$|z-z_0|=r$ oznacza koło C, całkowicie leżące wewnątrz obszaru regularności D. Na kole C mamy: rozwijamy funkcję $f(z)$ w otoczeniu punktu $z_0$

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots+a_n(z-z_0)^n+\dots$$

Pomnóżmy przez $d\theta$ i całkujmy wzdłuż koła C (szereg jest jednostajnie zbieżny) od 0 do $2\pi$. $z=z_0+re^{i\theta}$

$$\int_C f(z)\,d\theta=a_0\int_0^{2\pi}d\theta+a_1\int_0^{2\pi}(z-z_0)\,d\theta+\dots+a_n\int_0^{2\pi}(z-z_0)^n\,d\theta+\dots$$

$$=2\pi a_0+a_1 r\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d\theta+a_2r^2\int_0^{2\pi}e^{2i\theta}d\theta+\dots+a_nr^n\int_0^{2\pi}e^{ni\theta}d\theta+\dots$$

Wszystkie całki prócz pierwszej równe są zeru. Otrzymamy:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

$$f(z_0)=a_0=\frac{1}{2\pi}\int_C f(z)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta,$$

bo $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$ przedstawia wartość średnią funkcji $f(z)$ na kole C. Tak więc wartość funkcji w środku koła równa się średniej wartości funkcji na okręgu koła.

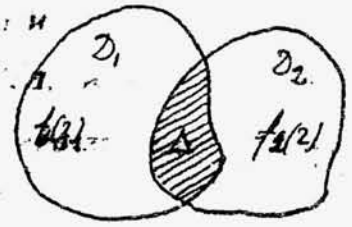
## Rozdział 14. Przedłużenia analityczne. Określenie funkcji analitycznej w całym obszarze istnienia.

Jeśli funkcja $f(z)$ jest regularna w p. $z_0$, to w otoczeniu tego punktu jest rozwijalna na szereg potęgowy i odwrotnie: szereg potęgowy: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, o ile posiada promień zbieżności $\rho>0$, określa nam funkcję regularną wewnątrz koła o prom. $\rho$. Poprzednio już widzieliśmy, że f. stanowiące badaną klasę f. posiadają pewnego rodzaju „solidarność", która przejawia się w całce Cauchy'go, w twierdzeniu o jednoznaczności szeregu potęgowego dla f. regularnych i.t.p.

Teraz nadeszła chwila, by zasady tej solidarności oświetlić w sposób wyczerpujący.

W tym celu przyjmijmy nowe założenie, które można nazwać zasadą przedłużenia analitycznego. Zasada ta polega na następującem:

Niech będą dwa obszary $D_1$ i $D_2$; niech w obszarze $D_1$ będzie określona f. regularna $f_1(z)$, a w obszarze $D_2$ f. regularna $f_2(z)$. Obszary te posiadają część wspólną $\Delta$. Zakładamy dalej, że w tej części wspólnej $\Delta$ obie funkcje są sobie tożsamościowo równe t.zn. $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

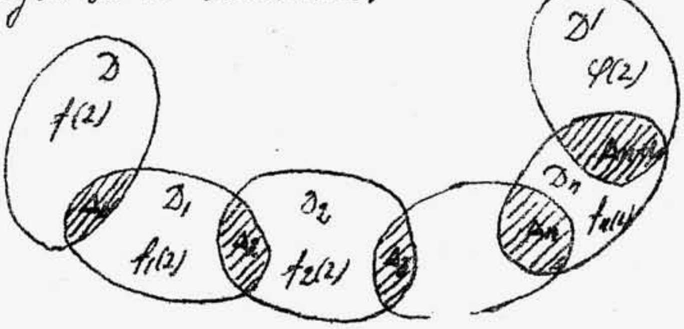



Wtedy zasada nasza wysłowi się w ten sposób: $f_1(z)$ i $f_2(z)$ stanowią jedną i tą samą funkcję; mówimy że $f_2(z)$ jest przedłużeniem na obszar $D_2$ f. $f_1(z)$, określonej pierwotnie w obszarze $D_1$ i odwrotnie: $f_1(z)$ jest przedłużeniem f. $f_2(z)$.

Przyjęcie takiej zasady jest zupełnie naturalne wobec tego, że nie może istnieć żadna inna f. $f_3(z)$, któraby miała tę własność co $f_2(z)$ bo wtedy mielibyśmy w $\Delta$: $f_3(z) \equiv f_2(z)$ i f. $f_3(z)$ określona w obszarze $D_2$ byłaby identyczna z $f_2(z)$ nietylko w $\Delta$, ale w całym obszarze $D_2$. Dzięki zaś tej zasadzie możemy wznieść się od rozważania f. regularnej w pewnym obszarze do ujęcia pewnego całokształtu stanowiącego jedną i tą samą funkcję, a wyrażającą się np. w obszarze $D_1$ w postaci $f_1(z)$, a w obszarze $D_2$ w postaci $f_2(z)$.

Tak więc nasze wyrażenia jak szeregi, całki i.t.d., których zakres istnienia redukował się na mocy pierwotnych definicji do pewnych obszarów częściowych np. $D_1$ lub $D_2$ mogą się okazać częściowemi definicjami jednej i tej samej funkcji, której zakres istnienia obejmuje obszar, składający się z $D_1$ i z $D_2$ i wielu jeszcze może innych obszarów.

Można sobie wyobrazić że obszary $D$ i $D'$ nie mają żadnego p. wspólnego, przytem w $D$, jest określona f. $f(z)$, a w $D'$ f. $\varphi(z)$, obydwie regularne we stycznych sobie obszarach.




Oprócz tego przyjmujemy, że istnieje skończona liczba obszarów: $D_1, D_2 \dots D_n$, takich, że w każdym określona jest pewna funkcja regularna: $f_1(z)$ w $D_1$, $f_2(z)$ w $D_2$ i t. d.; następnie obszary $D$ i $D_1$ mają część wspólną $\Delta_1$; $D_1$ i $D_2$ część wspólną $\Delta_2$ i t. d., $D_n$ i $D'$ część wspólną $\Delta_{n+1}$, przyczem $f(z)$ jest identyczne z $f_1(z)$ w $\Delta_1$; $f_1(z) \equiv f_2(z)$ w $\Delta_2$ i t. d. wreszcie $f_n(z) \equiv \varphi(z)$ w $\Delta_{n+1}$. W ten sposób powstaje łańcuch nieprzerwany łączący nasze obszary t. zn. $D$ i $D'$.

W takim razie na mocy naszej zasady f. $f_1(z)$ jest przedłużeniem f. $f(z)$ na obszar $D_1$, $f_2(z)$ na obszar $D_2$, ....., $f_n(z)$ na obszar $D_n$ i wreszcie $\varphi(z)$ na obszar $D'$; tak więc $f(z)$ i $\varphi(z)$ przedstawiają jedną i tę samą funkcję.

