. Dane więc równania są postaci:

pierwsze: $B=o$..... (1)

drugie: $A=o$..... (2)

gdzie A i B są wielomianami zawierającemi niewiadome x, y, z.

Chcemy dowieść, że dwa dane równania, nie zmieniając wartości dla niewiadomych, zastąpić można przez dwa inne takie:

$A=o$..... (3)

$A+B=o$..... (4)

Oczywistą bowiem jest rzeczą, że kiedy przy pewnych wartościach dla niewiadomych x, y, z... każden z wielomianów A i B sprowadza się do zera, to i summa ich, tojest $A+B$, przy tychże samych wartościach dla niewiadomych jest także zerem. Z drugiéj znowu strony: jeżeli summa $A+B$, i jedna część téj summy, tojest A, przy pewnych wartościach dla niewiadomych x, y, z... jest zerem, to i druga część téj summy, tojest B, przy tychże samych wartościach dla niewiadomych musi być także zerem. Możemy więc równania (1) i (2) zastąpić przez (3) i (4), bez zmiany wartości dla niewiadomych. Toż samo dowodzenie służy i dla drugiego przypadku, gdy równania się odejmują.

Rozwiązywanie równań stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

67. Weźmy równanie:

$$\tfrac{2}{3}x+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{7}{12}x+\tfrac{13}{24}x=\tfrac{3}{8}x+1$$

stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Chcąc go rozwiązać, tojest znaleźć taką wartość dla x, któraby podstawiona w równanie, zamieniła je na tożsamość:

1) Znieśmy mianowniki znajdujące się w tém równaniu: tego dokonamy mnożąc obie strony równania przez 24 i będzie:

$$16x+18x-14x+13=9x+24.$$

2) Przenieśmy wyrazy zawierające niewiadomą na pierwszą, zaś wyrazy wiadome na drugą stronę równania, wypadnie:

$$16x+18x-14x-9x=24-13.$$

3) Upraszczając wyrazy podobne, mamy:

$$11x=11.$$

4) Dzieląc nakoniec obie strony równania przez współczynnik niewiadoméj x, tojest przez 11, otrzymamy równanie:

$$x=1,$$

równe zupełnie danemu i zamieniające się na tożsamość gdy $x=1$; więc pierwiastek danego równania także jest 1, bo podstawiwszy tę wartość, mamy:

$$\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4}-\tfrac{17}{12}+\tfrac{13}{24}=\tfrac{3}{8}+1,$$

$$\frac{33}{24}=\frac{11}{8},$$

czyli: $$\frac{11}{8}=\frac{11}{8}.$$

Tym sposobem rozwiązaliśmy dane równanie.

Niech będzie jeszcze równanie:

$$\tfrac{7}{12}x+\tfrac{4}{5}x-\tfrac{3}{10}-\tfrac{4}{45}x=\tfrac{11}{60}x+7-3x$$

dane do rozwiązania.

Według poprzedniego otrzymujemy:

1) Znosząc mianowniki:

$$105x+144x-54-16x=33x+1260-540x.$$

2) Przenosząc wyrazy zawierające niewiadomą na jednę, a wyrazy wiadome na drugą stronę:

$$105x+144x-16x-33x+540x=1260+54.$$

3) Upraszczając wyrazy podobne:

$$740x=1314.$$

4) Dzieląc obie strony przez współczynnik przy x:

$$x=\frac{1314}{740}=\frac{657}{370}.$$

Z powyższych przykładów wynika następujące prawidło:

Aby rozwiązać równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą, należy:

1) Znieść mianowniki.

2) Przenieść wyrazy zawierające niewiadomą na jednę, a wyrazy wiadome na drugą stronę równania.

3) Uprościć wyrazy podobne; — nakoniec:

4) Obie strony równania podzielić przez współczynnik przy niewiadoméj, a iloraz tym sposobem otrzymany będzie pierwiastkiem danego równania.

68. *Przykład pierwszy:*

Rozwiązać równanie:

$$\frac{3x}{2b}+1+\frac{29a}{2a-2b}=\frac{x}{a-b}+\frac{15a^2}{2b(a-b)}+\frac{4b}{a-b},$$

najmniejszy wspólny mianownik jest $2b(a-b)$, mnożymy więc obie strony równania przez ten mianownik, i mamy:

$$3x(a-b)+2b(a-b)+29ab=2bx+15a^2+8b^2$$

ztąd: $[3(a-b)-2b]x=15a^2+8b^2-2b(a-b)-29ab$

$$[3(a-b)-2b]x=15a^2+8b^2-2ab+2b^2-29ab$$

$$(3a-5b)x=15a^2+10b^2-31ab$$

$$x=\frac{15a^2+10b^2-31ab}{3a-5b}=5a-2b$$

Przykład drugi:

Znaleźć wartość dla niewiadoméj w równaniu:

$$2ax-bx+2ab=4a^2-ab-3ax.$$

Ponieważ tu nie potrzeba znosić mianowników, więc wprost przenosimy wyrazy z niewiadomą na jednę, a wyrazy wiadome na drugą stronę, i jest:

$$2ax-bx+3ax=4a^2-ab-2ab,$$

ztąd:

$$5ax-bx=4a^2-3ab,$$

czyli:

$$(5a-b)x=4a^2-3ab,$$

i nakoniec:

$$x=\frac{4a^2-3ab}{5a-b}$$

dla sprawdzenia, podstawmy wartość znalezioną dla x w równanie dane, przez co zamienić się powinno na tożsamość. Mamy więc:

$$2a\left(\frac{4a^2-3ab}{5a-b}\right)-b\left(\frac{4a^2-3ab}{5a-b}\right)+2ab=$$
$$=4a^2-ab-3a\left(\frac{4a^2-3ab}{5a-b}\right)$$

wykonywając wskazane działanie, i sprowadzając wszystkie wyrazy do mianownika $5a-b$, jest:

$$\frac{8a^3-ba^2b-4a^2b+3ab^2+10a^2b-2ab^2}{5a-b}=$$
$$=\frac{20a^3-4a^2b-5a^2b+ab^2-12a^3+9a^2b}{5a-b}$$

po uproszczeniu wyrazów podobnych otrzymujemy tożsamość:

$$\frac{8a^3+ab^2}{5a-b}=\frac{8a^3+ab^2}{5a-b}$$

więc równanie dobrze jest rozwiązane.

Przykład trzeci:

Rozwiązać równanie:

$$\frac{2}{1-x}+1=\frac{x}{1+x}.$$

Zdawałoby się na pozór, że to równanie zawierające niewiadomą w mianowniku, nie może być podług zasad wyżej wskazanych rozwiązane; jednakże tak nie jest, bo zniósłszy mianowniki, mamy:

$$2(1+x)+1(1-x)(1+x)=x(1-x)$$

czyli:

$$2+2x+1-x^2=x-x^2,$$

ztąd:

$$2x-x^2+x^2-x=-1-2$$

a po uproszczeniu:

$$x=-3.$$

Wartość dla niewiadoméj sprawdza dane równanie, bo wiem:

$$\frac{2}{1+3}+1=\frac{-3}{1-3}$$

czyli:

$$1\tfrac{1}{2}=\tfrac{-3}{-2}=1\tfrac{1}{2}.$$

Rozwiązanie równań stopnia pierwszego z dwoma niewiadomemi.

69. Niech będą dwa równania:

1) $7x+3y=36$

2) $11x-5y=8.$

Chcąc znaleźć wartości dla niewiadomych x i y, któreby sprawdziły dane równania, staramy się z dwóch danych równań otrzymać jedno, zawierające jednę tylko niewiadomą, a które rozwiążemy sposobem wyżéj wskazanym. Działanie to zowie się rugowaniem jednéj niewiadoméj i dokonywa się trzema sposobami: przez *porównanie*, *podstawienie i dodawanie lub odejmowanie.*

70. *Usunięcie niewiadoméj przez porównanie.*

Każde z powyższych równań (1) i (2) rozwiążmy na x, przyjmując y za wiadome, będziemy mieli z pierwszego:

$$x=\frac{36-5y}{11}, \qquad x=\frac{36-3y}{7}$$

z drugiego zaś:

$$x=\frac{8+5y}{11}, \qquad x=\frac{8+5y}{11}$$

porównywając te dwie wartości otrzymane na x, wypadnie równanie:

$$\frac{36-3y}{7}=\frac{8+5y}{11},$$

z jedną tylko niewiadomą y. Rozwiązując je, znajdziemy:

$$y=5.$$

Wartość na y podstawiona w jeden z powyżéj otrzymanych wzorów na x, daje:

$$x=\frac{8+5.5}{11}=\frac{8+25}{11}=3.$$

71. *Usunięcie niewiadoméj przez podstawienie.*

Z równania pierwszego znajdźmy wartość na x, poczytując y za wiadomą, i wartość tę:

$$x=\frac{36-3y}{7}$$

podstawmy zamiast x w równanie (2), otrzymamy równanie:

$$11\left(\frac{36-3y}{7}\right)-5y=8$$

zawierające jednę tylko niewiadomą y. Rozwiązując je, mamy $y=5$. Wartość ta wstawiona we wzór:

$$x=\frac{35-3y}{7}$$

daje:

$$x=\frac{36-3.5}{7}=\frac{36-15}{7}=\frac{21}{7}=3.$$

72. *Usunięcie niewiadoméj przez dodawanie lub odejmowanie.*

Uważmy przedewszystkiém, że gdy współczynniki tejże saméj niewiadoméj, w danych dwóch równaniach są sobie równe, łatwo wyrugować niewiadomą, dodając albo odejmując od siebie odpowiednie strony danych równań, stosownie do tego, czy wyrazy mające współczynniki, równe są ze znakami jednakowemi lub przeciwnemi.

Wiedząc to, pomnóżmy obie strony równania (1) przez 11, tojest przez współczynnik niewiadoméj x w równaniu (2); obie zaś strony tego ostatniego równania pomnożymy przez 7, tojest przez współczynnik tejże niewiadoméj x w równaniu (1), będziemy mieli:

$$7.11x+3.11y=36.11$$

$$\text{i}\quad 11.7x-5.7y=8.7$$

odejmując odpowiednie strony tych dwóch równań, przemieniamy w odjemniku znaki na przeciwne, i znajdziemy:

$$(3.11+5.7)y=36.11-8.7\ldots \qquad (3)$$

Na mocy twierdzenia powyżéj dowiedzionego (66), dane równania mogą być zastąpione przez równanie (3), i przez jedno z danych *np.* (2). Lecz z równania (3) mamy:

$$y=\frac{36.11-8.7}{3.11+5.7}=\frac{36.11-8.7}{68}=\frac{9.11-2.7}{17}=\frac{85}{17}=5$$

a wartość ta podstawiona w równaniu (1), daje nam $x=3$.

Pierwiastki więc danych równań są:

$$x=3$$

$$y=5.$$

Uwaga.—Gdy współczynniki niewiadoméj, którą usunąć chcemy, nie są liczbami pierwszemi względem siebie, wówczas sprowadzamy je do najmniejszéj liczby wielokrotnéj; i tak, niech będą dwa równania:

$$60x-77y=488$$

$$48x+35y=4$$

które przez rugowanie niewiadoméj y rozwiązać chcemy.

Tu ponieważ najmniejszą liczbą wielokrotną względem tych współczynników jest $77\times5=35\times11$, przeto zamiast mnożyć pierwsze równanie przez 35, a drugie przez 77, mnożymy pierwsze z tych równań tylko przez 5, a drugie przez 11, i otrzymamy:

$$60.5x-77.5y=488.5 \qquad (3)$$

$$\text{i}\quad 48.11x+35.11y=4.11 \qquad (4)$$

a że wyrazy w których porównywaliśmy współczynniki niewiadoméj y są ze znakami przeciwnemi, więc równania (3) i (4) dodajemy, i wypadnie:

$$(60.\,5+48.\,11)x=488.\,5+4.\,11$$

dzieląc wszystkie wyrazy przez 4:

$$(15.\,5+12.\,11)x=122.\,5+11,$$

lub:

$$3(25+44)x=621,$$

ztąd:

$$x=\frac{207}{69}=3.$$

Niekiedy niewiadomą z danych równań rugować można jeszcze innym sposobem.

Niech będą dwa równania:

$$8x-5y=25..... \quad (1)$$
$$3x+25y=90..... \quad (2)$$

Chcąc niewiadomą y wyrugować, łatwo dostrzegamy, że pomnożywszy równanie (1) przez 5, współczynnik przy niewiadoméj y w tém równaniu, będzie równy współczynnikowi téj niewiadoméj w równaniu (2). Mnożąc więc, mamy:

$$40x-25y=125..... \quad (3)$$
$$\text{i}\ \ 3x+25y=90..... \quad (4)$$

Równania (3) i (4) dodając, znajdziemy:

$$(40+3)x=(125+90)$$

czyli:

$$43x=215$$

$$x=\frac{215}{43}=5$$

wartość tę podstawiwszy za x w jedno z danych równań, mamy:

$$y=3.$$

73. Powyżej rozwiązywane równania stopnia pierwszego z dwoma niewiadomemi, były zawsze trzy wyrazowe; na pierwszéj stronie równania były dwa wyrazy, z których jeden zawierał niewiadomą x, drugi niewiadomą y, druga zaś strona równania była ilością wiadomą jednowyrazową.

Lecz jakiekolwiek byłoby dane równanie, zawsze przenosząc wyrazy zawierające niewiadome na jednę stronę, a ilości wiadome na drugą stronę równania, następnie zbierając wyrazy podobne, otrzymamy równanie trójwyrazowe, równe zupełnie z poprzedniemi.

Ogólny więc kształt równań stopnia pierwszego z dwoma niewiadomemi, jest:

$$ax+by=c$$

gdzie a, b i c są ilościami wiadomemi, jednomianami lub wielomianami; zaś x i y są niewiadome, których wartości szukamy.

74. Przypuśćmy, że są dwa równania:

$$a\,x+b\,y=c \qquad (1)$$
$$a'x+b'y=c', \qquad (2)$$

które rozwiązać chcemy.

Dla usunięcia z nich jednéj niewiadoméj, *np.* x, zastosujmy jeden z trzech podanych wyżéj sposobów, *np.* usuńmy niewiadomą x przez dodawanie lub odejmowanie.

