spółczynników nieoznaczonych. Oznaczmy w tym celu $\frac{1}{f(z)} = \varphi(z)$, wtedy: $f(z)\cdot\varphi(z) = 1$. Niech szeregi potęgowe odpowiadające tym funkcjom będą:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \text{a} \quad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \text{ a}$$

ich iloczyn na mocy poprzednich rozważań będzie:

$$f(z)\cdot\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \dots + b_0 c_n)(z-z_0)^n = 1,$$

skąd wynika, że dla $n=0$ mamy:

$$b_0 c_0 = 1, \quad \text{albo} \quad c_0 = \frac{1}{b_0},$$

a dla $n \neq 0$ mamy: $b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \dots + b_0 c_n = 0$

Czyli:

$$b_1 c_0 + b_0 c_1 = 0$$
$$b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 = 0$$
$$b_3 c_0 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3 = 0 \quad \text{i t. d.}$$

Skąd:

$$c_1 = -\frac{c_0 b_1}{b_0} = -\frac{b_1}{b_0^2}\,; \quad c_2 = -\frac{b_2 c_0 + b_1 c_1}{b_0} = -\frac{b_2}{b_0^2} + \frac{b_1^2}{b_0^3} \quad \text{i t. d.}$$

Rozdział 13. Pierwsze pojęcia o przedłużeniu analitycznem.

Zajmiemy się rozszerzeniem pojęcia funkcji zmiennej rzeczywistej. Wyobraźmy sobie przejście od funkcji zmiennej rzeczywistej do funkcji zmiennej zespolonej; powstaje pytanie, czy takie przejście jest możliwe? Okażemy, że tak jest, przynajmniej w niektórych przypadkach.

Weźmy pod uwagę funkcję $f(x)$, określoną w przedziale $\alpha \leq x \leq \beta$ osi liczb rzeczywistych. Czy funkcję tą można określić jako funkcję zmiennej zespolonej?

Łatwo okazać, że o ile to jest możliwe, to jest możliwe do wykonania tylko w jeden jedyny sposób, bo gdyby istniały dwie funkcje: $f(z)$ i $\varphi(z)$,

Zasadniczą własnością funkcji analitycznych jest jednoznaczność. Jeśli 2 funkcje analityczne $\varphi(z)$ i $f(z)$ są identyczne w dowolnie małym części obszaru lub na dowolnie małym łuku — to są identyczne w całym obszarze takie, które byłyby tem „uogólnieniem" funkcji $f(x)$, to obie musiałyby być w przedziale (α, β) na osi x-ów identyczne z $f(x)$, (bo $f(x)$ jest określone tylko na osi x-ów. Ale w takim razie $f(z)$ i $\varphi(z)$ miałyby nieskończenie wiele wspólnych wartości, więc w-g twierdzenia o tożsamości byłyby identyczne wszędzie t. zn. $f(z) \equiv \varphi(z)$. Oczywiście zakładamy regularność funkcji $f(z)$ i $\varphi(z)$ na odcinku $\alpha\beta$.

Aby zrozumieć na czem polega przejście od funkcji zmiennej rzeczywistej do funkcji zmiennej zespolonej rozpatrzmy funkcję:

$$(1) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Przekonamy się, że tą funkcję można „przedłużyć" dla liczb zespolonych. Weźmy w tym celu pod uwagę szereg:

$$(2) \quad f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} \quad \text{bo } z = x + iy$$

Funkcja $f(z)$ równa sumie szeregu (2) jest regularna na całej płaszczyźnie, gdyż szereg jest zbieżny przy każdej wartości z, a to z tej racji że:

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

, więc promień zbieżności naszego szeregu jest nieskończony ($\mu = 0$, $\rho = \infty$).

Ta funkcja $f(z)$ jest identyczna z funkcją e^x na całej osi x-ów, bo wtedy $y = 0$ i $z = x$; dlatego tę funkcję $f(z)$ określamy jako $f(z) = e^z$ i mówimy że jest ona przedłużeniem funkcji e^x na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

$$e^z = f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

e^z zlewa się z e^x na osi x-ów, dlatego uważamy e^z za naturalne uogólnienie pojęcia potęgi. Mamy więc już pojęcie potęgi o wykładniku zespolonym.

