$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon\ ,\ \text{a więc}\ \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\to f(z),\ \text{o ile}$$

$\Delta z \to 0$, ale to oznacza przecież że: $\underline{F'(z)=f(z)}$
Widzimy więc że $F(z)$ jest regularna, ponieważ spełnia 3-y warunki Cauchy'go: jest określona, ciągła i ma pochodną I-go rzędu. Wiemy jednak z poprzedniego twierdzenia, że jeżeli funkcja $F(z)$ jest regularna, to ma pochodne wszystkich rzędów, t.j. istnieje pochodna od $F'(z)=f(z)$; jest nią: $F''(z)=f'(z)$; A zatem i funkcja $f(z)$ jest regularna, bo ma pochodną I-go rzędu (pozostałe 2-a warunki regularności były w założeniu. Nasze twierdzenie jest udowodnione.

## Rozdział 10. Ciągi i szeregi funkcji zmiennej zespolonej.

Obszar zbieżności. Przypuśćmy, że dany jest ciąg funkcyj:

$$(1)\quad f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ldots,\ f_n(z)\ldots$$

Ciągowi temu odpowiada szereg:

$$(2)\quad f_1(z)+\{f_2(z)-f_1(z)\}+\{f_3(z)-f_2(z)\}+\cdots+\{f_n(z)-f_{n-1}(z)\}+\cdots$$

Jeżeli dla pewnych wartości $z$, ciąg (1) dąży do pewnej granicy $f(z)$, to i szereg (2) jest zbieżny i sumą jego jest $f(z)$. Możliwe są dwa wypadki:
1) Ciąg (1) może być rozbieżny dla wszystkich wartości $z$ i
2) Ciąg (1) może być zbieżny dla pewnych wartości $z$.
Możemy mówić o zbiorze Z punktów zbieżności ciągu (1). Jeżeli punkt $z$ należy do tego zbioru, to ciąg jest zbieżny; jeżeli nie należy, to ciąg jest rozbieżny.
W przypadkach, którymi będziemy się zajmowali, punkty zbieżności będą tworzyły pewne continua i wtedy będziemy mówili o obszarach zbież-

ności. Jeżeli z należeć będzie do obszaru zbieżności, to dla tej wartości będzie istniała granica ciągu (1), oczywiście zależna od z, i dlatego oznaczymy ją przez $f(z)$. To samo stosuje się oczywiście i do szeregu (2). Jeżeli więc chodzi o zbieżność szeregu czy ciągu, to pierwszą kwestją jest ustalenie obszaru zbieżności, a następnie powstaje pytanie o wartości granicy lub sumy dla wartości $z$, należących do obszaru zbieżności.

Zajmiemy się teraz określeniem obszarów zbieżności dla pewnych klas szeregów i ciągów. Zaczniemy od szeregu potęgowego.

Szereg potęgowy. Ogólny wyraz szeregu potęgowego odnoszącego się do p. $z_0$ jest: $a_n(z-z_0)^n$, a sam szereg oznaczamy przez.

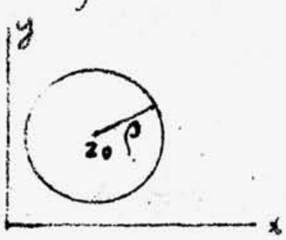
$$(3)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

; gdy $z_0=0$ to szereg potęgowy odniesiony jest do p. początkowego; jego wyrazem jest: $a_n z^n$, a sam szereg ma postać:

$$(4)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Zajmiemy się określeniem obszaru zbieżności szeregu (3). Udowodnimy, że obszarem zbieżności tego szeregu jest pewne koło, t.zn. że istnieje pewna liczba $\rho$, taka że jeśli z punktu $z_0$ zakreślimy koło o promieniu $\rho$, to:

1) Dla każdego punktu wewnątrz koła szereg (3) jest zbieżny.




2) Dla każdego p. zewnątrz koła szereg (3) jest rozbieżny.

3) Jeżeli p. $z$ leży na kole, to może zachodzić w jednych wypadkach zbieżność, w innych rozbieżność, zależnie od samej funkcji i od położenia punktu na kole (patrz przykłady dalej). Obszarem więc zbieżności ma być zbiór wszystkich punktów wewnątrz koła.

