oraz :

$$N = P.\sin\alpha + Q.\cos\alpha \ldots \qquad (4)$$

Reakcya całkowita jest wypadkową tych 2 sił.

Jeśli równia jest całkowicie gładka, to reakcya styczna F jest zerem. Wtedy napiszemy

$$Q.\sin\alpha - P.\cos\alpha = 0 \text{ , skąd } P = Q.tg.\alpha$$

Podstawmy tę wartość w (4). Otrzymamy

$$N = \frac{Q.\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + Q\cos\alpha = \frac{Q}{\cos\alpha},$$

co można łatwo otrzymać bezpośrednio.

ROZDZIAŁ II.

O SIŁACH RÓWNOLEGŁYCH

20. Przekształcenia układu sił. Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne. Przypuśćmy, że działają na nie siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ /Siły te mogą leżeć w jednej płaszczyźnie, ale mogą też nie leżeć. Weźmiemy wypadek najogólniejszy/. Powiemy, że siły te tworzą układ sił. Skutkiem działania tego układu ciało otrzyma pewien ruch. Ale taki sam ruch mogłoby nadać ciału inne układy sił, innemi słowy, można przekształcać dany układ bez zmiany skutku jego działania. Tego rodzaju zmiany układu mogą być następujące:

1. Ponieważ siła P_1 jest to wektor, związany z prostą, więc można ją przenosić dowolnie na jej pro-

stej działania, nie zmieniając wcale skutków tego działania. To samo dotyczy innych sił układu; działanie całego układu, wskutek takich przekształceń nie zmieni się.

2. Siłę P_1 można rozłożyć na dwie lub więcej składowych, czyli siłę P_1 można zastąpić siłami składowemi i te składowe wywrą ten sam skutek, co P_1, a więc i przy tem przekształceniu skutek działania całego układu nie ulegnie zmianie.

3. Przypuśćmy, że linie działania sił P_1 i P_2 przecinają się. Można więc punkt przyłożenia tych sił przenieść do punktu przecięcia i wyznaczyć ich wypadkową, a więc te dwie siły P_1 i P_2 można zastąpić przez tę wypadkową i działanie układu nie zmieni się.

4. Można do układu sił dodać dwie nowe siły równe, odwrotne i położone na jednej prostej. Takie dwie siły równoważą się, więc nie zmienią działania układu.

5. Jeżeli śród sił układu istnieją równe i odwrotne, to można je usunąć i skutek działania pozostanie bez zmiany.

Istnieją pewne wielkości, które przy tych wszystkich przekształceniach układu nie ulegają zmianie, a więc charakteryzują ten układ. Wielkości takie nazywać będziemy niezmiennikami; dwa z nich poznamy zaraz.

1. Rzut układu sił na dowolną prostą x jest niezmiennikiem. Istotnie: Obierzmy na tej prostej pewien kierunek za dodatni i wyznaczmy rzuty na nią wszystkich sił układu. Utwórzmy sumę wszystkich tych rzutów i oznaczmy ją przez R_x, czyli

$$P_{1x}+P_{2x}+P_{3x}+\ldots\ldots=R_x$$

Powiemy wprost, że R_x jest rzutem układu na prostą x.

Aby dowieść, że rzut ten jest niezmiennikiem sprawdzimy, że przy poszczególnych, dopuszczalnych przekształceniach układu R_x nie ulega zmianie.

Gdy np. przeniesiemy siłę P_1 na jej prostej działania, to rzut P_{1x} też się przesunie na prostej x, ale nie zmieni się ani pod względem wielkości, ani też co do kierunku. Przypuśćmy teraz, że siłę P_1 rozłożyliśmy na 2 składowe; w takim razie zamiast P_{1x} będziemy mieli rzuty owych składowych na oś x, ale suma tych rzutów jest, jak wiadomo, równa rzutowi wypadkowej, czyli ta suma będzie też równa P_{1x}.

Gdy dodamy dwie siły układu np. P_1 i P_2 /jeśli to jest możliwe/, to skutek tego będzie taki, że zamiast oddzielnych rzutów P_1 i P_2 będziemy mieli rzut ich wypadkowej, która jest równa sumie rzutów składowych.

Gdy wprowadzimy do układu dwie siły równe i odwrotne, to w sumie rzutów otrzymamy dwa nowe wyrazy, równe i odwrotne, a więc o sumie równej zeru. Wskutek tego ogólna suma rzutów nie zmieni się.

Gdy wreszcie usuniemy z układu dwie siły, równe i odwrotne, to z sumy rzutów usuniemy też dwa wyrazy znoszące się wzajemnie. Nie wpłynie to także na ogólną sumę rzutów.