Podobnie da się przedłużyć funkcja trygonometryczna $\operatorname{Sin} x$:

$$(3)\ \operatorname{Sin} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Weźmy funkcję $\Psi(z)$ określoną w sposób następujący:

$$(4)\ \Psi(z) = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Szereg (3) jest określony tylko dla liczb rzeczywistych i jest na całej osi x-ów, t.zn. na osi liczb rzeczywistych zbieżny. Z tego, że szereg (4) zlewa się na osi x-ów z szeregiem (3) wnosimy, że szereg (4) jest zbieżny na całej płaszczyźnie. Będziemy oznaczali $\Psi(z)$ przez symbol $\operatorname{Sin} z$ t.j. $\Psi(z) = \operatorname{Sin} z$. Funkcję $\operatorname{Sin} z$ nazywamy uogólnieniem funkcji $\operatorname{Sin} x$ do liczb zespolonych.

$$\operatorname{Sin} z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Podobnie dzieje się z funkcją Cosinus. Funkcja:

$$\operatorname{Cos} z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \cdots$$

jest jedyną funkcją, która na osi x-ów zlewa się z f. zmiennej rzeczywistej $\operatorname{Cos} x$, gdzie:

$$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Interesuje nas pytanie, czy uogólnione w ten sposób funkcje mają te same wartości co odpowiednie funkcje zmiennej rzeczywistej. Wiemy np. że:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$$

Sprawdzimy, czy zachodzi także:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

gdzie $z_1 = x_1 + iy_1$, a $z_2 = x_2 + iy_2$.

Załóżmy naprzód, że jeden z wykładników np. z_2 jest rzeczywisty: $z_2 = x_2$, a drugi zespolony: $z_1 = z$. Okażemy że:

$e^{x+iy}\cdot e^{x_2} = e^{x+iy+x_2}$ albo, że: $e^{x+iy}\cdot e^{x_2} - e^{x+iy+x_2} = 0$ (x_2 parametr)

Wyrażenie to, jest pewną funkcją $F(z)$ od z, trzeba nam okazać że:

$$F(z) = e^{z}\cdot e^{x_2} - e^{z+x_2} = 0.$$

Funkcja $F(z)$ na osi x-ów przybiera wartość:

$$F(x) = e^{x}\cdot e^{x_2} - e^{x+x_2} = 0.$$

Widzimy, że nasza funkcja $F(z)$ jest regularna i określona na całej płaszczyźnie, ale w nieskończenie wielu punktach, bo na całej osi x-ów jest równa zeru. Wnosimy stąd, że jest ona na całej płaszczyźnie identyczna z zerem: a więc

$$F(z) = e^{z}\cdot e^{x_2} - e^{z+x_2} = 0 \qquad c.b.d.o.$$

Załóżmy teraz, że oba wykładniki są liczbami zespolonemi; mamy okazać, że:

$$\Phi(z) = e^{z}\cdot e^{z_2} - e^{z+z_2} = 0 \qquad (z = x+iy;\ z_2 - \text{parametr})$$

Nasza funkcja przyjmuje na osi x-ów wartość zero, bo wtedy $y=0$; mamy więc:

$$\Phi(x) = e^{x}\cdot e^{z_2} - e^{x+z_2} = 0,$$

bo tu zachodzi wypadek poprzednio zbadany (jeden wykładnik zespolony). Ale wiemy, że jeśli funkcja w nieskończenie wielu punktach (na całej osi x-ów) przyjmuje wartość zero, to wszędzie jest identycznie równa zeru: t.zn. $\Phi(z) = 0$, czyli:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad c.b.d.o.$$

Podobnie udowodnilibyśmy inne własności naszych uogólnionych funkcji.

Weźmy funkcję: $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}\cdot e^{iy}$.

Co oznacza wyrażenie: e^{iy}; badając to wyrażenie otrzymamy b. ważny wzór Eulera. Rozwinięcie e^{iy} w szereg jest na mocy definicji następujące:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \frac{i^5y^5}{5!} + \frac{i^6y^6}{6!} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} =$$

$$= \left\{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right\} + i\left\{\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right\} = \mathrm{Cos}\, y + i\, \mathrm{Sin}\, y,$$

gdzie y jest rzeczywiste.