Liczba $\rho$ może być równa zeru, wtedy szereg jest zbieżny tylko w p. $z=z_0$; liczba $\rho$ może być równa nieskończoności, wtedy szereg jest zbieżny dla każdej skończonej wartości $z$, czyli na całej płaszczyźnie bez p. w nieskończoności; liczba $\rho$ może mieć takie wartość pośrednią między zerem a nieskończonością.

Jeśli utworzymy ciąg: (5) $\sqrt[2]{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots, \sqrt[n]{|a_n|}, \ldots$, którego wyrazy są dane o ile znamy tylko szereg (3), to jeśli przez $\mu$ oznaczymy limes superjor tego ciągu:

$$\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}, \text{ to wtedy } \rho = \frac{1}{\mu}$$

Twierdzenie to nosi nazwę twierdzenia Cauchy-Hadamard'a, ponieważ było już znane Cauchy'mu, a Hadamard odkrył je powtórnie.
Jakikolwiek byłby ciąg (5) liczba $\mu$ jest zawsze dodatnia i jednoznacznie wyznaczona, przyczem $\mu \neq \infty$, o ile ciąg (5) jest ograniczony (oczywiście od góry).
Rozpatrzymy pokolei 3-y możliwości:

I. $\mu = \infty$ ; $\rho = 0$
II. $\mu = 0$ ; $\rho = \infty$
III – $\rho = \frac{1}{\mu}$, a $\mu \neq 0$ i $\mu \neq \infty$.

I. Niech $\mu = \infty$. Wtedy ciąg (5) nie jest ograniczony, t.zn. do każdej dowolnie wielkiej liczby $M$, można dobrać nieskończenie wiele wyrazów ciągu (5) spełniających nierówność:

$$\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right| > M, \text{ co ma miejsce dla:}$$

$$n = n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p, \ldots,$$

Mamy dowieść, że szereg (3) jest rozbieżny w punkcie $z$, dowolnym, byle $z \neq z_0$;

$M$ wybieramy większe od $\frac{1}{|z-z_0|}$. Niech $n$ będzie jedną z tych wartości, przy których:

$$\sqrt[n]{|a_n|} > M > \frac{1}{|z-z_0|}$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez: $|z-z_0|$ i podnosząc do $n$-tej potęgi otrzymamy:

$$|a_n|\cdot|z-z_0|^n > M^n|z-z_0|^n > 1,$$

lecz $|a_n|\cdot|z-z_0|^n$ jest modułem $n$-tego wyrazu szeregu (3); w naszym więc szeregu jest nieskończenie wiele wyrazów o module większym od jedności; tak więc szereg (3) jest rozbieżny. Wynika stąd że:

gdy $\mu=\infty$ to $\rho=0$.

II. Niech $\mu=0$; wtedy nietylko $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ ale także $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=0$, ponieważ wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie, a więc o ile największy z punktów skupienia jest położony w p. 0, to oczywiście innych p. skupienia ciąg nie posiada, gdyż ujemnych mieć nie może, a ciąg który posiada tylko jeden p. skupienia w p. zero, jest zbieżny, a granicą jego jest zero.

Udowodnimy, że ciąg (3) jest zbieżny dla każdej wartości $z$. Ponieważ dla $z=z_0$, zbieżność jest oczywista, możemy ograniczyć się do wypadku gdy $z\neq z_0$;

Ponieważ $\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$, więc istnieje taki wskaźnik $n_0$, że dla $n>n_0$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon < \frac{k}{|z-z_0|}, \quad \text{gdzie } k<1;$$

Mnożąc obie strony nierówności przez $|z-z_0|$ i podnosząc do $n$-tej potęgi, otrzymamy:

$$|a_n||z-z_0|^n < \varepsilon^n|z-z_0|^n < k^n$$

Ponieważ szereg: $\sum_{n=1}^{\infty} k^n$, ma wyrazy dodatnie większe od odpowiednich modułów wyrazów szeregu (3), (przynajmniej dla $n>n_0$), i ponie-

waż szereg ten jest zbieżny, więc na zasadzie twierdzenia o porównywaniu szeregów (analiza I), szereg (3) jest zbieżny.
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} k^n$ nazywamy szeregiem zwyżnającym dla szeregu (3).
III. $\mu \neq 0$ i $\mu \neq \infty$. Uwaga: rozpatrujemy tak jak w II. punkty $z \neq z_0$.
Z określenia liczby $\mu$, że:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \mu + \varepsilon, \text{ dla każdego } n, \text{ i że:}$$

