$\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

MECHANIKA.

CZĘŚĆ I.

STATYKA.

WEDŁUG WYKŁADÓW
ZYGMUNTA STRASZEWICZA
W POLITECHNICE WARSZAWSKIEJ
1916 ROKU.

ROZDZIAŁ WSTEPNY

O SKALARACH i WEKTORACH.

1. Skalary. Wielkości, z któremi mamy do czynienia w mechanice, dadzą się podzielić na dwie kategorye: skalary i wektory.

Skalar jest to wielkość nie pozostająca w związku z żadnym określonym kierunkiem przestrzeni. Daje się ona całkowicie określić jedną parą jednostek znanych. Tak np. skalarem jest czas. Gdy powiedziano, że pewne wydarzenie trwało tyle a tyle godzin, czy minut, to czas trwania tego wydarzenia jest całkowicie określony Zamiast podawać liczbę można wskazać odcinek odpowiedniej skali. Skala taka urządza się na linji prostej, albo na jakiej innej linji. Pewna znana długość, odmierzona na tej linji, odpowiada obranej jednostce. Skal czasu urządza się najczęściej na okręgu koła i zazwyczaj godzinie odpowiada łuk, długości $\frac{\pi r}{6}$, gdzie r oznacza promień koła.

Prócz czasu do skalarów należą: masa, praca, sił żywa, potencjał i inne.

2. Wektory. Wektor jest to wielkość, pozostająca w związk z pewnym kierunkiem przestrzeni. Wektor nie daje się całkowicie określić za pomocą jednej liczby, gdyż trzeba jeszcze wskazać ów kierunek. Tak więc wektor należy określać pod względem wielkości i kierunku.

Prostym przykładem wektora jest przesunięcie jakiegoś drodnego przedmiotu, powiemy punktu ruchomego. Dajmy na to, że punkt ten zajmuje znane położenie A i wiadomo, że ma być przesunięty o 3 metry. Dane te nie określają jeszcze przesunięcia, gdyż na ich zasadzie nie umielibyśmy wskazać, gdzie znajduje się punkt ruchomy po dokonaniu przesunięcia. Wiadomo jedynie, że nowe położenie znajduje się gdzieś na powierzchni kuli, zatoczonej z punktu A, promieniem $3m$.

Jeżeli posługujemy się metodami analitycznemi, to określamy kierunek przesunięcia lub wogóle kierunek wektora tak, jak się to robi w geometryi analitycznej, tj. za pomocą stosownych kątów kierunkowych. Jeżeli stosujemy metody wykreślne, to określamy kierunek wektora odcinkiem prostej, na którym jeszcze wskazać potrzeba, w którą stronę jest zwrócony wektor. Jeżeli więc odcinek MN ma określać kierunek przesunięcia, to należy wskazać np. zapomocą strzałki czy przesunięcie ma się odbyć w stronę od M do N, czy też w stronę odwrotną. W przypadku pierwszym punkt M zowie się początkiem odcinka, a N – końcem.

Pod względem wielkości wektor określa się tak samo, jak skalar, a więc liczbą albo długością, wskazaną na skali. Dogodnie jest odznaczać tę długość na tym samym odcinku, który ma wskazywać kierunek, albo wprost nadawać odcinkowi temu taką właśnie długość. Odcinek taki określa wektor nietylko co do kierunku, ale i co do wielkości.

Przypuśćmy dla przykładu, że na przyjętej skali przesunięć, przesunięciu jednego metra odpowiada jeden centymetr. W takim razie przesunięcie, o którym wyżej była mowa, będzie całkowicie określone odcinkiem MN, wskazującym kierunek przesunięcia i posiadającym długość $3\ cm$.

Do kategoryi wektorów należą: siła, moment, szybkość, przyspieszenie i t.d.

