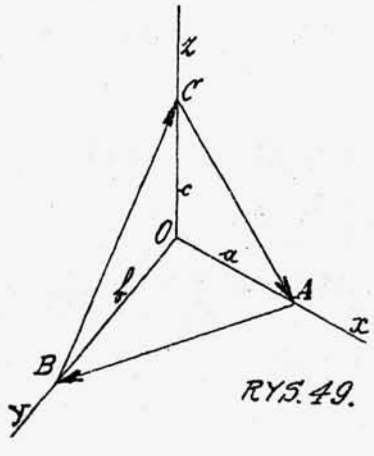
prostą, to powtarzając z nią rozumowanie poprzedzające przekonamy się, że ta prosta musi przeciąć siłę P_1. Przypuśćmy, że D jest tym punktem przecięcia, to oczywiście punkt ten leży w płaszczyźnie ABC. Tak więc już mamy dwa punkty siły P_1 /A i D/ leżące w płaszczyźnie ABC, a z tego wynika, że ta siła także leży w owej płaszczyźnie c.b.d.d.

44. Przykłady. 1/ Niech będzie prostokątny układ współrzędnych oraz płaszczyzna, przecinająca osie współrzędnych w punktach A, B i C i tworząca na tych osiach odcinki odpowiednio równe a, b, c.

Przypuśćmy, że odcinki AB, BC, CA, OA, OB i OC wyobrażają siły.



RYS. 49.

Chodzi o wyznaczenie kąta ϑ między siłą wypadkową i momentem pary wypadkowej.

Za środek redukcyi obieramy początek współrzędnych O. Rzut siły wypadkowej R na oś x /$=R_x$/ jest równy sumie rzutów wszystkich sił układu, będzie więc: $R_x = a$.

Oznaczmy rzuty siły R na osie y i z odpowiednio przez R_y i R_z, biorąc rzuty wszystkich sił

układu na te osi, znajdziemy $R_y = b$ oraz $R_z = c$.
Stąd $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Wyznaczmy teraz moment pary wypadkowej N. Oznaczmy rzuty tego momentu na osi x, y, z odpowiednio przez N_x, N_y i N_z. Rzut N_x momentu jest równy sumie momentów wszystkich sił układu względem osi x. Biorąc te momenty, otrzymamy

$$N_x = b.c\ ;\ N_y = c.a\ ;\ N_z = a.b$$

Stąd $N = \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$.

Na zasadzie paragrafu poprzedzającego

$$\cos\vartheta = \frac{N_xR_x + N_yR_y + N_zR_z}{NR} = \frac{3a.b.c}{\sqrt{(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} \quad (1)$$

Znajdźmy jeszcze warunki, jakie winny być spełnione, aby oś centralna układu przechodziła przez punkt O.

Jeśli oś centralna przechodzi przez punkt O, to układ sprowadza się do skrętnika, przyczem moment pary tego skrętnika leży na linii działania siły wypadkowej, czyli kąt ϑ jest równy 0 albo π.

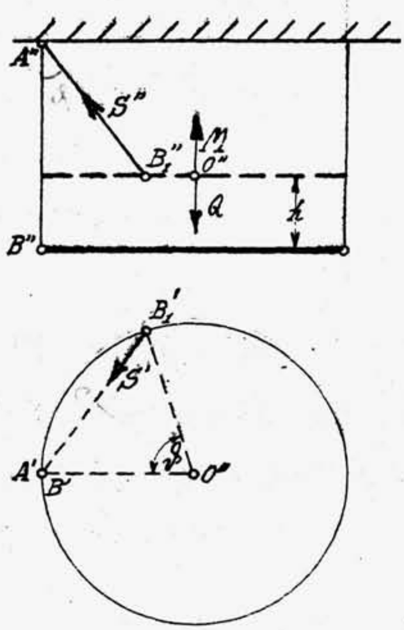
W pierwszym przypadku $\cos\vartheta = 1$, w drugim zaś $\cos\vartheta = -1$. Gdy podstawimy we wzorze (1) jakąś z tych dwóch wartości $\cos\vartheta$ i podniesiemy otrzymany rezultat stronami do kwadratu, to otrzymamy

