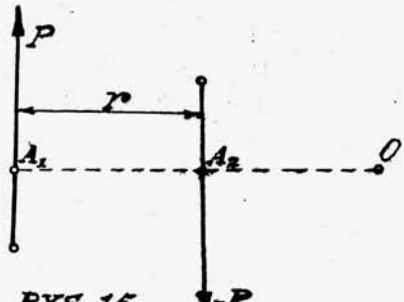
padkową, wyznaczając najpierw wypadkową dwóch z nich, następnie wypadkową tej wypadkowej oraz trzeciej siły i t.d. Może jednak zajść pewien, bardzo ważny wypadek szczególny. Przypuśćmy, że siły P_1 i P_2 są równe i odwrotne i nie działają na 1 punkt. W takim razie według powyższych twierdzeń, $R=0$. Niemniej jednak takie 2 siły się nie równoważą, jak wskazuje doświadczenie. Przytem z wzorów otrzymanych wynika, że punkt przyłożenia siły R jest nieskończenie odległy /bo: $P_2 - P_1 = 0$ /. W rzeczywistości takiemu wynikowi matematycznemu nie odpowiada nic. Nie istnieje taka jedna siła, która mogłaby wywrzeć taki sam skutek, jaki wywierają dwie siły równe i odwrotne /i nie działające na jeden punkt/. Takie dwie siły tworzą układ, zwany parą sił.

23. Właściwości par. Niech będzie para, złożona z sił P i $-P$. Odległość sił pary, nazywać będziemy ramieniem pary. Można uważać parę za układ sił i mówić o momencie układu względem punktu. Obierzmy dowolny punkt O w płaszczyźnie pary i wyznaczmy moment układu względem tego punk-



RYS. 15.

tu. W tym celu z O prowadzimy prostopadłą do sił pary i jej punkty przecięcia z liniami działania oznaczmy przez A_1 i A_2..

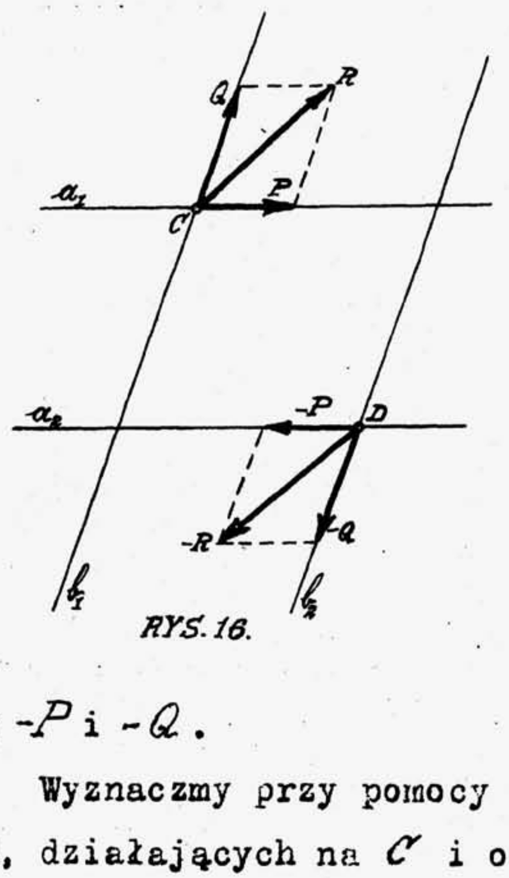
Moment siły P względem punktu O, będzie równy co do wielkości $P.OA_1$, zaś kierunek jego będzie prostopadły do płaszczyzny rysunku i zwrócony w tę stronę, z której widać ruch ciała, zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówki zegara.

Moment siły $-P$, będzie równy $-P.OA_2$ i będzie miał kierunek odwrotny do momentu siły P.

