ROZDZIAŁ III.

O PŁASKIM UKŁADZIE SIŁ.

24. Upraszczanie płaskiego układu sił. Niech na ciało sztywne działa n sił; $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_n$ leżących w jednej płaszczyźnie. Taki układ sił nazywa się układem płaskim.

Gdy mamy płaski układ sił, to można zawsze znaleźć jego wypadkową: przenieśmy w tym celu, punkty przyłożenia P_1 i P_2 do punktu przecięcia ich linii działania i wyznaczmy wypadkową tych sił; dalej znajdźmy, w ten sam sposób, wypadkową tej wypadkowej i siły P_3 i t.d. Ostatecznie dojdziemy do wypadkowej całego układu.

Może tu zajść przypadek wyjątkowy, dajmy na to, że znaleźliśmy wypadkową wszystkich sił układu, prócz ostatniej i przypuśćmy, że ta wypadkowa jest siłą równą i odwrotną i nie leżącą na jednej prostej z P_n. W takim razie ta wypadkowa wraz z P_n tworzy parę, stanowiącą już prosty element, którego wypadkowej znaleźć nie można.

Powiemy, wobec tego, że płaski układ sił sprowadza się albo do siły wypadkowej, albo do pary wypadkowej.

$\sphericalangle FOD = 2\vartheta$, jako zewnętrzny trójkąta AOD, więc:

$$FD = OD.\sin 2\vartheta = r.\sin 2\vartheta \;;$$

zaś $\quad ED = CD.\cos\vartheta \,,$

a że $\quad CD = AD - AC = 2r.\cos\vartheta - l$

więc $\quad ED = (2r.\cos\vartheta - l)\cos\vartheta$

a podstawiając w $(2.)$ otrzymamy po skróceniu przez

$$\cos\vartheta \neq 0 : \qquad 2R_1.r.\sin\vartheta - Q(2r.\cos\vartheta - l) = 0 \ldots\ldots (3.)$$

Z równania $(1.)$ mamy: $\quad R_1 = Q \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$

Podstawiając tę wartość w $(3.)$, znajdziemy

$$2r.\sin^2\vartheta - (2r.\cos\vartheta - l)\cos\vartheta = 0$$

albo $$4r\cos^2\vartheta - l\cos\vartheta - 2r = 0 \ldots\ldots\ldots (4.)$$

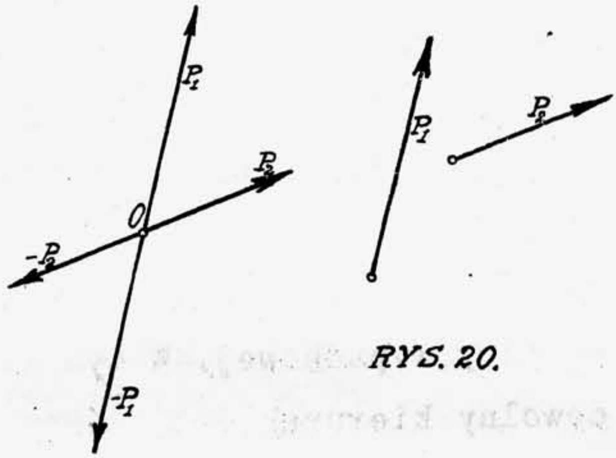
Zanim rozwiążemy to równanie względem ϑ , zauważymy, że do tegoż równania można dojść krótszą drogą. Mianowicie: na pręt działają 3 siły i aby zachodziła równowaga, to siły te muszą przechodzić przez jeden punkt, czyli siła Q musi przejść przez punkt przecięcia reakcyi R_1 i R_2., R_2 i AD tworzą kąt prosty, a więc oparty na średnicy. Z tego wynika, że R_2 i R_1 przecinają się na obwodzie koła w punkcie G i przez G przechodzi linia działania siły Q . Rzut średnicy AG na kierunek poziomy musi być równy rzutowi AC na ten kierunek t.j.

$$2r.\cos 2\vartheta = l.\cos\vartheta \text{ skąd } 4r.\cos^2\vartheta - l\cos\vartheta - 2r = 0$$

Doszliśmy więc do tego samego rezultatu, co poprzednio.

Ze względu na wagę tego twierdzenia, dowiedziemy je jeszcze inaczej.