Jeśli utworzymy wszystkie możliwe przedłużenia f. regularnej, określonej początkowo w obszarze $D$, to otrzymane tą drogą funkcje będą jedną i tą samą f. analityczną, określoną przy pomocy różnych wyrażeń, której obszar istnienia obejmuje wszystkie obszary częściowe, wymienione poprzednio. Jeśli więc f. regularna jest określona w obszarze $D$ zapomocą pewnego wyrażenia, które traci sens poza obszarem $D$, to jeszcze stąd nie wynika by funkcja nie istniała poza $D$.

O ile możliwe jest przedłużenie poza jakąś część brzegu obszaru $D$, to zakres istnienia f. obejmuje obszar większy niż obszar pierwotny $D$; obszar ten był związany z takiem albo innem wyrażeniem naszej funkcji, a nie z samą funkcją. Tak np szereg:

$$1+z+z^2+\dots+z^n+\dots$$

jest zbieżny tylko dla $|z|<1$, czyli obszar regularności $D$, związany z tem wyrażeniem w postaci szeregu jest kołem o prom. 1; tymczasem szereg ten przedstawia funkcję: $\frac{1}{1-z}$, której zakres istnienia obejmuje całą płaszczyznę z wyjątkiem punktu $z=1$;

{ Przedłużenie poza brzeg $D$ obszaru regul. jest możliwe wtedy i tylko wtedy, jeśli punkty należące do tego brzegu są (przynajmniej na pewnej części brzegu) punktami regularnemi danej f. Należy więc rozróżnić dwa wypadki zasadniczo różne: w tym wypadku punkty należące przynajmniej do pewnej części ograniczenia obszaru $D$ są p. regularności i takie ograniczenie może być usunięte przez przedłużenie analityczne f., w 2-im wypadku wszystkie punkty ograniczenia obszaru $D$ są p. nieregularnemi (osobliwemi) i wtedy to ograniczenie jest istotne (nie sztuczne, jak w poprzednim wypadku) i nie może być usunięte. W ten sposób możemy określić f. analityczną jako f. regularną w pewnym obszarze spójnym, przyczem wewnątrz tego obszaru mogą istnieć punkty a nawet zbiory p., tworzące continua, złożone z p. nieregularnych, ale w ten sposób, by te zbiory p. nieregularnych nie naruszały spójności p. regularnych t.zn. by każde dwa punkty regularne danego obszaru mogły być połączone linją ciągłą składającą się całkowicie z p. regularnych (każdy p. regularny jest p. wewnętrznym obszaru regularności).

Poprzednio zbudowaliśmy już częściowo przedłużenia analityczne dla $f = e^x$, $\sin x$ i $\cos x$ i t.d., określonych początkowo tylko na osi l. rzeczywistych. Okazało się, że istnieją f. $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ zmiennych zespolonych regularne w całej płaszczyźnie, takie, że na osi liczb rzeczywistych: $e^z = e^x$, $\sin z = \sin x$, $\cos z = \cos x$.

Te funkcje stanowią przedłużenia f. $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ zmiennej rzeczywistej.

Przy określaniu tych f. $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ zauważyliśmy już bez pomocy zasady przedłużenia analitycznego, że niema żadnych innych f., któreby stanoiły przedłużenie tych f. zmiennej rzeczywistej i były regularne na osi l. rzeczywistych. Teraz na mocy zasady przedłużenia analitycznego, którąśmy przed chwilą przyjęli, to ostatnie założenie o regularności staje się zbytecznem, gdyż nasze f. $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ są regularne na osi l. rzeczywistych, więc f. analityczna, która np. ma być wszędzie poza osią l. rzeczywistych równa $e^z$, musi na mocy naszej zasady równać się $e^z$ i na osi l. rzeczywistych. (Tak więc wspomniana zasada wyklucza istnienie f. analitycznych równych np. wszędzie $e^z$ dla $z \neq 0$ i równych zeru dla $z = 0$, co nie było sprzeczne z poprzedniemi definicjami; taka f. regularna wszędzie (w odległości skończonej) za wyjątkiem punktu nieregularnego $z = 0$ mogła być przed tem rozpatrywana; nasza zasada wyklucza taką możliwość).

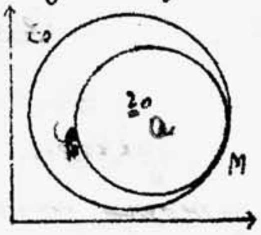
Najprostszemi wyrażeniami określającemi f. regularne są szeregi potęgowe. Możemy więc szeregi potęgowe uważać jako tworzywo do budowania całokształtu f. analitycznych. Jako takie tworzywo będziemy nazywali szereg „elementem" f. analitycznej; w tym wypadku obszary $D_1, D_2, D_3 \ldots$ z poprzednich definicji są kołami. Wmyśl poprzedniej zasady jeden element określa całokształt f. analitycznej w całym zakresie jej istnienia.

Przypuśćmy więc, że dany jest element f. analitycznej w postaci szeregu:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

przyczem promień zbieżności $\rho \neq 0$; szereg ten określa f. regularną.

Naszem najbliższem zadaniem jest wyjść poza obszar $D$ koła, koła zbieżności, przy pomocy innych kół, częściowo nakrywających się z obszarem (kołem) $D$.




W tym celu obieramy wewnątrz $D$ p. $a$. Bierzemy pod uwagę wartość funkcji która jest sumą tego szeregu (1) i wartości wszystkich jej pochodnych w punkcie $a$. Wszystkie te wartości możemy obliczyć przy pomocy szeregów zbieżnych następujących:

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$
$$f_1'(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$
$$f''(a) = \sum_{n} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_1^{(p)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)(z-z_0)^{n-p}$$

Możemy z łatwością utworzyć szereg potęgowy następujący:

$$(2)\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f_1^{(p)}(a)}{p!}(z-a)^p$$

Szereg (2) jest rozwinięciem na szereg Taylora tejże samej f. $f(z)$, ale nie wg potęg $(z-z_0)$, tylko wg potęg $(z-a)$. Stąd widać, że ten szereg Taylora musi być zbieżny tam, gdzie f. $f_1(z)$ jest regularna, czyli conajmniej w kole zakreślonem z p. $a$ i stycznem wewnętrznie do koła o prom. $\rho$ i o środku w p. $z_0$. W tym się przynajmniej obszarze szereg (2) jest zbieżny i przedstawia f. $f_2(z)$, która jest identyczna z $f_1(z)$ gdyż:

$$f_1(a) = f_2(a)$$
$$f_1'(a) = f_2'(a)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_1^{(p)}(a) = f_2^{(p)}(a)$$

Wzór (2) określa pewną f. $f_2(z)$, która jest identyczna z f. $f_1(z)$ w pewnem otoczeniu p. $a$. Zakresem zbieżności szeregu (2) jest pewne koło zakreślone z p. $a$. Promień $\rho_1$ tego koła jest taki że: $\rho_1 \geq \rho - |z-a|$, bo wspomniane koło styczne wewnętrznie do koła $C_\rho$ o promieniu $\rho - |z-a|$, nie może być większe od koła zbieżności. Możliwe są dwa wypadki:

I. $\rho_1 > \rho - |z-a|$. Wtedy koło zbieżności $C_{\rho_1}$ szeregu (2) wykracza poza koło $C_\rho$ zbieżności szeregu pierwotnego (1); w ten sposób otrzymamy przedłużenie nanej f. poza obszar pierwotny D; w tym wypadku punkty koła $C_\rho$ muszą się znaleźć wewnątrz koła $C_{\rho_1}$, a więc p. te muszą być regularne.