Obydwa te momenty leżą na jednej prostej i mają kierunki odwrotne, a więc wypadkowa ich jest równa ich różnicy i ma kierunek momentu większego. W danym razie ta wypadkowa wynosi $P.OA_1 - P.OA_2 = P(OA_1 - OA_2) = P.r$. Z tego wzoru wynika, że moment pary sił nie zależy wcale od położenia punktu O na płaszczyźnie pary i jest równy sile pary, pomnożonej przez ramię, przytem jeśli para usiłuje obrócić ciało w kierunku ruchu wskazówki zegara, to moment ten jest zwrócony do nas. Później uogólnimy to twierdzenie do wszystkich punktów przestrzeni.

Za parę można też uważać dwie siły równe, odwrotne i działające na jednej prostej. W tym razie moment pary względem dowolnego punktu jest zerem, bo ramię pary jest zerem.

Przypuśćmy, że na ciało sztywne, działają dwie pary sił, leżące w jednej płaszczyźnie. Oznaczmy siły jednej z tych par przez P_1 i $-P$, a drugiej przez Q i $-Q$. Siły pierwszej pary działają, dajmy na to, na prostych a_1 i a_2, drugiej zaś na prostych b_1 i b_2. Punkty przecięcia prostych a_1 z b_1 oraz a_2 z b_2 oznaczmy odpowiednio przez C i D.



RYS. 16.

Przenieśmy do punktu C punkty przyłożenia sił P i Q i do punktu D punkty przyłożenia sił $-P$ i $-Q$.

Wyznaczmy przy pomocy równoległoboku wypadkową sił, działających na C i oznaczmy ją przez R, a tak samo znajdźmy wypadkową $-R$ sił, działających na D.

Dwa równoległoboki przytem otrzymane, są sobie równe, mają bowiem boki równe i równoległe. A więc i przekątnie tych równoległoboków, t.j. wypadkowe R i $-R$ są równe i równoległe, czyli tworzą nową parę sił, którą nazwiemy parą wypadkową danych par składowych. A więc, mając dwie pary można zawsze znaląźć parę wypadkową. Znajdźmy teraz, jaki jest moment pary wypadkowej.

Ponieważ momenty pary względem wszystkich punktów płaszczyzny są równe, więc możemy obliczać np. momenty par względem punktu D .

Moment R względem D , jako moment wypadkowy, jest równy sumie momentów sił składowych. Ale moment R względem D jest to to samo, co moment pary wypadkowej, a więc moment pary wypadkowej jest równy sumie momentów par składowych.

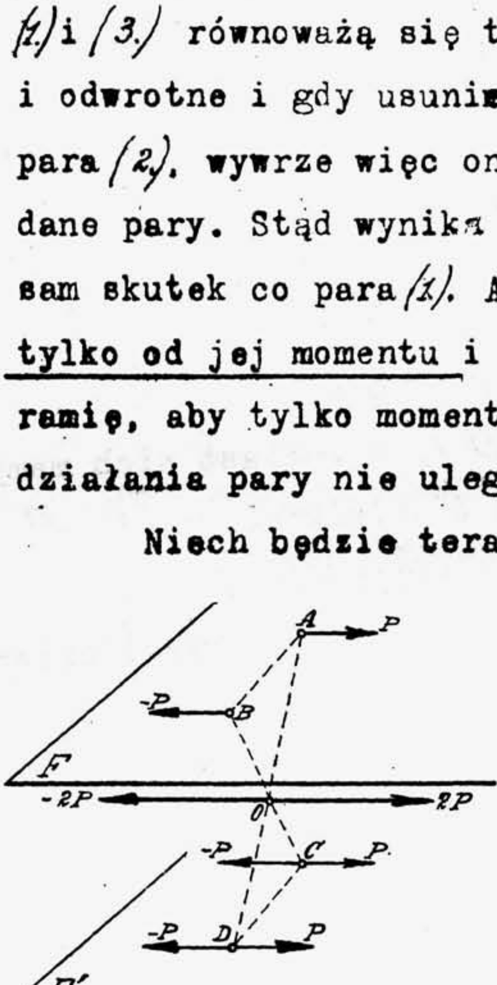
Można twierdzenie to uogólnić na dowolną liczbę par, czyli że zawsze możemy wyznaczyć parę wypadkową, która wywrze ten sam skutek, co dane pary składowe, przyczem moment jej jest równy sumie momentów par składowych.