$\sqrt[n]{|a_n|} > \mu - \varepsilon$, dla nieskończenie wielu $n$. ($n = n_1, n_2, n_3, \dots, n_p, \dots$)
Trzeba okazać że:

1) jeżeli $|z - z_0| < \rho = \frac{1}{\mu}$, to szereg (3) jest zbieżny.
Jeżeli $|z - z_0| < \frac{1}{\mu}$, to $\mu < \frac{1}{|z - z_0|}$; niech $\varepsilon$ oznacza liczbę dodatnią mniejszą od różnicy:

$$\frac{1}{z - z_0} - \mu; \text{ wtedy } \mu + \varepsilon < \frac{1}{|z - z_0|}, \text{ a}$$

$$|z - z_0| < \frac{1}{\mu + \varepsilon}, \text{ a iloczyn: } (\mu + \varepsilon)|z - z_0| = k < 1;$$

Niech $n > n_0$, wtedy: $\sqrt[n]{|a_n|} < \mu + \varepsilon$.
Mnożąc tą nierówność przez: $|z - z_0|$ i podnosząc do $n$-tej potęgi mamy:

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| \cdot |z - z_0|^n < (\mu + \varepsilon)^n |z - z_0|^n = k^n < 1$$

Tak więc każdy wyraz szeregu (3) jest co do modułu mniejszy od odpowiedniego wyrazu szeregu zwyżnającego: $\sum_{n=1}^{\infty} k^n$; ponieważ ten szereg zwyżnający jest zbieżny (bo $k < 1$), więc i szereg (3) jest zbieżny.
2) trzeba jeszcze okazać, że zewnątrz koła zbieżności szereg jest rozbieżny.
Zewnątrz koła zbieżności mamy:

$$|z - z_0| > \rho = \frac{1}{\mu}, \text{ ponieważ stąd wynika,}$$

że $\mu > \frac{1}{|z - z_0|}$, więc istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że:

$$|\mu - \varepsilon| > \frac{1}{|z - z_0|}; \text{ (wystarczy więc:}$$

$0<\varepsilon<\left(\mu-\frac{1}{|z-z_0|}\right)$, wtedy: $|z-z_0|<\frac{1}{\mu-\varepsilon}$;

Do $z$ dobieramy takie wartości wskaźnika $n$, $n=n_1, n_2, n_3, \dots n_p, \dots$, przy których:
$$\sqrt[n]{|a_n|}>\mu-\varepsilon$$
. Możemy obie strony tej nierówności pomnożyć przez $|z-z_0|$, a następnie podnieść do $n$-tej potęgi; otrzymamy dla tych wartości $n$:
$$|a_n|\,|z-z_0|^n>(\mu-\varepsilon)^n|z-z_0|^n>1$$
. Dla nieskończenie wielu wartości $n$, mamy: $|a_n(z-z_0)^n|>1$, co dowodzi rozbieżności szeregu (3).

Jeżeli chodzi o zachowanie się szeregu na samym obwodzie koła zbieżności, to następujące przykłady wykażą, że różne możliwości mogą tu zachodzić:

Przykłady: (+)!!

1) Niech $z_0=0$; $a_n=\frac{1}{n^2}$; mamy szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$; promień zbieżności tego szeregu jest $\rho=1$, ponieważ:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^2}=\frac{1}{1^2}=1;$$
(to, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, wynika stąd że $\lg\sqrt[n]{n}=\frac{\lg n}{n}\to 0$ gdy $n\to\infty$)

Nasz szereg jest więc oczywiście zbieżny wewnątrz koła o promieniu $\rho=1$; lecz nawet na obwodzie koła szereg ten jest zbieżny, gdyż na obwodzie: $|z|=1$, a więc $\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\frac{|z^n|}{n^2}=\frac{1}{n^2}$, a jak wiemy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, co dowodzi, że nasz szereg jest zbieżny jednostajnie na kole zbieżności.

