gość części zwisającej pionowo przez y, zaś długość łuku MN przez $2s$. — Na zasadzie znanych zależności będziemy mogli napisać

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}}+e^{-\frac{c}{a}}\right) \; ; \quad s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}}-e^{-\frac{c}{a}}\right) \; ;$$

a dodając te 2 równania stronami otrzymamy: $y+s=a e^{\frac{c}{a}}$

Ale $y+s=l$ więc: $l=a e^{\frac{c}{a}}$ . . . . $(1.)$

Należy znaleźć przy jakiej wartości parametru a wartość l jest najmniejsza. W tym celu różniczkujemy równanie $(1.)$ względem a i przyrównujemy rezultat do zera.

$$\frac{dl}{da}=e^{\frac{c}{a}}-\frac{c.a.e^{\frac{c}{a}}}{a^2}=0$$

skąd: $e^{\frac{c}{a}}\left(1-\frac{c}{a}\right)=0$; $1-\frac{c}{a}=0$ i $a=c$

Łatwo się przekonać, że ta wartość a odpowiada minimum, a nie maksymum, gdyż o maksymum w danym zadaniu nie może być mowy; — jakkolwiek długi, a większy od minimum byłby sznur to zawsze zajdzie równowaga.

Podstawiając $a=c$ . . w $(1.)$ otrzymamy $2l=2c.e$

36. Dalszy ciąg teoryi łańcuchowej. Niech będzie łańcuchowa, utworzona przez sznur, przymocowany w punktach M i N. Osie obieramy, jak zwykle i pozostawiamy bez zmiany wszystkie poprzednie oznaczenia. Wówczas będzie: $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ . . . . $(1.)$

Równanie to przekształcimy w sposób następujący. Zmieńmy układ współrzędnych, przesuwając oś x, równolegle do wierzchołka A i współrzędne bieżące w tym zmodyfikowanym układzie oznaczymy przez ξ i η (RYS. 39) —, to oczywiście $x=\xi$; $y=\eta+a$. Podstawiając te wartości w (1), otrzymamy

$$\eta+a=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{\xi}{a}}+e^{-\frac{\xi}{a}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

Rozwińmy w szereg funkcye wykładnicze $e^{\frac{\xi}{a}}$ i $e^{-\frac{\xi}{a}}$. Będziemy mieli

$$e^{\frac{\xi}{a}}=1+\frac{\xi}{a}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\xi}{a}\right)^3+\ldots\ldots \quad \ldots (3.)$$

$$e^{-\frac{\xi}{a}}=1-\frac{\xi}{a}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\xi}{a}\right)^3+\ldots\ldots \quad \ldots (4.)$$

Dodając (3.) i (4.), otrzymamy:

$$e^{\frac{\xi}{a}}+e^{-\frac{\xi}{a}}=2\left[1+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\xi}{a}\right)^4+\ldots\ldots\right] \quad (5.)$$

gdyż wyrazy z nieparzystemi potęgami ξ znoszą się. Gdy wyrażenie (5.) podstawimy do równania (2.), to znajdziemy, że $\eta=a\left[\frac{1}{1.2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\xi}{a}\right)^4+\ldots\ldots\right]$

Im bardziej płaski jest sznur, tem większy jest parametr a . Jeśli sznur jest tak silnie wyciągnięty, że a jest większe od c gdzie $2c$ oznacza rozpiętość sznura, czyli odległość MN , to oczywiście $\xi < a$ i $\frac{\xi}{a}$ jest ułamkiem właściwym.

Jeśli sznur jest bardzo silnie wyciągnięty, to ułamek ten jest mały, wobec czego znaczenie wyrazów z czwartą i wyższemi potęgami $\frac{\xi}{a}$ jest małe wobec wyrazu pierwszego i możemy je pominąć, poprzestając na pierwszem przybliżeniu.

Otrzymamy więc $\eta=\frac{a}{2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2$ lub $\xi^2=2a.\eta$

Jest to równanie paraboli z wierzchołkiem w A

i stycznej do osi odciętych. Więc w przybliżeniu można uważać płaską łańcuchową za parabolę i tak się często postępuje.

