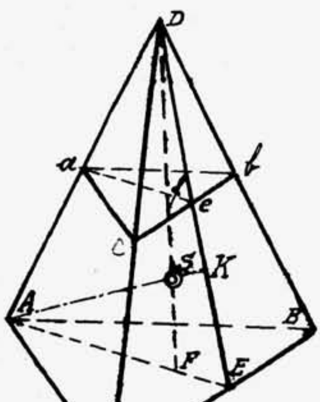
parami krawędzi AB i DC lub BD i AC, a z tego wynika twierdzenie geometryczne: trzy proste, łączące środki przeciwległych krawędzi czworościanu, przecinają się w jednym punkcie.

57. Środek ciężkości objętości czworościanu $ABCD$. Dzielimy czworościan na warstwy elementarne płaszczyznami równoległemi do jednej ze ścian. Niech jedną z tych płaszczyzn będzie abc, i niech E będzie środkiem krawędzi BC. Prosta DE dzieli na pół wszystkie odcinki takie, jak bc, równoległe do BC, a prócz tego widać, że proste AE i ae są równoległe. Gdy odmierzymy $AF = \frac{2}{3} AE$ to F będzie środkiem ciężkości podstawy ABC. Poprowadźmy prostą DF, przetnie ona ae w punkcie f. Z podobieństwa trójkątów wypadnie, że $\frac{af}{AF} = \frac{ae}{AE}$, zatem $af = \frac{2ae}{3}$ z czego znów wynika, że f jest środkiem ciężkości trójkąta abc.



RYS.61.

Widzimy, że środki ciężkości wszystkich warstw elementarnych leżą na prostej DF, a więc na tejże prostej leży środek ciężkości całego czworościanu. Środek ciężkości czworościanu leży na każdej prostej tęczącej wierzchołek ze środkiem ciężkości przeciwległej ściany, a zatem leży w tym samym punkcie, co środek ciężkości czterech jednakowych mas, umieszczonych w wierzchołkach. Wiadomo z twierdzenia poprzedzającego, że jest on odległy od wierzchołka D czworościanu o odległość $DS = \frac{3}{4} DF$. —

Poprowadźmy jeszcze z wierzchołka D prostopadłą do przeciwległej ściany, a przez środek ciężkości S - płaszczyzną, równoległą do ABC. Z podobieństwa trójkątów wypadnie, że ta płaszczyzna przetnie ową prostopadłą w odległości $\frac{1}{4}$ jej długości od podstawy, czyli, że środek ciężkości jest odległy o $\frac{1}{4}$ wysokości czworościanu od podstawy.

58. Środek ciężkości piramidy wielokątnej i stożka. Dowiedziemy, że środek ciężkości piramidy wielokątnej leży na prostej, łączącej wierzchołek piramidy ze środkiem ciężkości podstawy w odległości $\frac{1}{4}$ wysokości piramidy od podstawy. Istotnie: postępując podobnie, jak w wypadku poprzedzającym, dzielimy piramidę na warstwy elementarne płaszczyznami równoległemi do podstawy. Wszystkie te przecięcia są podobne do podstawy, a środek ciężkości każdej warstwy leży na prostej, łączącej wierzcho-

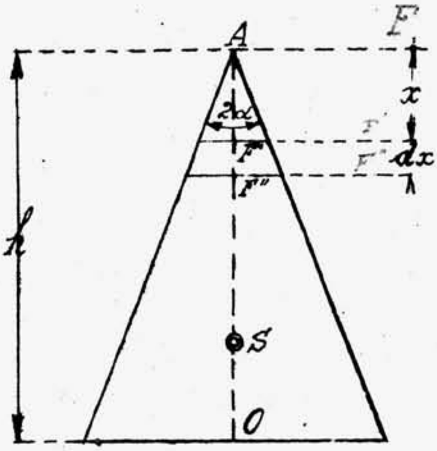
łek ze środkiem ciężkości podstawy. Oczywiście i środek ciężkości piramidy leży na tej samej prostej.

Rozkładamy następnie podstawę na trójkąty. Łącząc wierzchołki tych trójkątów z wierzchołkiem piramidy, podzielmy całą piramidę na czworościany, posiadające wspólny wierzchołek. Środki ciężkości wszystkich czworościanów leżą w płaszczyźnie, równoległej do podstawy i położonej w odległości $\frac{1}{4}$ wspólnej wysokości od podstawy. Na tej samej wysokości leży środek ciężkości piramidy c.b.d.d.

