1-o. O wypadkowej sił równoległych może być mowa tylko w tym razie, gdy działają one na ciało sztywne. A więc środek ciężkości w ścisłym znaczeniu tego wyrazu posiadają tylko ciała sztywne podczas gdy środek masy istnieje w każdym ciele i w każdym układzie ciał.

2-o. Punkt przyłożenia siły ciężkości w ciele sztywnem tylko wtedy leży w środku masy, gdy rozmiary ciała są drobne w stosunku do odległości od środka ziemi. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to linia działania wypadkowej siły ciężkości może nie przechodzić przez środek masy, a zatem ten punkt nie może być wówczas uważany za punkt przyłożenia tej siły.

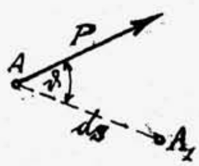
ROZDZIAŁ VIII.

ZASADA PRACY PRZYGOTOWANEJ.

73. Pojęcie pracy. Gdy mamy 2 wektory P i Q tworzące ze sobą kąt ϑ to, jak wiadomo /§ 12/, ich iloczynem wektorowym nazywamy wektor $V\bar{P}\bar{Q}$ równy pod względem wielkości $P.Q.\sin\vartheta$. Natomiast iloczynem skalarowym wektorów P i Q nazywać będziemy skalar $\bar{P}\bar{Q}$. Pod względem wielkości /która go całkowicie określa/ iloczyn ten jest równy $P.Q.\cos\vartheta$

Pierwszy z nich zależy od porządku czynników, podczas gdy drugi jest od tego porządku niezależny. Czyli $V\bar{P}\bar{Q} = -V\bar{Q}\bar{P}$, a $\bar{P}\bar{Q} = \bar{Q}\bar{P}$. Iloczyn wektorowy występuje w mechanice pod nazwą momentu, a iloczyn skalarowy pod nazwą pracy.

74. Praca elementarna. Przypuśćmy, że na punkt A należący do jakiegoś ruchomego ciała działa siła P , że przesunęło się nieskończenie mało i punkt A zajął nowe położenie A_1 nieskończenie blizkie od pierwotnego. Nieskończenie małe przesunięcie A_1A_2 oznaczymy przez ds i nazwiemy przesunięciem elementarnem punktu A . Gdy kąt $/\widehat{P,ds}/$ oznaczymy przez ϑ , to iloczyn skalarowy $d\mathcal{L} = P.ds.\cos\vartheta$ nazywamy pracą elementarną siły P na drodze AA_1 x/ . Przypuśćmy, że



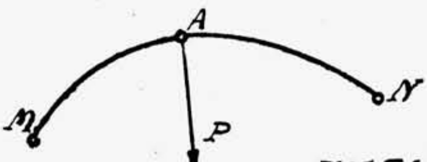
RYS. 73.

$\vartheta < \frac{\pi}{2}$, w takim razie $\cos\vartheta > 0$ i $d\mathcal{L} > 0$ czyli praca elementarna siły P jest dodatnia. Gdy $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, to $\cos\vartheta = 0$, a więc i $d\mathcal{L} = 0$ t.zn. gdy siła jest prostopadła do przesunięcia elementarnego, to praca jej jest zerem. Wreszcie, gdy $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, to $\cos\vartheta < 0$ i $d\mathcal{L} < 0$ czyli ujemne.

Przypuśćmy, że punkt A odbył skończoną drogę

x/ Przesunięcie AA_1 jest nieskończenie małe, więc można uważać, że podczas niego siła P nie zmienia się.

od punktu M do N i że na tej drodze działała siła P, która może być zmienna pod względem wielkości i kierunku.



RYS 74.

Podzielmy drogę MN na nieskończenie małe elementy. Na każdym z nich siła P wykonywa pracę elementarną. Gdy zsumujemy te wszystkie prace, to otrzymamy pracę całkowitą siły P na drodze MN.

