ROZDZIAŁ V.

O SZNURACH i ŁAŃCUCHACH.

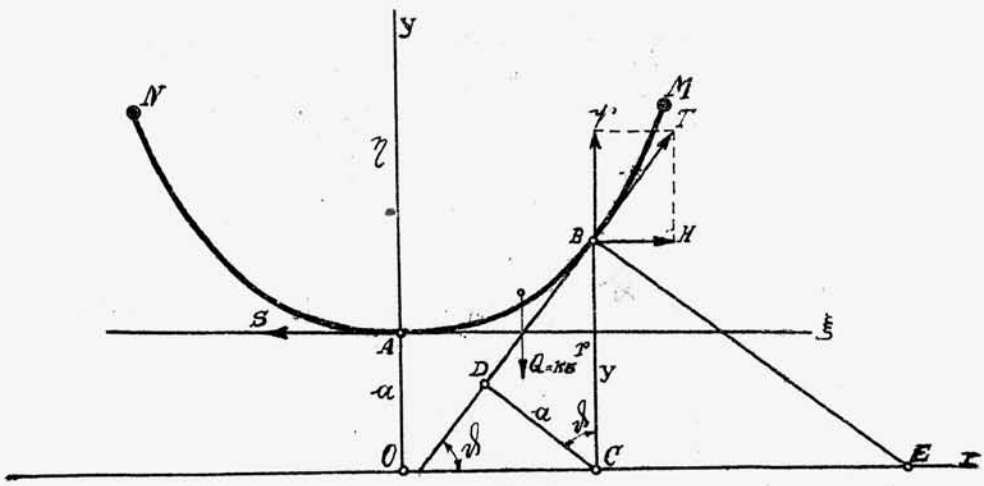
32. Pojęcie sznura. Sznur, lina lub łańcuch posiadają tę własność, że mogą w nich zachodzić tylko naprężenia podłużne i to zwrócone w jedną stronę. Jeśli przypuścimy, że sznur jest przymocowany do jakiegoś ciała, to nie możemy na nie wywierać za pośrednictwem sznura innego działania prócz ciągnienia.

Jeśli sznur odpowiada ściśle tej definicji, to mówimy, że jest on doskonale wiotki. W sznurach istotnych, a zwłaszcza w grubych linach mogą zachodzić również małe naprężenia poprzeczne. W dalszym ciągu będzie mowa jedynie o sznurach doskonale wiotkich.

33. Katenoida lub krzywa łańcuchowa. Niech będzie jakiś ciężki sznur jednorodny lub niejednorodny, t. zn. że ciężar jednostki jego długości może nie być wielkością stałą.

Umocujmy końce tego sznura w punktach M i N to przybierze on postać pewnej krzywej, którą nazywamy katenoidą lub krzywą łańcuchową.

Najniższy punkt A tej krzywej nazywamy jej wierzchołkiem, Przetnijmy sznur w tym punkcie.



RYS. 39.

Gdybyśmy chcieli, aby część AM nie zmieniła się ani pod względem kształtu, ani pod względem położenia, to trzebaby przyłożyć w A pewną siłę poziomą S równą naprężeniu, które panowało w tym punkcie.

Przypuśćmy dalej, że sznur został przecięty jeszcze w innym punkcie, np. w B . W tym punkcie przed rozcięciem panowało również pewne naprężenie w kierunku stycznej do łańcuchowej i gdybyśmy chcieli, aby część AB nie zmieniała się, ani pod względem kształtu, ani pod względem położenia, to trzebaby przyłożyć w B siłę T , równą owemu naprężeniu i działającą w kierunku stycznej. Na każdy element części AB sznura działa jeszcze siła ciężkości. Gdyby sznur zesztywniał, to równowaga nie zostałaby zachwiana. Możemy więc uważać sznur za sztywny, a zatem możemy mówić o wypadkowej Q owych sił ciężkości. Będzie ona przyłożona w środku ciężkości wyciętej części sznura.

