nego na tych składowych.

Zasada równoległoboku daje się stwierdzić doświadczalnie przy 2 składowych, gdy zaś mamy już ten dowód, to można go uogólnić dla dowolnej liczby składowych. Próbowano też drogą czysto rozumową dowieść tej zasady, ale żaden ze znanych dowodów nie jest całkowicie ścisły.

17. Warunki równowagi. Mamy jakieś małe ciało, powiedzmy punkt materyalny, dający określić swe położenie zapomocą 3 współrzędnych, tak jak punkt geometryczny. Oznaczmy to drobne ciało przez O. Przypuśćmy, że działa nań pewna liczba sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Zachodzi pytanie: jakie warunki powinny być spełnione, aby ten układ sił był w równowadze. Oznaczmy wypadkową tych sił przez R. Według zasady równoległoboku wywoła ona ten sam skutek, co te wszystkie siły razem. Jeśli wypadkowa ta jest różna od zera, to ciało O nie pozostanie w spoczynku i zatem układ sił nie będzie w równowadze. Tak więc warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił jest, aby wypadkowa tych sił była zerem.

Nadamy teraz temu warunkowi postać analityczną. Obierzmy punkt O, na który działa układ sił $P_1, P_2, \ldots$ /typowa P/, za początek prostokątnego układu współrzędnych. Rzuty tych sił na osi x, y, z oznaczymy przez P_x, P_y, P_z, a w takim razie rzuty wypadkowej R

na te osie są odpowiednio równe $\Sigma P_x, \Sigma P_y, \Sigma P_z$, a zatem sama wypadkowa R wyrazi się wzorem:

$$R = \sqrt{(\Sigma P_x)^2 + (\Sigma P_y)^2 + (\Sigma P_z)^2}$$

Ponieważ pod pierwiastkiem powyższego wzoru znajduje się suma trzech kwadratów, więc z tego wynika, że aby R równało się zeru, każdy z trzech składników tej sumy oddzielnie musi być równy zeru, czyli:

$$\Sigma P_x = 0 \quad ; \quad \Sigma P_y = 0 \quad ; \Sigma P_z = 0$$

Znaczy to, że aby układ sił był w równowadze sumy rzutów sił tego układu, na 3 osie prostokątnego układu współrzędnych powinny być zerami.

Możemy twierdzenie to uogólnić w sposób następujący:

Przypuśćmy, że na pewne ciało O działają siły $P_1, P_2, \ldots$ i że sumy rzutów tych sił na 3 proste a b, c przechodzące przez punkt O i nie leżące w jednej płaszczyźnie są zerami. Dowiedziemy, że siły te są w równowadze.

Obierzmy w tym celu prostokątny układ współrzędnych, z początkiem O. Za oś z weźmy prostą c, oś x niech leży w płaszczyźnie ac; w takim razie oś y będzie prostopadła do płaszczyzny ac.

Oznaczmy wypadkową sił $P_1, P_2, \ldots$ /jeśli ona istnieje/przez R; dowiedziemy, że $R = 0$ —

Rozkładamy R na 3 składowe w kierunku trzech osi x, y, z. Oznaczmy te składowe przez R_x, R_y, R_z —

Składowa R_z jest zerem, bo suma rzutów wszystkich sił składowych na tę oś /czyli prostą c/jest zerem.

Zanim dowiedziemy, że także R_x i R_y są zerami, zauważymy, że rzut wektora na prostą może być zerem w 2 przypadkach: 1/gdy wektor jest prostopadły do tej prostej lub 2/gdy wektor ten jest zerem. R_x, R_y, R_z są składowemi siły R, więc suma rzutów tych składowych na dowolny kierunek jest równa rzutowi siły R na ten kierunek. Weźmy rzuty tych sił na prostą a. Oś y jest prostopadła do płaszczyzny xoz, a więc jest prostopadła do prostej a, która leży w tej płaszczyźnie. Z tego wynika, że rzut R_y na prostą a jest zerem. Tak samo rzut R_z na a jest zerem, bo R_z jest zerem.

Suma rzutów R_x, R_y i R_z na prostą a ma być zerem, a że rzuty R_y i R_z są zerami, więc i rzut R_x jest zerem i sama składowa R_x jest również zerem, bo nie jest ona prostopadła do a.