W tym celu obie strony równania (1) mnożymy przez a', obie zaś strony równania (2) przez a, i będzie:

$$aa'x+ba'y=ca' \qquad (3)$$
$$\text{i} \quad aa'x\pm b'ay=c'a \qquad (4)$$

odejmując równanie (4) od (3), znajdziemy:

$$ba'y-b'ay=ca'-c'a$$

czyli:

$$(ba'-b'a)y=ca'-c'a$$

ztąd:

$$y=\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}. \qquad (5)$$

Tak znalezioną wartość dla y wstawmy w równanie (1), będzie:

$$ax+b\left(\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}\right)=c$$

czyli:

$$aa'bx-a^2b'x+bca'-bc'a=ba'c-b'ac$$

lub też: $(aa'b-a^2b')x=ba'c-b'ac-bca'+bc'a$

zkąd: $x=\dfrac{bc'a-b'ac}{aa'b-a^2b'}=\dfrac{(bc'-b'c)a}{(a'b-ab')a}=\dfrac{bc'-b'c}{a'b-ab'}$ (6)

75. Wzory (5) i (6) służyć zawsze mogą do rozwiązania dwóch równań stopnia pierwszego z dwoma niewiadomemi:

Wartości dla obudwóch niewiadomych są dane w postaci ułamków, mających mianownik jednakowy i równy różnicy iloczynów, z nakrzyż branych współczynników przy niewiadomych danych równań. Licznik każdego z tych ułamków otrzymać można z wspólnego im mianownika, kładąc tylko w miejsce współczynników téj niewiadoméj, któréj wartości szukamy, odpowiednie ilości wiadome na drugiéj stronie danych równań będące.

Przykład:

Niech będą dwa równania:

$$13x+25y=101$$
$$19x-7y\ =17$$

stosując powyżéj otrzymane wzory, mamy:

$$x=\frac{25.\,17+101.\,7}{25.\,19+\ 13.\,7}=\frac{425+707}{475+\ 91}=\frac{1132}{566}=2$$

$$y=\frac{101.\,19-13.\,17}{25.\,19+13.\ \ 7}=\frac{1919-221}{566}=\frac{1698}{566}=3.$$

76. *Rozwiązanie pewnéj liczby równań stopnia pierwszego z takąż samą liczbą niewiadomych.*

Opierając się na rozwiązywaniu dwóch równań stopnia pierwszego z dwoma niewiadomemi, wyprowadzamy następujące ogólne prawidło:

Chcąc rozwiązać n *równań stopnia pierwszego z takąż liczbą niewiadomych usuwa się z danych równań jedna nie-*

wiadoma, którymkolwiek ze sposobów wyżéj podanych; powstaje ztąd (n—1) *równań stopnia pierwszego z* (n—1) *liczbą niewiadomych. Z tych znowu równań rugując jednę niewiadomą, znajdziemy* (n—2) *równań z takąż liczbą niewiadomych, i tak następnie. Tym sposobem* n *danych równań, zastąpić można przez* n *innych równań, które zawierać będą kolejno* n, (n—1), (n—2), (n—3)....2, 1 *niewiadomych. Rozwiązując równanie ostatnie, zawierające w sobie jednę tylko niewiadomą, znajdziemy przez proste podstawianie wartości dla wszystkich innych niewiadomych.*

Niech będzie do rozwiązania pięć następujących równań:

$$3x+2y-7z+4t+3u=41$$
$$-2x-3y-5z+3t-2u=17$$
$$-6x+7y-3z+t-4u=7$$
$$3x-4y-6z+2t-11u=26$$
$$5x-5y+3z+3t+4u=5$$

z pięcioma niewiadomemi.

Postępując podług powyżéj podanego prawidła, usuńmy niewiadomą x z równania (1) i (2), następnie wyrugujmy też niewiadomą z równań (2) i (3), potém z (3) i (4); tym sposobem otrzymamy cztery równania z czterema niewiadomemi, jako to:

$$-5y-29z+17t = 133.... \quad (6)$$
$$8y+6z-4t+u=-22... \quad (7)$$
$$-y-15z+5t-26u= 59.... \quad (8)$$
$$5y+39z-t+67u=-115.... \quad (9)$$

Te równania zastąpić mogą dane równania.

Równanie (6) nie zawiera w sobie niewiadoméj u, gdyż rugując z równań (1) i (2) niewiadomą x, usunęliśmy zarazem niewiadomą u. Dosyć więc jest tylko tę niewiadomą u wyrugować z równań (7) i (8) i z równań (8) i (9), wypadną więc trzy równania:

$$-5y-29z+17t= 133 \quad (10)$$
$$69y+47z-33t=-171 \quad (11)$$
$$\text{i } 177y+121z-89t=-453. \quad (12)$$

Rugując dalej niewiadomą y z równań (10) i (11) i z (11) i (12), znajdziemy:

$$-883z+504t=4161 \qquad (13)$$
$$-1132z+641t=5319 \qquad (14)$$

Po usunięciu nareszcie niewiadoméj t z równań (13) i (14) i po uproszczeniu, mamy:

$$z=-3. \qquad (15)$$

Dane więc równania można zastąpić przez następujące:

$$z=-3 \qquad (15)$$
$$-883z+504t=4161 \qquad (13)$$
$$69y+47z-33t=-171 \qquad (17)$$
$$8y+6z-4t+u=-22 \qquad (7)$$
$$\text{i} \quad 3x+2y-7z+4t+3u=41 \qquad (1)$$

Wstawiając teraz wartość na z równania (15) w równanie (13) otrzymamy $t=3$.

Po wstawieniu w równanie (11) wartości $z=-3$ i $t=3$, znajdziemy $y=1$; tak dalej postępując, przyjdziemy do wypadków $u=0$ i $x=2$.

77. Tak jak przy rozwiązywaniu dwóch równań z dwoma niewiadomemi, rugowaliśmy niewiadomą wstawiając w jedno równanie wartość wyciągniętą dla niéj z drugiego równania, tak samo mając kilka równań z kilkoma niewiadomemi, możnaby z jednego z tych równań wyciągnąć wartość dla pewnéj niewiadoméj, *np.* x, i wstawić ją za x w pozostałe równania, tym sposobem, liczba niewiadomych i liczba równań zmniejszy się o 1, i tak daléj....

Jednakże sposób ten jest mało używany, często bowiem wywołuje liczne trudności, szczególniéj gdy w równaniach współczynniki przy niewiadomych są ogólne. Zwykle więc ruguje się niewiadoma z równań danych przez dodawanie i odejmowanie, tojest, przez zrównanie najprzód współczynników przy téj niewiadoméj, którą rugować chcemy, a następnie dodanie lub odjęcie równań (72).

Przykłady na równania stopnia pierwszego.

78. Umiemy więc rozwiązywać równania stopnia pierwszego z ilukolwiek niewiadomemi. Nadto z poprzedniego wypada, że aby wartość dla niewiadomych można było odszukać, potrzeba tyle równań, ile jest niewiadomych; inaczéj przyszlibyśmy zawsze do jednego równania z dwoma lub więcéj niewiadomemi, którego rozwiązać nie umiemy.

Przy rozwiązywaniu więc wszystkich przykładów i zagadnień w algebrze, idzie głównie o to, aby ilości dane w zadaniu, wraz z niewiadomemi, umiejętnie w równania ułożyć; mając bowiem równania, bardzo łatwo odszukać z nich wartości dla niewiadomych, a tém samém dane zagadnienie rozwiązać.

Różnorodność zagadnień nie pozwala podać ogólnego prawidła, podług któregoby z brzmienia zadania, można ilości dane z niewiadomemi w równania ułożyć. Pokażemy tylko, że w układaniu równań zwracać należy szczególniejszą uwagę na to: w jaki sposób ilości niewiadome zadania zależą od wiadomych, oraz jakim warunkom czynić muszą zadosyć ilości niewiadome. W ogóle równania są tylko odmiennném wysłowieniem zagadnienia: zawierać w sobie muszą wszystko, czego wymagamy w zagadnieniu od ilości niewiadomych, jednném słowem, równania: to język algebraiczny, który zadania tłumaczy, aby je łatwiej rozwiązać.

Uczący się, może przez rozwiązanie kilku zagadnień nabyć takiéj wprawy, że odczytawszy zadanie, z łatwością zdoła równania ułożyć; w początkach tylko należy się dokładnie oswoić z językiem algebraicznym i przyzwyczajać do uwagi i zastanowienia przy odczytywaniu zagadnienia.

Z kilku przykładów poniżej podanych, można nabrać dostatecznego pojęcia: jak z brzmienia zadania układają się równania, i przekonać się z nich można, jak wielka korzyść płynie z rozwiązywania zagadnień przy pomocy algebry.

79. *Przykład 1:*

Znaleźć dwie liczby, których summa jest a, *zaś różnica* b.

Oznaczmy jednę z szukanych liczb przez x, drugą zaś przez y. Mając dwie niewiadome w zagadnieniu, układamy dwa równania następujące:

$$x+y=a\ldots.. \qquad (1)$$

i $$x-y=b\ldots. \qquad (2)$$

które dodając do siebie, mamy:

$$2x=a+b$$

zkąd:

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \qquad (3)$$

odejmując znowu od równania (1) równanie (2) znajdziemy:

$$2y=a-b$$

czyli:

$$y=\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2} \qquad (4)$$

Wzory (3) i (4) znaczą, że: *mając summę i różnicę dwóch liczb, dla otrzymania większéj liczby, należy do połowy summy dodać połowę różnicy; chcąc zaś mieć mniejszą z szukanych liczb, trzeba od połowy summy odjąć połowę różnicy tych liczb.*

Uwaga. — Rozwiązując powyższe zagadnienie w arytmetyce, tojest gdy summa i różnica szukanych liczb dane są liczebnie, nie widzimy w jaki sposób powstają szukane liczby z ich summy i różnicy. Przeciwnie zaś, oznaczając ogólnie głoskami summę i różnicę ilości których szukamy, otrzymujemy wzór ogólny, który zastosowany być może we wszystkich przypadkach szczególnych. Tojest właśnie wyższość, jaką rozwiązania algebraiczne mają zawsze nad wypadkami arytmetycznemi.

Przykład 2:

Osoba A posiada na procencie pewien kapitał, lecz przy stopie procentu niewiadoméj; kapitał osoby B jest większy od kapitału osoby A o a Rubli sr., i przynosi jéj procentu b Rsr. więcéj niż osobie A., przy stopie procentu wyższéj od poprzedniéj o 1%. Osoba C ma o a′ Rsr. więcéj kapitału niż osoba A., procent jéj przenosi procent osoby A o b′ Rsr. przy stopie wyższéj od poprzedniéj o 2%. Jakież są kapitały, stopy procentu i procenta danych osób?

Oznaczywszy przez x kapitał osoby A, przez y stopę procentu, na jaką ten kapitał został oddany; procent roczny od kapitału x, jak wiemy z arytmetyki, jest $\frac{xy}{100}$. Kapitał osoby B wynosić będzie $(x+a)$, zaś stopa procentu na jaką jest oddany, jest $(y+1)$. Procent więc roczny czyni $\left(\frac{(x+a)\,(y+1)}{100}\right)$. Że zaś ten procent przewyższa procent od kapitału osoby A o b Rsr., więc mamy równanie.

$$\frac{(x+a)\,(y+1)}{100}=\frac{xy}{100}+b\ldots. \qquad (1)$$

Tym samym sposobem kapitał osoby C jest $(x+a')$, stopa procentu $(y+2)$, procent roczny jaki osoba C ma od swego kapitału, uczyni $\frac{(x+a')\,(y+2)}{100}$. Ponieważ zaś ten procent wyższym ma być (według brzmienia zadania) od procentu osoby A o b' Rsr., więc jest równanie drugie:

$$\frac{(x+a')\,(y+2)}{100}=\frac{xy}{100}+b'\ldots.. \qquad (2)$$

Po wykonaniu wskazanych działań i uproszczeniu równań (1) i (2), otrzymamy dwa następujące:

$$x+ay=100b-a\ldots.. \qquad (3)$$
$$2x+a'y=100b'-2a' \qquad (4)$$

Równanie (3) mnożąc przez 2 i od równania (3) odejmując (4), znajdziemy:

$$2ay-a'y=200b-2a-100b'+2a'$$

czyli:

$$(2a-a')y=100(2b-b')\mp 2(a'-a)$$

zkąd: $$y=\frac{100(2b-b')+2(a'-a)}{2a-a'} \quad . \; . \; . \; (5)$$

Wartość znalezioną dla y wstawmy zamiast y w równanie (3), po wykonaniu działań i uproszczeniu znajdziemy:

$$x=\frac{100(ab'-ba')-aa'}{2a-a'} \quad . \; . \; . \; . \; (6)$$

Otrzymaliśmy wartości dla niewiadomych w zagadnieniu w postaci wzorów (5) i (6), które zostosowane być mogą w każdym szczególnym przypadku, i tak dajmy: że:

$$a=15000,\; a'=20000,\; b=850,\; b'=1500$$

będziemy mieli:

$$y=\frac{100(1700-1500)+2(20000-15000)}{30000-20000}=$$

$$=\frac{100.200+2.5000}{10000}=3.$$

$$x=\frac{100(225-170)100000-300000000}{10000}=$$

$$=55000-30000=25000.$$

Tak więc:

kapitał osoby A wynosi 25000 i oddany jest na procent przy stopie 3%

kapitał osoby B wynosi 40000 i oddany jest na procent przy stopie 4%

kapitał osoby C wynosi 45000 i oddany jest na procent przy stopie 5%.

Łatwo przekonać się, że otrzymane wartości czynią zadosyć warunkom podanym w zagadnieniu.

Przykład 3.

Z zbiornika napełnionego, woda wypływać może dwoma upustami. Otworzono jeden z nich i wypuszczono $\frac{1}{n}$ *część wody, poczem otworzono drugi upust, i aż do zupełnego wypróżnienia zbiornika, woda wypływała przez obydwa upusty. Na wypuszczenie przez pomienione obydwa upusty pozostałéj w zbiorniku wody, potrzebowano* a *godzin więcéj, niż na wypuszczenie* $\frac{1}{n}$ *część wody przez pierwszy upust. Gdyby od samego początku woda wypływała przez obydwa upusty, zbiornik byłby się wypróżnił o* b *godzin wcześniéj. Chcemy wiedzieć, ile potrzeba godzin czasu puszczając wodę jednym z danych upustów, na wypróżnienie przez każdy z nich pełnego zbiornika.*

Oznaczmy przez x i y dwa niewiadome zagadnienia, i przyjmijmy ilość wody, jaką mieści w sobie rezerwoar za jedność. Ponieważ otworzywszy upust pierwszy, wszystka woda zbiornika wychodzi przez godzin x, więc na wypuszczenie $\frac{1}{n}$ części téj wody, potrzebowano godzin $\frac{x}{n}$.

