skończenie krótkich bokach, a zatem twierdzenie nasze rozciąga się do wszystkich figur płaskich.

8 Moment względem punktu. W teoryi wektorów obok dodawania zasadniczą role odgrywają dwa działania inne. Wynikiem jednego z nich jest wektor zwany iloczynem wektorowym, a wynikiem drugiego skalar, zwany iloczynem skalarowym. Działania te wyłozymy jedynie w tej postaci, w której będą nam potrzebne w dalszym ciągu, nie będziemy nawet używali powyzszych zasad ogólnych posługując się zamiast tego nazwami moment i praca, uzywanemi częściej w technice.

Działanie pierwsze rozważymy na tem miejscu, o drugiem będzie mowa później.

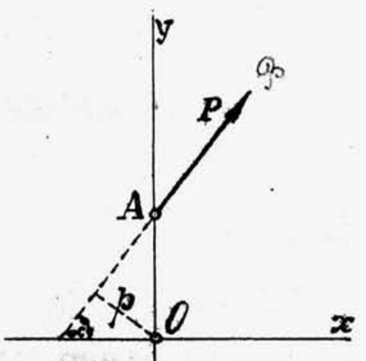
Niech będzie wektor $P=AB$ związany z punktem lub prostą, i niech będzie prócz tego punkt O. Poprowadźmy przez O prostą, prostopadłą do płaszczyzny OAB. Gdy spojrzymy z jakiegoś punktu C tej prostej na płaszczyznę OAB, to zobaczymy, ze wektor P jest, dajmy na to, zwrócony w tę strone w którą posuwa się koniec wskazówki zegarowej, obracając się około punktu O. Gdybyśmy patrzyli na OAB z innego punktu tejże prostej, położonego po odwrotnej stronie płaszczyzny, to dla nas zwrot wektora P byłby odwrotny do biegu wskazówki zegarowej.

Odetnijmy od punktu O w stronę C Pp umówionych jednostek długości, gdzie p oznacza odległość wektora P

od punktu O i nazywa się ramieniem momentu, innemi słowy odmierzmy na OC, na odpowiedniej skali, podwójne pole trójkąta OAB. Otrzymamy wektor, związany z punktem O i posiadający początek w O. Wektor ten zowie się momentem wektora P względem O. Krótko mówiąc, momet wektora P względem punktu O jest to wektor, prostopadły do płaszczyzny, zawierającej O i P, zwrócony w tę stronę z której widać P w kierunku biegu wskazówki zegarowej, a pod względem wielkości równy iloczynowi z wektora P przez ramię.

Oczywiście moment ani pod względem kierunku, ani wielkości, nie zależy od położenia wektora P na prostej AB.

Jeżeli punkt O leży na AB, to moment jest równy zeru.



RYS. 3.

Rys. 3

Niech będą wektory $P_1, P_2, \dots$ /typowy wektor P /, położone w jednej płaszczyźnie np. w płaszczyźnie rysunku i posiadające wspólny początek A. Ich wektor wypadkowy oznaczymy przez R. Niech będzie prócz tego w tejże płaszczyźnie jakikolwiek punkt O. Obierzmy O za początek prostokątnego układu współrzędnych, oś z obierzemy prostopadle do płaszczyzny rysunku, a oś y poprowadzimy przez punkt A. Oczywiście momenty wszystkich wektorów $P_1 P_2 \dots R$ leżą na osi z, przypisujemy im znaki + lub — stosownie do tego, czy są zwrócone w stronę dodatnią czy ujemną tej osi. Oznaczmy jeszcze przez $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \varphi$ kąty, które wektory $P_1, P_2, P_3, \ldots R$, tworzą z osią x, a przez $p_1, p_2, p_3, \ldots r$, ich odległości od O. Biorąc rzuty na oś x otrzymamy $R\cos\varphi = \Sigma P\cos\alpha$. Mnożymy następnie obydwie strony tego równania przez OA gdy uwzględnimy, że $OA\cos\alpha = p$ i $OA\cos\varphi = r$ to wypadnie