W statyce będziemy mieli do czynienia tylko z pracą elementarną.

<u>75.</u> <u>Twierdzenia zasadnicze o pracy elementarnej.</u> I/ Przypuśćmy, że na punkt A działa pewna liczba sił: $P_1, P_2, P_3, \ldots$ dowolnie rozłożonych w przestrzeni.

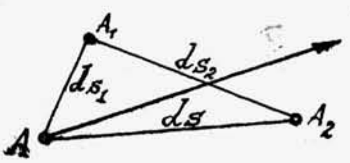
Wyznaczmy ich wypadkową i oznaczmy ją przez R Przypuśćmy, że punkt A doznał nieskończenie małego przesunięcia $ds = AA_1$ i że kąty $(P_1, \hat{ds}), (P_2, \hat{ds}), (P_3, \hat{ds}), \ldots (R, \hat{ds})$ są odpowiednio równe $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots \vartheta$ Na zasadzie paragrafu 5 możemy napisać: $P_1 . \cos\vartheta_1 + P_2 . \cos\vartheta_2 + P_3 . \cos\vartheta_3 + \ldots = R . \cos\vartheta$
a mnożąc obydwie strony przez ds otrzymamy:

$$P_1 . ds . \cos\vartheta_1 + P_2 . ds . \cos\vartheta_2 + P_3 . ds \cos\vartheta_3 + \ldots = R . ds . \cos\vartheta \quad (1)$$

Równanie (1) wyraża twierdzenie, o które chodziło, a mianowicie: <u>suma prac elementarnych sił</u>

składowych jest równa pracy elementarnej siły wypadkowej.

II. Przypuśćmy, że wskutek działania siły P na punkt A doznał on dwuch nieskończenie małych przesunięć: najpierw $AA_1 = ds_1$, a następnie $A_1A_2 = ds_2$. Gdy połączymy punkty A i A_2 to odcinek $AA_2 = ds$ możemy uważać za przesunięcie wypadkowe tamtych dwuch /ds_1 i ds_2/. Oznaczmy kąty $/ds_1, \widehat{P}/$, $/ds_2, \widehat{P}/$, $/ds, \widehat{P}/$ odpowiednio przez $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta$.



RYS. 75.

Biorąc rzuty wszystkich przesunięć na kierunek siły P otrzymamy: $ds_1 . \cos\vartheta_1 + ds_2 . \cos\vartheta_2 = ds . \cos\vartheta$

Pomnóżmy obydwie strony tej równości przez P, to będziemy mieli $P . ds_1 . \cos\vartheta_1 + P . ds_2 . \cos\vartheta_2 = P . ds . \cos\vartheta$

Stąd wynika twierdzenie takie: Suma prac elementarnych siły na przesunięciach składowych jest równa pracy elementarnej tej siły na przesunięciu wypadkowym. Twierdzenie to dotyczy oczywiście dowolnej liczby przesunięć składowych.

Dwa twierdzenia ostatnie są przypadkami szczególnymi twierdzenia ogólnego, które w symbolach rachunku wektorowego da się wyrazić tak: gdy mamy dwa wektory Q i R, z których drugi jest sumą geometryczną wektorów $P_1, P_2, P_3, \ldots$, to :

$\bar{R}.\bar{Q}=(\bar{P}_1+\bar{P}_2+\ldots)\bar{Q}=\bar{P}_1\bar{Q}+\bar{P}_2\bar{Q}+\ldots$, gdzie znaki $+$ oznaczają sumowanie algebraiczne. Inaczej mówiąc, aby pomnożyć skalarnie sumę geometryczną, to trzeba pomnożyć każdy wyraz i te iloczyny dodać algebraicznie.

