Całka z pochodnej: Niech będzie dana funkcja $F(z)$ i jej pochodna $F'(z) = f(z)$. Całka:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z} F'(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z)$$

, przyczem $\Phi'(z) = f(z)$, na zasadzie poprzedniego. Lecz i $F'(z) = f(z)$ więc:

$$F'(z) = \Phi'(z) \quad \text{albo} \quad \{F(z) - \Phi(z)\}' = 0$$

skąd: $\Phi(z) - F(z) = C^{te}$ czyli $\Phi(z) = F(z) + C$ i ostatecznie:

$$\int_{z_0}^{z} F'(z)\,dz = F(z) + C$$

, otrzymujemy wynik taki jak przy zmiennej rzeczywistej.

Przykłady:

1) Niech $z = x + iy$; widzieliśmy że $(z^n)' = n z^{n-1}$

więc $$\int_{z_0}^{z} z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

2) Podobnie $$\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\right\}' = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}$$

gdzie $P(z)$ i $Q(z)$ są wielomianami. A więc całka:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}\,dz = \frac{P(z)}{Q(z)} + C$$

W tym przykładzie należy brać pod uwagę obszar, w którym nie znajduje się żaden pierwiastek mianownika.

⊕!! Rozdział 9. Całka Cauchy'go.

Niech funkcja $f(z)$ będzie regularna w obszarze D i niech C oznacza drogę zamkniętą, której wszystkie punkty należą do obszaru D, t.zn. każdy punkt krzywej $\mathcal{C}$ należy do obszaru regularności. Niech z oznacza dowolny punkt wewnątrz krzywej $\mathcal{C}$, a ζ punkt na samej krzywej $\mathcal{C}$; ζ jest więc zmienną całkowania. Trzeba udowodnić że:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i\, f(z).$$

Funkcja $f(\zeta)$ jest funkcją regularną zmiennej, w obszarze D, ale funkcja: $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, t.zn. funkcja podcałkowa, posiada jeden i tylko punkt nieregularności; jest nim p. $\zeta = z$, ponieważ wtedy mianownik staje się zerem; poza tem mianownik i licznik są f. regularnemi.

Dlatego całka: $\int_{\mathcal{C}} \varphi(\zeta)\, d\zeta$, gdzie $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, może nie być równą zeru.

Jej wartość jest jak udowodnimy: $2\pi i\, f(z)$;

Otoczmy punkt z kołem γ o promieniu ρ, dowolnie małym (jest on w każdym razie tak mały, że koło γ znajduje się całkowicie wewnątrz $\mathcal{C}$).

Wobec udowodnionej własności dróg II-ej kategorji:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma} \varphi(\zeta)\, d\zeta ,$$

a więc aby otrzymać wartość:

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

wystarczy obliczyć takąż całkę wzdłuż koła γ.

Ponieważ funkcja $f(\zeta)$ jest w obszarze D ciągła, więc do dowolnie małej liczby ε, można dobrać takie δ_ε, że gdy promień koła γ: $\rho < \delta_\varepsilon$ to $|\eta| < \varepsilon$ gdzie $\eta = f(\zeta) - f(z_0)$, albo $f(\zeta) = f(z) + \eta$

Podstawiając do naszej całki wartość $f(\zeta)$ i pamiętając, że $f(z)$ jest przy całkowaniu stałe, otrzymamy wartość na $\underline{I}$:

$$\underline{I} = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_\gamma \frac{\eta}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \underline{I}_1$$

$$\text{gdzie } \underline{I}_1 = \int_\gamma \frac{\eta}{\zeta - z} d\zeta$$

Ale całka: $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$ ponieważ równa się ona znanej całce: $\int \frac{d\zeta}{\zeta}$ wzdłuż koła otaczającego punkt początkowy, o czem łatwo się przekonać przez przesunięcie układu współrzędnych, a więc:

$$\underline{I} = 2\pi i f(z) + \underline{I}_1 ;$$

Udowodnimy teraz, że $\underline{I}_1 = 0$; $\underline{I}_1$ ma wartość niezależną od promienia koła γ, bo $\underline{I}_1 = \underline{I} - 2\pi i f(z)$, a oba wyrazy prawej strony nie zależą od ρ. Stosując do całki $\underline{I}_1$ znane twierdzenie: gdy $|\varphi(z)| < M$ to $\left|\int \varphi(z) dz\right| < Ml$ gdzie l oznacza długość drogi całkowania i kładąc: $\varphi(\zeta) = \frac{\eta(\zeta)}{\zeta - z}$ mamy:

$$|\underline{I}_1| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho \text{; ponieważ } \left|\frac{\eta}{\zeta - z}\right| < \frac{\varepsilon}{\rho} \text{, a więc } |\underline{I}_1| < \varepsilon \cdot 2\pi.$$