Obierzmy dowolny punkt O, który nazwiemy środkiem redukcyi układu i przyłóżmy doń dwie siły równe i odwrotne, przyczem każda z nich ma być równa P_1 i do niej równoległa. Siły dane P_1 i P_2 tworzą parę, prócz tego mamy siłę P_1, przyłożoną w O. A więc zamiast siły P_1 otrzymaliśmy siłę i parę. Tak samo postąpmy z innemi siłami układu. Otrzymamy w ten sposób n sił, przyłożonych w O i n par. Wszystkie te pary posiadają parę wypadkową o momencie $=N$. Wypadkową sił, przyłożoną w O oznaczmy przez R. Cały układ sprowadza się więc do pary o momencie $=N$ i do wypadkowej R, lecz para i siła znów sprowadzają się do siły i w rezultacie otrzymujemy jedną siłę wypadkową. Gdy jednak siła wypadkowa $R=0$, to cały układ sprowadza się do jednej pary, o momencie N.—



RYS. 20.

Może zajść jeszcze wypadek taki, że cały układ jest w równowadze. Ale i w tym razie możemy powiedzieć, że układ sprowadza się do jednej wypadkowej, ale że ta wypadkowa jest zerem albo też do jednej pary wypadkowej, lecz moment tej pary jest zerem.

Jeśli układ sprowadza się do jednej siły wypadkowej R, to wtedy oczywiście rzut siły wypadkowej na dowolny kierunek równy jest sumie rzutów sił składowych, a moment tej siły wypadkowej względem dowolnego punktu jest równy sumie momentów sił składowych.

Weźmy inny wypadek: Przypuśćmy, że cały układ sprowadza się do jednej pary wypadkowej. W tym razie rzut sił pary na dowolny kierunek jest równy sumie rzutów sił składowych na ten kierunek. Ale suma rzutów sił pary jest zawsze zerem, więc suma rzutów wszystkich sił składowych też jest zerem. Suma momentów sił pary względem dowolnego punktu /lub moment pary/ jest równa sumie momentów sił składowych względem każdego punktu jest w tym wypadku stała i równa N /t.j. momentowi pary/.

Kiedy wszystkie siły równoważą się, to suma rzutów na każdy kierunek jest równa zeru i suma momentów tych sił względem dowolnego punktu jest też zerem.

Gdy znamy sumy rzutów sił układu płaskiego na pewne kierunki lub sumy momentów względem pewnych punktów, to możemy już wyciągnąć stąd bardzo ważne wnioski, dotyczące tego układu. Wyjaśnimy to na szeregu przykładów:

1/ Przypuśćmy, że układ płaski złożony jest z sił P_1, P_2, ... i jest wiadomo, że suma rzutów tych sił na jakąś prostą x jest zerem. W takim razie układ ten może się sprowadzac do jednej siły wypadkowej, ale ta siła musi być prestopadła do prostej x. Ale układ ten może się też sprowadzać do pary wypadkowej, albo może być w równowadze.

2/ Sumy rzutów sił układu na dwie proste nierównoległe x i y są zerami. Wnosimy stąd, że układ nie może się sprowadzać do jednej siły wypadkowej, bo ta siła musiałaby być prostopadła do obydwóch prostych x i y, co jest niemożliwe. Ale układ może się sprowadzać do pary wypadkowej, a może także być w równowadze.

3/ Załóżmy, że sumy rzutów na trzy proste x, y i z są zerami, przytem te proste są nierównoległe. Są więc trzy warunki, którym czyni zadość układ. Już z dwuch warunków /rzuty na dwie proste są zerami/ wynika, że układ sprowadza się albo do pary wypadkowej albo jest w równowadze, a wówczas suma rzutów na każdy inny kierunek jest zerem, a więc trzeci warunek jest następstwem dwuch pierwszych i nic nowego nie daje.

4/ Suma momentów względem pewnego punktu O jest zerem. Stąd wynika, że układ nie może się sprowadzać do pary wypadkowej, bo moment takiej pary co niemożl. byłby zerem. Ale układ taki może się sprowadzać do siły wypadkowej i siła ta przechodzi przez O albo też układ jest w równowadze.

5/ Sumy momentów względem dwuch punktów O_1 i O_2 są zerami. W tym razie układ nie może się sprowadzać do pary wypadkowej, ale albo do siły wypadkowej i ta siła działa na prostej $O_1 O_2$, albo też jest w równowadze.

6/ Sumy momentów względem 3 punktów, nie leżących na jednej prostej są zerami.