2) $1+z+z^2+z^3+\dots+z^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{|1-z|}$;

W szeregu tym $a_n=1$, więc $\sqrt[n]{|a_n|}=1$ i $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=1$, skąd $\mu=1$ i $\rho=1$;

Znaleźć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1} n^{\lg n}z^n = 1^{\lg 1}z^1+2^{\lg 2}z^2+3^{\lg 3}z^3+\dots$ $\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{\lg n}}\to 1$

$\rho=\frac{1}{\mu}=1$

Szereg ten jest, jak stąd widać, zbieżny wewnątrz koła o promieniu $\rho=1$, ale na obwodzie koła jest on rozbieżny ponieważ wtedy zachodzi:

$$|z_n|=1.$$

3). Mamy szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$;

W szeregu tym $a_n=\frac{1}{n}$, skąd $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=1$, szereg jest więc zbieżny w kole o promieniu $\rho=1$; na samym kole istnieją punkty gdzie szereg jest zbieżny i istnieją punkty, gdzie szereg jest rozbieżny. W rzeczy samej: dla $z=1$ mamy szereg harmoniczny:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots,$$ który jest rozbieżny,

a dla $z=-1$, mamy szereg przemienny:

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots+\dots,$$ który jest zbieżny.

Obydwa punkty $+1$ i $-1$ leżą na obwodzie koła zbieżności.

Sprawa zbieżności szeregów potęgowych i obszaru zbieżności tych szeregów została przez nas rozwiązana.

Wróćmy do szeregu:

$$(1)\quad u_1(z)+u_2(z)+\dots+u_n(z)+\dots$$

gdzie $u_n=f_n(z)-f_{n-1}(z)$; Jeśli dany jest kształt ogólny wyrazu: $u_n(z)$ to tem samem określony jest obszar zbieżności. W niektórych wypadkach możemy określić ten obszar przez sprowadzenie do szeregu potęgowego. Ma to miejsce w tym wypadku gdy $u_n(z)$ jest kształtu:

$$u_n(z)=a_n[\varphi(z)]^n,$$ gdzie $a_n$ jest to pewien spółczynnik liczbowy, a $\varphi(z)$ oznacza funkcję regularną.

Zróbmy zamianę zmiennych: $\varphi(z)=\zeta$, a szereg nasz zamieni się na szereg potęgowy:

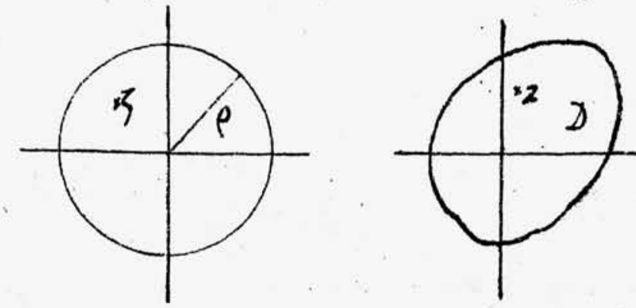
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^n$$

Znaleźć promień zbieżności szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^3}+\dots$ $\quad\mu=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0\quad \rho=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{0}=\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!z^n}{n^n}=\frac{1!\,1}{1}+\frac{2!\,z^2}{2^2}+\frac{3!\,z^3}{3^3}+\dots$ $\quad\mu=\lim\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\to\infty$ bo $\sqrt[n]{n!}$ prędzej dąży do $\infty$ niż $n$

$\rho=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\infty}=0$

Niech $\rho$ oznacza $\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, wtedy ten szereg potęgowy jest zbieżny wewnątrz koła o promieniu $\rho$: $(|\zeta|<\rho)$, a wracając do szeregu pierwotnego widzimy że: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n[\varphi(z)]^n$, jest zbieżny gdy $|\varphi(z)|<\rho$. Oznaczmy przez $D$ obszar na płaszczyźnie zmiennej zespolonej $z$, który jest odwzorowaniem obszaru: $|\zeta|<\rho$ (koło o promieniu $\rho$). Gdy $z$ znajduje się w obszarze $D$, to odpowiadające mu $\zeta=\varphi(z)$ znajduje się wewnątrz koła; $|\varphi(z)|<\rho$, wskutek czego dany szereg jest zbieżny. Gdy punkt $z$, znajduje się poza obszarem $D$, odpowiadający mu punkt $\zeta$ znajduje się poza kołem zbieżności i szereg jest rozbieżny.




Przykład:

Niech $\varphi(z)=\frac{1}{z}$; mamy zatem szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$. Tu obszarem zbieżności $D$ jest obszar rozciągający się na płaszczyźnie zewnątrz koła o promieniu $\frac{1}{\rho}$ t.zn. obszar: $|z|>\frac{1}{\rho}$;

Zadania:

1) Udowodnić, że obszarem zbieżności $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ jest pierścień utworzony przez dwa koła współśrodkowe, albo że szereg ten jest rozbieżny.