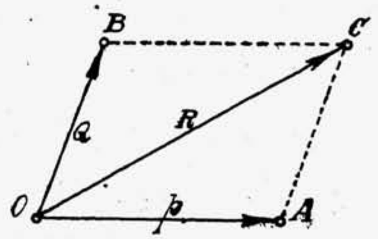
3. <u>Rodzaje wektorów.</u> Przesunięcie punktu ruchomego z danego położenia A nazywamy <u>wektorem, związanym z punktem A.</u> Umówiono się obierać początek odcinka MN, który ma określać przesunięcie, właśnie w tym punkcie A. Tym sposobem, mając dany odcinek MN, nietylko znamy przesunięcie co do wielkości i kierunku, ale wiemy jeszcze z jakiego położenia wyrusza punkt przesuwany.

Przypuśćmy teraz, że chodzi o przesunięcie nie punktu, lecz cienkiego i prostego pręta, powiedzmy linji prostej w kierunku tejże prostej. Oczywiście wszystkie punkty tej prostej doznają jednakowych przesunięć zarówno pod względem wielkości, jak i kierunku. Gdy znamy przesunięcie jednego punktu, to znamy przesunięcia wszystkich innych, a zatem takie przesunięcie prostej możemy całkowicie określić za pomocą jednego odcinka. Początek tego odcinka obierzemy naturalnie w jednym z punktów przesuwanej prostej, w którymkolwiek, bo żaden nie wyróżnia się z pośród ogółu. Oczywiście i cały odcinek będzie leżał na tej prostej. Takie przesunięcie prostej wzdłuż tej prostej nazywamy wektorem, związanym z tą prostą.

Dajmy teraz na to, że przesuwa się cała bryła, przy czem wszystkie jej punkty doznają przesunięć jednakowych zarówno co do kierunku, jak i co do wielkości. Początek odcinka, określającego takie przesunięcie możemy obrać w dowolnym punkcie bryły, albo nawet w dowolnym punkcie przestrzeni, uważając, że bryła rozciąga się w przestrzeni nieograniczenie. Takie przesunięcie bryły nazywa się wektorem swobodnym.

Wektory wogóle dzielą się na trzy kategorye. wektory, związane z punktami, wektory związane z prostemi i wektory swobodne. Wektor związany z punktem lub raczej odcinek, określający ten wektor, posiada zupełnie określone położenie w przestrzeni. Wektor związany z prostą musi pozostawać na pewnej określonej prostej, ale możemy go na niej przenosić dowolnie, wektor swobodny możemy dowolnie przenosić w przestrzeni.

4. Suma geometryczna. W zakres mechaniki wchodzą zagadnieni w których mamy pewną liczbę wektorów oraz innych danych a chodzi o wyznaczenie nowego wektora, czyniącego zadość pewnym określonym warunkom. Zagadnienia tego rodzaju da-



RYS. 1.

ją się często sprowadzić do pewnych działań typowych, które mamy właśnie poznać.

Niech będą dwa wektory $P=OA$ i $Q=O$ mające wspólny początek O. Mogą to być wektory, związane z punktem O, albo wektory związan z prostemi OA i OB, albo wreszcie wektory swobodne. Wy znaczmy nowy wektor R w sposób następujący: prowadzimy z końca B wektora Q odcinek BC, równy i równoległy do OA. Otóż początkiem wektora R ma być punkt O, a końcem punkt C.

Wyznaczenie takiego wektora R nazywa się dodawani geometrycznem, albo wektorem wypadkowym, albo wreszcie wprost wypadkową wektorów P i Q a te dwa ostatnie wektorami składowymi wektora R. Pisze się symbolicznie

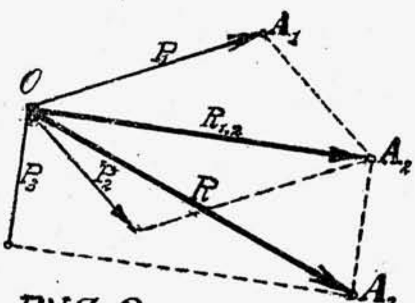
$$R=P+Q \quad ;$$

W równaniu tem znaki $=$ i $+$ mają inne znaczenie niż w algebrze zwykłej, czyli w algebrze skalarów.

