Uwaga: Liczby $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ nie mogą być dowolne o ile ζ należy do obszaru regularności, bo szereg (9) musi mieć promień zbieżności różny od zera czyli:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\alpha_n|}{n!}} \text{ musi być różne od nieskończoności.}$$

Ale $\sqrt[n]{\frac{|\alpha_n|}{n!}} = \frac{\sqrt[n]{|\alpha_n|}}{\sqrt[n]{n!}}$ lecz jak wiemy *) $n! = e^{-n}\cdot n^n (2\pi n)^{1/2}(1+\eta)$, gdzie $\eta \to 0$ gdy $n \to \infty$; a zatem $\sqrt[n]{n!} = e^{-1}\cdot n\cdot(1+\eta_1)$ i podstawiając mamy, że:

$$\sqrt[n]{\frac{|\alpha_n|}{n!}} = \frac{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\cdot e}{n\cdot(1+\eta_1)}$$

i ten ciąg musi być ograniczony gdy $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, czyli musi zachodzić nierówność:

$$\frac{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\cdot e}{n\cdot(1+\eta_1)} < k \quad \text{albo} \quad \sqrt[n]{|\alpha_n|} < k_1\cdot n.$$

Warunek ten jest także dostateczny, bo gdy jest spełniony to jak widać odrazu szereg (9) jest zbieżny w kole o promieniu zbieżności skończonym i określa funkcję regularną.

Rozdział 12. Działania nad szeregami.

Wyobraźmy sobie, że mamy dwa szeregi potęgowe:

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z) \quad ; \quad (2)\ \sum_{n=0} b_n(z-z_0)^n = \varphi(z)$$

i załóżmy, że szeregi te są zbieżne gdy $|z-z_0| < r$, gdzie r oznacza mniejszy z pomiędzy dwu promieni zbieżności obu szeregów.
Niech $f(z)$ i $\varphi(z)$ oznaczają pewne funkcje, które są sumami szeregów (1) i (2). Funkcje $f(z)$ i $\varphi(z)$ są oczywiście regularne w kole:

*) Wzór Stirling'a.

$|z-z_0|<r$ i jasną jest rzeczą, że i suma tych dwu szeregów t.zn. szereg:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$$

jest także szeregiem zbieżnym dla $|z-z_0|<r$ i przedstawia funkcję:

$$f(z)+\varphi(z).$$

To samo tyczy się różnicy tych dwu szeregów. Gdyby zamiast dwu szeregów było ich więcej, byle liczba skończona, to podobny wniosek o sumie tych szeregów byłby także prawdziwy.

Jeżeli teraz liczba składników jest nieskończenie wielka to odpowiednie twierdzenie może być słuszne lub nie. Udowodnimy następujące twierdzenie Weierstrass'a: Mamy nieskończenie wiele szeregów potęgowych:

$f_n=\sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(n)}(z-z_0)^p$

$$f_n(z)=\sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(n)}(z-z_0)^p, \quad n=1,2,3,\dots\infty$$

Załóżmy, że wszystkie szeregi są zbieżne, gdy $|z-z_0|<r$ (gdzie r jest kresem dolnym zbioru promieni zbieżności tych szeregów); zakładamy dalej że szereg:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = {} & \left[a_0^{(0)}+a_1^{(0)}(z-z_0)+a_2^{(0)}(z-z_0)^2+a_3^{(0)}(z-z_0)^3+\dots\right]+\\ & +\left[a_0^{(1)}+a_1^{(1)}(z-z_0)+a_2^{(1)}(z-z_0)^2+a_3^{(1)}(z-z_0)^3+\dots\right]+\\ & +\dots\dots+\\ & +\left[a_0^{(n)}+a_1^{(n)}(z-z_0)+a_2^{(n)}(z-z_0)^2+a_3^{(n)}(z-z_0)^3+\dots\right]+\\ & +\dots\dots\end{aligned}$$

jest jednostajnie zbieżny dla $|z-z_0|\leq\rho<r$ i przedstawia funkcję $F(z)$, w takim razie funkcja $F(z)$ jest regularna wewnątrz $|z-z_0|<\rho$, i $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k(z-z_0)^k$, gdzie:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0^{(0)}+a_0^{(1)}+a_0^{(2)}+\dots+a_0^{(n)}+\dots\\ A_1 &= a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+a_1^{(2)}+\dots+a_1^{(n)}+\dots\\ &\dots\dots\dots\\ A_k &= a_k^{(0)}+a_k^{(1)}+a_k^{(2)}+\dots+a_k^{(n)}+\dots\end{aligned}$$