$$9a^2b^2c^2 = (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)(a^2 + b^2 + c^2)$$

lub $a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2) = 0$

Z tego wynika, że każde z wyrażeń, stojących w nawiasach jest oddzielnie równe zeru /ponieważ $a^2 \neq 0$; $b^2 \neq 0$; $c^2 \neq 0$ /, czyli $b^2 - c^2 = 0$; $c^2 - a^2 = 0$; $a^2 - b^2 = 0$; a stąd $b = \pm c$; $c = \pm a$; $a = \pm b$ zaś ograniczając nasze rozwiązania tylko do pierwszej ćwiartki, otrzymamy $b = c$; $c = a$; $a = b$ lub $a = b = c$. —

II/ Tarcza kołowa o promieniu $= a$ i ciężarze Q jest zawieszona na n pionowych sznurach, przyczepionych w jednakowych odległościach do jej obwodu. Długość każdego sznura $= 2a$. /czyli równa się średnicy tarczy/. Przyłóżmy do tarczy parę sił, działającą w płaszczyźnie tarczy tak, aby pionowy jej moment był skierowany w górę. Wskutek działania tej pary tarcza, pozostając poziomą, obróci się i podniesie się w górę, a sznury przybiorą położenie ukośne. Tak więc np. sznur AB



RYS. 50.

$(A'B', A''B'')$ zajął obecnie położenie $AB_1(A'B_1', A''B_1'')$ a tarcza w tem nowem położeniu jest o k wyżej od pierwotnego. Chodzi o wyznaczenie momentu pary, przyłożonej do tarczy.

Na tarczę działają następujące siły: 1/ siła ciężkości Q, przyłożona do środka tarczy O. 2/ para, o momencie nieznanym, który oznaczymy przez M oraz 3/ naprężenie n sznurów, z których każde niech będzie S. Pod działaniem tych sił tarcza pozostaje w równowadze.

Poprowadźmy przez środek O prostą pionową i weźmy rzuty wszystkich sił układu na jej kierunek, to otrzymamy: $-Q + n.S.\cos\varphi = 0$ . . . (1.) gdzie φ oznacza kąt każdego ze sznurów z pionem.

Gdy weźmiemy momenty wszystkich sił układu względem prostej z, to będziemy mieli:

$$M - n.S.\sin\varphi.a.\cos\frac{\theta}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

{Moment siły S wzgl. prostej z został tu wyznaczony w znany już sposób: przez punkt O poprowadziliśmy płaszczyznę, prostopadłą do prostej z /czyli płaszczyznę tarczy/ i wyznaczyliśmy moment rzutu siły S na tę płaszczyznę względem punktu i ten moment jest równy momentowi siły względem prostej z.}

Pomiędzy kątami ϑ i φ zachodzi prosty związek: Zwróćmy uwagę na sznur AB w nowem położeniu. Ten sznur tworzy z pionem kąt φ , więc jego rzut na płaszczyznę poziomą jest równy $2a.\sin\varphi$. Lecz z trójkąta $A'O'B'$ wynika, że ten sam rzut jest równy $2a.\sin\frac{\vartheta}{2}$. Więc $2a.\sin\varphi = 2a\sin\frac{\vartheta}{2}$ skąd $\varphi = \frac{\vartheta}{2}$
Podstawmy tę wartość $\frac{\vartheta}{2}$ do (2) :

$$n.S.a.\sin\varphi.\cos\varphi = M \quad . \; . \; . \; (3)$$

Z równań (1) i (3) rugujemy S, dzieląc drugie z nich przez pierwsze. Otrzymamy $\sin\varphi = \frac{M}{Q}$ . . (4)

Wyrazimy jeszcze $\sin\varphi$ w funkcyi h.

