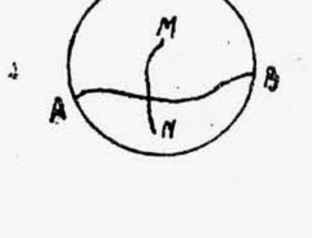
Rozdział 7. Zasadnicze twierdzenie Cauchy'ego.

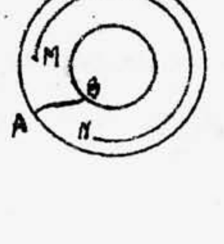
O funkcji $f(z)$ załóżmy teraz oprócz tego, że jest ona ciągła i jednoznacznie określona jeszcze to, że w obszarze D posiada jednoznacznie wyznaczoną pochodną, czyli zakładamy spełnienie warunków regularności (2-y warunki Cauchy'go)

Ostatnie przykłady pokazały, że wartość całki może być zależna od drogi; otóż teraz udowodnimy zasadnicze tw. Cauchy'go, które mówi, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest regularna w obszarze jednospójnym to wtedy wartość całki nie zależy od drogi całkowania. Obszar D jest zbiorem o samych p. wewnętrznych: wszystkie p. drogi całkowania L, (która jest zbiorem zamkniętym) muszą należeć do obszaru D t.zn. nie mogą mieć punktów wspólnych z ograniczeniem (brzegiem) tego obszaru.

Wiemy, że obszar jest spójny, jeżeli każde dwa punkty tego obszaru można połączyć linją, która całkowicie leży w tym obszarze. Jednakże są różne typy obszarów spójnych np: zbiór punktów wewnątrz koła i zbiór p. wewnątrz pierścienia:

Jeżeli dwa punkty leżące na okręgu koła (brzeg lub ograniczenie obszaru) połączymy jakąkolwiek drogą leżącą wewnątrz obszaru (cięcie), to obszar ten rozpadnie się na dwa obszary, takie, że nie można połączyć punktu jednego obszaru z punktem drugiego obszaru, nie spotykając naszego cięcia; natomiast dwa punkty należące do ograniczenia pierścienia można połączyć drogą, nie rozcinając obszaru na dwie części, jak to będzie miało miejsce gdy połączymy punkt brzegowy jednego koła z punktem brzegowym drugiego koła.

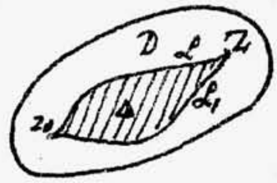




W twierdzeniu, które mamy udowodnić chodzi o obszary jednospójne,

t. zn. te, które po przecięciu rozpadają się na dwie części (wypadek z kołem). Niech D oznacza taki obszar i niech nasza funkcja będzie regularna w tym obszarze D; obieramy w nim dwie drogi, $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}_1$, łączące punkty z_0 i Z; chcemy dowieść że:

$$\int_{z_0}^{Z}{}^{(\mathcal{L})} f(z)dz = \int_{z_0}^{Z}{}^{(\mathcal{L}_1)} f(z)dz;$$



Możemy najpierw zająć się wypadkiem gdy drogi $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}_1$ nie przecinają się z sobą, albowiem gdy będziemy mieli dowód dla przypadku dróg nieprzecinających się, to z łatwością przejdziemy do ogólnego wypadku gdy drogi mają pewne punkty wspólne:

Dwie drogi nieprzecinające się tworzą razem drogę zamkniętą, która jest krzywą Jordana na zasadzie naszych założeń o drodze i jako taka dzieli płaszczyznę na dwa obszary: obszar punktów wewnętrznych i obszar p. zewnętrznych; ten obszar p. wewnętrznych oznaczmy przez Δ;

Twierdzenie o niezależności całki od drogi można zastąpić równoważnem mu twierdzeniem następującem: całka wzdłuż drogi zamkniętej równa się zeru (oczywiście przy poprzednich założeniach).

Dowód równoważności (tych dwu twierdzeń):

1) Zakładamy że całka nie zależy od drogi; niech C oznacza krzywą zawartą wewnątrz D; trzeba udowodnić, że całka wzdłuż D jest równa 0.