A więc na sznur /który uważamy za sztywny/ działają 3 siły: S , T i Q . Ponieważ zachodzi równowaga, więc te siły muszą przechodzić przez jeden punkt, a zatem styczne w punktach A i B do łańcuchowej muszą się przecinać na pionie, przechodzącym przez środek ciężkości łuku AB .

Twierdzenie powyższe jest zupełnie ogólne, dotyczy ono wszystkich łańcuchowych.

Wyprowadzimy teraz dwie inne własności katenoidy.

Rozłóżmy siłę T na 2 składowe poziomą i pionową i oznaczmy pierwszą z nich przez H , drugą zaś przez V . Weźmy sumę rzutów wszystkich sił, działających na łuk AB , na kierunek poziomy. Ponieważ rzuty sił V i Q są zerami, więc otrzymujemy $H=S$ t.zn. naprężenia poziome są we wszystkich punktach łańcuchowej jednakowe.

Jeśli weźmiemy rzuty na kierunek pionowy, to otrzymamy $V=Q$, t. zn. naprężenie ~~poziome~~ pionowe $/V/$ w jakimkolwiek punkcie łańcuchowej jest równe ciężarowi łuku, zawartego między tym punktem a wierzchołkiem.

34. Katenoida pospolita. Niech będzie sznur jednorodny umocowany w punktach M i N. Krzywa, jaką on tworzy, zwisając nazywa się łańcuchową pospolitą lub katenoidą pospolitą. Wyprowadzimy jej równanie.

Obierzmy układ współrzędnych w sposób taki: za oś y uważajmy pion, przechodzący przez wierzchołek A katenoidy; aby zaś obrać położenie osi x oznaczmy naprężenie sznura w wierzchołku A przez S. Gdy przetniemy sznur w tym punkcie, to aby część AM nie zmieniła się, trzeba przyłożyć w A siłę, równą naprężeniu t.j. $= S$. Oznaczmy ciężar jednego metra sznura przez κ i przypuśćmy, że a metrów sznura waży S kg. czyli $S = \kappa . a$.

Urządźmy w A mały bloczek i przeciąwszy sznur o a metrów od A w stronę N przerzućmy go przez ów bloczek; zwisająca część sznura wytworzy siłę $= S$ i łuk AM nie ulegnie żadnej zmianie.

Koniec O, zwisającego sznura obierzmy właśnie za początek współrzędnych, a prostą, przechodzącą przez O i prostopadłą do osi y - za oś x. Weźmy dowolny punkt B na katenoidzie. W tym punkcie działa pewne naprężenie T. Gdyby więc przeciąć sznur w punkcie B, to dla tego aby łuk AB nie zmienił się trzeba przyłożyć w B siłę T.

Załóżmy, że r metrów sznura waży T kg. t.j. $T=\kappa.r$. Odetnijmy sznur o r metrów wyżej od punktu B i przerzućmy go przez bloczek, umieszczony w tym punkcie; zwisająca część sznura wytworzy siłę $-T$ i łuk AB nie ulegnie żadnej zmianie.

A więc, gdy na łuk AB działać będą siły S i T a oprócz tego ciężar sznura, równy $\kappa.s$ /gdzie s oznacza długość łuku AB /, to ta część sznura pozostanie w równowadze. Z tego wynika, że siły S, T i $\kappa.s$ równoważą się. Gdy weźmiemy sumy rzutów tych sił na kierunki: poziomy i pionowy, to otrzymamy równania:

$$\kappa.r.\cos\vartheta - \kappa.a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1.)$$

$$\kappa.r.\sin\vartheta - \kappa.s = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2.)$$

gdzie ϑ oznacza kąt, który styczna do łańcuchowej w punkcie B tworzy z osią x. Z $(1.)$ i $(2.)$ otrzymamy:

$$r\cos\vartheta = a \quad \ldots\ldots\ldots (3.)$$

$$r\sin\vartheta = s \quad \ldots\ldots\ldots (4.)$$

Podnosząc do kwadratu równania $(3.)$ i $(4.)$ i dodając je znajdziemy, że: $r^2 = a^2 + s^2 \quad \ldots\ldots\ldots (5.)$