Po wypuszczeniu z zbiornika $\frac{1}{n}$ części wody, pozostało w nim jeszcze wody:

$$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

Nadto, gdy zbiornik wypróżnia się pierwszym upustem, przez godzin x, to na godzinę wypuszcza pierwszy upust ilość wody $=\frac{1}{x}$; upustem drugim przechodzi przez godzinę ilość wody $\frac{1}{y}$; jeżeli więc obydwa upusty są otwarte, to one przez godzinę wypuszczą wody $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$. Podzieliwszy ilość wody pozostałej w zbiorniku, tojest $\frac{n-1}{n}$

przez ilość wody jaka obydwoma upustami wypływa, to-jest przez $\frac{x+y}{xy}$ iloraz pokaże nam ile godzin potrzeba było do wypróżnienia pozostałéj wody przez obydwa upusty. Mamy więc:

$$\frac{n-1}{n} : \frac{x+y}{xy} = \frac{(n-1)xy}{n(x+y)} \cdot$$

A że według brzmienia zadania potrzebowano a godzin więcéj, na wypuszczenie pozostałéj wody przez obydwa upusty, niż na wypuszczenie $n^{téj}$ części wody pierwszym upustem, więc mamy równanie:

$$\frac{(n-1)(xy)}{n(x+y)} = \frac{x}{n} + a \ldots \ldots . . (1)$$

Uważmy daléj, że na wypróżnienie wody początkowo jednym a następnie przy pomocy obu upustów, potrzebowano czasu godzin $\frac{(n-1)(xy)}{n(x+y)} + \frac{x}{n}$, jeżeliby zaś oba upusty były otwarte od początku, wszystka woda wypłynęłaby z zbiornika przez godzin $1 : \frac{x+y}{xy} = \frac{xy}{x+y}$; lecz że w tym razie zbiornik wypróżniłby się b godzin wcześniéj, więc mamy drugie równanie:

$$\frac{(n-1)\ xy}{n(x+y)} + \frac{x}{n} = \frac{xy}{x+y} + b \ldots . . (2)$$

Dla ułatwienia przypuśćmy w równaniach (1) i (2), że $\frac{xy}{x+y} = z$ a otrzymamy:

$$\frac{n-1}{n} . z = \frac{x}{n} + a \ldots . . (3)$$

$$\text{i } \frac{(n-1)}{n} . z + \frac{x}{n} = z + b \ldots (4)$$

Dwa te równania (3) i (4) dają:

$$x = \frac{n}{n-2}[(n-1)\ b + a]; \ z = \frac{n}{n-2}\ (a+b).$$

Pozostaje tylko znaleźć wartość dla y. Lecz z równania $\frac{xy}{x+y}=z$, mamy:

$$y=\frac{xz}{x+z} \quad \ldots\ldots (5)$$

wstawiając więc w równanie (5) znalezione powyżej wartości dla x i z, po wykonaniu działań i uproszczeniu przyjdziemy do wypadku:

$$y=\frac{n}{n-2}\cdot\frac{[(n-1)\times b+a]\ (a+b)}{b}.$$

Rozbiór równań stopnia pierwszego.

80. *Znaczenie pierwiastków odjemnych w równaniach stopnia pierwszego.* Wyjaśniliśmy już wyżej (12), jaka zachodzi różnica, między ilościami dodatnemi i odjemnemi; powiedzieliśmy nadto: że każda ilość poprzedzona znakiem — uważa się w algebrze za odjemną, gdy tymczasem ilości dodatne mają zawsze przed sobą znak + lub są bez znaku.

Postaramy się teraz na kilku przykładach okazać, jakie jest znaczenie wartości odjemnych, które często otrzymujemy dla niewiadomych w równaniach stopnia pierwszego.

Przykład 1.

Znaleźć liczbę równą summie: swéj połowy, trzeciéj części i czwartéj części, powiększonéj dwiema jednościami.

Oznaczmy przez x szukaną liczbę: oczywistą jest rzeczą że równanie z tego zagadnienia będzie:

$$x=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+2 \quad \ldots\ (1)$$

z którego $x=-24$ . . . . (2).

Tak więc szukana liczba jest -24.

Odpowiedź ta wzięta literalnie niema żadnego znaczenia; lecz z drugiéj strony, -24 jest jedynym pierwiastkiem równania (2), a więc i równania (1); które jest ułożone według warunków zadania; więc zadanie jest niepodobne do rozwiązania; co znaczy: że niema liczby, któraby zadosyć uczynić mogła warunkom, jakich w zadaniu wymagają. Bo rzeczywiście summa połowy, trzeciéj części i czwartéj części danéj liczby, równa się $\frac{13}{12}$ téj liczby, niepodobna więc aby $\frac{13}{12}$ jakiéj liczby, powiększone 2 jednościami, było równe tejże liczbie.

Przykład 2.

U pewnego rzemieślnika robił czeladnik dwa razy: w lecie przez dni 13, w zimie przez dni 17. Za każdy dzień zimowy płacił mu majster 2 zł. mniéj niż za dzień letni. Przy wypłacie należytości za 13 dni letnich, wytrącił mu majster 22 zł. za zepsuty materyał. W zimie znowu za dni 17 oprócz zapłaty dostał od majstra 28 zł. w nagrodę swéj gorliwości. Jednakże przez 13 dni w lecie zarobił tyleż co i przez 17 dni zimowych. Pytanie: jaka była płaca dzienna czeladnika w lecie?

Oznaczmy przez x szukaną placę dzienną czeladnika w lecie, to kwota jaką zarobił przez 13 dni letnich jest $13x-22$, bowiem wytrącono mu 22 zł. za zepsuty materyał. Za każdy dzień zimowy ma brać 2 zł. mniéj niż za dzień letni, więc zarobek za 17 dni zimowych wraz z nagrodą jaką od majstra otrzymał wyniesie:

$$17(x-2)+28$$

a że w zimie zarobił tyle co i w lecie, więc mamy równanie:

$$17(x-2)+28=13x-22 \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\text{czyli } 17x-34+28=13x-22$$

po przeniesieniu i uproszczeniu znajdziemy:

$$4x=-16$$

$$\text{zkąd } \quad x=-4.$$

I w tym razie wartość -4 znaleziona na niewiadomą w równaniu (1) nie jest rozwiązaniem zadania; nie można bowiem zrozumieć ileby zarabiał robotnik dziennie, biorąc -4 zł. I to więc zadanie jest niemożliwe do rozwiązania.

Z powyższych dwóch przykładów wnosimy: *że wartość odjemna, otrzymana dla niewiadoméj z równania według brzmienia zadania ułożonego, znaczy zawsze, że niepodobna znaleźć takiéj wartości dla niewiadoméj, którąby warunkom zadania zadosyć czyniła.*

Można jednak często przy pomocy wartości odjemnéj, otrzymanéj dla niewiadoméj, zmienić warunki zadania, w taki sposób że taż sama wartość wzięta ze znakiem dodatnym zadosyć uczyni nowym warunkom.

Dla pokazania w jaki sposób ta zmiana następuje, zmieńmy w równaniu (1) przykładu pierwszego, x na $-x$, otrzymamy:

$$-x=-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+2.$$

lub zmieniając znaki w całem równaniu na przeciwne znajdziemy:

$$x=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

zkąd:

$$x=+24.$$

Pierwiastek więc równania (3) różni się od pierwiastku równania (1) tylko znakiem; tam otrzymaliśmy -24, tu mamy $+24$. Nadto równanie (3) odnosi się do takiego zadania: *Znaleźć liczbę równą summie swéj połowy, trzeciéj części i czwartéj części zmniejszonéj 2 jednościami.*

Liczbą tą jest $+24$.

Widzimy, że brzmienie nowego zadania, tém się tylko różni od zadania pierwszego, że zamiast powiększać summę, zmniejszamy ją dwiema jednościami.

W równanie (1) przykładu drugiego podstawmy podobnie zamiast x, $-x$, otrzymamy:

$$17(-x-2)+28=-13x-22$$

czyli zmieniając znaki na przeciwne:

$$17(x+2)-28=13x+22 \qquad (2)$$

a po przeniesieniu wiadomych na jedne, a niewiadomych na drugą stronę równania i uproszczeniu, znajdziemy:

$$4x = 16$$

$$\text{zkąd}\quad x = 4.$$

Pierwiastkiem równania (1) było —4. pierwiastkiem zaś równania (2) które powstało z równania poprzedniego przez zamianę x na $-x$, jest $+4$.

Równanie (2) jest wysłowieniem algebraicznėm dla takiego zadania:

U pewnego rzemieślnika robił czeladnik dwa razy: w lecie przez dni 13, w zimie przez dni 17. Za każdy dzień zimowy płacił mu majster 2 zł. więcėj niż za dzień letni. Do należytości za 13 dni letnich dodał mu majster 22 zł. w nagrodę jego gorliwości. W zimie znowu z należytości za dni 17 wytrącił mu 28 zł. za zepsuty materyał. Jednakże przez 13 dni letnich tyle zarobił co przez 17 dni zimowych. Pytanie: jaka była płaca dzienna czeladnika w lecie?

Widoczną jest rzeczą, że płaca szukana wynosi $+4$ zł.

Z tego co poprzedziło wyprowadzamy takie prawidło: *jeżeli z równania, według warunków zadania ułożonego otrzymamy dla niewiadomėj* x *wartość odjemną* —a, *wówczas należy podstawić w to równanie zamiast* x, —x *i zbadać zmiany jakie w skutek tego należy poczynić w zadaniu pierwotnėm, aby nowe równanie odpowiadało warunkom zmienionego zadania, mającego już za rozwiązanie ilość dodatną* +a.

Uwaga. Zmiany jakim ulega zadanie, aby zamiast w ilościach odjemnych, mogło być rozwiązane w ilościach dodatnych, ograniczają się zwykle na tėm, ża warunki dodawania, zawarte w pierwotnėm zadaniu, zmieniają się na odejmowanie i odwrotnie; przezco jednak, jak powiedzieliśmy wyżėj, liczebna wartość niewiadomėj pozostaje taż sama, tylko z odjemnėj przechodzi na dodatną.

81. *Przypadki, w których niepodobna rozwiązać zadań odnoszących się do równań stopnia pierwszego, lub gdy zadania te są niewyznaczone, tojest gdy wszelka wartość dla niewiadoméj, czyni zadosyć warunkom zadania.*

Przykład 1:

Znaleźć liczbę, któréjby połowa, trzecia i czwarta część dodane i powiększone 7 jednościami wydały summę równą $\frac{13}{12}$ téj liczby powiększonéj 5 jednościami.

Oznaczmy szukaną liczbę przez x, równanie zadania będzie:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+7=\tfrac{13}{12}x+5 \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$$

znosząc mianowniki mamy:

$$6x+4x+3x+84=13x+60$$

a po przeniesieniu i uproszczeniu jest:

$$0=-24 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2).$$

Ten wypadek zupełnie niedorzeczny znaczy: że równanie (1) a tém samém i równanie (2), nie może być sprawdzone przez żadną wartość bądź dodatną bądź odjemną podstawioną zamiast x. Że zaś równanie (1) ułożone jest na mocy warunków zadania, więc i zadanie samo niepodobne jest do rozwiązania. W saméj rzeczy dane zadanie można tak wysłowić:

Znaleźć liczbę, któréj $\frac{13}{12}$ dodane do 7, byłoby równe $\frac{13}{12}$ tejże liczby dodanym do 5. Co rzeczywiście jest niepodobieństwem.

Przykład 2.

Znaleźć liczbę, któréjby połowa, trzecia i czwarta część dodane i powiększone 7 jednościami dały ten sam wypadek co $\frac{13}{12}$ tejże liczby powiększone 7 jednościami.

Niech x będzie szukaną liczbą, więc równanie zadania będzie:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+7=\tfrac{13}{12}x+7\ .\ .\ .\ (3)$$

zkąd $13x-13x=7-7$

czyli $0=0$

otrzymana tożsamość, równa się zupełnie równaniu (3), a więc i to ostatnie równanie jest tożsamością; a ztąd zadanie dane do rozwiązania ma nieskończoną liczbę rozwiązań czyli jest niewyznaczone, tojest wszelka wartość wstawiona za x w równanie (3) sprawdzać go będzie.

Uważmy bowiem, że zadanie dane tak można inaczéj wysłowić:

Znaleźć liczbę, którejby $\frac{13}{12}$ dodane do 7, dało ten sam wypadek co $\frac{13}{12}$ tejże liczby dodane do 7.

Widocznem jest, że wszelka liczba dodatna lub odjemna czyni zadosyć warunkom zadania.

Oto są dwa jedyne wypadki, na które natrafić możemy przy rozwiązywaniu równań stopnia pierwszego z jedną niewiadomą. W pierwszym z nich, równanie jest niepodobne do rozwiązania, w drugim jest niewyznaczone.

82. I rzeczywiście zastanowiwszy się lepiéj, widzimy: że w równaniu stopnia pierwszego z jedną niewiadomą po przeniesieniu wyrazów zawierających niewiadomą na jednę, a wyrazów wiadomych na drugą stronę równania:

1. *Albo wyrazy zawierające niewiadomą nie zniosą się i wtedy równanie jest postaci $ax=b$* ztąd $x=\frac{b}{a}$; wówczas otrzymujemy dla niewiadoméj *wartości skończone, wyznaczone, dodatne, odjemne* lub *równe zeru* w razie gdy $b=0$.

2. *Albo też znoszą się tylko wyrazy zawierajace niewiadomą, a druga strona równania pozostanie.* Wtedy równanie jest kształtu $0=b$ i wskazuje: *że niepodobna znaleźć wartosci dla niewiadoméj*, i nakoniec:

3. *Wszystkie wyrazy mogą się znieść* i wówczas znajdziemy zamiast równania danego tożsamość $0=0$ znaczącą:

że równanie jest niewyznaczone i ma nieskończoną liczbę rozwiązań.