W tym celu obieramy na C dwa dowolne punkty: z_0 i Z; krzywa zostanie podzielona na dwie części: $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}_1$: idąc od punktu z_0 spotkamy p. Z i to będzie droga $\mathcal{L}$, a wracając od p. Z do z_0 otrzymamy drogę $\mathcal{L}_1$; drogi:

$\mathcal{L}$ i $-\mathcal{L}_1$ mają ten sam punkt początkowy i ten sam p. końcowy, a więc na mocy założenia odpowiednie całki są równe:

$$\int_{z_0}^{(\mathcal{L})\,z} f(z)dz = \int_{z_0}^{(-\mathcal{L}_1)\,z} f(z)dz\,,$$

skąd, przenosząc drugi wyraz na lewą stronę, otrzymamy:

$$\int_{z_0}^{(\mathcal{L})\,z} f(z)dz - \int_{z_0}^{(-\mathcal{L}_1)\,z} f(z)dz = 0$$

albo $\int_{z_0}^{(\mathcal{L})\,z} f(z)dz + \int_{z_0}^{(\mathcal{L}_1)\,z} f(z)dz = 0$, ale, że $\mathcal{L}+\mathcal{L}_1 = C$ więc $\int_C f(z)dz = 0$ c.b.d.o.

2) Odwrotnie niech wiadomem będzie, że całka wzdłuż drogi zamkniętej równa się zeru: trzeba udowodnić, że jeśli mamy drogi $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}_1$, łączące punkty z_0 i Z, to obie całki:

$$\int_{z_0}^{\mathcal{L}\;Z} f(z)dz \quad \text{i} \quad \int_{z_0}^{\mathcal{L}_1\;Z} f(z)dz \quad \text{są równe.}$$

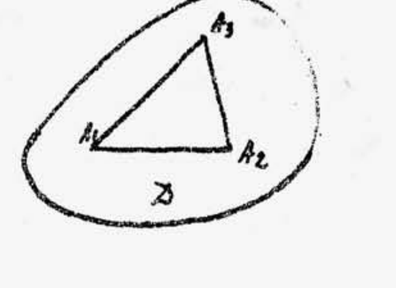
Zauważmy że $\mathcal{L}+(-\mathcal{L}_1)$ stanowi połączenie obu dróg i daje krzywą zamkniętą C; a więc:

$$\int_C = \int^{(\mathcal{L})} + \int^{(-\mathcal{L}_1)} = \int^{(\mathcal{L})} - \int^{(\mathcal{L}_1)} = 0 \quad \text{skąd} \quad \underline{\int^{\mathcal{L}} = \int^{\mathcal{L}_1}} \quad \text{c.b.d.o.}$$

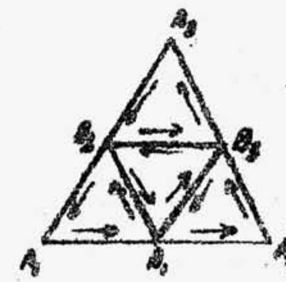
Dowód zasadniczego twierdzenia Cauchy'go:

$$\int_C f(z)dz = 0$$ gdzie C oznacza krzywą zamkniętą

Rozpatrzymy najpierw wypadek, kiedy nasza krzywa zamknięta jest trójkątem należącym do obszaru regularności:
C jest konturem trójkąta A_1, A_2, A_3.



Łącząc środki B_1, B_2, B_3 boków trójkąta A_1, A_2, A_3, to otrzymamy 4 nowe trójkąty. Jasnem jest że:



$$(1)\quad \int_C f(z)dz = \int_\Delta + \int_{\Delta'} + \int_{\Delta''} + \int_{\Delta'''}$$

gdzie $\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta'''$ oznaczają kontury trójkątów otrzymanych przez podział. Że nasza całka wzdłuż konturu danego trójkąta równa się sumie 4-ch całek wzdłuż konturów trójkątów małych widać stąd, że chociaż niektóre odcinki nie występują w całce całkowitej, a występują w całkach częściowych, to jednak całki wzdłuż tych odcinków znoszą się, gdyż są brane po dwa razy, za każdym razem w innym kierunku. (Za kierunek dodatni uważamy kierunek zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara).
Przechodząc do modułów, mamy z równości (1):

$$(2)\quad \left|\int_C f(z)dz\right| \leq \left|\int_\Delta\right| + \left|\int_{\Delta'}\right| + \left|\int_{\Delta''}\right| + \left|\int_{\Delta'''}\right|$$