Jeżeli podstawa piramidy jest krzywoliniowa, to uważamy ją za wielobok o nieskończenie krótkich bokach. Wypada więc prawidło następujące: Aby wyznaczyć środek ciężkości stożka łączymy wierzchołek A ze środkiem ciężkości F podstawy i odmierzamy na AF od wierzchołka $AS = \frac{3}{4} AF$. Punkt S będzie środkiem ciężkości stożka.

W przypadku szczególnym, gdy dany stożek jest prostym kołowym jego środek ciężkości leży na osi, w odległości $\frac{3}{4}$ wysokości od wierzchołka. Dowiedziemy jeszcze to twierdzenie bezpośrednio.

Niech będzie stożek prosty, kołowy, mający wysokość $AO = h$ i kąt wierzchołkowy $= 2\alpha$.



RYS. 62

Przez wierzchołek A poprowadźmy płaszczyznę F równoległą do podstawy i wyznaczmy moment statyczny stożka względem tej płaszczyzny. Podzielmy w tym celu stożek na nieskończenie cienkie warstwy płaszczyznami, równoległemi do podstawy. Niech F' i F'' będą dwiema takiemi sąsiedniemi płaszczyznami. Wytną one ze stożka warstwę o grubości dx. Objętość tej warstwy, mogącej być uważaną za cylinder o wysokości dx jest $\pi . r^2 dx$, gdzie r oznacza promień koła przekroju. Jeżeli założymy, że gęstość masy stożka jest $\mu = 1$ to masa warstwy będzie równa także $\pi . r^2 dx$, a moment statyczny warstwy względem płaszczyzny F będzie $\pi . r^2 dx . x$. Oznaczmy przez dN ten elementarny moment statyczny. Ponieważ $r = x \, tg\alpha$ więc możemy też napisać, że

$$dN = \pi . x^3 tg^2\alpha . dx$$

Stąd moment statyczny całego stożka

$$N = \pi . tg^2\alpha \int_0^h x^3 dx = \pi . tg^2\alpha \cdot \frac{h^4}{4} \qquad \frac{\pi h^3 tg^2\alpha}{3} \cdot \frac{3h}{4}$$

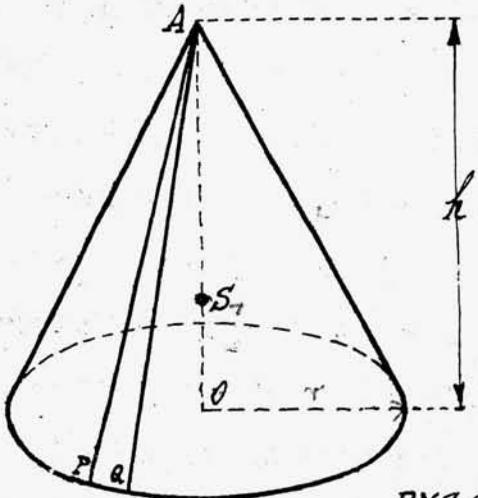
Masa całego stożka jest równa objętości, pomnożonej przez gęstość, czyli $M = \frac{\pi . h^2 . tg^2\alpha . h}{3} = \frac{\pi . h^3 . tg^2\alpha}{3}$

Stąd odległość środka ciężkości stożka od płaszczyzny F jest równa $x_0 = \frac{N}{M} = \frac{3}{4} h$.

Otrzymaliśmy więc rezultat zgodny z poprzedzającym.

59. Środek ciężkości powierzchni stożkowej.

Niech będzie znowu prosty stożek kołowy o wysokości $AO = h$, o promieniu podstawy $= r$ i tworzącej $= a$. Znajdziemy najpierw środek ciężkości powierzchni bocznej tego stożka.



RYS 63

Środek ten będzie leżał na osi symetryi, lub na osi AO stożka; trzeba więc jeszcze tylko wyznaczyć położenie tego środka na osi.

Podzielmy obwód podstawy stożka na nieskończenie małe elementy i punkty podziału połączmy z wierzchołkiem A, to otrzymamy nieskończenie wązkie trójkąty. Środek ciężkości każdego z tych trójkątów leży na tworzącej stożka w odległości $\frac{1}{3}$ tej tworzącej od podstawy stożka, a z tego wynika, że środki ciężkości wszystkich trójkątów będą leżały w jednej płaszczyźnie, równoległej do podstawy. Płaszczyzna ta dzieli wysokość stożka w stosunku $1 : 2$ i w punkcie przebicia tej płaszczyzny z wysokością będzie leżał środek ciężkości powierzchni bocznej stożka. Oznaczmy ten środek przez S_1. Oczywiście $OS_1 = \frac{1}{3} OA$.