83. Jeżeli zadanie prowadzi nie do jednego lecz do pewnéj liczby równań z takąż liczbą niewiadomych, natenczas zadanie może być niewyznaczone, chociaż równania nie są kształtu $0=b$ i odwrotnie.

Weźmy *np.* dwa równania:

$$33x+24y=18 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$
$$11x+8y=6 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Mnożąc równanie (2) przez 2, i odejmując od równania (1) znajdziemy:

$$0=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3).$$

Na mocy powyżéj wskazanych własności równań, dane dwa równania możemy zastąpić przez dwa inne, mianowicie przez jedno z danych i przez równanie (3). Lecz równanie (3) jest tożsamością.

Więc dane dwa równania sprowadzają się do jednego I rzeczywiście nie potrzebujemy obu danych równań, bo jedno z nich powstaje z drugiego; i tak: mnożąc równanie (2) przez 3, otrzymamy równanie (1); dzieląc zaś równanie (1) przez 3, otrzymamy równanie (2).

84. Weźmy jeszcze dwa równania:

$$33x+24y=18 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$
$$11x+8y=7 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4).$$

Dla wyrugowania niewiadoméj x mnożąc równanie (4) przez 3 i odejmując je od równania (3), otrzymujemy $0=-3$. Niepodobieństwo rozwiązania tym wypadkiem nacechowane, nie ściąga się do żadnego z danych równań; każde bowiem z nich jak widzimy, może mieć nieskończoną liczbę wartości dla x i y sprawdzających też równania; lecz niepodobieństwo ściąga się do obu równań razem wziętych i znaczy: że niema takiéj wartości dla x i y któreby jednocześnie czyniły zadosyć warunkom w równaniach (3) i (4) zawartym. W saméj rzeczy, dzieląc równanie (3) przez 3, a (4) pozostawiając bez zmiany, znajdziemy takie dwa równania.

$$11x+8y=6$$
$$11x+8y=7$$

chcieć więc przy jednych i tych samych wartościach dla x i y sprawdzić te równania, byłoby to żądać, aby jedna liczba była równa raz 6, drugi raz 7. W ogólności, jeżeli dane dwa równania nie mogą być sprawdzone za pomocą jednych i tychże wartości dla niewiadomych w nich zawartych, mówimy, że równania takie są *niezgodne, nieodpowiednie (incompatibles).*

85. Widzieliśmy wyżej, że chcąc rozwiązać dwa równania:

$$A=0$$
$$B=0$$

z dwiema niewiadomemi x i y, zastępujemy jedno z tych równań przez równanie nowe:

$$mA+nB=0$$

powstałe z dodania do siebie danych równań, pomnożonych poprzednio przez czynniki m i n, nie zawierające niewiadomych x i y. Oczywistą więc jest rzeczą, że te trzy równania razem wzięte, jakoto:

$$A=0$$
$$B=0$$
$$mA+nB=0$$

byłyby nie wyznaczone. Jednakże dwa którekolwiek z nich mogłyby być rozwiązane.

86. Podobnie wziąwszy trzy równania z czterma niewiadomemi, jakoto:

$$A=0,\ B=0,\ C=0,$$

i przydawszy im równanie:

$$mA+nB+pC=a,$$

gdzie a różni się od zera, wówczas cztery równania:

$$A=0,\ B=0,\ C=0,$$
$$\text{i}\quad mA+nB+pC=a,$$

nie mogą mieć żadnego rozwiązania, bowiem równanie ostatnie, nie jest zgodne z równaniami poprzedniemi. Gdyż jeżeli pierwsza strona każdego z nich, przy pewnych wartościach dla niewiadomych jest równą zeru, to niepodobna, aby summa tych pierwszych stron była równą ilości a różnéj od zera.

Znaczenie wartości $\frac{m}{0}$ i $\frac{0}{0}$ otrzymanych dla niewiadomych w równaniu stopnia pierwszego.

87. Niech będą dwa równania ogólne stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi:

$$ax+by=c.... \qquad (1)$$

$$a'x+b'y=c'..... \qquad (2)$$

gdzie a, b, a', b', c, c' są ilości dane.

Dla otrzymania wartości dla niewiadoméj x, pomnóżmy równanie (1) przez b', równanie (2) przez b, i od tak zmienionego równania (1) odejmijmy przekształcone równanie (2), znajdziemy:

$$(ab'-ba')\,x=cb'-bc';.... \qquad (p)$$

ztąd przypuszczając, że $ab'-ba'$ różni się od zera, mamy:

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}..... \qquad (3)$$

postępując podobnie, dojdziemy do wypadku:

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}..... \qquad (4)$$

Jeżeli mianownik wspólny $ab'-ba'$ we wzorach (3) i (4) różni się od zera, otrzymujemy dla x i y wartości *skończone*, *oznaczone*, *dodatne* lub *odjemne*, które sprawdzą dane równania. Lecz gdy współczynniki a, b, a', b', przy niewiadomych chociaż różne od zera, są jednak takie, że mianownik $ab'-ba'=0$, wtedy natrafiamy na szczególne znaczenia, które zbadać wypada. Zdarzyć się tu mogą dwa przypadki stosownie do tego, czy licznik wartości, *np.* dla niewiadoméj x we wzorze (3) równa się zeru, lub też różni się od zera.

Przyzpadek 1:

88. Dajmy, że we wzorze (3) dla niewiadoméj x, i licznik i mianownik są zerami, tojest:

$$cb'-bc'=0 \text{ i } ab'-ba'=0,$$

wówczas wzór (3) będzie postaci:

$$x=\tfrac{0}{0}.$$

Nim roztrząśniemy znaczenie symbolu $\frac{0}{0}$, uważmy, że wartość dla niewiadoméj y będzie takiejże postaci, albowiem z równania:

$$cb'-bc'=0 \text{ i } ab'-ba'=0,$$

mamy: $$cb'=bc' \text{ i } ab'=ba'.$$

Dzieląc zaś przez siebie odpowiednie strony, znajdziemy:

$$\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$$

zkąd: $$ca'=c'a,$$

we wzorze więc (4) i licznik i mianownik są zerami; mamy więc:

$$y=\tfrac{0}{0}.$$

Wiedząc to, uważmy, że wzór (3) powstał z równania (p), gdy $ab'-ba'$ różni się od zera, tojest: gdy $ab'-ba'>$ lub <0, czyli gdy jest ilością dodatną lub odjemną (12); lecz równanie (p) w przypuszczeniu powyżéj zrobioném, tojest, że: $$ab'-ba'=0 \text{ i } cb'-bc'=0,$$

zamienia się na tożsamość $o=o$: że zaś tożsamość taka, jak powyżéj widzieliśmy, oznacza niewyznaczoność, więc i wartości otrzymane dla niewiadomych w postaci $\frac{0}{0}$ są również *symbolem nieoznaczoności.*

Można bardzo prostym sposobem przekonać się, że dwa równania (1) i (2) są niewyznaczone, gdy ilości dane a, b, c, a' b' i c' czynią zadosyć warunkom:

$$ab'-a'b=0 \text{ i } cb'-bc'=0.$$

Z powyższych bowiem równości mamy trzy stosunki równe:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c},$$

nazwawszy przez k, wspólny tym stosunkom wykładnik, czyli:

$$\frac{a'}{a}=k,\ \frac{b'}{b}=k;\ \frac{c'}{c}=k,$$

wypada, że:

$$a'=ak;\ b'=bk,\ c'=ck.$$

Wstawiając teraz w równanie (2) wartości znalezione dla ilości a', b' i c', równanie to będzie postaci:

$$akx+bky=ck$$

czyli:

$$(ax+by)\ k=ck \qquad (2)$$

lecz równanie (b) jest to równaniem (1), z tą tylko różnicą, że obie jego strony zostały pomnożone przez k; więc oba dane równania sprowadzają się do jednego równania z dwiema niewiadomemi, które jest niewyznaczone.

Przypadek 2:

89. Dajmy teraz, że we wzorze (3) licznik różni się od zera, tojest: że $cb'-bc'>$ lub <0, a mianownik $ab'-ba'=0$. Wówczas wartość dla x będzie postaci:

$$x=\frac{m}{0}$$

gdzie m jest ilość różna od zera.

Przez podobne jak poprzednio rozumowanie, znajdziemy, że i wartość wyciągnięta dla niewiadoméj y z wzoru (4), będzie tejże saméj postaci.

Celem przekonania się, co znaczy wypadek kształtu $\frac{m}{0}$, otrzymany powyżéj dla niewiadomych, powróćmy do równania (p). Z niego, po przypuszczeniu, że: $cb'-bc'=d$, $ab'-ba'=0$, znajdziemy $0=d$. Wnosimy więc, że równania (1) i (2), z których powstało równanie (p), są niezgodne. Wyrażenie przeto $\frac{m}{0}$ otrzymane jako wartość dla niewiadoméj x, a oparte również na powyższém przypuszczeniu, uważane być może za *symbol niezgodności lub niepodobieństwa.*

I rzeczywiście z wyrażeń:

$$cb'-bc' >< o \text{ i } ab'-ba'=0$$

mamy stosunki:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}><\frac{c}{c'};$$

wykładniki dwóch pierwszych stosunków są sobie równe, lecz wykładnik trzeciego stosunku jest od nich różny, oznaczając więc:

$$\frac{a}{a'}=k; \frac{b}{b'}=k; \text{ zaś } \frac{c}{c'}=k',$$

mamy:

$$a=a'k;\ b=b'k, \text{ zaś } c=c'k'.$$

Otrzymane za a, b, c wartości, wstawiwszy w równanie (1), wypadnie:

$$a'kx+b'ky=c'k'$$

czyli:

$$(a'x+b'y)\ k=c'k'.$$

Widzimy więc, że równanie powyższe powstaje z równania (2) przez pomnożenie pierwszéj strony równania (2) przez k, a drugiéj strony przez k', co dowodzi, że dwa równania (1) i (2) są niezgodne.

Słusznie więc otrzymawszy dla niewiadoméj wartości kształtu $\frac{m}{0}$ wnioskować możemy o niemożebności rozwiązania zadania.

90. Wyrażenie $\frac{m}{0}$ uważają jeszcze za symbol nieskończenie wielkiéj ilości; objaśnić to można w taki sposób:

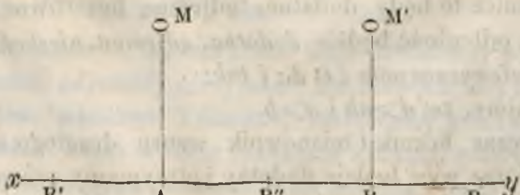
Dajmy, że mianownik ułamku $\frac{m}{0}$ nie jest zerem, lecz ilością bardzo małą równą g, tojest: że mamy $\frac{m}{g}$. Nadając dla g coraz mniejsze wartości, iloraz z dzielenia $\frac{m}{g}$ wypadający, będzie coraz większy; i tak, gdy $g=0,1$, $0,01$; $0,001$ i t. d. ilorazy będą $\frac{m}{g}=10m$; $100m$, $1000m$, $10000m$ i t. d. Skoro więc dla g nadamy wartość najmniejszą, tojest równą 0, iloraz $\frac{m}{0}$ stanie się nieskończenie wielkim.

Dla oznaczenia ilości nieskończenie wielkiéj, używa się zwykle znaku ∞, piszemy więc:

$$\frac{m}{0}=\infty.$$

91. Dla lepszego jeszcze wytłumaczenia uczącym się znaczenia rozmaitych wartości, otrzymywanych, jak widzieliśmy wyżéj, dla niewiadomych z równań stopnia pierwszego, rozwiążmy następne zadanie:

Zadanie. — *Dwóch gońców* M *i* M' *jedzie po prostéj* xy: *jeden z nich ujeżdża mil* a, *drugi mil* b *na godzinę, i oba jadą w jednym kierunku. Wiadomo, że goniec* M *przybył do punktu* A *na linii prostéj* xy *położonego o* b *godzin wcześniéj, nim goniec* M' *dojechał do punktu* B. *Znając odległość* d *pomiędzy punktami* A *i* B, *chcemy wiedzieć, w którym punkcie prostéj* xy *spotkają się dwaj gońcy?*



Przypuśćmy, że gońcy jadą ku punktowi y, i że miejsce ich spotkania jest w R. Wówczas szukaną niewiadomą przedstawi linia BR, którą oznaczmy przez x. Odległość więc $AR=d+x$. Ponieważ goniec M ujeżdża mil a na godzinę, przeto mil $d+x$ ujedzie w godzin $\frac{d+x}{a}$; tym samym sposobem czas, jakiego potrzebował goniec M' na przejechanie drogi BR, wyraża iloraz $\frac{x}{b}$...

Że zaś według brzmienia zadania, goniec M przybył do punktu A o h godzin wcześniéj niın goniec M' do punktu B, przeto mamy równanie:

$$\frac{d+x}{a}=\frac{x}{b}+h.... \qquad (1)$$

zkąd:

$$bd+bx=ax+abh$$
$$bx-ax=abh-bd$$

lub zmieniając w całém równaniu znaki na przeciwne mamy:

$$ax-bx=bd-abh$$

czyli:

$$(a-b)\,x=b\,(d-ah)$$

$$x=\frac{b\,(d-ah)}{a-b} \qquad (2)$$

92. Wartość jaką ze wzoru (2) otrzymać możemy dla szukanéj odległości, w któréj gońcy spotkać się mają, zależy głównie od różnic $d-ah$ i $a-b$. Stosownie do tego, czy różnice te będą dodatne, odjemne lub równe zeru, szukana odległość będzie *dodatna*, *odjemna*, *nieskończenie wielka*, *niewyznaczona i t. d.*; *i tak:*

1) Dajmy, że: $d>ah$ i $a>b$.

Wówczas licznik i mianownik wzoru drugiego są dodatne; iloraz więc będzie dodatny i otrzymamy prawdziwą dodatną odległość, w jakiéj spotkają się gońcy. I rzeczywiście, iloczyn ah oznacza drogę przebieżoną przez gońca M w czasie h, jaki upłynął między przybyciem gońca M do punktu A i gońca M' do punktu B; przypuszczenie więc, że $a>b$ i $d>ah$ znaczy: że goniec M prędzéj jedzie od gońca M', i że goniec M nie dosięgnął jeszcze punktu B, gdy goniec M' już z niego wyjechał. Musiał więc goniec M spotkać się z gońcem M' poza punktem B w kierunku By.