Rozważmy teraz pewien przypadek szczególny sznura niejednorodnego.

Niech będzie taki sznur, umocowany w dwuch punktach M i N. Przypuśćmy, że ciężar łuku sznura jest wprost proporcjonalny do jego rzutu poziomego. Chodzi o to, jaką linię tworzy sznur w tym razie.

Obierzmy za początek układu wierzchołek O łańcuchowej i za oś rzędnych pion, przechodzący przez O. Oś odciętych będzie styczna do łańcuchowej w O. Niech naprężenie sznura w punkcie O będzie równe S. Obierzmy dowolny punkt B łańcuchowej; naprężenie w nim będzie miało kierunek stycznej do łańcuchowej. Oznaczmy je przez T i załóżmy, że styczna ta tworzy z osią x kąt ϑ. Gdy przetniemy sznur w punktach O i B, to aby łuk OB pozostawał w spoczynku, trzeba przyłożyć w tych punktach owe siły S i T. Rzut łuku OB na oś x jest równy x, a zatem ciężar tego łuku wynosi $k.x$, gdzie k oznacza ciężar jednostki długości.

Siły S, T i kx muszą być w równowadze, a z tego wynika, że rzuty ich na każdy kierunek są zerami.

Weźmy rzut na kierunki poziomy i pionowy, to otrzymamy bezpośrednio $T\cos\vartheta = S \ldots (1)$ i $T\sin\vartheta = \kappa x \ldots (2)$. Dzieląc (2) przez (1) otrzymamy $tg\,\vartheta = \frac{\kappa x}{S}$ a że $tg\,\vartheta = \frac{dy}{dx}$, więc $\frac{dy}{dx} = \frac{\kappa x}{S}$. Jest to równanie różniczkowe łańcuchowej. Inaczej $dy = \frac{\kappa x}{S} dx$. Całkując to równanie, otrzymamy $y = \frac{\kappa x^2}{2S} + C$, gdzie C jest stałą całkowania. Gdy $x = 0$, to $y = 0$, a z tego wynika, że C musi być zerem.

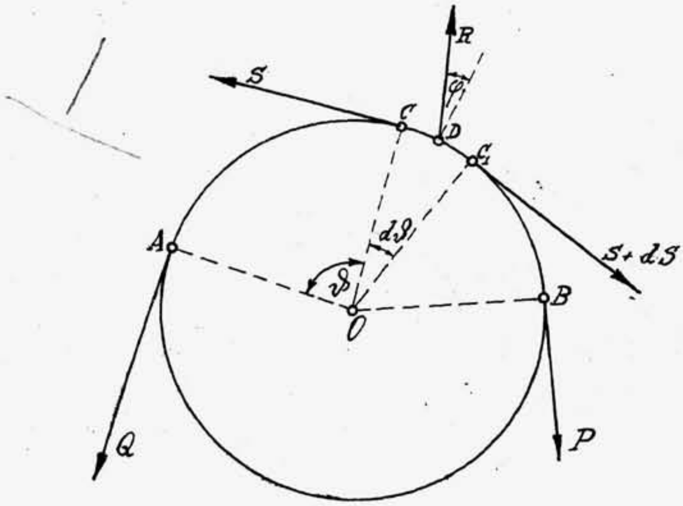
Ostatecznie otrzymujemy więc $y = \frac{\kappa x^2}{2S}$ lub $x^2 = \frac{2Sy}{\kappa}$.

Jest to równanie paraboli, której osią, jest oś rzędnych i która jest styczna do osi odciętych w O. A więc w danym razie łańcuchowa ma kształt paraboli.

Powyższy wynik ma zastosowanie np. w mostach wiszących. Mosty takie urządza się w ten sposób: Na przeciwległych brzegach rzeki zawiesza się dwa łańcuchy równoległe i przy pomocy prętów pionowych łączy się je z poziomym pomostem. Ten pomost stanowi obciążenie łańcuchów /ciężar prętów można pominąć/, które jest proporcyonalne do długości pomostu czyli do rzutu poziomego łuku. Z tego wynika, że łańcuchy utworzą parabolę.