2) Udowodnić, że obszarem zbieżności szeregu: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z+\frac{1}{z}\right)^n$ jest pierścień, utworzony przez dwie elipsy współogniskowe.

Zajmijmy się zagadnieniem wyznaczenia obszaru zbieżności jednostajnej szeregu potęgowego. Niech $\varepsilon>0$ oznacza dowolnie małą liczbę i niech $\rho_1=\rho-\varepsilon$. Udowodnijmy, że w kole współśrodkowem z kołem zbieżności, ale o promieniu $\rho_1 < \rho$ szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny.

Porównajmy w tym celu dwa szeregi; znany nam szereg:

$$(3)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{i szereg} \ (7)\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho_1^n;$$

$$\text{i niech } |z-z_0| < \rho_1$$

wtedy: $|a_n(z-z_0)^n| = |a_n| \cdot |z-z_0|^n < |a_n| \rho_1^n$

Szereg (7) jest szeregiem liczbowym, zbieżnym ponieważ szereg (3) był zbieżny w punkcie: $z = z_0 + \rho_1$, bo punkt ten leży wewnątrz koła o promieniu $\rho$, t. zn. koła zbieżności.

Jeśli wrócimy do dowodu zbieżności szeregu potęgowego wewnątrz koła zbieżności, to zobaczymy, że udowodniliśmy tam nietylko zbieżność, ale nawet zbieżność bezwzględną, to jest sumy modułów. Szereg więc (3) jest w kole o promieniu $\rho$ bezwzględnie zbieżny, t. zn., że i w punkcie: $z = z_0 + \rho_1$ jest on bezwzględnie zbieżny czyli, że szereg (7) jest zbieżny.

Wyrazy szeregu (7) są dodatnie i odpowiednio większe lub równe wyrazom szeregu (3), więc szereg (7) jest zwyżającym dla szeregu (3), a ponieważ ten szereg (7) jest szeregiem liczbowym, więc stąd wynika zbieżność jednostajna szeregu (3).

(Jeżeli przez $R_n(z)$ oznaczymy resztę szeregu danego, a przez $R'_n$ resztę szeregu zwyżającego, to do każdego dowolnie małego $\varepsilon > 0$ można wyznaczyć takie $n_0$, że jeśli $n > n_0$, to $R'_n < \varepsilon$, jakiekolwiek byłoby $z$ wewnątrz obszaru.

$S(z) = S_n(z) + R_n(z)$ $\quad$ $S(z) - S_n \leq R_n(z)$

$S'(z) = S'_n(z) + R'_n(z)$ $\quad$ $|S_n - S_n| < R'_n(z)$

Ale ponieważ $R'_n > |R_n(z)|$, więc i $|R_n(z)| < \varepsilon$, co dowodzi, że szereg (3) jest jednostajnie zbieżny, gdyż $n_0$ zależy tylko od $\varepsilon$ a nie od $z$).

Tak więc nasze twierdzenie o jednostajnej zbieżności szeregu jest dowiedzione.

aby suma szeregu potęgowego była funkcją ciągłą, trzeba żeby szereg potęgowy był jednostajnie zbieżny

Szereg jest jednostajnie zbieżny o ile dla $\varepsilon$ możemy dobrać takie $N_\varepsilon$ że gdy $n > N_\varepsilon$ zachodzi $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$

$S(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ $\quad$ $S_n(z) = a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n$

Uwaga: Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu:

$$(1)\quad u_1(z)+u_2(z)+\cdots+u_n(z)+\cdots$$

są ciągłe w pewnym obszarze i jeżeli szereg (1) jest jednostajnie zbieżny w tym obszarze, to i suma tego szeregu jest także funkcją ciągłą. Dowód podobny jak dla zmiennej rzeczywistej.

Ponieważ wszystkie wyrazy szeregu potęgowego są funkcjami ciągłemi zmiennej $z$, więc i suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą w obszarze zbieżności jednostajnej, czyli w kole o promieniu $\rho-\varepsilon$, współśrodkowem z kołem zbieżności o promieniu $\rho$. Stąd wynika że suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą w każdym punkcie $z$ wewnątrz koła zbieżności, bo zawsze można $\varepsilon$ dobrać tak by koło o promieniu $\rho-\varepsilon$ zawierało ten p. $z$. Ciągłość sumy szeregu potęgowego wewnątrz koła zbieżności może być rozciągnięta i na te punkty okręgu (brzegu), w których szereg jest zbieżny. Jest to t. zw. twierdzenie Abel'a.