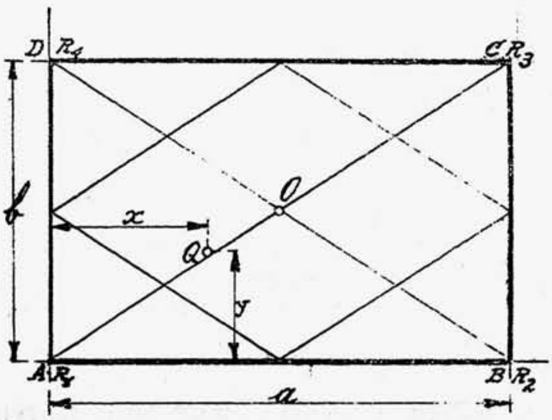
Rzut sznura AB na kierunek pionowy jest równy $2a.\cos\varphi$. Skądinąd wiadomo, że ten sam rzut jest także równy $2a-h$, więc $2a.\cos\varphi = 2a-h$
skąd $\cos\varphi = \frac{2a-h}{2a}$, a $\sin\varphi = \frac{\sqrt{(4a-h)h}}{2a}$
i podstawiając tę wartość $\sin\varphi$ do (4), otrzymamy $M = \frac{Q\sqrt{(4a-h).h}}{2a}$

Wyznaczmy jeszcze naprężenie jednego ze sznurów. Z równania (1) mamy $S = \frac{Q}{n.\cos\varphi}$ skąd $S = \frac{2Q.a}{n.(2a-h)}$
Gdyby h było zerem, to otrzymalibyśmy:

$$M = 0 \quad , \text{ a } \quad S = \frac{Q}{n}$$

Ten wynik daje się przewidzieć bezpośrednio. Gdyby tarcza podniosła się aż do sufitu, to byłoby $h = 2a$, skąd $M = Q.a$; $S = \infty$. Oznacza to, że nie możemy doprowadzić tarczy do sufitu bo przedtem sznury się zerwą.

III/ Prostokątny stół $ABCD$ spoczywa na czterech nogach, umieszczonych w wierzchołkach. Długość stołu $=a$, szerokość zaś $=b$. Na stole kładziemy ciężar, ważący Q kg.



RYS. 51.

Odległość tego ciężaru od krawędzi AD oznaczmy przez x, odległość zaś od krawędzi AB przez y. Załóżmy jeszcze, że ciężar Q jest tak wielki, że ciężar stołu wobec niego jest bardzo mały i można go nie brać w rachubę.

Mamy wyznaczyć reakcye, którą podłoga wywiera na nogi stołu.

Oznaczmy te nieznane reakcye podłogi na nogi A, B, C i D odpowiednio przez R_1, R_2, R_3 i R_4 i obierzmy układ współrzędnych w sposób taki: za początek współrzędnych weźmy punkt A, za oś x prostą AB, za oś y prostą AD i wreszcie za oś z prostą, przechodzącą przez A i prostopadłą do płaszczyzny stołu.

Na stół działa więc pięć sił: Q, R_1, R_2, R_3 i R_4

i wszystkie są skierowane pionowo, a z tego wynika, że rzuty każdej z nich na osi x i y są zerami, czyli, że biorąc rzuty na te osi żadnych równań nie otrzymamy.

Pozostaje tylko oś z i gdy weźmiemy rzuty na jej kierunek, to będziemy mieli

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Biorąc momenty względem osi x i y otrzymamy

$$-R_3 . b - R_4 . b + Q . y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$R_2 . a + R_3 . a - Q . x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Suma momentów względem osi z również nie da żadnego równania, bo wszystkie siły układu są do tej osi równoległe, a więc moment każdej z nich względem tej osi jest zerem.