Mamy więc: $e^{iy} = \mathrm{Cos}\, y + i\, \mathrm{Sin}\, y = a + bi.$

Znajdźmy moduł: $|e^{iy}| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\mathrm{Cos}^2 y + \mathrm{Sin}^2 y} = 1$;

zaś argument kątowy liczby e^{iy} jest: $y + 2k\pi$; (argument kątowy $f(z)$ oznaczać będziemy na przyszłość przez: $\arg f(z)$.)

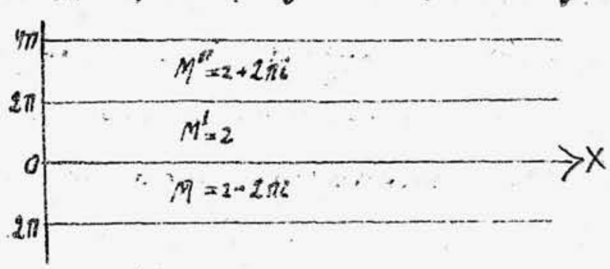
Wnioskujemy stąd, że funkcja wykładnicza jest okresowa i jej okres wynosi 2π. Rzeczywiście: $e^{2\pi i} = \mathrm{Cos}\, 2\pi + i\, \mathrm{Sin}\, 2\pi = 1$

$$e^{2k\pi i} = \mathrm{Cos}\, 2k\pi + i\, \mathrm{Sin}\, 2k\pi = 1$$

Więc: $$\left.\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \\ e^{z+2k\pi i} &= e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z \end{aligned}\right\} \text{bo } e^{2k\pi i} = 1;$$

Funkcja e^z jest funkcją okresową. Łatwo zauważyć, że wartość $2\pi i$ nie jest wielokrotnością okresu, a zatem okres wynosi $2\pi i$.

Tę okresowość można tak zilustrować: Na osi y-ów odmierzamy w obu kierunkach od punktu zerowego odcinki po 2π i prowadzimy przez ich końce proste równoległe do osi x-ów. Otrzymamy szereg równoległych pasm. Przez przesunięcie każdego pasma o 2π otrzymamy następne. Istnieją w każdem paśmie punkty, które się przy takiem przesunięciu nakryją: są to punkty odpowiadające.



Wartość z-a różni się w p. odpowiadających (albo homologicznych) różni się o 2π, a więc wartości funkcji e^z w tych p. są te same. Wystarczy określić funkcję w jednem paśmie, aby była określona w całej płaszczyźnie

<u>Funkcja logarytmiczna dla zmiennej zespolonej.</u> Określenie funkcj logarytmicznej jako odwrotnej do funkcji wykładniczej.

Mamy zależność: (1) $e^z = \zeta$ gdzie $z = x+iy$

Określmy zależność odwrotną symbolem logarytmicznym:

(2) $z = \lg\zeta$ gdzie $\zeta = \xi + i\eta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,

gdzie znów: $\theta = \arg\zeta$, zaś $\rho = |\zeta|$, tak że $\xi = \rho\cos\theta$ i $\eta = \rho\sin\theta$

Musi zachodzić równość:

$$\zeta = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Aby to zachodziło musi być:

$$e^x = \rho, \text{ zaś } y = \theta + 2k\pi, \text{ gdzie } k = 0,1,2,3,\dots$$

Widać stąd, że jeśli dane jest ζ, to możemy obliczyć x i y t. zn. z, bo wtedy: (3) $x = \lg\rho$, a $y = \theta + 2k\pi$.

Równanie (3) jest zawsze rozwiązalne, bo występują w niem liczby rzeczywiste. Stąd mamy:

$$\lg\zeta = z = \lg|\zeta| + i\{\arg^{*)}\zeta + 2k\pi\}$$

Jest to funkcja nieskończenie wielowartościowa.

Tak np. $\lg(-1) = \lg 1 + i\{\pi + 2k\pi\} = i\{2k+1\}\pi$, bo $\lg 1 = 0$.

Podobnie: $\lg i = \lg|i| + i\{\arg i + 2k\pi\} = i\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$ bo $\lg|i| = 0$.

Widać stąd, że tak $\lg(-1)$ jak i $\lg i$ mają nieskończenie wiele wartości.

<u>Zasada „Maximum"</u> dla funkcji w obszarze regularności.