2) Gdy $a<b$ i $d<ah$.

W tym razie licznik i mianownik wzoru (2) są odjemne, iloraz więc będzie także dodatny; tojest, punkt spotkania się dwóch gońców będzie na linii By. Gdyż przypuszczamy, że goniec M jedzie wolniéj niż goniec M'; lecz pierwszy był już w punkcie B, a drugi dopiéro późniéj do niego przybył, jadąc zaś prędzéj spotkać musiał gońca pierwszego poza punktem B ze strony By.

3) Gdy $a<b$ i $d>ah$ lub $a>b$ i $d<ah$.

Wartość dla niewiadoméj z wzoru (2) jest odjemna. Wypadek ten znaczy, że punkt spotkania się dwóch gońców jest ze strony przeciwnéj, czyli, że znajduje się na linii Bx, w odległości od punktu B przez wartość odjemną wskazanéj.

I rzeczywiście, na mocy przypuszczeń powyżéj poczynionych, w chwili, gdy goniec M' przybywa do punktu B, ten z gońców który prędzéj jedzie, już wolniéj jadącego wyprzedził; spotkanie więc poza punktem B na linii By miejsca mieć nie może, nastąpić więc musiało z téj strony punktu B, czyli na linii Bx.

Dla okazania, że znaczenie jakie nadaliśmy powyższéj wartości odjemnéj otrzymanéj dla niewiadoméj zagadnienia jest właściwe i słuszne, rozbierzmy szczegółowo tę wartość. I tak: według brzmienia zadania, gońcy spotkać się powinni poza punktem B na linii By, otrzymana więc wartość odjemna znaczy, że to założenie jest fałszywe.

Jeżeli zaś punkt spotkania gońców jest z téj strony punktu B na linij Bx, to on może się znajdować albo przed punktem A, lub też pomiędzy punktami A i B.

Jeżeli spotkanie miało miejsce w punkcie R' leżącym przed punktem A, wtedy oznaczywszy $BR'=x$, linia $AR'=x-d$; czas więc jakiego potrzebował goniec M dla przebycia drogi $R'A$, wyrazi się ilorazem $\frac{x-d}{a}$, iloraz znowu $\frac{x}{b}$ pokaże nam, jak długo goniec M' jechał z punktu R do punktu B; że zaś goniec M przybywa do punktu A, o h godzin wcześniéj niż goniec M' do punktu B, więc mamy równanie:

$$\frac{x-d}{a}+h=\frac{x}{b} \qquad (3)$$

Jeżeli spotkanie miało miejsce w punkcie R'' pomiędzy punktami A i B, wówczas oznaczywszy $BR''=x$, będzie $AR''=d-x$; a rozumując jak poprzednio, znajdziemy równanie:

$$\frac{d-x}{a}+\frac{x}{b}=h. \qquad (4)$$

Uważmy teraz, że równania (3) i (4) są zupełnie też same, nadto podstawiwszy $-x$ zamiast x, w równanie (1), otrzymujemy równanie (4); wnosimy więc ztąd (80), że każda wartość dodatna, która sprawdza równanie (4), otrzymuje się ze znakiem — z równania (1). Równanie więc (1) wystarcza zawsze do wskazania punktu, w którym gońcy spotykają się, pamiętając tylko, że wartości dodatne wyznaczają punkt spotkania się gońców poza miejscem B w kierunku By, wartości zaś odjemne znaczą, że gońce spotykają się przed punktem B na linii Bx.

4) Dajmy teraz, że we wzorze (2) $b=a$, wówczas otrzymamy:

$$x=\frac{a(d-ah)}{0}$$

a oznaczając $a.(d-ah)=m$,

będzie: $$x=\frac{m}{0}.$$

Co znaczy w tym razie podobny wypadek?

Iloraz $\frac{m}{0}$, jak okazaliśmy wyżéj, jest nieskończenie wielki, znaczy więc, że punkt spotkania się gońców jest w odległości nieskończenie wielkiéj, czyli, że zupełnie nie istnieje.

I w saméj rzeczy, przypuszczenie, że d różne jest od ah, dowodzi, że goniec M nie jest jednocześnie z gońcem M' w punkcie B, że zaś $a=b$, czyli że gońcy jadą z równą prędkością, zawsze więc będą w jednéj od siebie odległości, a ztąd spotkać się nie mogą.

5) Jeżeli przypuścimy $d=ah$ i $b=a$, wzór (2) przedstawi się w postaci:

$$x=\frac{0}{0}.$$

Rozbiór tego wypadku nie przedstawi żadnych trudności; dzielna bowiem jest iloczynem z dzielnika przez iloraz: szukamy więc ilorazu, któryby pomnożony przez o wydał na iloczyn 0. Oczywistą jest rzeczą, że wszelka dowolna wartość nadana dla ilorazu, czyni zadosyć temu warunkowi, bo iloczyn z każdéj liczby przez o jest zerem. W tym razie przeto, zadanie ma nieskończoną liczbę rozwiązań, czyli jest niewyznaczoném. Każdy więc punkt na linii xy obrany, jest punktem spotkania się gońców. Rzeczywiście, warunek $d=ah$ znaczy: że gońcy są jednocześnie w punkcie B, że zaś $b=a$, tojest, jadą z równą prędkością, więc i byli razem i nadal się nie rozłączają, czyli, że każdy punkt linii xy jest miejscem ich spotkania.

93. Wszystkie inne przypadki szczególne, na jakie w tém zadaniu natrafić można, są małoznaczące, i nie przedstawiają żadnych trudności w rozwiązywaniu zagadnienia. I tak: jeżeliby powiedziano, że goniec M' jedzie w kierunku przeciwnym, tojest w kierunku yx, należałoby tylko we wzorze (2) za b podstawić $-b$, i odwrotnie, wiedząc znowu, że kierunek jazdy gońca M jest przeciwny, należałoby a zamienić na $-a$ i t. p. W ogólności, wzór (2) wskazuje nam dokładnie, czy i gdzie mianowicie jest miejsce spotkania się gońców.

Treść Rozdziału III.

57. Określenie równania algebraicznego.— 58, 59. Podział równań. — 60. Pierwiastki równań. — 61. Co znaczy rozwiązać równanie.— 62, 63, 64, 65, 66. Własności równań, na których zasadza się ich rozwiązanie. Przenoszenie wyrazów z jednéj strony na drugą. Znoszenie mianowników.—67. Rozwiązywanie równań stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.— 68. Przykłady. — 69. Rozwiązanie równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi.—70, 71, 72. Trzy sposoby rugowania niewiadoméj z równań. —73, 74, 75. Ogólny kształt równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi. Wzory ogólne dla niewiadomych. — 76, 77. Rozwiązanie pewnéj liczby równań stopnia pierwszego, z takąż liczbą niewiadomych. — 78, 79. Przykłady na równania stopnia pierwszego. — 80. Znaczenie pierwiastków odjemnych w równaniach stopnia pierwszego. — 81. Przypadki w których zadania z równań stopnia pierwszego są niepodobne do rozwiązania lub też są niewyznaczone. — 82. Rozmaite wartości, jakie otrzymać można dla niewiadoméj z równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą. — 83, 84, 85, 86. Rozbiór dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi.—87, 88, 89, 90. Znaczenie wartości $\frac{m}{0}$ i $\frac{0}{0}$ otrzymywanych dla niewiadomych z równań stopnia pierwszego. — 91, 92, 93. Dokładniejsze wytłumaczenie wszelkich wartości dla niewiadomych z równań stopnia pierwszego na zagadnienie o gońcach.

ROZDZIAŁ IV.

O nierównościach.

94. Powiedzieliśmy już wyżej, że *nierównością* zowiemy połączenie dwóch ilości algebraicznych nierównych, znakiem $>$ lub $<$.

Warunki zadania, które algebraicznie rozwiązać chcemy, są czasem takiego rodzaju, że równaniem nie mogą być wyrażone, lecz dla ich wyslowienia wypada użyć nierówności. Aby więc w takich przypadkach wiedzieć, w jaki sposób postępować należy dla otrzymania żądanego wypadku, podamy główne własności nierówności.

Własność 1:

95. *Jeżeli* a *większe jest od* b, *to różnica* a—b *jest dodatną czyli większą od zera.*

Dla okazania tej prawdy, pamiętając, że algebra przypuszcza ilości dodatne i odjemne, rozróżnić tu należy trzy wypadki.

1) Gdy $a>0$ i $b>0$, tojest, gdy obie ilości są dodatne.

2) Gdy $a>0$, zaś $b<0$, co znaczy: że ilość a jest dodatna, zaś b odjemna; i nakoniec:

3) Gdy $a<0$ i $b<0$, obie ilości odjemne.

Co się tyczy przypadku, gdy $a<0$ i $b>0$, ten miejsca tu mieć nie może, zakładamy bowiem, że a większe od b, nie podobną więc jest rzeczą, aby ilość odjemna była większa od dodatnéj.

Co do 1go:

Jeżeli obie ilości a i b są dodatne, wówczas odejmując od ilości większéj, ilość mniejszą, różnica musi być dodatną, czyli w tym razie rzeczywiście jest $a-b>0$.

Co do 2go:

Gdy $a>0$, zaś $b<0$, chcemy wtedy od ilości dodatnéj odjąć ilość odjemną, czyli szukamy różnicy $a-(-b)$, w tym celu, w odjemniku przemieniamy znak na przeciwny, i otrzymujemy ilość dodatną $a+b$. I tu więc różnica $a-b>0$.

Co do 3go:

Gdy nareszcie obie ilości są odjemne, szukamy różnicy $-a(-b)$. Dla znalezienia jéj, przemieniamy w odjemniku znak na przeciwny, i mamy: $-a+b$; że zaś z założenia ilość odjemna a, większą jest od ilości odjemnéj b, przeto liczebnie ilość a mniejszą jest od ilości odjemnéj b, a tém samém wypadek $-a+b$ musi być dodatny.

Wniosek.—Z poprzedzającéj własności wynika, że: naodwrót gdy różnica $a-b>0$ wówczas $a>b$.

Własność druga:

96. *Do dwóch ilości nierównych dodawszy ilości równe, summy wypadną nierówne.*

Niech będzie nierówność $a>b$.

Chcemy okazać, że $a+m>b+m$. Wiemy, że gdy $a>b$, wówczas $a-b>0$; do pierwszéj strony téj nierówności dodawszy i odjąwszy m, wartość téj pierwszéj strony nie zmieni się, i otrzymamy: $a-b+m-m>0$, czyli:

$$(a+m)-(b+m)>0;$$

na mocy więc poprzedzającego wniosku, będzie:

$$a+m>b+m,$$

co należało dowieść.

Własność trzecia:

97. *Od dwóch ilości nierównych odjąwszy ilości równe, reszty wypadają nierówne.*

Zakładamy, że $a>b$,

okażemy, że $a-m>b-m$.

Wiemy bowiem, że gdy $a>b$, to $a-b>0$, więc też i:

$$a-b+m-m>0$$

czyli:

$$(a-m)-(b-m)>0$$

zkąd wynika, że:

$$a-m>b-m$$

co było do okazania.

98. Na mocy powyższych dwóch własności, możemy w nierównościach przenosić wyrazy z jednéj strony na drugą, pisząc je tylko na stronie drugiéj ze znakiem przeciwnym. I tak, do obu stron nierówności $a+c>b-d$ dodajmy d, otrzymamy: $a+c+d>b-d+d$, czyli $a+c+d>b$. Widzimy więc, że ilość d przeszła na drugą stronę lecz ze znakiem przeciwnym.

W tém miejscu udowodnić możemy poraz drugi pierwszą własność nierówności, i tak od obu stron nierówności $a>b$ odejmując po b, znajdziemy:

$$a-b>b-b, \text{ czyli } a-b>0.$$

Własność czwarta:

99. *W każdéj nierówności zmieniając znaki wszystkich wyrazów na przeciwne, należy także i znak nierówności przemienić.*

Dowieść chcemy, że jeżeli $a>b$ to $-a<-b$. Albowiem w nierówności $a>b$ przenosząc wyraz b na pierwszą stronę, mamy:

$$a-b>0.$$

Odejmując od obu stron téj nierówności a, znajdziemy:

$$-b>-a$$

czyli: $$-a<-b.$$

W ogólności przemieniając w nierówności wszystkie znaki na przeciwne, przenosimy tylko wszystkie wyrazy z pierwszéj strony na drugą, a z drugiéj na pierwszą; oczywistą. więc jest rzeczą, że znak nierówności przemienić należy.

Własność piąta:

100. *Jeżeli dwie ilości nierówne pomnożymy lub podzielimy przez ilość dodatną, nierówność wcale się nie zmienia.*

Niech m będzie ilością dodatną, dana zaś nierówność: $a>b$. Chcemy dowieść, że: $ma>mb$. Na mocy pierwszéj własności $a-b>0$. Z założenia ilość m jest dodatną, a że różnica $a-b$ jest także dodatną, iloczyn tych dwóch ilości będzie także dodatny, czyli większy od zera, tojest:

$$(a-b)m>0$$

czyli:

$$am-bm>0$$

ztąd:

$$am>bm,$$

co było do okazania.

Tym samym sposobem dowieść można, że gdy $a>b$, to:

$$\frac{a}{m}>\frac{b}{m}.$$

101. Własność powyższa posłużyć może do znoszenia mianowników w nierównościach. W tym celu należy tylko wszystkie wyrazy pomnożyć przez mianownik, który znieść chcemy. I tak, w jednym z wyrazów nierówności $3a-5>\frac{5a}{b}-7$ jest mianownik b; mnożąc więc wszystkie wyrazy nierówności przez ten mianownik, otrzymamy:

$$3ab-5b>\frac{5ab}{b}-7b$$

czyli:

$$3ab-5b>5a-7b.$$

W ogólności chcąc w każdéj nierówności znieść mianownik któregobądź wyrazu, należy wszystkie inne wyrazy przez ten mianownik pomnożyć.