Otrzymaliśmy więc trzy równania, zawierające cztery niewiadome i pozatem więcej równań ułożyć nie możemy. Z tego wynika, że reakcye R_1, R_2, R_3 i R_4 są nieokreślone: jedną z nich można zawsze obrać dowolnie, a wtedy wyznaczymy trzy pozostałe. Innemi słowy: jest nieskończona liczba układów reakcji, czyniących zadość warunkom zadania. Tego rodzaju siły nazywają się statycznie niewyznaczalnemi.

Jest rzeczą oczywistą, że w rzeczywistości reakcye te są określone, więc zachodzi pytanie, dlaczego nie możemy ich wyznaczyć?

Otóż: nie uwzględniliśmy pewnej ważnej okoliczności, przyjęliśmy bowiem milcząco, że stół jest ciałem sztywnem, a ciał takich w naturze niema - wszystkie ciała odkształcają się pod działaniem sił. Już we wstępie do statyki powiedzieliśmy że nie biorąc w rachubę odkształcalności ciał, nie pomijamy jakiejś cechy drugorzędnej, lecz zasadniczą właściwość ciał i gdy się z nią nie liczymy, to otrzymujemy niekiedy rozwiązanie nieokreślone, albo nawet błędne. Że istotnie w tym razie ze sprężystością liczyć się musimy, przekonywa nas uwaga następująca: przypuśćmy, że mamy stół o czterech nogach, z których trzy są drewniane, a czwartą stanowi miękka spiralna sprężyna, której długość naturalna mało przewyższa długość nogi; oczywiście ta czwarta noga prawie nie będzie podpierała stołu, gdyż naprężenie sprężyny jest bardzo małe. Albo też niech będzie płyta, zawieszona na czterech pionowych sznurach, przyczem trzy z nich są zwykłe, konopne, a jeden cienki gumowy, słabo rozciągnięty. I tu płytę będą podtrzymywały prawie całkowicie trzy pierwsze sznury.

W naszym zadaniu założymy, że odkształcenie jest wprost proporcyonalne do sił działających, czyli, że skrócenie nogi A stołu wynosi $k.R_1$, gdzie k jest współczynnikiem proporcyonalności. Tak samo skrócenie nogi B jest $k.R_2$ i t.d. Przypuszczamy prócz tego, że blat pozostaje płaskim. Aby uzależnić od siebie te odkształcenia połączmy punkty A i C oraz B i D, to na przecięciu prostych AC i BD otrzymamy punkt O, który jest środkiem prostokąta $ABCD$ /czyli blatu stoła/. Końce przekątni AC opadły o $k.R_1$ i $k.R_3$, więc środek tej przekątni opadł o $\frac{kR_1 + k.R_3}{2}$.

Końce drugiej przekątni opadły o kR_2 i kR_4 a więc jej środek o $\frac{k.R_2 + k.R_4}{2}$, a że środek przekątni AC jest również środkiem BD, więc

$$\frac{k.R_1 + kR_3}{2} = \frac{k.R_2 + k.R_4}{2} \text{ skąd } R_1 + R_3 = R_2 + R_4 \quad .\ (4)$$

W ten sposób otrzymaliśmy jeszcze czwarte równanie i reakcye podłogi dadzą się wyznaczyć. Zobaczymy, jaki warunek powinien być spełniony, aby ciężar Q wspierał się tylko na trzech nogach. Przypuśćmy więc, że $R_3 = 0$. Wtedy równania (1) (2) (3) i (4) przekształcą się w następujące:

$$R_1 + R_2 + R_4 = Q$$
$$R_4 . b = Q.y$$
$$R_2 . a = Q.x$$
$$R_1 = R_2 + R_4$$

Rugujemy z tych równań reakcye R_1 R_2 i R_4

Wypadnie $\frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{b}{2}} = 1$

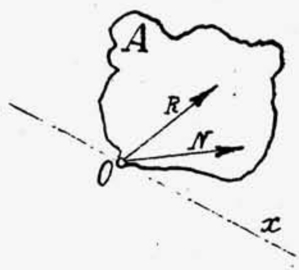
Jest to równanie linii prostej, przyczem $\frac{a}{2}$ i $\frac{b}{2}$ są to odcinki, jakie tworzy ta prosta na osiach współrzędnych. Wynik ten oznacza, że gdy ciężar Q będzie położony na tej prostej, to stół będzie się wspierał tylko na trzech nogach.