Dowód: Na zasadzie twierdzenia o regularności sumy szeregu jednostajnie zbieżnego, którego wyrazy są funkcjami regularnemi wnioskujemy, że $F(z)$ jest w kole $|z-z_0|<\rho$ funkcją regularną, a więc jako taka daje się rozwinąć na szereg potęgowy w-g wzoru Taylor'a. Obliczmy spółczynnik przy $(z-z_0)^k$ tego rozwinięcia, który jest równy:

$$\frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n^{(k)}(z_0)}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}a_k^{(n)}=A_k$$

i twierdzenie jest udowodnione;

Mnożenie szeregów. Mamy dwa szeregi:

$$(1)\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad i \quad (2)\ \varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n,$$

których sumy są regularne dla $|z-z_0|<r$; iloczyn $f(z)\cdot\varphi(z)$ będzie więc też funkcją regularną (gdyż pochodna tego iloczynu jest jednoznacznie wyznaczona i warunki Cauchy'go są spełnione).

Rozwijając więc na szereg iloczyn $f(z)\cdot\varphi(z)$ mamy:

$$f(z)\cdot\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

przyczem ten szereg jest zbieżny conajmniej dla $|z-z_0|<r$;

lecz

$$C_0=f(z_0)\cdot\varphi(z_0)=a_0b_0$$

$$C_1=\left\{\frac{d[f(z)\cdot\varphi(z)]}{dz}\right\}_{z=z_0}=\overset{a_1}{f'(z_0)}\overset{b_0}{\varphi(z_0)}+\overset{a_0}{f(z_0)}\cdot\overset{b_1}{\varphi'(z_0)}=a_0b_1+a_1b_0$$

$$C_p=\frac{1}{p!}\left\{\frac{d^p[f(z)\cdot\varphi(z)]}{dz^p}\right\}_{z=z_0}=\frac{1}{p!}\Big\{f^{(p)}(z_0)\cdot\varphi(z_0)+p\,f^{(p-1)}(z_0)\,\varphi'(z_0)+$$

$$+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}f^{(p-2)}(z_0)\,\varphi''(z_0)+\dots+p\,f'(z_0)\,\varphi^{(p-1)}(z_0)+f(z_0)\,\varphi^{(p)}(z_0)\Big\}=$$

$$=\frac{1}{p!}\Big\{p!\,a_pb_0+p\,a_{p-1}(p-1)!\,b_1+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)!\,a_{p-2}\,2\,b_2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(p-3)!\,a_{p-3}\,3!\,b_3+$$

$$+\dots+\Big]=a_pb_0+a_{p-1}b_1+a_{p-2}b_2+a_{p-3}b_3+\dots+a_1b_{p-1}+a_0b_p$$

szereg $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ ma promień zbieżności S; szereg $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ ma promień zbieżności r

Znaleźć promienie zbieżności szeregów $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ odpowiedź $R\geq r$ o ile założymy że $S>r$

$R\geq\frac{S+r-|S-r|}{2}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)z^n$ " $R\geq r$

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nz^n \quad R\geq S\cdot r \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}z^n \quad R\leq\frac{S}{r}$

Czyli: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots + a_0 b_n)(z-z_0)^n$

Lecz ten sam zupełnie wynik otrzymalibyśmy mnożąc formalnie szereg: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ przez szereg: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$.