Z pomiędzy 4-ch małych trójkątów wybieramy taki, że całka odpowiadająca mu jest niemniejsza od pozostałych (co jest zawsze możliwe, gdyż taki trójkąt zawsze istnieje), a wtedy:

$$(3)\quad \left|\int_C f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right|$$

, gdzie Δ_1 oznacza kontur wybranego trójkąta. Ten trójkąt dzielimy znów, łącząc środki jego boków, podobnie jak poprzedni. Stosując równość (3) do tego nowego podziału mamy:

$$4\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right|$$

, gdzie Δ_2 oznacza znowu kontur tego z pomiędzy otrzymanych przez podział 4-ch trójkątów, wzdłuż którego całka jest niemniejsza od pozostałych. Dzieląc trójkąt Δ_2 w podobny sposób, otrzymamy znów:

$$(5)\quad \left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\Delta_3} f(z)dz\right|,$$ gdzie Δ_3 ma tę własność co Δ_1 i Δ_2;

Postępując podobnie dalej otrzymamy ciąg trójkątów: $C, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n, \ldots$ przyczem zawsze będzie zachodziła nierówność:

$$(6)\quad \left|\int_{\Delta_{n-1}} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right|$$

Biorąc pod uwagę nierówności (3) - (6) otrzymujemy:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \leq 4^2\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| \leq 4^3\left|\int_{\Delta_3} f(z)dz\right| \leq \ldots \leq 4^n\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right|$$

a więc:

$$(7)\quad \left|\int_C f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right|$$

Ciąg trójkątów: $C, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ wyznacza pewien punkt graniczny, ponieważ każdy następny trójkąt jest częścią poprzedniego, a wymiary trójkątów dążą do 0.

Niech (x_n, y_n) oznaczają współrzędne punktu trójkąta Δ_n; niech ξ_n i X_n oznaczają najmniejszą i największą wartość odciętej x_n w tr. Δ_n; tak samo niech η_n i Y_n oznaczają najmniejszą i największą wartość rzędnej y_n; Przechodząc do następnego trójkąta Δ_{n+1} mamy odpowiednio ξ_{n+1}, X_{n+1} i η_{n+1}, Y_{n+1}, przyczem przedział (ξ_{n+1}, X_{n+1}) jest częścią przedziału (ξ_n, X_n); tak samo przedział (η_{n+1}, Y_{n+1}) jest częścią przedziału (η_n, Y_n); Punkty: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n, \ldots$, tworzą ciąg niemalejący, a p. $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ ciąg nierosnący; ponieważ $\xi_n < X_1$, a $X_n > \xi_1$, więc te ciągi są monotoniczne i ograniczone więc istnieje $\lim \xi_n = \xi$ i $\lim X_n = X$ gdy $n \to \infty$; lecz różnica $X_n - \xi_n$ zmierza do zera gdy $n \to \infty$, bo wymiary trójkąta Δ_n dążą do zera; wobec tego $X = \xi$; Podobnie rzęd-

ne η_n i Y_n dążą do wspólnej granicy $Y=\eta$. Punkt o współrzędnych ξ, η jest właśnie owym p. granicznym. Posiada on tę własność, że w dowolnie małem jego otoczeniu znajdują się wszystkie trójkąty Δ_n, począwszy od pewnego $n=n_0$, t.j. dla $n \geqslant n_0$; ten punkt o wsp. ξ, η nazwimy z_0;
Niech $\varepsilon > 0$ oznacza liczbę dowolnie małą; do ε można dobrać takie δ_ε, że jeśli ζ spełnia warunek $|\zeta - z_0| < \delta_\varepsilon$, to:

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

Jeśli $n > n_0$ to cały trójkąt Δ_n leży wewnątrz naszego koła, więc każdy punkt leżący na obwodzie trójkąta Δ_n spełnia warunek: $|\zeta - z_0| < \delta_\varepsilon$
Obliczmy $f(\zeta)$;

$$f(\zeta) - f(z_0) = (\zeta - z_0)\{f'(z_0) + \eta\} \qquad \text{gdzie } \eta < \varepsilon, \text{ a zatem}$$

$$f(\zeta) = f(z_0) + (\zeta - z_0)\{f'(z_0) + \eta\}$$

a więc:

$$\int_{\Delta_n} f(\zeta)\,d\zeta = f(z_0)\int_{\Delta_n} d\zeta + f'(z_0)\int_{\Delta_n} (\zeta - z_0)\,d\zeta + \int_{\Delta_n} \eta(\zeta - z_0)\,d\zeta$$

Całka pierwsza i całka druga po prawej stronie są równe zeru, bo jak wiemy całka z funkcji stałej, albo z funkcji stopnia pierwszego wzdłuż obwodu zamkniętego jest równa zeru, pozostaje więc:

$$\left| \int_{\Delta_n} f(\zeta)\,d\zeta \right| = \left| \int_{\Delta_n} \eta(\zeta - z_0)\,d\zeta \right| < \varepsilon \frac{\sigma_n^2}{2}$$

, gdzie σ_n oznacza długość obwodu trójkąta Δ_n; ponieważ z drugiej strony $|\zeta - z_0| < \frac{\sigma_n}{2}$, więc jasnem jest skąd wzięło się po prawej stronie ostatniej nierówności: $\frac{\sigma_n^2}{2}$.
Obliczmy σ_n; jeśli przez σ oznaczymy długość obwodu trójkąta C, to:
$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2}$; $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$; ...., $\sigma_n = \frac{\sigma_{n-1}}{2}$ a więc:

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{2^n}$$

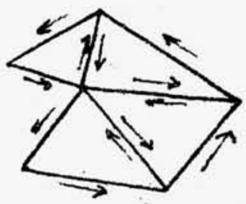
Wobec tego nasza ostatnia nierówność przyjmie postać:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le 4^n \left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| \le 4^n \cdot \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{4^n} = \varepsilon\frac{\sigma^2}{2} ;$$

ponieważ ε może być dowolnie małe więc moduł badanej całki może być mniejszy od dowolnie małej liczby, co jest możliwe tylko wtedy, gdy moduł ten jest równy zeru a więc i sama całka:

$$\underline{\int_C f(z)dz = 0}$$ jest równa zeru, o ile krzywa C jest trójkątem.

Twierdzenie to możemy uogólnić dla wypadku, kiedy droga całkowania C jest dowolnym wielokątem (a więc krzywą zamkniętą) Dzieląc, w tym celu wielokąt przekątnemi na trójkąty, w ten sposób, żeby



każda z przekątnych leżała wewnątrz wielokąta (co jak można udowodnić jest możliwe), otrzymamy skończoną liczbę trójkątów. Wtedy całka wzdłuż obwodu całego wielokąta jest równa sumie całek wzdłuż poszczególnych trójkątów.

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Delta_k} f(z)dz$$

, gdzie Δ_k oznacza obwód trójkąta, a $k = 1, 2, 3, \dots, n$, jeżeli n oznacza liczbę trójkątów, to całki wzdłuż przekątnych znoszą się, gdyż każda występuje dwa razy, za każdym razem w innym kierunku. Ponieważ na zasadzie poprzednio udowodnionego twierdzenia:

$$\int_{\Delta_k} f(z)dz = 0$$

więc i

$$\underline{\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Delta_k} f(z)dz = 0}$$

Teraz udowodnimy nasze twierdzenie dla wypadku gdy droga całkowania C jest dowolną krzywą wyprostowalną zamkniętą. Droga C leży całkowicie wewnątrz obszaru regularności. Mamy dowieść, że:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

