w każdej całce krzywolinjowej, dowolną krzywą, łączącą p. x_0y_0 z p. x, y, i znajdującą się całkowicie w tym obszarze płaszczyzny x, y, wkt. funkcja u jest f. harmoniczną.

Dowiedzieliśmy się, że o ile warunki Cauchy'go są spełnione, to pochodna jest wyznaczona jednoznacznie, bo obie wartości na $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z}$, które znaleźliśmy poprzednio są równe między sobą i dają wartość pochodnej:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$f'(z)$ jest tu symbolem pochodnej. Stąd kwadrat modułu pochodnej czyli:

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

Jak zobaczymy moduł pochodnej i jej argument mają prostą interpretację geometryczną.

Rozdział 3. Interpretacja geometryczna i odwzorowania podobne.

Niech $Z = f(z)$, gdzie $f(z) = u + iv$; zakładamy że u i v spełniają warunki Cauchy'go.

Wzór $Z = f(z)$ podporządkowuje sobie punkty dwu obszarów: każdemu p. $m(x,y)$ na płaszczyźnie zmiennych x, y, odpowiada p. $M(u,v)$ na płaszcz. zmiennych u, v, czyli płaszcz. zmiennej zespolonej Z.

Zbiorowi punktów m tworzących linję na płaszcz. zmiennej zespolonej z, odpowiada zbiór punktów M, tworzących linję na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Z.

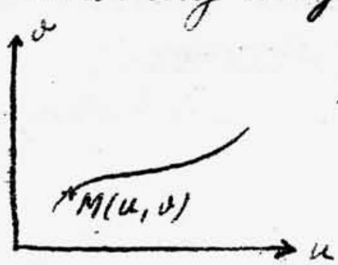
Jeżeli zbiór p. m wypełnia pewien obszar d, to odpowiadający mu zbiór punktów M wypełnia obszar D, w płaszczyźnie zmiennej Z, w ten sposób, że punktom wewnętrznym obszaru d, odpowiadają punkty wewnętrzne obszaru D, punktom brzegowym — brzegowe. Jeżeli p. m opisuje krzywą γ, to punkt M — krzywą Γ; każdemu p. m odpowiada jeden i tylko jeden p. M. Niech krzywe γ i Γ będą brzegami obszarów d i D; przy odpowiedniej kierunków γ i Γ, zwrot może być zgodny na γ i Γ, albo przeciwny; w pierwszym wyp. mówimy że odwzorowanie jest proste, w drugim —, że odwrotne.

Przejście od jakiejś figury na jednej płaszczyźnie do odpowiadającej jej figury na drugiej nazywa się odwzorowaniem.

Jeżeli funkcja $f(z)$ spełnia warunki Cauchy'go, to określone w ten sposób odwzorowania stanowią pewną klasę odwzorowań, posiadającą wiele ciekawych własności.

Zajmiemy się teraz własnościami tej klasy odwzorowań.

Weźmy pod uwagę dwa odpowiadające sobie łuki: s i S, w płaszczyznach z i Z; obliczmy długość tych łuków:



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dS^2 = du^2 + dv^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx^2 + 2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right]dx\,dy + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dy^2 =$$

$$= E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$$

gdzie:

$$E = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2;\quad F = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y};\quad G = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

Uwzględniając, że funkcje spełniają warunek Cauchy'go mamy:

$$E = G = |f'(z)|,\quad \text{zaś } F = 0,\quad \text{bo}$$

bo jeśli równania Cauchy'go przemnożymy stronami, to otrzymamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

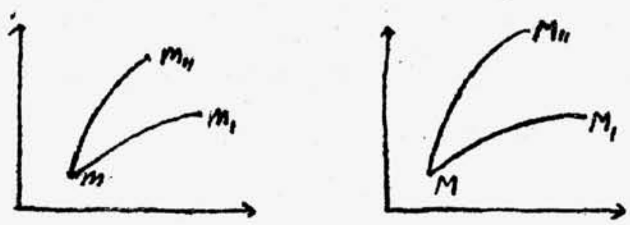
A więc: $dS^2 = |f'(z)|^2\{dx^2+dy^2\} = |f'(z)|^2 ds^2$; czyli: $\underline{\frac{dS}{ds} = |f'(z)|}$

