żliwe jest przejście od jednej dziedziny do drugiej, choć takie przejście jest niemożliwe gdy chodzi o nierówność.
W dalszym ciągu mówiąc o l. zespolonych będziemy się stale posługiwali interpretacją geometr. tych liczb, przytem jako odpowiednik będziemy brali bądź sam w-r, bądź jego punkt końcowy (przy punkcie początkowym w O).
Należy przyzwyczaić się do szybkiego przejścia od symboli liczbowych do ich odpowiedników geometrycznych. Tak np. niech będzie dane wyrażenie utworzone z 3-ch liczb zespolonych: $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$; by podać interpret. tej liczby $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ zaznaczamy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej punkty: z_1, z_2, z_3, odpow. danym trzem liczbom i łączymy punkty z_2 i z_3 z punktem z_1; wtedy odrazu widać że moduł tego wyrażenia:

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right| = \frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|} =$$ stosunkowi odcinków łączących $z_2 z_1$ i $z_3 z_1$;

Argument tej liczby równa się kątowi o który trzeba obrócić w-r łączący z_3 i z_1, w kierunku dodatnim, by co do kierunku był on zgodny z wektorem łączącym p. z_2 i z_1;

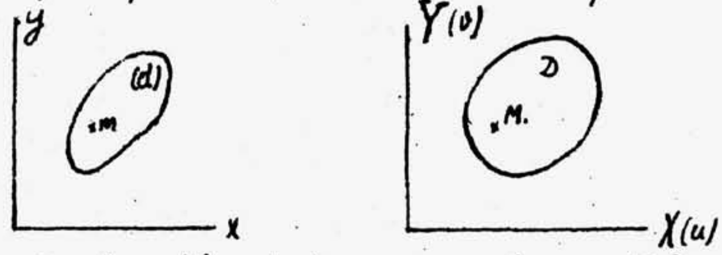
Rozdział 2. Wiadomości wstępne. Określenie pochodnej.

Przechodzimy teraz do badania zależności funkcyjnej w zakresie liczb zespolonych. Chodzi tu o odpowiedniość między dwoma zbiorami l. zespolonych: każdej liczbie $z=x+iy$ pierwszego zbioru odpowiada liczba: $Z=u+iv$ drugiego zbioru. Mówimy wtedy, że „Z" jest funkcją zmiennej „z" na płaszczyźnie zmiennej zespolonej i oznaczamy symbolem:

Co przedstawia wyrażenie $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| \geq 2$

$$Z=f(z)$$

Geometrycznie możemy sobie przedstawić dwie płaszczyzny: jedną o współrzędnych prostokątnych x, y, drugą o współrzędnych u i v. Liczbom pierwszego zbioru z odpowiadają punkty na pierwszej płaszczyźnie, liczbom zbioru Z punkty na drugiej płaszczyźnie; np. liczbie z odpow. p. m, liczbie Z punkt M.



Zależności funkcyjnej odpowiada geometrycznie odpowiedniość między punktami: m i M należącemi do dwu zbiorów utworzonych odpowiednio z punktów 1-ej i 2-ej płaszczyzny. W szczególności zbiory te mogą być obszarami d i D, gdzie obszarem nazywamy zbiór utworzony z samych tylko punktów wewnętrznych. *)

Taka zależność między liczbami Z i z może być sprowadzona do zależności funkcyjnej między parami liczb: parą (u, v) i parą (x, y). W rzeczy samej z definicji:

$$u + iv = f(x+iy) \text{ wynika że } u = \varphi_1(x,y) \text{ a } v = \varphi_2(x,y),$$

czyli pojęcie najogólniejszej zależności funkcyjnej dla funkcji jednej zmiennej sprowadza się do pojęcia zależności dwu funkcyj dwu zmiennych niezależnych, x i y, w zakresie liczb rzeczywistych. Z tego rodzaju zależnościami mieliśmy już do czynienia, przy wyznaczniku funkcyjnym, przy zamianie zmiennych w całce podwójnej i. t. d.

