cyą w przegubie C. Składowe pionowe tych reakcyi muszą równoważyć ciężar sztaby BC t. j. λb i oczywiście każda z nich musi się równać $\frac{\lambda b}{2}$.—

Zwróćmy dalej uwagę na sztabę AB. Działają na nią 3 siły: cężar λa, reakcya kołka i reakcya w przegubie B, której składowa pionowa $P=\frac{\lambda b}{2}$

Te 3 siły muszą być w równowadze; weźmy sumę ich momentów względem lewego kołka. Otrzymamy:

$\frac{\lambda b}{2} x_1 - \lambda a\left(\frac{a}{2} - x_1\right) = 0$, stąd mamy $bx_1 - a^2 + 2ax_1 = 0$

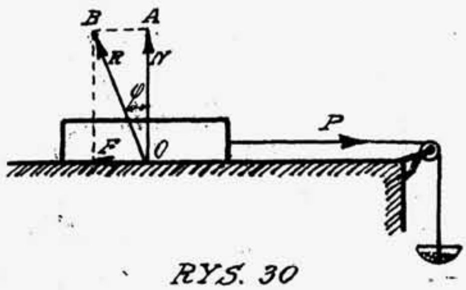
Wreszcie $x_1 = \frac{a^2}{2a+b}$. Analogicznie: $x_2 = \frac{c^2}{2c+b}$. W szczególnym przypadku, gdy $a=b=c$ to $x_1 = x_2 = \frac{a}{3}$.—

ROZDZIAŁ IV.

O TARCIU.

30. Teorya tarcia. Uważaliśmy dotychczas, że gdy 2 ciała stykają się, to wywołują tylko reakcyę normalną do stykających się powierzchni. Zapowiedzieliśmy jednak, że uwzględnimy w przyszłości reakcyę styczną albo siłę tarcia. Zajmiemy się nią obecnie i zaczniemy od pewnego prostego doświadczenia.

Na płaszczyźnie poziomej np. na stole leży jakiś ciężki przedmiot np. płyta żelazna. Na płytę tę



RYS. 30

działają: ciężar Q, przyłożony w środku ciężkości i skierowany pionowo w dół i reakcya stołu $=N$, skierowana pionowo w górę i ta reakcya równoważy całkowicie działanie siły Q, wskutek czego płyta pozostaje w spokoju. Przyłóżmy do płyty jakąś małą siłę poziomą P, co można uskutecznić, przywiązując sznur do końca płyty, przerzucając go przez bloczek i zawieszając na drugim końcu sznura szalkę, na którą kładzie się ciężarki np. w postaci śrutu. Gdy do szalki wrzucimy cokolwiek śrutu o ciężarze P to płyta powinna zacząć się poruszać, gdyż siła P nie może równoważyć się z siłami Q i N. W rzeczywistości jeżeli siła P jest niezbyt wielka, to płyta pozostanie w spokoju. Można to tylko wytłomaczyć tak, że gdy zaczyna działać siła P, to jednocześnie rozpoczyna się działanie innej siły, równej i odwrotnej. Oznaczymy tę siłę przez F i nazwiemy ją siłą tarcia, lub reakcyą styczną.

Wypadkową sił F i N oznaczmy ją przez R, i będziemy nazywali reakcyą całkowitą stołu. Oczywiście ta reakcya całkowita nie jest normalną i tworzy z pionem pewien kąt, który oznaczmy przez φ. Z trójkąta ABO wynika, że $F = N . tg\varphi$ . . . . (1.)

Dosypmy nieco śrutu do szalki. Siła P wzrośnie, ale mimo to ciało pozostanie w spoczynku, a więc musiała wzróść i siła tarcia, a także kąt φ /jak to wynika z wzoru (1.)/ i reakcya całkowita odchyla się bardziej od normalnej. Gdy w dalszym ciągu zwiększać będziemy siłę P, to zwiększać się będzie siła tarcia F i za każdym razem będzie ona dokładnie taką, aby zrównoważyć naprężenie sznura. Ale ten wzrost siły tarcia ma pewną granicę, i siła ta nie może przekroczyć pewnego maksymum. Gdy P przekroczy tę granicę, to F już nie może dotrzymać jej kroku, równowaga zostaje zachwiana i rozpoczyna się ruch ciała. Stąd wynika, że i kąt φ może wzrastać tylko do pewnej granicy. Gdy siła P, a więc i F osiągnęła swą krańcową wartość, to mówimy, że tarcie jest całkowicie rozwinięte i tę wartość nazywamy graniczną siłą tarcia lub tarciem granicznem, zaś największy kąt, jaki wówczas reakcya całkowita tworzy z normalną nazywamy granicznym kątem tarcia lub wprost kątem tarcia.