Ponieważ jednak ε jest l. dodatnią dowolnie małą, a $\underline{I}_1$ jest stałe, więc $\underline{I}_1 = 0$; wobec tego:

$$\underline{I} = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

Wzór powyższy można napisać w postaci:

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

W tej postaci wzór (1) przedstawia pewną zasadniczą własność badanej przez nas klasy funkcji analitycznych, albowiem zapomocą tego wzoru powiązane są wartości, które przybieta funkcja na drodze C z wartościami, które przybiera wewnątrz, w ten sposób, że jeśli znamy wartość na krzywej, to przez to określona jest jej wartość w każdym p. wewnętrznym.

Uwaga: we wzorze (1) punkt z musi leżeć wewnątrz krzywej C; gdybyśmy na z wzięli wartość odpowiadającą p. zewnętrznemu to otrzymalibyśmy całkę:

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

równałaby się zeru, ponieważ funkcja podcałkowa $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, byłaby regularna wewnątrz krzywej C. Gdy punkt z leży na samej krzywej to całka powyższa traci sens. Wartość naszej całki jest więc funkcją naogół nieciągłą zmiennej z.

Ze wzoru (1) można wyprowadzić wniosek o istnieniu pochodnych wszystkich rzędów funkcji regularnej i otrzymać dla nich proste wzory. W tym celu udowodnimy następujący lemmat (twierdzenie pomocnicze).

Lemmat:

Niech L oznacza drogę łączącą punkty z_0 i Z; w przypadku szczególnym Z może być identyczne z z_0 (krzywa zamknięta). Niech będzie dana funkcja $\varphi(\zeta)$, zmiennej ζ, gdzie ζ przyjmuje wartości odpowiadające punktom na drodze L. O funkcji $\varphi(\zeta)$ zakładamy, że jest ciągła na krzywej L.

Niech z oznacza dowolny punkt obszaru, nie należący jednak do drogi L. Utwórzmy całkę:

$$\overset{L}{\int_{z_0}^{Z}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

(Ponieważ L jest ustalone, więc całka zależy jedynie od punktu z i jest funkcją jednoznacznie określoną od z, którą oznaczymy:)

$$\text{(I)} \quad \overset{L}{\int_{z_0}^{Z}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = F(z)$$

Udowodnimy, że funkcja $F(z)$ jest ciągła w punkcie z (nie należącym do L).

W tym celu utwórzmy różnicę:

$$|F(z')-F(z)| = \left|\int^{\mathcal{L}}\left\{\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z'}-\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\right\}d\zeta\right| = \left|\int^{\mathcal{L}}\varphi(\zeta)\frac{z'-z}{(\zeta-z')(\zeta-z)}d\zeta\right|$$

, gdzie z' oznacza punkt należący do otoczenia punktu z, ale nie należący do $\mathcal{L}$; oznaczmy przez l długość drogi $\mathcal{L}$. Z założenia mamy:

$$|\varphi(\zeta)|<M$$ bo $\varphi(\zeta)$ jest funk. ciągłą.

Oznaczmy przez λ najmniejszą odległość między punktami ζ i z (λ istnieje, bo zbiór punktów na drodze $\mathcal{L}$ jest domknięty).

Jeśli punkty z' i z są tak bliskie siebie, że $|z'-z|<\frac{\lambda}{2}$, to będziemy mieli:

$$|\zeta-z'|>\frac{\lambda}{2}, \text{ a } |\zeta-z|>\frac{\lambda}{1}$$ a więc:

$$\left|\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z')(\zeta-z)}\right|<\frac{2M}{\lambda^2}$$

, skąd na mocy znanego twierdzenia znajdziemy: $|F(z')-F(z)|<|z'-z|\frac{2Ml}{\lambda^2}$.

Jeśli teraz założymy że: $|z'-z|<\frac{\varepsilon\lambda^2}{2Ml}$, to otrzymamy:

$$\underline{|F(z')-F(z)|<\varepsilon}$$

, co oznacza że wartość całki $\int_{z_0}^{z}{}^{\mathcal{L}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ jest funkcją $F(z)$ ciągłą, zmiennej z, bo przecież warunek, że, jeśli: $|z'-z|<\frac{\varepsilon\lambda^2}{2Ml}$, to $|F(z')-F(z)|<\varepsilon$, jest warunkiem ciągłości.

