

Moment wektora \vec{P} względem punktu O jest równy iloczynowi wektorowemu z \vec{r} przez \vec{P} czyli

$$\vec{M} = V \vec{r} \cdot \vec{P}$$

Wykonujemy to mnożenie.

$$\begin{aligned} \vec{M} &= V(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) / (P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}) = \\ &= P_x x V_{ii} + P_y x V_{ij} + P_z x V_{ik} + P_x y V_{ji} + P_y y V_{jj} + P_z y V_{jk} + \\ &\quad + P_x z V_{ki} + P_y z V_{kj} + P_z z V_{kk} \end{aligned}$$

ale $P_x x V_{ii}$, $P_y y V_{jj}$, $P_z z V_{kk}$ są równe zeru, bo są to iloczyny wektorów, mających ten sam kierunek.

W dalszym ciągu otrzymamy

$$\begin{aligned} \vec{M} &= P_y x \vec{k} - P_x x \vec{j} - P_x y \vec{k} + P_x y \vec{i} + P_x z \vec{j} - P_y z \vec{i} = \\ &= (P_y x - P_x z) \vec{i} + (P_x z - P_y x) \vec{j} + (P_y x - P_x y) \vec{k} ; \end{aligned}$$

albo
$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \\ x, y, z \\ P_x, P_y, P_z \end{vmatrix}$$

Czynniki wektorów $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, są oczywiście momentami wektora \vec{P} względem osi współrzędnych. Otrzymaliśmy już je na innej drodze.

C Z Ę Ś Ć I

S T A T Y K A

Rozdział 1.

O siłach, działających na punkt.

13. Przedmiot i podział mechaniki. Wśród zjawisk, otaczającego nas świata wyróżniamy tak zwane zjawiska mechaniczne. Istnieją dwa rodzaje takich zjawisk: ruch

ciała względem innych ciał i odkształcanie się ciał.

Pomiedzy temi kategoriyami zasadniczej różnicy niema bo odkształcanie polega na ruchu jednych cząstek względem innych, ale dobrze jest odróżniać te dwie kategorie.

Mechanika jest to nauka o tych zjawiskach mechanicznych.

Dzieli się ona na dwie części, różne zasadniczo cynematykę i cynetykę.

Cynematyka jest częścią opisową; bada ona jak się poruszają ciała, nie wchodząc w to, jakie czynniki wywierają wpływ na ruch. Cynematyka stoi w bardzo bliskim związku z geometryą. Zasadnicza różnica polega na tem, że w cynematyce wchodzi w grę pojęcie czasu, z którym nie mamy do czynienia w geometryi.

Aby zdefiniować przedmiot cynetyki należy podać wyjaśnienia wstępne. Gdy mamy 2 ciała A i B to ciało B może wywierać wpływ na ciało A , który się ujawni w podniesieniu się temperatury, w zmianie stanu elektrycznego lub magnetycznego i t.d. ciała A . Ciało B może również wywierać wpływ mechaniczny na ciało A i pod działaniem B ciało A może zacząć się poruszać lub odkształcać. Dzieje się to, gdy ciała są w bezpośrednim

zestknięciu lub gdy są połączone za pomocą łącznika materialnego np. sznura. Ale ciało B może też wywierać wpływ na A gdy nie ma łącznika materialnego. Wiadomem jest np., że magnes przyciąga żelazo, choć nie ma między nimi widomego pośrednika mechanicznego.

Gdy jedno ciało wywiera wpływ mechaniczny na drugie, to oddziaływanie to daje się zwykle określić za pomocą jednego wektora. Wektor ten nazywamy siłą. Tak np. jeśli przywiążemy do ciała sznur, i gdy będziemy ciągnęli za sznur, to ciało może zacząć się poruszać przyczem ruch ten zależy od kierunku sznura. Mamy tu więc do czynienia z wektorem. Pod względem wielkości, można sądzić o tym wektorze z tego, jak silnie ciągniemy za sznur.

Siła nie jest to wektor swobodny, bo gdyby obrócić punkt przyłączenia sznura do ciała gdzieindziej, to wywołałoby to inny skutek. A więc skutek ten zależy od początku wektora. Ten początek nazywamy punktem przyłożenia siły lub punktem zaczepienia siły.

Gdy 2 ciała A i B stykają się tylko w jednym punkcie, to oddziaływanie ciała A na B też się da określić jedną siłą i punkt przyłożenia jest w punkcie zetknięcia. Jeśli ciała A i B są zetknięte w kilku punktach, to działanie jednego na drugi trzeba o-

kreślić kilkoma siłami.

Gdy mamy ciała A i B i chodzi o zbadanie ruchu ciała A , a wiemy jaką siłę wywiera ciało B , to możemy zapomnieć o istnieniu ciała B i rachować się tylko z siłą, która działa na A .