37. Sznur na powierzchni. Na nieruchomą tarczę kołową jest zarzucony sznur, który styka się z nią w 2 punktach A i B. Połączmy te punkty ze środ-

kiem tarczy, i niech kąt, zawarty między promieniami OA i OB będzie równy α, a współczynnik tarcia między sznurami i tarczą niech będzie $= f$.



RYS.43.

Przypuśćmy, że na jeden koniec sznura działa siła Q, chodzi o to, z jaką siłą P należy działać na drugi koniec, by sznur zaczął się przesuwać.

Obierzmy na sznurze dowolny punkt C i połączmy go z O, a kąt AOC oznaczmy przez ϑ. Weźmy jeszcze inny punkt C_1, nieskończenie bliski i połączmy go również z O, to utworzy się kąt $COC_1 = d\vartheta$. Na nieskończenie krótki element sznura CC_1 działają następujące siły: 1/ Naprężenie sznura równe S, na stycznej do niego w punkcie C. 2/ Naprężenie w punkcie C_1, również styczne do sznura. Pod względem wielkości różnić się ono będzie nieskończenie mało od S i będzie równe $S + dS$, gdyż naprężenia sznura wzrastają w kierunku A do B. . 3/ Reakcja tarczy, równa R. Możemy uważać, że jest ona przyłożona w środku D elementu CC_1. Zakładamy, że tarcie między sznurem a tarczą jest całkowicie rozwinięte, ale jeszcze istnieje równowaga. Reakcya tworzy z normalną do tarczy kąt tarcia φ, przytem jest ona zwrócona w lewo, gdyż siła P usiłuje przesunąć sznur w prawo. Te 3 siły: $-S$, $S+dS$ i R mają być w równowadze, a z tego wynika, że ich rzuty na każdy kierunek są zerami.

Bierzemy rzuty na kierunek stycznej do tarczy w punkcie D; ponieważ siły S i $S+dS$ tworzą z tą styczną kąty $\frac{d\vartheta}{2}$, więc otrzymamy:

$$(S+dS)\cos\frac{d\vartheta}{2}-S.\cos\frac{d\vartheta}{2}=R\sin\varphi \quad . \; . \; (1)$$

Rzuty na kierunek normalnej w tym samym punkcie:

$$(S+dS)\sin\frac{d\vartheta}{2}+S.\sin\frac{d\vartheta}{2}=R.\cos\varphi \quad . \; . \; (2)$$

Ponieważ $d\vartheta$ jest nieskończenie małe, przeto $\cos\frac{d\vartheta}{2}=1$, $\sin\frac{d\vartheta}{2}=\frac{d\vartheta}{2}$, i z (1) i (2) otrzymamy:

$$dS=R.\sin\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3.)$$

$$(2S+dS)\frac{d\vartheta}{2}=R.\cos\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Równanie (4) można napisać jeszcze tak:

$$S.d\vartheta=R.\cos\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

gdyż $\frac{dS.d\vartheta}{2}$ jest nieskończenie mała drugiego rzędu, a przeto można ją pominąć.

Gdy podzielimy równanie (3.) przez (5), to otrzymamy $\frac{dS}{S.d\vartheta}=f$, bo $tg\,\varphi=f$. Stąd mamy $\frac{dS}{S}=f\,d\vartheta$ zaś całkując: $lg\,S=f.\vartheta+C$ . . . (6)

gdzie C jest stałą całkowania. Punktowi A odpowiada

$\vartheta = 0$, a naprężenie S w tym punkcie równa się Q, więc $lg Q = C$ i równanie $(6.)$ będzie brzmiało tak $lg \frac{S}{Q} = f\vartheta$ lub wreszcie $S = Q.e^{f.\vartheta}$ . . . $(7.)$

Mając wzór $(7.)$ możemy łatwo wyznaczyć naprężenie w każdym punkcie. Gdy założymy $\vartheta = \alpha$, to otrzymamy $P = Q.e^{f.\alpha}$ . . . . $(8.)$

Przy takiej sile P jeszcze zachodzi równowaga. Aby sznur zaczął się posuwać na tarczy, P powinno być większe.

