my więc znów do czynienia z reakcyami statycznie niewyznaczalnemi.

Przypuśćmy, że składowa R_1 siły R jest zerem. Pozostaje jeszcze składowa R_2 tejże siły i jest ona zrównoważona reakcją łożyska A, którą oznaczymy przez R_1'. W takim razie ogólna reakcya, jaką wywiera łożysko A jest wypadkową reakcyi R_1' i S.

ROZDZIAŁ VII.

O ŚRODKU CIĘŻKOŚCI.

47. Moment statyczny punktu materyalnego.

Niech będzie w przestrzeni jakaś płaszczyzna którą oznaczymy przez F oraz pewne ciało, tak drobne, aby położenie jego w przestrzeni dało się określić za pomocą trzech współrzędnych, tak jak położenie punktu geometrycznego. Ciało, tak zdefinjowane nazywać będziemy punktem materyalnym. Przypuśćmy, że dany punkt materyalny ma masę m i, że jest odległy od płaszczyzny F o odległość równą z.

Utwórzmy iloczyn $m.z$. Iloczyn taki nazywać b będziemy momentem pierwszego stopnia punktu m względem płaszczyzny F, albo też częściej będziemy używali dla oznaczenia jego nazwy takiej: "moment statyczny punktu m względem płaszczyzny F". Ponieważ odległość z może być dodatnia, równa zeru i ujemna, więc i moment statyczny może być dodatni, równy zeru lub ujemny.

48. Przeciętna odległość grupy punktów materyalnych od płaszczyzny. Niech będzie pewna liczba punktów materyalnych i pewna płaszczyzna F. Oznaczymy masy tych punktów przez $m_1, m_2, m_3, \ldots$ a odległości ich od płaszczyzny F odpowiednio przez $z_1, z_2, z_3, \ldots$ Utwórzmy momenty statyczne tych wszystkich punktów względem płaszczyzny F i weźmy sumę tych momentów, to otrzymamy $m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \ldots$ lub krócej $\Sigma m.z$.—

Suma ta nazywa się momentem statycznym grupy punktów względem płaszczyzny F. Niektóre wyrazy tej sumy mogą być dodatnie, inne ujemne, a więc i suma może być albo dodatnia albo ujemna, albo wreszcie równa zeru.

Oznaczmy sumę mas wszystkich punktów czyli Σm przez M i dobierzmy tak odległość z_0, aby zachodziła równość: $M.z_0 = \Sigma m.z$ . . . (1)

W takim razie z_0 nazywamy średnią odległością grupy punktów od płaszczyzny F. Z (1) wynika, że

$$z_0 = \frac{\Sigma mz}{M}$$

49. Przeciętna odległość ciała od płaszczyzny. Niech będzie teraz płaszczyzna F i jakieś ciało.

Podzielmy to ciało na bardzo drobne części, tak drobne, aby każda z nich mogła być uważana za punkt materyalny. Oznaczmy masy tych punktów przez $m_1, m_2, \ldots$ a odległości ich od płaszczyzny F przez $z_1, z_2, \ldots$ Możemy więc dane ciało uważać za grupę punktów materyalnych, i wyznaczywszy moment statyczny ciała względem płaszczyzny F czyli Σmz znajdziemy, że srednia odległość ciała od płaszczyzny F jest równa $z_0 = \frac{\Sigma mz}{M}$ gdzie M oznacza masę ciała.

50. Środek masy. Niech będzie prostokątny układ współrzednych z osiami x, y, z i początkiem O i niech będzie jakakolwiek grupa punktów materyalnych lub jakieś ciało materyalne, które możemy uważać za zbiór punktów materyalnych. Oznaczmy przez m typową cząstkę, a współrzędne jej względem danego układu przez x, y i z. Wiadomo, że moment statyczny całego ciała względem płaszczyzny yoz jest Σmx zaś jeśli x_0 oznacza przeciętną odległosc ciała od tej płaszczyzny, to $x_0 = \frac{\Sigma mx}{M}$, gdzie M oznacza masę ciała.