W tym celu porównamy całkę wzdłuż C z całką wzdłuż wielokąta W, wpisanego w C; jeśli udowodnimy że:

$$(1)\quad \left|\int_C f(z)\,dz - \int_W f(z)\,dz\right| < \varepsilon$$

, gdzie W jest obwodem wielokąta wpisanego w C, odpowiednio dobranego do ε, to tem samem udowodnimy nasze twierdzenie, bo ponieważ całka wzdłuż wielokąta jest równa zeru to wzór (1) przyjmie postać:

$$(1')\quad \left|\int_C f(z)\,dz\right| < \varepsilon$$

, a że ε jest dowolnie małe więc ze wzoru (1') wynika:

$$(2)\quad \int_C f(z)\,dz = \varepsilon$$

Trzeba więc udowodnić wzór (1)! Jak wiemy do danej l. ε zawsze można dobrać taki podział krzywej zamkniętej C w punktach: $z_0, z_1, z_2 \dots z_n$, z których ostatni jest identyczny z pierwszym, że jeśli z' i z'' należą do tej samej cząsteczki drogi całkowania to:

$$(3)\quad \left|f(z') - f(z'')\right| < \frac{\varepsilon}{4l};$$

gdzie l oznacza długość linji zamkniętej C. Z drugiej strony całka jest granicą sumy:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(\zeta),$$

jeżeli więc całkę wzdłuż C oznaczymy przez I, to przy dostatecznem zagęszczeniu punktów z_k, spełniony będzie sprzecz warunku (3), warunek, który polega na tem że:

$$(4)\qquad |I - S_n| < \frac{\varepsilon}{2};$$

Przypuśćmy, że przy ~~odpowiedniem~~ zagęszczeniu punktów warunki (3) i (4) są spełnione, ale to jeszcze może nie wystarczać. Rozmieszczenie punktów podziału musi spełniać jeszcze jeden warunek wypływający stąd, że wielokąt musi całkowicie leżeć w obszarze regularności. Gdy krzywa C jest wszędzie wypukła to warunek ten jest spełniony sam przez się. Jeżeli jednak krzywa C ma wklęsłości to cięciwa łącząca dwa kolejne punkty, może się znaleźć zewnątrz krzywej. Punkty podziału muszą więc być tak bliskie siebie, żeby ta cięciwa (bok wielokąta) znajdowała się jednak wewnątrz obszaru regularności.

Krzywa C w-g założenia nie ma punktów wspólnych z ograniczeniem obszaru regularności, istnieje więc minimum odległości p. krzywej od punktów ograniczenia; niech ρ oznacza liczbę mniejszą od tego minimum; jeśli z każdego punktu krzywej zakreślimy koło o promieniu ρ, to wszystkie te koła wypełnią pewne pasmo zewnątrz krzywej, pasmo to będzie całkowicie należało do obszaru regularności. Jasnem jest teraz, że jeśli punkty podziału na C obierzemy tak, by odległość kolejnych punktów była:

$$|z_k - z_{k-1}| < \frac{\rho}{2},$$

to cała cięciwa będzie leżała wewnątrz jednego z kół, a więc w obszarze regularności. Przy dostatecznem zagęszczeniu punktów będą spełnione wszystkie omówione dotychczas warunki. Utwórzmy sumę cząstkową:

$$(5)\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1})\, f(\zeta_k)$$

, gdzie ζ_k leży na odpowiedniej cząsteczce krzywej C_i; lecz na zasadzie warunku (3), mamy:

$$|f(\zeta_k) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{4l},$$ bo z_k i ζ_k należą do tego samego przedziału, skąd:

$$(6) \quad f(\zeta_k) = f(z_k) + \eta_k, \quad \text{gdzie } |\eta_k| < \frac{\varepsilon}{4l}$$

Podstawiając do sumy (5) wartość $f(\zeta_k)$ z równania (6), otrzymamy:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(z_k) + \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \eta_k$$

Pierwszy składnik tej sumy jest to wartość całki wzdłuż wielokąta, ale wartość przybliżona; jeśli punkty podziału będą dostatecznie bliskie, to wartość przybliżona będzie różniła od prawdziwej całki wzdłuż w-ąta W o :

$$(7) \quad \left| \int_W f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(z_k) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Wtedy różnica:

$$S_n - \int_W f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(z_k) + \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \eta_k - \int_W f(z)dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(z_k) - \int_W f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \eta_k .$$

Przechodząc do modułów:

$$\left| S_n - \int_W f(z)dz \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(z_k) - \int_W f(z)dz \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \eta_k \right|$$