Otrzymamy coś nowego jeżeli, idąc za Cauchy'm, wyróżnimy w zbiorze wszystkich zależności pewną klasę specjalną, scharakteryzo-

*) Definicja punktu wewnętrznego z obszaru D: jeżeli z punktu z zakreślimy koło o dowolnie małym promieniu i wszystkie punkty koła będą leżały wewnątrz obszaru D, to z jest punktem wewnętrznym

zaną tem, że istnieją dla odpowiednich funkcyj pojęcie pochodnej jednoznacznie określonej w punkcie danym.

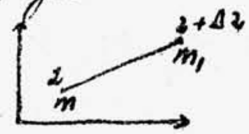
Badanie tej klasy funkcji jest przedmiotem teorji funkcji analitycznych.

Niech $Z = f(z)$ to jak wiemy $U = \varphi_1(x,y)$, $V = \varphi_2(x,y)$; niech zmienne x, y mają przyrosty $\Delta x, \Delta y$, odpowiednie przyrosty dla U i V będą: ΔU i ΔV. Ponieważ $z = x+iy$ to $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$;

Tak samo ponieważ $Z = U + iV$ to $\Delta Z = \Delta U + i\Delta V$

Pochodną naszej funkcji $Z = f(z)$ określamy jako:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z}$$



Δz możemy zobrazować w postaci wektora łączącego punkt „z" z punkt. $z+\Delta z$, t. zn. p. m, z p. m_1; w-r ten posiada pewien kierunek (argument liczby Δz) i pewną długość (moduł liczby Δz); gdy $\Delta z \to 0$ to i przyrost i odwrotnie, a punkt m_1 zbliża się nieograniczenie do p. m.

To zbliżanie się p. m_1 do p. m może zachodzić w rozmaity sposób, niekoniecznie po prostej.

Mówimy, że pochodna, o której była mowa istnieje, jeżeli $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z}$ istnieje i ma wartość niezależną od sposobu zbliżania się p. m_1 do p. m.

Stosunek $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ możemy napisać w sposób następujący:

$$\Delta Z = f(z+\Delta z) - f(z); \qquad Z = U + iV \text{ więc } U = \varphi_1(x,y),\ V = \varphi_2(x,y)$$

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y); \quad f(z+\Delta z) - f(z) = U(x+\Delta x, y+\Delta y) + iV(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

A więc: $\Delta Z = U(x+\Delta x, y+\Delta y) - U(x,y) + i\{V(x+\Delta x, y+\Delta y) - V(x,y)\} = \Delta U + i\Delta V$

a zatem: $\dfrac{\Delta Z}{\Delta z} = \dfrac{\Delta U + i\Delta V}{\Delta x + i\Delta y}$ gdzie $\begin{cases} \Delta U = U(x+\Delta x, y+\Delta y) - U(x,y) \\ \Delta V = V(x+\Delta x, y+\Delta y) - V(x,y) \end{cases}$

A zatem:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta Z}{\Delta z}=\lim\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y};$$

Jeżeli $\Delta z\to 0$ to równocześnie $\Delta x\to 0$ i $\Delta y\to 0$, a więc licznik i mianownik naszego ułamka dążą w granicy do zera.
Chcemy wyrazić że to dążenie do granicy, a także wartość graniczna ułamka jest niezależne od sposobu, w jaki p. m_1 zmierza do m. Rozpatrzymy w tym celu wypadki krańcowe:

1) Punkt m_1 zmierza do p. m po prostej równoległej do osi x-ów.

wtedy $\Delta y=0$; $\Delta x\to 0$; i $\frac{\Delta Z}{\Delta z}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta x}$

a więc $\lim_{m_1\to m}\frac{\Delta Z}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\underline{\frac{\partial f_1}{\partial x}+i\frac{\partial f_2}{\partial x}}$

2) Punkt m_1 zmierza do p. m po prostej równol. do osi y-ów.

