D i D_1, nie naruszając równowagi. Chodzi o wyznaczenie tej odległości x.

Oznaczmy naprężenie w sznurach przez S_1 i S_2. Przy skrajnem położeniu ciężaru P, tarcie jest całkowicie rozwinięte, a więc możemy zastosować wzór $S_1 = S_2 . e^{f.\alpha}$ .. W danym razie $\alpha = \pi$, więc $S_1 = S_2 . e^{f.\pi}$ . . . . . . (1). Ponieważ sztaba pozostaje w równowadze, więc suma rzutów sił S_1, S_2, P i Q na każdy kierunek i suma momentów względem każdego punktu muszą być zerami. Gdy weźmiemy rzuty na kierunek pionowy, to otrzymamy:

$S_1 + S_2 = P + Q$ . . . (2) Suma momentów względem punktu C będzie: $S_1 . r - S_2 . r - P . x = 0$ . . . . . (3)

Podstawiając w (2) i (3) wartość S_1 z (1) otrzymamy $S_2 (e^{f.\pi} + 1) = P + Q$ . . . (4), a także $S_2 (e^{f.\pi} - 1) = \frac{P x}{r}$ . . . (5)

Dzieląc (5) przez (4) znajdziemy, po przekształceniu $x = \frac{(P+Q).r}{P} . \frac{e^{f.\pi} - 1}{e^{f.\pi} + 1}$. Jeżeli $x = r$, to można zawieszać ciężar P w dowolnym punkcie sztaby wówczas $P = \frac{Q}{2} (e^{f.r} - 1)$.

ROZDZIAŁ VI.

O PRZESTRZENNYM UKŁADZIE SIŁ.

Rozważmy teraz działanie na ciała sztywne sił, jakkolwiek skierowanych w przestrzeni.

Rozpoczniemy od paru przypadków szczególnych.

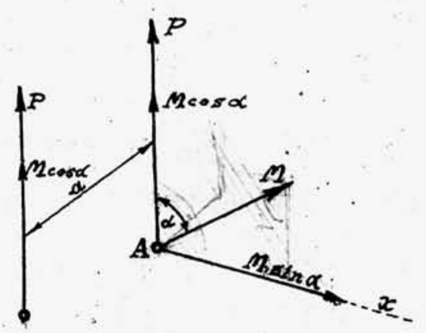
39. Skrętnik. Przypuśćmy, że układ sił jest złożony z jednej siły / P / i z jednej pary, której moment / M / jest równoległy do siły /t.j. płaszczyzna pary jest do siły prostopadła/. Ponieważ moment pary jest wektorem swobodnym, więc początek A jego możemy obrać dowolnie, a więc, np. w punkcie przyłożenia siły P. Taki układ sił nazywa się skrętnikiem. Usiłuje on nadać ciału ruch śrubowy.

Gdy moment pary skrętnika jest zerem, to skrętnik sprowadza się do siły, a gdy siła skrętnika jest zerem, to sprowadza się on do pary, a więc siła i para są szczególnemi przypadkami skrętnika.

40. Inny układ. Dajmy na to, że mamy układ złożony z siły P, przyłożonej w punkcie A i z pary, mającej moment o jakimkolwiek kierunku. Obierzmy znowu początek tego momentu w punkcie A i oznaczmy kąt, jaki tworzy moment z siłą przez α. Dowiedziemy, że taki układ daje się zawsze sprowadzić do skrętnika.

Poprowadźmy w płaszczyźnie wektorów M i P

prostą x, prostopadłą do P i rozłóżmy M na 2 składowe w kierunku P i x. Te składowe są odpowiednio równe $M.\cos\alpha$ i $M.\sin\alpha$.



RYS. 46.

