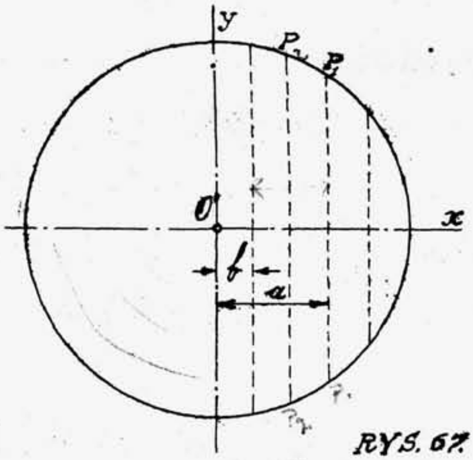
punkcie S' na przecięciu tych dwuch prostych. Odległość punktu S' od osi A_1A_2 jest, oczywiście, równa $\frac{4 \cdot b}{3\pi}$, zaś odległość od osi B_1B_2 wynosi $\frac{4 \cdot a}{3\pi}$.

65. Środek ciężkości strefy kulistej. Niech będzie kula, o promieniu r i środku O. Poprowadźmy dwie płaszczyzny równoległe, odległe od środka kuli o a i b $(< r)$. Te płaszczyzny wytną z powierzchni kuli strefę, której środek ciężkości mamy wyznaczyć.



RYS. 67

Obierzmy układ współrzędnych w sposób taki: za oś x weźmy prostą przechodzącą przez O i prostopadłą do płaszczyzn przekroju, osi y i z obieramy w płaszczyźnie prostopadłej do x w punkcie O.

Wyznaczmy moment statyczny strefy względem płaszczyzny yOz. W tym celu podzielmy powierzchnię strefy na nieskończenie drobne elementy, płaszczyznami, prostopadłemi do osi x. Niech kolejne dwie z tych płaszczyzn przecinają obwód koła, położonego w płaszczyźnie rysunku w dwuch punktach P_1 i P_2. Możemy uważać powierzchnię, zawartą między temi płaszczyznami za ścięty stożek, a w takim razie masa jego $(\mu = 1)$ wynosi $ds \cdot 2y \cdot \pi$, gdzie ds oznacza długość łuku PP_1 , a y promień koła średniego. Stąd, moment statyczny tej powierzchni elementarnej względem płaszczyzny zOy jest $dN = ds \cdot 2y \cdot \pi \cdot x$, gdzie x jest odciętą punktu P. Ponieważ $ds^2 = dx^2 + dy^2$, a $x^2 + y^2 = r^2$, skąd $2xdx + 2ydy = 0$ lub $dy = -\frac{xdx}{y}$ więc

$$ds^2 = \frac{(y^2 + x^2) \cdot dx^2}{y^2} = \frac{r^2 dx^2}{y^2} \text{, albo } ds = \frac{r \cdot dx}{y} \text{,}$$

/znak "plus" bo ze wzrostem x , wzrasta też s /.
Zatem $dN = \frac{r \cdot dx}{y} \cdot 2y \cdot \pi \cdot x$ skąd $dN = r\,dx \cdot 2\pi \cdot x$

Całkując otrzymamy $N = 2\pi \cdot r \int_b^a x \cdot dx = \pi \cdot r(a^2 - b^2)$

Masę strefy $= M$, znajdziemy łatwo, zważywszy, że masa elementarna $dM = ds \cdot 2y \cdot \pi = \frac{r\,dx}{y} \cdot 2y\pi = 2r\pi\,dx$

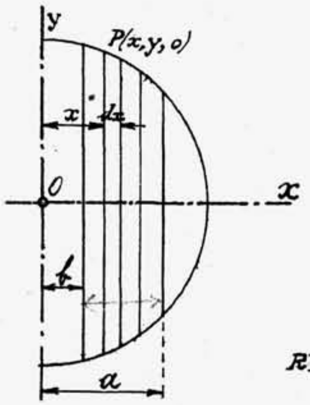
skąd $M = \int_b^a r \cdot dx \cdot 2\pi = 2\pi r(a - b)$

Szukana odległość środka ciężkości strefy od płaszczyzny yOz jest równa $x_0 = \frac{N}{M} = \frac{a+b}{2}$

Jeśli strefa jest półkulą, to $a = r$, i $b = 0$, a wtedy $x_0 = \frac{r}{2}$.

