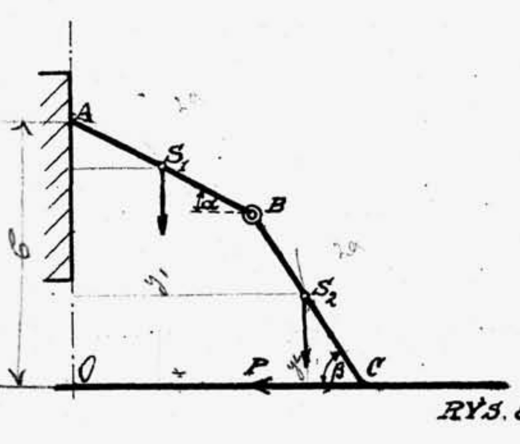
prace ich będą równe i odwrotne. Z tego wynika, że suma prac elementarnych reakcji w przegubach jest zerem. A więc i tego rodzaju reakcje można pomijać.

4/ Przypuśćmy wreszcie, że dwa ciała układu są połączone w punktach A_1 i A_2 sznurem nierozciągalnym. W punkcie A_1 i A_2 działają więc naprężenia sznura równe i odwrotne. Przy dozwolonem przesunięciu odległość A_1A_2 nie ulega zmianie, a więc i suma prac elementarnych sił S jest zerem. Z tego wynika, że takie siły S można pomijać.

87. Przykłady. 1/ W punkcie A pionowej gładkiej ściany jest zawiasa, około której może się obracać sztaba AB. Ta sztaba jest połączona przegubowo z inną sztabą BC, która końcem C opiera się o gładką podłogę. Długość każdej sztaby jest $=2a$, a ciężar każdej Q kg. Środki ciężkości sztab oznaczamy przez S_1 i S_2 /sztaby są jednorodne/. Sztaba AB tworzy z poziomem kąt α, a sztaba BC - kąt β. Oznaczmy jeszcze odległość punktu A od podłogi przez b. Aby równowaga sztab w opisanym położeniu była zachowana



RYS. 83.

przykładamy do punktu C poziomą siłę P; mamy wyznaczyć tę siłę. Na układ złożony ze sztab AB i BC działają siły P, Q /w S_1/ i Q /w S_2/ a prócz tego różne cya podłogi w punkcie C i reakcye w przegubie B.

Ale żadna z tych reakcyi nie wykona pracy przy przesunięciu dozwolonym, a więc trzeba się rachować tylko z siłami P, Q /w S_1/ i Q /w S_2/. Gdy nadamy układowi przesunięcie dozwolone /przy tem punkt C będzie się poruszał po podłodze/ i jeśli oznaczymy odległości punktów S_1 i S_2 od podłogi przez y_1 i y_2, w odległości OC przez x, to suma prac elem. sił przy tem przesunięciu będzie: $-P.dx - Q.dy_1 - Q.dy_2$ lub: $P.dx + Q.(dy_1 + dy_2) = 0$ ale $dy_1 + dy_2$ jest to różniczka od $(y_1 + y_2)$, a więc

$$P.dx + Q.d(y_1 + y_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wyrazimy x, y_1, y_2 w funkcyi α i β. Długość x jest oczywiście równa rzutowi figury ABC na podłogę, a więc: $x = 2.a.\cos\alpha + 2a.\cos\beta = 2.a.(\cos\alpha + \cos\beta)$ skąd $dx = -2a(\sin\alpha.d\alpha + \sin\beta.d\beta)$ . . . . (2)

Tak samo y_1 jest rzutem figury CBS_1; a y_2 rzutem CS_2 na ścianę, więc $y_1 = a.(\sin\alpha + 2\sin\beta)$ . . (3)

$$y_2 = a.\sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Zaś dodając (3) i (4) otrzymamy $y_1 + y_2 = a(\sin\alpha + 3\sin\beta)$ skąd $d(y_1 + y_2) = a.(\cos\alpha.d\alpha + 3.\cos\beta.d\beta)$ . . . (5)