wtedy $\Delta x=0$ zaś $\Delta y\to 0$; $\frac{\Delta Z}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=\frac{\Delta v}{\Delta y}-i\frac{\Delta u}{\Delta y}$;

a więc $\lim_{m_1\to m}\frac{\Delta Z}{\Delta z}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\underline{\frac{\partial f_2}{\partial y}-i\frac{\partial f_1}{\partial y}}$

Aby wartość $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ była w obu wypadkach ta sama, trzeba by:

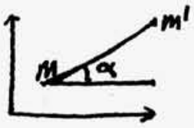
$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Skąd, opierając się na definicji równości liczb zespolonych, otrzymujemy:

$$(I)\ \underline{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}} \quad \text{a także} \quad (II)\ \underline{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}}$$

Jest to warunek konieczny jednoznaczności $\lim\frac{\Delta Z}{\Delta z}$; jest on także wystarczający, bo gdy on jest spełniony, to jak zaraz okażemy przy każdym kierunku cięciwy $m'm$ $\lim \frac{\Delta Z}{\Delta z}$ ma jednakową wartość.

<u>Dowód</u>: zakładamy że równania (I) są spełnione.



Oznaczamy stosunek: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k = tg\,\alpha$.

Zakładamy dalej: $\alpha \neq 0$ i $\alpha = 90^\circ$ t. zn. $k \neq 0$ i $k \neq \infty$.

Obliczmy nasz stosunek: $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$;

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}}{1 + ik}$$

Gdy przechodzimy ~~do~~ granicy to:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}k, \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \to \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}k,$$

bo zarówno u jak i v są funkcjami dwu zmiennych: $u(x,y)$ i $v(x,y)$;

wobec tego:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + i\left\{\frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y}\right\}}{1 + ik} = \frac{\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right\} + k\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right\}}{1 + ik}$$

Jeżeli w tym ostatnim wzorze założymy $k = 0$, to otrzymamy znaną już wartość na $\lim \frac{\Delta Z}{\Delta z}$, a mianowicie: $\lim \frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}}{1}$, wartość tę otrzymaliśmy zakładając, że m_1 dąży do m wzdłuż osi x-ów. Tak samo zakładając $k = \infty$, a więc $\frac{1}{k} = 0$, otrzymamy:

$\lim \frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}}{i}$; ponieważ obie wartości $\lim \frac{\Delta Z}{\Delta z}$ mają być równe, więc mamy warunek:

$$(2) \qquad \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}}{i}$$

Równanie (2) jest równoważne z równaniami (I), które na mocy założenia są spełnione; z proporcji $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ wynika: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{A + kB}{a + kb}$; tak samo z równania (2) wynika:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}}{i} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + k\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right\}}{1 + ki}$$

Widać stąd, że wyrażenie zawierające k jest równe wyrażeniu nie zawierającemu k, a więc od k nie zależy. c. b. d. o.

Zatem jeśli nasze warunki konieczne [równanie (I)] są spełnione, to wartość pochodnej jest w danym punkcie określona jednoznacznie.

Warunki te, równania (I), nazywamy <u>równaniami Cauchy'go</u>.

W rozumowaniu powyższem nie ma potrzeby zakładać, że p. m_1 zbliża się do p. m po linji prostej; może się on zbliżać po dowolnej krzywej, byleby ta krzywa posiadała w p. m styczną; jeśli bowiem ta styczna istnieje, to istnieje również $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, a nam właśnie chodzi tylko o wartość graniczną tego stosunku.

Zanim przejdziemy do granicy nie mamy prawa zakładać we wzorze $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, bo na krzywej stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest zmienny, ale pod koniec rozumowania, przechodząc do granicy zamieniamy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ na $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, a zamiast tego wolno nam podstawiać liczbę k; tak, że wynik rozumowania w obu wypadkach (dla prostej i krzywej) będzie ten sam.

Tak więc, o ile funkcje u i v posiadają pochodne cząstkowe i spełniają równania:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

które nazywamy równaniami Cauchy'go, to funkcja $Z = u + iv$, jako funkcja zmiennej $z = x + iy$ posiada pochodną jednoznacznie określoną.