66. Środek ciężkości warstwy sferycznej.

Niech będzie kula o promieniu r i przypuśćmy, że została z niej wycięta strefa dwiema płaszczyznami równoległemi, których odległości od środka O kuli są odpowiednio równe b i a Chodzi o wyznaczenie środka ciężkości objętości zawartej mię



RYS. 68.

dzy temi płaszczyznami i strefą. Obierzmy układ współrzędnych, jak w przykładach poprzedzających. Oczywiście środek ciężkości warstwy leży na osi x, należy tylko znaleźć odległość jego od środka O.

Podzielmy w tym celu bryłę na nieskończenie cienkie warstwy, płaszczyznami prostopadłemi do osi x. Dajmy na to, że dwie kolejne płaszczyzny podziału są odległe od środka O, odpowiednio o x i $x+dx$. Wyznaczmy moment statyczny warstwy, zawartej między temi płaszczyznami względem płaszczyzny yz. Możemy uważać tę warstwę za nieskończenie cienki cylinder, którego promień podstawy $=y$, a wysokość $=dx$. W takim razie szukany moment statyczny będzie: $dN=\pi y^2 dx . x$, a jeśli uwzględnimy, że $x^2+y^2=r^2$, to otrzymamy:
$dN=\pi.(r^2-x^2).x.dx$. Moment statyczny całej strefy względem ~~osi x~~ płt. yz. jest równy

$$N=\pi.\int_b^a (r^2x-x^3)dx=\pi\left|\frac{r^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right|_b^a=\frac{\pi.(a^2-b^2)}{4}(2r^2-a^2-b^2)$$

Masa nieskończenie cienkiej warstwy $(\mu=1)$ wynosi

$dM=\pi.y^2dx=\pi.(r^2-x^2)dx$ skąd

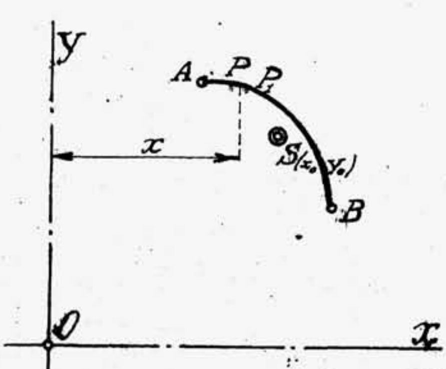
$$M=\pi\int_b^a(r^2-x^2)dx=\pi\left|r^2x-\frac{x^3}{3}\right|_b^a=\frac{1}{3}\left\{\pi(a-b)(3r^2-a^2-ab-b^2)\right\}$$

Szukana odległość środka ciężkości całej warstwy od punktu O jest więc równa:

$$x_0 = \frac{N}{M} = \frac{3(a+b)(2r^2-a^2-b^2)}{4(3r^2-a^2-ab-b^2)}$$

W przypadku szczególnym, gdy $b=0$, a $a=r$, otrzymamy dla półkuli: $x_0 = \frac{3}{8}r$. ~

67. Pierwsze twierdzenie Guldina. Niech będzie prostokątny płaski układ współrzędnych x,y.



RYS. 69.

Przypuśćmy, że dana jest jakaś linia, mająca końce A i B. Wyznaczmy moment statyczny tej linii względem osi y. W tym celu podzielmy tę linię na nieskończenie małe elementy, z których każdy ma długość ds / s jest długością całej linii AB, Przypuśćmy, że PP_1 jest jednym z tych elementów. Jeśli współrzędne jego oznaczymy przez x i y, to jego moment statyczny względem osi y będzie $ds.x$ zaś, jako moment statyczny całej linii AB względem tej osi znajdziemy $\int ds.x$. ~