Tangens kąta tarcia będziemy często oznaczali przez f i nazywali współczynnikiem tarcia. Jak wynika z wzoru (1) współczynnik tarcia jest równy stosunkowi granicznej siły tarcia i reakcyi normalnej t.j. $f = \frac{F}{N}$.

Zauważmy, że gdy siła P działa w prawo, to reakcja całkowita jest odchylona w lewo i odwrotnie. Gdyby siła P była zwrócona do nas, to reakcya całkowita skierowałaby się za płaszczyznę rysunku.

Wyobraźmy sobie, że trójkąt AOB, w którym kąt φ ma wartość graniczną, obraca się dokoła normalnej N . Wtedy reakcya całkowita R zatoczy powierzchnię stożkową. Utworzony w ten sposób stożek będziemy uważali w całej rozciągłości i nazwiemy go <u>stożkiem tarcia</u>. Jest oczywistem, że reakcya całkowita może posiadać każdy kierunek wewnątrz stożka tarcia, może też być tworzącą stożka /gdy tarcie jest całkowicie rozwinięte/, ale nigdy nie może wyjść po za ten stożek. Zobaczymy teraz, od czego zależy współczynnik tarcia i jak się go wyznacza. Klasyczne doświadczenia Coulomba i Morina dały wyniki takie:

1/ Współczynnik tarcia nie zależy wcale od wielkości stykających się powierzchni.

2/ Współczynnik tarcia nie zależy od reakcyi normalnej N , bo gdy np. obciążymy silniej płytę, to wzrośnie reakcya N, ale w tym samym stosunku wzrośnie graniczna siła tarcia F, i stosunek $f = \frac{F}{N}$ pozostanie bez zmiany.

3/ Współczynnik tarcia zależy od stopnia wygładzenia, stykających się powierzchni. Im bardziej chropowate będą te powierzchnie, tem większy jest współczynnik tarcia i odwrotnie. Gdyby powierzchnie były całkowicie gładkie, to współczynnik tarcia byłby zerem i tworzące stożka tarcia zbiegłyby się w jedną prostą, o kierunku normalnej. W rzeczywistości granicy tej osiągnąć nie można.

4/ Współczynnik tarcia zależy od natury stykających się ciał. Inny będzie współczynnik ten /przy jednakowych warunkach pozostałych/ pomiędzy żelazem i miedzią, inny między miedzią i cynkiem i t.d.

5/ Współczynnik tarcia zależy jeszcze od różnych innych okoliczności np. od temperatury, od tego czy powierzchnie zetknięcia są suche, czy wilgotne i t.d.

Współczynnik tarcia można oszacować lub wyznaczyć różnymi sposobami:

1/ Gdy jedno ciało ma postać sztaby, to aby oszacować współczynnik tarcia między niem, a drugiem ciałem ustawiamy sztabę normalnie do powierzchni tego drugiego ciała w jakimkolwiek jej punkcie, a następnie obracamy ostrożnie tę sztabę dokoła owego punktu, wywierając w kierunku niej dowolne ciśnienie. Przy obrocie tym równowaga nie zostanie zachwiana dopóki sztaba znajduje się wewnątrz stożka tarcia, bo wówczas w każdej chwili siła wywierana na sztabę równoważy się z reakcyą drugiego ciała. Wyznaczamy kąt, jaki tworzy sztaba z kierunkiem normalnym w chwili wyjścia ze stanu równowagi; tangens jego jest równy szukanemu współczynnikowi tarcia.

2/ Obciążamy szalkę śrutem /Rys. 30/, którego ciężar zwiększamy dopóty, aż ciało wyjdzie ze stanu równowagi. Wtedy dodajemy ciężar szalki do ciężaru śrutu i otrzymana liczba da nam graniczną siłę tarcia, skąd łatwo już znaleźć współczynnik tarcia f. Ta metoda jest dokładniejsza od poprzedniej.

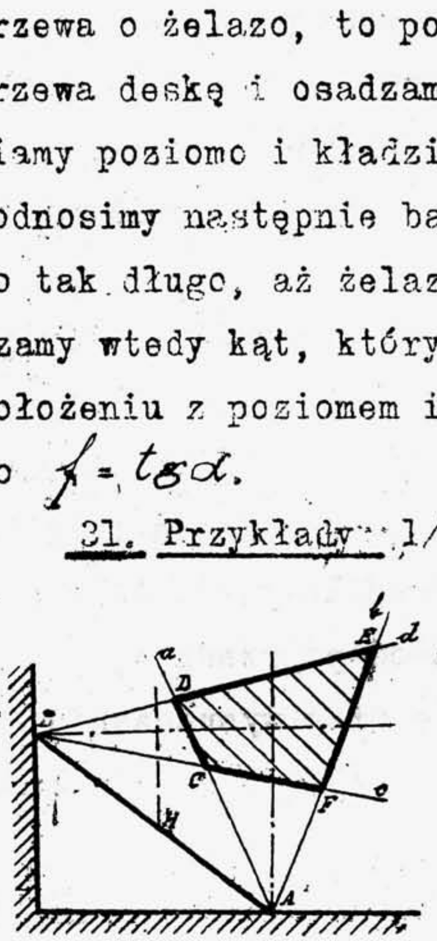
3/ Najczęściej używa się przy wyznaczaniu współczynnika tarcia sposobu opartego na własności równi pochyłej.