Tak samo znajdziemy, że przeciętne odległosci ciała od płaszczyzn xoz i xoy są $y_0 = \frac{\Sigma my}{M}$; $z_0 = \frac{\Sigma mz}{M}$

Możemy wyznaczyć taki punkt, którego

współrzędne są równe x_0, y_0, z_0. Dajmy na to, że punkt S jest tym punktem. Będziemy go nazywali środkiem masy ciała albo środkiem ciężkości ciała, chociaż odrazu musimy zwrócić uwagę na to, że ta ostatnia nazwa nie jest całkowicie właściwa, bo "środek masy" i "środek ciężkości" nie są to dwa pojęcia identyczne.

51. Przeciętna odległość ciała od jakiejkolwiek płaszczyzny. Dowiedziemy, że odległość środka ciężkości od jakiejkolwiek płaszczyzny jest równa przeciętnej odległości ciała od tej płaszczyzny.

Niech będzie jakaś płaszczyzna F mająca równanie: $\xi \cdot \cos\alpha + \eta \cdot \cos\beta + \zeta \cdot \cos\gamma - \delta = 0$

Odległość typowego elementu $m(x,y,z)$ ciała od płaszczyzny F jest równa

$$d = x\cos\alpha + y\cdot\cos\beta + z\cdot\cos\gamma - \delta.$$

Pomnóżmy obydwie strony tej równości przez m, to otrzymamy $m.d = m(x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma - \delta)$

a moment całego ciała względem F:

$$\Sigma m.d = \Sigma m(x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma - \delta)$$

Inaczej $\Sigma m.d = \cos\alpha.\Sigma m.x + \cos\beta.\Sigma my + \cos\gamma.\Sigma mz - \delta\Sigma m$

Ale $\Sigma mx = Mx_0$; $\Sigma m.y = My_0$; $\Sigma m.z = Mz_0$; $\Sigma m = M$

gdzie M oznacza masę całego ciała, a: x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości.

Więc $\Sigma m d = Mx_0.\cos\alpha + My_0.\cos\beta + Mz_0.\cos\gamma - M.\delta$

albo $\Sigma m.d = M(x_0.\cos\alpha + y_0.\cos\beta + z_0.\cos\gamma - \delta)$

A że $x_0.\cos\alpha + y_0.\cos\beta + z_0.\cos\gamma - \delta = d_0$

gdzie d_0 oznacza odległość środka ciężkości ciała od płaszczyzny F więc $\Sigma m d = M d_0$ skąd $d_0 = \frac{\Sigma m d}{M}$

Z tego wynika, że: położenie punktu S w ciele nie zależy od układu współrzędnych, a więc i od położenia ciała w przestrzeni.

52. Twierdzenia pomocnicze: 1/ Niech będzie kilka ciał: pierwsze z nich oznaczymy przez I, masę jego przez M_1, a środek ciężkości przez S_1, dla drugiego użyjemy odpowiednio symboli II, M_2, S_2 i t.d. Niech jeszcze z_0', z_0'', ... i t. d. oznaczają przeciętne odległości ciał I, II i t.d. od danej płaszczyzny F. Rozkładamy każde z ciał na drobne elementy, z których typowym niech będzie m, zaś odległość jego od płaszczyzny F $= z$. Zsumujemy iloczyny $m.z$ dla każdego ciała oddzielnie, a następnie weźmiemy sumę tych wszystkich sum. Otrzymamy $\Sigma_1 m z + \Sigma_2 m.z + \ldots$

Suma ta wyraża moment statyczny układu ciał względem płaszczyzny F. Ponieważ:

$$\Sigma_1 m.z = M_1.z_0' ; \Sigma_2 m.z = M_2.z_0'' ; \ldots\ldots$$

więc moment statyczny układu ciał względem F jest równy $M_1 z_0' + M_2.z_0'' + \ldots$ a przeciętna odległość układu od płaszczyzny F wynosi: $z_0 = \frac{M_1 z_0' + M_2.z_0'' + \ldots}{M_1 + M_2 + \ldots}$

Wyobraźmy sobie, że masa ciała I-go, skoncentrowała się w punkcie S_1, masa II-go w S_2 i t.d.