$$R.r = \Sigma P.p$$

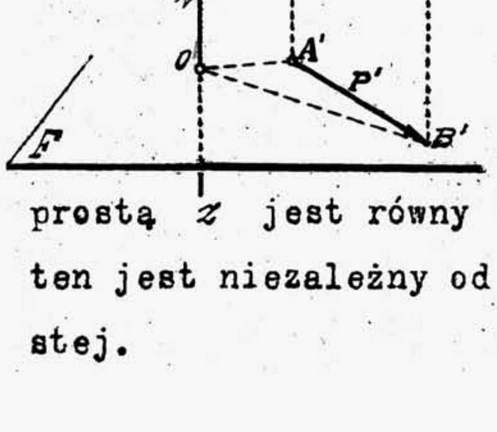
Równanie to wyraża twierdzenie następujące:

<u>Moment wektora wypadkowego wektorów, położonych w jednej płaszczyźnie, względem punktu tejże płaszczyzny jest równy sumie algebraicznej momentów wektórów składowych.</u>

Twierdzenie to jest przypadkiem szczególnym twierdzenia ogólniejszego, które poznamy w jednym z paragrafów następnych (10).

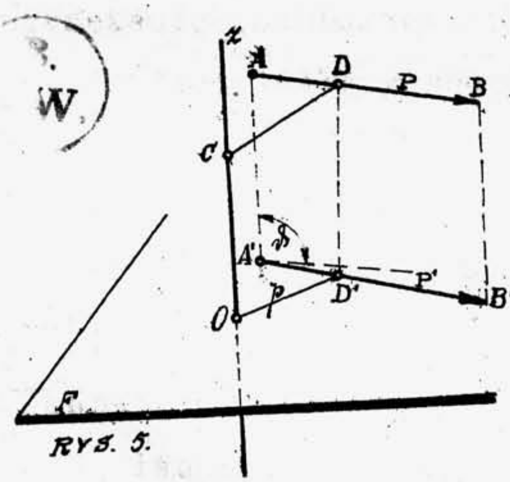
Rys. 4

<u>9. Moment względem prostej.</u> Niech będzie wektor $P = AB$ związany z punktem lub prostą i jakakolwiek prosta z. Obierzmy na niej dowolny punkt C i wyznaczmy względem niego moment M wektora P. Przypuśćmy, że M tworzy z prostą z kąt γ; w takim razie rzut N momentu na prostą z jest równy $M\cos\gamma$. Dowiedziemy, że rzut ten jest niezależny od położenia punktu C na prostej.



RYS.4.

W tym celu poprowadźmy dowolnie płaszczyznę F, prostopadłą do prostej z; przetnie ona tę prostą w punkcie O. Jeżeli rzutami punktów A, B na F są punkty A', B' to rzutem trójkąta ABC będzie trójkąt $A'B'O'$ przy każdem położeniu punktu C na prostej z. Podwójne pole trójkąta $ABC=M$ i płaszczyzna ABC, tworzy z F kąt γ (płaszczyzny te są odpowiednio prostopadłe do boków kąta γ), a zatem podwójne pole trójkąta $A'B'O=M\cos\gamma=N$. Znaczy to, że rzut N jest dla wszystkich punktów prostej z wielkością stałą. Ten rzut N momentu M zowie się momentem wektora P względem osi z. Jest to wektor, związany z prostą z i oczywiście równy co do wielkości i kierunku momentowi wektora $P'A'B'$ względem punktu O.



RYS. 5.

Znajdziemy jeszcze dla wektora N pewne wyrażenie, które bywa często użyteczne. Dajmy na to, że $CD=p$ jest najkrótszą odległością pomiędzy prostemi AB i z i że D' jest rzutem punktu D. Ponieważ prosta CD jest równoległa do płaszczyzny rzutów, przeto $CD=OD'=p$.