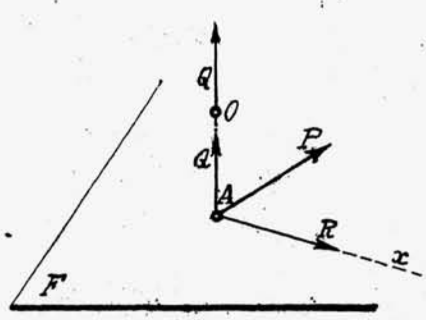
Zwróćmy uwagę na $M.\sin\alpha$. Składowa ta działa w płaszczyźnie, przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do x, a z tego wynika, że $M.\sin\alpha$ jest momentem pary, leżącej w jednej płaszczyźnie z siłą P, a taka para i taka siła sprowadzają się do jednej siły, która leży w tej samej płaszczyźnie i jest odległa od siły P o $a = \frac{M.\sin\alpha}{P}$

W ten sposób sprowadziliśmy dany układ do innego, złożonego z siły P i z pary, o momencie $M.\cos\alpha$, który jest do siły równoległy. Można przenieść początek tego momentu do punktu przyłożenia siły, wówczas otrzymamy skrętnik c.b.d.d.

41. Redukcja układu. Niech będzie jakieś ciało sztywne i przypuśćmy, że działa nań układ, złożony z sił P_1, P_2, P_3, ... Układ taki można sprowadzić do prostszego różnemi sposobami.

Obierzmy np. w przestrzeni dowolny punkt O

i dowolną płaszczyznę F . Dowiedźmy, że układ powyższy daje się sprowadzić do jednej siły, przyłożonej w punkcie O i do jednej siły /lub jednej pary/ działającej w płaszczyźnie F .



RYS. 47.

Dajmy na to, że jedna z sił układu np. P przecina płaszczynę F w punkcie A . Połączmy punkty A i O i oznaczmy prostą przecięcia płaszczyzn PAO i F przez x . Rozłóżmy siłę P na 2 składowe w kierunku OA i x i oznaczmy te składowe przez Q i R , a następnie przenieśmy punkt przyłożenia siły Q do punktu O . A zatem siłę P rozłożyliśmy na 2 składowe, z których jedna jest położona w płaszczyźnie F , a druga jest przyłożona w punkcie O . Tak samo uczyńmy z innemi siłami układu, to otrzymamy n sił, położonych w płaszczyźnie F i n sił, przyłożonych w punkcie O . Wszystkie siły, przyłożone w O posiadają zawsze wypadkową, która jest również przyłożona w O , zaś wszystkie siły, działające w płaszczyźnie F dają się zawsze sprowadzić albo do jednej siły albo do jednej pary c.b.d.d.

Inny sposób upraszczania układu przestrzennego jest następujący: Przypuśćmy, że siła P, przyłożona w A jest jedną z sił układu. Obierzmy w przestrzeni dowolny punkt O, który nazwiemy punktem redukcji lub środkiem redukcji układu. Przyłóżmy w tym punkcie 2 siły równe i odwrotne, z których każda jest równa i równoległa do P. Dana siła P i $-P$ tworzą parę, której moment jest taki sam, jak moment siły P względem O, możemy więc daną siłę P zastąpić przez tę parę i siłę przyłożoną w O. Postąpmy tak samo ze wszystkiemi innemi siłami układu, to otrzymamy n sił przyłożonych w O i n par.

Te n sił posiadają siłę wypadkową, którą oznaczymy przez R, a n par mają zawsze parę wypadkową, moment tej ostatniej oznaczymy przez N. Jest to suma geometryczna momentów par składowych lub suma geometryczna momentów sił danych względem O. A więc cały układ sprowadziliśmy do jednej siły i do jednej pary c.b.d.d

Siła R nie zależy, ani pod względem wielkości ani też pod względem kierunku od położenia punktu O w przestrzeni. Jest to oczywiste, bo gdy obierzemy punkt ten gdzieindziej, niż poprzednio, to wskutek tego ani wielkość ani też kierunek sił składowych nie ulegną zmianie, a więc nie zmieni się również wypadkowa R .

Inaczej jest z momentem N pary wypadkowej; ten zależy oczywiście od położenia punktu O.