Gdy, powtarzając poprzednie rozumowanie, założymy kolejno, że $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ i $R_3 = 0$, to otrzymamy, że aby stół wspierał się tylko na trzech nogach, to ciężar Q musi leżeć na obwodzie rombu, którego wierzchołki są w środkach krawędzi stołu.

45. Przypadki szczególne równowagi przestrzennego układu sił.

Na ciało sztywne A, którego jeden punkt O /RYS.52/ jest nieruchomy działają siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ a prócz tego reakcya w punkcie O. Chodzi o to, jakie warunki powinny być spełnione, aby ciało pozostawało w spoczynku.

Obierzmy za środek redukcyi punkt O i sprowadźmy układ sił do jednej wypadkowej R i do jednej pary wypadkowej, o momencie N. Poprowadźmy przez punkt O, jakąkolwiek prostą x, byle nie prostopadłą do momentu N i weźmy momenty wszystkich sił układu względem tej prostej.

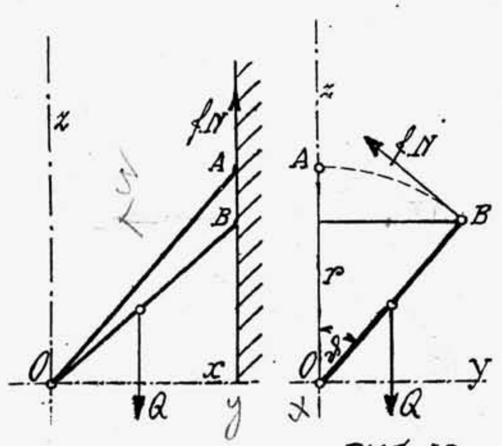


RYS. 52.

Moment wypadkowej R, a tak samo moment reakcyi ciała B na A, działającej w punkcie O, względem prostej x są zerami. Pozostaje jeszcze moment pary wypadkowej, Ponieważ prosta x nie jest prostopadła do N, więc rzut tego momentu na tę prostą nie mógłby być zerem i nie mogłaby zachodzić równowaga, a z tego wynika, że warunkiem koniecznym równowagi danego układu jest, aby moment pary wypadkowej N był zerem, czyli, aby suma geometryczna momentów sił układu względem O była zerem. Łatwo zrozumieć, że warunek ten jest dostateczny. Istotnie: przypuśćmy, że $N=0$, zatem cały układ sprowadza się do siły R przyłożonej w O, i ta siła równoważy się z reakcyą w punkcie O.

46. Przykłady I. Sztaba o długości a i ciężarze Q jest umocowana luźno w punkcie O. W pewnej odległości od O sztaba opiera się o pionową ścianę, tworząc z nią dany kąt α. Współczynnik tarcia między sztabą a ścianą jest równy f.

Przypuśćmy, że sztaba się obraca, pozostając



RYS. 53.

ciągle w zetknięciu ze ścianą, czyli że opisuje na niej koło. Niech OA będzie początkowem położeniem sztaby, a OB - położeniem skrajnem, kiedy zachodzi jeszcze równowaga, ale tarcie jest już całkowicie rozwinięte. Gdyby jeszcze cokolwiek odchylić sztabę, to zaczęłaby ona już spadać. Chodzi o wyznaczenie tego krańcowego położenia równowagi sztaby. Innemi słowy: chodzi o wyznaczenie kąta $\vartheta = \sphericalangle AOB$

Na sztabę działają następujące siły: 1/ siła ciężkości Q, 2/ reakcya normalna N ściany, 3/ Siła tarcia $= f.N$, skierowana po stycznej do koła o promieniu r , które zakreśla sztaba przy obrocie, 4/ Reakcya przegubu w punkcie O, o nieznanym kierunku i wielkości.