1) Niech obszarem regularności będzie koło zbieżności szeregu potęgowego o środku w p. z_0;

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

dla $|z-z_0| < \rho$. Zakreślmy z punktu z_0 koło o promieniu $r < \rho$; f. $f(z)$ jest regularna na kole $|z-z_0| = r$; $|f(z)|$ jest f. ciągłą na tem kole więc Maximum na tem kole jest osiągnięte w pewnym p. ζ_0, tego koła. Oznaczmy to m

---

*) $\arg\zeta$ oznacza jedną z wartości argumentu kątowego zmiennej ζ.

funkcja ciągła i ograniczona w przedziale osiąga maximum ?

ximum przez $M(r)$; funkcja ta jest określona dla $0<r<\rho$. Niech $\zeta - z_0 = re^{i\theta}$ na tem kole. Wtedy:

$$f(\zeta) = f(z_0 + re^{i\theta}) = a_0 + a_1 re^{i\theta} + a_2 r^2 e^{2i\theta} + \dots + a_n r^n e^{ni\theta} + \dots\dots$$

gdy θ rośnie od 0 do 2π, to $\zeta = z_0 + re^{i\theta}$ zakreśla koło o prom. r.

Spółczynniki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ mogą być liczb. zespolonemi. Oznaczmy przez $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \dots$ wartości sprzężone z poprzedniemi, tak iż: $a_n \cdot \bar{a}_n = |a_n|^2$, a przez $\overline{f(\zeta)}$ liczbę sprzężoną z $f(\zeta)$.

$$|f(\zeta)|^2 = \overline{f(\zeta)} \cdot f(\zeta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n r^n e^{-in\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\theta}\right)$$

Oba szeregi, które mnożymy są jednostajnie i bezwzględnie zbieżne na kole $|\zeta| = r$ i dla tego iloczyn może być napisany w postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_n \cdot a_m r^{n+m} e^{(m-n)i\theta} = \bar{a}_0 a_0 + (\bar{a}_1 a_0 r e^{-i\theta} + \bar{a}_0 a_1 r e^{i\theta}) +$$
$$+ (\bar{a}_2 a_0 r^2 e^{-2i\theta} + \bar{a}_1 a_1 r^2 + \bar{a}_0 a_2 r^2 e^{2i\theta}) + \dots + (\bar{a}_n a_0 r^n e^{-in\theta} + \bar{a}_{n-1} a_1 r^n e^{-(n-2)i\theta} + \dots$$
$$\dots\dots + \bar{a}_0 a_n r^n e^{in\theta}) + \dots\dots$$

i szereg ten jest zbieżny dla $|\zeta| = r$. Możemy więc napisać, że na kole tem całka sumy tego szeregu czyli całka $|f(\zeta)|^2$ równa się sumie całek wyrazów t. j.

$$\int_0^{2\pi} |f(\zeta)|^2 d\theta = \bar{a}_0 a_0 \int_0^{2\pi} d\theta + r\left\{\bar{a}_1 a_0 \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta + \bar{a}_0 a_1 \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta\right\} +$$
$$+ r^2 \left\{\bar{a}_2 a_0 \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta + \bar{a}_1 a_1 \int_0^{2\pi} d\theta + \bar{a}_0 a_2 \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta\right\} + \dots\dots$$
$$\dots + r^n \left\{\bar{a}_n a_0 \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} d\theta + \bar{a}_{n-1} a_1 \int_0^{2\pi} e^{-(n-2)i\theta} d\theta + \dots + \bar{a}_0 a_n \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta\right\} + \dots\dots$$

Lecz całka $\int_0^{2\pi} e^{pi\theta} d\theta = 0$ dla p całkowitego >0 lub <0 byle $\neq 0$

W szczególności: $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$ zbieżne dla każdej wartości z-a; pochodną sumy szeregu potęgowego wewnątrz koła zbieżności otrzymujemy tworząc szereg pochodnych, co daje:

$$(e^z)' = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^z$$

Tak więc dla funkcji wykładniczej e^z funkcją pierwotną jest znowu e^z (jak dla zmiennej rzeczywistej). Stąd:

$$\int_0^{2\pi} e^{pi\theta} d\theta = \frac{e^{pi\theta}}{pi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2p\pi i} - e^0}{pi} = \frac{1-1}{pi} = 0 \qquad \text{o ile } p \neq 0,$$

gdyż dla p całkowitego $e^{2\pi p i}$ jest równe jedności.