Dla funkcji zmiennej rzeczywistej twierdzenie to stosuje się w wypadku, gdy zbieżność zachodzi w punkcie końcowym promienia zbieżności na osi liczb rzeczywistych. Dla szeregu funkcyj zmiennej zespolonej wystarczy wykonać obrót, czyli podstawić $z'=z\cdot e^{i\varphi}$, by, przy odpowiednio dobranym kącie $\varphi$, sprowadzić wypadek gdy zbieżność zachodzi w dowolnym p. na okręgu do wypadku gdy zachodzi na osi liczb rzeczywistych. Dowód ten stosuje się gdy przy przejściu do punktu granicznego na okręgu koła zbieżności zmienna $z$ zbliża się do niego po promieniu. Można udowodnić słuszność tego twierdzenia i przy zbliżaniu się w innych kierunkach.

## Całkowanie szeregów. (:)

Mamy dany szereg: $(1)\quad u_1(z)+u_2(z)+u_3(z)+\cdots+u_n(z)+\cdots=f(z).$

Niech $D$ oznacza obszar zbieżności tego szeregu, a $L$ pewną drogę wew-

$S(z_0+h)-S(z_0) = S(z_0+h)-S_n(z_0+h)+S_n(z_0+h)-S(z_0)$

$|S_n(z_0+h)-S(z_0)|<\varepsilon$

$|S(z_0+h)-S(z_0)| \le \underbrace{|S(z_0+h)-S_n(z_0+h)|}_{<\varepsilon} + |S_n(z_0+h)-S_n(z_0)|$

$|S_n(z_0+h)-S(z_0)| + |S(z_0)-S_n(z_0)|$ $<\varepsilon$


Zakładamy, że na linji $\mathcal{L}$ szereg (1) jest zbieżny jednostajnie. Udowodnimy, że w tym wypadku całka sumy szeregu wzdłuż drogi $\mathcal{L}$ równa się sumie całek poszczególnych wyrazów szeregu.

W rzeczy samej: $f(z) = S_n(z) + R_n(z)$,

gdzie $S_n(z)$ oznacza sumę częściową, a $R_n(z)$ resztę szeregu (1). Całkując mamy:

$$ {}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = {}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} S_n(z)\,dz + {}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} R_n(z)\,dz $$

Ale ${}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} S_n(z)\,dz = \sum_{p=1}^{n} {}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} u_p(z)\,dz$, bo w $S_n$ liczba wyrazów jest skończona. Do danej liczby $\varepsilon > 0$ można dopasować takie $n_0$, że gdy $n > n_0$, to

$$ |R_n(z)| < \varepsilon $$

niezależnie od położenia punktu $z$ na drodze $\mathcal{L}$; wtedy:

$$ \left| {}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} R_n(z)\,dz \right| < \varepsilon l $$

, gdzie $l$ jest to długość drogi $\mathcal{L}$.

Widzimy więc że:

$$ \left| {}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz - \sum_{p=1}^{n} {}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} u_p(z)\,dz \right| < \varepsilon l. $$

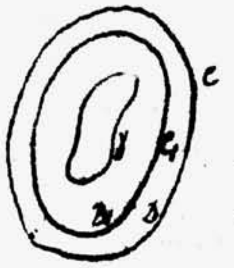
Niech teraz $n \to \infty$, a $\varepsilon \to 0$; w takim razie:

$$ \sum_{p=1}^{n} {}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} u_p(z)\,dz \to {}^{\mathcal{L}}\!\!\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz $$

c. b. d. o.

## Szeregi funkcji regularnych.

Mamy szereg: (1) $u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \dots + u_n(z) + \dots = f(z)$, zbieżny w obszarze $D$. Tworzymy obszar jednospójny $D_1$, składający się jedynie z punktów wewnętrznych obszaru $D$; tak więc krzywa $C$, tworząca brzeg obszaru $D_1$ należy do obszaru $D_1$; załóżmy że: 1) w każdym punkcie obszaru $D$ każdy wyraz szeregu (1) jest zbieżny i 2) szereg (1) jest w obszarze $D_1$ jednostajnie zbieżny.