II. $\rho_1 = \rho - |z-a|$; koło $C_{\rho_1}$ jest wewnętrznie styczne do koła $C_\rho$; punkt styczności M musi być punktem nieregularnym, a to dlatego że na okręgu koła $C_{\rho_1}$ musi istnieć przynajmniej jeden p. nieregularny; ale żaden punkt na kole $C_{\rho_1}$ nie może być nieregularny, prócz punktu M, ponieważ wszystkie inne leżą wewnątrz koła $C_\rho$. W tym wypadku szereg (2) nie daje możności przedłużenia analitycznego nanej funkcji $f(z)$.

Wszystkie punkty a wewnątrz koła $C_\rho$ mogą być podzielone na takie, przy których przedłużenie udaje się i na takie, przy których przedłużenie nie udaje się.

Gdy p. a jest dostatecznie blisko obwodu koła $C_\rho$ to przedłużenie nastąpi skoro tylko na obwodzie $C_\rho$ w otoczeniu p. a znajduje się łuk częściowy zawierający tylko p. regularne; jeżeli zaś a zbliża się do p. nieregularnego na obwodzie, to przedłużenie jest niemożliwe.

Robiąc przedłużenia we wszelkie możliwe sposoby będziemy mieli obraz taki: albo nigdy poza pierwotne koło (obszar $D_1$) nie wyjdziemy; wtedy na obwodzie koła $C_\rho$ niema ani jednego p. regularnego (wszystkie są osobliwe), wtedy zakresem istnienia f. jest obszar D i funkcja w całym obszarze istnienia ma jeden tylko element: (1); albo też nie wszystkie punkty na kole $C_\rho$ są osobliwe i wtedy będziemy mogli wyjść poza pierwotny obszar D i dołączyć do pierwotnego elementu i obszaru nowe elementy i nowe obszary kołowe. Jeżeli z temi nowemi elementami i ich obszarami postąpimy tak, jak z pierwotnym, to otrzymamy nowy szereg elementów i odpow. im obszarów. Ten proces może skończyć się po skończonej l. takich operacyj przez wyczerpanie obszaru istnienia f., albo też będziemy mieli proces nieskończony.

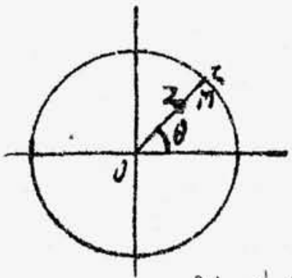
Można dowieść, że przedłużenia nie stracą na ogólności jeśli na współrzędne punktów $a$ (środki z których zakreślamy nowe koła) będziemy brali l. wymierne t. zn. $a = \alpha + i\beta$, gdzie $\alpha = \frac{p}{q}$, a $\beta = \frac{p_1}{q_1}$; liczby $p, q, p_1, q_1$ są tu całkowite. Stąd już wynika, że do określenia f. analitycznej wystarczy przeliczalna ilość elementów bo zbiór l. wymiernych jest przeliczalny.
Widzimy więc, że w ten sposób jeden element funkcji określa całą f. analityczną w całym obszarze jej istnienia.
__Funkcją analityczną__ nazywamy więc zbiór wszystkich elementów, które można otrzymać z jednego elementu. Mówimy że punkt $z_0$ należy do zakresu istnienia f. analitycznej jeżeli istnieje element f. analitycznej, powstały przez __przedłużenie__ analityczne z elementu danego, taki że p. $z_0$ jest wewnątrz koła jego zbieżności.
Istnieją dwa wypadki kiedy dla określenia f. analitycznej wystarczy jeden element:

1) gdy promień zbieżności szeregu $\rho = \infty$ *); wtedy odpow. element jest szeregiem zbieżnym na całej płaszczyźnie i odrazu określa funkcję w całej płaszczyźnie.
2) gdy wszystkie p. koła zbieżności są __nieregularne__, bo wtedy żadnego przedłużenia otrzymać nie można. Że ten drugi wypadek jest możliwy, widać z następującego przykładu:

__Przykład__: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} = 1 + z + z^2 + z^6 + z^{24} + z^{120} + \dots$

Jest to szereg potęgowy w którym spółczynnik $a_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = p! \\ 1 & \text{,, } n \neq p! \end{cases}$ to im zależnie od tego, czy numer wyrazu jest silnią jakiejś liczby czy nie.
Promień zbieżności tego szeregu jest $\rho = 1$, bo $r = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ gdyż $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$; Chcemy okazać, że każdy punkt na tem kole zbieżności jest nieregularny. Weźmy w tym celu pod uwagę punkt M.

*) przykład $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \frac{z^n}{n!}$ $r = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ $\rho = \infty$




którego argument $\theta = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$ (t.zn. jest współmierny z kątem pełnym); wtedy mamy:

$$\zeta = e^{i\theta} = e^{i\frac{p}{q}2\pi}$$

Weźmy pod uwagę punkt na promieniu $OM$, niech to będzie punkt $z$. wtedy:

$$z = \rho e^{i\theta} \quad \text{gdzie} \quad 0<\rho<1 \quad i \quad \rho = |z|$$

$f(z) = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} z^{n!}$

$f(z) = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} z^{n!}$. Można łatwo wykazać, że gdy $n \geq q$ to $z^{n!} = \rho^{n!}$, bo $z^{n!} = \rho^{n!} e^{in!\theta}$ gdy $n \geq q$ to $n!$ dzieli się przez $q$ i $\frac{n!}{q} = k$ ($k$ liczba całkowita) Wiemy, że $e^{2\pi k i} = 1$ więc

$$z^{n!} = \rho^{n!} e^{i2\pi p \frac{n!}{q}} = \rho^{n!} e^{i2\pi p k} = \rho^{n!}$$

Wtedy nasza funkcja wyrazi się tak:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!}$$

Teraz stosujemy twierdzenie o różnicy modułów dwóch liczb: $a = b+c$ to $|a| > |b| - |c|$. W naszym wypadku będzie:

$$|f(z)| > \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!} - \sum_{n=0}^{q-1} \rho^{n!}$$

Naszą nierówność wzmocnimy jeśli w sumie, która jest odjemną weźmiemy nie wszystkie wyrazy, a odjemnik zwiększymy:

$$|f(z)| > \sum_{n=q}^{n=2q+g} \rho^{n!} - \sum_{n=0}^{q-1} 1^{n!} = \sum_{n=q}^{n=2q+g} \rho^{n!} - q$$

Gdy $z \to \zeta$ to $\rho \to 1$ a więc $\sum_{n=q}^{n=2q+g} \rho^{n!} \to q+g$ czyli $|f(z)| > \sum_{n=q}^{n=2q+g} \rho^{n!} - q \to g$

skąd $\underline{|f(z)| > g}$ o ile tylko $\rho > \rho_0$;

Ale liczba $g$ może być dowolnie duża t.zn. że gdy $\rho \to 1$ to $|f(z)| \to \infty$.