Podstawiając (2) i (5) do (1) znajdziemy

$$(Q.\cos\alpha - 2.P.\sin\alpha).d\alpha = (2P.\sin\beta - 3Q.\cos\beta).d\beta \quad . \quad . \quad (6)$$

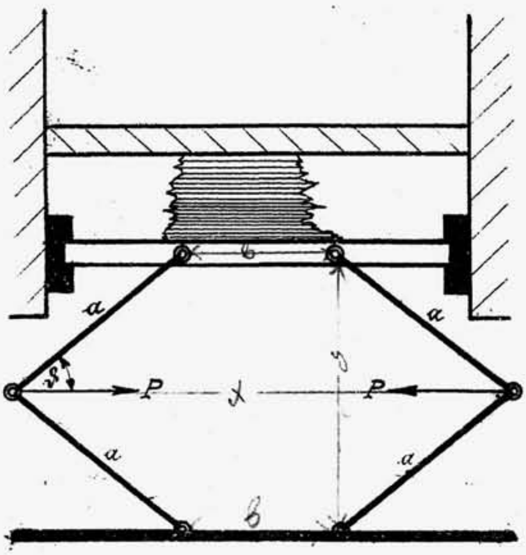
Znajdźmy jeszcze zależność kątów α i β. W tym celu weźmy rzut figury ABC na kierunek pionowy, otrzymamy: $2 \cdot a \cdot \sin\alpha + 2 \cdot a \cdot \sin\beta = b$ skąd $\cos\alpha\, d\alpha = \cos\beta \cdot d\beta$ stąd i z (6) otrzymamy: $P = \dfrac{Q}{tg\beta - tg\alpha}$

Gdy $\beta = \frac{\pi}{2}$, to $P = 0$, a więc w tym razie równowaga zachodzi sama przez się.

Gdy chcemy znaleźć, jaką siłę należy przyłożyć w C, aby sztaby tworzyły linię prostą, to zakładamy $\alpha = \beta$, a wtedy $P = \infty$.

Żadna siła nie może więc utrzymać w tym razie równowagi.

II/ Prasa kolankowa składa się z poziomej belki lub płyty posiadającej na końcach suwaki, które mogą się ślizgać po pionowych ścianach. Całe urządzenie jest symetryczne względem płaszczyzny pionowej. Na belce są umieszczone dwie zawiasy, w których są osadzone dwie jednakowe sztaby. Końce tych sztab łączą się za pomocą przegubów z dwiema takiemi samemi sztabami, których końce są osadzone w zawiasach urządzonych pionowo pod górnemi. Pomiędzy płytę su-



RYS. 84.

wającą się a drugą płytą nieruchomą wstawia się ciało, które ma być sprasowane, a następnie naciskamy na przeguby. Wskutek tego sztaby będą miały tendencję do wyprostowania się, co spowoduje zgniecenie ciała.

Przypuśćmy, że każda ze sztab ma długość a i tworzy z poziomem kąt ϑ. Chodzi o to, z jakimi siłami poziomemi P trzeba działać na przeguby, aby wywrzeć na ciało siłę Q.

Oznaczmy odległość zawias dolnych od górnych przez y, odległość przegubów przez x, a odległość /stałą/ między zawiasami dolnemi /lub górnemi/ przez b.