Podzielmy równanie $(4.)$ przez $(3.)$; będzie

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{s}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (6.)$$

Ponieważ: $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots (7.)$, gdzie x, y oznaczają współrzędne punktu B, zatem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (8.)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe z trzema zmien nemi x, y i s. Możemy się jednak pozbyć jednej z nich np. s. Zróżniczkujemy w tym celu równanie (8) względem x: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{ds}{dx}$ . . . . . . (9.)

Jak wiadomo $ds^2=dx^2+dy^2$, skąd $\frac{ds}{dx}=\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ . . (10)

/Pozostawimy znak $+$, bo s jest wzrastającą funkcyą zmiennej x /. Zatem podstawiając to do (9.) otrzymamy $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ . . . . . . (11.)

Otrzymaliśmy więc równanie różniczkowe drugiego rzędu z dwiema zmiennemi. Aby obniżyć rząd tego równania oznaczmy $\frac{dy}{dx}$ przez p czyli $\frac{dy}{dx}=tg\vartheta=$ $=p$. . . (12) Różniczkując (12.) względem x będziemy mieli $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$ . . . . (13.)

Podstawiając (13.) do (11.) otrzymamy $dx=\frac{a\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$. (14)

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Całkując otrzymamy

$$x=a.lg\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+A_1 \quad . . . (15.)$$

gdzie A_1 jest stałą całkowania. Wyznaczmy tę stałą. W tym celu załóżmy $x=0$. Tej wartości x odpowiada wierzchołek A łańcuchowej; styczna w tym punkcie tworzy z osią x kąt $0°$, a więc również $p=0$. Podstawiając te wartości do równania (15.) znajdziemy, że $A_1=0$, a więc

$$x=a.lg\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) \quad . . . . (16)$$

Rozwiążmy teraz równanie (16.) względem p i aby tego dokonać przekształćmy je w sposób taki:

$e^{\frac{x}{a}} = p + \sqrt{1+p^2}$ 17

a biorąc odwrotność obydwuch stron równania /17/ otrzymamy:

$$\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}} = e^{-\frac{x}{a}}.$$

Gdy pomnożymy licznik i mianownik ~~prawej~~ lewej strony przez $p-\sqrt{1+p^2}$, to będzie

$$p-\sqrt{1+p^2} = -e^{-\frac{x}{a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /18/$$

Gdy dodamy stronami równania /17/ i /18/, to będziemy mieli $p = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ . . . . . . /19/

a ponieważ $p = \frac{dy}{dx}$, więc $dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$

Całkując to równanie otrzymamy $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + A_2$ . . /20/

gdzie A_2 jest stałą całkowania. Wyznaczmy tę stałą. Jeśli założymy $x = 0$, to odpowiada temu $y = a$, a a podstawiając w /20/ tę wartość y otrzymamy $A_2 = 0$, a więc: $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ . . . . /21/

Jest to równanie katenoidy pospolitej. Z równania tego wnosimy, że jest to krzywa przestępna, dalej że jest symetryczna względem osi y, bo gdy podstawimy wartości /$-x, y$/ zamiast /x, y/, to równanie nie ulegnie zmianie. Oś y nazywa się <u>osią</u> łańcuchowej, oś x jej <u>kierownicą</u>, a długość a - <u>parametrem.</u> Wyznaczmy teraz długość s łuku AB w funkcyi x. Z równania /6/ mamy, że $s = a . tg\,\vartheta$. Inaczej możemy napisać $s = a . p$, bo $tg\,\vartheta = p$, zaś podstawiając wartość p z równania /19/, otrzymamy

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /22/$$

Podnieśmy /21/ i /22/ do kwadratu i odejmijmy je stronami, to będziemy mieli :

$y^2 - s^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 2e^{\frac{x}{a}} \cdot 2e^{-\frac{x}{a}} = a^2$ . . . czyli $a^2 + s^2 = y^2$

a uwzględniając (5.) otrzymamy $y = r$ . . . . (23)

To znaczy, że koniec linki, przerzucony przez blok w punkcie B zwisa aż do kierownicy, czyli, że naprężenie w tym punkcie jest równe ciężarowi linki, o długości rzędnej y.