Następujący przykład okaże, jak szybko wzrasta siła P, ze zwiększaniem się kąta α.

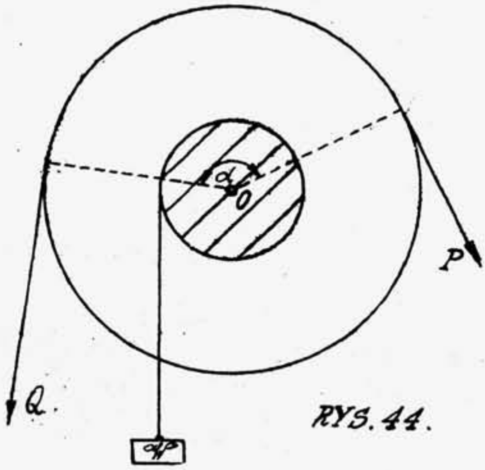
Przypuśćmy, że sznur jest całkowicie owinięty na tarczy, to równanie $(8.)$ przybierze postać taką: $P = Q.e^{f.2\pi}$. Załóżmy, że sznur jest konopny, a tarcza drewniana. W tym razie f jest blizki $\frac{1}{2}$ a zatem: $P = Q.e^{\pi}$, zaś podstawiając zamiast e i π ich wartości będziemy mieli: $P = Q.(2{,}71)^{3{,}14} \cong 23Q$

A więc siła jaką trzeba działać na koniec sznura by ciężar Q zawieszony na drugim końcu zaczął się poruszać powinna być około 23 razy większa od Q.

Przypuśćmy teraz, że sznur dwukrotnie owija tarczę. Wtedy otrzymamy $P = Q.e^{f.4\pi} = Q.e^{2\pi} \cong 529\,Q$

Zastosujemy wzór (8) do rozwiązania następującego zadania praktycznego.

Mamy windę urządzoną w sposób taki: na osi, której śladem w płaszczyźnie rysunku jest punkt O, jest osadzony bęben, o promieniu r. Do bębna tego jest przymocowana linka, na końcu której wisi ciężar $\mathcal{W}$. Na tej samej osi O jest osadzona tarcza o promieniu R; na jej obwód zarzucamy sznur, obejmujący kąt α i wywieramy na końce sznura siły P i Q.



RYS. 44.

Przypuśćmy, że $P > Q$, to siła P usiłuje nadać lince ruch w kierunku ruchu wskaz. zegara; tarcie działa na linkę w kierunku odwrotnym, a na tarczę w tym samym. Gdy siła P będzie dostatecznie duża, to pod działaniem sił tarcia tarcza zacznie się obracać, a ciężar pójdzie w górę. Chodzi o to, jakie powinny być conajmniej do tego siły P i Q.
Przypuśćmy, że jeszcze zachodzi równowaga. Linka nie powinna się ślizgać po tarczy, a zatem możemy uważać, że jest ona przymocowana do tarczy i że

siły P, Q działają wprost na tarczę. Tak więc na ciało sztywne, składające się z bębna, i tarczy, działają 3 siły: P, Q i W i usiłują nadać mu ruch obrotowy około punktu O. Warunkiem dostatecznym równowagi jest, aby suma momentów względem O była zerem. Biorąc momenty względem tego punktu otrzymamy $P.R - Q.R - W.r = 0$ . . , skąd

$$P - Q = \frac{W.r}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

Taką więc powinna być różnica sił P i Q, aby zachodziła równowaga. Chodzi jeszcze o to, by P i Q były jaknajmniejsze. Oczywistem jest, że siła P będzie najmniejszą, gdy Q będzie najmniejsze. Oznaczmy stosunek $\frac{P}{Q}$ przez λ, to $P = Q.\lambda$ . . . (2.) i podstawiając tę wartość P do (1.) otrzymamy

$$(\lambda - 1)Q = \frac{W.r}{R}, \text{ skąd } Q = \frac{W.r}{R(\lambda - 1)} \quad . \; . \; . \; , \quad (3.)$$