Dowiedliśmy już że w naszym przykładzie punkt $\zeta$ o argumencie $\theta$ współmiernym z kątem pełnym jest nieregularny. Ale punkty o takim argumencie pokrywają nasze koło w sposób wszędzie gęsty; stąd wynika że wogóle wszystkie punkty koła (o dowolnym, niewspółmiernym z $2\pi$ argumencie) są nieregularne, bo gdyby którekolwiek z nich były regularne, to i sąsiednie z niemi a więc p. o argumencie współmiernym z $2\pi$ byłyby regularne.

Okazaliśmy na przykładzie, że istnieją f. analityczne określone przez jeden element, któremu odpowiada obszar o wymiarach skończonych.

Permanencja związków funkcyjnych. —

Jeżeli f. analityczne spełniają pewną zależność funkcyjną w pewnym obszarze $D$, to związek ten zachodzi naogół w całym obszarze istnienia tych f. analitycznych.

Niech $z$ będzie zmienną niezależną a $u$ i $v$ niech oznaczają dwie f. analityczne zmiennej $z$, regularne w otoczeniu p. $z=z_0$, przyczem niech $u$ będzie określone przez szereg potęgowy $h_u(z-z_0)$, a $v$ przez szereg potęgowy $h_v(z-z_0)$, które stanowią elementy odpow. f. analitycznych.

Niech $F(z,u,v)$ oznacza f. analityczną względem każdej z 3-ch zmiennych $z$, $u$ i $v$. Funkcja ta niech ma wartość ściśle określoną wraz ze swemi pochodnemi 1-go rzędu dla wszystkich wartości $z$, $u$ i $v$, takich, że $z$ należy do obszaru $D_z$, $u$ do $D_u$ a $v$ do $D_v$; i niech $z_0$ należy do obszaru $D_z$, a odpowiadające wartości $z=z_0$ wartości $u=u_0$ i $v=v_0$ niech należą do obszarów $D_u$ i $D_v$. Wtedy funkcja:

$$F\{z, h_u(z-z_0), h_v(z-z_0)\}$$

jest jak łatwo się przekonać w otoczeniu p. $z=z_0$ regularna względem $z$ (łatwo sprawdzić, że wszystkie 3-y warunki Cauchy'ego są spełnione)

Przypuśćmy dalej, że zachodzi dla wszystkich wartości $z$ w tym otoczeniu

$$F(z,u,v) = F\{z, h_u(z-z_0), h_v(z-z_0)\} = 0$$

Otóż równanie to jest spełnione spełnione nietylko w otoczeniu p. $z_0$, ale w całym zakresie istnienia f. analitycznej: $F\{z, h_u(z-z_0), h_v(z-z_0)\}$;

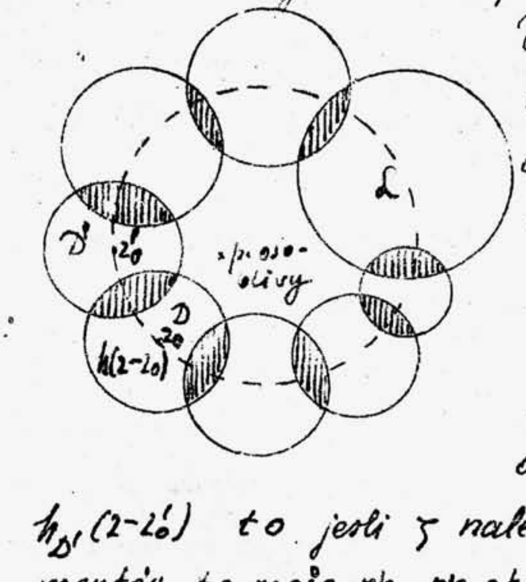
W mocy samej warunek ten musi być spełniony w dalszym ciągu przy przedłużeniu analitycznem dla wszystkich $z$ należących do $D_2$ o ile odpowiednie wartości f. $u$ i $v$ otrzymane przez przedłużenie analityczne elementów $h_u(z-z_0)$ i $h_v(z-z_0)$ należą odpowiednio do $D_u$ i $D_v$.

Na tem polega zasada <u>permanencji</u> związków funkcyjnych. Dowód nie przedstawia żadnych trudności, gdyż polega na zastosowaniu przedłużenia przy pomocy łańcucha kół częściowo na siebie wzajemnie zachodzących.

## <u>Funkcje</u> <u>wielowartościowe</u>.

Zasada przedłużenia analitycznego przy pomocy łańcucha kół, choć bardzo prosta, prowadzić może do pewnych komplikacji, z których już teraz należy zdać sobie sprawę. Mianowicie może zajść następująca okoliczność:

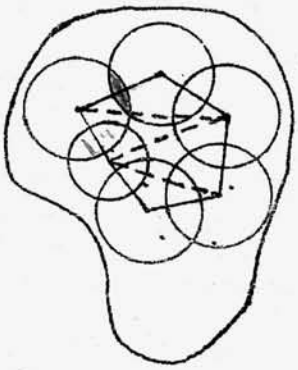
Dany jest element początkowy: $h(z-z_0)$, którego obszarem zbieżności jest koło $D$. Wyobraźmy sobie że wychodząc z p. $z_0$ zakreślamy drogę zamkniętą $\mathcal{L}$, wzdłuż której przedłużenie naszej f. okazuje się możliwe w ten sposób, że na linji $\mathcal{L}$ mamy skończoną ilość p. które są środkami kół zachodzących na siebie, a każdemu z tych kół odpowiada pewien element naszej f. analitycznej.

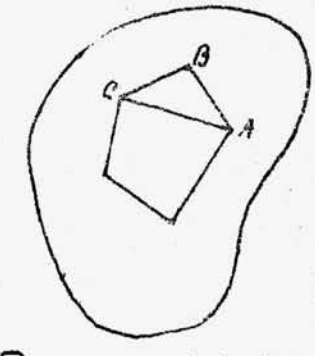



Utworzyliśmy więc łańcuch kół i szereg odpowiadających im elementów przyczem ostatnie koło $D'$ zachodzi częściowo na obszar początkowy $D$.