Zależności, zachodzące pomiędzy wielkościami a, r, s, y i ϑ łatwo zapamiętać przy pomocy wykresu następującego. Niech będzie łańcuchowa z wierzchołkiem A i osiami, obranemi, jak poprzednio.

Obierzmy na łańcuchowej dowolny punkt B /rys. 39/ i poprowadźmy z niego prostopadłą BC do osi x a z jej spodka C prostopadłą CD do stycznej w punkcie B. Spodek tej ostatniej oznaczmy przez D. W trójkącie BCD kąt $\sphericalangle BCD = \vartheta$ t.j. równa się kątowi nachylenia stycznej do osi x. Prócz tego zachodzą następujące zależności: $BC = y$; $DC = y . \cos \vartheta$; $BD = y . \sin \vartheta$. Zaś uwzględniając równania (3), (4) i (23) możemy napisać $DC = a$ i $BD = s$ —

Mając więc w wyobraźni powyższy rysunek można pamiętać główne zależności, charakteryzujące katenoidę.

Wyznaczmy jeszcze promień krzywizny katenoidy w dowolnym punkcie np. w B. Wiadomo, że promień krzywizny ϱ jest równy $\frac{ds}{d\vartheta}$, a że dla katenoidy $s = a . tg \vartheta$, więc : $\varrho = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{a}{\cos^2 \vartheta}$

Długość normalnej w punkcie B jest równa :

$$BE = \frac{y}{\cos\vartheta} = \frac{a}{\cos^2\vartheta}$$

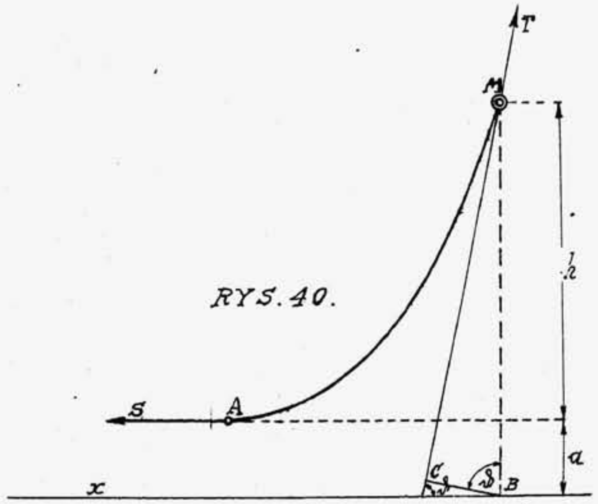
Z tego wynika, że długość promienia krzywizny w dowolnym punkcie katenoidy jest równa długości normalnej w tym punkcie.

Dla promienia krzywizny w wierzchołku katenoidy /~ $\vartheta = 0$ ~/ znajdziemy $\varrho = a$. Im silniej będziemy ciągnęli za końce sznura, tym krzywizna łańcuchowej w wierzchołku będzie mniejsza, t. zn. tem większy będzie promień krzywizny w tym punkcie; a zatem parametr łańcuchowej będzie wzrastał, a kierownica będzie się oddalała.

Przypuśćmy, że sznur przybrał kształt prostej. Wtedy promień krzywizny jest nieskończenie wielki, a zatem również i parametr łańcuchowej ma wartość nieskończenie wielką i naprężenie sznura w wierzchołku jest nieskończenie wielkie. Z tego wynika, że żadna siła nie może wyprostować całkowicie sznura.