Stosunek $\frac{dS}{ds} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta s}$ nazywamy rozszerzeniem linjowem w p. z, przy odwzorowaniu. Okazuje się, że to rozszerzenie jest równe modułowi pochodnej funkcji $f(z)$, a więc nie zależy od natury i kierunku łuków, a tylko od położenia.

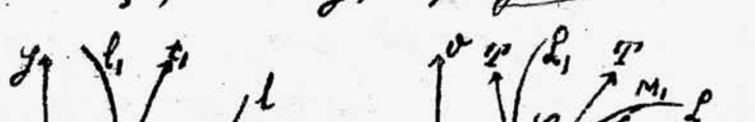
Przypuśćmy np. że przez punkty m i M przechodzą po dwie odpowiadające sobie krzywe:

$$\lim_{m_1\to m}\frac{MM_1}{mm_1} = |f'(z)| \quad \text{tak samo:}$$

$$\lim_{m_{11}\to m}\frac{MM_{11}}{mm_{11}} = |f'(z)|;$$



Pękowi łuków $mm_1, mm_{11}, \ldots$, odpowiada pęk łuków $MM_1, MM_{11}, \ldots$, przytem stosunek odpowiadających sobie długości łuków jest ten sam. Teraz okażemy, że jeśli dwu krzywym l i l_1, odpowiadają w odwzorowaniu krzywe L i L_1, to kąty między krzywemi l i l_1, (t.zn. kąty między ich stycznemi) są równe kątom między L i L_1; krócej mówiąc, okażemy, że przy <u>odwzorowaniu kąty są zachowane.</u>



Punktowi m odpow. z, m_1 — $z+\Delta z$;
" M " Z, M_1 — $Z+\Delta Z$;
wobec tego $mm_1 = \Delta z$, a $MM_1 = \Delta Z$;
Zakładamy też, że nasze odwzorowanie należy do klasy odwzorowań Cauchy'go.

Więc: $\lim_{m' \to m} \frac{\Delta Z}{\Delta z} = f'(z) = |f'(z)|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, gdzie α oznacza argument kątowy $f'(z)$;

Jeżeli mamy ciąg punktów $m', m'', \ldots$, dążący do p. m, to moduły tych liczb dążą do modułu m, argumenty także do argumentu m; innemi słowami gdy liczba zespolona dąży do granicy, to moduł dąży do modułu, argument do argumentu granicy. Argument kątowy $\lim \frac{\Delta Z}{\Delta z}$ = kątowi między stycznemi MT i mt = = argumentowi kątowemu $f'(z) = \alpha$ (bo przy dzieleniu argument dzielnika odejmujemy od argumentu dzielnej).

Jeśli weźmiemy teraz krzywe l_1 i L_1, przecinające się z l i L w p. m i M, to także kąt między MT_1 i mt_1 jest równy α, a to dlatego, że pochodna w punkcie m ma wartość stałą więc jej moduł i argument nie zmieniają wartości.

Wobec tego możemy pisać następujące równości kątów:

$$\gamma - \beta = \alpha \; ; \text{ tak samo } \gamma + \varphi - \beta - \theta = \alpha \quad \text{skąd}$$

$$\gamma + \varphi - \beta - \theta = \gamma - \beta \quad \text{a więc} \quad \varphi - \theta = 0 \quad \text{i ostatecznie:}$$

$$\underline{\varphi = \theta}$$

φ i θ były to kąty między odpowiedniemi stycznemi. Widzimy więc, że nasze odwzorowania zachowują kąty między odpowiadającemi sobie krzywemi.