76. Analityczne wyrażenie pracy elementarnej. Niech będzie prostokątny układ współrzędnych i punkt $A(x,y,z)$ w tym układzie. Dajmy na to, że na ten punkt A działa siła P. Rozłóżmy ją na 3 składowe P_x, P_y, P_z w kierunkach osi i przypuśćmy, że punkt A doznał nieskończenie małego przesunięcia do punktu $A_1(x+dx, y+dy, z+dz)$. Z tego wynika, że rzuty przesunięcia AA_1 na kierunki osi x,y,z są odpowiednio równe dx, dy, dz. Gdy pracę siły P na przesunięciu AA_1 oznaczymy przez $d\mathcal{L}$, to na zasadzie pierwszego twierdzenia par. poprzedzającego:

$$d\mathcal{L}=P_x.dx+P_y.dy+P_z.dz \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

77. Praca elementarna sił centralnych. Przypuśćmy, że na ruchomy punkt A działa siła P, która może się zmieniać pod względem wielkości, ale której linia działania przechodzi wciąż przez nieruchomy punkt O. Taka siła nazywa się centralną, a punkt O - środkiem siły centralnej. Wyznaczmy pracę elementarną $d\mathcal{L}$ siły P przy nieskończenie małem przesunięciu punktu A. Obierzmy w tym celu prostokąt-

ny układ współrzędnych z początkiem O i oznaczmy współrzędne punktu A w tym układzie przez x, y, z. Dalej oznaczmy odległość OA przez r, a kąty kierunkowe linii OA przez α, β i γ.

Na zasadzie wzoru /1./ par. poprzedz. możemy napisać: $d\mathcal{L} = P\cos\alpha . dx + P\cos\beta . dy + P\cos\gamma . dz$,

a ponieważ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\cos\beta = \frac{y}{r}$; $\cos\gamma = \frac{z}{r}$;

więc $d\mathcal{L} = P\left(\frac{x.dx + y.dy + z.dz}{r}\right)$ . . . . . /1./

Wiadomo, że $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, skąd po zróżniczkowaniu $2r.dr = 2x.dx + 2y dy + 2z.dz$, lub:

$$r.dr = x.dx + y.dy + z.dz \quad . \; . \; . \; . \; /2/$$

Podstawiając do /1/ zamiast wyrażenia w liczniku nawiasu jego wartość z /2/ otrzymamy:

$$d\mathcal{L} = P.dr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; /3./$$

Taka jest więc praca elementarna siły centralnej. Znak jej zależy od znaków czynników P i dr.

Siła centralna może być odpychającą lub przyciągającą.

W pierwszym przypadku uważamy ją za dodatnią, w drugim za ujemną. Gdy r wzrasta, to dr jest dodatniem. Gdy zaś r maleje, to dr jest ujemne. W przypadku szczególnym, gdy r pozostaje stałem, to $dr = 0$ i praca $d\mathcal{L}$ jest zerem.

Przypuśćmy, że do nieruchomego punktu O jest przymocowany punkt A za pomocą sznura nierozciągalnego, to naprężenie tego sznura jest siłą centralną. Naprężenie to nie wykona jednak pracy, bo odległość OA nie ulega zmianie. Gdyby sznur był rozciągliwy, to naprężenie mogłoby wykonać pracę.

Rozwiązane zadanie jest szczególnym przypadkiem pewnego zadania ogólniejszego, do którego przystąpimy obecnie.

Niech będą dwa punkty A_1 i A_2, które mogą należeć do jednego ciała lub do różnych. Odległość między tymi punktami oznaczmy przez r. Przypuśćmy, że działają na nie dwie siły równe i odwrotnie skierowane, każda z nich niech będzie równa R. Znajdziemy sumę prac elementarnych tych sił R. Obierzmy w tym celu prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne punktów A_1 i A_2 w tym układzie przez x_1, y_1, z_1, i x_2, y_2, z_2, a kąty kierunkowe prostej A_1A_2 - przez α, β, γ. Praca elementarna $d\mathcal{L}_1$ siły P, przyłożonej w A_1, jest oczywiście, równa $d\mathcal{L}_1 = P\cos\alpha . dx_1 + P\cos\beta . dy_1 + P\cos\gamma . dz_1$

lub $$d\mathcal{L}_1 = P(\cos\alpha . dx_1 + \cos\beta . dy_1 + \cos\gamma . dz_1). \quad (4)$$