Na równię pochyłą, tworzącą z poziomem kąt α kładziemy ciało ciężkie. Na to ciało działa siła ciężkości Q skierowana pionowo w dół. Ona tworzy z prostą, prostopadłą do równi kąt także równy α. Jeżeli α jest mniejsze od kąta tarcia φ, to Q

leży wewnątrz stożka tarcia i równoważy się z reakcyą równi. Jeżeli $\alpha > \varphi$, to reakcya nie może równoważyć siły Q i ciało się zsuwa; jeżeli wreszcie $\alpha = \varphi$, to jeszcze zachodzi równowaga, ale jest to równowaga graniczna.

Gdy chcemy np. znaleźć współczynnik tarcia drzewa o żelazo, to postępujemy tak: robimy z drzewa deskę i osadzamy ją na osi poziomej, ustawiamy poziomo i kładziemy na niej kawałek żelaza. Podnosimy następnie bardzo wolno deskę i robimy to tak długo, aż żelazo zacznie się zsuwać. Wyznaczamy wtedy kąt, który tworzy deska w krańcowym położeniu z poziomem i jeśli ten kąt równa się α, to $f = tg\alpha$.

31. Przykłady. 1/ Jeden koniec drabiny opiera się o poziomą podłogę w punkcie A , drugi o pionową ścianę w punkcie B. /RYS. 31/. Czy w tem położeniu drabina będzie w równowadze?



RYS. 31.

Na drabinę działają trzy siły: siła ciężkości, przyłożona w środku ciężkości H drabiny i skierowana pionowo na dół, reakcya ściany w punkcie B i reakcya podłogi w punkcie A. Ponieważ na drabinę działają 3 siły, więc koniecznym warunkiem równowagi jest przecinanie się tych sił w jednym punkcie.

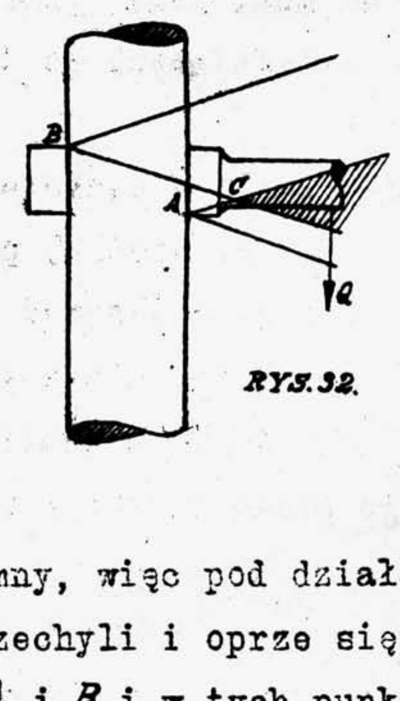
Utwórzmy w punkcie A stożek tarcia; oś jego leży w płaszczyźnie rysunku i jest prostopadła do podłogi. W tejże płaszczyźnie leżą także tworzące a i b. Między niemi musi przechodzić linia działania reakcyi podłogi i tam też musi leżeć punkt przecięcia się wszystkich sił działających na drabinę.

Tak samo zbudujemy stożek tarcia w punkcie B. Również między tworzącemi c i d tego stożka, położonemi w płaszczyźnie rysunku musi znajdować się punkt przecięcia się wszystkich sił, działających na drabinę. A więc ten punkt musi leżeć wewnątrz czworoboku $CDEF$, utworzonego przez tworzące a, b, c i d.

Z tego wynika, że jeśli środek ciężkości drabiny zajmuje położenie takie, że pion przezeń poprowadzony przecina czworobok $CDEF$, to równowaga jeszcze zachowana i tarcie nie jest całkowicie rozwinięte. Jeżeli ten pion przechodzi przez D to jeszcze zachodzi równowaga, ale obydwie te reakcye leżą już na stożkach tarcia t. j. tarcia w A i B

są już całkowicie rozwinięte. Jeżeli pion nie przecina czworoboku, to równowaga jest niemożliwa /RYS. 31/.