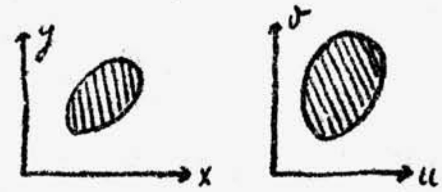
Odwzorowania więc otrzymane zapomocą podporządkowania punktom x, y płaszczyzny z, punktów u, v płaszczyzny Z, gdzie u i v są funkcjami spełniającemi równanie Cauchy'go są odwzorowaniami zachowującemi kąty. Tworzą one klasę t. zw. <u>odwzorowań podobnych</u>. Odwzorowania te zachowują w nieskończenie małem kształt, podobnie jak to ma miejsce we zwykłem podo-

bieństwie geometrji element., z tą różnicą, że podobieństwo g. e. zachowuje kształt figur niezależnie od ich wielkości, gdy tymczasem dla odwzorowania podobnego ma to miejsce tylko w przybliżeniu. i jest tem dokładniejsze, im wymiary figur są mniejsze.
W rzeczy samej trójkątowi a, b, c w płaszczyźnie z będzie odpowiadała figura A, B, C w płaszczyźnie Z, przyczem linje AB, BC, i CA łączące wierzchołki nie będą prostemi, lecz łukami krzywemi, kąty jednak A, B, C będą odpowiednio równe kątom a, b, c;
Jeżeli zaś wymiary trójkąta a, b, c maleją nieograniczenie, to łuki AB, BC i CA w „trójkącie" ABC zbliżają się do odpowiednich cięciw tak, że w granicy mamy jak gdyby zwykłe podobieństwo trójkątów.
Widzieliśmy poprzednio, że dla każdej pary odpowiadających sobie punktów mamy pewien stały spółczynnik rozszerzenia linjowego, t. zn., że gdy p. m przeistacza się w M to stosunek dwu łuków, odpowiadających sobie w płaszcz. z i Z równa się odpowiednio w otoczeniu p. m i M wartości modułu pochodnej: $|f'(z)| + \varepsilon$; ze zmianą pary p. m i M na dwa inne m_1 i M_1 spółczynnik ten zmienia się bo wartość $|f'(z)|$ zależy od pochodnej, a wartość tej od puntu (liczby) z;
Wracając do trójkąta a, b, c i do odpow. mu „trójk." A, B, C, wiemy, że kąty są odwzorowane, ale spółczynnik rozszerzenia linjowego inny jest w p. a niż w p. b i inny niż w p. c, i dlatego nasze odwzorow. nie jest podobieństwem. Jest więc analogja między odwzorowaniem podobnem a podobieństwem figur: i tu i tam

kąty są zachowane tylko w pierwszym wypadku współczynnik proporcjonalności ma wartość lokalną (w każdym p. inną), a w podobieństwie sp-k ten jest stały dla całej płaszczyzny.

Możemy teraz przejść do odpowiedniości między obszarami i do współczynnika rozszerzenia powierzchniowego: jeżeli elementowi powierzchni $\Delta\omega$ na płaszczyźnie x, y odpowiada element powierzchni $\Delta\omega'$ to:

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \lim \frac{\Delta\omega'}{\Delta\omega}$$



nazywa się współczynnikiem rozszerzenia powierzchniowego przy odwzorowaniu.

Z poprzedniego możemy się domyślać że wartość jego jest równa kwadratowi sp-ka rozszerzalności linjowej, bo w nieskończenie małem podobieństwo jest zachowane, a pola figur podobnych mają się do siebie, jak kwadraty odpowiednich boków. Łatwo udowodnić to w sposób ścisły, a mianowicie:

$$\frac{d\omega}{d\omega'} = \frac{D(u\,v)}{D(x\,y)}$$

patrz I trymestr.