Otóż może się zdarzyć, że wartości f. określone w tym samym obszarze wspólnym obszarów $D$ i $D'$ w p. $\zeta$ mogą nie być równe sobie dla elementów odpow. obszarom $D$ i $D'$, czyli, że jeśli obszarowi $D$ odpowiada element $h_D(z-z_0)$ a obszarowi $D'$ element $h_{D'}(z-z_0')$ to jeśli $\zeta$ należy do części wspólnej obszarów zbieżności obu elementów to może się okazać że: $h_D(z-z_0) \neq h_{D'}(z-z_0')$.

Jeżeli taka okoliczność może mieć miejsce to mówimy, że f. jest wielowartościowa. Może to mieć miejsce tylko wtedy gdy droga $\mathcal{L}$ i łańcuch kół otacza punkt osobliwy funkcji, który musi się znaleźć wewnątrz pierścienia utworzonego przez łańcuch kół. Musi się znaleźć taki p. osobliwy, albowiem jeżeli f. jest regularna w otoczeniu każdego p. obszaru jednospójnego D to jest jednowartościowa i regularna w tym obszarze. Udowodnić to można w sposób następujący. Przypuśćmy, że istnieje w obszarze D łańcuch kół przytem 1-y i ostatni element nie są identyczne w części wspólnej. Liczba kół w tym łańcuchu jest oczywiście skończona. Łącząc środki, otrzymamy pewien wielobok P. Ten wielobok rozkładamy na trójkąty przekątnemi.






Wśród tych trójkątów musi się znaleźć taki, że przy przedłużeniu analitycznem wzdłuż jego obwodu jednowartościowość nie ma miejsca. W rzeczy samej gdyby takiego trójkąta nie było to doszlibyśmy do sprzeczności, albowiem niech A, B, C oznaczają środki 3-ch kolejnych kół a AC przekątną naszego wielokąta; zamiast przedłużać po drodze AB a potem po BC moglibyśmy przedłużyć wzdłuż AC, gdyż wtedy w p. C na mocy założenia o trójkątach otrzymamy ten sam element i dalsza droga wzdłuż wieloboku musiałaby doprowadzić do tego samego co poprzednio w p. A t. zn do zatracenia jednowartościowości.

Widzimy więc, że można zastąpić n-bok o n bokach innym wielobokiem o n-1 bokach i w ten sposób stopniowo ~~stopniowo~~ zastąpić wielobok trójkątem, zawsze z tym samym wynikiem t. zn. z zatraceniem jednowartościowości przy powrocie do p. początkowego. A więc doszliśmy do sprzeczności czyli, że musi istnieć trójkąt, dla którego zachodzi zatrata jednowartościowości.

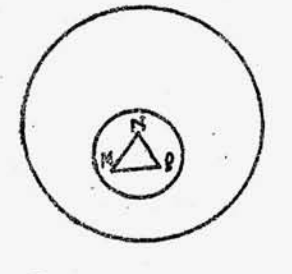
Przykłady funkcyj jednowartościowych: $e^z = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}$ ; $\sin z = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

wielowartościowych: $\lg z = \lg|z| + i(\theta + 2k\pi)$

$f(z) = \sqrt[n]{z}$

Ten trójkąt możemy dzielić na mniejsze trójkąty tak jak przy dowodzie tw. o całce Cauchy'go. Tak więc otrzymamy ciąg trójkątów coraz mniejszych posiadających tę własność, że przy przedłużaniu wzdłuż obwodu takiego trójkąta zatraca się jednowartościowość.

Ten ciąg trójkątów określa nam pewien punkt graniczny, który oznaczymy przez $\zeta_0$ i który należy do obszaru regularności funkcji. Zatoczmy z p. $\zeta_0$ koło wewnątrz, którego odpowiadający element danej f. analitycznej jest regularny. Lecz wewnątrz tego koła musi się znaleźć trójkąt MNP należący do ciągu trójkątów poprzednio rozpatrywanych, taki że wzdłuż tego trójkąta zatraca się jednowartościowość. To jest niemożliwe gdyż elementy odpowiadające wszystkich punktów wewnątrz koła zbieżności są wyznaczone jednoznacznie na zasadzie tw. o jednoznaczności dla szeregów potęgowych.



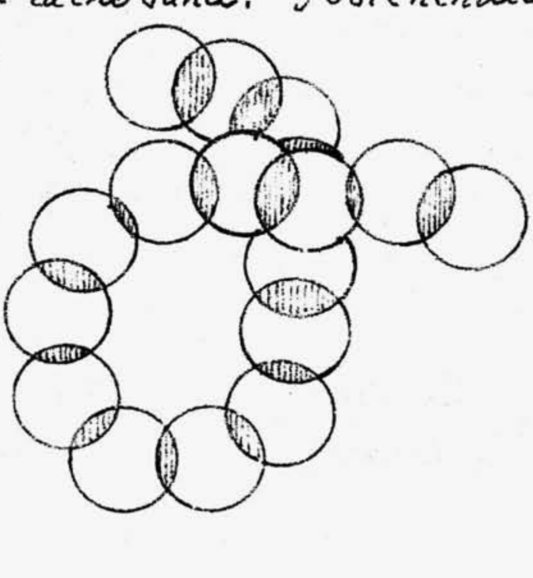

Punkt $\zeta_0$ nie może więc być regularny i twierdzenie nasze jest udowodnione.

## Powierzchnia Riemanna.

Jest b. niewygodnem jednemu i temu samemu punktowi obszaru istnienia f. podporządkowywać więcej niż jedną wartość tej funkcji. Odpowiedniość jednoznaczna pomiędzy wartościami funkcji a punktami pewnego obszaru jest rzeczą nadzwyczaj cenną i daje się utrzymać nawet dla f. wielowartościowych pod warunkiem, że podłożem tych punktów będzie już nie płaszczyzna zmiennej zespolonej, a powierzchnia więcej złożona t. zw. pow. Riemanna, która powstaje przez sczepienie wzdłuż pewnych linij (cięć) dwu lub więcej płaszczyzn ze sobą. Tutaj pomocnem nam być może następujące uzmysłowienie:

Wyobraźmy sobie, że koła odpowiadające elementom są to krążki papieru poprzyklejane do siebie częściami wspólnemi, w których to częściach

wspólnych elementy odpowiednie mają tą samą wartość
Jeśli łańcuch kół nakrywa się to mamy przed sobą dwie możliwości: albo elementy odpowiadające 1-emu i ostatniemu krążkowi w części wspólnej mają wartość wspólną wtedy pierwszy i ostatni krążek sklejamy ze sobą i otrzymujemy łańcuch kół w jednej płaszczyźnie, albo też w części wspólnej elementy mają wartości różne, wtedy 1-y i ostatni krążki nie przymocowujemy do siebie, lecz traktujemy każdy z nich jako niezależny od pozostałego; ostatni element przedłużamy i otrzymujemy nowe krążki, które mogą przykrywać poprzednie i mieszczą się jakgdyby w innej płaszczyźnie. Krążek ostatni „nasuwamy" na pierwszy i dołączamy nowe elementy; nad płaszczyzną 1-ą utworzymy w ten sposób płaszczyznę drugą, do której można się dostać w sposób ciągły przez przedłużenie analityczne otaczające p. osobliwy.
Wtedy jeden i ten sam p. $\zeta$ płaszczyzny zmiennej zespolonej możemy uważać raz jako p. płaszczyzny górnej, raz jako p. płaszczyzny dolnej; punkt został jakgdyby rozdwojony i jedna z wartości f. odpowiada jednemu z tych punktów $\zeta$, a druga wartość drugiemu. W ten sposób jednowartościowość zostaje zachowana. Powierzchnia taka może mieć dowolną ilość płatów;