Z figury wynika bezpośrednio, że moglibyśmy otrzymać wektor R, prowadząc z punktu A odcinek równy i rów nolegly do OB, a zatem wektory składowe są równouprawnione i w sumie $P+Q$ porządek składników nie odgrywa nej roli.

Wyrazimy to symbolicznie pisząc:

Wektor wypadkowy R można także wyznaczyć, jako przekątnię równoległoboku, zbudowanego na wektorach składowych.



RYS. 2

Niech teraz będą trzy wektory P_1, P_2, P_3, posiadające wspólny początek O i położone jakkolwiek w przestrzeni /a więc niekoniecznie w jednej płaszczyźnie/.

Wyznaczmy nowy wektor R w sposób następujący: z końca A_1 wektora P_1 prowadzimy odcinek A_1A_2 równy i równoległy do wektora P_2, a następnie punktu A_2 prowadzimy A_2A_3, równe i równoległe do P_3. Początkiem szukanego wektora R ma być O, a końcem A_3. Wektor R zowie się sumą geometryczną albo wektorem wypadkowym wektorów: P_1, P_2, P_3 —, które nazywamy składowymi.

Piszemy:

$$R = P_1 + P_2 + P_3$$

by więc otrzymać wektor wypadkowy należy utworzyć wielobok $OA_1A_2A_3$, którego boki są odpowiednio równoległe do wektorów składowych.

Łatwo się przekonać, że porządek, w którym następują po sobie te boki, nie wywiera wpływu na wynik ostateczny. RYS. 2 widać, że $R = R_{1,2} + P_3$ gdzie $R_{1,2} = P_1 + P_2$ ecz otrzymalibyśmy tę samą sumę $R_{1,2}$, prowadząc z końca wektora P_2 odcinek równy i równoległy do P_1, a więc zamiana pomiędzy bokami OA_1 i A_1A_2 nie wywiera wpływu na sumę ostateczną. Można również uczynić zamianę pomiędzy bokami A_1A_2 i A_2A_3, czyli pomiędzy składnikami P_2, P_3, co nie wpłynie na sumę R. Oczywiście odcinek A_1A_3 jest równy i równoległy do sumy wektorów P_2, P_3, którą oznaczymy przez $R_{2,3}$, a zatem R można uważać za sumę wektorów P_1 i $R_{2,3}$; lecz otrzymalibyśmy ten sam odcinek A_1A_3 równy i równoległy do P_2, prowadząc naprzód z A_1 odcinek równy i równoległy do P_3, a następnie z końca tego odcinka odcinek równy i równoległy do P_2. Powiedzmy krótko, że suma geometryczna $P_1+P_2+P_3$ nie zależy od porządku składników.

Tak samo zupełnie tworzy się suma geometryczna czterech, pięciu i więcej wektorów i sumy te nie zależą również od porządku składników.

Jeżeli wszystkie wektory składowe są położone na jednej prostej, to i wektor wypadkowy będzie leżał na tejże prostej i będzie równy sumie algebraicznej wektorów składowych. Tak więc sumę algebraiczną możemy uważać za szczególny przypadek sumy geometrycznej.

Często bardzo wypada rozwiązywać zagadnienia odwrotnie: dany jest wektor R, wyznaczyć pewną liczbę wektorów $P_1, P_2, P_3, \ldots$ dla których R jest sumą geometryczną czyli, innemi słowy, rozłożyć wektor R na wektory składowe

$P_1, P_2, \ldots$ Mogą być przytem postawione jeszcze inne warunki, którym szukane wektory składowe mają czynić zadość.

O sumie geometrycznej dwuch wektorów może być mowa tylko w tym razie, gdy wektory te posiadają wspólny początek. Z tego wynika, że wektory, związane z punktami mają sumę geometryczną tylko w tym razie, gdy te punkty leżą razem; wektory związane z prostemi posiadają sumę, gdy te proste przechodzą przez jeden punkt, albo leżą w jednej płaszczyźnie; wektory swobodne zawsze mają sumę

Rzuty wektorów. W mechanice często mamy do czynienia z prostokątnymi rzutami wektorów na płaszczyzny i proste.