Widzieliśmy poprzednio, że siła R i para N sprowadzają się do skrętnika, a więc układ sił daje się zawsze sprowadzić do skrętnika. Osią tego skrętnika jest prosta działania jego siły. Nosi ona nazwę: osi centralnej układu lub osi Poinsota.

Siła skrętnika wypadkowego będzie równa R a para skrętnika będzie miała moment równy $N.\cos\alpha$ gdzie α jest kątem $/\widehat{R,N}/$. Innemi słowy: moment pary skrętnika jest równy rzutowi momentu N na siłę R . Jest oczywistem, że rzut ten jest niezależny od położenia środka redukcji w przestrzeni a z tego wynika, że jest on dla danego układu wielkością stałą czyli t.zw. niezmiennikiem układu

42. Analityczne wyznaczenie skrętnika wypadkowego.

Niech będzie prostokątny układ współrzędnych x,y,z i pewien układ sił, składający się z siły

P_1, tworzącej z osiami kąty $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i przyłożonej w punkcie A_1 / x_1, y_1, z_1 / dalej z siły P_2 której kąty kierunkowe są $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ i która przyłożona jest w A_2 / x_2, y_2, z_2 / i t.d. Wszystkich sił jest n. Środek redukcji O obierzmy za początek układu współrzędnych. Oznaczmy siłę wypadkową przez R, kąty, które ona tworzy z osiami przez α_r, β_r, γ_r a moment pary wypadkowej przez N i wreszcie kąty tego momentu z osiami przez α_n, β_n, γ_n. Mamy wyznaczyć R, N i te sześć kątów.

Dajmy na to, że do układu należy siła $P/\alpha, \beta, \gamma/$ przyłożona w punckie A /x, y, z/. Przyłóżmy w punkcie O dwie siły równe i odwrotne, z których każda jest równa i równoległa do P. Otrzymaliśmy więc siłę P, przyłożoną w O i parę, złożoną z siły danej P i z $-P$. Rozłóżmy siłę P, przyłożoną w O na 3 składowe w kierunku osi i oznaczmy te składowe odpowiednio przez P_x, P_y i P_z. Na zasadzie twierdzeń ogólnych o wektorach możemy napisać: $P_x = P \cos\alpha$; $P_y = P \cos\beta$; $P_z = P \cos\gamma$; gdzie P, α, β, γ są znane.

Oznaczmy dalej moment pary P i $-P$ przez M i rozłóżmy go na 3 składowe, również w kierunkach osi. Oznaczmy te składowe odpowiednio przez M_x, M_y, M_z.

Składowe te wyznaczymy łatwo zważywszy, że moment pary P i $-P$ wzgl. punktu O jest to to samo, co moment siły P przyłożony w A względem tegoż punktu. Wyprowadzono poprzednio /par.11/, że

$$M_x = y.P_z - z.P_y \; ; \; M_y = z.P_x - x.P_z \; ; \; M_z = x.P_y - y.P_x$$

czyli, że takie są momenty składowych P_x, P_y i P_z względem punktu O.

Tak więc zamiast siły P mamy teraz 3 siły P_x, P_y i P_z, działające w kierunkach osi współrzędnych oraz 3 momenty M_x, M_y, M_z, skierowane również według tych osi.

Uczyńmy to samo ze wszystkiemi innemi siłami, to otrzymamy $3n$ sił, skierowanych według osi i $3n$ momentów par, posiadających także kierunki osi.

Siła R jedna z ośmiu niewiadomych, jest wypadkową tych $3n$ sił i na tej zasadzie wyznaczymy ją.

Rzuty siły R na osie x, y i z są równe sumom rzutów sił układu na odpowiednie osie, czyli

$$R_x = \Sigma P_x \; ; \; R_y = \Sigma P_y \; ; \; R_z = \Sigma P_z$$

Stąd: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

Wyznaczymy teraz kąty kierunkowe siły R, czyli α_r, β_r, γ_r. Rzut siły R na oś x jest R_x, więc: $R_x = R.\cos\alpha_r$ skąd $\cos\alpha_r = \frac{R_x}{R}$

Tak samo otrzymamy $\cos\beta_r = \frac{R_y}{R}$; $\cos\gamma_r = \frac{R_z}{R}$

W ten sposób siła R została wyznaczona zarówno pod względem wielkości, jak i pod względem kierunku.