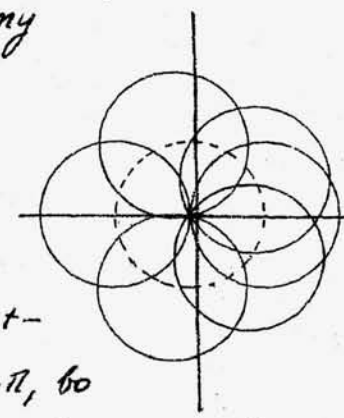
Wystarczy nam narazie takie ogólnikowe pojęcie a na przykładach prostych sprawa będzie mogła być jaśniej przedstawiona.
Koncepcja takiej sztucznej powierzchni pochodzi od Riemanna; na takiej powierzchni funkcja jest jednowartościowa.

Przykłady:

1) $f(z)=\sqrt{z}=z^{\frac{1}{2}}$.

Funkcja ta jest nieregularna tylko w p. 0, bo choć jest tam określona, to pochodna: $f'(z)=\frac{1}{2\sqrt{z}}$ w p. 0 nie istnieje.

Jeśli $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, to $f(z)=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$; punktowi $z_0$ odpowiadać będzie element zbieżny w kole o promieniu $|z_0|$. Łatwo zauważyć, że jeśli tę funkcję będziemy rozpatrywali jako zbiór elementów i jeśli wyszedłszy z pewnego punktu, okrążymy elementami p. nieregularności i znów wrócimy do tego samego p. to wartość $f$ zmieni znak. Jest to jasne, bo jeśli wyszliśmy z punktu $z=x+iy$, to po obejściu dokoła p. nieregularności wrócimy do p. $z$, ale wtedy jego argument zmieni się o $2\pi$. Tak, że jeśli początkowo było:

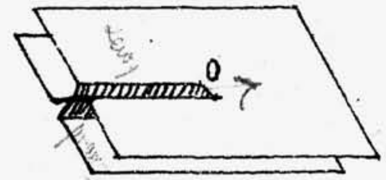


$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ przyczem w pierwszym elemencie $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ i $f(z)=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$, to potem w ostatnim elemencie zamiast argument $\theta$ mamy arg. $\theta+2\pi$, bo wzdłuż drogi okrążającej p. 0 argument rośnie w sposób ciągły i po pełnym obrocie wzrasta o $2\pi$, tak że:

$$f(z)=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right)=\sqrt{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right\}=$$

$$=-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Dla zilustrowania tego wyobraźmy sobie dwie płaszczyzny jedna na drugą, rozcięte wzdłuż osi $x$-ów od 0 do $\infty$ i prawy brzeg jednej jest połączony z lewym brzegiem drugiej i naodwrót.

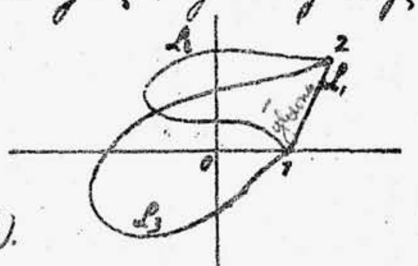



2) Określimy funkcję lg przy pomocy całki. Wiemy że dla zmiennej nierzeczywistej słusznym był wzór: $\int_1^x \frac{dx}{x}=\lg x$. Uogólniając otrzymamy:

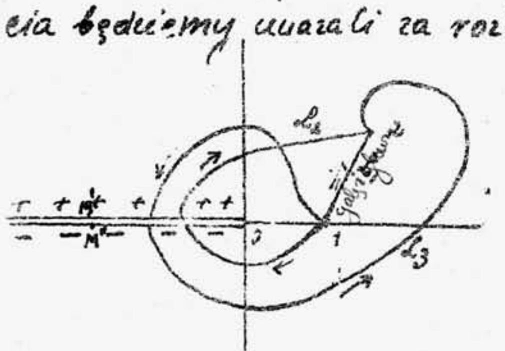
$\int_1^{z}{}^{\mathcal{L}} \frac{dz}{z} = f(z)$; tak określona f. f(z) jest regularną w otoczeniu każdego punktu z wyjątkiem p. z=0. $\mathcal{L}$ oznacza drogę od p. 1 do p. z, gdzie z jest to dowolny punkt płaszczyzny zmiennej zespolonej, nie leżący na osi x-ów po stronie ujemnej. Całka ta jak zobaczymy zależy od drogi. Określmy najpierw $\mathcal{L}$ jako drogę po prostej od p. 1 do p. z; otrzymane w ten sposób f(z) jest to wartość całki po drodze bezpośredniej;
f(z) zlewa się z f. lg x na osi l. rzeczywistych, a więc jest przedłużeniem tej funkcji; piszemy to tak:

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \mathcal{L}g\, z;$$

$\mathcal{L}g$ piszemy przez duże $\mathcal{L}$ dlatego, żeby zaznaczyć, że brana jest całka wzdłuż drogi bezpośredniej. Nazywamy ją gałęzią główną funkcji logarytm. Wartość równą wartości gałęzi głównej dają całki brane wzdłuż takich dróg, które wraz z drogą bezpośrednią nie zawierają między sobą wewnątrz punktu nieregularności, bo wtedy, jak wiemy, całka wzdłuż drogi zamkniętej jest równa zeru. (rys. droga $\mathcal{L}_2$).