Aby nie wprowadzić reakcyi №.4, poprowadźmy przez punkt O prostą pionową z. i weźmy momenty wszystkich sił układu względem tej prostej. Moment siły Q względem prostej z jest zerem, bo siła ta jest równoległa do niej. Moment siły N jest równy

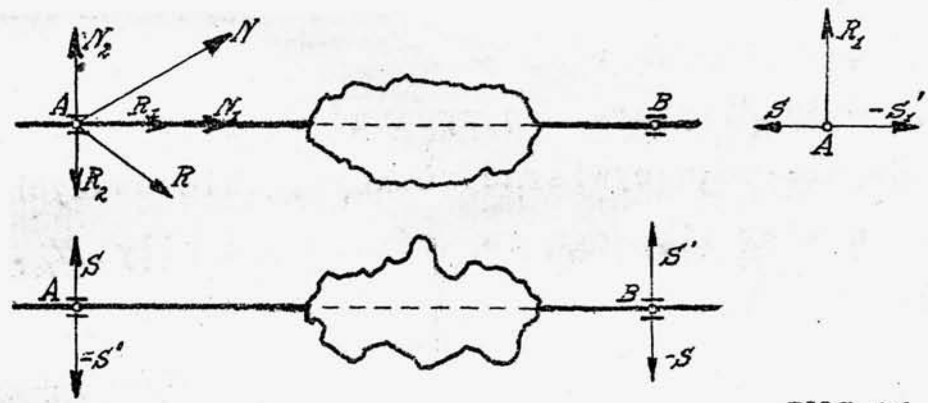
$N.r.\sin\vartheta$. — W celu wyznaczenia momentu siły $f.N$ prowadzimy płaszczyznę, prostopadłą do osi z i przechodzącą przez punkt O i bierzemy moment rzutu siły $f.N$ na tę płaszczyznę względem punktu O, to będzie to to samo, co moment siły $f.N$ względem osi z. Otrzymamy stąd, że moment ten jest ÷ $-f.N.\cos\vartheta.a.\sin\alpha$ i $N.r.\sin\vartheta - f.N.\cos\vartheta.a.\sin\alpha = 0$: (1)

To równanie byłoby dostatecznem do wyznaczenia kąta ϑ, ale wyznaczymy jeszcze i reakcyę N. W tym celu weźmiemy momenty względem prostej x, prostopadłej do ściany i przechodzącej przez punkt O. Moment siły N względem tej prostej jest zerem, moment siły Q jest $Q.\frac{r}{2}.\sin\vartheta$, a wreszcie moment siły $f.N$ jest $-f.N.r$ więc $Q\frac{r}{2}.\sin\vartheta - f.N.r = 0$ .. (2)
Z (1) mamy $r.\sin\vartheta - f\cos\vartheta.a.\sin\alpha = 0$, a że $r = a.\cos\alpha$ więc $\cos\alpha.\sin\vartheta = f\sin\alpha.\cos\vartheta$, a dzieląc przez $\cos\alpha.\cos\vartheta$ wypadnie $tg\vartheta = f.tg\alpha$ $\quad f = \frac{tg\vartheta}{tg\alpha}$
Z (2) mamy: $N = \frac{Q\sin\vartheta}{2f} = \frac{Q.tg\alpha}{\sqrt{1+f^2tg^2\alpha}}$
W przypadku szczególnym, gdy sztaba tworzy ze ścianą kąt $\alpha = \frac{\pi}{4}$ otrzymujemy $tg\vartheta = f.tg\varphi$ lub $\vartheta = \varphi$ gdzie φ jest kątem tarcia.