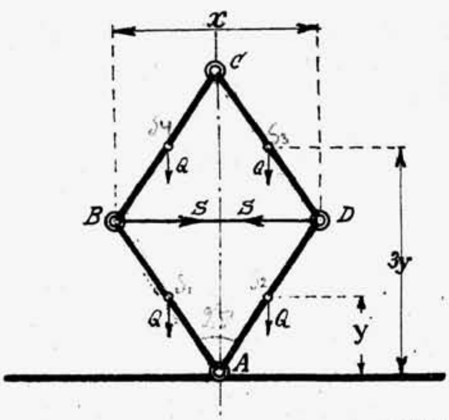
Gdy nadamy układowi przesunięcie dozwolone, to będziemy musieli się rachować tylko z pracą sił P i Q. Suma tych prac jest równa $-Q.dy - P.dx = 0$ . . /1/
Wyraźmy x i y w funkcyi ϑ. Ponieważ x jest to suma rzutów sztab na kierunke poziomy plus odległość b, więc: $x = b + 2.a.\cos\vartheta$ . . . . . . /2/
Tak samo y, jako suma rzutów sztab na kierunek pionowy jest równe: $y = 2.a.\sin\vartheta$ . . . . . . /3/
Z /2/ i /3/ mamy $dx = -2.a\sin\vartheta.d\vartheta$

$$dy = 2.a.\cos\vartheta.d\vartheta$$

Podstawiając te wartości w /1/ otrzymamy: $P = \frac{Q}{tg\vartheta}$.

Gdy ϑ jest $< \frac{\pi}{4}$, to $tg\vartheta$ jest > 0 i $P < Q$.

III/ Cztery sztaby jednakowe AB, BC, CD, DA są połączone gładkimi przegubami w punktach A, B, C i D, tworzą więc romb. Każda ze sztab waży Q kg. Romb ustawiony jest tak, że jego przekątnia AC jest pionowa i punkt A opiera się na podstawie poziomej. W tem położeniu nie zachodzi równowaga, ale aby ona miała miejsce połączono nierozciągalnym sznurem punkty B i D. Chodzi o wyznaczenie naprężeń S działających w sznurze BD.



RYS. 85

Musimy nadać układowi takie przesunięcie, aby naprężenia S wykonały pracę. W tym celu jest rzeczą konieczną oddalić lub zbliżyć punkty B i D, a ponieważ sznur jest nierozciągalny, więc to przesunięcie jest wyobrażalne. Przypuśćmy, że punkty B i D oddaliły się. W takim razie pracę wykonają tylko naprężenia S i ciężary Q.

Oznaczmy odległość BD przez x, a odległość pionową S_2 od A przez y. Przy wymienionem przesunięciu x wzrośnie o dx, a y o dy.

Siły Q (w S_1 i S_2) wykonają pracę $-2Q.dy$, zaś siły Q (w S_3 i S_4) $-2.3.Q.dy$. Siły S jako centralne, wykonają pracę $S.dx$. Więc:

$$-2Q.dy-2.3.Q.dy-S.dx=0$$

skąd $$-S.dx-8Q.dy=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Oznaczmy dany kąt między BA i AD przez 2ϑ.

Ponieważ x jest to suma rzutów sztab na kierunek poziomy a $4y$ - na pionowy, więc $x=2a\sin\vartheta$, $y=\frac{a}{2}\cos\vartheta$. Stąd $dx=2a.\cos\vartheta.d\vartheta$, $dy=-\frac{a}{2}\cdot\sin\vartheta.d\vartheta$. Stąd i z (1.) otrzymamy $S=2Q.tg\,\vartheta$.

<u>88. Równowaga trwała i chwiejna.</u> Niech będzie jakikolwiek układ złożony z ciał $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Środki ciężkości tych ciał oznaczmy przez $S_1, S_2, S_3, \ldots$, zaś ciężary ich przez $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ Przypuśćmy, że układ ten jest taki, że przy przesunięciu dozwolonym pracę wykonywają tylko siły ciążenia.

Poprowadźmy jakąkolwiek płaszczyznę poziomą; oznaczmy ją przez F, a odległość punktów $S_1, S_2, \ldots$ od niej przez $y_1, y_2, \ldots$ Gdy nadamy układowi nieskończenie małe przesunięcie, to suma prac elementarnych sił ciężkości będzie:

$$-Q_1.dy_1-Q_2.dy_2-Q_3.dy_3-\ldots \qquad (1)$$

i ta suma jest zerem jeśli układ jest w równowadze.