Tak samo dla siły P, przyłożonej w A_2 znajdziemy

$$d\mathcal{L}_2 = -P(\cos\alpha . dx_2 + \cos\beta . dy_2 + \cos\gamma . dz_2). \quad (5)$$

Dodając (4) i (5) otrzymamy:

$$d\mathcal{L}_1 + d\mathcal{L}_2 = P[(dx_1 - dx_2)\cos\alpha + (dy_1 - dy_2)\cos\beta + (dz_1 - dz_2)\cos\gamma]. \quad (6)$$

Wyrażeniu w nawiasie nadamy inną postać. Wiadomo, że

$r^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$, stąd po zróżniczkowaniu: $2r\,dr=2(x_1-x_2)(dx_1-dx_2)+2(y_1-y_2)(dy_1-dy_2)+2(z_1-z_2)(dz_1-dz_2)$,
a że $x_1-x_2=r\cos\alpha$; $y_1-y_2=r\cos\beta$; $z_1-z_2=r\cos\gamma$
więc $dr=(dx_1-dx_2)\cos\alpha+(dy_1-dy_2)\cos\beta+(dz_1-dz_2)\cos\gamma$
co podstawiając do (6) otrzymamy:

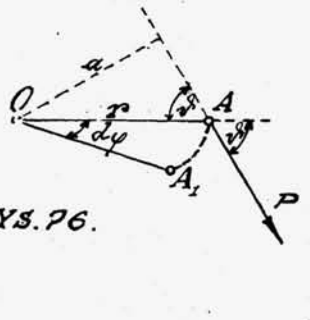
$$d\mathcal{L}_1+d\mathcal{L}_2=P\,dr \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Gdy siły P są odpychającymi, to uważamy je za dodatnie. Gdy zaś siły są przyciągającemi - to za ujemne. W przypadku, gdy r jest stałe , $dr=0$, i praca elementarna siły P jest zerem. Gdy punkt A_2 np. jest nieruchomy, to praca siły P przyłożonej w tym punkcie jest zerem i $d\mathcal{L}_1=P\,dr$

Z tego widać, że wzór (3) jest szczególnym przypadkiem wzoru (7).

78. Praca elementarna siły, której punkt przyłożenia obraca się dokoła osi.

Rozpatrzmy najpierw przypadek szczególny. Przypuśćmy mianowicie, że siła działa w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu. Niech oś obrotu będzie prostopadła np. do płaszczyzny rysunku i przecina ją w punkcie O , zaś siła P niech będzie przyłożona w punkcie A , odległym o r od O. Oznaczmy kąt $(\widehat{P,r})$

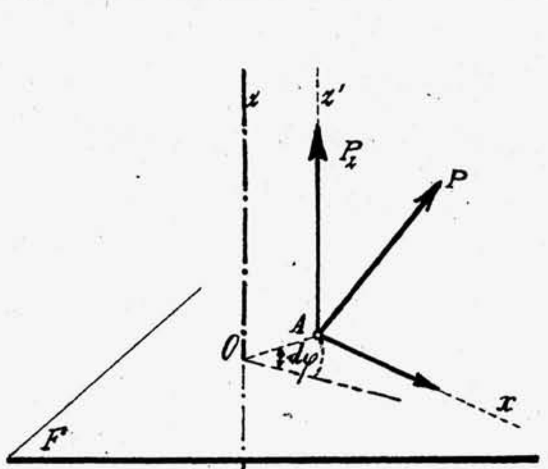


RYS. 76.

przez ϑ . Nadajmy punktowi A nieskończenie małe przesunięcie, a mianowicie obróćmy go o nieskończenie mały kąt $d\varphi = AOA_1$, około punktu O

