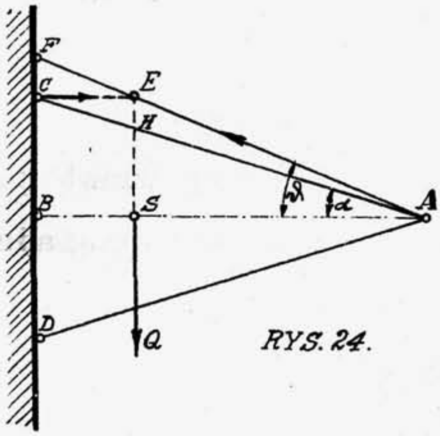
jego stykała się z płaszczyzną podłogi. Podłoga będzie wywierała na poszczęgólne nieskończenie małe elementy podstawy nieskończenie małe reakcye. Wszystkie reakcye będą równoległe i zwrócone pionowo w górę. Posiadają one wypadkową, która jest do nich równoległa, a więc zwrócona też pionowo do góry i równa ich sumie. Z góry nie wiadomo jednak, gdzie ta wypadkowa jest przyłożona. W każdym razie punkt jej przyłożenia musi leżeć wewnątrz podstawy i tylko w granicach tej podstawy może zmieniać położenie. Jeśli naciśniemy np. z góry na lewą część prostopadłościanu, to punkt przyłożenia wypadkowej przesunie się w lewo. Gdy prostopadłościan zaczyna obracać się dokoła jednej z krawędzi podstawy, to ten punkt przyłożenia zajmuje położenie krańcowe na owej krawędzi.

27. Przykład. Prosty, kołowy stożek, o wysokości $=h$ i kącie u wierzchołka $=2\alpha$ opiera się podstawą CD o gładką pionową ścianę. Wierzchołek stożka jest połączony ze ścianą przy pomocy sznura AF. Wyznaczyć największą długość sznura, przy któ



RYS. 24.

rej równowaga jeszcze jest możliwa.

Na stożek działają następujące siły: siła ciężkości Q, przyłożona w środku ciężkości S stożka /który jest odległy od wierzchołka o 3/4 wysokości stożka/, naprężenie sznura, przyłożone w wierzchołku stożka A i reakcya ściany na podstawę stożka skierowana poziomo. Punkt przyłożenia tej reakcji leży między punktami C i D, nie jest jednak z góry wiadomy.

Ponieważ na stożek działają 3 siły, więc warunki równowagi wymagają, aby przechodziły one przez jeden punkt. Dajmy na to, że sznur leży na tworzącej AC stożka. Wtedy linia działania siły, przyłożonej w A, przecina się z linią działania siły Q w punkcie H i przez ten sam punkt musi przechodzić linia działania reakcyi ściany. Jeśli koniec sznura będziemy przywiązywali coraz wyżej nad C, to punkt przyłożenia reakcyi ściany będzie się podnosił, a wraz z tem długość sznura będzie wzrastała. Jednak punkt przyłożenia tej reakcyi nie przejdzie po za punkt C t.j. po za najwyższy punkt podstawy stożka. W tym razie sznur będzie wiąc posiadał naj. większą możliwą długość, którą należy wyznaczyć.

Oznaczmy kąt między sznurem, a poziomem przez ϑ. Wtedy będzie $AF = \frac{h}{\cos\vartheta}$. Trzeba jeszcze wyrazić

$\cos\vartheta$ w funkcyi znanych wielkości. Z trójkąta ESA mamy: $tg\vartheta = \frac{ES}{AS}$, — a że $ES = CB$ i $AS = \frac{3}{4}h$

więc: $tg\vartheta = \frac{4.CB}{3h}$ . . . . (1.)