Prosta OD', jako prostopadła do AB i $D'D$ jest prostopadłą do płaszczyzny rzucającej prostej AB, a więc do $A'B'$. Z tego wynika, że OD' jest ramieniem wektora P' i $N=P'p$. Oznaczmy jeszcze przez ϑ kąt pomiędzy P i z. W takim razie kąt pomiędzy P i P' będzie $\frac{\pi}{2}-\vartheta$ i $P'=P\sin\vartheta$

Ostatecznie otrzymamy

$$N = P \cdot p \cdot \sin \vartheta$$

Moment wektora P względem prostej z jest równy zeru.

1° jeżeli $p = o$ t.j. jeżeli proste z i AB się przecinają i

2° jeżeli $\vartheta = o$ t.j. jeżeli proste z i AB są równoległe.

Wogóle moment wektora względem osi jest zerem jeżeli wektor i oś leżą w jednej płaszczyźnie.

IO. Moment wypadkowy. Niech będą wektory $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ i ich wypadkowa R i niech będzie prócz tego jakakolwiek prosta z Prowadzimy, jak poprzednio, płaszczyzne F, prostopadłą do z i przecinającą te prostą w punkcie O. Rzut R' wektora R na F będzie wypadkową rzu $P_1', P_2', P_3', \ldots$ wektorów $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Ponieważ wektory P_1', P_2', tworze układ płaski przeto moment wektora wypadkowego R' względem punktu O będzie równy sumie algebraiczn momentów wektorów składowych $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ względem z

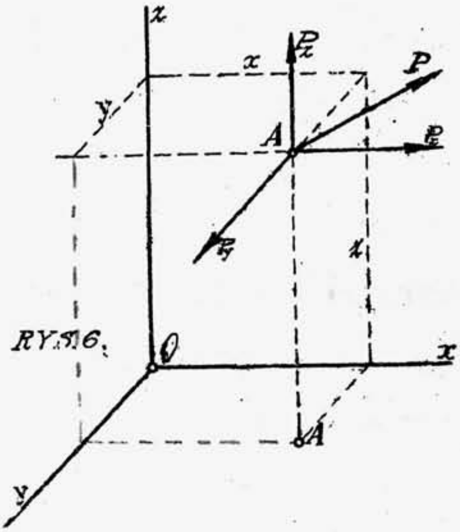
Wogóle moment wektora wypadkowego względem osi jest równy sumie algebr. momentów wektorów składowych.

Weźmy teraz ten sam układ wektorów $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots R$ jakikolwiek punkt O. Wyznaczmy względem O momenty M_1, $M_2, \ldots$ wektorów $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots$, oraz moment N wektor

R. Ponieważ $M_1, M_2, \ldots\ldots$ są to wektory, posiadające wspólny początek, możemy przeto wyznaczyć ich wektor wypadkowy; oznączmy go przez N'. Dowiedziemy, że N' i nie różnią się ani pod względem wielkości, ani kierunku.

W tym celu poprowadźmy przez O trzy osie współrzędnych x, y, z. Rzut wektora N' na oś x jest równ sumie rzutów wektorów $M_1, M_2, \ldots\ldots$ Lecz rzuty moment $M_1, M_2, \ldots\ldots$ na oś x są momentami wektorów $P_1, P_2, \ldots$ względem tejże, a suma ich w myśl twierdzenia poprzedzającego jest równa momentowi wypadkowej R względ x, czyli rzutowi momentu N na tę prostą. Stąd wyni że rzuty wektorów N i N' na oś x muszą być równe, ponieważ toż samo dotyczy dwóch osi pozostałych, prze to wektory N i N' nie mogą się różnić pod żadnym wzgl dem. Dowiedliśmy więc twierdzenie takie: <u>moment wekto ra wypadkowego względem dowolnego punktu jest równy sumie geometrycznej momentów wektorów składowych tego punktu.</u> Rozumie się, wyraz "<u>równy</u>" oznacza tu zgodnoś co do wielkości i kierunku. Twierdzenie, które poznaliśmy w paragrafie 8 jest oczywiście szczególnym przypadkiem twierdzenia powyższego.