Ponieważ droga punktu A jest równa $r.d\varphi$,a kąt między tą drogą a siłą P jest $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$, więc $dL = P.r.d\varphi.\sin\vartheta$

Poprowadźmy z punktu O prostopadłą do kierunku siły i długość tej prostopadłej oznaczmy przez a ; wtedy $a = r.\sin\vartheta$ i $dL = P.a.d\varphi$. Ale $P.a$ jest to moment M siły P względem punktu O ,więc $dL = M.d\varphi$, t.zn.praca elementarna siły jest w danym razie równa iloczynowi z momentu tej siły względem punktu O lub względem osi obrotu przez kąt obrotu dokoła osi. Kąt $d\varphi$ uważamy za dodatni, jeśli dla patrzącego z końca momentu punkt A obrócił się w kierunku ruchu wskaz. zegara.



RYS.77.

Zajmiemy się teraz przypadkiem ogólnym. Przypuśćmy, że punkt A ,na który działa siła P ,skierowana jakkolwiek w przestrzeni obrócił się około osi z o kąt $d\varphi$. Wyznaczyć pracę olementarną siły P.

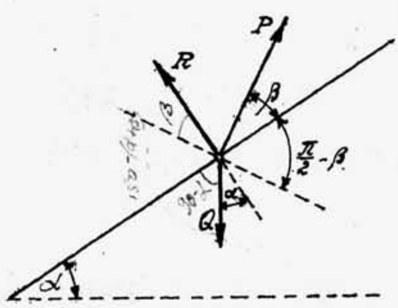
Poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu i przypuśćmy, że ta płaszczyzna przecina oś w punkcie O. Dalej przez prostą z', równoległą do z przechodzącą przez A oraz przez linię działania siły P poprowadźmy płaszczyznę. Przetnie ona płaszczyznę F według prostej, którą oznaczymy przez x. Rozłóżmy siłę P na składowe P_x i P_z w kierunku x i z'. Praca elementarna siły P jest równa sumie prac elementarnych sił P_x i P_z; lec praca elementarna siły P_z jest zerem, bo jest ona prostopadła do płaszczyzny F, a więc i do przesunięcia, a z tego wynika, że praca elementarna siły P jest równa pracy elementarnej składowej P_x czyli $d\mathcal{L} = M \cdot d\varphi$, gdzie M oznacza moment tej składowej względem punktu O, albo moment siły P względem osi z.

79. Twierdzenie. Przypuśćmy, że na punkt A działa układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ i dajmy na to, że te siły są w równowadze. W takim razie suma prac elementarnych tych sił na każdem przesunięciu jest zerem. Jest to prawie oczywiste. Istotnie: suma tych prac jest równa pracy elementarnej siły wypadkowej, ale ta wypadkowa jest zerem, więc praca przez nią wykonana także jest zerem.

Odwrotnie: jeżeli przy każdem przesunięciu suma prac elementarnych wszystkich sił, działających na punkt O jest zerem, to te siły są w równowadze.

Dajmy na to, że przy danem założeniu, siły P_1, $P_2, P_3, \ldots$ działające na punkt O posiadają wypadkową różną od zera. Gdy nadamy punktowi O nieskończenie małe przesunięcie w kierunku tej wypadkowej, to wykona ona pracę różną od zera, co jest sprzeczne z założeniem.

80. Przykłady: 1/ Na równi pochyłej zupełnie gładkiej i tworzącej z poziomem kąt α, leży ciężar Q, który chcemy utrzymać w równowadze za pomocą siły P, tworzącej z równią kąt β. Chodzi o wyznaczenie tej siły P. Prócz sił P i Q na ciężar działa także reakcya równi R; ponieważ równia jest całkowicie gładka, więc ta reakcya jest do równi prostopadła.



RYS. 78.