Gdy zaś $p = 0$ to: $\int_0^{2\pi} e^{pi\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

Wobec tego:

$$\int_0^{2\pi} |f(\zeta)|^2 d\theta = \bar{a}_0 a_0 2\pi + \bar{a}_1 a_1 r^2 2\pi + \dots + \bar{a}_n a_n r^{2n} 2\pi + \dots$$

gdyż po scałkowaniu sumy $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_n a_m r^{n+m} e^{(m-n)i\theta}$ zostają tylko te wyrazy, u których $p = m - n = 0$ czyli $m = n$.

Otrzymaliśmy więc:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\zeta)|^2 d\theta = |a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + \dots + |a_n|^2 r^{2n} + \dots$$

Lecz $|f(\zeta)| \leq M(r)$ na kole $|\zeta| = r$ więc $\int_0^{2\pi} |f(\zeta)|^2 d\theta < M^2(r) \cdot 2\pi$. *)

czyli:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2(r).$$ kwadrat modułu funkcji

Wniosek: ponieważ wszystkie wyrazy powyższej sumy: $|a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + \dots + |a_n|^2 r^{2n} + \dots$ są dodatnie więc każdy wyraz musi być mniejszy od całej sumy, czyli tembardziej od $M^2(r)$; tak więc: $|a_0|^2 \leq M^2$, przyczem równość może mieć miejsce tylko wtedy, gdy $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \dots, a_n = 0, \dots$, i w niczym samej wtedy: $|a_0| = M$, to funkcja $f(z) \equiv a_0$ t. j. jest stałą.

kwadratu modułu funkcji

całka z kwadratu sumy rozwinięcia funkcji na szereg potęgowy (w kole[?]) jest $\leq M^2(r) 2\pi$. jest mniejsza od kwadratu maxymalnej wartości funkcji w tamże kole.

Jeżeli $f(z)$ nie jest stałą, to $|a_0|<M$. Lecz $a_0 = f(z_0)$ tak więc $|f(z_0)|<M$, czyli wartość funkcji w punkcie z_0 (gdzie f jest regularna) jest co do modułu mniejsza od „maximum" wartości funkcji na kole zakreślonem z p. z_0 jako ze środka i leżącym całkowicie wewnątrz obszaru regularności funkcji. Stąd krok do obszarów regularności dowolnych.

2) Niech D oznacza obszar otwarty, w którym funkcja $f(z)$ jest regularna. Jeżeli tym obszarze $|f(z)|$ jest ~~f. jednowartościową~~ punktu z, a funkcja $f(z)$ nie jest stała, to w żadnym p. obszaru (otwartego) D nie osiąga $|f(z)|$ swego maximum.

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy, że maximum jest osiągnięte w punkcie ζ_0. Ponieważ p. ζ_0 jest p. wewnętrznym, więc można zatoczyć koło o środku ζ_0, o promieniu tak małym, by całe koło mieściło się w obszarze regularności D. Na wszystkich tych kołach, jakkolwiek mały byłby ich promień, maximum modułu funkcji $f(z)$ t.j. $|f(z)|$ jest większe niż $|f(\zeta_0)|$, co jest sprzeczne z założeniem, że w p. ζ_0, $|f(\zeta)|$ osiąga maximum. c. b. d. o.

Uwaga I. Jeżeli nie jest wiadomem, czy f. $f(z)$ jest constans, czy nie i jeżeli udowodnimy, że $|f(z)|$ osiąga maximum wewnątrz D, to tem samem zostanie udowodnionem, że f. $f(z)$ jest constans.

Uwaga II Często twierdzenie to wypowiada się, mówiąc, że moduł funkcji regularnej osiąga maximum na brzegu obszaru. Jest tylko o tyle słuszne, o ile funkcja $|f(z)|$ jest określona na brzegu C obszaru D i jest funkcją ciągłą w całym obszarze zamkniętym $D+C$. W rzeczy samej: jeśli $|f(z)|$ jest f. ciągłą w obszarze domkniętym to musi osiągać w p. ζ_0 tego obszaru maximum, lecz ponieważ ten p. ζ_0 nie może należeć do D jak to zostało udowodnione poprzednio, więc ζ_0 musi należeć do C i $|f(z)|$ osiąga maximum na brzegu C.

<u>Uwaga III.</u> Jeżeli obszar D jest jednospójny, to założenie tyczące jednoznaczności $|f(z)|$ w D, może być oczywiście opuszczone.