Rzut taki możemy zawsze uważać za wektor, którego początek i koniec są rzutami początku i końca wektora rzucanego czyli oryginału.

Niech będą wektory $P_1, P_2, \ldots$ posiadające wspólny początek O lecz położone jakkolwiek w przestrzeni (RYS. 2) Utworzmy wielobok OA_1A_2 i wyznaczmy wektor wypadkowy R. Obierzmy następnie dowolną płaszczyznę rzutów i zbudujmy rzut całej figury na tej płaszczyźnie. Części składowe rzutu będziemy oznaczać temi samemi literami, co odpowiednie części oryginału, kreskując je dla odróżnienia Ponieważ rzuty prostokątne dwuch odcinków, równych i równoległych, są równe i równoległe, przeto odcinek $A_1'A_2'$ będzie równy wektorowi P_2' i równoległy do niego, odcinek $A_2'A_3'$ do P_3' i t.d. Stąd wynika, że wektor R' będzie sumą geometryczną wektorów $P_1', P_2', \ldots$ A zatem rzut wektora wypadkowego na płaszczyznę jest sumą geometryczną rzutów wektorów składowych .

Uczyńmy teraz rzut tej samej figury (2) na dowolnie obraną oś rzutów. Na osi tej będziemy odróżniali kierunek dodatni od ujemnego, jak to się dzieje w geometryi analitycznej. Jeżeli rzut wektora jest zwrócony w stronę dodatnią, to będziemy go uważali za dodatni, w razie przeciwnym za ujemny.

Widać bezpośrednio z figury, że R' co do wielkości i znaku równa się sumie algebraicznej odcinków $O'A_1', A_1'A_2', \ldots$ gdzie porządek liter określa znak, który składnikowi przypisać należy. Jeżeli np. punkt A_2' leży po stronie dodatniej punktu A_1' to odcinek $A_1'A_2'$ uważamy za dodatni, w razie przeciwnym za ujemny. Lecz $O'A_1' = P_1'$ odcinek $A_1'A_2'$ jest równy co do wielkości i zgodny co do kierunku z P_2' i t.d., a zatem rzut wektora wypadkowego na oś jest równy sumie algebraicznej rzutów wektorów składowych. Twierdzeniu temu nadamy postać równania algebraicznego. W tym celu zawrzemy naprzód umowę następującą: jeżeli mamy dwie proste, na których odróżniamy kierunki, to za kąt pomiędzy niemi będziemy uważali ten z dwuch kątów przyległych którego obydwa boki biegną od wierzchołka..

Oznaczmy teraz przez $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ katy pomiędzy wektorami $P_1, P_2, \ldots, P_r$ i osia rzutów.. W takim razie rzuty tych wektorów na oś będą zarówno co do wielkości bezwzględnej, jak i znaku odpowiednio równe: $P_1 \cos\alpha_1, P_2 \cos\alpha_2, \ldots P_r \cos\alpha$

i twierdzenie powyższe wyrazi się tak: $R\cos\alpha_r = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 ...$

lub krócej $R\cos\alpha_r = \Sigma P\cos\alpha$.

5 Metoda analityczna sumowania. Na drugiem twierdzeniu paragrafu poprzedzającego jest oparta metoda analityczna wyznaczania wektora wypadkowego.

Mamy więc wyznaczyć pod względem wielkości kierunku wektor wypadkowy danych wektorów $P_1, P_2, ...$ posiadających wspólny początek O. Obierzmy punkt O za początek prostokątnego układu współrzędnych x, y, z i oznaczmy odpowiednio przez $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), ...$ kąty, które dane wektory tworzą z osiami, czyli ich kąty kierunkowe. Szukany wektor wypadkowy oznaczymy przez R, a jego rzuty na osi przez R_x, R_y, R_z. Na zasadzie wzmiankowanego twierdzenia będzie

$$R_x = \Sigma P\cos\alpha \quad R_y \ \Sigma P\cos\beta \quad R_z \ \Sigma P\cos\gamma$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Oznaczmy jeszcze przez $(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$ kąty kierunkowe wektora R. Znajdziemy że $\cos\alpha_r = \frac{R_x}{R}$; $\cos\beta_r = \frac{R_y}{R}$; $\cos\gamma_r = \frac{R_z}{R}$

Znając $R, \alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ znamy wektor wypadkowy co do wielkości i kierunku.