35. Przykłady. 1/ Mamy ciężki sznur o długości l metr., przyczem jeden metr jego waży $\varkappa$ kg. Jeden z końców sznura jest umocowany w punkcie M , zaś drugi styka się w punkcie A z poziomą powierzchnią gruntu. Wysokość punktu M nad poziomem $= h$. Wyznaczyć naprężenie sznura w punkcie M .

Ponieważ sznur jest styczny do poziomu w punkcie A , więc ten punkt jest wierzchołkiem łańcuchowej. Prostą poziomą i odległą od A o a metrów uważajmy, jak poprzednio za oś x /t.j.za kierownicę łańcuchowej/oczywiście,że rzędna punktu M będzie równa : $h+a$.



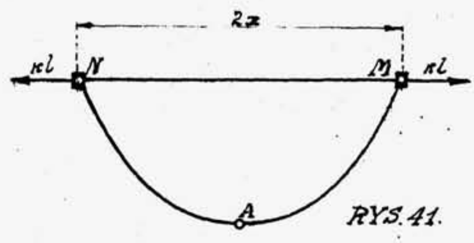
Naprężenie w dowolnym punkcie łańcuchowej jest równe ciężarowi sznura, zwisającego pionowo od tego punktu do kierownicy, a więc w danym razie jest równe ciężarowi / $h+a$ / metrów sznura. Ponieważ 1 m. sznura waży $\varkappa$ kg.,więc naprężenie w punkcie M czyli $T=\varkappa(h+a)$. . . . .(1). Gdy w tym równaniu wyrazimy a przez znane wielkości, to będziemy mogli uważać zadanie za rozwiązane.

Poprowadźmy styczną do łańcuchowej w punkcie M i prostopadłą MB do kierownicy, a z punktu B prostopadłą BC do owej stycznej; jak wiadomo odcinek BC jest równy parametrowi a łańcuchowej, zaś MC jest długością łuku AM . Z trójkąta MBC otrzymujemy $(h+a)^2=a^2+l^2$. . ., skąd $a=\frac{l^2-h^2}{2h}$ Podstawmy tę wartość na a w (1), znajdziemy, że :

$T = \kappa\left(\frac{h^2+l^2}{2h}\right)$ Naprężenie $S = \kappa \cdot a$ w punkcie A jest równe : $S = \kappa \cdot \frac{l^2-h^2}{2h}$

Łatwo również znajdziemy, że kąt ϑ , który styczna w punkcie M tworzy z osią x... $= arctg\frac{l}{a}$

II/ Na nieruchomy drążek poziomy, zupełnie gładki, nawleczono dwa pierścienie M i N i do pierścieni przymocowano końce ciężkiego łańcucha o długości $2l$. Gdyby ten układ pozostawić samemu sobie to pierścienie M i N zeszłyby się ze sobą i łańcuch przybrałby położenie pionowe. Aby temu



RYS.41.

zapobiedz przykładamy do pierścieni dwie siły równe i odwrotne. Każda z tych sił jest równa ciężarowi połowy długości łańcucha, czyli $\kappa \cdot l$,gdzie κ oznacza ciężar 1 m. łańcucha. Chodzi o wyznaczenie odległości pierścieni w stanie równowagi. Tę nieznaną odległość oznaczymy przez $2x$.

