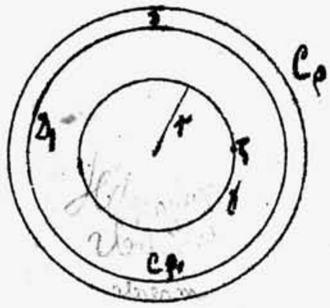
wartość ze wzoru: $f^{(p)}(z_0) = \frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}\,d\zeta$



to otrzymamy, identyfikując n i p:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

Z tego ostatniego wzoru łatwo jest otrzymać nierówność ograniczającą wzrost modułu a_n w zależności od wskaźnika n, a mianowicie: niech M oznacza liczbę taką że w obszarze D zachodzi: $|f(z)| < M$; taka liczba M oczywiście zawsze istnieje. Niech promień koła γ będzie r taki że: $0 < r \le \rho_1 < \rho$; stosując nierówność:

$$|a_n| = \frac{1}{|2\pi i|}\cdot\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta\right| < \frac{2\pi r}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}$$ *) $|\zeta - z| = r$ otrzymamy:

$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\ldots}\,d\zeta = 2\pi i$

gdzie ⊓ nierówność Cauchy dla współczynników szeregu potęgowego

$$|a_n| < \frac{M}{r^n} \quad \text{gdy } 0 < r \le \rho_1$$

Rozdział 11. Związek między regularnością funkcji, a rozwijalnością jej na szereg potęgowy.

Z poprzednich twierdzeń wynika, że suma szeregu potęgowego wewnątrz koła zbieżności jest funkcją regularną.

Ale i odwrotnie: można udowodnić, że każda funkcja regularna jest sumą odpowiedniego szeregu potęgowego kształtu:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, przyczem szereg ten jest

*) $\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z)^n}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\,r^n}\,d\zeta$

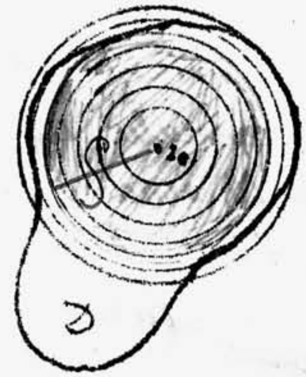
$|\zeta - z| = r$ $\quad = \frac{1}{r^n}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi i f(z) < 2\pi i M$

patrz str. 65

wyznaczony jednoznacznie przez wzór:

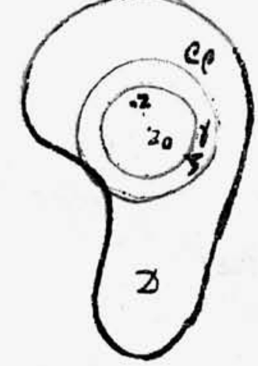
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Mamy funkcję regularną wewnątrz pewnego obszaru D i punkt dowolny z_0 wewnątrz tego obszaru. Udowodnimy, że naszą funkcję $f(z)$ można przedstawić jako sumę szeregu z odpowiednio dobranemi spółczynnikami i że szereg ten jest zbieżny wewnątrz koła nie wykraczającego poza obszar regularności D.



W tym celu wszystkie koła o środku w p. z_0, dzielimy na dwie klasy: 1) nie wykraczające poza obszar D t.j. takie, że wszystkie punkty wewnątrz odpowiedniego koła są regularne; 2) wychodzące poza obszar D t.j. zawierające wewnątrz przynajmniej jeden punkt nieregularności.

Promień koła dzielącego te wszystkie koła na dwie klasy i należące do klasy 1-ej oznaczmy przez ρ. Udowodnimy, że ρ będzie promieniem zbieżności szeregu, na który rozwiniemy funkcję $f(z)$, t. zn. że: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ będzie zbieżne w kole o promieniu ρ. Dowód tego twierdzenia opiera się na rozpatrzeniu całki Cauchy'ego.