Układ nie może się sprowadzać do pary wypadkowej, ale też nie może sprowadzać się do siły, bo jej linia działania musiałaby przechodzić przez wszystkie trzy punkty, co jest sprzeczne z założeniem, iż te punkty nie leżą na jednej prostej. Pozostaje więc trzecia alternatywa: układ jest w równowadze.

7/ Suma rzutów wszystkich sił układu na prostą x jest zerem i sumy momentów wszystkich sił względem dwuch punktów O_1 i O_2 są zerami. Jeżeli prosta $O_1 O_2$ jest prostopadła do prostej x, to układ może się sprowadzać do jednej siły wypadkowej działającej na prostej $O_1 O_2$. Ale jeśli $O_1 O_2$ nie jest prostopadłe do osi x, to układ nie może się sprowadzać do jednej siły wypadkowej. Nie może się także sprowadzać do pary wypadkowej, a więc jest w równowadze.

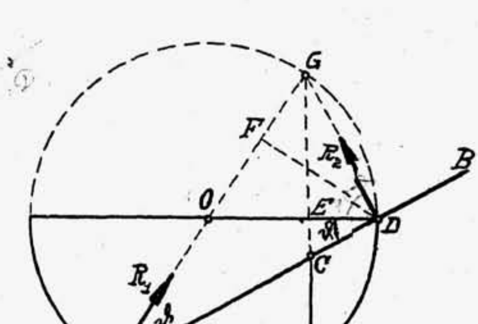
8/ Sumy rzutów wszystkich sił układu na dwie dowolne, lecz nierównoległe proste x i y są zerami i suma momentów względem dowolnego punktu O jest zerem.

Układ nie może się sprowadzać do siły wypadkowej, bo siła ta musiałaby być jednocześnie prostopadłą do prostych x i y. Nie może się też sprowadzać do pary wypadkowej, bo moment nie byłby zerem. Więc układ jest w równowadze.

Z powyższych rozważań wynika, że aby układ był w równowadze, to muszą być spełnione trzy warunki, z których conajmniej jeden powinien dotyczyć momentów.

Przypadek szczególny. Przypuśćmy, że układ składa się z trzech sił. Do tego, aby był on w równowadze jest koniecznem, aby wszystkie siły przechodziły przez jeden punkt, albo żeby były równoległe. Jest to prawie oczywiste, Istotnie niech układ składa się z sił P_1, P_2 i P_3 — Jeśli ma on być w równowadze to suma momentów względem wszystkich punktów musi być zerem. Weźmy sumę momentów względem punktu O, w którym przecinają się linie działania sił P_1 i P_2. Suma ta więc musi być zerem. Moment siły P_1 względem O jest zerem, bo P_1 przechodzi przez zero. Tak samo moment siły P_2 jest zerem. Więc i moment siły P_3 względem O musi być zerem, czyli siła P_3 przechodzi przez O..

25. PRZYKŁAD. Naczynie półkuliste o promieniu r, wewnątrz gładkie, jest ustawione tak, że górna podstawa jest pozioma. Wkładamy do tego naczynia gładki, jednorodny pręt AB, o długości $2l$. Wyznaczyć położenie równowagi pręta. Położenie pręta będzie wyznaczone, gdy znajdziemy kąt



RYS. 21.

. $\vartheta = \sphericalangle ODA$ t.j. nachylenie pręta do poziomu.

Na pręt działają następujące siły: 1/ Siła ciężkości Q przyłożona w środku pręta C, 2/- Reakcja R_1 naczynia w A, normalna do ściany, a więc skierowana ku O. 3/ Reakcja R_2 naczynia w D, normalna do obrzeża i do pręta.

Mamy więc trzy niewiadome: ϑ, R_1 i R_2, a dla ich wyznaczania trzeba mieć trzy równania. Ponieważ układ ma być w równowadze, więc muszą być spełnione trzy warunki: suma rzutów na dwa dowolne kierunki i moment względem jakiegoś punktu muszą być zerami. Wystarczają jednak 2 równania, jeśli wybierzemy pewne kierunki rzutów, taki aby do równań nie wchodziła wcale jedna z reakcji np. R_2