Wyznaczymy teraz moment N i jego kąty kierunkowe α_n, β_n, γ_n. Ponieważ rzuty momentu N na osie x, y i z są równe sumie rzutów momentów składowych na odpowiednie osie, więc

$$N_x = \Sigma M_x \qquad N_y = \Sigma M_y \qquad N_z = \Sigma M_z$$

Stąd $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$

Wreszcie będzie: $\cos\alpha_n = \frac{N_x}{N}$; $\cos\beta_n = \frac{N_y}{N}$; $\cos\gamma_n = \frac{N_z}{N}$

Wyznaczymy jeszcze kąt ϑ pomiędzy momentem wypadkowym N i siłą wypadkową R. Wiemy, że

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_r.\cos\alpha_n + \cos\beta_r.\cos\beta_n + \cos\gamma_r.\cos\gamma_n$$

Ponieważ we wzorze tym wszystkie kosynusy są znane, więc i $\cos\vartheta$ został wyznaczony, a tem samem i kąt ϑ. Podstawiając do ostatniego wzoru, tylko co znalezione wartości na kosynusy, otrzymamy

$$\cos\vartheta = \frac{R_x.N_x + R_y.N_y + R_z.N_z}{R.N} \qquad (1)$$

Pomnóżmy obydwie strony tego wzoru przez N, będziemy mieli $N.\cos\vartheta = \frac{R_x.N_x + R_y.N_y + R_z.N_z}{R}$

Wyrażenie $N \cos\vartheta$ jest to rzut momentu N na siłę R jest to więc niezmiennik układu sił, t.zn że wielkość ta nie zależy od położenia środka redukcji w przestrzeni, a ponieważ i mianownik R jest wielkością niezmienną, więc z tego wyniką, że i licznik powyższego ułamka ma wartość dla danego układu stałą, czyli jest również niezmiennikiem.

Przypuśćmy, że $R_x N_x + R_y N_y + R_z N_z = 0$ . . W takim razie, jak wynika z wzoru (1) $\cos\vartheta = 0$ i $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ - a więc moment pary wypadkowej jest prostopadły do siły wypadkowej, a z tego wynika, że ta para i siła leżą w jednej płaszczyźnie.

Wiadomo, że siła i para, leżące w jednej płaszczyźnie sprowadzając się zawsze do jednej siły. Wnioskujemy więc, że jeśli niezmiennik $R_x N_x + R_y N_y + R_z N_z$ jest zerem, to układ sprowadza się do jednej siły.

Przypuśćmy teraz, że $R = 0$. W tym razie układ sprowadza się do jednej pary.

43. Warunki równowagi przestrzennego układu sił.

Aby ~~pierwszorzędny~~ przestrzenny układ sił pozostawał w równowadze jest koniecznem, aby siła wypadkowa i para wypadkowa były zerami. Otrzymujemy więc warunki:

$$R = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1.) \quad ; \quad N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

Lecz $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$ i aby ono było równe zeru, to każdy z wyrazów, stojących pod pierwiastkiem musi oddzielnie być zerem. Czyli inną postacią warunku (1) są 3 równania następujące: $R_x=0$, $R_y=0$; $R_z=0$. Inaczej $\Sigma P_x=0$, $\Sigma P_y=0$, $\Sigma P_z=0$

Tak samo ponieważ $N=\sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2}$ więc $N_x=0$ $N_y=0$, $N_z=0$, czyli $\Sigma M_x=0$; $\Sigma M_y=0$; $\Sigma M_z=0$

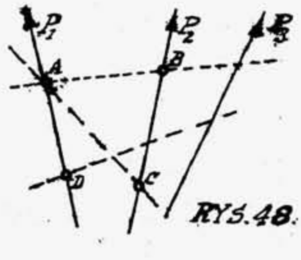
Aby więc przestrzenny układ sił był w równowadze, musi być spełnionych sześć warunków, a mianowicie:

Sumy rzutów wszystkich sił układu na osi x, y, z powinny być zerami.