II/ Niech będzie jakiekolwiek ciało, osadzone na osi, sztywno złączonej z ciałem i że jest osadzona w dwóch łożyskach A i B, uważanych za punkty.

Dajmy na to, że na ciało działa układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ oraz reakcye łożysk. Obierzmy łożysko A za środek redukcji i sprowadźmy układ do jednej siły wypadkowej R i do jednej pary wypadkowej N.

Rozłóżmy siłę R na 2 składowe w kierunku AB oraz w kierunku do AB prostopadłym. Pierwszą z tych składowych oznaczmy przez R_1, drugą przez R_2



RYS. 54.

Rozłóżmy dalej moment N na dwie składowe w tych samych kierunkach i oznaczmy składową w kierunku AB przez N_1, zaś drugą składową przez N_2. Weźmy momenty wszystkich sił układu względem prostej AB. Momenty reakcyi łożysk, jak również momenty sił R_1 i R_2 oraz rzut momentu N_2 są zerami. Pozostaje tylko rzut momentu N_1. Z tego wynika, że warunkiem komiecznym równowagi układu jest aby było

$N_1 = 0$ czyli, aby suma momentów wszystkich sił układu względem osi AB była zerem.

Oznaczmy odległość łożysk AB przez a, a każdą z sił pary N_2 przez S, to oczywiście $S \cdot a = N_2$ skąd $S = \frac{N_2}{a}$.

A więc para N_2 składa się z dwuch takich sił S. Ta para wywołuje w każdem z łożysk reakcyę równą i odwrotną do S. Oznaczymy te reakcye przez S' i $-S'$. Innemi słowy i para N_2 równoważy się z reakcyami łożysk S' i $-S'$.

Siła R_1 stara się wysunąć oś z łożysk. Ale łożyska nie mogą wywierać reakcyi, skierowanych wzdłuż osi, a więc nie mogą te równoważyć siły R_1. Jeśli więc nie zachodzi równość $R_1 = 0$ to równowaga nie może być zachowana. Ale łożyska mogą być tak urządzone, aby mogły wywierać reakcyę wzdłuż osi. Można w tym celu przymocować do osi w pobliżu łożysk dwa pierścienie, które nie pozwoliłyby osi przesuwać się. Wtedy składowa R_1 może już nie być zerem i w takim razie jest ona zrównoważona przez reakcye łożysk. Innemi słowy: suma reakcyi łożysk jest równa składowej R_1. Jednakowoż nie mamy możności wyznaczenia każdej z tych reakcyi oddzielnie, gdyż więcej równań, zawierających te dwie reakcye, nie biorąc w rachubę sprężystości wału, nie otrzymamy. Mamy więc znów do czynienia z reakcyami statycznie niewyznaczalnemi.

Przypuśćmy, że składowa R_1 siły R jest zerem. Pozostaje jeszcze składowa R_2 tejże siły i jest ona zrównoważona reakcją łożyska A, którą oznaczymy przez R_1'. W takim razie ogólna reakcya, jaką wywiera łożysko A jest wypadkową reakcyi R_1' i S.

ROZDZIAŁ VII.

O ŚRODKU CIĘŻKOŚCI.

47. Moment statyczny punktu materyalnego.

Niech będzie w przestrzeni jakaś płaszczyzna którą oznaczymy przez F oraz pewne ciało, tak drobne, aby położenie jego w przestrzeni dało się określić za pomocą trzech współrzędnych, tak jak położenie punktu geometrycznego. Ciało, tak zdefinjowane nazywać będziemy punktem materyalnym. Przypuśćmy, że dany punkt materyalny ma masę m i, że jest odległy od płaszczyzny F o odległość równą z

Utwórzmy iloczyn $m.z$. Iloczyn taki nazywać b będziemy momentem pierwszego stopnia punktu m względem płaszczyzny F, albo też częściej będziemy używali dla oznaczenia jego nazwy takiej: "moment statyczny punktu m względem płaszczyzny F". Ponieważ