2. Moment układu względem dowolnego punktu jest niezmiennikiem. Niech na ciało sztywne działa układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3 \ldots$. Oznaczmy momenty tych sił względem punktu O przez $M_1, M_2, M_3, \ldots$ zaś sumę geometryczną tych momentów czyli moment układu względem O przez N. Zatem

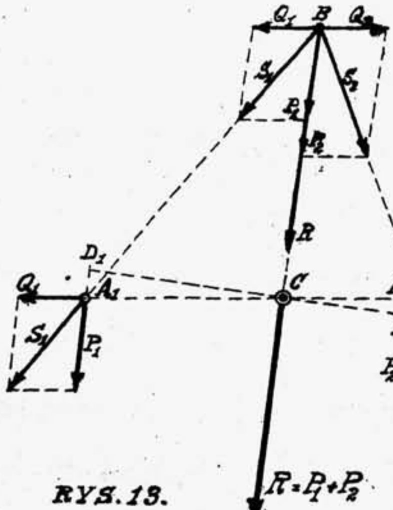
$$\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + \ldots\ldots = \overline{N}$$

Przesuńmy siłę P na jej linii działania. Wskutek tego moment M_1 czyli pierwszy wyraz sumy nie zmieni się, a także nie ulegnie zmianie suma N. Gdy rozłożymy P_1 na dwie składowe, to otrzymamy zamiast M_1 dwa wyrazy, ale ich suma geometryczna będzie równa M_1, bo suma geometryczna momentów wektorów składowych jest równa momentowi wektora wypadkowego. A zatem znów suma N pozostanie bez zmiany. Gdy dodamy P_1 i P_2 /o ile to jest możliwe/, to zamiast dwóch pierwszych wyrazów sumy otrzymamy jeden, równy ich sumie, a więc N znów się nie zmieni. Dodajmy do układu dwie siły równe i odwrotne. Do sumy więc przybędą dwa wyrazy, będące momentami sił równych i odwrotnych. Będą to, oczywiście, momenty równe i odwrotne, a więc ich suma będzie zerem i nie wpłyną one na sumę ogólną.

Tak samo, gdy usuniemy z układu 2 siły równe i odwrotne /o ile one istnieją/, to moment układu nie zmieni się c.b.d.d.

<u>21. Wypadkowa sił równoległych.</u> Niech będą dwie siły równoległe P_1 i P_2, zwrócone w tę samą stronę i mające punkty przyłożenia w A_1 i A_2. Dowiedziemy, że te siły można zastąpić jedną, równoważną tym   równoległym.

Połączmy punkty A_1 i A_2 i przyłóżmy na prostej A_1A_2 do tych punktów dwie siły równe i odwrotne, a więc nie zmieniające skutku działania układu. Oznaczmy te siły przez Q_1 i Q_2. Znajdźmy wypadkową sił Q_1 i P_1, oraz Q_2 i P_2. Oznaczmy je odpowiednio



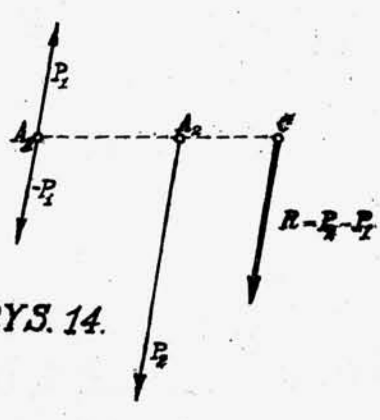
RYS. 13.

przez S_1 i S_2. Siły S_1 i S_2 wywrą ten sam skutek, co siły dane chociaż już równoległemi nie są. Przenieśmy punkty przyłożenia sił S_1 i S_2 do punktu przecięcia B prostych ich działania /siły P_1 i P_2 działają na ciało sztywne/. Rozłóżmy znowu siłę S_1 na dwie składowe, w kierunkach równoległych do Q_1 i P_1. Jako składowe otrzymamy dwie siły równe odpowiednio Q_1 i P_1. Tak samo postąpimy z siłą S_2: otrzymamy dwie składowe, równe i równoległe do Q_2 i P_2. Siły Q_1 i Q_2, jako równe, odwrotne i działające na jednej prostej, znoszą się, zaś wypadkowa sił P_1 i P_2 jest równa ich sumie i posiada kierunek ich linii działania. Przenieśmy wreszcie punkt przyłożenia siły wypadkowej do punktu C. Otrzymaliśmy więc, że <u>co do wielkości wypadkowa R jest równa $P_1 + P_2$, zaś kierunek jej jest zgodny z kierunkiem P_1 i P_2.</u>

Znajdźmy jeszcze położenie punktu C na prostej A_1A_2. Weźmy momenty sił P_1 i P_2 względem punktu C. Znajdziemy, że moment siły P_1 jest równy $-P_1 \cdot CD_1$, zaś moment siły P_2 wynosi $+P_2 \cdot CD_2$. Moment wypadkowej względem tegoż punktu C jest równy zeru, a jednocześnie jest równy sumie momentów sił składowych. Z tego wynika, że $-P_1 \cdot CD_1 + P_2 \cdot CD_2 = 0$, skąd $\frac{CD_1}{CD_2} = \frac{P_2}{P_1}$

Z podobieństwa trójkątów CA_1D_1 i CA_2D_2 otrzymujemy $\frac{CD_1}{CD_2} = \frac{CA_1}{CA_2}$, więc $\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{P_2}{P_1}$.
Z tego wynika, że punkt C dzieli wewnętrznie odcinek A_1A_2 na dwie części, odwrotnie proporcyonalnie do sił P_1 i P_2.