<u>11.</u> <u>Analityczne wyrażenie momentu.</u> W prostokątnym układzi współrzędnych dany jest początek $A(x,y,z)$ wektora P, oraz rzuty $P_x P_y P_z$ tego wektora na osie. Pragniemy wy-



RYS. 6.

znaczyć moment M wektora P względem początku O.

Uczynimy tu naprzód pewną uwagę ogólną, dotyczącą obiegu układu współrzędnych.

Spójrzmy z jakiegoś punktu osi (RYS. 6), położonego po stronie dodatniej od O, na te część płaszczyzny xy, która leży pomiędzy stronami dodatniemi osi x i y. Wskazówka zegara, leżącego na tej płaszczyźnie tarczą do nas, posuwałaby się od osi x ku osi y. Powiemy, że oś y następuje po osi x w kierunku ruchu wskazówki zegarowej. Tak samo oś z następuje po osi y i oś x po osi z. W taki sposób będziemy zawsze obierali osi współrzędnych. Na załączonym rysunku mamy wyobrażony ten przypadek, w którym wszystkie wielkości dane t.j. x, y, z, P_x, P_y, P_z, są dodatnie.

Wyznaczmy naprzód rzuty M_x, M_y, M_z, szukanego momentu M na osi współrzędnych, czyli momenty wektora P względem osi. W tym celu rozkładamy wektor P na 3 składowe w kierunkach osi. Oczywiście składowe te są równe danym rzutom P_x, P_y, P_z.

M_x czyli moment wektora P względem osi x jest równy sumie momentów wektorów P_x, P_y, P_z. Moment pierwszego jest równy $-y.P_x$ /znak $-$, gdyż moment jest zwrócony w kierunku ujemnym osi z /, moment drugiego wynosi xP_y

i wreszcie moment trzeciego jest równy zeru. Zatem wypadnie $M_z = xP_y - yP_x$. Tak samo znajdziemy:

$$M_x = yP_z - zP_y \quad \text{i} \quad M_y = zP_x - xP_z ,$$

a

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

Dalej otrzymamy $\cos\alpha = \frac{M_x}{M}$; $\cos\beta = \frac{M_y}{M}$; $\cos\gamma = \frac{M_z}{M}$, gdzie α, β, γ oznaczają kąty kierunku momentu M.

Jeżeli mamy wyznaczyć moment wektora P nie względem początku O lecz względem jakiegoś innego punktu $O'(\xi, \eta, \zeta)$ to we wzorach powyższych wypadnie zamiast x, y, z napisać x', y', z' czyli współrzędne punktu A w układzie, którego początek leży w O' a osie są odpowiednio równoległe do x, y, z; zatem

$$x' = x - \xi \quad ; \quad y' = y - \eta \quad ; \quad z' = z - \zeta$$

12. __Rachunek wektorowy.__ W algebrze zwykłej /skalarnej/ sympole $a, b, \ldots$ oznaczają zawsze skalary; w rachunku wektorowym oznaczamy literami wektory pod względem kierunku i pod względem wielkości.

Natomiast symbol, wyrażający wektor nie określa go wcale pod względem położenia w przestrzeni i dlatego też dwa wektory równe i równoległe mają jeden i ten sam symbol. Możemy to wyrazić tak: jeśli wektory $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ są równe, równoległe i zwrócone jednakowo to zachodzi między nimi związek następujący: $\overline{P} = \overline{Q}$

Wynika stąd, że __w rachunku wektorowym postępujemy tak, jakby wszystkie wektory były swobodne.__

Niech będzie jakikolwiek wektor $\overline{P}$. Utworzmy wyrażenie $n\overline{P}$ [*] gdzie n jest jakąś liczbą oderwaną. Temu nowemu symbolowi ma odpowiadać wektor, który oznaczymy przez $\overline{Q}$ i będziemy uważali, że wektor $\overline{Q}$ posiada ten sam kierunek co $\overline{P}$, ale co do wielkości jest od niego n razy większy, tak że $n.\overline{P}=\overline{Q}$. Gdy n jest liczbą ujemną, to wektor $\overline{Q}$ posiada kierunek odwrotny do wektora $\overline{P}$. Przypuśćmy, że wektor $\overline{P}$ jest równy pod względem wielkości jednostce /będzie to t. zw. wektor jednostkowy/. W takim razie liczba n określa wektor $\overline{Q}$, pod względem wielkości, czynnik zaś $\overline{P}$ pod względem kierunku.

