do drutu, bo jest on całkowicie gładki/. Tak samo na prawy pierścień działają: ciężar Q_2, naprężenie sznura S i reakcya normalna drutu R_2.

Każdy z pierścieni ma być w równowadze, a więc sumy prac elementarnych sił Q_1, S i R_1 oraz Q_2, S i R_2 muszą być zerami. Aby nie wprowadzać reakcyi R_1 i R_2 przesuniemy pierścienie na drucie, czyli w kierunkach normalnych do tych reakcyi. Przypuśćmy, że przytem promienie r_1 i r_2 otrzymują przyrosty dr_1 i dr_2. Praca siły Q_1 jest równa $Q_1 . dr_1$, gdyż rzut przesunięcia na kierunek siły $= dr_1$, a praca siły S wynosi $-S . dr_1$, gdyż jest to siła centralna; więc $Q_1 . dr_1 - S . dr_1 = 0$ . . . . — (1)

Tak samo dla prawego pierścienia znajdziemy:

$$Q_2 . dr_2 - S . dr_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

z (1) mamy $Q_1 = S$, a z (2) — $Q_2 = S$ więc $Q_1 = Q_2$.

Z tego wynika, że ciężary pierścieni muszą być równe i że wówczas będą one w równowadze w każdem położeniu.

81. Ciała sztywne.

Dajmy na to, że na ciało sztywne na jednej prostej działają dwie siły P i P' jednakowo skierowane i równe. Dowiedziemy, że przy wszelkich przesunięciach prace elementarne tych sił są równe.

Jest to prawie oczywiste. Istotnie: wprowadźmy trzecią siłę P'' równą i odwrotną do P i mającą wspólny z nią punkt przyłożenia; prace elementarne sił P i P'' są na każdym przesunięciu równe co do wielkości i różne co do znaku /par.77/, tak samo równe co do wielkości, a różne co do znaku są prace elementarne sił P' i P'', a z tego wynika twierdzenie, które należało udowodnić. Z tego twierdzenia wnosimy, że siłę działającą na ciało sztywne można przesuwać do linii jej działania, przytem jej praca elementarna w żadnem przesunięciu nie ulegnie zmianie.

Gdy na ciało sztywne działa układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ to przy żadnym z niżej wymienionych przekształceń suma prac elementarnych tych sił na żadnem przesunięciu nie ulega zmianie:

1/ Przy przesuwaniu sił układu na ich liniach działania.

2/ Przy rozkładzie jakiejś z sił układu na składowe.

3/ Przy wprowadzeniu siły wypadkowej zamiast składowych.

4/ Przy wprowadzaniu dwuch sił równych i odwrotnych i działających na ten sam punkt.

Dowiedźmy teraz, że: <u>jeżeli układ sił działających na ciało sztywne jest w równowadze, to suma</u>

prac elementarnych tych sił - jest zerem na każdem przesunięciu. Wiemy, że za pomocą wyżej wymienionych przekształceń można układ sił, działających na ciało sztywne sprowadzić zawsze do dwuch sił i z powyższego wynika, że suma prac elementarnych tych dwóch sił wypadkowych jest równa na każdem przesunięciu sumie prac elementarnych sił danych. Jeżeli układ jest w równowadze, to owe siły wypadkowe są równe i odwrotne, a suma prac elementarnych takich dwuch sił jest przy każdem przesunięciu równa zeru.

82. Twierdzenie odwrotne. Jeżeli suma prac elementarnych sił, działających na ciało sztywne jest na każdem przesunięciu równa zeru, to siły te są w równowadze.

Przypuśćmy, że na ciało sztywne działa układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$, których suma prac elementarnych jest zerem na każdem przesunięciu. Sprowadźmy ten układ do dwuch sił: 1° R przyłożonej w punkcie A i 2° S, przyłożonej w punkcie B. Nadajmy układowi takie przesunięcie, aby punkt A pozostawał przy tem w spokoju czyli obróćmy ten układ dokoła punktu A. Siła R nie wykona żadnej pracy, bo jej punkt przyłożenia nie doznał przesunięcia, a z tego wynika, że praca elementarna siły S jest zerem /bo suma prac sił R i S jest zerem/ co jest możliwe tylko wtedy, gdy siła ta jest prostopadła do drogi. Ale, gdy punkt A pozostaje nieruchomym, to przesunięcie punktu B leży na powierzchni kuli, o promieniu równym AB i środku A, tak więc siła S pozostaje wciąż normalną do każdego przesunięcia na tej kuli, a z tego wynika, że siła S działa na promieniu AB. Gdy znów punkt B będziemy uważali za nieruchomy, a punktowi A nadawać będziemy przesunięcia, to tak samo wypadnie, że siła R musi leżeć na prostej AB. A zatem siły R i S działają na jednej prostej.

