Całki wzdłuż odcinków AB, ED i FG brane są po dwa razy w przeciwnych kierunkach za każdym razem, więc się znoszą. Łącząc pozostałe mamy:

$$\int_{C_I} f(z)dz + \int_{C_{II}} f(z)dz + \int_{C_{III}} f(z)dz + \int_{C_{IV}} f(z)dz = 0,$$

ale całki wzdłuż C_{II}, C_{III} i C_{IV} brane są w odwrotnych kierunkach, więc ostatnie równanie może mieć postać:

$$\int_{C_I} f(z)dz - \int_{C_{II}} f(z)dz - \int_{C_{III}} f(z)dz - \int_{C_{IV}} f(z)dz = 0 \quad \text{albo} \quad \int_{C_I} f(z)dz = \int_{C_{II}} f(z)dz + \int_{C_{III}} f(z)dz + \int_{C_{IV}} f(z)dz$$

Udowodnione powyżej twierdzenie można z łatwością uogólnić na obszary z dowolną ilością „otworów"

Rozdział 8. Całka i funkcja pierwotna.

W tych wypadkach, gdy całka zależy tylko od punktu początkowego i końcowego, możemy przypuszczać, że istnieje funkcja pierwotna $F(z)$ taka, że całka:

$$\mathcal{L}\int_{z_0}^{Z} f(\zeta)d\zeta = F(Z)\Big|_{z_0}^{Z},$$

przyczem przykłady poprzednie jak np.: $\mathcal{L}\int_{z_0}^{Z} \zeta d\zeta = \frac{Z^2 - z_0^2}{2}$, potwierdzają to przypuszczenie.

Otóż tak jest istotnie dla funkcji regularnej, czem jeszcze bardziej uwydatnia się analogja z całką funkcji zmiennej rzeczywistej. Jeśli ustalimy p. z_0, a będziemy zmieniali górną granicę Z, to całka:

$\mathcal{L}\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ będzie funkcją od Z, a pochodna tej funkcji $F'(Z)$, będzie równa funkcji pod znakiem całki (tak jak przy zmiennej rzeczywistej). Powierzchnię zakładamy, że spełnione są warunki, przy których

całka nie zależy od drogi więc przy symbolu całki będziemy w dalszym ciągu opuszczali znak drogi $\mathcal{L}$, a pisali tylko p. początkowy i końcowy.
Niech $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$; utwórzmy przyrost:

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

Aby dowieść naszego twierdzenia (że pochodna $F'(z)$ jest równa funkcji podcałkowej), wystarczy okazać, że do każdego ε można dobrać takie δ_ε, że jeśli $|\Delta z| < \delta_\varepsilon$, to:

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon \text{, to wtedy } \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

czyli: $F'(z) = f(z)$

Obliczmy wyrażenie: $\dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)$, które jest równe: $\dfrac{\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta}{\Delta z} - f(z)$;
Ponieważ:

$$f(\zeta)d\zeta = [f(\zeta) - f(z)]d\zeta + f(z)d\zeta \quad \text{więc:}$$

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta + f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta$$

ale ponieważ: $\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$ więc $\dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta = \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta + f(z)$

skąd: $\dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta$

więc: $\left| \dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta \right|$

ponieważ całka nie zależy od drogi całkowania, możemy przyjąć za drogę odcinek prostej łączący punkt z z punktem $z+\Delta z$.
Ponieważ $f(\zeta)$ jest f. ciągłą więc można obrać takie δ_ε, że gdy $|\Delta z| < \delta_\varepsilon$,

to : $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$ o ile $z<\zeta<z+\Delta z$, oczywiście na odcinku łączącym te dwa punkty. Ale wtedy:

$$\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right|<\varepsilon|\Delta z|;$$ ponieważ Δz jest tu długością drogi całkowania; ale wobec powyższego:

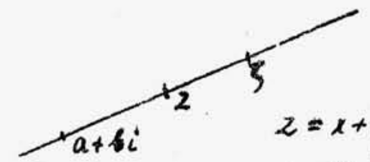
$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\left|\frac{1}{\Delta z}\right|\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Tak więc widzimy, że funkcję $F(z)$ możemy uważać za funkcję pierwotną, której pochodna jest równa funkcji pod znakiem całki.
Jeżeli do f. $F(z)$ dodamy stałą C, to oczywiście otrzymamy nową funkcję, której pochodna jest także $f(z)$;
Niech więc będzie:
$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=F(z)+C,$$
wtedy kładąc na miejsce zmiennej z wartość ustaloną z_1 mamy:
$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta=F(z_1)+C.$$
Kładąc zaś na miejsce zmiennej z, wartość z_0 (także stałą), mamy:
$$0=F(z_0)+C \quad , \quad \text{skąd} \ : \quad C=-F(z_0).$$
Tak więc:
$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta=F(z_1)-F(z_0)$$
Przed chwilą widzieliśmy że dla funkcji $f(\zeta)$ istnieje funkcja pierwotna $F(z)$ która się równa: $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, i że funkcja $F(z)+C$ jest także funkcją pierwotną.
Chcemy udowodnić, że innych funkcji pierwotnych nie ma. W tym celu wystarczy udowodnić, że każda funkcja, której pochodna jest równa ze-