Przypuśćmy, że masy ciał układu są: $m_1, m_2, \ldots$ więc

$$Q_1=m_1.g\,;\; Q_2=m_2.g\,;\; Q_3=m_3.g\,;\; \ldots \qquad (2)$$

/g oznacza tu współczynnik proporcyonalności/.

Gdy do wyrażenia (1) przyrównanego do zera pod stawimy zamiast $Q_1, Q_2, \ldots$ ich wartości z (2) to otrzymamy:

$$m_1 . dy_1 + m_2 . dy_2 + m_3 . dy_3 + \ldots = 0$$

albo, ponieważ $m_1, m_2, \ldots$ są to wielkości stałe

$$d(m_1 . y_1) + d(m_2 . y_2) + d(m_3 . y_3) + \ldots = 0$$

Ale suma różniczek jest równa różniczce sumy, więc:

$$d(m_1 . y_1 + m_2 . y_2 + m_3 . y_3 + \ldots) = 0$$

Wyrażenie, stojące w nawiasie, przedstawia moment statyczny układu względem płaszczyzny F. Możemy temu momentowi nadać inną postać. Oznaczmy w tym celu środek ciężkości całego układu przez S odległość jego od płaszczyzny F przez y_0 a masę całego układu przez M, to jak wiadomo:

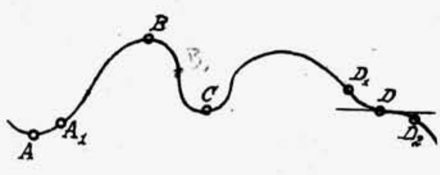
$M y_0 = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 . y_3 + \ldots$ więc $d(M y_0) = 0$

a że M jest stałą, to $dy_0 = 0$.

A więc aby układ ciał był w równowadze koniecznym jest, aby $dy_0 = 0$. Jak sobie wytłomaczyć otrzymany wynik?

Przypuśćmy, że układ posiada tylko jeden stopień swobody, t. zn., że podczas ruchu każdy punkt musi pozostawać na jednej określonej linii. Toż samo dotyczy i środka ciężkości układu. Pozostaje on na pewnej linii i równowaga układu zachodzi, gdy $dy_0 = 0$, czyli gdy wielkość y_0 osiąga maksymum lub minimum, lub innemi słowy, gdy środek ciężkości układu zajmuje położenie najwyższe lub najniższe. Jeśli istnieje jeden stopień swobody, to położenie układu daje się określić za pomocą jednej znanej wielkości. Wielkość tę nazywamy współrzędną układu. Dajmy na to, że pewien kąt ϑ jest taką współrzędną. Wtedy położenie środka ciężkości układu zależy tylko od kąta ϑ czyli $y_0 = f(\vartheta)$. Jeśli pragniemy znaleźć położenie równowagi układu, to trzeba znaleźć wartość ϑ z równania $f'(\vartheta) = 0$ i ten kąt wyznaczy całkowicie szukane położenie.

Zachodzi zasadnicza różnica między przypadkiem gdy y_0 osiąga maksymum i gdy osiąga minimum. Różnica ta jest natury dynamicznej i tylko na zasadzie rozważań dynamicznych da się ściśle uzasadnić. Będziemy musieli poprzestać na dowodzie mniej ścisłym.



RYS. 86.

Przypuśćmy, że środek ciężkości układu zajął położenie najniższe w A. Gdy nadamy układowi małe przesunięcie, to środek ciężkości jego dojdzie do wyższego położenia A_1. Zostawmy następnie układ samemu sobie. Nie zostanie on wtedy w równowadze, a zacznie się poruszać i będzie opadał. Jego środek ciężkości będzie się zbliżał do położenia A czyli do położenia równowagi. Mówimy, że w położeniu tem równowaga jest trwała.