Pierwszy składnik wyrażenia po prawej stronie jest mocy równości (7) mniejszy od $\frac{\varepsilon}{4}$, a drugi t. zn.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \eta_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \cdot |\eta_k| \leq \frac{\varepsilon}{4l} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{4}$$

bo $\quad |\eta_k| < \frac{\varepsilon}{4l} \quad$ a zaś $\quad \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \leq l$

Wobec tego: $\quad (8) \quad \left| S_n - \int_W f(z)\,dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Porównajmy teraz nierówność (4) i nierówność (8), a mianowicie:

$$I - \int_W f(z)\,dz = (I - S_n) + \left(S_n - \int_W f(z)\,dz\right);$$

przechodząc do modułów mamy: $\left| I - \int_W f(z)\,dz \right| \leq |I - S_n| + \left| S_n - \int_W f(z)\,dz \right| < \varepsilon$,

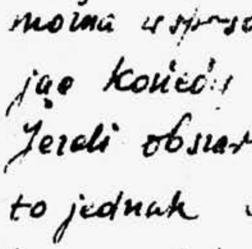
ale że: $\int_W f(z)\,dz = 0$ więc pozostaje: $\left| \int_C f(z)\,dz \right| = 0$,

a zatem i:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że wartość całki nie zależy od drogi całkowania, o ile obszar zawarty wewnątrz krzywej zamkniętej utworzonej przez połączenie obu dróg jest zawarty wewnątrz obszaru jednospójnego w którym funkcja jest regularna, czyli, mówiąc obrazowo wtedy, gdy jedną drogę L_1 można w sposób ciągły i stopniowy przeistoczyć w drugą L_2 nie zmieniając końców i nie spotykając p. nieciągłości.

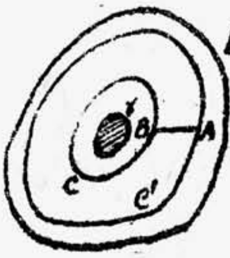
Jeżeli obszar nie jest jednospójny (jak to ma miejsce z pierścieniem), to jednak całka może zależeć od drogi całkowania a nie tylko od p. początkowego i końcowego; ma to miejsce wtedy gdy w obszarze między obu drogami znajdują się punkty nieregularności; tak np. wartości całek wzdłuż dróg: L_1 i L_2 (patrz na rysunek) mogą nie być równe, czyli całka wzdłuż drogi zamkniętej może nie być równa zeru.



Zachodzi jednak wtedy inna godna uwagi okoliczność. Mianowicie w pierścieniu takim mamy dwie kategorje dróg leżących wewnątrz pierścienia (obszar regularności).

Ograniczenie obszaru składa się z dwu krzywych γ i Γ, gdzie γ znajduje się wewnątrz Γ. Otóż do dróg I-ej kategorji zaliczamy te które nie otaczają krzywej γ, otaczające zaś γ, do dróg kategorji II-ej. Wartość całki wzdłuż drogi II-ej kategorji (która jest wciąż prostą krzywą zamkniętą), nie jest równa zeru ale posiada, jak udowodnimy, <u>wartość stałą</u>. Co do dróg I-ej kategorji to wartość całki wzdłuż takiej drogi jest zero.

Niech C i C' oznaczają dwie takie drogi otaczające γ; połączmy dowolny punkt krzywej C i dowolny punkt krzywej C' odcinkiem AB; wtedy



cały układ możemy uważać za drogę nie otaczającą krzywej γ; możemy bowiem rozdzielić drogę AB i utworzyć drogę $ADA'B'E$[illegible]A. Całka wzdłuż takiej drogi jest równa zeru jakkolwiek bliskie siebie byłyby odcinki $A'B'$ i AB, a więc i w wypadku granicznym gdy te odcinki zlewają się. Tak więc:

$$\int_C f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz + \int_{-C'} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz = 0;$$

Całki wzdłuż BA i wzdłuż AB znoszą się, bo różnią się tylko kierunkiem (funkcja jest jednowartościowa wg założenia), a więc zostają tylko całki wzdłuż C i $-C$, i mamy:

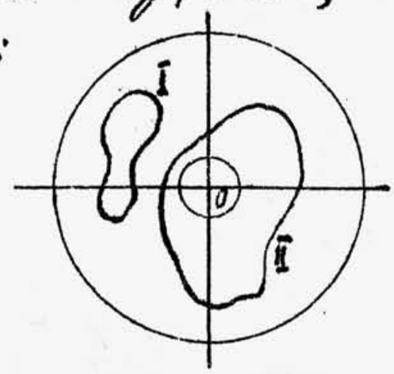
$$\int_C f(z)dz - \int_{C'} f(z)dz = 0$$

czyli

$$\underline{\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz}$$

<u>Przykład</u>: Obliczyliśmy już całkę: $\int \frac{dz}{z} = 2\pi i$, w wypadku, gdy drogą całkowania było koło o promieniu R; teraz łatwo widzieć że otrzymamy ten sam wynik, gdy drogą całkowania będzie dowolna

krzywa zamknięta otaczająca raz jeden punkt początkowy. Funkcja: $f(z)=\frac{1}{z}$, jest nieregularna w p. $z=0$; obszarem jej regularności jest więc pierścień, którego koło wewnętrzne ma promień dowolnie mały, a zewnętrzne dowolnie duży. Mamy więc całki dwu rodzajów:

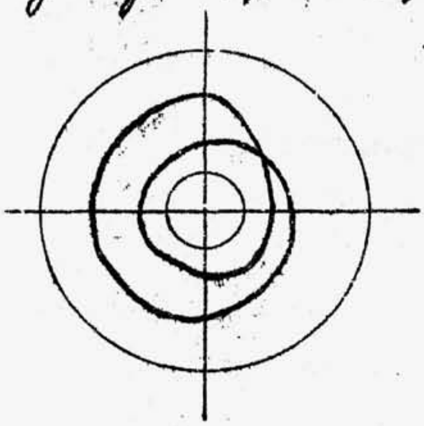


$$\int_{C_I}\frac{dz}{z}=0, \quad a \quad \int_{C_{II}}\frac{dz}{z}=C^{te};$$

ale jak wiemy: $$\int_{C_{II}}\frac{dz}{z}=\int_K\frac{dz}{z}=2\pi i,$$

gdyż wartość całki wzdłuż koła K jest ta sama, co wzdłuż dowolnej drogi drugiej kategorji.

Te drogi drugiej kategorji nie powinny mieć punktów wspólnych ze sobą, bo wtedy droga rozpada się na kilka dróg otaczających punkt O. Widzieliśmy



że jeśli krzywa raz otacza początek układu spółrzędnych to wartość całki wzdłuż takiej krzywej wynosi $2\pi i$, czyli równa się liczbie „i" pomnożonej przez zmianę argumentu zmiennej z, gdy z przebiega drogę po tej krzywej.

Jeżeli taka krzywa przecina się sama z sobą, to cała zmiana argumentu zmiennej z, wynosi nie 2π, ale wielokrotność 2π i odpowiednio do tego wartość całki

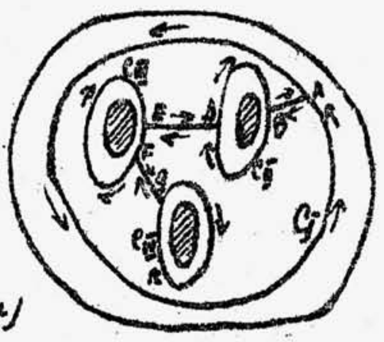
$$\int_C f(z)dz$$

, gdzie C jest taką krzywą przecinającą się z sobą, wynosi nie $2\pi i$, ale $2k\pi i$, gdzie k oznacza ilość części krzywej C, otaczających punkt O, tylko jeden raz.