CB z trójkąta ABC jest równe $h.tg\vartheta$, więc $tg\vartheta = \frac{4h\,tg\alpha}{3h} = \frac{4tg\alpha}{3}$ a stąd i z (1.) wypada $AF = \frac{h\sqrt{9+16tg^2\alpha}}{3}$

W przypadku szczególnym, gdy kąt $2\alpha = 90^\circ$, to:

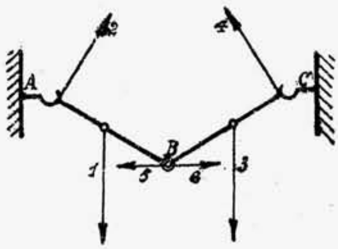
$$AF = \frac{5}{3}h .$$

28. Równowaga układu ciał. Niech będzie układ, złożony z ciał $A, B, C,$ . . . . i niech na te ciała działają pewne siły $P_1, P_2, P_3,$ . . . . . tworzące układ płaski. Wiadomo, że każda siła pochodzi od jakiegoś ciała. Jeśli dane siły pochodzą od ciał, nie należących do układu, to nazywać je będziemy siłami zewnętrznemi. Prócz tych działają też na układ siły, wywierane przez ciała, należące do tego układu i te siły nazywać będziemy wewnętrznemi.

Siłą wewnętrzną będzie więc np. reakcja ciała A na B , lub B na C i t.d.

Niech będą 2 sztaby AB i BC , połączone ze sobą za pomocą luźnego przegubu i zawieszone wolnemi końcami na hakach, wbitych w nieruchome ściany. Na układ, złożony z tych dwuch sztab działają siły następujące:

1/ Siła ciężkości pręta AB . Jest to siła zewnętrzna, gdyż pochodzi od ciała nie należącego do



RYS. 25.

do układu /mianowicie od ziemi/. 2/ Reakcya haka na pręt AB. Jest to również siła zewnętrzna bo wywołuje ją hak. 3/ Siła ciężkości pręta BC i 4/ Reakcya haka na pręt BC. Te dwie ostatnie siły są również zewnętrzne, na tej samej zasadzie, co dwie pierwsze. 5/ Sztaba AB wywiera pewną siłę na sztabę BC w przegubie B i 6/ Taką samą siłę wywiera BC na AC. Te siły są wewnętrzne, bo pochodzą od ciał, które należą do układu.

Niech będzie znów układ, złożony z ciał $A, B, C, ..$ na które działają siły zewnętrzne i wewnętrzne, leżące w jednej płaszczyźnie. Układ jest przytem w równowadze i każde z ciał układu jest również w równowadze. Z tego wynika, że np. siły, działające na ciało A są w równowadze, zatem suma rzutów tych wszystkich sił na dowolny kierunek i suma momentów względem dowolnego punktu są zerami. To samo dotyczy ciał $B, C, \ldots$.

Weźmy jakąś prostą x i wyznaczmy sumę rzutów na nią wszystkich sił, działających na ciało A. Suma ta będzie zerem. Tak samo suma rzutów na tę prostą wszystkich sił działających na ciało B będzie zerem i t.d. Wyznaczając w ten sposób sumy rzutów sił, działających na wszystkie ciała układu otrzymamy tyle równań ile jest ciał w układzie, a dodając te równania, otrzymamy po lewej stronie sumę rzutów wszystkich sił działających na układ i ta suma jest zerem. Ale siły wewnętrzne występują zawsze parami, siły, należące do każdej pary są równe i odwrotnie, a zatem suma ich rzutów jest zerem. Z tego wynika, że z owej sumy rzutów odpadną rzuty sił wewnętrznych i zostanie tylko suma rzutów sił zewnętrznych i ta jest równa zeru.

A więc warunkiem równowagi układu sił jest, aby suma rzutów wszystkich sił zewnętrznych na dowolny kierunek była zerem.

Tak samo możemy dowieść, że suma momentów wszystkich sił zewnętrznych względem dowolnego punktu musi być zerem.

Z tego wynika, że gdyby te siły zewnętrzne działały na jedne ciała sztywne, to byłyby w równowadze. Dlatego też mówi się, że gdy układ jest w równowadze, to siły zewnętrzne równoważą się same przez się.