Przy tych założeniach udowodnimy że suma szeregu (1) jest regularna w obszarze $D_1$;
Niech $\gamma$ oznacza dowolną krzywą zamkniętą znajdującą się wewnątrz obszaru $D_1$; szereg (1) jest jednostajnie zbieżny na tej krzywej $\gamma$, więc na mocy poprzedniego twierdzenia mamy:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u_1(z)dz + \int_\gamma u_2(z)dz + \cdots + \int_\gamma u_n(z)dz + \cdots\cdots$$

na

Ale każda z całek po prawej stronie tej równości, jako całka z funkcji regularnej równa się zeru, a więc:

(bo każda z funkcyj jest ciągła jednostajnie ograniczona na podstawie tw. Morera)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

co dowodzi, że $f(z)$ jest funkcją regularną w obszarze $D_1$, ponieważ $f(z)$ jest funkcją ciągłą a $\gamma$ krzywą dowolną, zamkniętą w tym obszarze.
Ponieważ funkcja $f(z)$ jest regularna w obszarze $D_1$, więc posiada pochodne wszystkich rzędów.
Interesuje nas zagadnienie, czy pochodna sumy równa się sumie pochodnych. Udowodnimy, że tak jest istotnie w obszarze $D_1$, t.zn. że:

$$(2) \quad f'(z) = u_1'(z) + u_2'(z) + u_3'(z) + \cdots + u_n'(z) + \cdots$$

i że wogóle:

$$(3) \quad f^{(p)}(z) = u_1^{(p)}(z) + u_2^{(p)}(z) + u_3^{(p)}(z) + \cdots + u_n^{(p)}(z) + \cdots$$

Niech $z$ oznacza punkt wewnątrz obszaru $D_1$; otaczamy punkt $z$ kołem $\gamma_r$ takiem, żeby się całkowicie znajdowało wewnątrz $D_1$ i przez $\zeta$ oznaczamy punkt bieżący na $\gamma$; ponieważ $f(z)$ jest funkcja regularną więc na mocy twierdzenia o całce Cauchy'go zachodzi równość:

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad .$$

skąd wynika że: $\quad f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta$

Załóżmy że $f(\zeta) = u_1(\zeta) + u_2(\zeta) + \cdots + u_n(\zeta) + \cdots$ ; szereg ten jest jednostajnie zbieżny na krzywej $\gamma$ i posiadać będzie tę samą własność zbieżności jednostajnej, jeżeli wszystkie jego wyrazy podzielimy przez $(\zeta-z)^{p+1}$; Ponieważ reszta tak otrzymanego szeregu:

$$(5) \quad \frac{u_1(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} + \frac{u_2(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} + \frac{u_3(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} + \cdots\cdots + \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} + \cdots$$

jest $R_n^{\prime}(\zeta) = \frac{R_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}$ , gdzie $R_n(\zeta)$ oznacza resztę szeregu (1), więc

$$|R'_n(\zeta)| < \left|\frac{R_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{\rho^{n+1}}$$

, gdzie $\rho$ jest wielkością stałą (promień koła $\gamma$), a $\varepsilon$ liczba dodatnia dowolnie mała, przyczem nierówność ta zachodzi skoro tylko $n > n_0$, gdzie $n_0$ zależy od $\varepsilon$, a nie zależy od $\zeta$; ponieważ, jak stąd widać szereg (5) jest zbieżny więc:

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta = \int_\gamma \frac{u_1(z)d\zeta}{(\zeta-z)^{p+1}} + \int_\gamma \frac{u_2(z)d\zeta}{(\zeta-z)^{p+1}} + \cdots + \int_\gamma \frac{u_n(z)d\zeta}{(\zeta-z)^{p+1}}$$

Skąd, ponieważ: $\frac{p!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta = f^{(p)}(\zeta)$ i ponieważ $\frac{p!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta$.

więc: $\quad (3) \quad f^{(p)}(z) = u_1^{(p)}(z) + u_2^{(p)}(z) + \cdots + u_n^{(p)}(z) + \cdots\cdots$ c. b. d. o.