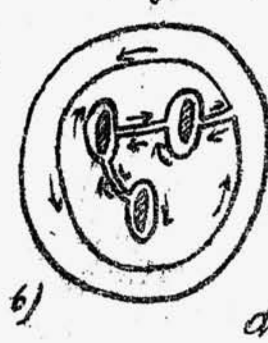
Możemy rozpatrywać obszary bardziej złożone. Wyobraźmy sobie np. że obszar nasz posiada brzeg utworzony z 4-ch krzywych zamkniętych, nie przecinających się, z których 3-y znajdują się wewnątrz 4-ej, ale względem siebie są zewnętrzne (rysunek). Jest to jakby tarcza z 3-ema otworami. Obszar o takiem ograniczeniu jest spójny ale nie jednospójny, bo możemy poprowadzić 3-y „cięcia" łączące brzegi obszaru, a obszar mimo to nie rozpadnie się. Na takim obszarze istnieje kilka kategorji dróg, zależnie od tego ile „otworów" otacza nasza droga. Mogą być drogi nie otaczające żadnego, otaczające jeden, dwa albo wszystkie 3-y otwory. Otóż udowodnimy, że całka wzdłuż drogi otaczającej wszystkie 3-y otwory równa się sumie całek wzdłuż dróg otaczających pojedyńczo każdy z tych 3-ch otworów.

Mamy dowieść że (patrz rysunki):

$$\int_{C_I} f(z)dz = \int_{C_{II}} f(z)dz + \int_{C_{III}} f(z)dz + \int_{C_{IV}} f(z)dz$$



a)



b)

W tym celu łączymy drogę C_I z drogą C_{II} odcinkiem AB, drogę C_{II} z C_{III} odcinkiem DE; C_{III} zaś z C_{IV} odcinkiem FG. Utworzony w ten sposób układ będzie drogą zamkniętą nie otaczającą żadnego z otworów, gdyż jest granicznem położeniem takiej drogi, gdzie odcinki łączące ze sobą C_I i C_{II}, C_{II} i C_{III} i t.d są rozdwojone, a więc droga utworzona przez nie (rysun. b). nie otacza żadnego z otworów. Wobec tego całka wzdłuż naszej kombinowanej drogi jest równa zeru:

$$\int_{C_I} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{BD} f(z)dz + \int_{DE} f(z)dz + \int_{EF} f(z)dz + \int_{FG} f(z)dz + \int_{C_{IV}} f(z)dz + \int_{GF} f(z)dz + \int_{FE} + \int_{ED} + \int_{DB} + \int_{BA} = 0$$

Całki wzdłuż odcinków AB, ED i FG brane są po dwa razy w przeciwnych kierunkach za każdym razem, więc się znoszą. Łącząc pozostałe mamy:

$$\int_{C_I} f(z)dz + \int_{C_{II}} f(z)dz + \int_{C_{III}} f(z)dz + \int_{C_{IV}} f(z)dz = 0,$$

ale całki wzdłuż C_{II}, C_{III} i C_{IV} brane są w odwrotnych kierunkach, więc ostatnie równanie może mieć postać:

$$\int_{C_I} f(z)dz - \int_{C_{II}} f(z)dz - \int_{C_{III}} f(z)dz - \int_{C_{IV}} f(z)dz = 0 \quad \text{albo} \quad \underline{\int_{C_I} f(z)dz = \int_{C_{II}} f(z)dz + \int_{C_{III}} f(z)dz + \int_{C_{IV}} f(z)dz}$$

Udowodnione powyżej twierdzenie można z łatwością uogólnić na obszary z dowolną ilością „otworów"

Rozdział 8. Całka i funkcja pierwotna.

W tych wypadkach, gdy całka zależy tylko od punktu początkowego i końcowego, możemy przypuszczać, że istnieje funkcja pierwotna $F(z)$ taka, że całka:

$${}^{\mathcal{L}}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z)\Big|_{z_0}^{z},$$

przyczem przykłady poprzednie jak np.: ${}^{\mathcal{L}}\int_{z_0}^{z} \zeta d\zeta = \frac{z^2-z_0^2}{2}$, potwierdzają to przypuszczenie.

Otóż tak jest istotnie dla funkcji regularnej, czem jeszcze bardziej uwydatnia się analogja z całką funkcji zmiennej rzeczywistej. Jeśli ustalimy p. z_0, a będziemy zmieniali górną granicę z, to całka:

${}^{\mathcal{L}}\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ będzie funkcją od z, a pochodna tej funkcji $F'(z)$, będzie równa funkcji pod znakiem całki (tak jak przy zmiennej rzeczywistej). Ponieważ zakładamy, że spełnione są warunki, przy których