Np. Nierówność $7a-\frac{6b}{c}>d$ po zniesieniu mianownika będzie postaci $7ac-6b>dc$. Jeżeli w nierówności jest więcéj mianowników, wówczas dla ich zniesienia, wyrazy całkowite mnożyć wypada przez iloczyn wszystkich mianowników, wyrazy zaś ułamkowe przez iloczyn z mianowników, wyjąwszy swego; i tak, z nierówności:

$$3a-5>\tfrac{5}{2}a-\tfrac{4}{5}$$

znosząc mianowniki będzie:

$$3\times2\times5a-5\times2\times5>\frac{5\times2\times5}{2}a-\frac{4\times2\times5}{5}$$

czyli:

$$30a-50>25a-8.$$

Własność szósta:

102. *Mnożąc lub dzieląc dwie ilości nierówne przez tęż samą ilość odjemną, należy jednocześnie znak nierówności przemienić.*

Własność ta jest tylko wnioskiem z własności czwartéj, albowiem mnożąc lub dzieląc obie strony nierówności przez ilość odjemną, znaki wszystkich wyrazów zmienią się na przeciwne, a więc i znak nierówności przemienić należy.

103. Jeżeli niewiadoma wchodzi do nierówności w stopniu pierwszym, wtedy jakkolwiek nie można wartości jéj dokładnie oznaczyć, jednakże można niewiadomą oswobodzić, tojest, przywieść daną nierówność do takiéj postaci, że na pierwszéj stronie będzie sama tylko ilość niewiadoma, a na drugiéj wyrażenie algebraiczne złożone z danych ilości. I tak, niech będzie nierówność:

$$6x-4>\tfrac{8}{3}x-\tfrac{2}{5},$$

zniósłszy mianowniki, mamy:

$$90x-60>40x-6,$$

po przeniesieniu wyrazów zawierających niewiadomą na pierwszą, a wyrazów wiadomych na drugą stronę, znajdziemy:

$$90x-40x>-6+60$$

czyli:

$$50x>54$$

zkąd:

$$x>\tfrac{54}{50}.$$

Toż samo z nierówności:

$$\tfrac{9}{5}-\tfrac{6}{7}x<8-2x,$$

po zniesieniu mianowników, przeniesieniu wyrazów, uproszczeniu, oraz podzieleniu obu stron przez współczynnik przy niewiadoméj, znajdziemy:

$$x<\frac{217}{40}.$$

W pierwszym przykładzie znaleźliśmy, że wartość dla niewiadoméj x, musi być większą od $\tfrac{54}{50}$; w drugim mniejszą ma być ona od $\frac{217}{40}$; aby więc jedna i taż sama wartość dla niewiadoméj czyniła zadosyć obu tym warunkom, musi się zawierać między $\frac{54}{50}$ i $\frac{217}{40}$.

104. Mając dane dwie nierówności z dwiema niewiadomemi wchodzącemi tylko w stopniu pierwszym, można także je oswobodzić i znaleźć dla nich wartości czyniące zadosyć warunkom zawartym w nierównościach. I tak, mając dwie nierówności:

$$3x-2y>5 \text{ i } 5x+3y>16,$$

znajdziemy:

z pierwszéj: $x>\dfrac{5+2y}{3}$

z drugiéj: . $x > \frac{16-3y}{5}$.

Wypadki te okazują, że dla y można nadać wartość dowolną, a dla x wszelką wartość, byleby tylko większą od $\frac{5+2y}{3}$ i od $\frac{16-3y}{5}$. Lecz z danych nierówności otrzymujemy także:

$$y < \frac{3x-5}{2} \text{ i } y > \frac{16-5x}{3}$$

co żeby mogło mieć miejsce potrzeba, aby:

$$\frac{3x-5}{2} > \frac{16-5x}{3}$$

zkąd:

$$x > \tfrac{47}{19}.$$

Wartość więc dla niewiadoméj x musi być większa od $\frac{47}{19}$, zaś wartości dla y muszą się zawierać w granicach wyżéj otrzymanych.

Własność siódma:

105. *Dodając do siebie strony odpowiednie ilukolwiek nierówności, jak:* $a > b$, $a' > b'$, $a'' > b''$, $a''' > b'''$ i t. d.; *znak nierówności się nie zmieni i otrzymamy:* $a + a' + a'' + a'''$ i t. d. $> b + b' + b'' + b'''$ i t. d.

Z danych bowiem nierówności wynika, że różnice $a-b$, $a'-b'$, $a''-b''$, $a'''-b'''$ i t. d. są dodatne, summa więc tych różnic będzie także dodatna, tojest:

$$a-b+a'-b'+a''-b''+a'''-b''' \text{ i t. d.} > 0$$

czyli:

$$(a+a'+a''+a''')-(b+b'+b''+b''' \text{ i t. d.}) > 0$$

zkąd:

$$a+a'+a''+a''' \text{ i t. d.} > b+b'+b''+b''' \text{ i t. d.}$$

Własność ósma:

106. *Mnożąc odpowiednie strony ilukolwiek nierówności:* $a > b$, $a' > b'$, $a'' > b''$, $a''' > b'''$ i t. d., *znak nierówności się nie zmieni, i otrzymamy:* $a.\ a'.\ a''.\ a'''$ i t. d. $> b.\ b'.\ b''.\ b'''$ i t. d... *lecz to w tym tylko razie, gdy ilości* a, a', a'' i t. d., b, b', b'', b''' i t. d. *są dodatne.*

Gdyż każdy z ilorazów $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, $\frac{a'''}{b'''}$ i t. d., jest większy od jedności, iloczyn z tych ilorazów, tojest: $\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''} \cdot \frac{a'''}{b'''}$. i t. d., będzie także większy od jedności; ztąd wynika, że:

$$a . a' . a'' . a''' . \text{ i t. d.} > b . b' . b'' . b''' \text{ i t. d.}$$

co było do okazania.

107. *Uwaga.* — Własność powyższa nie ma miejsca, gdy ilości a, a', a'', a''' i t. d., b, b', b'', b''' i t. d. nie są dodatne.

Weźmy bowiem dwie nierówności:

$$8>5$$
$$\text{i} \quad -3>-4$$

mnożąc odpowiednie ich strony, mamy:

$$-24<-20.$$

Znak nierówności się zmienił, gdyż oczywiście pierwsza strona jest po pomnożeniu mniejszą od drugiej.

Wniosek.—Podnosząc obie strony nierówności $a>b$ do jednakowéj potęgi, znak nierówności się nie zmienia, czyli $a^m>b^m$. Albowiem nierówność $a^m>b^m$ powstaje z pomnożenia stron odpowiednich m nierówności $a>b$.

Własność ta ustaje, gdy ilości a i b nie są dodatne; i tak:

$$-3>-4 \text{ lecz } (-3)^2<(-4)^2 \text{ gdyż } 9<16.$$

108. Twierdzenie. — *Mając ilekolwiek ułamków* $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, $\frac{a'''}{b'''}$ *i t. d., których mianowniki* b, b', b'', b''' *i t. d. są dodatne, wartość ułamku* $\frac{a+a'+a''+a''' \text{ i t d.}}{b+b'+b'+b'' \text{ i t. d.}}$ *będzie średnia pomiędzy danemi, tojest, zawierać się będzie między największym i najmniejszym z danych ułamków.*

Dajmy, że ułamek $\frac{a}{b}$ jest najmniejszy z danych, więc:

$$\frac{a'}{b'}>\frac{a}{b}, \quad \frac{a''}{b''}>\frac{a}{b}, \quad \frac{a'''}{b'''}>\frac{a}{b} \text{ i t. d.}$$

zkąd:

$$a'>b'\times\frac{a}{b},\ a''>b''\times\frac{a}{b},\ a'''>b'''\times\frac{a}{b} \text{ i t. d.}$$

Dodając strony odpowiednie tych nierówności, znajdziemy:

$$a'+a''+a''' \text{ i t. d.} >b'\times\frac{a}{b}+b''\times\frac{a}{b}+b'''\times\frac{a}{b} \text{ i t. d.}$$

dodając do pierwszéj strony a, zaś do drugiéj ilość $\frac{ba}{b}$ równą a, będzie:

$$a+a'+a''+a''' \text{ i t. d.}>(b+b'+b''+b''')\frac{a}{b}$$

zkąd:

$$\frac{a+a'+a''+a''' \text{ i t. d.}}{b+b'+b''+b''' \text{ i t. d.}}>\frac{a}{b}.$$

Tym samym sposobem dowieśćby można, że ułamek $\frac{a+a'+a''+a''' \text{ i t. d.}}{b+b'+b''+b''' \text{ i t. d.}}$ mniejszy jest od największego z danych. Wartość więc jego zawiera się pomiędzy najmniejszym i największym z danych, co było do okazania.

Treść Rozdziału IV.

94. Określenie nierówności.— 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102 Własności nierówności. Przenoszenie wyrazów z jednéj strony nierówności na drugą. Znoszenie mianowników. — 103, 104. Oswobodzenie niewiadoméj w stopniu pierwszym z nierówności. Granice dla dwóch niewiadomych w stopniu pierwszym z dwóch nierówności.— 105, 106, 107. Dalsze własności nierówności.

ROZDZIAŁ DODATKOWY.

ZADANIA.

Do rozdziału I.

109. *Znaleźć wartość liczebną następujących wzorów:*

1) $$x = \frac{8a - b + 6a^2c}{b - a}.$$

2) $$x' = \frac{4d^2 - 2a^2c + 6\sqrt{c}}{a^2}.$$

3) $$x'' = \frac{8b^2d^2 - 6a^2cd + 2b^2c + b}{(d+c)\,(d-c)}.$$

4) $$x''' = \left(\frac{(a+b-c)\,(d-a+b)\,(d-c)}{ab^2}\right)b.$$

5) $$y = \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5y)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}.$$

gdy $a=2$; $b=3$; $c=4$; $d=5$; $n=6$.

Odp. $x=109$; $x'=23$; $x''=155$; $x'''=13$; $y=1$.

Do rozdziału II.

110. *Dodać do siebie następujące jednomiany:*

a) $127a+(-19a)+(15a)+(35b)+(-15b)+(45b)+(-13a)+(-7a)+(-25a)+(-35b)+(-18b)$.

b) $17x+(24y)+(-13z)+(-5x)+(8y)+(2z)+(-9x)+(-28y)+(6z)+(3x)+(-2y)+(-5z)$.

c) $997a+(-698b)+(2348a)+(-572b)+(36b)$.

d) $24a+(-13m)+(-6n)+(15a)+(22p)+(n)+(-3p)+(-2a)+(-37a)+(13m)+(5n)$.

e) $39y+(-18n)+(16t)+(-19n)+(-18t)+(-14y)+(45n)+(-27t)+(16y)$.

Odp. a) $78a+12b$; b) $6x+2y-10z$; c) $3345a-1234b$; d) $19p$; e) $41y+8n-29t$.

111. *Dodać do siebie następujące wielomiany:*

a) $(26a+38b-12c)+(37a-14b-18c)$.

b) $(17a-14b-12c-13d)+(25a+18b+12c+4d)$.

c) $(a-2b-3c+4d)+(5b-6a-7c+8d)+(9a-10b+11c)$.

d) $(24m-17g+15p-13n)+(11g-10p-8n+3m)+(9n-6m-4g-7m-5p)+(8g-4p-12m+18n)$.

e) $(3x+5y-3z)+(8t-3y-7x)+(8y-4x)+(13x-7z-7t-14)+(11z-13t-9)+(5t-8z-17y-1)+(2x+17)$.

Odp. a) $63a+24b-30c$; b) $42a+4b-9d$; c) $4a-7b+c+12d$; d) $2m-2g+p-8n$; e) $7x-7y-7z-7t-7$.

112. *Znaleźć różnicę wielomianów:*

a) $(18a-24b+23c)-(16a+14b-13c)$.

b) $(3m-38n-57p-15g)-(12p-38g+48n-50m)$.

c) $(4x-8y-19p-3z)-(24x-18y-12p-13z)-(14p-8z)$.

d) $15y+6x-[3y-(8z+4x)]$;

rozwiązanie:

$$15y+6x-[3y-(8z+4x)]=15y+6x-3y+(8z+4x)==15y+6x-3y+8z+4x=12y+10x+8z.$$

e) $37x-48y-[18z-(12x+3y)-(2z-4y)]-33z$.

Odp. a) $2a-38b+36c$; b) $53m-86n-69p+23g$; c) $-20x+10y-21p+18z$; e) $49x-49y-49z$.

113. *Przykłady na połączone działania, dodawania i odejmowania:*

a) $44x+[48y-(6z+3y-7x)+4z]-[48y-8x+2z-(4x+y)]$.

b) $4x-[(a-4x)+(3y+17a)-(98x+3y)]$.

c) $6m+(4m-[8n-(2m+4n)-22n]-7n)-(7n+[9m-(3n+4m)+8n]+6m)$.

d) Jaka jest różnica $m-(n-0)$, gdy $n=7m-(8p+3g)$, zaś $0=2m-(8p-3g)$.

e) Jaką ilość dodać trzeba do $5p-[7g+3p-(2p+g)]$, aby otrzymać $4p-[14p+(2p-7g)-3p]$.

Odp. a) $55x-2y-4z$; b) $106x-18a$; c) $m-n$; d) $6g-4m$; e) $13g-13p$.

114. *Znieść nawiasy w następujących wyrażeniach algebraicznych:*

a) $9x-7(y+z)$;

rozwiązanie:

$9x-(7y+7z)=9x-7y-7z$.

b) $a+b(c+d+e)-m(n+p)-r(s-t)$.

c) $28(x-y+z)+24(x+y-z)-13(y-z-x)$.

d) $(p-g-m)p-g(m-g-p)+(g+m)m+m(p-m)$.

e) $(96-a-b-c)14+(4+a-c)13-(7-a-c)97$.

Odp. b) $a+b+c+bd+be-mn-mp-rs+rt$; c) $65x-17y+17z$; d) p^2+g^2; e) $717+96a-14b+70c$.