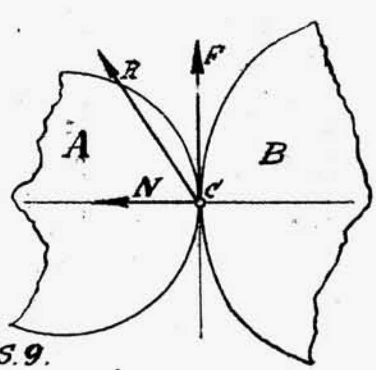
Dowiedziemy łatwo, że także składowa R_y jest zerem.

Skoro składowe R_z i R_x są zerami, więc R_y jest jedyną składową siły R/a więc samą siłą R/i leży na osi y. Weźmy rzuty składowych R_x, R_y, R_z na prostą b. Ponieważ R_x i R_z są zerami, a suma rzutów tych trzech składowych na b ma być też zerem /według założenia/, więc i rzut R_y na tę prostą jest zerem. Ale składowa R_y nie jest prostopadła do prostej b, więc musi ona być zerem, skoro ma rzut równy zeru.

Tak więc wszystkie składowe siły R są zerami, więc i siła R jest zerem i układ sił $P_1, P_2, \ldots$ jest w równowadze.

Ważny jest pewien przypadek szczególny powyższego twierdzenia. Przypuśćmy, że siły $P_1, P_2, \ldots$ leżą w jednej płaszczyźnie. W takim razie suma rzutów na prostą, prostopadłą do tej płaszczyzny jest zerem, a zatem potrzeba jeszcze tylko aby sumy rzutów na dwie proste, położone w tej płaszczyźnie były zerami, by układ sił był w równowadze.

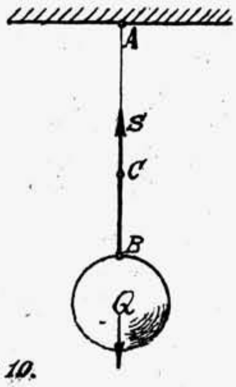
18. Rodzaje sił. Wyobraźmy sobie 2 ciała A i B /RYS. 9./, których powierzchnie stykają się w jednym punkcie C. W takim razie każde z ciał wywiera na inne pewną siłę, która, dajmy na to jest równa R. Taką siłę będziemy nazywali reakcyą ciała B na ciało A. Ponieważ powierzchnie ciał A i B stykają się więc mają wspólną płaszczyznę styczną i wspólną normalną. Poprowadźmy przez reakcyę R



RYS. 9.

— i przez wspólną normalną płaszczyznę. Ta płaszczyzna przetnie wspólną płaszczyznę styczną według prostej, stycznej do powierzchni. Rozłóżmy R na 2 składowe: 1° w kierunku normalnej, 2° w kierunku stycznej. Będziemy nazywali N - reakcyą normalną, zaś F - reakcyą styczną lub siłą tarcia. Z doświadczenia wiadomo, że im bardziej gładka jest powierzchnia ciał, tym mniejsza jest, w danych warunkach, reakcya styczna. Możemy wyobrazić sobie ciała doskonale gładkie. Wtedy siła tarcia jest zerem i pozostaje tylko reakcya normalna. W początkach będziemy zwykle rozważali takie ciała gładkie. Ale w naturze niema ciał doskonale gładkich - wszystkie są chropowate.

Nieraz wypadnie nam rozważać siły, wywierane zapomocą sznurów.



RYS. 10.