. Rzut trójkąta. W dalszym ciągu będą użyteczne pewne twierdzenia geometryczne, które przytoczymy na tem miejscu.

Niech będzie trójkąt ABC i jego rzut $A'B'C'$ na jakąkolwiek płaszczyznę F. Oznaczmy przez S i S' pola oryginału i rzutu, a przez α kąt pomiędzy płaszczyzną trójkąta i płaszczyzną F, dowiedziemy, że

$$S' = S.\cos\alpha$$

Rozważmy naprzód przypadek szczególny, gdy jeden z boków trójkąta np. AB jest równoległy do F. Jeżeli CD jest wysokością oryginału to $C'D'$ jest wysokością rzutu i $S' = \frac{1}{2} A'B'.C'D'$ Lecz $A'B' = AB$ $C'D' = CD.\cos\alpha$, zatem $S' = \frac{1}{2}AB.CD.\cos\alpha = S' = S\cos\alpha$. c.b.d.d.

Przypuśćmy teraz, że trójkąt ABC ma położenie jakiekolwiek. Poprowadźmy przez wierzchołek A płaszczyznę równoległą do F; przetnie ona bok BC w punkcie D i prosta AD będzie równoległa do F. Oznaczmy teraz przez S_1 i S_2 pola trójkątów ABD i ACD a przez S_1' i S_2' pola ich rzutów. Na zasadzie powyższego będzie $S_1' = S_1\cos\alpha$; $S_2' = S_2\cos\alpha$; skąd otrzymamy związek żądany. Twierdzenie powyższe daje się bardzo łatwo uogólnić.

Przypuśćmy naprzód, że S i S' są polami dowolnego wieloboku i jego rzutu na płaszczyznę F. Wielobok możemy podzielić na trójkąty i stosując dowiedzione twierdzenie do każdego z nich i dodając otrzymane równania, otrzymamy znowu $S' = S\cos\alpha$.

Gdy granicę figury płaskiej stanowi linia krzywa, to możemy uważać taką figurę za wielobok o nie -

skończenie krótkich bokach, a zatem twierdzenie nasze rozciąga się do wszystkich figur płaskich.

8 Moment względem punktu. W teoryi wektorów obok dodawania zasadniczą role odgrywają dwa działania inne. Wynikiem jednego z nich jest wektor zwany iloczynem wektorowym, a wynikiem drugiego skalar, zwany iloczynem skalarowym. Działania te wyłozymy jedynie w tej postaci, w której będą nam potrzebne w dalszym ciągu, nie będziemy nawet używali powyzszych zasad ogólnych posługując się zamiast tego nazwami moment i praca, uzywanemi częściej w technice..

Działanie pierwsze rozważymy na tem miejscu, o drugiem będzie mowa później.

Niech bedzię wektor $P=AB$ związany z punktem lub prostą, i niech bedzie prócz tego punkt O. Poprowadźmy przez O prostą, prostopadłą do płaszczyzny OAB. Gdy spojrzymy z jakiegoś punktu C tej prostej na płaszczyznę OAB, to zobaczymy, ze wektor P jest, dajmy na to, zwrócony w tę strone w którą posuwa się koniec wskazówki zegarowej, obracając się około punktu O. Gdybyśmy patrzyli na OAB z innego punktu tejże prostej, położonego po odwrotnej stronie płaszczyzny, to dla nas zwrot wektora P byłby odwrotny do biegu wskazówki zegarowej.

Odetnijmy od punktu O w stronę C Pp umówionych jednostek długości, gdzie p oznacza odległość wektora P