Niech z oznacza dowolny punkt wewnątrz koła granicznego; bierzemy nowe koło γ, wewnątrz koła granicznego, ale w ten sposób by było z nim współśrodkowe i by punkt z był w niem zawarty. Punkt bieżący na kole γ niech będzie ζ.

Wtedy: (1) $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta$ a także d dowolnego punktu z : (3) $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$, gdzie $|z-z_0|<|\zeta-z_0|$

Rozważmy samo wyrażenie podcałkowe:

(4) $$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-u} \quad \text{gdzie } u=\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$$

a więc $|u|=\frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}<1$; Ale wyrażenie $\frac{1}{1-u}$ jest sumą następującego szeregu: $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+\dots+u^n$

Biorąc to pod uwagę i biorąc pod uwagę wartość u, otrzymamy:

(5) $$\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-u}=\frac{1}{\zeta-z_0}\left\{1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\dots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\dots\right\}$$

Wyrażenie w nawiasie jest to szereg zbieżny jednostajnie bo $|u|<1$, gdyż licznik ułamka u jest zawsze mniejszy od mianownika, a nigdy mu nie równy. Otwierając nawias znajdziemy:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}+\frac{z-z_0}{(\zeta-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(\zeta-z_0)^3}+\dots+\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}+\dots$$

Skąd po pomnożeniu stronami przez $f(\zeta)$ mamy:

(6) $$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)}+(z-z_0)\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}+(z-z_0)^2\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^3}+\dots+(z-z_0)^n\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}+\dots$$

Szereg (6) jest zbieżny jednostajnie gdy ζ znajduje się na kole γ, można go zatem całkować wyraz po wyrazie; całkując otrzymamy:

(7) $$\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta+(z-z_0)\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta+\dots+(z-z_0)^n\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta+\dots$$

Dzieląc ten szereg (7) przez $2\pi i$, otrzymamy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta+\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta+\dots+\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta+\dots$$

Jeśli teraz weźmiemy pod uwagę równości (2) i (3) to możemy pisać:

$$(1)\quad f(z) = a_0 + (z-z_0)a_1 + (z-z_0)^2 a_2 + \dots + (z-z_0)^n a_n ,$$

gdzie współczynnikami $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ są wartości odpowiednich całek:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{dla } n = 0,1,2,\dots$$

Dowiedliśmy zatem, że funkcja regularna $f(z)$ daje się rozwinąć na szereg potęgowy którego współczynniki możemy obliczyć ze wzoru: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, a który jest zbieżny wewnątrz wspomnianego koła granicznego.

Należy się teraz przekonać czy takie rozwinięcie funkcji na szereg jest jednoznaczne. Przypuśćmy że tak nie jest, że oprócz szeregu:

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z) \quad \text{istnieje inny szereg:}$$

$$(8)\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \varphi(z)\ ,$$ przyczem założenie że, $\varphi(z) \equiv f(z)$ wszędzie nie jest konieczne; już przy założeniu, że dla punktów zbioru E o punkcie skupienia w z_0 zachodzi $\varphi(z) \equiv f(z)$, można dowieść identyczności szeregów t.zn. że $a_n = b_n$. Będzie to tem łatwiejsze, gdy założymy właśnie $f(z) \equiv \varphi(z)$ wszędzie. Dla dowodu wybierzmy ze zbioru E ciąg częściowy taki, żeby punkt z_0 był jego granicą t.zn. $z_n \to z_0$; w tym właśnie ciągu zachodzi $\varphi(z) \equiv f(z)$ a więc i w granicy $\varphi(z_0) = f(z_0)$, bo obie funkcje są ciągłe. Podstawiając do naszych szeregów (1) i (8) na miejsce z, z_0 otrzymamy: $f(z_0) = a_0$, $\varphi(z_0) = b_0$ a więc $b_0 = a_0$.
Aby dowieść, że $b_1 = a_1$ rozpatrujemy takie szeregi:

$$(1')\quad f(z) - a_0 = a_1(z_n-z_0) + a_2(z_n-z_0)^2 + \dots + a_n(z_n-z_0)^n + \dots$$

$$(8')\quad \varphi(z) - a_0 = b_1(z_n-z_0) + b_2(z_n-z_0)^2 + \dots + b_n(z_n-z_0)^n + \dots$$