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 1) \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}$$

bo na mocy wzorów Cauchy możemy podstawić albo tylko pochodne f. u, albo tylko pochodne f. v; wobec tego otrzymamy:

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = {}_{1)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \text{ lub } {}_{2)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

Dzięki tym własnościom odwzorowania podobnego możemy z łatwością otrzymywać rodziny krzywych ortogonalnych (dwie rodziny krzywych są ortogonalnemi, jeżeli każda krzywa 1-ej rodziny przecina pod kątem prostym każdą krzywą drugiej rodziny).

$$\frac{dS}{ds} = |f'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = |f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Równoległym do osi x-ów i równoległym do osi y-ów, które na płaszczyźnie x,y tworzą rodzinę ortogonalną, odpowiadają na płaszcz. u,v dwie rodziny krzywych, które muszą być ortogonalnemi.
Podobnie rodzina kół o środku w p. O i pęk prostych wychodzących z p. O tworzą także układ ortogonalny — stąd odpowiadające im krzywe na płaszcz. u,v będą tworzyły układ ortogonalny.
Odwrotnie możnaby było na płaszczyźnie u,v wziąć dwie rodziny prostych równoległych do osi albo zbiór kół i promieni, a na płaszcz. x,y odpowiadałyby im znów układy ortogonalne t.zn., że jeśli:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

to krzywe: $u(x,y) = c$ i $v(x,y) = c$, albo też krzywe:
$u^2(x,y) + v^2(x,y) = c$ i $\dfrac{u(x,y)}{v(x,y)} = c$, tworzą na płaszcz. x,y siatkę ortogonalną.
W tych przykładach „c" jest stałą, która przyjmuje dowolne wartości.
Widzimy więc, jak ciekawą jest klasa funkcji spełniających warunki Cauchy'go. Powstaje pytanie, czy ta klasa nie jest pusta i czy funkcje utworzone w sposób prosty (przy pomocy skończonej liczby działań algebraicznych) należą do tej klasy. Otóż łatwo widzieć, że tak jest istotnie.
Wychodząc ze zmiennej $z = x + iy$ i z pewnej liczby danych współczynników stałych: $a_0, a_1, a_2, \dots$, które mogą także być l. zespolonemi możemy tworzyć wielomiany, a potem i funkcje wymierne względem z (jako ilorazy dwu takich wielomianów), które będą czyniły zadość warunkom Cauchy.

<u>Przykłady</u>:

1) $Z = f(z) = z$; wtedy $\Delta Z = \Delta z$; a więc $f'(z) = \lim \dfrac{\Delta Z}{\Delta z} = 1$; i odwrotn-

warunkiem tem obie figury będą identyczne.

Podobnie i funkcji: $Z = f(z) = z^n$; $\Delta Z = (z+\Delta z)^n - z^n$, więc

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}\Delta^2 z + \dots + \Delta^n z - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1} + \Delta z\left\{\frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}\Delta^2 z + \dots\right\}$$

gdy $\Delta z \to 0$ to $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z} = nz^{n-1}$ a więc $f'(z) = nz^{n-1}$.

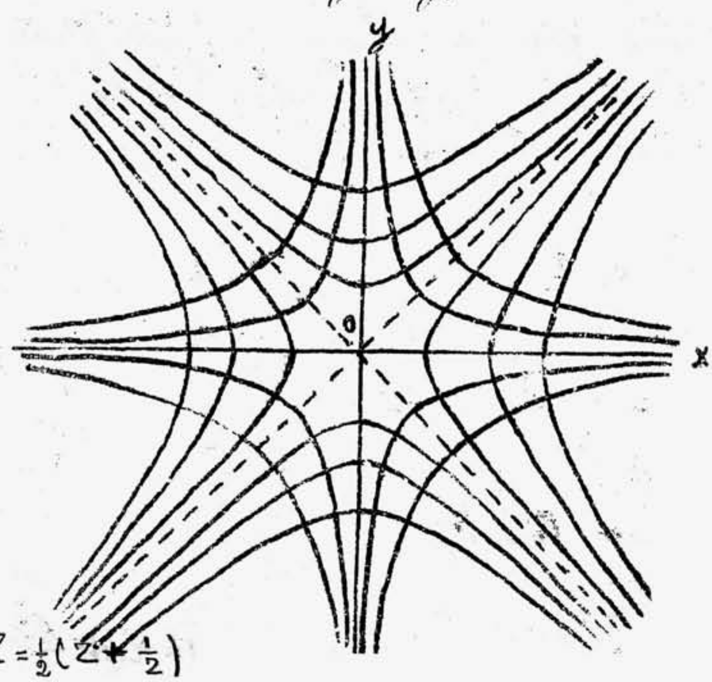
Jak widać i u funkcji z^n pochodna jest jednoznaczna. Znaczy to, że jeśli w z^n oddzielimy część rzeczywistą od zespolonej i każdą z osobna przyrównamy do „c" to otrzymamy siatkę ortogonalną.