115. *W następujących wyrażeniach algebraicznych wziąć za nawias czynniki wspólne:*

a) $5a+5b$.

rozwiązanie:

$5a+5b=5(a+b)$.

b) $5x+5y-20$;

rozwiązanie:

$5x+5y-20=5(x+y-4)$.

c) $6a+6b+6c+30$.

d) $85am-51am-17bm+51bm+17m$.

e) $ap+mp+np-gp-p+p^2$.

f) $3(a-b)+(m-n)(a-b)+(n-3)(a-b)$.

g) $11x+nx-mx+x+(m-1)x+x^2$.

h) $pm-pn-gm+gn$;

rozwiązanie:

$$pm-pn-gm+gn=p(m-n)-g(m-n)=(p-g)(m-n).$$

k) $ad+bd+ce-ae+bf-cf+af-cd-be$.

Odp. c) $6(a+b+c+5)$; d) $17m(2a+2b+1)$; e) $(a+m+n-y-1+p)p$; f) $m(a-b)$; g) $x(11+n+x)$; k) $(a+b-c)(d-e+f)$.

116. *Znaleźć iloczyn następujących wielomianów:*

a) $(a+b+c)(a+b+c)$.

b) $(a+b+c)(a+b-c)$.

c) $(a-b+c)(a+b-c)$.

d) $(a+b+c)(a-b-c)$.

e) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

f) $(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)$.

g) $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$.

h) $(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)(x+y)$.

k) $(3x^3+2x^2y+6xy^2+7y^3)(4x^2-2xy+3y^2)$.

l) $[(2b-1)a^2-(4b^2-2b+1)a+8b^3-4b^2][(2b+1)a-4b^2+1]$.

Odp. a) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$; b) $a^2+b^2-c^2+2ab$; c) $a^2-b^2-c^2+2bc$; d) $a^2-b^2-c^2-2bc$; e) x^3-y^3; f) x^4-2x^2+1; g) x^4-1; h) x^5+y^5; k) $12x^5+2x^4y+29x^3y^2+22x^2y^3+4xy^4+21y^5$; l) $(4b^2-1)a^3-(16b^3+4b^2-2b)a^2+(32b^4+8b^3-12b^2-2b+1)a-32b^5+16b^4+8b^3-4b^2$.

117. *Znaleźć ilorazy wypadłe z podzielenia następujących jednomianów:*

a) $\frac{60a^5bm^2n}{5a^3m}$.

b) $\dfrac{75x^3y^3z^3}{-5xyz}$.

c) $\dfrac{-984p^3g^4r^2}{12pg^2r}$.

d) $\dfrac{-11110\, a^4b^4c^2dm}{-11abc}$.

118. *Uprościć następujące ilorazy ułomkowe:*

a) $\dfrac{15abcd}{60abmc}$.

b) $\dfrac{44pgn}{66mpn}$.

c) $\dfrac{(15m^2n^2p)\,(7p^2n)}{(14p^3)\,(5m^2g)}$.

119. *Przedstawić w innéj postaci wyrażenia:*

a) $15a^{-4}b^3c^{-5}d^0$.

b) $6m^{-3}n^4pg^0$.

c) $xy^2z^{-3}n^0$.

d) $18r^3g^{-4}f^0$.

Odp. a) $\dfrac{15b^3}{a^4c^5}$; b) $\dfrac{6n^4p}{m^3}$; c) $\dfrac{xy^2}{z^3}$; d) $\dfrac{18r^3}{g^4}$.

120. *Znaleźć iloraz jaki wypadnie z podzielenia następujących wielomianów przez jednomiany.*

a) $\dfrac{7a+7b+7c}{7}$.

b) $\dfrac{(2x-7y)p-2p(5x-8y)+3p(4x-3y)}{p}$.

c) $\dfrac{16a^3-12a^2b+24ab^2}{4a}$.

Odp. a) $a+b+c$; b) $4x$; c) $4a^2-3ab+6b^2$.

121. *Jaki jest iloraz następujących wielomianów:*

a) $16a^5+12a^4b-20a^3b^2-25a^2b^3 : 4a-5b$.

b) $x^4-1 : x-1$.

c) $a^5-b^5 : a-b$.

d) $a^5+b^5 : a+b$.

e) $a^4-b^4 : a+b$.

Odp. a) $4a^4+8a^3b+5a^2b^2$; b) x^3+x^2+x+1; c) a^4+ $+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$; d) $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$; e) a^3- $-a^2b+ab^2-b^3$.

122. *Przykłady na połączone działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia ilości algebraicznych:*

a) $26xy-(9x-8y)(5x+2y)-(4y-3x)(15x+4y)$.

b) $(3a-6c)(4a-3d)-[(2a-5c)(6a-11d)-(37cd-6ac)]$.

c) $(3x^3-2x^2+x-1)(5x^2-4x-1)-(15x^4-12x^3+$ $+3x^2-x-1)(x-1)$.

d) $$\frac{x-n}{x+y+z}+\frac{y-z}{x+y+z}+\frac{2z+n}{x+y+z}.$$

e) $$\frac{5x-8y-9z}{x-y+z}+\frac{4x+9y-3z}{x-y+z}+\frac{15z-6x-4y}{x-y+z}.$$

f) $$\frac{8a^4-4a^3b-(14b^2+8)a^2+4b^3a+8b^2+6b^4}{[(8a^2-4ab)-(6b^2+8)](a-b)}.$$

Odp. a) 0; b) $13ad$; c) $5x^4-5x^3-3x^2+3x$; d) 1; e) 3; f) $a+b$.

Do rozdziału III.

123. *Przykłady na równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.*

1. *Rozwiązać następujące równania:*

a) $x+(3a+5b-7c)=4a+3b-4c$.

b) $ax+bx-cx=d$.

c) $$a^2b-\frac{a+x}{b}=ab^2-\frac{b+x}{a}.$$

d) $$3-\left(\frac{4+x}{5}-\frac{6-x}{7}\right)=\frac{8+x}{9}-10.$$

e) $(x+2):(20-x)=(x+20):(46-x)$.

f) $(m-x)(n-x)=(p+x)(x-q)$.

g) $$\frac{3x-1}{\sqrt{3x+1}}=\frac{\sqrt{3x}-1}{2};$$

rozwiązanie:
w danem równaniu zniósłszy mianowniki mamy:

$$6x-2=(\sqrt{3x}+1)\,(\sqrt{3x}-1)\ (\alpha),$$

druga strona równania (α) wyobraża nam summę dwóch ilości pomnożoną przez ich różnicę, co równa się różnicy kwadratów, mamy więc:

$$(\sqrt{3x}+1)\,(\sqrt{3x}-1)=3x-1,$$

co podstawiwszy w równanie α, zamiast drugiéj strony, znajdziemy:

$$6x-2=3x-1,$$

czyli:

$$6x-3x=-1+2,$$
$$3x=1$$
$$x=\tfrac{1}{3}.$$

h) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{x}{5}+\frac{x}{6}-\frac{x}{7}+\frac{1}{8}=\frac{x}{9}-\frac{1}{10}.$

k) $\frac{a^4-b^4}{a^2\,(a-b)}-\frac{a^2x+b^3}{a^2}=2b+\frac{b^2}{a}.$

l) $n-\frac{p+x}{q+x}=\frac{nx}{q+x}-m.$

m) $\frac{1-2x}{3}-\frac{4-5x}{6}=-\frac{13}{42}.$

n) $m^2-mx=n^2-nx.$

Odp. a) $x=a-2b+3c$; b) $x=\frac{d}{a+b-c}$; c) $x=a^2b^2-(a+b)$; d) $x=26\frac{115}{143}$; e) $x=7$; f) $x=\frac{mn+pq}{m+n+p-q}$; h) $x=1\frac{241}{326}$; k) $x=a-b$; l) $x=\frac{p-(m+n)q}{m-1}$; m) $x=\frac{1}{7}$; n) $x=m+n$.

2) Do pewnej liczby dodawszy 12, otrzymuję 49. Pytanie, jaka jest liczba szukana?

Odp. $x=37$.

3) Do jedenastéj części pewnéj liczby dodawszy $13\frac{1}{4}$, otrzymuję $13\frac{4}{44}$. Jakaż jest liczba?

Odp. $x=7\frac{1}{2}$.

4) Jakąż liczbę mnożyć wypada przez 12, aby dodawszy do iloczynu ztąd powstałego 34, zaś summę podzieliwszy przez 56, otrzymać na iloraz 78?

Odp. $x=361\frac{1}{6}$.

5) Pewną liczbę pomnożywszy przez 7, otrzymuję toż samo co do tejże liczby dodawszy 7. Jakaż jest liczba?

Odp. $x=1\frac{1}{6}$.

6) W pewnéj szkole cztero-klassowéj jest uczniów 123: w drugiéj klassie jest o 4 uczniów więcéj niż w pierwszéj, w trzeciéj 8 uczniów więcéj niż w drugiéj, w czwartéj 3 uczniów więcéj niż w trzeciéj. Iluż jest uczniów w każdéj klassie?

Odp. W pierwszéj kl. 23, w drugiéj 27, w trzeciéj 35, w czwartéj 38.

7) W Petersburgu w połowie zimy noc dłuższą jest o 13 godzin niż dzień. Ileż tedy jest godzin dnia a ile nocy, oraz o któréj godzinie słońce wschodzi i zachodzi?

Odp. Noc trwa godzin 18 minut 30, zaś dzień godzin 5 minut 30; wschód słońca jest o godzinie 9 minut 15 z rana, zachód o godzinie 2 minucie 45 po południu.

8) W pewnym ogrodzie znajduje się drzew i krzewów w ogóle sztuk 51: są tam jabłonki, drzewa gruszkowe i wiśniowe, krzaki agrestu i porzeczek; drzew jest więcéj o 5 sztuk niż krzewów, drzew wiśniowych jest mniéj o 3 sztuki niż jabłonek, zaś o 2 sztuk więcéj niż drzew gruszkowych, krzaków agrestu jest o 7 sztuk mniéj niż krzaków porzeczkowych. Ileż jest drzew i krzaków każdego gatunku?

Odp. 12 jabłonek, 7 drzew gruszkowych, 9 wiśniowych, 8 krzaków agrestu, a 15 porzeczek.

9) Powierzchnią ziemi dzielą na 5 pasów: jeden gorący, dwa umiarkowane i dwa zimne; każdy pas umiarkowany zawiera $\frac{15}{23}$ gorącego, zaś każdy zimny pas $\frac{7}{44}$ umiarkowanego. Jakaż jest powierzchnia każdego pasa, gdy powierzchnia ziemi zawiera 9288000 mil □?

Odp. Pas goracy zawiera $3697661\frac{360}{1271}$, każdy z umiarkowanych po $2411518\frac{622}{1271}$, zaś każdy zimny $383650\frac{350}{1271}$ mil □.

10) Mam trzy naczynia: dwa małe i jedno większe; jedno z małych zawiera w sobie tylko $\frac{3}{16}$, drugie tylko $\frac{5}{24}$ większego; naczynie drugie napełniam wodą i przelewam ją do naczynia pierwszego, to napełnię je, i jeszcze w drugiém naczyniu zostanie mi 10 kwart. Ileż kwart zawiera w sobie każde z trzech naczyń?

Odp. Naczynie pierwsze zawiera 90, drugie 100, trzecie 480 kwart.

11) Jak wielki jest kapitał, który w końcu roku wraz z procentem wynosi Rsr. 6290 kop. 90, przy stopie procentu $4\frac{1}{2}$.

Odp. Rsr. 6020.

12) Ktoś będąc obowiązany zapłacić pewien kapitał za rok, spłaca go dzisiaj, i po odtrąceniu eskonty licząc $9\frac{1}{2}$ od sta, zapłacił Rsr. $1538\frac{1}{2}$. Ileż był rzeczywiście winien?

Odp. Rsr. 1700.

13) Kapitał Rsr. 9728 rozdzielony ma być pomiędzy trzy osoby *A*, *B* i *C* w stosunku ich wieku: osoba *A* ma lat 36, osoba *B* 24, osoba *C* 16. Ileż przypadnie na każdą z trzech osób?

Odp. Osoba *A* dostanie Rsr. 4608, osoba *B* Rsr. 3072, zaś osoba *C* Rsr. 2048.

14) Pewnego owczarka pytano, ile ma owiec w swéj trzodzie, ten odpowiedział: gdybym miał sześć razy tyle, nadto: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$ razy tyle ile ich mam, i jeszcze jednę owcę, tobym miał 100 sztuk. Ileż było owiec w trzodzie?

Odp. 12.

15) Ostatnia cyfra z lewéj strony, pewnéj liczby sześcio-cyfrowéj, jest 1; przeniosłszy tę jedynkę na pierwsze miejsce z prawej strony, nowa liczba sześciocyfrowa tym sposobem otrzymana, jest trzy razy większą od danej. Jakaż jest dana liczba?

Odp. 142857.

16) Liczbę moich lat mnożąc przez $\frac{2}{3}$, do tego dodając $\frac{4}{5}$, summę ztąd powstałą dzieląc przez $\frac{13}{15}$, a od ilorazu odejmując $\frac{7}{24}$, otrzymuję $\frac{1}{4}$. Ileż mam lat?

Odp. 30.

17) Pewna matka jest obecnie sześć razy starszą od swéj córki, lecz za pięć lat będzie tylko $3\frac{1}{2}$ razy od niéj starszą. Ileż ma lat matka?

Odp. 30.

18) Kupiec ma pewną ilość towaru: sprzedając funt po Rsr. 2 kop. 20, ma na całym towarze zarobku Rsr. 20; gdyby sprzedawał funt po Rsr. 1 k. 50, straciłby Rsr. 10. Ileż funtów towaru posiada kupiec?

Odp. $42\frac{6}{7}$ funtów.

19) Powietrze atmosferyczne składa się z czterech części azotu i z jednéj części kwasorodu. Ileż jest każdego z tych pierwiastków w pokoju długim 14, szerokim 12 i wysokim $7\frac{1}{2}$ łokci?

Odp. 252 stóp kubicznych kwasorodu i 1008 stóp kubicznych azotu.

20) Cynober składa się z dwóch pierwiastków: z siarki i merkuryuszu, w taki sposób: że na siedm części siarki idzie 44 części merkuryuszu. Ileż merkuryuszu otrzymać można z 5 funtów $18\frac{1}{2}$ łutów cynobru?

Odp. Funtów 4 łutów 26.

21) Z Moskwy wysłano do Odessy kuryera, który na godzinę jedzie $1\frac{1}{4}$ mil; w półtory godziny wysłano drugiego kuryera żeby pierwszego dogonił robiąc $1\frac{5}{8}$ mil na godzinę. W ile godzin i w jakiéj odległości drugi kuryer dogoni pierwszego?