Jeżeli dwie funkcje regularne w obszarze D $f(z)$ i $\varphi(z)$ są równe sobie w otoczeniu punktu skupienia wewnątrz obszaru – to są równe sobie i w całym obszarze D

punkt z_0 jest p. skupienia
stwierdzamy że w kole o promieniu ε $\varphi(z) = f(z)$.
zatem $\varphi(z) = f(z)$ w całym obszarze D

Szeregi (7) i (8) mają sumy równe dla wszystkich z należących do ciągu E, a więc i dla z_n; innemi słowami:

$$a_1(z_n-z_0)+\cdots+a_n(z_n-z_0)^n+\cdots = b_1(z_n-z_0)+\cdots+b_n(z_n-z_0)^n+\cdots$$

Dzieląc te szeregi przez z_n-z_0, które nie równa się zeru, mamy:

$$(9)\quad a_1+a_2(z_n-z_0)+\cdots+a_n(z_n-z_0)^{n-1}+\cdots = b_1+b_2(z_n-z_0)+\cdots+b_n(z_n-z_0)^{n-1}+\cdots$$

Ale gdy $n\to\infty$ to $z_n\to z_0$ a wtedy $\begin{cases} a_1+a_2(z_n-z_0)+\cdots \to a_1 \\ b_1+b_2(z_n-z_0)+\cdots \to b_1 \end{cases}$

Ponieważ obadwa wyrażenia są stale równe sobie i ich granice są równe t. zn. $a_1=b_1$. Dowód równości dalszych współczynników przeprowadzimy metodą analogiczną: skreślmy w równości (9) a_1 i b_1 i skracamy ją przez $z_n-z_0\neq 0$; wtedy otrzymamy:

$$a_2+a_3(z_n-z_0)+\cdots+a_n(z_n-z_0)^{n-2}+\cdots = b_2+b_3(z_n-z_0)+\cdots+b_n(z_n-z_0)^{n-2}+\cdots,$$

gdzie zakładamy, że $z_n\to z_0$ i otrzymujemy $a_2=b_2$, aż wreszcie w ten sam sposób otrzymamy: $a_n=b_n$. c. b. d. o.

Twierdzenie, które udowodniliśmy przed chwilą, można wysłowić tak: Jeśli dwa szeregi są zbieżne w jednem i tem samem kole i jeśli ich sumy są sobie równe dla ciągu punktów, którego punkt skupienia leży wewnątrz koła zbieżności, to te szeregi są identyczne.

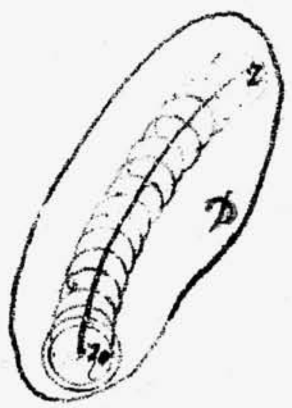
Zbiorem punktów dla których $\varphi(z)=f(z)$ może być otoczenie punktu skupienia z_0, może nim być także zbiór punktów łuku pewnej krzywej, na której leży punkt z_0.