Założmy istnienie pochodnych 2-go rzędu i zróżniczkujmy 1-e z równań Cauchy'go względem x-a, 2-e względem y-a. Otrzymamy:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ a stąd sama: $\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$

2) $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ skąd znów: $\underline{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0}$

Suma drugich pochodnych dowolnej funkcji $\varphi(x,y)$ nazywa się <u>niezmiennikiem Laplace'a</u> i oznacza się symbolem $\Delta\varphi$; jest ona niezmiennikiem, bo nie zmienia swej wartości przy obrocie i przesunięciu układu współrzędnych prostokątnych. Jeżeli $\Delta\varphi = 0$, to mówimy, że funkcja φ spełnia równanie Laplace'a. Funkcję, spełniającą równanie Laplace'a i posiadającą pochodne ciągłe dwu pierwszych rzędów nazywamy funkcją <u>harmoniczną</u>.

Z poprzedniego wynika, że jeżeli dwie funkcje spełniają równania Cauchy'go, i odpowiadające pochodne są ciągłe, to te funkcje: u i v, czynią zadość równ. Laplace'a, czyli są harmoniczne. Piszemy to krótko: $\Delta u = 0$ i $\Delta v = 0$, gdzie Δ oznacza co następuje: $\underline{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$

Jeżeli funkcja u jest harmoniczna, to można zawsze dobrać tak funkcję v by warunki Cauchy'go były spełnione, t. jest by:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad i \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

(drugie strony naszych równań są funkcjami znanemi). Oznaczając $\frac{\partial u}{\partial y}$ przez $-P(x,y)$, a $\frac{\partial u}{\partial x}$ przez $Q(x,y)$, otrzymamy, dla określenia v równania:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = P(x,y) \quad i \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x,y)$$

przyczem warunek różniczkowalności jest spełniony, bo:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad a \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad czyli \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$$

Równania nasze możemy rozwiązać względem v i otrzymamy:

$$v = \int_{x_0 y_0}^{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx\right),$$

przyczem droga całkowania, jest, jak

Jeżeli mamy funkcję harmoniczną u i dobieramy do niej funkcję harmoniczną v w ten sposób że $v = \int_{x_0 y_0}^{xy} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$, to powiadamy że funkcja v jest f. harmoniczną sprzężoną z f. u.

w każdej całce krzywolinjowej, dowolną krzywą, łączącą p. x_0y_0 z p. x, y, i znajdującą się całkowicie w tym obszarze płaszczyzny x, y, wkt. funkcja u jest f. harmoniczną.

Dowiedzieliśmy się, że o ile warunki Cauchy'go są spełnione, to pochodna jest wyznaczona jednoznacznie, bo obie wartości na $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z}$, które znaleźliśmy poprzednio są równe między sobą i dają wartość pochodnej:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$f'(z)$ jest tu symbolem pochodnej. Stąd kwadrat modułu pochodnej czyli:

$$\underline{|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$$

Jak zobaczymy moduł pochodnej i jej argument mają prostą interpretację geometryczną.

Rozdział 3. Interpretacja geometryczna i odwzorowania podobne.

Niech $Z = f(z)$, gdzie $f(z) = u + iv$; zakładamy że u i v spełniają warunki Cauchy'go.

Wzór $Z = f(z)$ podporządkowuje sobie punkty dwu obszarów: każdemu p. $m(x,y)$ na płaszczyźnie zmiennych x, y, odpowiada p. $M(u,v)$ na płaszcz. zmiennych u, v, czyli płaszcz. zmiennej zespolonej $\mathbf{Z}$.

Zbiorowi punktów m tworzących linję na płaszcz. zmiennej zespolonej z, odpowiada zbiór punktów M, tworzących linję na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Z.

Jeżeli zbiór p. m wypełnia pewien obszar d, to odpowiadający mu zbiór punktów M wypełnia obszar D, w płaszczyźnie zmiennej Z,