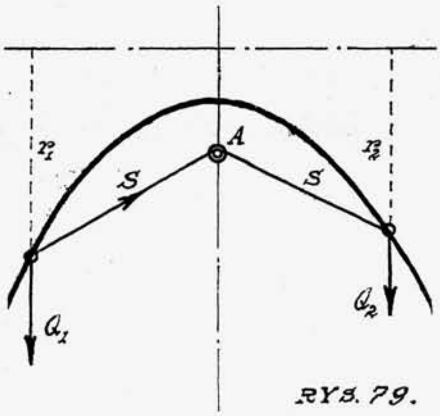
Te 3 siły P, Q i R są w równowadze, a z tego wynika, że przy wszelkiem przesunięciu suma ich prac elementarnych jest zerem. Aby nie wprowadzić nieznanej reakcyi R obierzmy kierunek przesunięcia tak, aby praca jej była przytem zerem. Takim kierunkiem jest linia największego spadku równi. Dajmy więc ciężarowi nieskończenie małe przesunięcie dx w tym kierunku. Praca siły P jest $P.dx.\cos\beta$, a praca siły Q wynosi $-Q.dx.\sin\alpha$, a więc

$P.dx.\cos\beta - Q.dx.\sin\alpha = 0$ skąd $P = \frac{Q.\sin\alpha}{\cos\beta}$.

Aby znaleźć reakcyę R musimy nadać ciężarowi jakieś inne przesunięcie, np. w kierunku prostopadłym do siły P. Przypuśćmy, że to przesunięcie jest równe dy. Łatwo znajdziemy, że:

$R.dy.\cos\beta - Q.dy.\cos(\alpha+\beta) = 0$, skąd $R = Q.\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$.

II/ Na gładki drut, wygięty w kształcie paraboli, której oś jest pionowa, a wierzchołek zwrócony ku górze, nawleczono 2 ciężkie pierścienie. W ognisku A paraboli umieszczono bloczek, przez który przerzucono sznur. Końce sznura przymocowano do pierścieni. Jakie powinny być ciężary Q_1 i Q_2 pierścieni, aby w położeniu równowagi ich odległości od ogniska były odpowiednio równe r_1 i r_2.



RYS. 79.

Poprowadźmy z każdego z pierścieni prostopadłą do kierownicy paraboli. Długości tych prostopadłych są równe odpowiednio także r_1 i r_2.

Na lewy pierścień działają siły: ciężar Q_1, naprężenie sznura S i reakcya drutu R /normalna do do drutu, bo jest on całkowicie gładki/. Tak samo na prawy pierścień działają: ciężar Q_2, naprężenie sznura S i reakcya normalna drutu R_2.

Każdy z pierścieni ma być w równowadze, a więc sumy prac elementarnych sił Q_1, S i R_1 oraz Q_2, S i R_2 muszą być zerami. Aby nie wprowadzać reakcyi R_1 i R_2 przesuniemy pierścienie na drucie, czyli w kierunkach normalnych do tych reakcyi. Przypuśćmy, że przytem promienie r_1 i r_2 otrzymują przyrosty dr_1 i dr_2. Praca siły Q_1 jest równa $Q_1 . dr_1$, gdyż rzut przesunięcia na kierunek siły $= dr_1$, a praca siły S wynosi $-S . dr_1$, gdyż jest to siła centralna; więc $Q_1 . dr_1 - S . dr_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$

Tak samo dla prawego pierścienia znajdziemy:

$$Q_2 . dr_2 - S . dr_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

z (1) mamy $Q_1 = S$, a z (2) — $Q_2 = S$ więc $Q_1 = Q_2$.

Z tego wynika, że ciężary pierścieni muszą być równe i że wówczas będą one w równowadze w każdem położeniu.

81. Ciała sztywne.

Dajmy na to, że na ciało sztywne na jednej prostej działają dwie siły P i P' jednakowo skierowane i równe. Dowiedziemy, że przy wszelkich przesunięciach prace elementarne tych sił są równe.

Jest to prawie oczywiste. Istotnie: wprowadźmy