Twierdzenie to jest przejawem pewnej „solidarności" funkcji analitycznych, bo jak widzieliśmy, o ile dwie funkcje są sobie równe w punktach z_n zbioru E (dla nieskończenie wielu n), gdzie $z_n\to z_0$, to te funkcje są sobie równe w całem kole zbieżności szeregów,

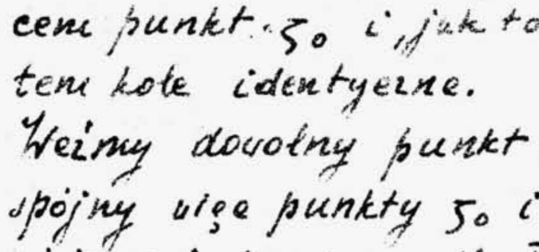
Jeśli 2 funkcje są równe sobie w otoczeniu punktu skupienia - to są równe w całem kole zbieżności

Jeśli są równe sobie w kole zbieżności to są równe w całym obszarze

na które rozwinąć się obie funkcje t. zn.: jeśli $f(z_n)=\varphi(z_n)$, gdzie $z_n \to z_0$, to $f(z)=\varphi(z)$ w całem kole zbieżności.
Łatwo udowodnić, że z powyższego wyniku, że te funkcje są identyczne nietylko w kole zbieżności szeregów, ale nawet w całym obszarze regularności.
W nieszczególnej: załóżmy że 1) funkcje $\varphi(z)$ i $f(z)$ są regularne w obszarze D, spójnym. 2) że dla punktów z zbioru E zachodzi $\varphi(z)=f(z)$ i 3) że ten zbiór E posiada przynajmniej jeden punkt skupienia wewnątrz obszaru D. Niech tym punktem skupienia będzie ζ_0.



Udowodnimy że równość $\varphi(z)=f(z)$ zachodzi w całym obszarze D.
Obie nasze funkcje dają się rozwinąć na szeregi w kole otaczającem punkt ζ_0 i, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia, są w tem kole identyczne.
Weźmy dowolny punkt z, należący do obszaru D; ponieważ D jest spójny więc punkty ζ_0 i z możemy połączyć jedną linją L. Istnieje minimum odległości punktów na linji L od ograniczenia obszaru D, oznaczmy to minimum przez λ. Wtedy koło zatoczone z dowolnego punktu na krzywej L, promieniem ρ, takim że $0<\rho<\lambda$ nie przetnie wcale brzegu obszaru D.
Zakreślmy pierwsze takie koło o promieniu ρ z punktu ζ_0; wewnątrz tego koła obierzmy na linji L punkt α_1 i z niego znów zakreślmy koło o prom. ρ, wewnątrz którego obierzmy na linji L punkt α_2 i zatoczmy z niego nowe koło o prom. ρ. W ten sposób po-



$0<\varsigma<\lambda$

stępujemy dalej. Możemy się tak urządzić, żeby między środkami dwu sąsiednich kół były większe od $\frac{\rho}{2}$ a mniejsze od ρ; wtedy napewno znajdzie się jedno takie koło, wewnątrz którego leżeć będzie punkt z. Oznaczmy bowiem przez l długość linji $\mathcal{L}$ od p z_0 do p. z. Po utworzeniu m-tego koła otrzymamy linję łamaną $z_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, której długość jest conajmniej $\frac{\rho}{2} m$, a ta długość przewyższy przewyższy l, o ile m wybierzemy tak: były: $m > \frac{2l}{\rho}$ (oczywiście m jest l. całkowitą).

Identyczność obu funkcji istnieje napewno wewnątrz 1-go koła, ale ponieważ środek koła drugiego leży w kole pierwszem, więc identyczność zachodzi w otoczeniu środka drugiego koła; to zaś, na mocy poprzedniego twierdzenia, wystarcza by identyczność zachodziła w całem drugiem kole. Ponieważ środek koła 3-go leży w kole drugiem, więc rozumując podobnie, dojdziemy do wniosku że i całem kole 3-iem obydwie funkcje $\varphi(z)$ i $f(z)$ są identyczne. Przechodząc z naszem rozumowaniem od koła 3-go do koła 4-go, od 4-go do 5-go i t.d dojdziemy wreszcie do wniosku, że i w kole ostatniem, a co zatem idzie i punkcie z funkcje są identyczne.