Udowodnimy teraz, że funkcja $F(z)$ ma pochodną, której wartość jest:

$$(2)\quad F'(z)=\int^{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

Zamiast wzoru (2) udowodnimy równoważną mu nierówność:

$$(3)\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-\int^{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|<\varepsilon$$ o ile tylko $|\Delta z|<\delta_\varepsilon$

Do różnicy po lewej stronie nierówności (3) podstawmy wartość: $F(z)=\int_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$, i różnicę tę nazwijmy r. Otrzymamy:

$$r=\left|\frac{\int_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-(z+\Delta z)}-\int_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}}{\Delta z}-\int_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{\mathcal{L}}\varphi(\zeta)\left\{\frac{1}{\zeta-(z+\Delta z)}-\frac{1}{\zeta-z}-\frac{\Delta z}{(\zeta-z)^2}\right\}d\zeta\right|=$$

$$=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{\mathcal{L}}\varphi(\zeta)\frac{(\zeta-z)^2-(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)-\Delta z(\zeta-z-\Delta z)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)^2}d\zeta\right|=$$

$$=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{\mathcal{L}}\varphi(\zeta)\frac{(\zeta-z)\{\cancel{\zeta}-\cancel{z}-\cancel{\zeta}+\cancel{z}+\Delta z\}-\Delta z(\zeta-z-\Delta z)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)^2}d\zeta\right|=$$

$$=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{\mathcal{L}}\varphi(\zeta)\frac{\Delta z(\zeta-z-\zeta+z+\Delta z)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)^2}d\zeta\right|=|\Delta z|\left|\int_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\{\zeta-(z+\Delta z)\}(\zeta-z)^2}\right|;$$

Czynnik Δz jest nieskończenie mały; z założenia wiemy że $|\varphi(\zeta)|<M$; λ oznacza minimum odległości między punktem ζ i punktem z, tak że $|\zeta-z|>\lambda$; załóżmy, że przyrost Δz oprócz warunku $|\Delta z|<\delta_\varepsilon$ spełnia jeszcze warunek: $|\Delta z|<\frac{\lambda}{2}$; wtedy zachodzi nierówność: $|\zeta-(z+\Delta z)|>\frac{\lambda}{2}$, a stąd mamy ograniczenie na całkę:

$$\left|\int_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\{\zeta-(z+\Delta z)\}(\zeta-z)^2}\right|<\frac{2M}{\lambda^2}\,l;$$

Wobec tego: $r=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-\int_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta<\Delta z\,M_1$ gdzie $M_1=\frac{2Ml}{\lambda^2}$

Jeśli $\Delta z\to 0$ to $r\to 0$; ponieważ zaś gdy $\Delta z\to 0$ to $\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\to F'(z)$, a z drugiej strony: $\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\to\int_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$,

więc wzór: (2) $F'(z)=\int_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$, jest udowodniony.

Ta pochodna $F'(z)$ ma swoją pochodną, bo napisawszy wzór (2) w kształcie (2'):

$$(2')\quad F'(z)=\int^{L}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\ ,\quad \text{gdzie}\quad \psi(\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\ ,$$

widzimy analogję tej całki do całki, z której wyszliśmy.
Aby uzasadnić wzór na drugą pochodną:

$$(4)\quad F''(z)=2\int^{L}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta$$

udowodnimy równoważną mu nierówność:

$$r_1=\left|\frac{F'(z+\Delta z)-F'(z)}{\Delta z}-2\int^{L}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta\right|<\varepsilon\ ,\quad \text{o ile}\quad |\Delta z|<\delta_\varepsilon$$

Dowód będzie wprost identyczny z poprzednim (oczywiście przy poprzednich założeniach)

$$r_1=\left|\frac{\int^{L}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)^2}-\int^{L}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}}{\Delta z}-\int^{L}\frac{2\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int^{L}\varphi(\zeta)\frac{(\zeta-z)^3-(\zeta-z-\Delta z)^2(\zeta-z)-2(\zeta-z-\Delta z)^2\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)^2(\zeta-z)^3}d\zeta\right|$$

Obliczmy licznik ułamka pod znakiem całki; jest on równy:

$$(\zeta-z)^3-(\zeta-z-\Delta z)^2\{(\zeta-z)+\Delta z\}=(\zeta-z)^3-\{(\zeta-z)^2-2(\zeta-z)\Delta z+\Delta z^2\}\{(\zeta-z)+\Delta z\}=$$

$$=(\zeta-z)^3-(\zeta-z)^3-2(\zeta-z)^2\Delta z+2(\zeta-z)^2\Delta z-\Delta z^2(\zeta-z)+4(\zeta-z)\Delta z^2-2\Delta z^3=3\Delta z^2(\zeta-z)-2\Delta z^3$$