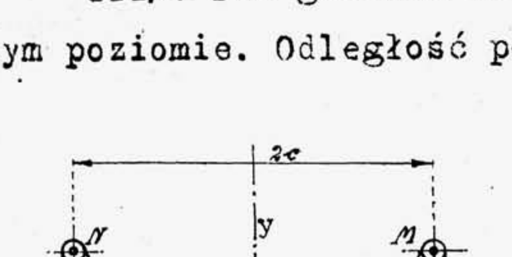
Przypuśćmy, że punkt A jest wierzchołkiem łańcuchowej. Z jednej strony wiadomo, że naprężenia poziome są we wszystkich punktach łańcuchowej jednakowe, a więc naprężenie w A = naprężeniu w $M = \kappa . l$ z drugiej zas strony naprężenie w wierzchołku katenoidy jest $\kappa . a$, gdzie a oznacza parametr tej krzywej. Z tego wynika, że $\kappa . l = \kappa . a$ lub $l = a \ldots (1)$ t. zn. że połowa długości łańcucha równa się parametrowi katenoidy. Zastosujmy wzór na długość łuku katenoidy, do łuku AM; uwzględniając (1) otrzymamy: $l = \frac{l}{2}\left(e^{\frac{x}{l}} - e^{-\frac{x}{l}}\right)$

skąd: $$-e^{-\frac{x}{l}} + e^{\frac{x}{l}} = 2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Wyznaczmy z tego równania x. Dla uproszczenia zakładamy $e^{\frac{x}{l}} = u$; oczywiście $e^{-\frac{x}{l}} = \frac{1}{u}$ i równanie (2) przybierze postać taką: $u - \frac{1}{u} - 2 = 0$, skąd: $u^2 - 2u - 1 = 0$ i $u = 1 \pm \sqrt{2}$.

Ale u może być tylko dodatnie, bo takim jest $e^{\frac{x}{l}}$ przy każdej wartości x, a więc we wzorze powyższym należy uwzględnić tylko znak plus. Zatem $e^{\frac{x}{l}} = 1 + \sqrt{2}$. Logarytmując to równanie otrzymamy $x = l . \lg(1 + \sqrt{2})$.

III/. Dwa gładkie kołki M i N, leżą na jednym poziomie. Odległość pomiędzy nimi jest równa $2c$. Zawieśmy na tych kołkach ciężki sznur, w sposób, wskazany na rysunku. Jeśli sznur będzie zbyt krótki, to zsunie się z kołków do środka. Chodzi o to, jaka powinna być conajmniej długość sznura, aby równowaga była możliwa.



RYS. 42.

Oznaczmy długość całego sznura przez $2l$, długość części zwisającej pionowo przez y, zaś długość łuku MN przez $2s$. — Na zasadzie znanych zależności będziemy mogli napisać

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}}+e^{-\frac{c}{a}}\right)\ ;\qquad s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}}-e^{-\frac{c}{a}}\right)\ ;$$

a dodając te 2 równania stronami otrzymamy: $y+s=a.e^{\frac{c}{a}}$

Ale $y+s=l$ więc: $l=ae^{\frac{c}{a}}$ . . . . (1.)

Należy znaleźć przy jakiej wartości parametru a wartość l jest najmniejsza. W tym celu różniczkujemy równanie (1.) względem a i przyrównujemy rezultat do zera. $\frac{dl}{da}=e^{\frac{c}{a}}-\frac{c.a.e^{\frac{c}{a}}}{a^2}=0$

skąd: $e^{\frac{c}{a}}\left(1-\frac{c}{a}\right)=0$; $1-\frac{c}{a}=0$ i $a=c$

Łatwo się przekonać, że ta wartość a odpowiada minimum, a nie maksymum, gdyż o maksymum w danym zadaniu nie może być mowy; — jakkolwiek długi, a większy od minimum byłby sznur to zawsze zajdzie równowaga.

Podstawiając $a=c$ . . w (1.) otrzymamy $2l=2c.e$

36. Dalszy ciąg teoryi łańcuchowej. Niech będzie łańcuchowa, utworzona przez sznur, przymocowany w punktach M i N. Osie obieramy, jak zwykle i pozostawiamy bez zmiany wszystkie poprzednie oznaczenia. Wówczas będzie: $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. . . . (1.)

Równanie to przekształcimy w sposób następujący. Zmieńmy układ współrzędnych, przesuwając oś x, równolegle do wierzchołka A i współrzędne bieżące w tym