Innemi słowy: iloczyn formalny dwu szeregów potęgowych zbieżnych dla $|z-z_0|<r$ daje szereg potęgowy zbieżny dla $|z-z_0|<r$ i suma tak otrzymanego w iloczynie szeregu równa się iloczynowi sum obu szeregów będących czynnikami.

Dzielenie szeregów. Iloraz $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ przy spełnieniu poprzednich warunków będzie funkcją regularną od z w każdym punkcie z, takim, że $|z-z_0|<r$, w którym mianownik nie równa się zeru, przyczem takich punktów będzie w kole $|z-z_0|<r$ liczba skończona.

Wyobraźmy sobie, że punkt z_0 nie jest pierwiastkiem mianownika i że r zostało tak wybrane, by w kole $|z-z_0|<r$ pierwiastków mianownika nie było. W takim razie iloraz: $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ daje się rozwinąć na szereg potęgowy;

Weźmy wypadek szczególny gdy $f(z)=1$; ponieważ $\frac{f(z)}{\varphi(z)} = f(z)\cdot\frac{1}{\varphi(z)}$ więc przypadek ten można sprowadzić do ogólnego za pomocą mnożenia, które już rozpatrzyliśmy poprzednio. Przy naszych założeniach otrzymamy: $\frac{1}{\varphi(z)}$ jest funkcją regularną w kole: $|z-z_0|<r$ i mamy:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

gdzie $c_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} = \frac{1}{b_0}$, bo $b_0 \neq 0$;

Spółczynniki tego szeregu są więc wyznaczone jednoznacznie przez wartość funkcji $\frac{1}{\varphi(z)}$ w kole $|z-z_0|<r$ i możemy je obliczyć metodą

spółczynników nieoznaczonych. Oznaczmy w tym celu $\frac{1}{\varphi(z)} = \psi(z)$, wtedy: $\varphi(z)\cdot\psi(z) = 1$. Niech szeregi potęgowe odpowiadające tym funkcjom będą:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \text{a} \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

a ich iloczyn na mocy poprzednich rozważań będzie:

$$\varphi(z)\cdot\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \dots + b_0 c_n)(z-z_0)^n = 1,$$

skąd wynika, że dla $n=0$ mamy:

$$b_0 c_0 = 1, \quad \text{albo} \quad c_0 = \frac{1}{b_0},$$

a dla $n \neq 0$ mamy: $b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \dots + b_0 c_n = 0$

Czyli:

$$\begin{aligned} b_1 c_0 + b_0 c_1 &= 0 \\ b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 &= 0 \\ b_3 c_0 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3 &= 0 \quad \text{i t. d.} \end{aligned}$$

Skąd:

$$c_1 = -\frac{c_0 b_1}{b_0} = -\frac{b_1}{b_0^2}; \quad c_2 = -\frac{b_2 c_0 + b_1 c_1}{b_0} = -\frac{b_2}{b_0^2} + \frac{b_1^2}{b_0^3} \quad \text{i t. d.}$$

Rozdział 13. Pierwsze pojęcia o przedłużeniu analitycznem.

Zajmiemy się rozszerzeniem pojęcia funkcji zmiennej rzeczywistej. Wyobraźmy sobie przejście od funkcji zmiennej rzeczywistej do funkcji zmiennej zespolonej; powstaje pytanie, czy takie przejście jest możliwe? Okażemy, że tak jest, przynajmniej w niektórych przypadkach.

Weźmy pod uwagę funkcję $f(x)$, określoną w przedziale $\alpha \leq x \leq \beta$ osi liczb rzeczywistych. Czy funkcję tą można określić jako funkcję zmiennej zespolonej?

Łatwo okazać, że o ile to jest możliwe, to jest możliwe do wykonania tylko w jeden jedyny sposób, bo gdyby istniały dwie funkcje: $f(z)$ i $\varphi(z)$,

Zauważmy własność funkcji analitycznych tj. jednoznaczność. Jeśli 2 funkcje analityczne $\varphi(z)$ i $f(z)$ są identyczne w dowolnie małym części obszaru lub na dowolnie małym łuku — to są identyczne w całym obszarze