Ale punkt z był to dowolnie obrany punkt obszaru D, twierdzenie więc nasze będzie zachodziło w każdym punkcie obszaru D, (obszar otwarty). c. b. d. d.

Udowodnione powyżej twierdzenie możemy wysłowić tak: Jeżeli mamy dany ciąg punktów: $z_1, z_2, z_3, \dots z_n \to z_0$, takich, że z_0 należy do obszaru D, i jeśli w tych punktach funkcja przyjmuje wartości: $f(z_1) = A_1$, $f(z_2) = A_2, \dots, f(z_n) = A_n$, to warunki te wyznaczają funkcję $f(z)$, jednoznacznie.

<u>O pewnych własnościach funkcji regularnej w obszarze.</u>

Jeżeli wartość funkcji przyrównamy do zera to otrzymamy równanie: $f(z)=0$. Wartości zmiennej z, dla których to równanie jest spełnione nazywamy pierwiastkami równania albo miejscami zerowemi funkcji. Ogólniej możemy użyć równanie: $f(z)=\alpha$; pierwiastki tego równania: $\zeta_1^{(\alpha)}, \zeta_2^{(\alpha)}, \dots, \zeta_n^{(\alpha)}$, nazywamy miejscami „alfowemi" funkcji.*) Oczywiście ten drugi przypadek sprowadza się do poprzedniego przez zastąpienie funkcji $f(z)$ funkcją $f(z)-\alpha$;

Zajmiemy się własnościami pierwiastków równania: $f(z)=\alpha$, w wypadku gdy $f(z)$ jest funkcją regularną w obszarze D. W każdym obszarze domkniętym D_1, częściowym względem D, ilość pierwiastków równania $f(z)=\alpha$ jest skończona o ile $f(z) \neq$ constans.

Dla dowodu załóżmy że obszar D_1 jest skończony; gdyby pierwiastków było nieskończenie wiele, to miałyby punkt skupienia z_0, wtedy ze zbioru nieskończonego punktów alfowych tej funkcji wybralibyśmy ciąg częściowy: $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n \to z_0$; zachodziłoby $f(\zeta_n)=\alpha$.

Weźmy funkcję: $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, gdzie zakładamy $a_0=\alpha$, zaś $a_n=0$ o ile tylko $n\neq 0$. Ta funkcja będzie oczywiście stałą i $\varphi(z)=\alpha$.

Porównajmy funkcje: $f(z)$ i $\varphi(z)$; obie są w obszarze D regularne i mają nieskończenie wiele wspólnych wartości w obszarze D_1, mianowicie dla wszystkich punktów których punkt skupienia z_0 znajduje się wewnątrz obszaru D. Na zasadzie poprzedniego twierdzenia o jednoznaczności wnioskujemy że funkcje są identyczne w D.: $f(\zeta_n)=\alpha$ i $\varphi(\zeta_n)=\alpha$ więc

$$f(z)=\varphi(z)=\alpha,$$ co jest sprzeczne z założeniem.

Udowodnione tu twierdzenie można wysłowić inaczej:

Jeśli jest nieskończenie wiele punktów, w których funkcja niestała przyjmuje wartość α, to punkty skupienia zbioru tych punktów mogą leżeć tylko na brzegu obszaru.

*) $f(z)=z^2+z^4=\alpha$

$z^2+z^4=20$ gdy $\zeta_1^{(\alpha)}=-2$, $\zeta_2^{(\alpha)}=2$

wartości -2, i 2 nazywamy miejscami „alfowemi"