Otrzymamy więc zamiast układu ciał grupę punktów materyalnych o masach $M_1, M_2, \ldots$ i przeciętna odległość tej grupy od płaszczyzny F jest równa

$$\frac{M_1 z_0' + M_2 . z_0'' + \ldots\ldots}{M_1 + M_2 + \ldots\ldots}$$

Z tego widać, że gdy chodzi o wyznaczenie środka ciężkości pewnego układu ciał, to możemy uważać, że masa każdego z ciał jest skoncentrowana w jego środku ciężkości.

Twierdzenie to bywa nieraz użyteczne i przy wyznaczaniu środka ciężkości ciała pojedynczego, zdarza się bowiem, że dane są środki ciężkości pewnych części jego. W tym razie uważamy każdą z części za punkt materyalny o masie równej masie owej części i wyznaczamy środek ciężkości takiej grupy punktów.

II/ Niech będzie jakakolwiek płaszczyzna P i pewna grupa punktów materyalnych w niej leżących. Oznaczmy tę płaszczyznę przez F, a masy tych punktów przez $m_1, m_2, \ldots$ Moment statyczny każdego z tych punktów względem płaszczyzny F jest oczywiście zerem, a zatem i moment statyczny całej grupy jest zerem. Z tego wynika, ze środek ciężkości tej grupy leży w płaszczyźnie F.

III/ Niech będzie pewna liczba punktów materyalnych, położonych na prostej x. Oznaczmy te punkty przez $m_1, m_2, \ldots$ Środek ciężkości tej grupy punktów leży w każdej płaszczyźnie przechodzącej

IV/ Niech będą dwa punkty materyalne m_1 i m_2. Na zasadzie poprzedzającego twierdzenia środek ciężkości S tych dwuch punktów leży na prostej łączącej je. Chodzi tylko o wyznaczenie w którym punkcie?

Oznaczmy nieznaną odległość Sm_1 przez x_1 zaś m_2S przez x_2. Poprowadźmy przez S płaszczyznę F, prostopadłą do prostej $m_1 m_2$. Ponieważ ta płaszczyzna przechodzi przez środek ciężkości grupy punktów, więc moment statyczne tej grupy względem F jest zerem.

Będzie więc $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$. z czego wynika, że S leży pomiędzy m_1 i m_2 i $\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

Czyli, że <u>środek ciężkości punktów m_1 i m_2 dzieli odcinek $m_1 m_2$ wewnętrznie na części odwrotnie proporcyonalne do mas tych punktów.</u> Jeśli, w przypadku szczególnym, masy m_1 i m_2 są równe, to środek ciężkości dzieli odcinek $m_1 m_2$ na dwie równe części.

V/ Niech będzie jakieś ciało, składające się z dwuch części symetrycznych mechanicznie *) względem płaszczyzny F. Środek ciężkości każdej pary

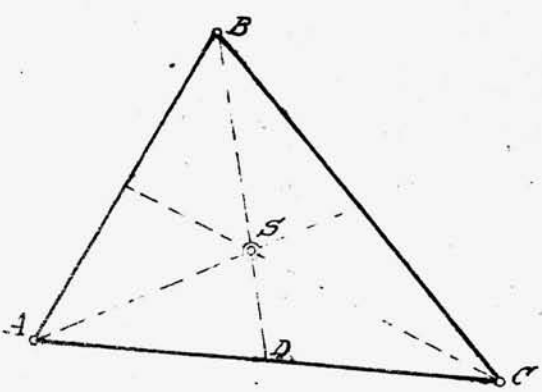
---

*/ Symetrya mechaniczna ciała polega na tem, że elementy symetryczne posiadają masy równe. Ciało symetryczne geometrycznie względem pewnej płaszczyzny może nie być symetryczne mechanicznie.

elementów symetrycznych leży w płaszczyźnie F, a więc i środek ciężkości całego ciała, leży w tej płaszczyźnie. Tak samo jeśli ciało ma oś symetryi, to środek ciężkości ciała leży na tej osi, a jeżeli ciało posiada środek symetryi, to środek ten jest środkiem ciężkości.

Przy pomocy tych twierdzeń dają się wyznaczyć środki ciężkości wielu ciał. Więc np. środek ciężkości pręta jednorodnego, leży w środku tego pręta. Środek ciężkości kuli jednorodnej leży w środku kuli; środek ciężkości kołowego cylindra jednorodnego leży w środku osi cylindra i t.d.