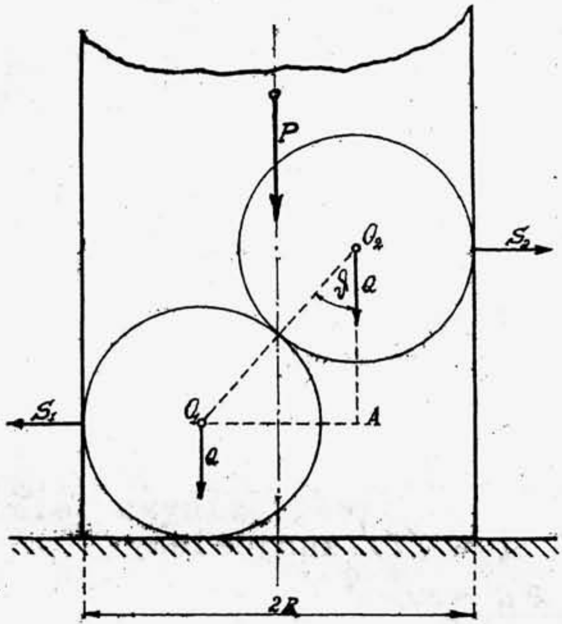
Do tego samego dojść można na innej jeszcze drodze, wprowadziwszy nowy aksyomat statyczny.

Mamy układ ciał sztywnych, pozostający w równowadze. Wprowadźmy do tego układu nowe połączenia, tak aby układ został usztywniony, t.j. aby utworzyło się jedno ciało sztywne. Otóż aksyomat ów głosi, że połączenia te nie zakłócą równowagi. Aby udowodnić, opierając się na tym aksyomacie twierdzenia o warunkach równowagi układu, załóżmy, że na układ złożony z ciał $A, B, C, \ldots$ działają siły zewnętrzne $P_1, P_2, \ldots$ i jest on w równowadze. Przypuśćmy, że układ ten został usztywniony i zamiast ciał $A, B, C, \ldots$ mamy tylko jedno ciało sztywne, na które działają siły $P_1, P_2, \ldots$. Na zasadzie nowego aksyomatu, ciało to jest w równowadze, a zatem suma rzutów sił $P_1, P_2, \ldots$ na każdy kierunek i suma ich momentów względem każdej prostej jest zerem.

Gdy mamy układ ciał sztywnych, to jak dowiedliśmy, warunkiem równowagi jego jest, aby siły zewnętrzne nań działające równoważyły się same przez się. Jest to warunek konieczny, ale nie wystarczający. Można łatwo wskazać przykład, kiedy warunek ten jest spełniony, a mimo to równowaga nie istnieje. Niech np. układ składa się z dwuch kul, leżących na podłodze. Przyłóżmy do jednej z nich siłę P, a do drugiej siłę $-P$. Te dwie siły zewnętrzne równoważą się, lecz kule, pomimo to, zostaną wprawione w ruch.

Wystarczającym warunkiem równowagi układu ciał jest, aby równoważyły się siły działające na każde ciało zosobna.

29. Przykłady. 1/ Na stole ustawiony jest prosty kołowy cylinder /RYS 26/ wewnątrz próżny, o promieniu R. Do tego cylindra włożono dwie kule jednakowe, przyczem promień każdej z nich $=r$, ciężar zaś każdej $=Q$. Jaki powinien być ciężar cylindra, aby ten nie został przewrócony. Na cylinder działają: 1/ ciężar P na osi, 2/ reakcye S_1 i S_2 kul dolnej i górnej; siły te są poziome, i wreszcie 3/ reakcya stołu pionowa.



RYS. 26.