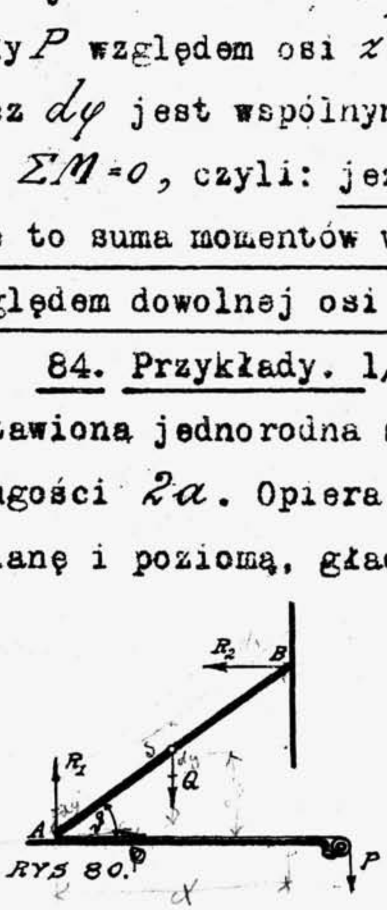
Nadajmy dalej układowi nieskończenie małe przesunięcie ds w kierunku AB, to na zasadzie założenia będziemy mogli napisać: $R.ds + S.ds = 0$, a stąd $R = -S$ czyli siły R i S są równe i odwrotne, a prócz tego wiadomo, że działają na jednej prostej. Z tego wynika, że układ jest w równowadze.

83. Warunki równowagi, wyprowadzone z zasady pracy przygotowanej. Gdy przyjmiemy zasadę pracy przygotowanej za postulat, to stąd będziemy mogli wyprowadzić znane już inne kryterya równowagi:

Przypuśćmy, że na ciało sztywne działa układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ i że siły te są w równowadze; z postulatu powyższego wynika, że suma ich prac elementarnych jest zerem przy każdym przesunięciu. Przesuńmy ciało równolegle w kierunku dowolnej prostej x o dx. Punkty przyłożenia wszystkich sił doznają jednakowych przesunięć dx i suma prac elementarnych wszystkich sił będzie równa $\Sigma P_x dx = 0$, gdzie P_x oznacza rzut siły P na prostą x; lecz dx jest wspólnym czynnikiem wszystkich wyrazów tej sumy, a z tego wprost wynika, że: $P_x = 0$, ... czyli, że: jeśli układ sił działających na ciało sztywne jest w równowadze, to suma rzutów tych sił na każdy kierunek jest zerem.

Obróćmy teraz ciało około dowolnej prostej z o kąt $d\varphi$. Praca elementarna siły P przytem wykonana jest równa $M.d\varphi$, gdzie M jest momentem siły P względem osi z. A zatem $\Sigma M.d\varphi = 0$. Lecz $d\varphi$ jest wspólnym czynnikiem, a z tego wynika, że $\Sigma M = 0$, czyli: jeżeli układ sił jest w równowadze to suma momentów wszystkich sił tego układu względem dowolnej osi z jest zerem.

84. Przykłady. 1/ W płaszczyźnie pionowej jest ustawiona jednorodna sztaba, o ciężarze Q kg. i długości $2a$. Opiera się ona o pionową, gładką ścianę i poziomą, gładką podłogę.



RYS 80.

Aby równowaga sztaby była zachowana urządzono tak: do końca A sztaby przymocowano sznur, przeprowadzono go przez otwór, wyrobiony w ścianie i przerzucono przez bloczek. Do końca sznura przyczepiono ciężar P . Wyznaczyć położenie równowagi sztaby. Zadanie sprowadza się do znalezienia kąta ϑ, jaki tworzy sztaba z poziomem w położeniu równowagi.