Przypuśćmy, że mamy pewną liczbę wektorów. Ich wektor wypadkowy otrzymamy, jako sumę geometryczną, którą oznaczymy przez $\overline{R}$

$$\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3+\ldots\ldots=\overline{R} \qquad (1)$$

Pomnóżmy każdy z wektorów składowych przez czynnik n. Wypadnie

$$n\overline{P}_1+n\overline{P}_2+n\overline{P}_3+\ldots\ldots \qquad (2)$$

Tę sumę otrzymamy z wieloboku, podobnego do wieloboku zapomocą którego znajdujemy $\overline{R}$; każdy bok tego nowego wieloboku będzie n razy większy od boku poprzedniego. Stąd wynika, że wektor wypadkowy sumy (2) jest równoległy do wektora $\overline{R}$ i że jest od niego n razy większy. Zatem

$$n.\overline{R}=n\overline{P}_1+n\overline{P}_2+n\overline{P}_3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Gdy do tego ostatniego równania podstawimy na miej-

[*] Będziemy odróżniali symbole wektorów od symbolów wielkości skalarnych zapomocą kresek.

sce $\overline{R}$, jego wartość z (2), to otrzymamy:

$$n(\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3+\ldots\ldots)=n\overline{P}_1+n\overline{P}_2+n\overline{P}_3+\ldots\ldots$$

Wynika stąd twierdzenie: gdy mamy pomnożyć sumę wekto, rów, to każdy wyraz sumy mnożymy oddzielnie i otrzymane składniki dodajemy.

Takie same twierdzenie, dotyczące skalarów, znane jest z algebry elementarnej.

Obierzmy na osi x prostokątnego układu współrzędnych pewien wektor, który ma mieć kierunek dodatni, a pod względem wielkości ma być równy jednostce, oznaczmy go przez $\overline{i}$. Tak samo obieramy wektory jednostkowe na osiach y i z, oznaczając je odpowiednio przez $\overline{j}$, $\overline{k}$.
Niech będzie dany wektor $\overline{P}$. Rozłóżmy go na 3 składowe $\overline{P}_x, \overline{P}_y, \overline{P}_z$ w kierunkach osi x, y, z. Ponieważ wektor $\overline{P}$ jest wypadkową tych 3 składowych więc $\overline{P}=\overline{P}_x+\overline{P}_y+\overline{P}_z$
Oznaczmy współrzędne końca wektora $\overline{P}$ przez x, y, z.
Liczba x wyraża ile razy $\overline{P}_x$ jest większe od jednostki, a zatem $\overline{P}_x=x.\overline{i}$ Tak samo $\overline{P}_y=y\overline{j}$ oraz $\overline{P}_z=z.\overline{k}$, czyli:
$\overline{P}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$. W tej postaci można zawsze wyrazić wektor.
Niech będzie pewna liczba wektorów $\overline{P}_1=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}$, $\overline{P}_2=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}$, ..., gdzie $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$ oznaczają współrzędne końców odpowiednich wektorów.

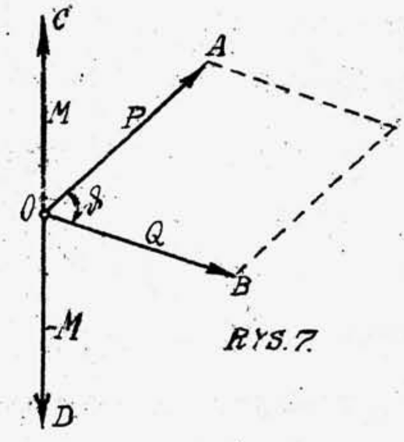
Otwórzmy sumę geometryczną tych wszystkich wektorów i otrzymany wektor wypadkowy oznaczmy przez $\overline{R}$.