Jeśli siły działają na ciało, a mimo to ono pozostaje w spoczynku, to mówimy, że siły się równoważą.

Niech będzie jakieś drobne ciało i przypuśćmy, że działają na nie tylko 2 siły P i Q . Jeśli takie 2 siły się równoważą, to mówimy, że są one równe pod względem wielkości. Doświadczenie wskazuje, że siły takie są zawsze odwrotne.

Przypuśćmy, że na punkt działa kilka sił P_1, P_2, \dots w tym samym kierunku i że istnieje siła R , która je wszystkie równoważy. W takim razie siła R musi mieć kierunek odwrotny do tamtych, mówimy, że pod względem wielkości ona jest równa sumie sił P_1, P_2, \dots .

Opierając się na definicyi sił równych i sumy sił, możemy siły mierzyć. Obieramy w tym celu pewną określona siłę za jednostkę. W fizyce za taką jednostkę jest uważana dyna. Technicy posługują się kilogramem jako jednostką siły. O sile, która może zrównoważyć siłę jednostkową, mówimy że jest równa tej jednostce,

jeśli siła może zrównoważyć 2 siły jednostkowe, działające w jednym kierunku, to mówimy, że zawiera ona 2 jednostki sił. Do porównywania sił służy dynamometr znany z kursu fizyki.

Cynetyka jest to nauka o tem, jak się zachowują ciała pod działaniem sił. Dzieli się ona na 2 części: statykę i dynamikę.

Statyka jest to nauka o równowadze sił, a dynamika o ruchu ciał pod działaniem sił. Jest rzeczą oczywistą, że statyka stanowi tylko szczególny przypadek w dynamice. Specjalizując twierdzenia dynamiki moglibyśmy otrzymać z nich twierdzenia statyki.

W kursie naszym wyłożymy jednak najpierw statykę, a później dynamikę.

14. Pierwsza zasada statyki. Statyka jest to nauka doświadczalna /podobnie, jak fizyka/ i polega na pewnych prawdach, które daje nam doświadczenie. Prawdy te są nieraz nazywane aksjomatami lub zasadami statyki. Pierwszym z tych aksjomatów jest zasada akcji i reakcji /lub zasada działania i oddziaływania/.

Niech będą dwa ciała A i B . Przypuśćmy, że A wywiera na B siłę P . Doświadczenie wskazuje, że i ciało B wywiera na A pewną siłę Q . Ta siła jest według

zasady akcji i reakcji równa sile P co do wielkości, a odwrotna co do kierunku /przytem obydwie siły działają na jednej prostej/.

Że zasada ta jest słuszna, dowodzi fakt następujący:

Przypuśćmy, że ciała A i B stykają się; połączymy je np. za pomocą śruby; utworzą one wtedy jedną całość. Gdyby siła Q była większa od P , to całość miałaby tendencję do poruszania się w kierunku siły

Q i gdyby zawiesić te ciała na sznurze, to odchyliłyby się w kierunku siły Q . Ale nie dostrzegamy nic podobnego. Więc siły P i Q muszą być równe i odwrotne.

O prawdziwości tej zasady przekonywa nas też fakt, że dalsze wnioski, jakie wyciągniemy z niej są zgodne z doświadczeniem.

15. Druga zasada statyki. Drugą zasadą statyki jest przenoszenie siły. Siła nie jest wektorem swobodnym, ani też wektorem związanym z prostą. Że nie jest swobodnym - o tem mówiliśmy już wyżej; dowiedzimy teraz, że i do tego drugiego rodzaju wektorów należeć nie może.

Wyobraźmy sobie sznur AB , rozciągnięty na podłodze. Przyłożmy do końca B siłę P , mającą kierunek prostej AB . Pod działaniem tej siły sznur zacznie się poruszać. Jeśli punkt przyłożenia przeniesiemy

do punktu A , to ruch będzie zupełnie inny, a zatem nie wolno przenosić punktu przyłożenia siły. Siła jest to więc wektor, związany z punktem.

Sznur należy do ciał, odkształcających się pod działaniem sił, ale taką samą właściwość, w mniejszym lub większym stopniu, posiadają wszystkie inne ciała. Wynika to, między innymi, z rozumowania następującego:

Niech będzie pręt metalowy AB . Gdy do końca B przyłożymy siłę P , działającą w kierunku AB , to pręt zacznie się przesuwac. Podzielmy w myśli pręt na 2 części AC i CB . Te 2 części można uważać za 2 różne ciała i powiedzieć, że AC zaczęło się poruszać pod działaniem CB , a ponieważ poprzednio część CB działania takiego nie wywierała, przeto musiały w niej zajść pewne zmiany i oczywiście musiały one polegać na pewnem wydłużeniu. Wydłużenie to może być zupełnie niedostrzegalne, niemniej jednak, musimy przyjmować istnienie jego, bo inaczej ruch pręta pod działaniem siły P byłby dla nas niezrozumiały.