Zachodzi ważny wypadek szczególny: Mamy, dajmy na to, dwie pary, których momenty są równe i odwrotne. W tym razie moment pary wypadkowej jest zerem, a para taka nie wywiera żadnego skutku. Innemi słowy: 2 pary o momentach równych i odwrotnych równoważą się

Niech na ciało sztywne działa para sił /1/, mająca moment M . Przyłóżmy do tego ciała inną parę /2/ złożoną z innych sił i posiadającą inne ramię, ale której moment też $= M$ i wreszcie przyłóżmy parę /3/ o momencie $= -M$.

Momenty par /2/ i /3/ są równe i odwrotne, więc pary te równoważą się, z czego wynika, że te trzy pary wywrą ten sam skutek, co para dana /1/. Ale pary /1/ i /3/ równoważą się także, bo momenty ich są równe i odwrotne i gdy usuniemy te dwie pary, to pozostanie para /2/, wywrze więc ona samo działanie, co te trzy dane pary. Stąd wynika znów, że para /2/ wywrze ten sam skutek co para /1/. A zatem: działanie pary zależy tylko od jej momentu i można zmieniać siły pary oraz ramię, aby tylko moment pozostawał bez zmiany, skutek działania pary nie ulega przytem zmianie.

Niech będzie teraz płaszczyzna F, w której działa para sił P i $-P$, przyłożonych w punktach A i B. Poprowadźmy płaszczyznę F' równoległą do płaszczyzny F i w tej nowej płaszczyźnie poprowadźmy odcinek równy i równoległy do AB, a końce jego oznaczmy przez C i D. Figura $ABCD$ jest



RYS. 17.

więc równoległobokiem. Przyłóżmy w punkcie C dwie siły równe i odwrotne, przyczem każda z nich ma być równa i równoległa do P. Tak samo w punkcie D przyłóżmy dwie siły równe, odwrotne oraz równoległe do P . Otrzymamy w ten sposób układ, złożony z 6 sił, który wywrze ten sam skutek, co dana para.

Połączmy punkty A z D oraz B z C . Są to przekątnie równoległoboku, a więc się przecinają. Niech O będzie tym punktem przecięcia; jest to także środek przekątni. Zwróćmy uwagę na siłę P, przyłożoną w A i na P , przyłożoną w D . Te 2 siły są równe, równoległe i zwrócone w tę samą stronę, a więc wypadkowa ich jest równa ich sumie, jest przyłożona w środku AD /czyli w O / i jest równoległa do sił składowych. Możemy więc uważać, że nie działają siły P /w A/i P /w D /, a zamiast nich mamy siłę $=2P$, przyłożoną w O i równoległą do P .

Zwróćmy teraz uwagę na siły: $-P$ /w C/i $-P$ /w B /. Są to dwie siły równe, równoległe i skierowane jednakowo, więc ich wypadkowa jest równa $-2P$ i jest równoległa do nich, a punktem jej przyłożenia jest O . Znów więc można usunąć siły $-P$ /w C / i $-P$ /w B /, a zamiast nich przyłożyć tę nową wypadkową.

Mamy teraz dwie siły: $2P$ i $-2P$ przyłożone w O i skierowane odwrotnie, a więc znoszące się. Pozostała więc tylko siła: 1/ P , przyłożona w C i 2/ $-P$, przyłożona w D , które tworzą parę i wywrą ten sam skutek co dana para. Moment tej nowej pary jest oczywiście równy momentowi pary danej. Tak więc można przesunąć daną parę do płaszczyzny, równoległej do płaszczyzny pary i działanie pary pozostanie niezmienionem.

Gdy dany jest moment pary, to para ta jest całkowicie określona.