53. Środek ciężkości trójkąta. W wierzchołku trójkąta ABC są umieszczone trzy masy, z których każda jest równa m. Chodzi o wyznaczenie środka ciężkości grupy, złożonej z tych trzech punktów



RYS. 55.

Środek ciężkości dwóch z tych trzech mas np. tych, które leżą w A i C leży w środku D boku AC. Możemy uważać, że masy tych dwuch punktów są skoncentrowane w tym punkcie D, czyli że w punkcie D znajduje się masa $2m$. Połączmy punkty B i D, to oczywiście na prostej BD /czyli na środkowej boku AC/ leży środek ciężkości punktów A, B i C. Ten sam środek leży również na każdej innej środkowej trójkąta ABC.

Ponieważ w punkcie D jest skoncentrowana masa $2m$, a masa w punkcie B jest m, więc środek ciężkości S punktów B i D leży w takiej odległości od B i D, że $BS = 2DS$.

Innemi słowy, środek ciężkości danej grupy punktów leży na jednej ze środkowych trójkąta, w odległości $\frac{2}{3}$ tej środkowej od odpowiedniego wierzchołka. Po za rozwiązaniem naszego właściwego zadania, t.j. znalezienia środka ciężkości danej grupy punktów, otrzymaliśmy jeszcze dowód następującego twierdzenia geometrycznego: wszystkie środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

54. Środek ciężkości jednorodnego pola trójkątnego ABC. Podzielmy dane pole na paski elementarne prostemi równoległemi do boku BC i połączmy środek tego boku D z wierzchołkiem A. Prosta AD przetnie prostą PQ, jedną z owych

RYS. 56.

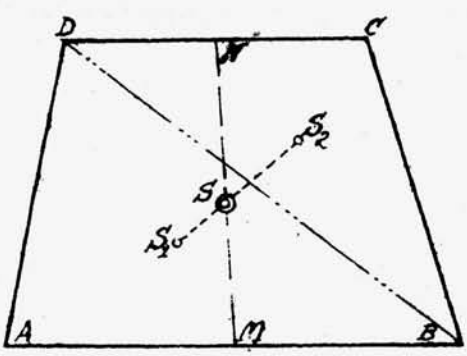
równoległych do BC, w punkcie N, który jest oczywiście środkiem odcinka PQ.

Widzimy, że środki wszystkich odcinków, równoległych do BC leżą na AD.

Możemy uczynić każdy pasek dowolnie wązkim, a zatem środek ciężkości każdego z nich leży w środku geometrycznym /podobnie, jak środek ciężkości cienkiego pręta/, czyli na prostej AD. Z tego wynika, że środek ciężkości całego trójkąta leży na środkowej AD.

Dowiedziemy tak samo, że środek ciężkości trójkąta leży na każdej z dwuch pozostałych środkowych, t.j. leży w tem samem miejscu, co środek ciężkości trzech jednakowych mas umieszczonych w wierzchołkach.

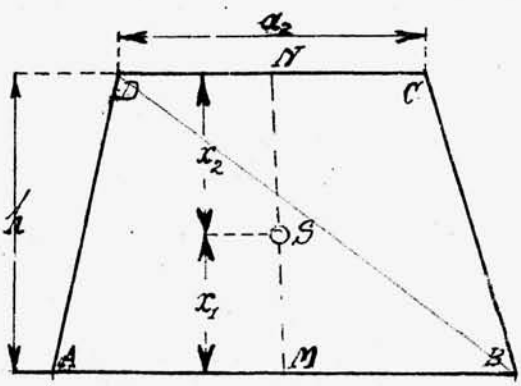
55. Środek ciężkości pola trapezu. Niech będzie trapez $ABCD$. Podzieliwszy go na bardzo wązkie paski prostemi, równoległemi do podstaw dowiedziemy z łatwością, że środek ciężkości trapezu leży na prostej, łączącej środki pod-



RYS. 57.

staw. Oznaczymy te środki przez M i N. Podzielmy dalej trapez $ABCD$ na dwa trójkąty: ABD i BCD przekątnią BD. Przypuśćmy, że w punktach S_1 i S_2 leżą środki ciężkości tych trójkątów. Oczywiście, że środek ciężkości S trapezu leży na prostej $S_1 S_2$, a że leży on jednocześnie na środkowej MN, więc leży w punkcie przecięcia się $S_1 S_2$ z MN. Punkt ten można wyznaczyć przy pomocy konstrukcji następującej.