Sumy momentów wszystkich sił układu względem osi x, y, z powinny być zerami.

Ale za osie współrzędnych można obrać dowolne proste w przestrzeni, a z tego wynika, że: jeśli przestrzenny układ sił jest w równowadze, to suma rzutów sił tego układu na każdy kierunek, oraz suma momentów względem każdej prostej przestrzeni jest zerem.

Rozpatrzmy pewien przypadek szczególny.



RYS. 48.

Załóżmy, że układ składa się z trzech sił P_1 , P_2 i P_3 i że pozostaje on w równowadze. Dowiedziemy, że te trzy siły układu leżą w jednej płaszczyźnie i przechodzą przez jeden punkt.

Obierzmy na linii działania siły P_1 dowolny punkt A i połączmy go z punktem B, wziętym dowolnie na linii działania siły P_2.

Ponieważ układ jest w równowadze, więc suma momentów sił tego układu względem prostej AB musi być zerem. Lecz siła P przecina prostą AB, więc moment jej względem tej prostej jest zerem. Tak samo moment siły P_2 względem prostej AB jest zerem, a z tego wynika, że i moment siły P_3 względem tejże prostej AB jest zerem. Lecz moment siły względem prostej tylko wtedy może być zerem, gdy siła ta przecina ową prostą, z czego wnosimy, że siła P_3 przecina prostą AB.

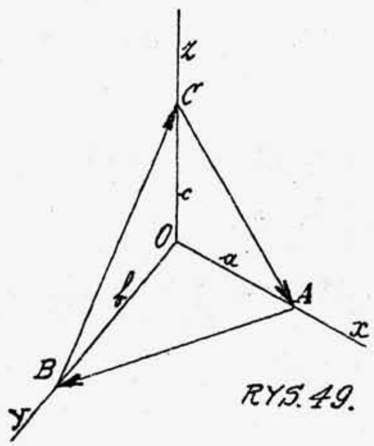
Obierzmy dalej na linii działania siły P_2 inny punkt C i połączmy go z A, to tak, jak poprzednio, dowiedziemy, że prosta AC przecina siłę P_3.

Z tego wynika, że siła P_3 leży w płaszczyźnie ABC /bo przecina ona dwie proste tej płaszczyzny/. Dowiedliśmy więc, że siła P_3, leży w jednej płaszczyźnie z siłą P_2. Należy jeszcze dowieść, że w tej płaszczyźnie leży P_1.

Gdy poprowadzimy w tej płaszczyźnie ABC jakąś prostą, to powtarzając z nią rozumowanie poprzedzające przekonamy się, że ta prosta musi przeciąć siłę P_1. Przypuśćmy, że D jest tym punktem przecięcia, to oczywiście punkt ten leży w płaszczyźnie ABC. Tak więc już mamy dwa punkty siły P_1 /A i D/ leżące w płaszczyźnie ABC, a z tego wynika, że ta siła także leży w owej płaszczyźnie c.b.d.d.

44. Przykłady. 1/ Niech będzie prostokątny układ współrzędnych oraz płaszczyzna, przecinająca osie współrzędnych w punktach A, B i C i tworząca na tych osiach odcinki odpowiednio równe a, b, c.

Przypuśćmy, że odcinki AB, BC, CA, OA, OB i OC wyobrażają siły.



RYS.49.

Chodzi o wyznaczenie kąta ϑ między siłą wypadkową i momentem pary wypadkowej.

Za środek redukcyi obieramy początek współrzędnych O. Rzut siły wypadkowej R na oś x /$=R_x$/ jest równy sumie rzutów wszystkich sił układu, będzie więc: $R_x = a$.

Oznaczmy rzuty siły R na osie y i z odpowiednio przez R_y i R_z, biorąc rzuty wszystkich sił