ta, jest równa stałej. (Oczywiście przy spełnieniu naszych założeń, że funkcja jest regularna w rozpatrywanym obszarze).

Niech $g'(z)=0$, chcemy okazać, że $g(z)=C$;

Niech ζ zbliża się do z, wtedy, w-g założenia:



$z = x+iy$

$\zeta = \xi + i\eta$

$$\lim \frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta - z} = g'(z) = 0.$$

Możemy założyć że ζ dąży do z w dowolnym kierunku, ale wzdłuż prostej. Oznaczmy współczynnik kątowy tej prostej przez m; wtedy:

$$\eta - y = m(\xi - x) \quad \text{skąd} \quad \zeta - z = (m+i)(\xi - x) = (m+i)\theta$$

Oznaczając przez ρ odległość p. ζ od p. stałego $a+bi$, a przez ρ_0 odległość p. z od $a+bi$, a przez α kąt jaki ta prosta tworzy z osią l. rzeczywistych, otrzymamy:

$$y - b = \rho_0 \sin\alpha \qquad \eta - b = \rho \sin\alpha$$
$$x - a = \rho_0 \cos\alpha \,, \qquad \xi - a = \rho\cos\alpha$$

więc $z = x+iy = a+bi+\rho_0(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; $\zeta = \xi + i\eta = a+bi+\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

wobec tego: $g(\zeta) = g[a+bi+\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)] = u(\rho)+iv(\rho)$, gdzie ρ jest zmienne, zaś $a+bi$ i kąt α są stałe.

Gdy $\zeta \to z$ to $\rho \to \rho_0$;

$$g(\zeta) - g(z) = u(\rho) + iv(\rho) - [u(\rho_0) + iv(\rho_0)] = u(\rho) - u(\rho_0) + i[v(\rho) - v(\rho_0)]$$

$$\zeta - z = (\rho - \rho_0)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}\left\{\frac{u(\rho)-u(\rho_0)}{\rho-\rho_0} + i\,\frac{v(\rho)-v(\rho_0)}{\rho - \rho_0}\right\}$$

; przechodząc do granicy mamy:

$$\lim_{\zeta\to z} \frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}\left\{u'(\rho_0) + iv'(\rho_0)\right\}$$

Ponieważ $u(\rho)$ jest funkcją zmiennej rzeczywistej i ρ_0 jest dowolne, więc:

$u'(\rho_0) \equiv 0$ i $v'(\rho_0) \equiv 0$ dla każdego ρ_0; a więc: $u(\rho_0) = C^{te}$ i $v(\rho_0) = C^{te}$ dla dowolnego ρ_0; wobec tego: $\underline{g(\zeta) = u(\rho) + iv(\rho) = \text{Constans}}$.

Całka z pochodnej: Niech będzie dana funkcja $F(z)$ i jej pochodna $F'(z) = f(z)$. Całka:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_0}^{z} F'(\zeta)d\zeta = \Phi(z) \quad , \text{ przyczem } \Phi'(z) = f(z),$$

na zasadzie poprzedniego. Lecz i $F'(z) = f(z)$ więc:

$$F'(z) = \Phi'(z) \qquad \text{albo} \qquad \{F(z) - \Phi(z)\}' = 0$$

skąd: $\Phi(z) - F(z) = C^{te}$ czyli $\Phi(z) = F(z) + C$ i ostatecznie:

$$\int_{z_0}^{z} F'(z)dz = F(z) + C$$

, otrzymujemy wynik taki jak przy zmiennej rzeczywistej.

Przykłady:

1) Niech $z = x + iy$; widzieliśmy że $(z^n)' = nz^{n-1}$

więc $$\int_{z_0}^{z} z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

2) Podobnie $$\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\right\}' = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}$$

gdzie $P(z)$ i $Q(z)$ są wielomianami. A więc całka:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)} dz = \frac{P(z)}{Q(z)} + C$$

W tym przykładzie należy brać pod uwagę obszar, w którym nie znajduje się żaden pierwiastek mianownika.

Rozdział 9. Całka Cauchy'go.

Niech funkcja $f(z)$ będzie regularna w obszarze D i niech C oznacza