Przypuśćmy teraz, że środek ciężkości układu zajął położenie najwyższe: w punkcie B . Gdy nadamy układowi małe przesunięcie, to środek ciężkości zajmie niższe położenie B_1 . Jeśli pozostawimy układ samemu sobie, to bynajmniej nie będzie on dążył do pierwotnego położenia równowagi, ale będzie się od niego odchylał. Mówimy wtedy o równowadze nietrwałej lub chwiejnej. Gdy tor środka ciężkości posiada punkt przegięcia D , to również zachodzi równowaga. Jeśli przesuwamy środek ciężkości z punktu D do D_1 , to chociaż będzie on usiłował wrócić do punktu D , jednak wracając nie zatrzyma się w tym położeniu, ale przejdzie przez nie i będzie się dalej zachowywał tak, jak w przypadku równowagi chwiejnej.

Gdy torem środka ciężkości jest prosta pozioma, to $dy/_{o}$ stale jest zerem, a z tego wynika, że układ wciąż jest w równowadze trwałej. Mówimy wtedy o równowadze obojętnej.

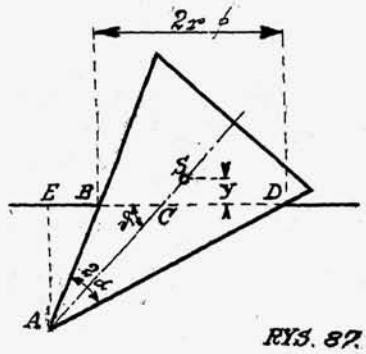
Z powyższych rozważań wynika, że równowaga układu jest trwała, gdy środek ciężkości tego układu zajmuje położenie najniższe. Ale każde ciało można uważać za układ, złożony z cząsteczek sztywnych, a więc twierdzenie to dotyczy i takich ciał niesztywnych, jak płyny, sznury i t.d.

Niech więc będzie ciężki sznur jednorodny lub łańcuch, zawieszony w punktach A i B. Gdy jest on w równowadze, to tworzy łańcuchową pospolitą. Oznaczmy długość sznura przez l. Pomiędzy punktami A i B można poprowadzić nieskończenie wiele linii o długości l i sznur może utworzyć każdą z nich, ale w równowadze jest tylko wtedy, gdy tworzy katenoidę pospolitą. Z tego wnosimy, że z tych wszystkich linii katenoida posiada najniżej położony środek ciężkości

Poprowadźmy jeszcze jakąś prostą x, nie przecinającą żadnej z tych linii o długości l i obróćmy całą figurę dokoła tej prostej, to utworzy się szereg powierzchni.- Na zasadzie twierdzenia Guldina wielkość każdej z tych powierzchni jest równa długości tworzącej, równej l, pomnożonej przez drogę środka ciężkości. Ale środek ciężkości katenoidy pospolitej leży najniżej, a więc najbliżej prostej a z tego wynika, że powierzchnia zatoczona przez taką katenoidę jest mniejszą od powierzchni zatoczonej przez każdą inną linię o długości l.

89. Przykład. W okrągły otwór, zrobiony w płycie poziomej, wstawiono gładki prosty stożek kołowy,

o wysokości h i kącie przy wierzchołku 2α. Średnica otworu jest równa $2r$. Wyznaczyć położenie równowagi stożka. Położenie to daje się określić za pomocą jednej wielkości np. za pomocą kąta osi stożka z poziomem. Oznaczmy ten kąt przez ϑ. Wiadomo, że środek ciężkości S



Rys. 87.

stożka leży na jego wysokości w odległości $\frac{1}{4}$ od podstawy. Oznaczmy odległość tego środka od płyty przez y i znajdźmy y w funkcyi ϑ.

Z wierzchołka A stożka poprowadźmy, prostopadłą do płyty i spodek tej prostopadłej oznaczmy przez E. Rzutem AS na kierunek pionowy jest $y+AE$, a że: $AS=\frac{3}{4}h$, więc $y+AE=\frac{3}{4}h.\sin\vartheta$. . . (1.)