Biorąc rzuty na kierunek poziomy, otrzymamy $S_1 - S_2 = 0$, skąd $S_1 = S_2 = S$. — Ponieważ siły S_2 i S_1 są równe, odwrotne i nie leżące na jednej prostej, więc tworzą parę. Moment tej pary jest równy $S.2r.\cos\vartheta$ gdzie ϑ oznacza kąt O_1O_2A. Na cylinder prócz reakcyi stołu działa siła P i para S. Wyznaczmy wypadkową tej siły i tej pary. Wiadomo, że będzie nią siła równoległa do P i odległa od niej o $\dfrac{S.2r.\cos\vartheta}{P}$. — Dla równowagi jest konieczne, aby

tę wypadkową równoważyła reakcya podłogi. Ta ostatnia nie może wyjść po za granicę podstawy, innemi słowy odległość jej od osi nie może być większa od R, a zatem w przypadku skrajnym $\frac{S.2r\cos\vartheta}{P}=R$
skąd $P=\frac{2S.r\cos\vartheta}{R}$ . . . . (1)
Jest to najmniejsza wartość siły P. Wyznaczymy jeszcze reakcyę S. Na kulę górną działają 3 siły: S, Q i reakcya kuli dolnej, działająca na prostej Q_1Q_2. Siły te równoważą się, a więc suma ich momentów względem każdego punktu jest zerem.

Weźmy sumę momentów względem punktu Q_1, otrzymamy: $-S.2r\cos\vartheta+Q.2r\sin\vartheta=0$, skąd $S=Q\,tg\,\vartheta$...(2)
Podstawiając te wartości w (1) znajdziemy

$$P=\frac{2Q.r\sin\vartheta}{R} \quad . . . . (3)$$

Trzeba jeszcze w tym wzorze zastąpić ϑ przez znane wielkości. Z trójkąta Q_1AQ_2 mamy $\sin\vartheta=\frac{Q_1A}{Q_1Q_2}=\frac{R-r}{r}$

Więc ostatecznie

$$P=\frac{2Q.\cancel{r}.(R-r)}{R\cancel{r}}=\frac{2Q}{R}(R-r) \quad . . . . . . (4)$$

Taki powinien być conajmniej ciężar cylindra.

Gdy wyprowadzimy jakiś ogólny wzór mechaniczny i chcemy sprawdzić, czy przy tem wyprowadzaniu nie popełniliśmy błędu, to możemy dokonać tego przez stosowanie otrzymanego wzoru ogólnego do wypadków szczególnych, możliwie najprostszych.

Jeśli wynik jest w zgodzie z bezpośredniem naszem doświadczeniem, to możemy się spodziewać, że błędu nie zrobiliśmy. Nie upoważnia to nas jednak do zupełnej pewności.

Postąpmy w taki sposób w naszem zadaniu i wykonajmy dwie próby. Załóżmy najpierw, że średnica kuli $2r =$ średnicy cylindra $2R$. Możemy powiedzieć, że w tym wypadku równowaga będzie zachowana sama przez się, gdyż jedna kula będzie się znajdowała pionowo nad drugą, skąd wynika, że najmniejszy potrzebny ciężar cylindra, jak i reakcya S są zerami. Istotnie, czyniąc powyższe założenie we wzorach (2) i (4) czyli podstawiając $\vartheta = 0$, $r = R$ otrzymamy: $S = 0$, $P = 0$.

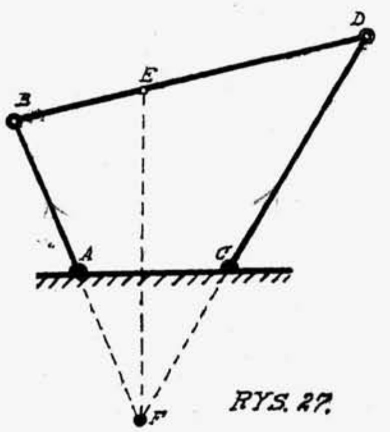
Weźmy teraz inny przypadek szczególny, mianowicie załóżmy, że $R = 2r$.— W tym razie jedna kula będzie leżała około drugiej i równowaga będzie zachodziła sama przez się, t.j. że najmniejsza wartość P, jak i S są zerami. Ponieważ w tym wypadku $\vartheta = 90°$, więc z (2) i (4) znajdujemy $S = \infty$; $P = Q$

Otrzymaliśmy więc wyniki sprzeczne z przewidywaniem.