Oznaczmy wysokość przez h, podstawę dolną przez a_1, górną przez a_2 i przypuśćmy, że środek ciężkości S jest odległy od podstawy dolnej o x_1 a od górnej o x_2



RYS. 58.

Poprowadźmy przez prostą AB płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny trapezu i wyznaczmy moment statyczny tej płaszczyzny względem prostej AB. Wiadomo, że pole trapezu jest równe $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h$. Jeśli przez μ oznaczymy masę $1\,m^2$ pola trapezu, to: $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h \cdot \mu$

wyraża masę całego trapezu, a $\frac{a_1+a_2}{2}\cdot h\cdot\mu\cdot x_1$ jest momentem statycznym trapezu względem AB. Jest rzeczą oczywistą, że położenie środka ciężkości nie może być zależne od μ, a zatem bez straty na ogólności zadania możemy założyć $\mu=1$, czyli że moment statyczny trapezu względem AB jest równy

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot h\cdot x_1 \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Suma momentów statycznych trójkątów ABD i BCD względem AB jest równy:

$$\frac{a_1\cdot h}{2}\cdot\frac{h}{3}+\frac{a_2\cdot h}{2}\cdot\frac{2h}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

A że, oczywiście (1) = (2), więc:

$$\frac{(a_1+a_2)h}{2}\cdot x_1=\frac{a_1 h}{2}\cdot\frac{h}{3}+\frac{a_2 h}{2}\cdot\frac{2h}{3}$$

skąd

$$3(a_1+a_2)\cdot x_1=(a_1+2a_2)h \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Biorąc moment statyczny trapezu względem DC otrzymamy analogicznie

$$3(a_1+a_2)\cdot x_2=(2a_1+a_2)\cdot h \quad . \; . \; . \quad (4)$$

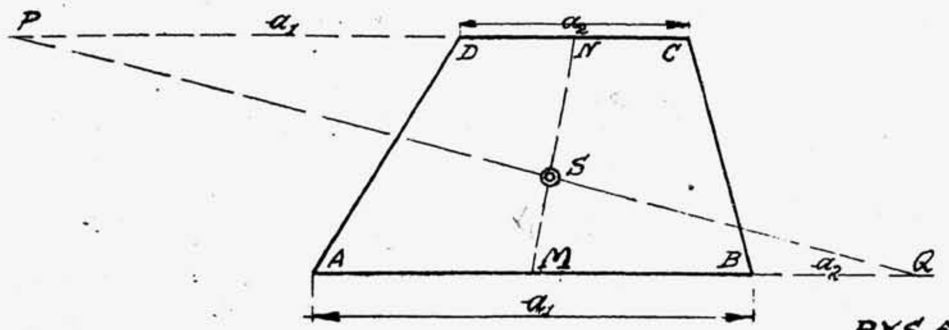
Dzieląc (3) przez (4) będziemy mieli

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\frac{a_1}{2}+a_2}{a_1+\frac{a_2}{2}} \quad . \quad (5)$$

Oczywiście, że stosunek ten wyznacza całkowicie położenie punktu S na środkowej MN, gdyż

$$\frac{MS}{SN}=\frac{x_1}{x_2}$$

Wykreślimy równanie (5). Odmierzmy na prostej

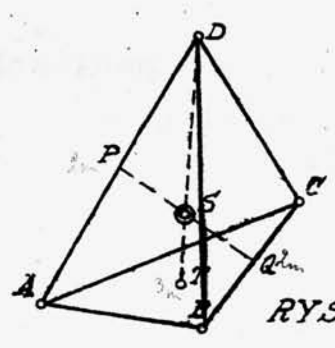


RYS. 59.

DC od punktu D odcinek $DP = a_1$, zaś na prostej AB od punktu B - odcinek $BQ = a_2$ i połączmy punkty P i Q, to w przecięciu ze środkową MN otrzymamy szukany środek ciężkości S trapezu $ABCD$.