Odp. W $6\frac{1}{2}$ godzin, w odległości $8\frac{1}{8}$ mil od Moskwy.

124. *Przykłady na równania stopnia pierwszego z dwoma lub więcéj niewiadomemi:*

1) Znaleźć wartość dla niewiadomych z następujących równań:

a) $x+y=6912,$
$x-y=4444.$

b) $x+\frac{1}{11}y=71,$
$y-\frac{1}{13}x=61.$

c) $\dfrac{4x+81}{16y-17}=6,$
$\dfrac{12x+97}{15y-17}=4.$

d) $\dfrac{x+a}{n}+y-b=2a,$
$x+a+\dfrac{y-b}{a}=1+na.$

e) $\dfrac{1}{x}=m-\dfrac{1}{y},$
$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}-n.$

f) $\dfrac{x}{a+b}-\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a+b},$
$\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a-b}.$

g) $0{,}077x=0{,}66y-2{,}1516,$
$0{,}053y=0{,}08x+0{,}0842.$

h) $1\frac{2}{3}x-4\frac{5}{6}=7\frac{8}{9}y-10\frac{11}{12},$
$24{,}6-1\frac{3}{5}x+7\frac{9}{11}y=31\frac{10}{11}.$

k) $\dfrac{13+x}{7}+\dfrac{3x-8y}{3}=x+y-5\frac{1}{3},$
$\dfrac{11-x}{2}+\dfrac{4x+8y-2}{9}=8-(y-x).$

l) $\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{15}{8},$
$9x-\dfrac{3y+44}{7}=100.$

m) $\dfrac{306a^3+324a^2b-1015ab^2-810b^3}{120ab(3a+2b)(7a+6b)xy}-\dfrac{1}{(3a+2b)y}=\dfrac{1}{(7a+6b)x}$

$\dfrac{1026a^4-393a^2b^2-430b^4}{120abxy}-\dfrac{7a^2-6b^2}{x}=\dfrac{3a^2-2b^2}{y}$.

n) $3x-5y+4z=5$,
$7x+2y-3z=2$,
$4x+3y-z=7$.

o) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{9}=258$,
$\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{5}=304$,
$\dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{7}=296$.

p) $x-y+z=6$,
$3\tfrac{1}{2}x-4\tfrac{3}{4}y+5\tfrac{1}{2}z=32$,
$10\tfrac{1}{2}x-9\tfrac{1}{2}y+11z=71$.

q) $(c+a)x-(c-a)y=2bc$,
$(b+c)z-(b-c)x=2ab$,
$(a+b)y-(a-b)z=2ac$.

r) $yz+xz+xy=9xyz$,
$yz+2xz-3xy=-4xyz$,
$3yz-2xz+xy=4xyz$.

s) $\dfrac{12}{2x+3y}-\dfrac{7,5}{3x+4z}=1$,
$\dfrac{30}{3x+4z}+\dfrac{37}{5y+9z}=3$,
$\dfrac{222}{5y+9z}-\dfrac{8}{2x+3y}=5$.

t) $x-2y+3z-4u=-10$,
$-5x+6y-7z+8u=18$,
$9x-10y-11z+12u=4$,
$-13x+14y+15z-16u=-4$.

u) $1\frac{2}{3}x+2\frac{3}{4}y=105,$
$3\frac{4}{5}x+4\frac{5}{6}z=317,$
$5\frac{6}{7}z+6\frac{7}{8}u=741,$
$7\frac{8}{9}u+8\frac{9}{10}x=835.$

w) $0{,}12x-0{,}23y+0{,}34z=2{,}071,$
$0{,}45y-0{,}56z+0{,}67u=-8{,}044,$
$0{,}78z-0{,}89u+0{,}87x=9{,}560,$
$0{,}65u-0{,}43x+0{,}21y=-4{,}881.$

x) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}+\frac{u}{9}=2800,$

$\frac{x}{5}+\frac{y}{7}+\frac{z}{9}+\frac{u}{11}=2144,$

$\frac{x}{7}+\frac{y}{9}+\frac{z}{11}+\frac{u}{13}=1744,$

$\frac{x}{9}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13}+\frac{u}{15}=1472.$

y) $x+y+z+t+u=a,$
$x+y+z+t+v=b,$
$x+y+z+u+v=c,$
$x+y+t+u+v=d,$
$x+z+t+u+v=e,$
$y+z+t+u+v=f,$

z) $yztu+xztu+xytu+xyzu+xyzt=xyztu,$
$yztv+xztv+xytv+xyzv+xyzt=xyztv,$
$yzuv+xzuv+xyuv+xyzv+xyzu=xyzuv,$
$ytuv+xtuv+xyuv+xytv+xytu=xytuv,$
$ztuv+xtuv+xzuv+xztv+xztu=xztuv,$
$ztuv+ytuv+yzuv+yztv+yztu=yztuv.$

Odp. a) $x=5678, y=1234$; b) $x=65, y=66$; c) $x=2\frac{1}{4}$, $y=3\frac{1}{5}$; d) $x=(n-1)a, y=a+b$; e) $x=\frac{2}{m+n}, y=\frac{2}{m-n}$; f) $x=\frac{a}{a-b}$, $y=\frac{b}{a+b}$; g) $x=1{,}2, y=3{,}4$; h) $x=24\frac{3}{4}, y=6$; k) $x=1, y=2$; l) $x=14, y=46$; m) $x=\frac{3a}{4b}-\frac{5b}{6a}, y=\frac{7b}{8a}+\frac{9a}{10b}$;

n) $x=1, y=2, z=3$; o) $x=315, y=630, z=945$; p) $x=2, y=4, z=8$; q) $x=b+c-a, y=a+c-b, z=a+b-c$; r) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{4}$; s) $x=1, y=2, z=3$; t) $x=1, y=2, z=3, u=4$; u) $x=30, y=20, z=42, u=72$; w) $x=0{,}1, y=-2{,}3, z=4{,}5, u=-6{,}7$; x) $x=315, y=3465, z=9009, u=6435$; y) czyniąc $a+b+c+d+e+f=s$, otrzymamy $x=\frac{1}{5}s-f, y=\frac{1}{5}s-e, z=\frac{1}{5}s-d, t=\frac{1}{5}s-c, u=\frac{1}{5}s-b, v=\frac{1}{5}s-a$, z) $x=5, y=5, z=5, t=5, u=5, v=5$.

2) Jakież są dwie liczby, których summa 857142, zaś różnica 571428 wynosi?

Odp. Większa 714285, mniejsza 142857.

3) Pewien chłopiec mówił do swego towarzysza: daj mi z twoich orzechów 5, to będę ich miał trzy razy tyle niż ty; nie, odpowiedział tamten, ty daj mi raczéj 2 orzechy, to będę miał pięć razy więcéj od ciebie. Ileż orzechów miał każdy?

Odp. Pierwszy 4, drugi 8.

4) Znaleźć ułamek, któryby był równy co do wartości $\frac{1}{2}$, gdy tak do licznika jako i do mianownika dodamy po jedności; $\frac{1}{3}$ gdy tak od licznika, jako i od mianownika odejmiemy po jedności?

Odp. $\frac{3}{7}$.

5) Dwie osoby A i B dają na pewne przedsiębierstwo, które zapewnia $7\frac{1}{2}\%$ rocznie, razem kapitał Rsr. 10000: osoba A pozostawia swój kapitał rok jeden, miesięcy trzy; osoba B swój kapitał odbiera po dwóch latach, jedenastu miesiącach; wiemy nadto, że zysk osoby A równy jest zyskowi osoby B. Ileż każda z dwóch osób miała kapitału?

Odp. Osoba A miała Rsr. 7000, osoba B Rsr. 3000.

6) Gdy podzielę jednę z dwóch liczb przez drugą, otrzymuję iloraz $a-b^2$ i resztę $b+b^4$: dzieląc znowu drugą liczbę przez pierwszą, znajduję iloraz $b-a^2$ i resztę $a+a^4$. Jakaż jest każda z dwóch liczb?

Odp. $x=a^2+b; y=a+b^2$.

7) Są dwie liczby trzycyfrowe, których summa powiększona jednością daje 1000; napisawszy te dwie liczby obok siebie, mianowicie, mniejszą z nich po większéj, otrzymuję liczbę sześcio-cyfrową sześć razy większą, od téj liczby sześcio-cyfrowéj, jakąbym otrzymał pisząc większą z liczb danych po mniejszéj. Jakież są dane liczby?

Odp. 857 i 142.

8) Ojciec mówi do syna: siedm lat temu byłem siedm razy starszy od ciebie, zaś za trzy lata będę trzy razy tylko starszy od ciebie. Ileż ma lat ojciec a ile syn?

Odp. Ojciec ma lat 42, syn 12.

9) Kupiec, weksel na pewną summę, płatny dopiero za trzy miesiące, spłaca dzisiaj, i po potrąceniu eskonty od sta, zapłacił za niego Rsr. $3523\frac{1}{2}$; drugi kupiec spłaca także dzisiaj weksel płatny dopiero po jedenastu miesiącach, a po zeskontowaniu go przy tejże saméj co i pierwszy stopie procentu, płaci Rsr. $3319\frac{1}{2}$. Na ileż rubli był weksel każdego z kupców, i przy jakiéj stopie procentu weksle eskontowano?

Odp. Każdy weksel był na Rsr. 3600, a eskonta roczna wynosiła Rsr. $8\frac{1}{2}\%$.

10) Dwie liczby są w stosunku 3 : 5: dodawszy do pierwszéj 10, a od drugiéj odjąwszy 10, nowe liczby ztąd powstałe mają się do siebie jak 5 : 3. Jakież to są liczby?

Odp. 15 i 25.

11) Dwa ciała są od siebie oddalone na stóp *d*: poruszając się prędkością jednostajną naprzeciw siebie, spotykają się w *m* sekund: biegnąc zaś z tąż samą prędkością w jednę stronę, spotykają się w *n* sekund. Ileż stóp każde z ciał przebiega na sekundę?

Odp. Jedno na sekundę przebiega $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$, drugie $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$ stóp.

12) Jakież są dwie liczby, których summa, różnica i iloczyn są w stosunku 5 : 1 : 18.

Odp. 9 i 6.

13) Liczbę 96 podzielić na trzy takie części, ażeby pierwsza z nich podzielona przez drugą, dała na iloraz 2 i resztę 3; zaś żeby część druga podzielona przez trzecią, wydała na iloraz 4 i resztę 5.

Odp. 61, 29, 6.

14) Trzy miasta: *A*, *B* i *C*, nie leżą na jednéj linii prostéj: z *A* przez *B* do *C* jest 82, z *B* przez *C* do *A* 97, zaś z *C* przez *A* do *B* 89 mil. W jakiejże miasta *A*, *B* i *C* są od siebie odległości?

Odp. Od *A* do *B* 37, od *B* do *C* 45, zaś od *C* do *A* 52 mil.

15) Pełna kadź wina zawiera w sobie 465 kwart i 532$\frac{1}{2}$ litrów francuzkich: potrzeba 31 kwart i 142 litrów fran. do napełnienia $\frac{1}{6}$ części kadzi. Ileż kwart zawiera w sobie kadź, oraz w jakim stosunku jest kwarta względem litra?

Odp. Kadź zawiera 930 kwart, zaś kwarta z litrem są w stosunku 62 : 71.

16) Krawiec zrobił trzy suknie téj samej wielkości: na drugą z nich użył 3 łokcie sukna więcéj niż na pierwszą, bo sukno było węższe o 1$\frac{1}{2}$ łokcia; na trzecią wyszło sukna 4 łokcie mniéj niż na drugą, bo sukno było o $\frac{3}{4}$ łokcia szersze niż na drugiéj. Ileż sukna i jakiéj szerokości wypotrzebował krawiec na pierwszą suknię?

Odp. 9 łokci sukna szerokiego na 8 ćwierci.

17) Zrobiono pewną ilość aliażu z czterech metali, mieszając je w stosunku 1 : 3 : 5 : 7; dodawszy do aliażu tego 2$\frac{3}{8}$ razy tyle nowego aliażu z tych samych metalów, lecz w stosunku odmiennym pomieszanych, otrzymujemy aliaż w którym metale dane są w stosunku jak 3 : 4 : 5 : 6. W jakimże stosunku były metale w aliażu który dodano?

Odp. W stosunku jak 8 : 9 : 10 : 11.

18) Kiedy zegar wskazuje godzinę 12, natenczas wskazówka minutowa przykrywa godzinną. Pytanie, o któréj godzinie wskazówki się zejdą powtórnie, i gdzie schodzić się będą następnie.

Odp. Powtórne zejście się wskazówek jest o godzinie 1 minut $5\frac{5}{11}$, następne zaś są: o g. 2 m. $10\frac{10}{11}$, o g. 3 m. $16\frac{4}{11}$, o g. 4 m. $21\frac{9}{11}$, i tak daléj w ciągu 12 godzin jest 11 miejsc zejścia się wskazówek; a miejsce każdego następnego zejścia się, otrzymujemy z poprzedniego, dodając do niego godz. 1 min. $5\frac{5}{11}$.

19) Powiększając podstawę pewnego prostokąta o 2 arszyny, a zmniejszając wysokość jego o 3 arszyny, zmniejszamy powierzchnią tegoż prostokąta o 48 arsz. kwadratowych; jeżelibyśmy powiększyli podstawę o 3 arszyny, zaś wysokość zmniejszyli o 2 arszyny, natenczas powierzchnia prostokąta powiększyłaby się o 6 arsz. kwadrat. Jakaż jest podstawa i wysokość danego prostokąta?

Odp. Podstawa zawiera 30, wysokość zaś 24 arszynów.

20) Są dwa gatunki monet, złote i srebrne: dwie sztuki monety złotéj dodane do pięciu sztuk monety srebrnéj, czynią Rsr. 15; zaś 18 sztuk monety srebrnéj, czyni o Rsr. 3 więcéj niż trzy sztuki monety złotéj. Jakaż jest wartość w rublach srebrnych jednéj sztuki tak złotéj jakotéż i srebrnéj?

Odp. Moneta złota warta Rsr. 5, srebrna zaś Rsr. 1.

KONIEC CZĘŚCI PIERWSZÉJ.

1859.