Przypuśćmy, że środek ciężkości linii AB znajduje się w punkcie $S(x_0,y_0)$. W takim razie, oczywiście:

$$\int ds.x = s.x_0$$

Dajmy na to, że linia AB zaczęła się obracać do-

koła osi y i obróciła się o nieskończenie mały kąt $d\vartheta$. Każdy punkt tej linii odbył nieskończenie krótką drogę prostopadłą do płaszczyzny układu współrzędnych. Droga punktu P wynosi $x.d\vartheta$, zaś powierzchnia, zakreślona przez łuk ds przy tym nieskończenie małym przesunięciu jest $ds.x.d\vartheta$. Stąd powierzchnia, zakreślona przez całą linię AB wyraża się przez $\int ds.x.d\vartheta = d\vartheta \int x.ds$ . . . . . (1)
a że $\int x ds = s.x_0$, więc owa powierzchnia jest równa $s.x_0.d\vartheta$, gdyż $d\vartheta$ uważamy za stałe.

Przypuśćmy, że linia AB obróciła się o skończony kąt ϑ. W takim razie powierzchnia przytem zakreślona jest równa:

$$\int_0^{\vartheta} s.x_0.d\vartheta = s.x_0 \int_0^{\vartheta} d\vartheta = s.(x_0.\vartheta)$$

Ponieważ $x_0\vartheta$ jest to droga, którą zatoczył środek ciężkości S, przy obrocie o kąt ϑ, więc możemy powiedzieć: powierzchnia, zakreślona przez jakąś linię przy obrocie jej dokoła pewnej osi jest równa iloczynowi z długości tej linii przez drogę, jaką odbył przy tem środek ciężkości.

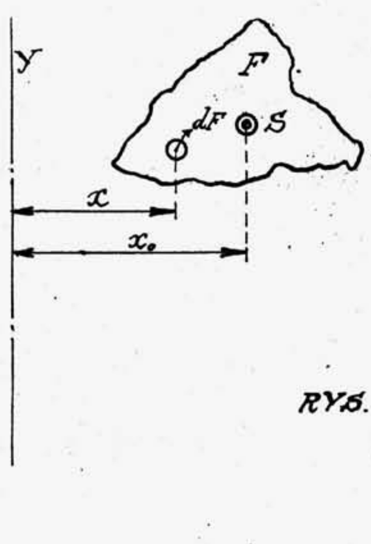
68. Przykłady I/ Niech będzie prosty stożek kołowy mający promień podstawy r i tworzącą a. Wyznaczyć powierzchnię boczną tego stożka.

Możemy uważać, że powierzchnią ta powstała przez obrót tworzącej, dokoła osi (AO). Ponieważ środek ciężkości tworzącej leży w jej środku (c), odległym od osi obrotu o $\frac{r}{2}$, więc droga, przebyta przez ten punkt przy obrocie jest $l=2\pi.\frac{r}{2}$ Powierzchnia boczna stożka jest więc równa iloczynowi l przez a czyli: $2\pi.\frac{r}{2}.a=\pi.r.a.$

II/ Niech będzie koło, o promieniu r i oś y leżąca z tem kołem w jednej płaszczyźnie. Przypuśćmy, że odległość środka koła od osi y jest równa a. Wyznaczyć powierzchnię utworzoną przez obrót koła dokoła osi y, czyli powierzchnię pierścienia. Długość krzywej tworzącej /koła/ jest $2\pi.r$ a droga, zatoczona przez środek ciężkości tej krzywej wynosi $2\pi.a$, a zatem szukaną powierzchnia, S:

$$S=2\pi.r.2\pi.a=4\pi^2a.r.$$

69. Drugie twierdzenie Guldina. Niech będzie dana oś y i jakakolwiek figura płaska, o polu F, leżąca w jednej płaszczyźnie z tą osią.



RYS. 70.

Znajdźmy moment statyczny figury F względem osi y. W tym celu podzielmy tę figurę na nieskończenie małe elementy, z których typowe ma pole $=dF$ i jest odległe od osi y x. Moment statyczny elementu

dF względem osi y jest równy $dF.x$, a moment statyczny całej figury względem tejże osi jest $\int dF.x$.

Przypuśćmy, że odległość środka ciężkości S pola od osi y wynosi x_0 , to oczywiście $\int dF.x = F.x_0$.