AE z trójkąta AED jest równe $AE=AD.\sin(\vartheta-\alpha)$

Zaś z trójkąta ABD mamy $\frac{AD}{2r}=\frac{\sin(\vartheta+\alpha)}{\sin 2\alpha}$

Z tego wynika, że $AE=\frac{2.r.\sin(\vartheta+\alpha).\sin(\vartheta-\alpha)}{\sin 2\alpha}$

Podstawiając tę wartość do (1.) otrzymamy:

$$y=\frac{3}{4}h\sin\vartheta-\frac{2r.\sin(\vartheta+\alpha).\sin(\vartheta-\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

Znajdźmy przy jakich wartościach ϑ, y osiąga maksymum lub minimum

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}h\cos\vartheta-2r\left[\frac{\sin(\vartheta-\alpha).\cos(\vartheta+\alpha)+\cos(\vartheta-\alpha).\sin(\vartheta+\alpha)}{\sin 2\alpha}\right]$$

Po uproszczeniu wypadnie:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}h.\cos\vartheta-\frac{2.r.\sin 2\vartheta}{\sin 2\alpha}$$

Przyrównajmy tę pochodną do zera:

$$\cos\vartheta\cdot\left(\frac{3h}{4}-\frac{4r\cdot\sin\vartheta}{\sin 2\alpha}\right)=0$$

i jako odpowiedzi otrzymujemy: 1/ $\cos\vartheta=0$, skąd $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, albo 2/ $\frac{3h}{4}-\frac{4r\sin\vartheta}{\sin 2\alpha}=0$, skąd $\sin\vartheta=\frac{3h\sin 2\alpha}{16r}$

Jeśli temu ostatniemu równaniu czyni zadość kąt γ , to czyni też zadość $\pi-\gamma$, a więc ogółem otrzymujemy 3 położenia równowagi. Ale zachodzi pewne ograniczenie. We wzorze na $\sin\vartheta$ licznik musi być mniejszy od mianownika, a więc $16r>3h.\sin 2\alpha$ gdy $3h.\sin 2\alpha>16r$, to istnieje tylko jedno położenie równowagi.

Chodzi jeszcze o to, czy znalezione położenia równowagi są trwałe czy też chwiejne. W tym celu znajdziemy drugą pochodną y względem ϑ. Znajdziemy

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2}=-\frac{3h\sin\vartheta}{4}-\frac{4.r\cos 2\vartheta}{\sin 2\alpha}$$

Jeśli w tym wzorze założymy $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, to otrzymamy

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2}=-\frac{3h}{4}+\frac{4r}{\sin 2\alpha}$$

Gdy to wyrażenie jest dodatnie, to y osiągnęło minimum, a więc położenie równowagi jest trwałe. Zachodzi to, gdy $16r>3h.\sin 2\alpha$

W tym razie istnieją więc 3 położenia równowagi środkowe trwałe i dwa boczne chwiejne.

Gdy natomiast $16r<3h.\sin 2\alpha$, to jest tylko jedno położenie równowagi i przytem równowaga jest chwiejna.

K O N I E C.

Warszawa, w lipcu 1916 r.

SPIS RZECZY.

Rozdział wstępny. O skalarach i wektorach.

Część I.

STATYKA

ROZDZIAŁ I.

O siłach, działających na punkt.

ROZDZIAŁ II.

O siłach równoległych.

ROZDZIAŁ III.

O płaskim układzie sił.

ROZDZIAŁ IV.

O tarciu.

ROZDZIAŁ V.

O sznurach i łańcuchach.

ROZDZIAŁ VI.

O przestrzennym układzie sił.

ROZDZIAŁ VII.

O środku ciężkości.

ROZDZIAŁ VIII.

Zasada pracy przygotowanej.