Zwrócimy uwagę na ważną okoliczność następującą: Położenie punktu C na prostej A_1A_2 jest niezależne od kierunku sił P_1 i P_2, a tylko od wielkości tych sił. Jeśli siły P_1 i P_2 zaczniemy obracać odpowiednio dokoła punktów A_1 i A_2 tak aby te siły pozostawały stale równoległemi, to wielkość ich wypadkowa R nie ulegnie zmianie. Będzie się ona obracała dokoła punktu C, będąc wciąż równoległą do P_1 i P_2. Z powodu tej okoliczności nazwiemy punkt C środkiem sił równoległych.



RYS. 14.

Rozpatrzmy teraz wypadek, gdy siły P_1 i P_2, których wypadkową należy znaleźć, są równoległe, lecz kierunki ich są odwrotne. Zakładamy przytem, że siła P_2 jest większą niż P_1.

Rozłóżmy siłę P_2 na dwie składowe równoległe i zwrócone w tę samą stronę, z których jedna niech będzie równa P_1 pod względem wielkości /a $-P_1$ jeśli uwzględnimy kierunek/ i przyłożona w A_2. Drugą składową oznaczmy przez R. Jest ona przyłożona w punkcie C. Z tego, co powiedziano wynika, że $R = P_2 - P_1$.

Siła R oczywiście wywiera ten sam skutek co siły dane. Siła ta jest zwrócona w kierunku większej składowej i jest równa różnicy sił P_2 i P_1.

Wyznaczmy jeszcze położenie punktu C. Otrzymamy jak poprzednio, że $\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{P_2}{P_1}$. Znaczy to, że punkt C dzieli zewnętrznie odcinek A_1A_2 na części odwrotnie proporcyonalne do sił P_1 i P_2.

Przekształcimy otrzymaną zależność, odejmując od stron po jedności. Znajdziemy

$$\frac{CA_1 - CA_2}{CA_2} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \quad \text{lub} \quad \frac{A_1A_2}{CA_2} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \quad \text{skąd}$$

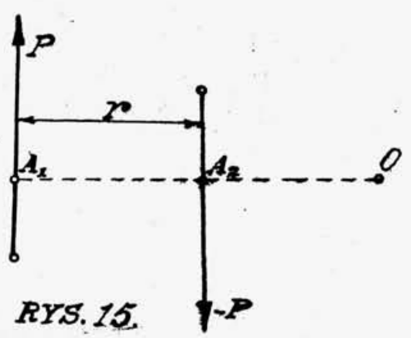
$$CA_2 = \frac{P_1}{P_2 - P_1} \cdot A_1A_2 .$$

Wzór ten pozwala znaleźć położenie punktu C na prostej A_1A_2.

22. Para sił. Gdy mamy dowolną liczbę sił równoległych, to możemy wogóle wyznaczyć ich wy-

padkową, wyznaczając najpierw wypadkową dwóch z nich, następnie wypadkową tej wypadkowej oraz trzeciej siły i t.d. Może jednak zajść pewien, bardzo ważny wypadek szczególny. Przypuśćmy, że siły P_1 i P_2 są równe i odwrotne i nie działają na 1 punkt. W takim razie według powyższych twierdzeń, $R = 0$. Niemniej jednak takie 2 siły się nie równoważą, jak wskazuje doświadczenie. Przytem z wzorów otrzymanych wynika, że punkt przyłożenia siły R jest nieskończenie odległy /bo: $P_2 - P_1 = 0$ /. W rzeczywistości takiemu wynikowi matematycznemu nie odpowiada nic. Nie istnieje taka jedna siła, która mogłaby wywrzeć taki sam skutek, jaki wywierają dwie siły równe i odwrotne /i nie działające na jeden punkt/. Takie dwie siły tworzą układ, zwany parą sił.

23. <u>Właściwości par.</u> Niech będzie para, złożona z sił P i $-P$. Odległość sił pary, nazywać będziemy <u>ramieniem pary.</u> Można uważać parę za układ sił i mówić o momencie układu względem punktu. Obierzmy dowolny punkt O w płaszczyźnie pary i wyznaczmy moment układu względem tego punk-



RYS. 15.