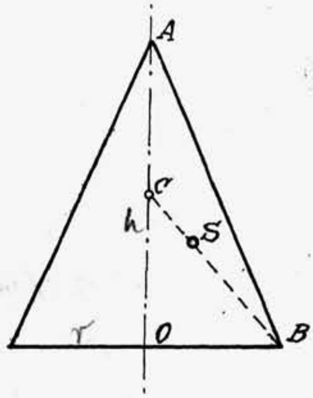
Wyobraźmy sobie, że figura F obróciła się dokoła osi y o nieskończenie mały kąt $d\vartheta$. Przy tym obrocie element dF zatoczył bryłę, którą można uważać za elementarny cylinder o podstawie dF i wysokości $x.d\vartheta$. Zatem objętość utworzonego cylindra jest $dF.x.d\vartheta$,a objętość bryły zatoczonej przez całą figurę F wynosi $\int dF.x.d\vartheta = d\vartheta \int dF.x$ . ./, bo $d\vartheta$ jest stałe/. Ale ponieważ $\int dF.x = F.x_0$, więc objętość ta = $= F.x_0.d\vartheta$. Przypuśćmy, że figura F obróciła się o skończony kąt ϑ , to będziemy mogli napisać

$$\int_0^{\vartheta} F.x_0.d\vartheta = F.x_0.\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1.)$$

Wzór (1.) wyraża twierdzenie, o które chodziło. Można je wysłowić tak: <u>objętość bryły, którą wytworzyło pole F jest równa iloczynowi z pola przez długość drogi, którą obiegł środek ciężkości.</u>

<u>70.</u> <u>Przykłady.</u> I/ Niech będzie prosty, kołowy stożek, mający promień podstawy $= r$ i wysokość $= h$. Wyznaczyć objętość tego stożka.

Możemy uważać, że objętość stożkowa powstała przez obrót trójkąta AOB dokoła osi AO ,a zatem ta objętość jest równa iloczynowi z pola trójkąta



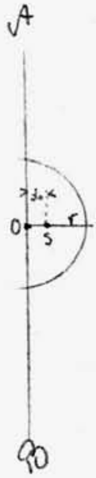
RYS.71.

AOB przez drogę, jaką obiegł jego środek ciężkości. Pole ΔAOB jest równe $\frac{r.h}{2}$; ponieważ środek ciężkości S jest odległy od środka C wysokości AO, o $CS=\frac{1}{3}BC$ więc promień koła, jakie obiegł on przy obrocie jest równy $\frac{r}{3}$, a droga przezeń przebyta wynosi $\frac{2\pi.r}{3}$. Stąd szukana objętość równa się: $\frac{r.h}{2}\cdot\frac{2\pi.r}{3}=\frac{1}{3}\pi.r^2.h.$

II/ Niech będzie koło, o promieniu r i oś y leżąca z tem kołem w jednej płaszczyźnie. Przypuśćmy, że odległość środka koła od osi y jest równa a. Wyznaczyć objętość, utworzoną przez obrót koła dokoła osi y, czyli objętość pierścienia. Pole figury tworzącej jest równe $\pi.r^2$, a droga, którą obiegł środek ciężkości wynosi $2\pi.a$. Stąd szukana objętość równa się: $\pi.r^2.2.\pi.a=2.\pi^2.a.r^2$

III. Wyznaczyć, opierając się na pierwszem twierdzeniu Guldina, środek ciężkości półokręgu, o promieniu r i środku O.

Oczywiście szukany środek ciężkości leży na osi symetrji półkola t.j. na prostej, przechodzącej przez środek O i prostopadłej do krańcowej średnicy AB. Dajmy na to, że odległość środka ciężkości S od środ-



ka O jest równa x_0.

Przypuśćmy, że półkole obraca się dokoła średnicy AB, to powierzchnia P przez nie zatoczona jest równa iloczynowi z . długości linii tworzącej /$=\pi.r$/ przez drogę, którą odbył środek ciężkości /$=2\pi.x_0$/. A zatem $P=\pi.r.2\pi.x_0$. Lecz jest to powierzchnia kuli, a zatem $P=4\pi.r^2$, więc $r.2\pi.x_0=4r^2$ skąd $x_0=\frac{2.r}{\pi}$.