Rzut wektora $\overline{R}$ na oś x jest równy sumie algebraicznej rzutów wektorów $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots\ldots$ Lecz rzuty wektorów $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ na oś są pod względem wielkości równe odpowiednio $x_1, x_2, \ldots$, czyli rzut wektora $\overline{R}$ na oś x jest równy $x_1 + x_2 + \ldots\ldots$. Zatem składowa wektora $\overline{R}$ w kierunku osi x wyrazi się wzorem $(x_1 + x_2 + \ldots\ldots)\overline{i}$

Tak samo składowe wektora $\overline{R}$ w kierunkach osi y i z będą $(y_1 + y_2 + \ldots)\overline{j}$ oraz $(z_1 + z_2 + \ldots)\overline{k}$.—

Wektor $\overline{R}$ jest sumą geometryczną tych 3 składowych, więc $\overline{R} = (x_1 + x_2 + \ldots)\overline{i} + (y_1 + y_2 + \ldots)\overline{j} + (z_1 + z_2 + z_3 \ldots)\overline{k}$

Zajmiemy się teraz mnożeniem wektorowem. Niech będą



RYS.7

w przestrzeni 2 wektory P i Q (RYS.7) Możemy uważać, że posiadają one wspólny początek O. Oznaczmy kąt między wektorami przez ϑ /będzie to ten z 2 kątów przyległych, w którym boki biegną od wierzchołka/.

Poprowadźmy przez punkt O prostą, prostopadłą do płaszczyzny AOB. Obierzmy na tej prostej 2 punkty położone po odwrotnych stronach płaszczyzny AOB. Oznaczmy te punkty przez C i D. Gdy z punktu C spójrzymy na kąt ϑ, to zobaczymy, że w kącie ϑ wektor Q następuje po wektorze P w kierunku ruchu wskazówki zegara. Jeśli zaś spojrzymy z punktu D, to okaże się, że wektor P następuje po Q w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara. Odmierzmy od punktu O

w stronę C tyle umówionych jednostek długości, ile podwójne pole trójkąta AOB zawiera jednostek kwadratowych /albo: ile jednostek kwadratowych zawiera pole równoległoboku zbudowanego na P i Q/. Otrzymamy odcinek, który będziemy uważali za nowy wektor i oznaczymy go przez M. Będzie to <u>iloczyn wektorowy</u> wektorów P i Q.

Napiszemy to symbolicznie

$$\overline{M} = V\,\overline{P}.\overline{Q} \quad ,$$

gdzie znak V jest symbolem działania.

Pod względem wielkości

$$M = P.Q.\sin\vartheta$$

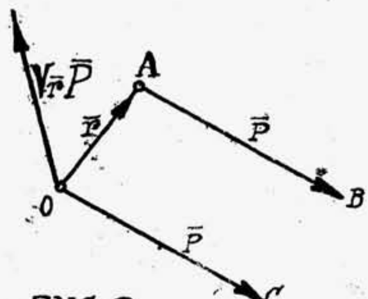
bo $PQ\sin\vartheta$ jest to podwójne pole trójkąta AOB.

Zachodzi tu ważna okoliczność: <u>w iloczynie $V\overline{P}\overline{Q}$ czynniki $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ nie są równomierne</u>. Gdy piszemy $V\overline{P}\overline{Q}$, to czynnik $\overline{Q}$ musi następować po $\overline{P}$ w kierunku ruchu wskazówek zegara. Gdy napiszemy $V\overline{Q}\overline{P}$, to otrzymamy wektor skierowany na dół, bo gdy spojrzymy z końca tego wektora na kąt ϑ to zobaczymy, że wektor $\overline{P}$ następuje po $\overline{Q}$ w kierunku ruchu wskazówek zegara. Inaczej można napisać, że

$$V\overline{P}.\overline{Q} = -V\overline{Q}\overline{P}$$

A więc w iloczynie wektorowym nie wolno zmieniać porządku czynników.

Gdy $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ mają kierunki jednakowe, to ich iloczyn-



RYS. 8.