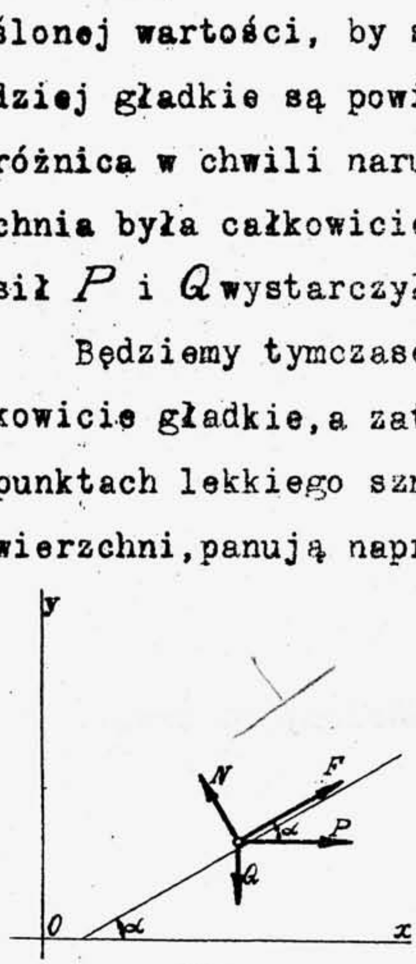
Mamy ciężki sznur, którego jeden koniec jest przymocowany do punktu nieruchomego A. Na końcu sznura w punkcie B jest zawieszony ciężar Q, na który działa pionowo na dół siła ciężkości Q. Przypuśćmy, że sznur został przecięty w punkcie C: w takim razie dolna część sznura i ciężar spadną. Aby temu przeszkodzić należy w punkcie C przyłożyć pewną siłę S skierowaną pionowo do góry. Wtedy nie będzie spadania. Ponieważ i przed przecięciem sznura spadania nie było, więc i przed przecięciem musiała działać w punkcie C taka sama siła S, wywierana przez górną część sznura. Zasada akcyi i reakcyi głosi, że i dolna część sznura działa na górną z taką samą pod względem wielkości, lecz odwrotną co do kierunku siłą. Mówimy, że w punkcie C panuje naprężenie S i to naprężenie ma kierunek sznura. Oczywiście, że im bliżej A weźmiemy punkt sznura, tem większe znajdziemy naprężenie. W punkcie B naprężenie jest równ ciężarowi Q. Jeżeli sznur jest bardzo lekki w porównaniu z ciężarem Q, to możemy ciężaru jego nie rachować i wtedy /w przybliżeniu/ naprężenia we wszystkich punktach sznura będą jednakowe i równe Q Zwykle, mówiąc o sznurze, będziemy go uważali za lekki i ciężar jego pomijali; w przyszłości jednak wprowadzimy poprawkę.

Niech będzie teraz jakaś powierzchnia materyalna i przypuśćmy, że część jej owija sznur. Przyłóżmy do końców sznura siły P i Q. Jeżeli P i Q są równe, to sznur nie będzie się przesuwał po powierzchni, bo niema żadnej racyi, aby się poruszał

RYS. 11.

w stronę siły P ,lub w stronę Q . Przypuśćmy, że siła Q cokolwiek wzrosła. Doświadczenie uczy, że i wówczas sznur nie zacznie się przesuwać, gdyż między sznurem a powierzchnią powstanie tarcie. Różnica sił P i Q musi dojść do pewnej określonej wartości, by sznur zaczął się poruszać. Im bardziej gładkie są powierzchnie, tem mniejsza będzie ta różnica w chwili naruszenia równowagi, i gdyby powierzchnia była całkowicie gładką, to najdrobniejsza różnica sił P i Q wystarczyłaby, by sznur zaczął się poruszać.

Będziemy tymczasem uważali te powierzchnie za całkowicie gładkie, a zatem musimy uważać, że we wszystkich punktach lekkiego sznura, spoczywającego na takiej powierzchni, panują naprężenia jednakowe.



RYS. 12.

19. Przykład. Wyobraźmy sobie płaszczyznę, tworzącą z poziomem kąt α . Jest to t.zw. równia pochyła. Równia ta nie jest gładka i może wywierać pewną reakcyę styczną na ciało o ciężarze Q , który leży na niej.