Weźmiemy naprzód rzuty sił układu na kierunek pręta. Rzut R_2 na ten kierunek jest zerem. Kąt między reakcyą R_1, a prętem AB jest $=\vartheta$ /bo trójkąt AOD jest równoramienny/, więc rzut R_1 na AB będzie $=R_1 \cos\vartheta$, a rzut Q jest $=-Q.\sin\vartheta$. Zatem będzi

$$R_1.\cos\vartheta - Q.\sin\vartheta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Weźmiemy teraz sumę momentów względem punktu D moment reakcyi R_2 jest zerem. Suma momentów dwuch pozostałych sił względem D jest

$$R_1.DF - Q.ED = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

gdzie DF jest ramieniem momentu siły R_1, a ED - ramieniem siły Q. Przekształcimy równanie (2): Kąt

Z (4) możemy wyciągnąć wniosek taki: nie zawiera ono wcale Q t.j. położenie równowagi nie zależy od ciężaru pręta. Możnaby to przewidzieć bezpośrednio, bo nam chodzi o wyznaczenie pewnej funkcyi trygonometrycznej, której wymiar jest zerowy. Może więc ona być równa tylko stosunkowi dwóch sił, a że mamy daną tylko jedną siłę Q, więc nie może od niej zależeć kąt ϑ.

Nie każdy pręt da się tak wstawić do danego naczynia aby była zachowana równowaga, bo gdy pręt będzie zbyt krótki, to wpadnie do naczynia, zaś gdy długość będzie za duża, to środek ciężkości pręta znajdzie się po za naczyniem i pręt wypadnie. Z tego wnosimy, że długość pręta musi być zawarta w pewnych określonych granicach, które wyznaczymy.

Załóżmy w (4) $\cos\vartheta = x$. Wtedy przybierze ono postać następującą: $4rx^2 - lx - 2r = 0 \; \ldots\ldots (5)$

Równanie (5) posiada 2 pierwiastki, których iloczyn jest równy $-\frac{2r}{4r}$, czyli jest ujemny. Z tego wynika, że te pierwiastki mają znaki różne. Pierwiastek ujemny jest w danym razie nieprzydatny, bo kąt ϑ musi być mniejszy od $\frac{\pi}{2}$.

Oznaczmy pierwiastki te przez x_1 i $-x_2$, w takim razie lewa strona równania ostatniego da się przedstawić w postaci $u = 4r(x-x_1)(x+x_2) \ldots\ldots (6)$

Czynniki $4r$ i $(x+x_2)$ są tu zawsze dodatnie, a więc znak funkcyi zależy tylko od wyrazu $(x-x_1)$. Ponieważ cosinus nie może być większy od 1, więc x_1 jest < 1 i gdy zamiast x napiszemy 1, to wyraz $x-x_1$ będzie dodatni i funkcya u też przybierze wartość dodatnią. A zatem: $4r-l-2r>0$ skąd $l<2r$. A więc pręt nie powinien być dłuższy od średnicy naczynia. Wyprowadzimy teraz drugi warunek, dotyczący długości pręta. Ponieważ AD jest mniejsze od AB /t.j. część pręta jest mniejsza od całego/ więc $2l>2r\cos\vartheta$; $\cos\vartheta<\frac{l}{r}$.

Gdy nadamy zmiennej x wartość $\frac{l}{r}$, to drugi czynnik funkcyi u będzie napewno dodatni i u przybierze wartość dodatnią, zatem

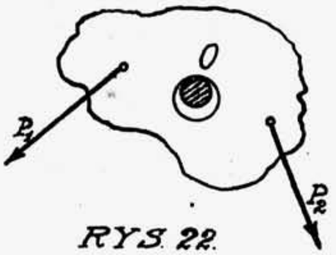
$$\frac{4rl^2}{r^2}-\frac{ll}{r}-2r>0 \quad \text{i} \quad l>r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Granice długości pręta są więc następujące:

$$r\sqrt{\frac{2}{3}}<l<2r.$$

26. PRZYPADKI SZCZEGÒLNE UKŁADU PŁASKIEGO.

1/ Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne, osadzone na osi, prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Otwór, zrobiony w ciele na oś, zarówno jak i oś są cylindryczne, przyczem średnica otworu jest cokolwiek większa od średnicy osi, dzięki czemu ciało może się swobodnie obracać.



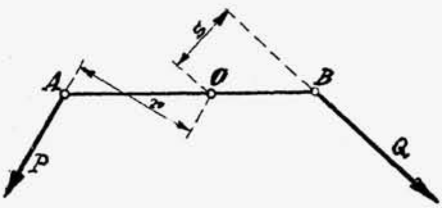
RYS. 22.