II/ Na pionową, cylindryczną kolumnę nakładamy cylindryczną pochwę, mogącą przesuwać się po kolumnie. Do pochwy przymocowane jest ramię poziome, na koniec którego działa pionowa siła *Q*.



RYS. 32.

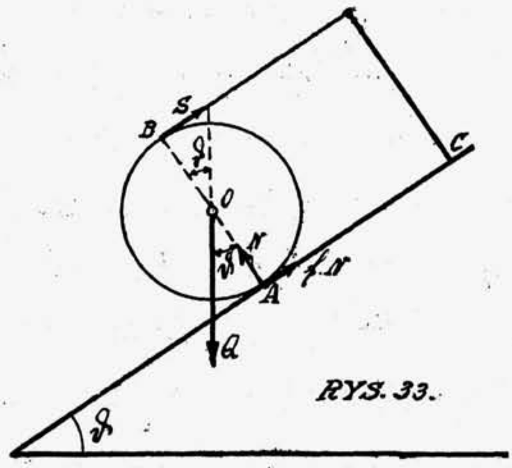
Czy pochwa zacznie się zesuwać po kolumnie, czy zatnie się? Chodzi o to, który z tych dwuch przypadków będzie miał miejsce. Ponieważ średnica otworu, zrobionego w pochwie, jest cokolwiek większa od średnicy kolumny, więc pod działaniem siły *Q* pochwa nieco się przechyli i oprze się o kolumnę w dwuch punktach *A* i *B* i w tych punktach kolumna wywiera na pochwę dwie reakcye. Na pochwę działają więc 3 siły i aby równowaga była zachowana jest koniecznem, aby te siły przecinały się w jednym punkcie.

Zbudujmy stożki tarcia w punktach *A* i *B*. Podobnie, jak w poprzednim zadaniu dojdziemy do wniosku, że punkt przecięcia się sił działających musi leżeć we wspólnej przestrzeni tych stożków t.j. pion, poprowadzony przez punkt przyłożenia siły Q musi przeciąć tę przestrzeń wspólną, aby pochwa się zacięła /czyli: aby równowaga była zachowana/. Równowaga będzie jeszcze zachowana, gdy siła Q będzie przechodziła przez punkt C, w którym przecinają się tworzące stożków. Gdy natomiast przesunie się ona cokolwiek w lewo, to zacznie się ześlizg pochwy po kolumnie.

Przypuśćmy, że chcemy, aby pochwa zesuwała się po kolumnie pod działaniem siły Q. Wtedy należy zrobić owo ramię jaknajkrótszem, a, pozatem trzeba się starać, aby punkt C leżał jaknajdalej od kolumny, co daje się uskutecznić przez wygładzenie powierzchni i smarowanie, bo wtedy kąt tarcia staje się mniejszy i punkt C oddala się.

Jeśli chcemy, aby pochwa się zacięła, to należy postąpić odwrotnie, a więc ramię powinno być jaknajdłuższe a powierzchnie nie gładkie i nie smarowane.

III/ Na deskę, osadzoną na osi poziomej i zajmującą w początku położenie poziome, kładziemy kulę /RYS. 33/ o promieniu r. Współczynnik tarcia między kulą a deską $= f$, a kąt tarcia $= \varphi$.



RYS. 33.

W punkcie C deski osadzamy pionowy pręt sztywny, o długości równej średnicy kuli i przywiązujemy najwyższy punkt kuli /B/ do końca tego pręta za pomocą sznura. O jaki kąt można obrócić deskę, zanim równowaga zostanie zachwiana

Dajmy na to, że w skrajnem położeniu deska tworzy z poziomem kąt ϑ.

Na kulę działają następujące siły: ciężar, równy Q, naprężenie sznura S, reakcya deski w punkcie A, którą rozkładamy na reakcyę normalną do deski N i siłę tarcia, działającą wzdłuż deski do góry i $= f \cdot N$ /w danem położeniu deski tarcie jest całkowicie rozwinięte/.

Ponieważ te cztery siły mają być w równowadze, więc suma ich rzutów na każdy kierunek i suma momentów względem każdego punktu są zerami. Weźmy np. sumę rzutów na kierunek AB t.j. prostopadły do deski.