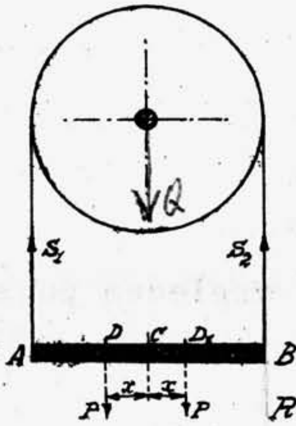
Aby Q było najmniejsze, λ musi być największe. Należy więc tylko znaleźć największą możliwą wartość λ. Lecz stosunek $\frac{P}{Q}$ jest największy wtedy, gdy tarcie pomiędzy linką i tarczą jest całkowicie rozwinięte. Wówczas: $P = Q.e^{f\alpha}$ tj. $\lambda = e^{f\alpha}$

Gdyby jeszcze λ wzrosło, to znaczyłoby to, że albo siła P wzrosła, albo Q - zmalała. W jednym, jak i w drugim wypadku rozpocząłby się poślizg linki po tarczy. Podstawiając tę wartość λ do (3.) otrzymamy:

$$Q = \frac{W.r}{R(e^{f\alpha}-1)}\text{ , zaś }P = \frac{W.r.e^{f\alpha}}{R(e^{f\alpha}-1)} = \frac{W.r}{R.(1-e^{-f\alpha})}$$

Są to najmniejsze wartości sił P i Q. Jeżeli tarcie ma być mniejsze od granicznego, to trzeba zmniejszyć λ, powiększając P i Q.

<u>38. Przykład.</u> Nieruchoma tarcza o promieniu r jest osadzona na osi w płaszczyźnie pionowej. Na tarczę zarzucamy sznur, do którego końców, zwisających pionowo, przywiązujemy ciężką sztabę AB o długości $2r$ i wadze Q kg. Na sztabie w odległości x od jej środka C zawieszono ciężar P. Gdyby ciężar ten zawieszono w punkcie C, to wzrosłoby tylko naprężenie zwisających części sznurów, ale równowaga nie byłaby zachwiana. Nie zostanie ona jednak zachwiana i wtedy, gdy przesuniemy ciężar P ze środka sztaby w lewo, lub w prawo na pewną odległość, nie przekraczającą pewnego maksymum. Przypuśćmy, że w punktach D i D_1, odległych od C o x są skrajne położenia ciężaru, a zatem ciężar P możemy przesuwać dowolnie między punktami



RYS.45.

D i D_1, nie naruszając równowagi. Chodzi o wyznaczenie tej odległości x.

Oznaczmy naprężenie w sznurach przez S_1 i S_2. Przy skrajnem położeniu ciężaru P, tarcie jest całkowicie rozwinięte, a więc możemy zastosować wzór $S_1 = S_2 . e^{f.\alpha}$. W danym razie $\alpha = \pi$, więc $S_1 = S_2 . e^{f.\pi}$ . . . . . . (1). Ponieważ sztaba pozostaje w równowadze, więc suma rzutów sił S_1, S_2, P i Q na każdy kierunek i suma momentów względem każdego punktu muszą być zerami, Gdy weźmiemy rzuty na kierunek pionowy, to otrzymamy:

$S_1 + S_2 = P + Q$ . . . (2) Suma momentów względem punktu C będzie: $S_1 . r - S_2 . r - P . x = 0$ . . . . . (3)

Podstawiając w (2) i (3) wartość S_1 z (1) otrzymamy $S_2 (e^{f.\pi} + 1) = P + Q$ . . . (4), a także $S_2 (e^{f.\pi} - 1) = \frac{P x}{r}$ . . . (5)

Dzieląc (5) przez (4) znajdziemy, po przekształceniu $x = \frac{(P+Q) . r}{P} . \frac{e^{f.\pi} - 1}{e^{f.\pi} + 1}$. Jeżeli $x = r$, to można zawieszać ciężar P w dowolnym punkcie sztaby wówczas $P = \frac{Q}{2} (e^{f.r} - 1)$.

ROZDZIAŁ VI.

O PRZESTRZENNYM UKŁADZIE SIŁ.

Rozważmy teraz działanie na ciała sztywne sił, jakkolwiek skierowanych w przestrzeni.