Zetknięcie osi z ciałem zachodzi tylko na jednej tworzącej cylindrów, a w przekroju - tylko w jednym punkcie i w tym punkcie działa reakcya osi na ciało. Reakcya ta może być tylko normalna /bo zakładamy, że oś jest całkowicie gładka/, lecz niewiadomo z góry, jaki kierunek ona posiada, gdyż nie wiemy, na której tworzącej zachodzi zetknięcie cylindrów.

Niech na dane ciało sztywne działa układ płaski ciał, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ Do układu tego nie zaliczamy reakcyi osi. Przypuśćmy, że suma momentów układu względem O jest zerem; w tym razie układ albo jest w równowadze i żadnego działania nie wywiera, albo też sprowadza się do jednej wypadkowej, która przechodzi przez punkt O, wywołując reakcyę osi, która ją równoważy. Tak więc dostatecznym warunkiem równowagi układu $P_1, P_2, P_3, \ldots$ jest aby suma momentów tych sił względem O była zerem.

Zastosujemy powyższe twierdzenie do dźwigni.

Drążek AB jest osadzony na osi, w punkcie O. Na końcu drążka działają siły P i Q, leżące w płaszczyźnie rysunku. Jedna z tych sił nazywa się siłą poruszającą, a druga oporem.



RYS. 23.

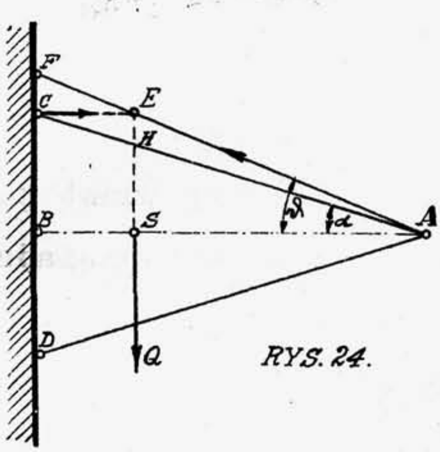
Aby równowaga dźwigni była zachowana, to suma momentów sił P i Q względem O musi być zerem. Moment siły Q względem O jest $= Q.s$, zaś moment P - jest $= -P.r$ więc warunek równowagi brzmi tak: $Q.s - P.r = 0$

Reakcya osi równoważy wypadkową sił P i Q, a więc będzie równa i odwrotna do tej wypadkowej.

2/ Dwa ciała A i B przystają do siebie na pewnej części powierzchni. Podzielmy tę powierzchnię na nieskończenię małe elementy i uważajmy, że A wywiera pewną reakcyę na każdy z tych elementów ciała B oddzielnie. Będziemy więc mieli nieskończenie wiele nieskończenie małych reakcyi ciała A na B. Jeśli taki układ posiada wypadkową, to mówimy o niej że jest to reakcya ciała A na B .

Często spotyka się przypadek, gdy powierzchnia zetknięcia jest płaszczyzną. Niech więc np. prostopadłościan stoi na podłodze, tak aby jedna ściana jego stykała się z płaszczyzną podłogi. Podłoga będzie wywierała na poszczególne nieskończenie małe elementy podstawy nieskończenie małe reakcye. Wszystkie reakcye będą równoległe i zwrócone pionowo w górę. Posiadają one wypadkową, która jest do nich równoległa, a więc zwrócona też pionowo do góry i równa ich sumie. Z góry nie wiadomo jednak, gdzie ta wypadkowa jest przyłożona. W każdym razie punkt jej przyłożenia musi leżeć wewnątrz podstawy i tylko w granicach tej podstawy może zmieniać położenie. Jeśli naciśniemy np. z góry na lewą część prostopadłościanu, to punkt przyłożenia wypadkowej przesunie się w lewo. Gdy prostopadłościan zaczyna obracać się dokoła jednej z krawędzi podstawy, to ten punkt przyłożenia zajmuje położenie krańcowe na owej krawędzi.

27. Przykład. Prosty, kołowy stożek, o wysokości $=h$ i kącie u wierzchołka $=2\alpha$ opiera się podstawą CD o gładką pionową ścianę. Wierzchołek stożka jest połączony ze ścianą przy pomocy sznura AF. Wyznaczyć największą długość sznura, przy któ



RYS. 24.