Istotnie: gdy dany jest moment pary M, to wiadomo, że para działa w płaszczyźnie, prostopadłej do momentu, więc np. w płaszczyźnie przechodzącej przez początek odcinka wyrażającego moment, przyczem jest ona zwrócona, tak że dla patrzącego z końca w kierunku początku para obraca ciało w kierunku ruchu wskazówki zegara.

można od tego zacząć

Ponieważ parę można przenosić do płaszczyzny równoległej, a także przesuwać w płaszczyźnie pary, więc z tego wynika, że moment pary jest to wektor swobodny.

Uogólnimy teraz twierdzenia poprzednio dowiedzione.

Przypuśćmy, że na ciało sztywne działają dwie pary, z których pierwsza ma moment M_1, druga zaś M_2. Dowiedziemy:

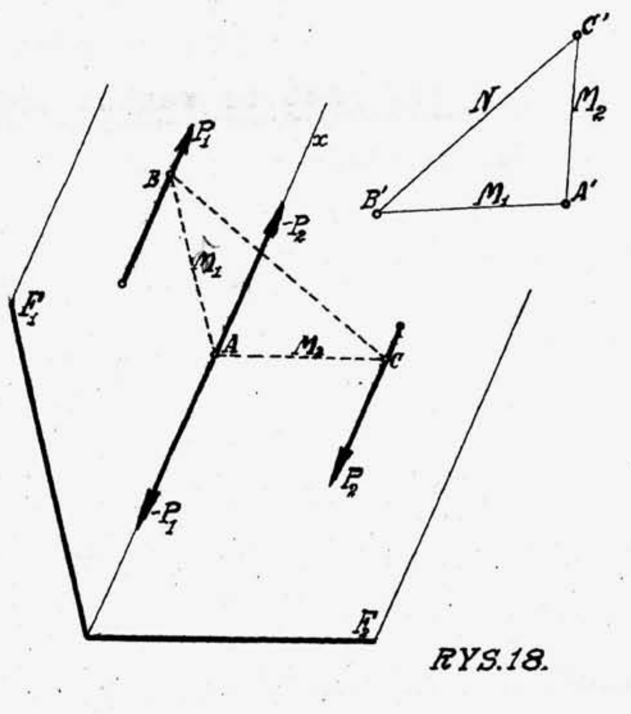
1-o/ że istnieje zawsze taka para, która wywrze ten sam skutek, co dwie pary dane. Parę tę nazywamy wypadkową, a pary dane składowemi.

2-o/ że moment pary wypadkowej jest sumą geometryczną momentów par składowych.

Oznaczmy siły pierwszej pary przez P_1 ,a ramię jej przez r_1 . Ponieważ P_1 i r_1 możemy obierać dowolnie, aby tylko iloczyn ich był równy M_1,więc możemy też przyjąć za P_1 siłę jednostkową, a wtedy r_1 będzie liczbowo równe momentowi M_1 . Jeśli, tak samo, siły drugiej pary oznaczymy przez P_2 ,a ramię przez r_2 i za P_2 obierzemy siłę jednostkową, to będzie zachodziła równość $M_2 = r_2$, gdzie znak = wskazuje tylko na związek liczbowy pomiędzy M_2 i r_2.

Załóżmy wreszcie, że para M_1 działa w płaszczyźnie F_1 , zaś para M_2 , w płaszczyźnie F_2 . Niech prosta x będzie prostą przecięcia płaszczyzn par.

Przesuńmy parę pierwszą w płaszczyźnie F_1 , tak aby jedna z sił pary leżała na prostej przecięcia x .



RYS.18.

Tak samo uczyńmy z parą drugą w płaszczyźnie F_2, przytem ta siła drugiej pary ma upaść na prostą x , która przybiera przytem kierunek odwrotny do poprzedzającej.

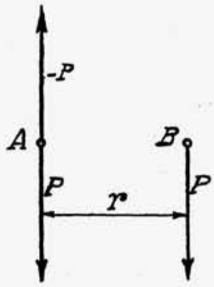
Na prostą x działają dwie siły, odwrotne i równe, bo każda z nich jest siłą jednostkową. Te dwie siły można więc usunąć. Pozostaną wtedy tylko siły $-P_1$ i P_2. Siły te są równe, równoległe i odwrotnie skierowane, a więc stanowią parę, która wywoła te same skutki, co dwie pary dane. Tym sposobem pierwsza część twierdzenia została udowodniona.