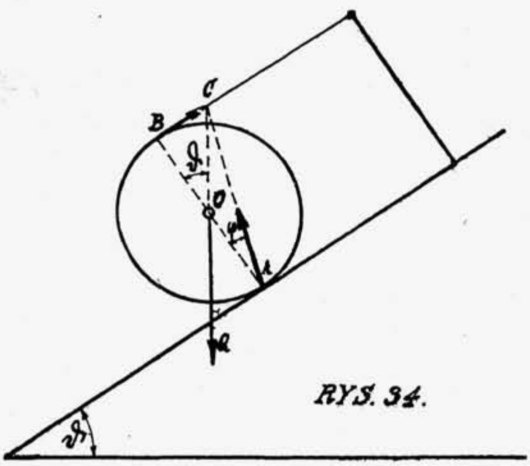
Otrzymamy $N - Q\cos\vartheta = 0$ . . . . (1)

Biorąc momenty względem punktu B znajdziemy

$$-f.N.2r+Q.r.\sin\vartheta=0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Z równania /1/ i /2/ otrzymamy $tg\,\vartheta=2f$.

Przy takim kącie nachylenia deski kula jeszcze będzie w równowadze. Do tego samego rezultatu można dojść drogą geometryczną. Na kulę działają 3 siły. Aby te 3 siły były w równowadze to muszą przechodzić przez jeden punkt, czyli reakcya całkowita w A



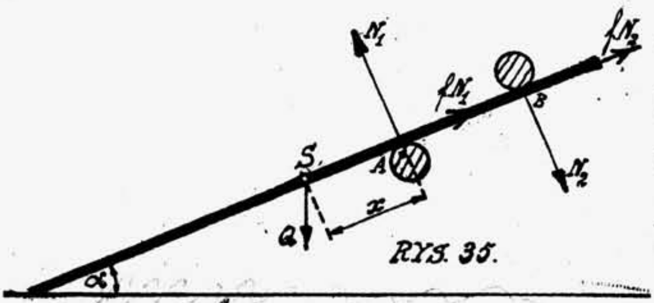
RYS. 34.

/RYS. 34/ musi przejść przez punkt przecięcia się sił S i Q t.j. przez C. Ale, gdy równia tworzy z poziomem kąt ϑ, to ma miejsce równowaga skrajna, tarcie jest całkowicie rozwinięte i reakcya całkowita leży na powierzchni stożka tarcia, zatem kąt CAB jest równy φ t.j. kątowi tarcia.

Z trójkąta OBC mamy $BC=r.tg\,\vartheta$, a że z trójkąta BCA: $BC=2r\,tg\,\varphi$, więc wypadnie: $tg\,\vartheta=2tg\,\varphi=2f$.

IV/: Sztaba, tworząca z poziomem dany kąt α tkwi między dwoma kołkami A i B, których odległość $=a$. Współczynnik tarcia między kołkami a sztabą $=f$.

Chodzi o to, jaka może być najmniejsza odległość środka ciężkości sztaby od kołka A , aby równowaga była jeszcze zachowana.



RYS. 35.

tu się nie opiera

Przypuśćmy, że w S jest skrajne położenie środka ciężkości i że wtedy szukana odległość $SA = x$. W tem położeniu już tarcie pomiędzy kołkami jest całkowicie rozwinięte.

Na sztabę działają następujące siły:

1/ Siła ciężkości Q , przyłożona w środku ciężkości i skierowana pionowo na dół.

2/ Reakcya kołka A , którą rozkładamy na reakcyę normalną do sztaby i $= N_1$, i siłę tarcia $f \cdot N_1$, skierowaną wzdłuż sztaby do góry.

3/ Reakcya kołka B , którą tak samo rozkładamy na dwie składowe: N_2 i $f N_2$.

Ponieważ równowaga ma być zachowana, więc suma rzutów tych sił na każdy kierunek i suma momentów względem każdego punktu są zerami.

Weźmy sumy rzutów na kierunek sztaby i na kierunek prostopadły do sztaby oraz sumę momentów względem punktu B . Otrzymamy:

$$\begin{cases} f N_1 + f N_2 - Q \sin\alpha = 0 & \ldots\ldots (1) \\ N_1 - N_2 - Q \cos\alpha = 0 & \ldots\ldots (2) \\ N_1 . a - Q \cos\alpha . (a+x) = 0 & \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Z (1) mamy $\quad N_1 + N_2 = \frac{Q \sin\alpha}{f}$ . . . . (4)

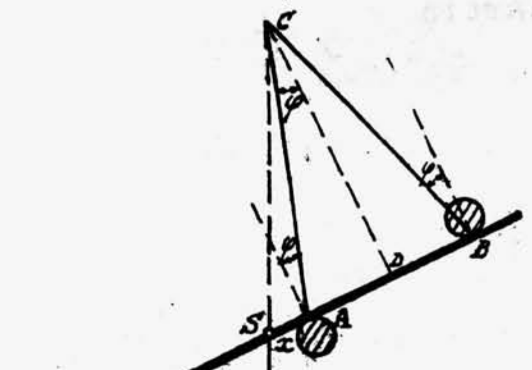
zaś z (2) $\quad N_1 - N_2 = Q . \cos\alpha$ . . . . (5)

Dodając stronami równania (4) i (5) otrzymamy $N_1 = \frac{Q}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{f} + \cos\alpha\right)$. Podstawiając tę wartość na N_1 w (3) będziemy mieli $a\left(\frac{\sin\alpha}{f} + \cos\alpha\right) - 2 . a . \cos\alpha - 2x . \cos\alpha = 0$

skąd $\quad x = \frac{a}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{f} - 1\right)$

Do tego samego rezultatu można dojść drogą geometryczną. Ponieważ na sztabę działają 3 siły /siła ciężkości Q i reakcye całkowite kołków A i B / przeto muszą one przecinać się w jednym punkcie.