IV. Wyznaczyć, opierając się na drugim twierdzeniu Guldina, środek ciężkości półkola, o promieniu i środku O.

Oznaczmy odległość środka ciężkości S od punktu O przez x_0 i przypuśćmy, że półkole obraca się około AB. W Takim razie objętość powstałej bryły wynosi $V=\frac{\pi.r^2}{2}.2\pi.x_0$. Lecz jest to kula, a zatem $V=\frac{4}{3}\pi.r^3$, więc $\frac{\pi.r^2}{2}.2\pi.x_0=\frac{4}{3}\pi.r^3$ stąd $x_0=\frac{4r}{3\pi}$.

71. Uwagi nad ogólnością twierdzeń Guldina. Jeśli figura tworząca przecina oś obrotu, to twierdzenie Guldina są **nieważne**: Istotnie: przypuśćmy, że punkty tej krzywej P_1 i P_2 leżą po stronach odwrotnych osi obrotu; w takim razie odcięte ich x_1, x_2 mają znaki odwrotne, a zatem odpowiednie elementy powierzchni lub objętości, jako zawierające czynnik $x.ds$, będą miały także znaki odwrotne. Całka daje sumę takich elementów, wziętych z właściwymi znakami, a więc, jeżeli oś przecina figurę, to twierdzeni

Guldina dają różnicę powierzchni lub objętości, które zataczają dwie części figury, położone po odwrotnych stronach osi obrotu.

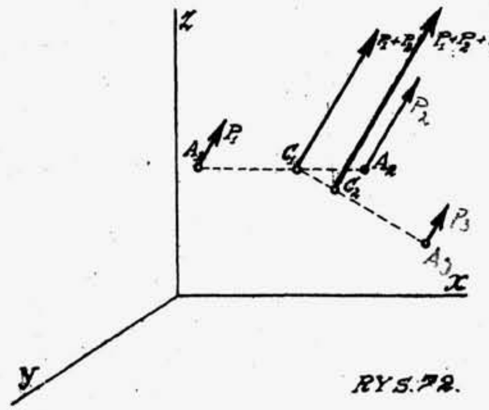
Twierdzenia Guldina dają się uogólnić w innym kierunku.

Dajmy na to, że figura F porusza się w przestrzeni tak, że jej środek ciężkości S opisuje pewną linię krzywą s. Przypuśćmy, że ta figura F pozostaje wciąż normalną do s. Dowiedziemy, że przy tym ruchu powstanie bryła, której objętość jest równa polu figury F pomnożonem przez drogę środka ciężkości

Jest to prawie oczywiste. Gdy, bowiem, figura F porusza się w opisany sposób, to możemy uważać, że obraca się ona dokoła osi chwilowych, położonych w jej płaszczyźnie. Przypuśćmy, że w pierwszej chwili figura F obróciła się dokoła osi chwilowej o kąt $d\vartheta_1$ w następnej chwili o $d\vartheta_2$, dalej o $d\vartheta_3$, i t.d., to oczywiście każdego obrotu chwilowego dotyczy twierdzenie Guldina, a więc dotyczy też ono ruchu całkowitego c.b.d.d.

72. Znaczenie mechaniczne środka masy. Niech będzie prostokątny układ współrzędnych. Dajmy na to, że mamy jakieś ciało sztywne, do którego należą punkty $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, ...

Przypuśćmy, że na te punkty działają siły równoległe: w punkcie A_1 - siła P_1, w $A_2 - P_2$, ...



RYS.72.

Wypadkowa tych sił równa się ich sumie i jest do nich równoległa. Chodzi o wyznaczenie punktu przyłożenia tej wypadkowej. Dajmy na to, że wypadkowa sił P_1 i P_2 leży w punkcie $C_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, to oczywiście $\frac{A_1C_1}{C_1A_2} = \frac{P_2}{P_1}$ lub $\frac{\xi_1 - x_1}{x_2 - \xi_1} = \frac{P_2}{P_1}$ $\frac{\xi_1 - x_1}{x_2 - \xi_1 + \xi_1 - x_1} = \frac{P_2}{P_1+}$