Aby dowieść część drugą, poprowadźmy np. przez punkt A płaszczyznę, prostopadłą do prostej x. Płaszczyzna ta przetnie $+P_2$ w punkcie B, a P_2 w C, czyli płaszczyznę F_1 przetnie według prostej AB, zaś F_2 - według AC. Odcinek AB jest prostopadły do P_1 i do $-P_1$, więc jest to ramię pierwszej pary składowej, równe, jak wiemy, momentowi M_1 tej pary. Tak samo AC jest równe momentowi M_2 drugiej pary składowej. Połączmy punkty B i C, to prosta BC będzie też prostopadła do $-P_1$ i P_1, będzie to ramię pary wypadkowej; ale każda z sił pary wypadkowej jest równa jednostce, więc ramię tej pary równa się momentowi wypadkowemu N.

Obierzmy w płaszczyźnie ABC dowolny punkt B' i przez ten punkt poprowadźmy prostą, prostopadłą do płaszczyzny F_1. Na tej prostopadłej odmierzmy AB czyli moment M_1. Koniec otrzymanego odcinka oznaczmy przez A'. Odcinek $B'A'$ wyraża więc co do wielkości i kierunku moment M_1, pierwszej pary składowej. Przez A' poprowadźmy prostą, prostopadłą do F_2 i od A' odmierzmy na tej prostej ramię AC. Będzie to moment M_2. Koniec tego momentu oznaczmy przez C' i połączmy wreszcie C' z P'. Otrzymamy trójkąt $A'B'C'$, który jak łatwo widzieć, jest równy trójkątowi ABC. Stąd wynika, że $B'C' = BC$ jest równe momentowi pary wypadkowej czyli N. Trójkąt $A'B'C'$ jest obrócony względem trójkąta ABC o 90°, czyli $B'C'$ jest prostopadłe do BC, a więc i do płaszczyzny pary wypadkowej. Z tego wynika, że $B'C'$ jest momentem N pary wypadkowej, i że N jest sumą geometryczną momentów par składowych.

Twierdzenie to łatwo uogólnić: Przypuśćmy, że na dane ciało sztywne działa pewna liczba par, o momentach M_1, M_2, M_3 i t.d. Momenty te są to wektory swobodne, możemy więc obrać ich początek w tym samym punkcie i wyznaczyć wektor wypadkowy; odpowiadająca mu para wywrze ten sam skutek, co pary składowe.

Przypuśćmy, że na ciało sztywne działa siła P, przyłożona w punkcie A i para, o momencie M, leżąca w jednej płaszczyźnie ze siłą. Możemy siłę tej pary i ramię obierać dowolnie, byleby moment był równy M. Obierzmy więc P za siłę pary R, ramię zaś oznaczmy przez r. W takim razie $M = P.r$. Przesuńmy parę tak, aby punkt przyłożenia jednej z sił pary znalazł się w A i aby ta siła była odwrotną do P. Na punkt działają w ten sposób dwie siły równe i odwrotne, a więc równoważące się. Gdy usuniemy je, to zostanie tylko jedna siła P, przyłożona w B, i siła ta wywrze ten sam skutek, co dana siła i dana para; jest to wypadkowa układu.



RYS. 19

Gdy więc, do siły P dodamy parę M, to skutek będzie ten, że siła przesunie się równolegle, o $r = \frac{M}{P}$. Zachodzi pytanie, w którą stronę siła się przesunie? Otóż: Moment wypadkowej względem każdego punktu musi być równy sumie momentów składowych. Moment danej siły P względem A jest równy zeru, więc moment wypadkowy układu względem A musi być równy momentowi pary. Gdy moment pary jest zwrócony do nas, to siłę P trzeba tak przesunąć, aby jej moment względem A był też do nas zwrócony.