Niech będzie wektor $\bar{P} = AB$ (RYS. 8) i jakikolwiek punkt O. Połączmy O z początkiem A wektora $\bar{P}$. Będziemy odcinek OA uważali za nowy wektor i oznaczymy go przez $\bar{r}$. Utwórzmy iloczyn wektorowy $V\bar{r}.\bar{P}$. W tym celu przenosimy wektor $\bar{P}$ równolegle do OC. Iloczyn $V\bar{r}.\bar{P}$ będzie to wektor, prostopadły do płaszczyzny AOC i skierowany tak, aby dla patrzącego z końca wektor $\bar{P}$ następował po $\bar{r}$ w kierunku ruchu wskazówki zegara. Pod względem wielkości iloczyn ten jest równy podwójnemu polu trójkąta AOC lub AOB; lecz taki właśnie jest moment wektora $\bar{P}$ względem punktu O, z tego wynika, że moment wektora względem punktu jest iloczynem wektorowym.

Niech teraz będzie pewna liczba wektorów, wychodzących z jednego punktu A. Oznaczmy je przez $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \ldots,$ i wyznaczmy ich wektor wypadkowy

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \ldots \qquad (1.)$$

Obierzmy w przestrzeni dowolny punkt O i połączmy go z A. Nowy wektor OA oznaczmy przez $\bar{r}$. Wiadomo, że moment wektora wypadkowego względem punktu O jest równy sumie geometrycznej momentów wektorów składowych. Symbolicznie napiszemy

$$V\bar{r}.\bar{R} = V\bar{r}.\bar{P}_1 + V\bar{r}.\bar{P}_2 + \ldots \qquad (2.)$$

Z (1.) i (2.) otrzymamy

$$V\bar{r}(\bar{P}_1+\bar{P}_2+\ldots\ldots)=V\bar{r}\bar{P}_1+V\bar{r}\bar{P}_2+\ldots\ldots$$

Równanie to dowodzi, że mnożenie wektorów odbywa sie tak samo, jak mnożenie wielkości skalarnych.. Gdy mnożymy sumę geometryczną przez wektor, to każdy składnik sumy mnożymy oddzielnie i cząstkowe iloczyny dodajemy. Różnica polega tylko na tem, że nie wolno zmieniać porzadku czynników..

Twierdzenie to można uogólnić..

Niech będą wektory $\bar{R}$ i $\bar{S}$. Przypuśćmy, że

$$\bar{R}=\bar{P}_1+\bar{P}_2+\bar{P}_3+\ldots\ldots \text{ oraz } \bar{S}=\bar{Q}_1+\bar{Q}_2+\bar{Q}_3+\ldots\ldots$$

Utwórzmy iloczyn wektorowy z wektorów $\bar{R}$ i $\bar{S}$. Ten iloczyn oznaczmy przez $\bar{M}$. Wtedy

$$\bar{M}=V\bar{R}(\bar{Q}_1+\bar{Q}_2+\bar{Q}_3+\ldots)=V\bar{R}\bar{Q}_1+V\bar{R}\bar{Q}_2+V\bar{R}\bar{Q}_3+\ldots$$

Zastępujemy $\bar{R}$, przez sumę składników:

$$\bar{M}=V(\bar{P}_1+\bar{P}_2+\ldots)\bar{Q}_1+V(\bar{P}_1+\bar{P}_2+\ldots)\bar{Q}_2+\ldots\ldots=$$

$$=V\bar{P}_1\bar{Q}_1+V\bar{P}_2\bar{Q}_1+\ldots\ldots V\bar{P}_1\bar{Q}_2+V\bar{P}_2\bar{Q}_2+\ldots\ldots$$

Wypada stąd, że każdy wyraz pierwszej sumy trzeba pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy, czyli postępować tak, jak to ma miejsce w algebrze skalarnej.. Różnica polega tylko na tem, że nie wolno zamieniać porządku czynników.