Niech będzie jakiekolwiek ciało. Poprowadźmy dowolną prostą, która przetnie powierzchnię tego ciała w punktach A i B . Przyłożmy w punkcie A siłę P , skierowaną według prostej AB . Wywoła ona pewien określony ruch ciała i pewne odkształcenie.

Usuńmy teraz siłę P z punktu A i przyłożmy taką samą siłę w punkcie B . Pod działaniem tej siły ciało otrzyma też pewien ruch, prawie taki sam, jak poprzednio, i również pewne odkształcenie. Lecz, o ile w pierwszym przypadku odkształcenie polegać będzie na wydłużeniu, to w drugim - na skurczeniu. Skutki działania sił nie będą więc jednakowe. Gdyby przenieść punkt przyłożenia siły jeszcze do innego punktu prostej AB , np. pośredniego między A i B , to odkształcenie byłoby jeszcze inne: jedna część ciała wydłużyłaby się, a inna część - skurczyła. Ale w ciałach takich, jak żelazo, drzewo, kamień i t.d. te odkształcenia są bardzo małe i zwykle je pomijamy i uważamy, że ciało wcale nie ulega odkształceniu. Takie ciała, w których nie zachodzi odkształcenie pod działaniem sił nazywają się szttywnymi.

Kurs mechaniki będzie dotyczył głównie ciał sztywnych. Ale należy pamiętać, że ciało sztywne jest tylko abstrakcją i że pomijając odkształcenie, nie pomijamy jakiejś okoliczności drugorzędnej, lecz zasadniczą właściwość ciała. Spotkamy się w przyszłości z zagadnieniami takimi, gdzie pomijać odkształcenia nie będzie wolno.

Tymczasem przyjmujemy jednak ciała za sztywne i możemy powiedzieć, że siła, działająca na ciało sztywne, jest wektorem, związanym z prostą. Jest to

właśnie zasada przenoszenia siły.

Wyciągniemy stąd pewien wniosek:

Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne. Poprowadźmy jakąś prostą i obierzmy na niej 2 punkty A i B . Przypuśćmy, że w tych punktach działają / na jednej prostej / 2 siły P i Q , równe i odwrotne. Siły te zrównoważą się, co wynika stąd, że siła jest wektorem związanym z prostą, więc punkt jej przyłożenia można przenieść do B bez zmiany skutku działania tej siły. A siły równe i odwrotne, mające wspólny punkt przyłożenia, się równoważą, a zatem równoważą się także siły P i Q przyłożone w A i B .

16. Trzecia zasada statyki. Trzecim aksjomatem statyki jest zasada równoległoboku.

Przypuśćmy na pewien punkt ciała działa pewna liczba sił P, P_2, P_3, \dots . Ponieważ siły są to wektory, więc możemy mówić o sumie geometrycznej lub o wektorze wypadkowym sił składowych P, P_2, P_3, \dots . Przypuśćmy, że R jest tą sumą geometryczną. /Oczywiście będzie to siła wyobrażalna tylko/. Zasada równoległoboku głosi, że gdyby usunąć siły P, P_2, P_3, \dots , a natomiast przyłożyć R , to ona wywołałaby ten sam skutek, co siły usunięte.

W przypadku szczególnym, gdy są 2 składowe, to wypadkowa stanowi przekątną równoległoboku, zbudowa-

nego na tych składowych.

Zasada równoległoboku daje się stwierdzić doświadczalnie przy 2 składowych, gdy zaś mamy już ten dowód, to można go uogólnić dla dowolnej liczby składowych. Próbowano też drogą czysto rozumową dowieść tej zasady, ale żaden ze znanych dowodów nie jest całkowicie ścisły.

17. Warunki równowagi. Mamy jakieś małe ciało powiedzmy punkt materialny, dający określić swe położenie zapomocą 3 współrzędnych, tak jak punkt geometryczny. Oznaczmy to drobne ciało przez O . Przypuśćmy, że działa nań pewna liczba sił P_1, P_2, P_3, \dots . Zachodzi pytanie: jakie warunki powinny być spełnione, aby ten układ sił był w równowadze. Oznaczmy wypadkową tych sił przez R . Według zasady równoległoboku wywoła ona ten sam skutek, co te wszystkie siły razem. Jeśli wypadkowa ta jest różna od zera, to ciało O nie pozostanie w spoczynku i zatem układ sił nie będzie w równowadze. Tak więc warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił jest, aby wypadkowa tych sił była zerem.

Nadamy teraz temu warunkowi postać analityczną. Obierzmy punkt O , na który działa układ sił P_1, P_2, \dots /typowa P /, za początek prostokątnego układu współrzędnych. Rzuty tych sił na osi x, y, z oznaczmy przez P_x, P_y, P_z , a w takim razie rzuty wypadkowej R