Wyznaczmy teraz środek ciężkości całej powierzchni stożka. Wyznaczymy w tym celu moment statyczny tej powierzchni względem płaszczyzny podstawy.

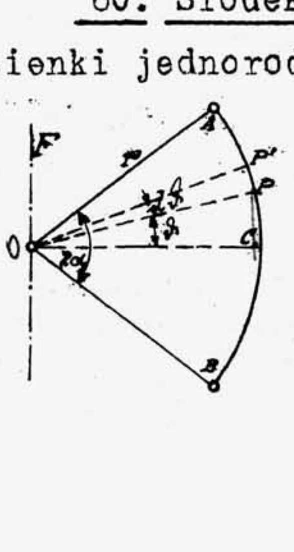
Ponieważ masa powierzchni bocznej stożka ~~$(\mu=1$~~ $(\mu=1)$, wynosi $\pi r a$, zaś przeciętnie odległość tej powierzchni od płaszczyzny podstawy jest $\frac{h}{3}$, więc moment statyczny całkowitej powierzchni stożka jest równy $N = \frac{\pi . r . a . h}{3}$ /moment statyczny podstaw jest zerem/. Oznaczmy ten moment przez N. Masa całkowitej powierzchni stożka jest równa

$$M = \pi . r . a + \pi r^2 = \pi . r . (a + r)$$

a więc odległość środka ciężkości tej powierzchni od płaszczyzny podstawy jest

$$z_0 = \frac{\pi . r . a . h}{3 \pi . r (a + r)} = \frac{a . h}{3 (a + r)}$$

60. Środek ciężkości łuku koła. Niech będzie cienki jednorodny pręt, mający postać łuku koła.



RYS. 64.

Połączmy końce A i B tego pręta ze środkiem O koła i oznaczmy kąt AOB przez 2α, a promień koła przez r. Aby wyznaczyć środek ciężkości łuku AB postąpmy tak: Połączmy środek O koła ze środkiem C łuku AB. Prosta OC tworzy, oczywiście, z promieniami OA i OB równe kąty α, jest więc osią symetrji łuku AB i na niej leży środek ciężkości tego łuku.

Poprowadźmy przez punkt O płaszczyznę F, prostopadłą do OC i wyznaczmy moment statyczny łuku AB względem tej płaszczyzny.

W tym celu podzielmy łuk AB na nieskończenie małe elementy, z których typowym niech będzie łuk PP'. Oznaczmy kąty: POC przez ϑ, POP' przez $d\vartheta$. Oczywiście długość elementu $P'P$ jest $r\cdot d\vartheta$. Jeżeli założymy, jak zwykle, że ciężar jednostki długości łuku $\mu = 1$, to $r d\vartheta$ będzie wyrażało masę łuku i gdy tę masę pomnożymy przez odległość elementu od płaszczyzny F, czyli przez $x = r\cos\vartheta$, to moment statyczny tego elementu będzie równy:

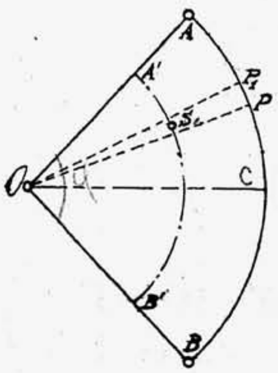
$$dN = r\cdot d\vartheta\, r\cos\vartheta = r^2\cos\vartheta\, d\vartheta \quad ;$$

moment zaś statyczny całego łuku wynosi :

$$N = r^2\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\vartheta\, d\vartheta = 2r^2\sin\alpha$$

Masa całego łuku $M = 2r\alpha$, więc odległość środka ciężkości łuku od płaszczyzny F jest równa $x_0 = \frac{N}{M} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$. Przypuśćmy, że łuk jest półkolem. W tym razie $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i $x_0 = \frac{2r}{\pi}$.