Przypuśćmy, że na ciało działa pozioma siła P , i że zostaje ono w równowadze. Chodzi o wyznaczenie reakcji płaszczyzny na ciało. Reakcya ta rozkłada się na normąlną N i styczną /siła tarcia/ F. A więc na ciało działają 4 siły: Q, P, F i N, z których 2 ostatnie są nieznane, i ciało jest w równowadze. Z tego wynika, że sumy rzutów tych sił na jakiekolwiek kierunku są zerami, przytem wystarcza by sumy tych rzutów na dwie osie były zerami, bo mamy do czynienia z układem płaskim Najdogodniej jest obrać prostokątny układ współrzędnych; za oś x obierzmy kierunek poziomy, a w takim razie oś y będzie miała kierunek pionowy. Wyznaczmy sumę rzutów sił Q, P, F i N na oś x. Siła Q jest prostopadła do x, a więc rzut Q na tę oś jest zerem. Siła P jest równoległa do osi x, a więc rzut P na tę oś jest równy samej sile P. Siła F tworzy z osią x kąt α, a więc rzut F na tę oś jest równy $F\cos\alpha$ /kierunek dodatni, więc znak "plus"/.

Siła N wreszcie tworzy z poziomem kąt $90-\alpha$, a więc rzut N na oś x jest równy $-N\sin\alpha$ /Kierunek ujemny, więc znak "minus"/. Więc suma rzutów wszystkich sił na oś x wynosi

$$P + F.\cos\alpha - N.\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

Wyznaczymy podobnie sumę rzutów sił Q, P, F i N na oś y. Q ma kierunek ujemny na osi y i jest do niej równoległa, a więc rzut Q na oś y jest równy $-Q$. Siła P jest prostopadła do osi y, a więc rzut jej na tę oś jest zerem. Siła F tworzy z osią y kąt, spełniający α do $90°$ i rzut jej ma kierunek dodatni, więc rzut ten jest równy $F.\sin\alpha$. Siła N wreszcie tworzy z pionem kąt α, a więc rzut N na oś y jest równy $N.\cos\alpha$ /kierunek dodatni/. Więc suma rzutów wszystkich sił na oś y wynosi

$$-Q+F.\sin\alpha+N.\cos\alpha=0. \qquad (2)$$

Otrzymaliśmy więc 2 równania (1) i (2) z dwiema niewiadomemi /F i N/. Łatwo je rozwiązać i znaleźć F i N.

<u>U w a g a.</u> Kierunki osi, na które bierze się rzuty sił są zupełnie dowolne, ale pewne kierunki są dogodniejsze od innych. W danym np. przykładzie takimi dogodniejszymi kierunkami są kierunki niewiadomych reakcji normalnej i stycznej. Gdy weźmiemy rzuty na te kierunki, to otrzymamy równania, z których wartości niewiadomych otrzyma się bezpośrednio. Otóż: suma rzutów sił Q, P, N i F na oś x /w kierunku F/ wynosi

$$F+P\cos\alpha-Q\sin\alpha=0$$

suma zaś rzutów tych sił na oś y /w kierunku N/ jest równa

$$N-P\sin\alpha-Q.\cos\alpha=0$$

Stąd otrzymujemy: $F=Q\sin\alpha-P\cos\alpha$ .... $(3.)$

oraz :

$$N = P.\sin\alpha + Q.\cos\alpha \quad \ldots \quad (4)$$

Reakcya całkowita jest wypadkową tych 2 sił.

Jeśli równia jest całkowicie gładka, to reakcya styczna F jest zerem. Wtedy napiszemy

$$Q.\sin\alpha - P.\cos\alpha = 0 \text{ , skąd } P = Q.\operatorname{tg}\alpha$$

Podstawmy tę wartość w (4). Otrzymamy

$$N = \frac{Q.\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + Q\cos\alpha = \frac{Q}{\cos\alpha} ,$$

co można łatwo otrzymać bezpośrednio.

ROZDZIAŁ II.

O SIŁACH RÓWNOLEGŁYCH

20. Przekształcenia układu sił. Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne. Przypuśćmy, że działają na nie siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ /Siły te mogą leżeć w jednej płaszczyźnie, ale mogą też nie leżeć. Weźmiemy wypadek najogólniejszy/. Powiemy, że siły te tworzą układ sił. Skutkiem działania tego układu ciało otrzyma pewien ruch. Ale taki sam ruch mogłoby nadać ciału inne układy sił, innemi słowy, można przekształcać dany układ bez zmiany skutku jego działania. Tego rodzaju zmiany układu mogą być następujące:

1. Ponieważ siła P_1 jest to wektor, związany z prostą, więc można ją przenosić dowolnie na jej pro-