Dla jasnego zdania sobie sprawy z różnych możliwości i różnych wartości całki na płaszcz. zmiennej z, utwórzmy cięcie od p. 0 do $-\infty$ wzdłuż osi x-ów. Brzeg cięcia będziemy uważali za rozdwojony, będą więc właściwie dwa brzegi. Droga $\mathcal{L}$ nie przecinająca cięcia daje tę samą wartość całki co droga bezpośrednia t.zn. daje gałąź główną. Gdy zaś weźmiemy drogę $\mathcal{L}_2$ przechodzącą przez to cięcie to jasna rzecz że:




$$\int^{\mathcal{L}_1} \frac{dz}{z} - \int^{\mathcal{L}_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i. \quad \text{a więc} \quad \int^{\mathcal{L}} \frac{dz}{z} = \mathcal{L}g\, z - 2\pi i$$

Jeśli górny brzeg cięcia nazwiemy brzegiem plusów, a dolny brzegiem minusów to możemy powiedzieć: gdy droga $\mathcal{L}_2$ przecina cięcie raz przechodząc od brzegu -- do + to wartość całki wzdłuż $\mathcal{L}_2$ jest równa wartości głównej mniej $2\pi i$; jeśli przechodzi raz od brzegu + do −, to wartość całki równa się wartości głównej $+2\pi i$. Ogólnie $\left\{\begin{array}{l}\text{jeśli } \mathcal{L}_2 \text{ przechodzi } m \text{ razy od brzegu } + \text{ do } - \\ \text{i } \quad " \quad " \quad " \quad n \quad " \quad " \quad " \quad - \;\; " \; + \end{array}\right.$

to wartość odpowiedniej całki jest: $\int^{z}_{\mathcal{L}_2} \frac{dz}{z} = \mathcal{L}g\, z + (m-n)2\pi i.$

Określiliśmy funkcję analityczną $\mathcal{L}g\, z = \int^{z} \frac{dz}{z}$; łatwo widzieć, że ta funkcja jest identyczna z tą, którąśmy określili jako f. odwrotną do f. wykładniczej: $e^{\zeta} = z$; w rzeczy samej:

$$\Phi(z) = e^{\mathcal{L}g\, z}$$

jest f. regularną w otoczeniu każdego p. $z \neq 0$; Gdy $z = x > 0$ t. j. na osi l. rzeczywistych dodatnich mamy:

$$\Phi(z) = e^{\mathcal{L}g\, x} = x = z$$

Czyli związek: $e^{\mathcal{L}g\, z} - z = 0$ jest tożsamościowo spełniony na osi l. rzeczywistych, więc musi być spełniony przez f. analityczną w całym zakresie jej istnienia t. j. $e^{\mathcal{L}g\, z} = z$ na całej płaszczyźnie $(z \neq 0)$.

Jeżeli zamiast gałęzi głównej $\mathcal{L}g\, z$ weźmiemy inną wartość $lg\, z$ to wynik będzie ten sam, bo $lg\, z = \mathcal{L}g\, z + 2k\pi i$ a więc

$$e^{lg\, z} = e^{\mathcal{L}g\, z + 2k\pi i} = e^{\mathcal{L}g\, z} = z$$

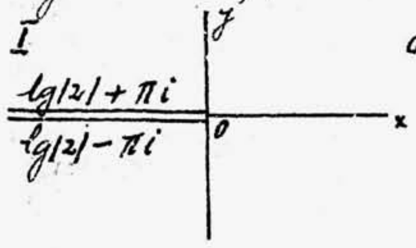
Tak więc $\int_1^z \frac{dz}{z}$ przedstawia właśnie f. odwrotną do f. wykładniczej i jej wartości jak widzieliśmy wyżej (Rozdział 13) były

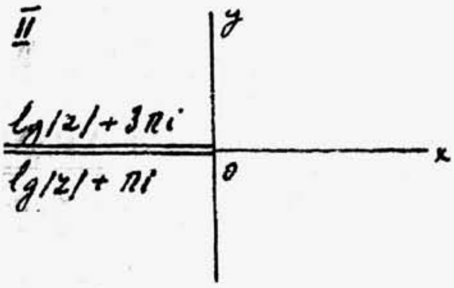
$$lg\, z = lg|z| + i(\theta + 2k\pi) \qquad \text{gdzie } \theta = \arg z.$$

Na płaszczyźnie rozciętej nasza f. jest nieciągła. Weźmy na osi x-ów, na tej części, na której znajduje się cięcie punkt $M$: jako punkt brzegu plusów niech to będzie punkt $M'$, jako p. brzegu minusów oznaczmy ten sam p. przez $M''$. (patrz rys. na 125)

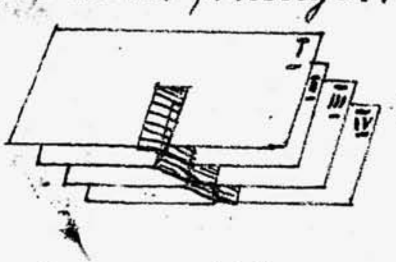
Punktom $M'$ i $M''$ odpowiadają liczby o jednakowych modułach ale o różnych argumentach; i tak: dla $M'$ arg. jest $\theta = \pi$ więc $\lg z = \lg|z| + \pi i$ (brzeg +)

dla $M''$ arg. „ $\theta = -\pi$ „ $\lg z = \lg|z| - \pi i$ (brzeg −)




Weźmy teraz drugą płaszczyznę mającą takie samo cięcie: w płaszczyźnie tej otaczamy punkt zerowy już drugi raz; wtedy wartość całki będzie na górnym brzegu cięcia: $\lg|z| + 3\pi i$, na dolnym zaś $\lg|z| + \pi i$. Widzimy że brzeg górny płaszczyzny w 1-ym wypadku „pasuje" zleva się z brzegiem dolnym płaszczyzny w wypadku 2-im. Płaszczyzny I i II znajdują się jak wiemy jedna nad drugą. Możemy połączyć z sobą te ich brzegi na których wartość f. jest ta sama i wtedy mamy ciągłość przy przejściu od jednego brzegu do drugiego. Jeżeli okrążymy punkt 0 jeszcze raz to otrzymamy wartości, które możemy zlokalizować na trzeciej płaszczyźnie rozciętej jak poprzednie, przyczem na jednym brzegu cięcia mielibyśmy wartość: $\lg|z| + 5\pi i$ a na drugim: $\lg|z| + 3\pi i$ i t. d. Zawsze wartość na jednym brzegu jakiejś płaszczyzny „pasuje" do wartości na przeciwnym brzegu następnej płaszczyzny. Ponieważ wartości jest nieskończenie wiele mamy nieskończenie wiele takich płaszczyzn. Pasujące brzegi tych płaszczyzn łączymy ze sobą i utworzy się nam powierzchnia Riemann'a tego kształtu (rys.)




Wszystkie płaty tej powierzchni tworzą nieprzerwaną ciągłość. Na tej nowej powierzchni f. jest jednowartościowa. Po określeniu w ten sposób logarytmu: $\lg z = \lg|z| + i\theta$, możemy określić dowolną potęgę liczby zespolonej; jeśli mamy $\alpha^z$, gdzie $\alpha$ i $z$ są zespolone, to gdybyśmy mogli stosować prawidła odnoszące się do l. rzeczywistych to mielibyśmy:

$$f(z) = \alpha^z \quad \text{i} \quad \lg f(z) = z \lg\alpha$$ i moglibyśmy określić $f(z)$ tak:

$$f(z) = e^{z\lg\alpha}$$

Przy takiem określeniu mamy zgodność f. $f(z)$ z wartościami potęgi o wykładniku niecywistym [?] i zasadzie niecywistej. Ostatnie wyrażenie ma znane nam już znaczenie i dla l. zespolonych, bo takie działania na l. zespolonych umiemy wykonać. Biorąc to pod uwagę określimy potęgę w ten sposób:

$$\alpha^z = e^{z\lg\alpha} = 1 + \frac{z\lg\alpha}{1} + \frac{(z\lg\alpha)^2}{2!} + \dots + \frac{(z\lg\alpha)^n}{n!} + \dots =$$

$$= e^{(x+iy)(\lg|\alpha|+i\theta)} = e^{x\lg|\alpha|-\theta y} \cdot e^{i(y\lg|\alpha|+\theta x)} =$$

$$= e^{x\lg|\alpha|-\theta y}\{\cos(y\lg|\alpha|+\theta x) + i\sin(y\lg|\alpha|+\theta x)\}$$

A więc moduł: $\underline{|\alpha^z| = e^{x\lg|\alpha|-\theta y}}$,

zaś argument: $\underline{\arg(\alpha^z) = y\lg|\alpha| + \theta x}$ gdzie $\theta = \arg\alpha$.