61. Środek ciężkości wycinka kołowego. Niech ACB będzie łukiem wycinka, a O środkiem. Promień wycinka oznaczymy przez r , a kąt AOB przez 2α i prowadzimy dwusieczną OC kąta AOB. Dzielimy następnie wycinek na elementarne trójkąty, o jednakowych polach; jednym z nich jest dajmy na to OPP'. Możemy skoncentrować masę tego trójkąta w jego środku ciężkości t.j. w takim punkcie S_1 , że $OS_1 = \frac{2}{3} OP$. Czyniąc to samo w każdym trójkącie, otrzymamy szereg cząsteczek o jednakowych masach, rozłożonych na łuku kołowym $A'B'$. W granicy cząstki te utworzą jednorodny łuk koła, możemy więc wyznaczyć środek ciężkości wycinka przy pomocy wzorów par. poprzedzającego. Odległość jego od środka O będzie $x_0 = \frac{2r}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, gdyż $\frac{2}{3} r$ jest promieniem łuku $A'B'$.



RYS. 65.

Dla pola półkola otrzymamy $x_0 = \frac{4r}{3\pi}$, bo $\alpha = \frac{\pi}{2}$

62. Środek ciężkości odcinka kołowego wyznaczymy łatwo na zasadzie paragrafu poprzedzającego, zwróciwszy uwagę na to, że odcinek otrzymuje się przez odrzucenie trójkąta od wycinka.

63. Środek ciężkości rzutu figury płaskiej.

Niech będzie jakakolwiek figura płaska mająca pole F i środek ciężkości S. Wyznaczymy rzut prostokątny tej figury na jakąś płaszczyznę. Pole rzutu oznaczmy przez P', a środek ciężkości rzutu przez S'. Dowiedziemy, że punkt S' jest rzutem środka ciężkości S, czyli, że rzut środka ciężkości figury płaskiej jest środkiem ciężkości rzutu tej figury. W tym celu obierzmy najprzód układ współrzędnych tak, aby osie x, y leżały w płaszczyźnie rzutów. Oznaczmy kąt między płaszczyznami F i F' przez γ. W takim razie, jak wiadomo

$$F' = F \cos\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

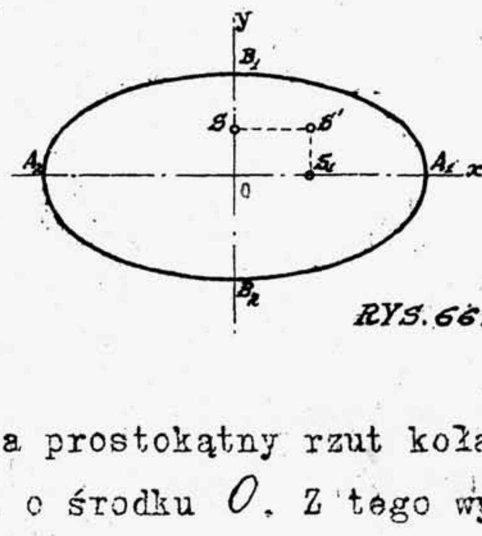
Rozbijmy pole F na bardzo drobne elementy, niech pole jednego z nich będzie równe f, a współrzędne — x, y, z. Pole rzutu tego elementu oznaczmy przez f'. Współrzędne tego rzutu będą, oczywiście $x, y, 0$ zaś między f i f' będzie zachodziła zależność taka: $f' = f \cos\gamma$ . . . . . . (2)

Oznaczmy moment statyczny przez F' względem płaszczyzny yOz. Będzie on, oczywiście, równy $\Sigma f' x$. Ponieważ pole rzutu figury F jest równe F', a gęstość powierzchniowa jest równa 1 więc masa tego pola jest również F' zaś $x_0' = \frac{\Sigma f' x}{F'}$ jest odległością środka ciężkości figury F' od

płaszczyzny yOz. Ponieważ inaczej $x_0' = \frac{\Sigma f.\cos\gamma.x}{F\cos\gamma}$
więc $x_0' = \frac{\Sigma f.x}{F}$.

Ale temu samemu jest równa współrzędna x_0 punktu S. Tak samo dowiedlibyśmy, że współrzędne y_0 i y_0' punktów S i S' są równe. Innemi słowy punkt S' jest rzutem punktu S.