Jeśli w punktach A i B utworzymy stożki tarcia to punkt przecięcia się tych sił będzie się mógł znajdować tylko wewnątrz wspólnej przestrzeni tych stożków. A więc siła Q musi przecinać tę przestrzeń wspólną, a w skrajnym położeniu przechodzić przez punkt C. Gdy z punktu C poprowadzimy prostopadłą CD do sztaby, to łatwo zauważymy, że kąt $DCS = \alpha$ /bo ramiona tego kąta są odpowied-



RYS. 36.

nio prostopadle do ramion kąta sztaby z poziomem/.

Ponieważ $SD = CD \cdot tg\,\alpha$ . . ., a $SD = x + \frac{a}{2}$, gdyż trójkąt ABC jest równoramienny, więc

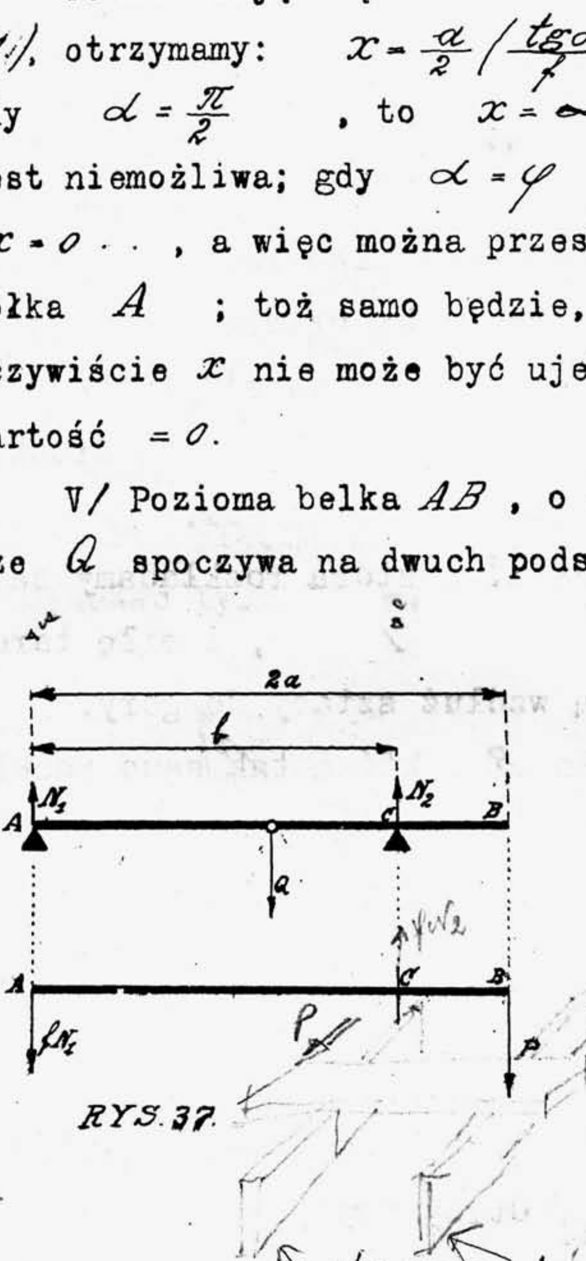
$$x + \frac{a}{2} = CD \cdot tg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.)$$

W trójkącie ACD kąt $\sphericalangle ACD = \varphi$ . ., a więc $CD = \frac{a}{2tg\varphi}$.

Podstawiając tę wartość CD, do równania $(1.)$, otrzymamy: $x = \frac{a}{2}\left(\frac{tg\alpha}{f} - 1\right)$

Gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, to $x = \infty$ . . . t.j. równowaga jest niemożliwa; gdy $\alpha = \varphi$, to $tg\alpha = f$ i $x = 0$ . ., a więc można przesunąć S do samego kółka A; toż samo będzie, gdy $\alpha < \varphi$, bo oczywiście x nie może być ujemne i najmniejsza jego wartość $= 0$.