Jako przypadek szczególny weźmy:

$$Z = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \quad \text{skąd} \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy; \end{cases}$$

Funkcje te spełniają warunki Cauchy'go bo:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \end{cases}$$

Zakładając: $x^2 - y^2 = c$ i $2xy = c$, otrzymamy więc sieć ortogonalną. Będą to dwie rodziny hyperbol.



$Z = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{2})$

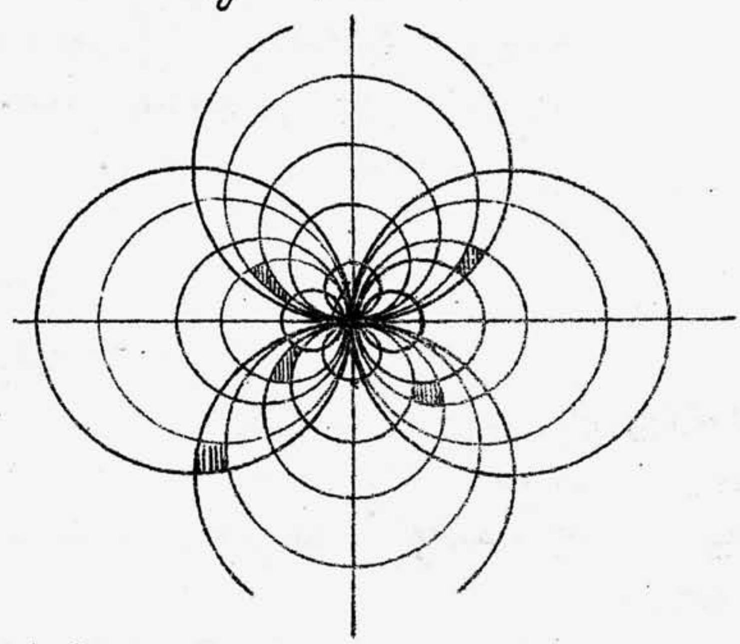
2) $Z = f(z) = \frac{1}{z}$;

$$Z = u + iv = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad \text{a więc} \begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje u i v spełniają te warunki Cauchy'go. Zakładając: $u = \frac{1}{2c}$ i $v = \frac{1}{2c}$ otrzymamy:

$$x^2 + y^2 = 2cx$$
$$x^2 + y^2 = 2cy$$

Są to równania kół: $\begin{matrix} \text{I} & (x-c)^2 + y^2 = c^2 \\ \text{II} & (y-c^2) + x^2 = c^2 \end{matrix}$, które tworzą siatkę ortogonalną.



Może się zdarzyć, że jakaś funkcja nie należy do naszej klasy:

np.: 1) $Z = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, bo tu $u = \sqrt{x^2+y^2}$; zaś $v = 0$;

2) $Z = x^2 + iy^2$; bo wtedy $u = x^2$, $v = y^2$; $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$;

3) $Z = \text{argument } z$; bo $u = \text{argum. } z$, $v = 0$;

Te funkcje jak widać nie spełniają warunków Cauchy'go, nie są więc harmoniczne. (czyli nie są funkcjami analitycznymi patrz str. 13