Na sztabę działają następujące siły: ciężar Q przyłożony w środku S sztaby, naprężenie sznura w punkcie A równe sile P , reakcya normalna R_1 podłogi w punkcie A i reakcya normalna R_2 ściany w punkcie B . Aby nie wprowadzać do rachunku reakcyi R_1 i R_2 , o które tymczasem nie chodzi, weźmiemy przesunięcie takie, aby punkt A poruszał się po podłodze, a punkt B po ścianie. Oznaczmy odległość punktu A od ściany przez x , a odległość punktu S od podłogi przez y . W takim razie przesunięcie punktu A będzie równe dx, a przesunięcie S .. dy. Praca elem. siły P jest $-P.dx$/znak "minus", bo gdy x otrzymuje przyrost dodatni, to P wykonywa pracę ujemną/. Rzut ~~przecięcia~~ przesunięcia punktu S na kierunek siły Q jest równy dy, a więc praca siły Q wynosi $-Qdy$. Siły R_1 i R_2 nie wykonają pracy, a zatem

$$-P.dx - Q.dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

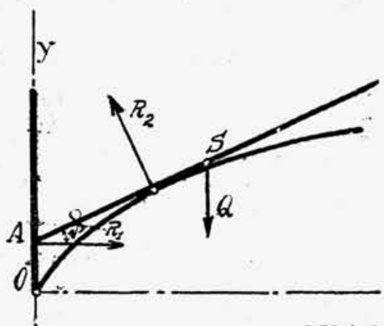
Wyrazimy x i y w funkcji ϑ . Ponieważ $x = 2a.\cos\vartheta$, $y = a.\sin\vartheta$, skąd $dx = -2a.\sin\vartheta d\vartheta$; $dy = a.\cos\vartheta.d\vartheta$

Podstawiając te wartości w (1.) otrzymamy $tg\vartheta = \frac{Q}{2P}$ ~

Przy pomocy tej samej metody znajdziemy reakcye R_1 i R_2. W tym celu weźmiemy przesunięcie dy całej sztaby w kierunku pionowym. Praca siły P przy tem przesunięciu jest równa 0. Praca reakcyi R_1 jest równa $R_1.dy$ a praca siły Q wynosi $-Q.dy$ więc $R_1 dy - Q.dy = 0$, skąd $R_1 = Q$.

Tak samo, biorąc przesunięcie poziome dx całej sztaby otrzymamy $R_2.dx - P.dx = 0$, skąd $R_2 = P$.

II/ Gładka jednorodna sztaba, o długości $2a$ opiera się jednym swoim końcem o pionową ścianę i spoczywa na pewnej gładkiej krzywej. Jaką powinna



RYS. 81.

być ta krzywa, aby równowaga była zachowana w każdem położeniu sztaby. Obierzmy prostokątny układ współrzędnych w sposób taki: za oś y weźmy ślad ściany na płaszczyźnie rysunku, a początek układu 0 - dowolnie na tej osi. Oznaczmy współrzędne punktu S w tym układzie przez x, y.

Na sztabę działają siły takie: ciężar Q, przyłożony w S, reakcya R_1 ściany normalna do niej i reakcya normalna R_2 krzywej w punkcie zetknięcia. Nadajmy sztabie takie przesunięcie, aby nieznane reakcye R_1 i R_2 nie wykonały pracy. Tak się dzieje wtedy, gdy punkt A porusza się po ścianie.

a sztaba wciąż pozostaje w zetknięciu z krzywą. Przesunięcie środka ciężkości S wynosi przytem dy, a więc $-Q.dy=0$, a z tego wynika, że $dy=0$ lub $y=h$, gdzie h jest stałą. To znaczy, że odległość punktu S od osi y musi być stałą czyli, że środek ciężkości sztaby powinien przesuwać się po linii prostej równoległej do osi x i odległej od niej o h.

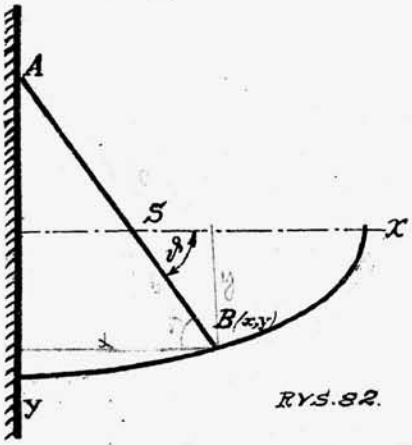
Wyznaczymy równanie krzywej, na której powinna opierać się sztaba. Gdy oznaczymy kąt między sztabą a osią x przez ϑ, to współrzędne punktu S można wyrazić przez: $x=a.\cos\vartheta$; $y=h$.
Równanie prostej AS /sztaby/, czyli stycznej do krzywej jest: $y-h=tg\vartheta(x-a.\cos\vartheta)$, bo ta prosta musi przechodzić przez punkt S i tworzyć z poziomem kąt ϑ. Inaczej: $y-h=x\,tg\vartheta-a\sin\vartheta\ldots(1)$
Szukana krzywa jest obwiednią wszystkich położeń prostej AS należy więc znaleźć tę obwiednię. Aby wyznaczyć równanie tej obwiedni postępujemy według znanego prawidła.