<u>Wniosek</u>: Jeśli $\zeta^{(\alpha)}$ oznacza punkt w którym funkcja $f(z)=\alpha$, jeśli ten punkt znajduje się w obszarze D, to można zakreślić z punktu $\zeta^{(\alpha)}$, jako ze środka, koło o tak małym promieniu ρ, żeby w tem kole poza punktem środkowym $\zeta^{(\alpha)}$ funkcja $f(z)$ nie przyjmowała nigdzie wartości α, t.zn, że jeśli $f(\zeta^{(\alpha)})=\alpha$ to istnieje takie ρ, że o ile $|z-\zeta^{(\alpha)}|<\rho$ i $z\neq\zeta^{(\alpha)}$ to $f(z)\neq\alpha$. Promień ρ istnieje ponieważ punkt $\zeta^{(\alpha)}$ jest punktem odosobnionym zbioru punktów alfowych naszej funkcji na zasadzie udowodnionego przed chwilą twierdzenia.

Jeżeli w równaniu $f(\zeta)=\alpha$ przeniesiemy α na lewą stronę to otrzymamy: $f(z)-\alpha=0$; udowodnimy, że wtedy istnieje taka liczba całkowita n_α, że iloraz $\dfrac{f(z)-\alpha}{(z-\zeta^{(\alpha)})^{n_\alpha}}$ jest funkcją regularną w otoczeniu punktu $\zeta^{(\alpha)}$, pomimo, że staje się dla $z=\zeta^{(\alpha)}$ równym zeru, przytem n_α można zawsze tak wybrać, żeby w rozwinięciu funkcji regularnej na szereg:

$$\frac{f(z)-\alpha}{(z-\zeta^{(\alpha)})^{n_\alpha}}=\beta_0+\beta_1(z-\zeta^{(\alpha)})+\beta_2(z-\zeta^{(\alpha)})^2+\dots+\beta_n(z-\zeta^{(\alpha)})^n+\dots$$

spółczynnik β_0 był różny od zera.

Dla dowodu rozwińmy $f(z)$ na szereg potęgowy zbieżny o ile $|z-\zeta^{(\alpha)}|<r$:

$$f(z)=f(\zeta^{(\alpha)})+\frac{f'(\zeta^{(\alpha)})}{1!}(z-\zeta^{(\alpha)})+\frac{f''(\zeta^{(\alpha)})}{2!}(z-\zeta^{(\alpha)})^2+\dots+\frac{f^{(n)}(\zeta^{(\alpha)})}{n!}(z-\zeta^{(\alpha)})^n+\dots$$

skąd: $$f(z)-\alpha=\frac{f'(\zeta^{(\alpha)})}{1!}(z-\zeta^{(\alpha)})+\frac{f''(\zeta^{(\alpha)})}{2!}(z-\zeta^{(\alpha)})^2+\dots+\frac{f^{(n)}(\zeta^{(\alpha)})}{n!}(z-\zeta^{(\alpha)})^n$$

bo $f(\zeta^{(\alpha)})=\alpha$; nasze wyrażenie dzieli się przez $(z-\zeta^{(\alpha)})$; dzieląc mamy:

$$\frac{f(z)-\alpha}{(z-\zeta^{(\alpha)})}=a_1+a_2(z-\zeta^{(\alpha)})+\dots+a_n(z-\zeta^{(\alpha)})^{n-1}+\dots$$

a_1 a_n

Gdy spółczynnik $a_1\neq 0$ to $n_\alpha=1$ i nasze twierdzenie jest dowiedzione. Może się jednak zdarzyć, że: $a_1=0$, $a_2=0,\dots,$ $a_{n_\alpha-1}=0$ a dopiero $a_{n_\alpha}\neq 0$,

wtedy: $f(z)-\alpha = a_{n_\alpha}(z-\zeta^{(\alpha)})^{n_\alpha} + a_{n_\alpha+1}(z-\zeta^{(\alpha)})^{n_\alpha+1}+\dots$,
wszystkie wyrazy po prawej stronie dzielą się przez $(z-\zeta^{(\alpha)})$ i po podzieleniu mamy: $\frac{f(\zeta^{(\alpha)})-\alpha}{(z-\zeta^{(\alpha)})^{n_\alpha}} = a_{n_\alpha} + a_{n_\alpha+1}(z-\zeta^{(\alpha)})+\dots$