Wiemy już, że funkcja $Z = z^n$ należy do naszej klasy i że jej pochodna jest: nz^{n-1}; łatwo się przekonać, że formalne własności pochodnej funkcji spełniającej warunki Cauchy są te same, jak i dla f. zmiennej rzeczywistej. Wszelkie dowody przeprowadza się w ten sam sposób. Naprzykład: jeśli $f(z)$ i $\varphi(z)$ należą do funkcji klasy Cauchy'go to i ich suma należy także do tej klasy i zachodzi: $[f(z)+\varphi(z)]' = f'(z)+\varphi'(z)$; Podobnie udowodnilibyśmy wzór: $[f(z)\cdot\varphi(z)]' = f(z)\varphi'(z) + f'(z)\varphi(z)$; Z tego wynika, że każdy wielomian będzie posiadał jednoznacznie wyznaczoną pochodną, ponieważ każdy składnik $a_n z^n$ posiada pochodną: $na_n z^{n-1}$;

Funkcje wymierne t.zn. funkcje kształtu $\frac{P(z)}{Q(z)}$ posiadają także jednoznacznie wyznaczoną pochodną w każdym punkcie prócz tych, dla których $Q(z)=0$; wynika to ze wzoru na pochodną ilorazu:

$$\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)' = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}$$

, który udowodnilibyśmy w ten sam sposób jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej.

Pojęcie funkcji regularnej w obszarze:

Możemy teraz w sposób ścisły ująć podstawę naszej teorji, co jest związane z wprowadzeniem pojęcia funkcji regularnej w danym obszarze D (obszar D bierzemy otwarty t.j. bez brzegu).

Funkcję $f(z)$ nazywamy regularną w obszarze D jeśli w każdym punkcie tego obszaru spełnia ona następujące warunki:

1) Funkcja $f(z)$ jest jednoznacznie określona w obszarze D; każdej wartości z odpowiada jedna i tylko jedna wartość Z patrz str 19

2) Funkcja $f(z)$ jest w nim ciągła (funkcja $f(z)$ jest ciągła w punkcie z_0, jeśli $f(z) \to f(z_0)$ o ile tylko $z \to z_0$)

3) Pochodna $f'(z)$ jest w obszarze D jednoznacznie wyznaczona.

Funkcje, któremi będziemy się zajmowali na przyszłość będą to funkcje spełniające te 3-y warunki na pewnych obszarach, które mogą stanowić tylko części płaszczyzny zmiennej zespolonej i stanowią obszar spójny.

Rozdział 4. Pewne określenia i pojęcia pomocnicze.

Określenie granicy dla ciągu l. zespolonych. Niech $z_n = x_n + iy_n$; mamy ciąg liczb zespolonych: $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ i odpowiadające mu dwa ciągi liczb rzeczywistych: $\begin{cases} x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \\ y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots \end{cases}$

Definicja: Ciąg utworzony z liczb z_n jest zbieżny i zmierza do granicy wtedy i tylko wtedy, gdy oba ciągi utworzone z liczb x_n i y_n są zbieżne. Niech: $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, wtedy $z = x + iy$ jest granicą ciągu: $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ i piszemy to:

$$\lim z_n = z$$

Interpretacja geometryczna: jeżeli $z_n \to z$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2} = 0$ i odwrotnie; gdy ten pierwiastek zmierza do zera, to $x_n \to x$ i $y_n \to y$, czyli $|z - z_n| \to 0$; oznacza to, że odległość punktów z_n i z zmierza do zera.

Jeżeli z punktu z, zakreślimy koło o dowolnie małym promieniu r, i jeżeli istnieje taka liczba n_0, zależna od r, że gdy $n > n_0$ to wszystkie punkty z_n leżą wewnątrz tego koła, to koło to stanowi otoczenie punktu z.

Możemy w ten sam ~~sposób~~ jak pojęcie granicy uogólnić pojęcie p. skupienia. Punkt z jest p. skupienia, o ile w dowolnie małem otoczeniu p. z