Różniczkujemy równanie $(1.)$ względem ϑ. Otrzymamy $x=a.\cos^3\vartheta,\ldots(2)$ a z tego i z $(1.)$ wynika: $y-h=-a.\sin^3\vartheta\ldots(3)$. Są to równania parametryczne szukanej linii. Podnosząc każde z równań (2) i (3) do potęgi $\frac{2}{3}$ i dodając do siebie stronami otrzymamy: $$x^{\frac{2}{3}}+(y-h)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$ zaś gdy $h=0$, czyli gdy oś x jest torem środka ciężkości, to

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

Jest to równanie astroidy. A więc szukana linia powinna być tą krzywą.

III/ Sztaba AB o długości a opiera się jednym końcem (A) o pionową scianę, a drugim (B) o pewną krzywą. Jaką powinna być ta krzywa, aby równowaga zachodziła przy wszelkich położeniach sztaby.



RYS. 82.

Znajdziemy, jak poprzednio, że środek ciężkosci S powinien przy przesuwaniu sztaby pozostawać na pewnej prostej, którą obierzmy za oś x. Gdy oznaczymy współrzędne punktu B /za oś y obieramy ślad ściany/ przez x i y, a kąt między sztabą a poziomem przez ϑ, to otrzymamy $x=a.\cos\vartheta$; $y=b.\sin\vartheta$, gdzie $b=BS$.

Są to równania parametryczne elipsy. A więc szukaną krzywą jest elipsa, której osi leżą na osiach współrzędnych i są odpowiednio równe $2a$ i $2b$.

<u>85. Układ ciał sztywnych.</u> Niech będzie układ złożony z ciał sztywnych A, B, C, . . . i przypuśćmy, że na układ ten działają pewne siły zewnętrzne

oraz wewnętrzne.

Jeśli przytem układ jest w równowadze, to przy wszelkich przesunięciach suma prac elementarnych wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych jest zerem.

Istotnie: gdy układ jest w równowadze, to każde z ciał, do niego należących jest w równowadze, a zatem równoważą się wszystkie siły, które działają np. na ciało A . Gdy nadamy układowi jakieś przesunięci to suma prac elementarnych sił, działających na ciał A będzie zerem. Tak samo dowiedziemy, że i suma prac elem. sił działających na ciało B jest zerem i t.d. Otrzymamy tym sposobem tyle równań ile jest ciał w układzie, a dodając stronami te równania znajdziemy, że suma prac elem. wszystkich sił działających na układ /zarówno sił zewnętrznych, jak i wewnętrznych/ jest zerem.

Dowiedziemy też twierdzenie odwrotne: jeśli suma prac elementarnych wszystkich sił, działających na układ ciał jest zerem przy każdem przesunięciu, to układ jest w równowadze.

Możemy nadać układowi takie przesunięcie, aby wszystkie ciała z wyjątkiem A zostały w spokoju, a w takim razie wykonają pracę tylko siły działające na ciało A, i suma tych prac według założenia jest zerem. Tak więc przy każdem przesunięciu ciała A su ma prac elem. sił na nie działających jest zerem, a zatem ciało A jest w równowadze. Tak samo dowiedziemy, że ciała $B, C, \ldots$ są w równowadze, a więc i cały układ jest w równowadze.

86. Przesunięcie dozwolone i przesunięcie wyobrażalne. Gdybyśmy przy tworzeniu równań musieli uwzględnić wszystkie siły, działające na układ, to byłoby to wielce niedogodne. Zwykle nadajemy układowi takie przesunięcie aby do równań nie weszły siły, o które w zadaniu nie chodzi. Istnieje pod tym względem pewna metoda ogólna.