Jest to rozwinięcie zapowiedziane przytem: $\beta_0 = a_{n_\alpha} \neq 0$. Do każdej więc liczby α jest dopasowana pewna liczba całkowita n_α, którą nazywamy krotnością pierwiastka $\zeta^{(\alpha)}$ równania $f(z)-\alpha=0$.
Widzimy, że funkcja regularna jest określona przez nieskończenie wiele wartości, które przybiera w punktach pewnego zbioru E o ile przynajmniej jeden punkt skupienia tego zbioru E znajduje się wewnątrz obszaru regularności funkcji.
Podamy jeszcze jeden zbiór warunków wyznaczających funkcję regularną jednoznacznie:
Funkcja regularna jest jednoznacznie określona przez wartość swoją i swoich wszystkich pochodnych w dowolnym punkcie ζ należącym do obszaru regularności t.zn że jeżeli:
$f(\zeta)=\alpha_0,\ f'(\zeta)=\alpha_1,\ f''(\zeta)=\alpha_2,\ f'''(\zeta)=\alpha_3,\dots,\ f^{(n)}(\zeta)=\alpha_n$, gdzie $\alpha, \alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$ oznaczają liczby dane, to warunki te wyznaczają funkcję jednoznacznie.
Jest to jasne bo wtedy szereg

$$(1)\quad f(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z-\zeta) + \frac{\alpha_2}{2!}(z-\zeta)^2+\dots+\frac{\alpha_n}{n!}(z-\zeta)^n+\dots$$

przedstawia nam żądaną funkcję na podstawie wzoru Taylor'a.
Gdyby istniała inna funkcja mająca te same wartości pochodnych w p. ζ to rozwinięcie jej dałoby ten sam szereg i obie funkcje byłyby identyczne.

Uwaga: Liczby $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ nie mogą być dowolne o ile ζ należy do obszaru regularności, bo szereg (9) musi mieć promień zbieżności różny od zera czyli:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\alpha_n|}{n!}} \text{ musi być różne od nieskończoności.}$$

Ale $\sqrt[n]{\frac{|\alpha_n|}{n!}} = \frac{\sqrt[n]{|\alpha_n|}}{\sqrt[n]{n!}}$ lecz jak wiemy *) $n! = e^{-n}\cdot n^n (2\pi n)^{1/2}(1+\eta)$, gdzie $\eta \to 0$ gdy $n\to\infty$; a zatem $\sqrt[n]{n!} = e^{-1}\cdot n\cdot(1+\eta_1)$ i podstawiając mamy, że:

$$\sqrt[n]{\frac{|\alpha_n|}{n!}} = \frac{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\cdot e}{n\cdot(1+\eta_1)}$$

i ten ciąg musi być ograniczony gdy $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$, czyli musi zachodzić nierówność:

$$\frac{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\cdot e}{n\cdot(1+\eta_1)} < k \quad \text{albo} \quad \sqrt[n]{|\alpha_n|} < k_1\cdot n.$$

Warunek ten jest także dostateczny, bo gdy jest spełniony to jak widać odrazu szereg (9) jest zbieżny w kole o promieniu zbieżności skończonym i określa funkcję regularną.

Rozdział 12. Działania nad szeregami.

Wyobraźmy sobie, że mamy dwa szeregi potęgowe:

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z) \quad ; \quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \varphi(z)$$

i załóżmy, że szeregi te są zbieżne gdy $|z-z_0|<r$, gdzie r oznacza mniejszy z pomiędzy dwu promieni zbieżności obu szeregów.

Niech $f(z)$ i $\varphi(z)$ oznaczają pewne funkcje, które są sumami szeregów (1) i (2). Funkcje $f(z)$ i $\varphi(z)$ są oczywiście regularne w kole:

*) wzór Stirling'a.