V/ Pozioma belka AB, o długości $2a$ i ciężarze Q spoczywa na dwuch podstawkach, znajdujących się w punktach A i C /po różnych stronach środka ciężkości belki/. Odległość podstawek $CA = b$, współczynnik tarcia między belką a podstawką $= f$. Przyłóżmy w punkcie B małą siłę P, poziomą i prostopadłą do belki.



RYS. 37.

to mogą być dwa ołówki

Gdy ta siła P jest mała, to belka pozostanie w spoczynku. Powiększajmy siłę P tak długo, aż belka zacznie się poruszać. Chodzi o to, jaki będzie początkowy ruch belki. Możliwe są trzy ewentualności: 1/ Zacznie się najpierw poruszać koniec A, gdy C będzie w spoczynku, t.j. będzie miał miejsce obrót dokoła C. 2/ Punkt A pozostanie w spoczynku i obrót będzie dokoła tego punktu, 3/ Belka ruszy jednocześnie w punktach A i C. Który więc z tych 3 przypadków nastąpi?

Wyznaczmy najpierw reakcye podstawek N_1 i N_2 na belkę. W tym celu weźmy momenty sił, działających w płaszczyźnie pionowej, względem punktu C. Otrzymamy: $N_1 b - Q(b-a) = 0$. Stąd

$$N_1 = \frac{Q(b-a)}{b} \quad \ldots\ldots (1.)$$

Tak samo, biorąc momenty względem punktu A znajdziemy $Q.a - N_2.b = 0$. Skąd $N_2 = \frac{Q.a}{b}$ . . . (2.)

Dajmy na to, że w chwili, gdy siła P, wzrastając doszła do wartości P_1, to tarcie w A doszło do wartości granicznej podczas, gdy tarcie w C nie jest jeszcze całkowicie rozwinięte. Jeśli w tym razie siła P wzrośnie jeszcze cokolwiek, to rozpocznie się obrót około C w kierunku ruchu wskaz. zegara. Siła tarcia w A, równa $f.N_1$ działa w kierunku odwrotnym do tego, w którym punkt ten ma ruszyć. Weźmy momenty sił, działających na belkę w płaszczyźnie poziomej, względem punktu C ; moment siły tarcia w tym punkcie będzie zerem i otrzymamy: $P_1 . (2a - b) - f . N_1 . b = 0$, skąd uwzględniając (1.) znajdziemy $P_1 = \frac{f . Q . (b-a)}{2a-b}$

Taką więc powinna mieć wartość siła P , aby zaczął się poruszać koniec A belki.

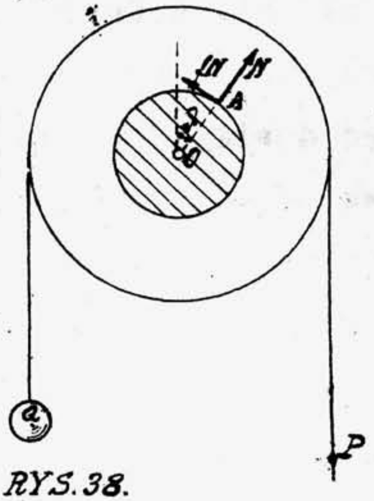
Przypuśćmy, że siła P doszła do wartości P_2 i przytem tarcie w punkcie C osiągnęło wartość graniczną, podczas gdy tarcie w punkcie A nie jest jeszcze całkowicie rozwinięte.

Jeśli w tym razie siła P wzrośnie jeszcze cokolwiek, to rozpocznie się obrót około punktu A w kierunku ruchu wskaz. zegara. Siła tarcia w C , równa $f . N_2$ działa w kierunku odwrotnym do tego, w którym punkt ten ma ruszyć.

Weźmy momenty sił, działających na belkę, względem punktu A , to moment siły tarcia w tym punkcie będzie zerem i otrzymamy: $P_2 . 2a - f . N_2 . b = 0$ skąd uwzględniając (2.) znajdziemy: $P_2 = \frac{f . Q}{2a}$.

Z powyższych rozważań wynika, że jeśli siła P, wzrastając dojdzie wpierw do wartości P_1 , niż do P_2 , czyli że gdy $P_1 < P_2$, to nastąpi obrót około C . Gdy zaś $P_1 > P_2$, to zajdzie odwrótny przypadek: rozpocznie się obrót około A . Gdy wreszcie $P_1 = P_2$, to ruch zacznie się jednocześnie w obydwuch punktach. Znajdźmy, gdzie powinien leżeć punkt C , aby nastąpił ten trzeci wypadek. W tym celu przyrównajmy wyrażenie na P_1 do wyrażenia na P_2 , to otrzymamy: $2b - 2a = 2a - b$ skąd $b = \frac{4a}{3}$ t.j. podstawka powinna leżeć na odległości od końca A , równej $\frac{2}{3}$ długości całej sztaby.