Przypuśćmy, że układ ciał jest nieswobodny, t. zn., że może się poruszać tylko w pewien określony sposób. A więc np. może się zdarzyć, że niektóre z ciał układu są osadzone na nieruchomych osiach inne mogą się posuwać po pewnych liniach lub na pewnych powierzchniach lub wreszcie mogą zachodzić między różnemi ciałami układu jakieś połączenia. Możemy nadać układowi takie przesunięcie, aby połączenia te różne nie zostały naruszone. Takie przesunięcie nazywa się dozwolonem. Jeśli natomiast nadajemy układowi takie przesunięcie, że pewne połączenia ciał zostają przez to zniesione, to mówimy o przesunięciu wyobrażalnem lub niedozwolonem. Niekiedy trzeba się uciekać do tych przesunięć wyobrażalnych, gdy chodzi o wyznaczenie reakcyi lub naprężen sznurów nierozciągalnych, ale najczęściej stosujemy przesunięcia dozwolone. Wówczas pewne kategorye sił nie wykonają pracy i nie wejdą do równań.

Wyszczególnimy najważniejsze z sił, które nie wchodzą do równania pracy przygotowanej przy przesunięciach dozwolonych:

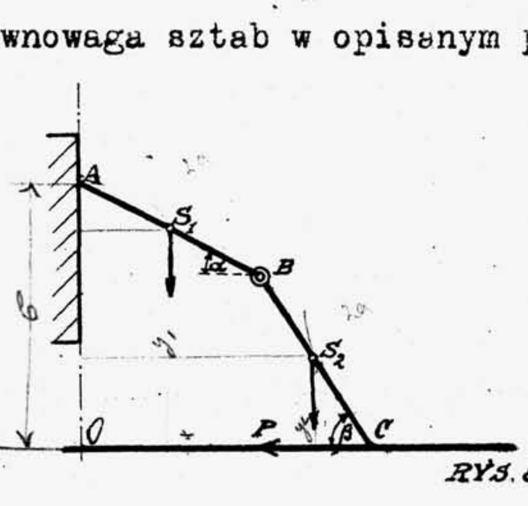
1/ Przypuśćmy, że punkt A może się poruszać na pewnej linii lub pewnej powierzchni gładkiej. W takim razie ta linia lub powierzchnia wywiera na ciało reakcyę normalną R i jeśli nadamy układowi przesunięcie dozwolone, to punkt A przesunie się po tej linii lub po powierzchni i reakcya R nie wykona pracy. Jeśli linia lub powierzchnia są chropowate, to R wykona pracę przy przesunięciu dozwolonem.

2/ Przypuśćmy, że pewne ciało układu jest osadzone na nieruchomej osi. To oś wywiera na ciało pewną reakcyę R. Przy przesunięciu dozwolonem /obrót dokoła osi/ punkt przyłożenia tej reakcyi nie przesunie się, a więc praca jej jest zerem, można więc tej reakcyi nie brać pod uwagę.

3/ Dwa ciała układu są połączone za pomocą przegubu. W przegubie działają na ciała reakcye równe i odwrotne i przy każdem przesunięciu dozwolonem prace ich będą równe i odwrotne. Z tego wynika, że suma prac elementarnych reakcji w przegubach jest zerem. A więc i tego rodzaju reakcje można pomijać.

4/ Przypuśćmy wreszcie, że dwa ciała układu są połączone w punktach A_1 i A_2 sznurem nierozciągalnym. W punkcie A_1 i A_2 działają więc naprężenia sznura równe i odwrotne. Przy dozwolonem przesunięciu odległość A_1A_2 nie ulega zmianie, a więc i suma prac elementarnych sił S jest zerem. Z tego wynika, że takie siły S można pomijać.

87. Przykłady. 1/ W punkcie A pionowej gładkiej ściany jest zawiasa, około której może się obracać sztaba AB. Ta sztaba jest połączona przegubowo z inną sztabą BC, która końcem C opiera się o gładką podłogę. Długość każdej sztaby jest $=2a$, a ciężar każdej Q kg. Środki ciężkości sztab oznaczamy przez S_1 i S_2 /sztaby są jednorodne/. Sztaba AB tworzy z poziomem kąt α, a sztaba BC - kąt β. Oznaczmy jeszcze odległość punktu A od podłogi przez b. Aby równowaga sztab w opisanym położeniu była zachowana



RYS. 83.

przykładamy do punktu C poziomą siłę P; mamy wyznaczyć tę siłę. Na układ złożony ze sztab AB i BC działają siły P, Q /w S_1/ i Q /w S_2/ a prócz tego różne