Funkcja ta jest wielowartościowa, posiada nieskończenie wiele wartości, bo:

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Jeżeli jednak $z = \frac{p}{q}$, t. zn. jeśli w liczbie $z = x+iy$, $y = 0$, a $x = \frac{p}{q}$ to mamy do czynienia z l. niecywistemi i wymiernemi. Czy i wtedy f. jest wielowartościowa?

Moduł: $|\alpha^{\frac{p}{q}}| = e^{\frac{p}{q}\lg|\alpha|}$ ; zaś argument: $\arg(\alpha^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}(\theta_0 + 2k\pi) =$

$$= \frac{p}{q}\theta_0 + \frac{kp}{q}\cdot 2\pi.$$

Pierwsza część argumentu: $\frac{p}{q}\theta_0$ jest jednoznaczna, druga zaś: $\frac{kp}{q}\cdot 2\pi$ posiadać może $q$ różnych wartości przy $k = 0, 1, 2, 3, \dots, q-1$; gdy zaś $k = q, q+1, \dots$ to argument przybiera te same wartości co przy $k = 0, 1, \dots$.

Doszliśmy do wniosku, że $f(\frac{p}{q}) = \alpha^{\frac{p}{q}}$ posiada $q$ wartości; wynik ten można było przewidzieć, bo jak wiadomo $\alpha^{\frac{p}{q}}$ jest niczem innem jak pierwiastkiem: $\sqrt[q]{\alpha^p}$, a pierwiastek stopnia $q$ posiada $q$ różnych wartości.

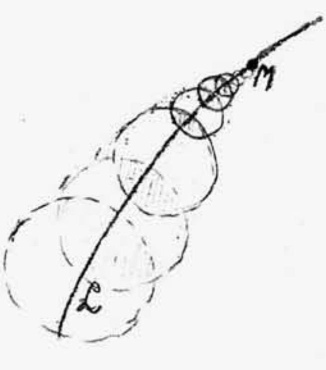
Zadanie: Obliczyć wartość wyrażenia: $\underline{i^i}$ $f(i) = e^{z\lg i}$

## Punkty osobliwe.

Funkcją analityczną nazywaliśmy całokształt wszystkich elementów, które można otrzymać z jednego, drogą przedłużenia analitycznego. Punktem regularnym (p. regularności) nazywamy taki p., który znajduje się wewnątrz koła zbieżności jednego z elementów.

Jeżeli f. jest wielowartościowa, to ta sama wartość zm. niezależnej $z$ może być dla jednej gałęzi funkcji p. regularnym a dla drugiej nieregularnym. Oznaczmy: $w = f(z)$ naszą f.; wygodnie jest wtedy nazywać punktem parę l. zespolonych $w$ i $z$, bo wtedy w tym samym p. $z$ o ile rozważamy dwie różne gałęzi to naogół wartości f. nie są jednakowe; np. $w_1$ i $w_2$: jeden punkt będzie wtedy $zw_1$ a drugi $zw_2$;

Punkty, które nie są regularne a są granicami p. regularnych są p. osobliwemi. Ponieważ f. może być wielowartościowa, ściśle określenie p. osobliwego musi zawierać wskazania ciągu elementów, przy pomocy których zbliżamy się do tego punktu: Punkt $M$ będzie osobliwym (dla pewnej gałęzi), jeżeli istnieje droga $\mathcal{L}$ której p. końcowym jest p. $M$ i jeżeli istnieje łańcuch elementów, stanowiących wzajemne przedłużenie funkcji i takich, że dla zbioru środków kół będących promieniami zbieżności tych elementów p. $M$ jest p. skupienia. Jest to możliwe w tym wypadku gdy w miarę zbliżania się środków kół zbieżności naszych elementów do p. $M$, promień zbieżności tych kół maleje i dąży do zera, tak że punktu $M$ nigdy nie można osiągnąć na drodze $\mathcal{L}$ przy pomocy tych elementów tak by p. $M$ znalazł się wewnątrz obszaru zbieżności jednego z tych elementów.




Jeżeli istnieje taka droga $\mathcal{L}$ i odpowiadający jej taki ciąg elementów to p. $M$ jest p. osobliwym.

Istnienie funkcji wielowartościowych jest okolicznością utrudniającą wiele zagadnień z teorji f. analitycznych. Wprowadzenie f. wielowartościowych nie da się jednak uniknąć, ponieważ odwrócenie najprostszej zależności funkcyjnej daje już f. wielowartościowe.

Np. jeżeli $u=(z-z_0)^n$ to $z=z_0+\sqrt[n]{u}$ ($n$ l. całkowita), i już wtedy mamy f. wielowartościową. Tak samo jeśli $u=e^z$ to $z=\lg u$.

# Rozdział 15. Funkcje całkowite.

Funkcją całkowitą nazywamy funkcję nie posiadającą p. osobliwego w skończoności. Promień zbieżności takiego szeregu: $\rho=\infty$ i funkcja:

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest określona przez jeden tylko element.

Szczególnym wypadkiem f. całkowitych są wielomiany. Wtedy wszystkie współczynniki $a_n$ począwszy od pewnego miejsca równają się zeru.

Funkcje całkowite mające nieskończenie wiele wyrazów nazywamy funkcjami całkowitemi przestępnemi.

Można udowodnić że f. całkowite $G(z)$, o ile nie są stałemi mają taką własność: Jakkolwiek wielkie weźmiemy $M$, to istnieją takie punkty $\zeta$ dla których $|G(\zeta)|>M$. własność funkcji całkowitej

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności: Wiemy że f. $f(\zeta)$ rozwija się na szereg Taylora o współczynnikach:

$$(1)\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta \qquad (z_0=0).$$

Gdyby twierdzenie nasze było fałszywe, istniałaby taka l. $M$, że dla wszystkich punktów $\zeta$ byłoby: $|f(\zeta)|<M$; stąd wynikałaby nierówność dla równania (1);

$$|a_n|<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r$$ , gdzie $r$ oznacza promień

funkcja całkowita $\rightleftarrows$ regularna na całej płaszczyźnie