VI. Okrągła tarcza, o promieniu R jest osadzona na poziomym wale, o promieniu r i może się na nim swobodnie obracać.



RYS. 38.

Na tarczę jest zarzucona linka, której końce zwisają pionowo, przytem współczynnik tarcia linki o tarczę jest tak duży, że poślizg linki po tarczy jest wyłączony. Współczynnik tarcia między wałem i tarczą $= f$. Przypuśćmy, że na jednym końcu linki wisi ciężar Q . Z jaką siłą trzeba działać na drugi koniec linki, aby tarcza obracała się na wale i aby ciężar Q posuwał się do góry? Oznaczmy tę siłę nieznaną przez P .

Ponieważ średnica otworu w tarczy jest nieco większa od średnicy wału, więc zetknięcie między tarczą i wałem zachodzić będzie tylko w jednym punkcie

/w przekroju/. Oznaczmy ten punkt przez A i połączmy go ze środkiem tarczy O, to OA tworzy z pionem nieznany kąt ϑ. W punkcie A działa więc reakcya wału na tarczę. Załóżmy, że siła P jest tak wielka, że tarcie między wałem a tarczą jest już całkowicie rozwinięte, ale że zachodzi jeszcze równowaga. Rozkładamy reakcyę całkowitą w A na 2 składowe: normalną $= N$ i styczną $= f.N.$

Ponieważ linka nie może się przesuwać na tarczy, możemy więc uważać, że stanowi ona z tarczą całość i że zatem siły P i Q są przyłożone wprost do tarczy.

Na tarczę działają więc 4 siły: P, Q, N i f.

Weźmy rzuty na kierunek poziomy, to otrzymamy równanie: $N.\sin\vartheta - f.N.\cos\vartheta = 0$

skąd $\operatorname{tg}\vartheta = f = \operatorname{tg}\varphi$ czyli $\vartheta = \varphi$ . . . . (1.)

Gdy weźmiemy rzuty na kierunek pionowy i uwzględnimy równość (1), to będziemy mieli równanie:

$$N.\cos\varphi + f.N.\sin\varphi - P - Q = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2.)$$

Weźmy wreszcie momenty względem punktu O. Otrzymamy:

$$-f.N.r + P.R - Q.R = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3.)$$

Z (2.) mamy: $N(\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\varphi) - P - Q = 0$ skąd $N = (P+Q)\cos\varphi$

Podstawmy tę wartość na N do równania (3), otrzymamy

$$P = Q.\frac{R + r.\sin\varphi}{R - r.\sin\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.)$$

Gdy taka jest siła P to jeszcze zachodzi równowaga. Gdy P będzie większe nastąpi ruch tarczy i podniesienie się ciężaru Q. Nadamy wzorowi (4.) inną postać, a mianowicie:

$$P = Q \cdot \frac{1 + \frac{r}{R} \cdot \sin\varphi}{1 - \frac{r}{R} \cdot \sin\varphi} \quad \ldots (5.)$$

Wzór (5.) wyraża, że siła P zależy od siły Q, i od φ czyli od współczynnika tarcia. Gdy $\sin\varphi$ wzrasta, to wzrasta też licznik, a zmniejsza mianownik i cały ułamek wzrasta, a więc wzrasta też P. Rezultat jest oczywiście zgodny z doświadczeniem.

Wreszcie widzimy, że wartość P zależy od $\frac{r}{R}$ czyli od stosunku promienia tarczy i wału. Gdy stosunek ten wzrasta, to wzrasta licznik ułamka, maleje jego mianownik i cały ułamek wzrasta. A więc im większy jest ten stosunek $\frac{r}{R}$, tem większa musi być siła P. Z tego widać, że aby siła P była jaknajmniejsza, to stosunek $\frac{r}{R}$ powinien być jaknajmniejszy.

Jeśli nie chodzi o podniesienie ciężaru Q, ale o to by nie dopuścić do spadania jego, to najmniejszą siłę jaką można to uczynić znajduje się tak: Przypuśćmy, że siła P jest tak mała, że tarcie w punkcie A jest całkowicie rozwinięte. Gdyby ta siła P była cokolwiek mniejszą, to już zacząłby się spadek ciężaru . Różnica między zadaniem obecnym, a tylko co rozwiązanym polega na tem, że teraz tarcie działa w kierunku odwrotnym, niż poprzednio. Wobec tego należy we wzorze (4) zmienić tylko znaki przed tymi wyrazami, w skład których wchodzi φ. Wtedy otrzymamy

$$P = Q \cdot \frac{R - r \sin\varphi}{R + r \sin\varphi}$$