Stąd $(P_1 + P_2)\xi_1 = P_1 . x_1 + P_2 . x_2$ . . . . . . (1)

Dalej wyznaczmy wypadkową sił $(P_1 + P_2)$ i P_3. Dajmy na to, że jest ona przyłożona w punkcie $C_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$. Otrzymamy analogicznie do (1) $(P_1+P_2+P_3)\xi_2 = (P_1+P_2)\xi_1 + P_3 . x_3$ albo : $(P_1+P_2+P_3)\xi_2 = P_1 . x_1 + P_2 . x_2 + P_3 . x_3$

Wogóle $(P_1+P_2+P_3+ \ldots)\xi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \ldots$, gdzie ξ oznacza odciętą punktu $C(\xi, \eta, \zeta)$ albo inaczej $\xi . \Sigma P = \Sigma P x$, skąd $\xi = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}$. Tak samo:

$$\eta = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P} \quad \text{i} \quad \zeta = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P}$$

Należy zwrócić uwagę na tę okoliczność, że jak wynika z otrzymanych wzorów, współrzędne punktu C przyłożenia wypadkowej sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ nie zależą wcale od kierunku tych składowych. Przypuśćmy, że wszystkie składowe obracają się dokoła punktu C pozostając równoległemi. W takim razie ich wypadkowa też będzie się obracała dokoła tegoż punktu. Ten punkt C nazywają środkiem układu sił równoległych.

Niech będzie w przestrzeni jakieś ciało sztywne. Podzielmy je na bardzo drobne elementy, z których jeden niech ma masę m_1, drugi m_2, ...

Jeśli ciało znajduje się w znacznej odległości od środka ziemi w stosunku do jego rozmiarów, to można uważać, że ciężary elementów tego ciała są proporcyonalne do mas. Tak więc ciężar pierwszego elementu jest równy $g \cdot m_1$, drugiego $g \cdot m_2$, . . . gdzie g oznacza współczynnik proporcyonalności.

Linie działania tych sił schodzą się w środku ziemi, a więc przy naszem założeniu co do odległości ciała od tego środka, możemy przyjąć, że w przybliżeniu linie te są równoległe, a zatem, stosując wyżej wyprowadzone wzory znajdziemy, że współrzędne punktu przyłożenia wypadkowej czyli współrzędne środka sił równoległych są

$$x_0 = \frac{\Sigma g \cdot m \cdot x}{\Sigma g \cdot m} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}; \quad y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

Ale tak samo, jak wiadomo, wyrażają się współrzędne środka masy ciała. A zatem środek sił ciążenia działających na różne elementy ciała znajdują się w środku masy i możemy powiedzieć, że siła ciążenia jest przyłożona w środku masy*/.

Należy przytem poczynić następujące uwagi:

*/ Właśnie środek masy w znaczeniu punktu przyłożenia siły ciążenia nazywa się środkiem ciężkości.

1-o. O wypadkowej sił równoległych może być mowa tylko w tym razie, gdy działają one na ciało sztywne. A więc środek ciężkości w ścisłym znaczeniu tego wyrazu posiadają tylko ciała sztywne podczas gdy środek masy istnieje w każdym ciele i w każdym układzie ciał.

2-o. Punkt przyłożenia siły ciężkości w ciele sztywnem tylko wtedy leży w środku masy, gdy rozmiary ciała są drobne w stosunku do odległości od środka ziemi. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to linia działania wypadkowej siły ciężkości może nie przechodzić przez środek masy, a zatem ten punkt nie może być wówczas uważany za punkt przyłożenia tej siły.

ROZDZIAŁ VIII.

ZASADA PRACY PRZYGOTOWANEJ.

73. Pojęcie pracy. Gdy mamy 2 wektory P i Q tworzące ze sobą kąt ϑ to, jak wiadomo /§ 12/, ich iloczynem wektorowym nazywamy wektor $V\bar{P}\bar{Q}$ równy pod względem wielkości $P.Q.\sin\vartheta$. Natomiast iloczynem skalarowym wektorów P i Q nazywać będziemy skalar $\bar{P}\bar{Q}$. Pod względem wielkości /która go całkowicie określa/ iloczyn ten jest równy $P.Q.\cos\vartheta$