Czy jednak stąd można wnioskować, że zadanie zostało źle rozwiązane?

Zostawimy to pytanie otwartem.

II/ Sztaby AB i CD, osadzone w nieruchomych zawiasach A i C są połączone przegubowo sztabą BD. Sztaby są lekkie, to zn. ciężaru ich nie będziemy brali w rachubę. W którym punkcie sztaby BD należy zawiesić ciężar, aby równowaga była zachowana?



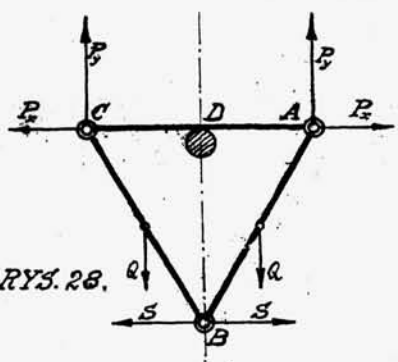
RYS. 27.

Zwróćmy uwagę na układ, złożony z 3 sztab danych. Siły zewnętrzne, działające na ten układ są następujące: ciężar zawieszony na BD, reakcya podłogi, działająca na AB w zawiasie A, reakcya podłogi, działająca na CD w zawiasie C. Siły te muszą się równoważyć, a zatem muszą przechodzić przez jeden punkt.

Trzeba więc wyznaczyć kierunki reakcyi zawias A i C i przez punkt przecięcia tych kierunków, przeprowadzić pion, który będzie linią działania ciężaru, zawieszonego na sztabie BD.

Wogóle niewiadomo z góry, jakie kierunki mają reakcye zawias, tu jednak mamy do czynienia z wypadkiem prostym, w którym kierunki te dadzą się łatwo przewidzieć. Zwróćmy uwagę na sztabę AB. Działają na nią dwie siły: reakcya zawiasu A i reakcya sztaby BD w przegubie B i te dwie siły muszą się równoważyć. Lecz dwie siły mogą się równoważyć tylko wtedy, gdy działają na jednej prostej, skąd wynika, że linia działań tych sił jest linia AB /bo punkty ich przyłożenia leżą na tej prostej/. Tak samo dowiedziemy, że reakcya zawiasu C musi mieć kierunek sztaby CD. Przedłużając kierunki sztab AB i CD aż do przecięcia, znajdziemy punkt, przez który należy poprowadzić pion. Na przecięciu tego pionu ze sztabą BD znajduje się punkt E, w którym należy zawiesić ciężar.

III/ Trzy jednakowe sztaby, z których każda waży Q kg. są połączone za pomocą przegubów, tworząc trójkąt równoboczny ABC. Zawieszamy ten trójkąt na kołku D, tak, aby opierał się w środku górnej sztaby AC, która ma położenie poziome.



RYS. 28.

Wyznaczyć reakcye w przegubach.

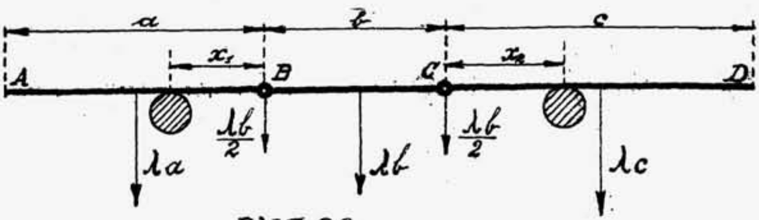
Zauważmy najpierw, że układ jest symetryczny względem pionu BD, zatem reakcye w przegubach A i C są równe. Wystarcza więc wyznaczyć tylko jedną z nich np. reakcyę w A.