Szereg (3) jest zbieżny jednostajnie w obszarze $D_1$, a równość (3) zachodzi dla każdego punktu $z$ leżącego wewnątrz obszaru $D$, a to dlatego że obszar $D_1$ można zawsze wybrać tak, by nasz punkt $z$ był zawarty w $D_1$.

**Pochodne sumy szeregu potęgowego.** Tylko co udowodnione twierdzenie możemy zastosować do szeregów potęgowych. Niech więc będzie dane:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

wtedy:

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

$$f''(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$$

i wogóle:

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)a_n(z-z_0)^{n-p}$$

Zastąpmy w ostatniej równości $n-p$ przez $n$, a $n$ przez $n+p$, to otrzymamy:

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}(z-z_0)^n$$

Szeregi te są zbieżne dla każdego punktu wewnątrz koła o promieniu $\rho$ (obszar $D$), a jednostajnie zbieżne wewnątrz koła o prom. $\rho-\varepsilon$ (obszar $D_1$). Jeżeli we wzorach poprzednich założymy $z=z_0$, to wszystkie wyrazy szeregów prócz pierwszego będą równe zeru i otrzymamy:

$$f^{(p)}(z_0)=p!\,a_p \quad \text{albo} \quad \underline{a_p=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}}$$

Wzór ten wyraża związek między spółczynnikami szeregu potęgowego a pochodnemi funkcji, która jest sumą tego szeregu w kole zbieżności. Wzór ten formalnie jest identyczny ze wzorem Taylora, z tą różnicą, że tu zmienna przyjmuje wartości zespolone; będziemy więc ten wzór nadal nazywali wzorem Taylor'a.

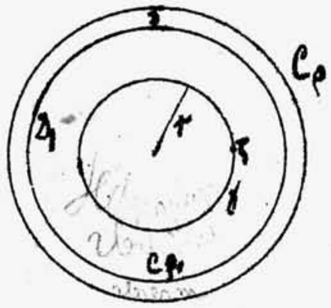
Jeśli teraz do naszego wzoru na $a_p$, podstawimy zamiast $f^{(p)}(z)$,

Przykład: rozwinąć na szereg potęgowy $f(z)=\log z$ w otoczeniu punktu $z=1$

$f'(z)=\frac{1}{z}$ $\quad f^{(2)}(z)=-\frac{1}{z^2}$ $\quad f^{(3)}(z)=\frac{2}{z^3}$ $\quad f^{(4)}(z)=-\frac{2\cdot 3}{z^4}$ $\quad f^{(n)}\ (-1)^{n-1}\frac{(n-1)}{z^n}$

$a_0=f(1)=0$ $\quad a_1=1$ $\quad a_2=-\frac{1}{2}$ $\quad a_3=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}=a_3=\frac{1}{3}$ $\quad \lg z=(z-1)-\frac{1}{2}(z-1)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$

wartość ze wzoru: $f^{(p)}(z_0) = \frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\,d\zeta$




to otrzymamy, identyfikując n i p:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

Z tego ostatniego wzoru łatwo jest otrzymać nierówność ograniczającą wzrost modułu $a_n$ w zależności od wskaźnika $n$, a mianowicie: niech $M$ oznacza liczbę taką że w obszarze $D$ zachodzi: $|f(z)| < M$; taka liczba $M$ oczywiście zawsze istnieje. Niech promień koła $\gamma$ będzie $r$ taki że: $0 < r \le \rho_1 < \rho$; stosując nierówność:

$$|a_n| = \frac{1}{|2\pi i|}\cdot\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\right| < \frac{2\pi r}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}$$ *) $|\zeta - z| = r$ otrzymamy:

$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi i$

gdzie nierówność Cauchy dla spółczynników szeregu potęgowego

$$|a_n| < \frac{M}{r^n} \quad \text{gdy} \quad 0 < r \le \rho_1$$

## Rozdział 11. Związek między regularnością funkcji, a rozwijalnością jej na szereg potęgowy.

Z poprzednich twierdzeń wynika, że suma szeregu potęgowego wewnątrz koła zbieżności jest funkcją regularną.
Ale i odwrotnie: można udowodnić, że każda funkcja regularna jest sumą odpowiedniego szeregu potęgowego kształtu:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, przyczem szereg ten jest

*) $\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z)^n}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\,r^n}\,d\zeta$

$|\zeta - z| = r$ $\quad = \frac{1}{r^n}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ $\quad \int \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = 2\pi i f(z) < 2\pi i M$

patrz str. 65