64. Środek ciężkości pola eliptycznego. Niech będzie elipsa, mająca osie $2a$ i $2b$. Chodzi o wyznaczenie środka ciężkości połowy tej elipsy np. $A_1B_1A_2$. Środek ten będzie oczywiście leżał na prostej OB_1 jako na osi symetrji, należy tylko wyznaczyć położenie owego środka na tej osi. Daną elipsę możemy uważać za prostokątny rzut koła, o średnicy $A_1A_2 = 2a$ i o środku O. Z tego wynika, że $OB_1 = b$ jest rzutem promienia tego koła, a zatem $b = a.\cos\gamma$, gdzie γ oznacza kąt między płaszczyznami: elipsy i koła. Stąd: $\cos\gamma = \frac{b}{a}$.



RYS. 66.

Oznaczmy przez T środek ciężkości półkola. Na zasadzie twierdzenia par. poprzedzającego, środek ciężkości S pola $A_1B_1A_2$ jest rzutem punktu S, a zatem odcinek OS jest rzutem odcinka OT i

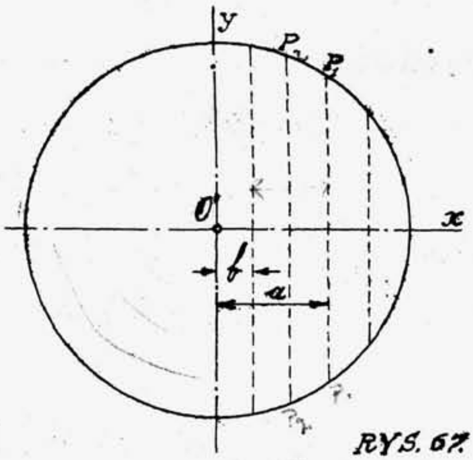
$OS = OT\cos\gamma$ czyli $OS = \frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{b}{a} = \frac{4b}{3\pi}$, gdyż odległość środka półkola od jego środka ciężkości jest równa $\frac{4a}{3\pi}$.

Aby wyznaczyć środek ciężkości pola półelipsy $B_1A_1B_2$, możemy je uważać znów, jako rzut półkola o średnicy $= 2a$, i o środku O, przytem jedna połowa tego półkola znajduje się nad płaszczyzną elipsy, druga zaś nad nią. Oczywiście środek ciężkości S_1 półelipsy $B_1A_1B_2$ leży na osi OA_1, czyli razem ze środkiem ciężkości półkola, zaś odległość jego od punktu O jest $OS_1 = \frac{4a}{3\pi}$, czyli jest taka sama, jak odległość środka ciężkości półkola od tegoż punktu O.

<u>Środek ciężkości ćwiartki elipsy</u> np. A_1OB_1 wyznaczymy w sposób taki: zwróćmy uwagę na dwie ćwiartki elipsy: A_2OB_1 i A_1OB_1. Środek ciężkości tych ćwiartek leżą na jednakowych odległościach od osi A_1A_2, a prosta łącząca je musi przechodzić przez punkt S. Czyli że środek ciężkości ćwiartki A_1OB_1 leży na prostej równoległej do A_1A_2 i przechodzącej przez S. Z drugiej strony tak samo dowiedziemy, że musi on leżeć na prostej przechodzącej przez S_1 i równoległej do B_1B_2, a zatem szukany środek ciężkości leży w

punkcie S' na przecięciu tych dwuch prostych. Odległość punktu S' od osi A_1A_2 jest, oczywiście, równa $\frac{4 \cdot b}{3\pi}$, zaś odległość od osi B_1B_2 wynosi $\frac{4 \cdot a}{3\pi}$.

65. Środek ciężkości strefy kulistej. Niech będzie kula, o promieniu r i środku O. Poprowadźmy dwie płaszczyzny równoległe, odległe od środka kuli o a i b $(< r)$. Te płaszczyzny wytną z powierzchni kuli strefę, której środek ciężkości mamy wyznaczyć.



RYS. 67

Obierzmy układ współrzędnych w sposób taki: za oś x weźmy prostą przechodzącą przez O i prostopadłą do płaszczyzn przekroju, osi y i z obieramy w płaszczyźnie prostopadłej do x w punkcie O.

Wyznaczmy moment statyczny strefy względem płaszczyzny yOz. W tym celu podzielmy powierzchnię strefy na nieskończenie drobne elementy, płaszczyznami, prostopadłemi do osi x. Niech kolejne dwie z tych płaszczyzn przecinają obwód koła, położonego w płaszczyźnie rysunku w dwuch punktach P_1 i P_2. Możemy uważać powierzchnię, zawartą mię-