Istotnie z trójkątów podobnych MSQ i NDP mamy: $\frac{MS}{SN} = \frac{MQ}{NP}$, a że $MQ = \frac{a_1}{2} + a_2$ zaś $NP = a_1 + \frac{a_2}{2}$ więc $\frac{MS}{SN} = \frac{\frac{a_1}{2} + a_2}{a_1 + \frac{a_2}{2}}$.

56. Środek ciężkości mas, umieszczonych w wierzchołkach czworościanu. Dajmy na to, że w wierzchołkach czworościanu $ABCD$ znajdują się cztery punkty, każdy o masie m. Chodzi o wyznaczenie środka ciężkości tej grupy punktów.



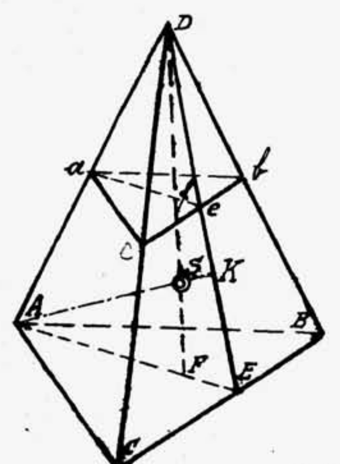
RYS. 60.

Wyznaczymy najpierw środek ciężkości punktów, umieszczonych w wierzchołkach ABC. Przypuśćmy, że punkt T jest tym środkiem ciężkości. Możemy uważać, że w punkcie T jest skoncentrowana masa $=3m$ i zadanie nasze sprowadza się do znalezienia środka ciężkości dwuch mas: jednej, znajdującej się w $T(3m)$ i drugiej w punkcie $D(m)$. Szukany środek ciężkości leży oczywiście na prostej DT w takich odległościach od T i D, że $DS=\frac{3}{4}DT$. Tak samo moglibyśmy dowieść, że szukany środek ciężkości leży na prostych, łączących trzy pozostałe wierzchołki czworościanu, ze środkami cieżkości ścian przeciwległych, a z tego wynika, twierdzenie geometryczne takie: Proste, łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości ścian przeciwległych przecinają się w jednym punkcie.

Możemy jeszcze inaczej rozwiązać nasze zadanie: Znajdźmy środek ciężkości mas, umieszczonych w wierzchołkach A i D Środek ten leży, oczywiście, w środku krawędzi AD w punkcie P. Tak samo w punkcie Q, będącym środkiem krawędzi BC, leży środek ciężkości mas, umieszczony w punktach B i C. Możemy więc uważać, że w punktach P i Q są zgrupowane masy, z których każda jest równa $2m$ i oczywiście środek ciężkości czworościanu leży w środku odcinka, łączącego punkty P i Q.

Doszlibyśmy do tego samego środka ciężkości, gdybyśmy przeprowadzili poprzednie rozumowanie nad parami krawędzi AB i DC lub BD i AC, a z tego wynika twierdzenie geometryczne: trzy proste, łączące środki przeciwległych krawędzi czworościanu, przecinają się w jednym punkcie.

57. Środek ciężkości objętości czworościanu $ABCD$. Dzielimy czworościan na warstwy elementarne płaszczyznami równoległemi do jednej ze ścian. Niech jedną z tych płaszczyzn będzie abc, i niech E będzie środkiem krawędzi BC. Prosta DE dzieli na pół wszystkie odcinki takie, jak bc, równoległe do BC, a prócz tego widać, że proste AE i ae są równoległe. Gdy odmierzymy $AF = \frac{2}{3} AE$ to F będzie środkiem ciężkości podstawy ABC. Poprowadźmy prostą DF, przetnie ona ae w punkcie f. Z podobieństwa trójkątów wypadnie, że $\frac{af}{AF} = \frac{ae}{AE}$ —, zatem $af = \frac{2ae}{3}$ z czego znów wynika, że f jest środkiem ciężkości trójkąta abc.



RYS.61.

Widzimy, że środki ciężkości wszystkich warstw elementarnych leżą na prostej DF, a więc na tejże prostej leży środek ciężkości całego czworościanu. Środek ciężkości czworościanu leży na każdej prostej tę-