<u>Uwaga IV</u> Jeżeli w obszarze D funkcja regularna $f(z)$ nie posiada punktów zerowych, to twierdzenie tylko udowodnione odnosi się zarówno dobrze do minimum $|f(z)|$ jak i do maximum. Wystarczy nasze rozumowanie poprzednie zastosować do f. $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$, która jest w tych warunkach także regularna w obszarze D, a minimum $|f(z)|$ osiąga wtedy, gdy $|\varphi(z)|$ osiąga maximum. Jeżeli $f(z)$ ma w D miejsca zerowe, to $|f(z)|$ w tych właśnie punktach osiąga, oczywiście minimum, które $= 0$.

Funkcje harmoniczne w D, są jak wiemy w bliskim związku z funkcjami regularnemi w D. Do nich też stosuje się twierdzenie o extremach (t.j. o maximum i minimum). W rzeczy samej niech $u(x,y)$ będzie funkcją harmoniczną w D i niech będzie tam jednowartościowa; niech $v(x,y)$ oznacza <u>funkcję</u> sprzężoną z $u(x,y)$ (patrz równania Cauchy'go); f. $v(x,y)$ może nie być jednowartościową, choć $u(x,y)$ jest nią.

Jak wiemy $u(x,y) + i\,v(x,y) = \varphi(z) = \varphi(x+iy)$ jest f. regularną w D. Utwórzmy funkcję: $f(z) = e^{\varphi(z)}$.

$$f(z) = e^{\varphi(z)} = e^{u+iv} = e^{u}(\cos v + i \sin v); \quad \underline{|f(z)| = e^{u(x,y)}},$$

lecz e^u jest funkcją rosnącą zmiennej rzeczywistej u, więc maximum i minimum f. $u(x,y)$ osiąga tam gdzie te extrema osiąga $|f(z)|$; ponieważ $e^{u(x,y)}$ nie może się równać zeru, tam gdzie $u(x,y)$ jest harmoniczna, więc $f(z)$ nie może się równać zeru, a więc twierdzenie tyczy się zarówno „maximum" jak i „minimum". <u>Funkcja harmoniczna w D nie posiada wewnątrz D ani maximum ani minimum.</u>

W bliskim związku z udowodnioną własnością f. regularnych stoi własność następująca: Weźmy do f. $f(z)$ regularnej w p. z_0 obszaru D i niech

$|z-z_0|=r$ oznacza koło C, całkowicie leżące wewnątrz obszaru regularności D. Na kole C mamy:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots+a_n(z-z_0)^n+\dots$$

Pomnóżmy przez $d\theta$ i całkujmy wzdłuż koła C (szereg jest jednostajnie zbieżny) od 0 do 2π. $z=z_0+re^{i\theta}$

$$\int_C f(z)\,d\theta=a_0\int_0^{2\pi}d\theta+a_1\int_0^{2\pi}(z-z_0)\,d\theta+\dots+a_n\int_0^{2\pi}(z-z_0)^n\,d\theta+\dots$$

$$=2\pi a_0+a_1 r\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d\theta+a_2r^2\int_0^{2\pi}e^{2i\theta}d\theta+\dots+a_nr^n\int_0^{2\pi}e^{ni\theta}d\theta+\dots$$

Wszystkie całki prócz pierwszej równe są zeru. Otrzymamy:

$$f(z_0)=a_0=\frac{1}{2\pi}\int_C f(z)\,d\theta\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta,$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

lecz $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$ przedstawia wartość średnią funkcji $f(z)$ na kole C.

Tak więc <u>wartość funkcji w środku koła równa się średniej wartości funkcji na okręgu koła.</u>

Rozdział 14. Przedłużenia analityczne. Określenie funkcji analitycznej w całym obszarze istnienia.

Jeśli funkcja $f(z)$ jest regularna w p. z_0, to w otoczeniu tego punktu jest rozwijalna na szereg potęgowy i odwrotnie: szereg potęgowy: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, o ile posiada promień zbieżności $\rho>0$, określa nam funkcję regularną wewnątrz koła o prom ρ. Poprzednio już widzieliśmy że f. stanowiące badaną klasę f. posiadają pewnego rodzaju „solidarność", która przejawia się w całce Cauchy'go, w twierdzeniu o jednoznaczności szeregu potęgowego dla f. regularnych i.t.p.