Zwróćmy uwagę na sztabę AB. Działają na nią następujące siły: 1/ Siła ciężkości Q, przyłożona w środku tej sztaby, i skierowana pionowo w dół. 2/ Reakcya P sztaby AC, przyłożona w przegubie A. Kierunek tej reakcyi jest nieznany; rozkładamy ją na 2 składowe: poziomą P_x i pionową P_y. 3/ Reakcya sztaby BC w przegubie B. Kierunek tej reakcyi da się z góry przewidzieć. Reakcye sztab BC na AB i AB na BC są równe i odwrotne, a ponieważ układ jest symetryczny względem pionu, przechodzącego przez B, więc obydwie te reakcje są poziome. Oznaczymy je przez S.

Na sztabę AB działają więc te 3 siły i aby one były w równowadze, to suma ich rzutów na dowolny kierunek i suma momentów względem dowolnego punktu musi być zerem. Weźmy sumę rzutów na kierunek poziomy. Znajdziemy odrazu, że $P_x = S$ . . . . (1)
Gdy znów weźmiemy rzuty na kierunek pionowy, to będzie $P_y = Q$ . . . . (2)
Wreszcie weźmiemy sumę momentów względem punktu A. Gdy oznaczymy długość każdej sztaby przez a, to moment siły S względem A będzie $S.a.\cos 30^\circ$, a moment siły Q wyniesie $-Q.\frac{a}{4}$. Warunek równowagi wymaga, aby $S.a.\cos 30^\circ - Q.\frac{a}{4} = 0$, skąd $S = \frac{Q}{2\sqrt{3}}$
Biorąc pod uwagę (1) i (2) otrzymamy:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \frac{Q\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

IV/ Trzy sztaby AB, BC i CD różniące się tylko długościami, są połączone przegubami w punktach B i C. Ciężary ich są proporcyonalne do długości wynoszą więc odpowiednio λa, λb, λc, gdzie λ



RYS. 29.

jest współczynnikiem proporcyonalności i a, b, c oznaczają odpowiednio długości sztab.

Ustawiamy te 3 sztaby tak, aby tworzyły linię prostą i kładziemy je na dwuch kołkach, położonych na jednym poziomie. Jakie położenie należy dać kołkom względem sztab, aby równowaga była zachowana?

Oznaczmy odległość kołka lewego od przegubu B przez x_1, zaś odległość kołka prawego od C -przez x_2. Na układ sztab działają następujące siły: ciężary sztab, przyłożone w środkach ciężkości odpowiednich sztab i skierowane pionowo na dół; reakcye kołków, reakcye w przegubie B i C. Rozłóżmy reakcyę w przegubie B, działającą na sztabę BC na 2 składowe: poziomą i pionową i to samo zróbmy z reakcyą w przegubie C. Składowe pionowe tych reakcyi muszą równoważyć ciężar sztaby BC t. j. λb i oczywiście każda z nich musi się równać $\frac{\lambda b}{2}$.—

Zwróćmy dalej uwagę na sztabę AB. Działają na nią 3 siły: cuężar λa, reakcya kołka i reakcya w przegubie B, której składowa pionowa $P=\frac{\lambda b}{2}$

Te 3 siły muszą być w równowadze; weźmy sumę ich momentów względem lewego kołka. Otrzymamy:

$\frac{\lambda b}{2} x_1 - \lambda a\left(\frac{a}{2} - x_1\right) = 0$, stąd mamy $bx_1 - a^2 + 2ax_1 = 0$

Wreszcie $x_1 = \frac{a^2}{2a+b}$. Analogicznie: $x_2 = \frac{c^2}{2c+b}$. W szczególnym przypadku, gdy $a=b=c$ to $x_1 = x_2 = \frac{a}{3}$.—

ROZDZIAŁ IV.

O TARCIU.

30. Teorya tarcia. Uważaliśmy dotychczas, że gdy 2 ciała stykają się, to wywołują tylko reakcyę normalną do stykających się powierzchni. Zapowiedzieliśmy jednak, że uwzględnimy w przyszłości reakcyę styczną albo siłę tarcia. Zajmiemy się nią obecnie i zaczniemy od pewnego prostego doświadczenia.

Na płaszczyźnie poziomej np. na stole leży jakiś ciężki przedmiot np. płyta żelazna. Na płytę tę