Niech będzie iloczyn wektorowy $V\bar{P}\bar{Q}$, który oznaczymy przez M, czyli $V\bar{P}\bar{Q}=M$

Zbadajmy co oznacza wyrażenie $Vn\bar{P}\bar{Q}$. Iloczyn nP możemy uważać za nowy wektor, o kierunku tym samym co wektor $\overline{P}$ lecz pod względem wielkości n razy od niego większy. Zatem iloczyn $V(n\overline{P})\overline{Q}$ wyraża wektor o tym samym kierunku co $\overline{M}$, lecz razy od niego większy.

A więc: $V(n\overline{P})\overline{Q} = n\overline{M} = nV\overline{P}\overline{Q}$ —

Z tego wynika, że gdy mamy pod znakiem mnożenia czynnik skalarny, to możemy go napisać przed znakiem mnożenia.

Zastosujemy powyższe twierdzenia do zadania już rozwiązanego poprzednio. Na osiach x, y, z prostokątnego układu współrzędnych mamy wektory jednostkowe $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

Utwórzmy iloczyn $V\overline{i}\overline{j}$. Będzie to wektor prostopadły do płaszczyzny xy, więc mający kierunek dodatni osi z. Pod względem wielkości wektor ten jest równy polu prostokąta zbudowanego na wektorach $\overline{i}$ i $\overline{j}$. A że $\overline{i}$ oraz $\overline{j}$ są wektorami jednostkowymi więc też pole owo jest równe jednostce. Więc $V\overline{i}\overline{j} = \overline{k}$. Tak samo $V\overline{j}\overline{k} = \overline{i}$ i $V\overline{k}\overline{i} = \overline{j}$

— Mamy dany punkt $A(x,y,z)$ będący początkiem wektora $\overline{P}$, którego rzuty na osi są równe $\overline{P}_x, \overline{P}_y, \overline{P}_z$. —

Pragniemy wyznaczyć moment wektora $\overline{P}$ względem początku współrzędnych O. Wiadomo, że $\overline{P} = \overline{P}_x i + \overline{P}_y j + \overline{P}_z k$ *)

Połączmy O z A i uważajmy odcinek OA za nowy wektor $\overline{r}$. W takim razie:

$$\overline{r} = x i + y . j + z . k$$

---

*) Ponieważ litery i j k oznaczają zawsze wektory jednostkowe, można przeto opuszczać kreski, bez obawy nieporozumienia.

Moment wektora $\bar{P}$ względem punktu O jest równy iloczynowi wektorowemu z $\bar{r}$ przez $\bar{P}$ czyli

$$\bar{M} = V\bar{r}.\bar{P}$$

Wykonywamy to mnożenie.

$$\bar{M} = V(xi+yj+zk)(P_x i+P_y j+P_z k) =$$
$$= P_x xVi.i + P_y xVi.j + P_z xVi.k + P_x yVi.j + P_y yVj.j + P_z yVj.k +$$
$$+ P_x zVk.i + P_y zVk.j + P_z zVk.k$$

ale $P_x xVii$ $P_y yVjj$, $P_z zVk.k$ są równe zeru, bo są te iloczyny woktorów, mających ten sam kierunek.

.. dalszym ciagu otrzymamy

$$\bar{M} = P_y x.k - P_z x.j - P_x y.k + P_z y.i + P_x z.j - P_y z.i =$$
$$= (P_z y - P_y z)i + (P_x z - P_z x)j + (P_y x - P_x y)k\ ;$$

albo $$\bar{M} = \begin{vmatrix} i, & j, & k \\ x, & y, & z \\ P_x, & P_y, & P_z \end{vmatrix}$$

Czynniki woktorów $i, j, k,$ są oczywiście momentami woktora P względem osi współrzędnych. Otrzymaliśmy już je na innej drodze.

C Z Ę Ś Ć I.ª

S T A T Y K A.

Rozdział 1.

O siłach, działających na punkt.

13. Przedmiot i podział mechaniki. Wśród zjawisk, otaczającego nas świata wyróżniamy tak zwane zjawiska mechaniczne. Istnieją dwa rodzaje takich zjawisk· ruch