Wobec tego wartość różnicy r_1 jest:

$$r_1=\frac{\Delta z^2}{|\Delta z|}\left|\int^{L}\varphi(\zeta)\frac{3(\zeta-z)-2\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)^2(\zeta-z)^3}d\zeta\right|=|\Delta z|\left|\int^{L}\varphi(\zeta)\frac{3(\zeta-z)-2\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)^2(\zeta-z)^3}d\zeta\right|$$

Ale $\left|\int^{L}\varphi(\zeta)\frac{3(\zeta-z)-2\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)^2(\zeta-z)^3}d\zeta\right|<\frac{M\,4\lambda\, l}{(\frac{\lambda}{2})^2\cdot\lambda^3}$, t. zn. że wartość całki jest skończona, a że Δz jest nieskończenie małe, więc też i r_1 jest nieskończenie małe, czyli wzór:

$$(4)\quad F''(z)=2\int^{L}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta$$ jest udowodniony.

Rzuca się w oczy, że wzór (4) można otrzymać ze wzoru (2), przez różniczkowanie względem z pod znakiem całki (reguła Leibnitz'a). W ten sposób, metodą idukcji, dojdziemy do wzoru ogólnego:

$$(5)\quad F^{(n)}(z) = n! \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Widzimy więc, że funkcja $F(z)$ określona równaniem (I), posiada pochodne wszystkich rzędów wszędzie z wyjątkiem linji $\mathcal{L}$, a więc jest regularna wszędzie poza $\mathcal{L}$. Możemy tą krzywą $\mathcal{L}$ otoczyć inną krzywą zamkniętą „krzywą ochronną"; wtedy poza pasem, utworzonym przez tą krzywą funkcja $F(z)$ jest regularna.

Z rozważań naszych możemy wyciągnąć b. ważny wniosek: Jeżeli funkcja jest regularna, to posiada pochodne wszystkich rzędów.

Niech $f(z)$ będzie regularna w obszarze D: t.zn. niech w nim będzie określona (jednoznacznie), ciągła i posiada pochodną 1go rzędu. Weźmy wewnątrz D taką krzywą C, żeby punkt z był wewnątrz niej. Utożsamijmy $f(z) \equiv \varphi(z)$ i linję C z linją $\mathcal{L}$. Funkcja $f(z)$ spełnia warunki ciągłości jakie spełniała f. $\varphi(z)$, a więc:

$$(1')\quad \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = F(z)$$

Określona w ten sposób funkcja $F(z)$, posiada na zasadzie poprzednich rozważań pochodne wszystkich rzędów:

$$F^{(n)}(z) = n! \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

Ale na mocy zasadniczego twierdzenia tego rozdziału, twierdzenia o całce Cauchy'go mamy: $F(z) = 2\pi i\, f(z)$,

i $F^{(n)}(z) = 2\pi i\, f^{(n)}(z)$ ckd

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$$

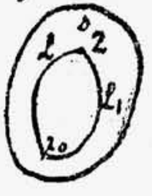
Udowodniona tu własność odróżnia funkcje analityczne od funkcji zmiennej rzeczywistej, które niekoniecznie musiały mieć pochodne wszystkich rzędów, choć miały pierwszą.

Odwrócenie twierdzenia zasadniczego Cauchy'ego

Zasadnicze twierdzenie Cauchy'ego mówiło, iż całka wzdłuż linji zamkniętej I-ej kategorji, należącej do obszaru regularności funkcji podcałkowej równa się zeru. Udowodnimy twierdzenie odwrotne do tego twierdzenia:

Zakładamy, że w obszarze jednospójnym D funkcja $f(\zeta)$ jest określona i ciągła, że $\int_C f(\zeta)d\zeta$, (gdzie C dowolna krzywa zamknięta), a postaramy się dowieść, że wtedy funkcja $f(\zeta)$ jest regularna.

W tym celu udowodnimy że posiada pochodne wszystkich rzędów.



Stąd że: $\int_C f(\zeta)d\zeta=0$, wynika że: (6) $\int_{z_0}^{z} {}_{L} f(\zeta)d\zeta=\int_{z_0}^{z} {}_{L_1} f(\zeta)d\zeta=F(z)$,

t. zn. że wartość całki nie zależy od drogi całkowania. Łatwo dowieść że $F(z)$ jest regularne, gdyż możemy udowodnić że:

$$F'(z)=f(z)$$

W rzeczy samej: z równania (6) wynika, że:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

. Rozpatrzmy różnicę:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(z)d\zeta\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right|<\frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon$$

bo jak wiemy, jeśli $|\Delta z|<\delta_\varepsilon$ to $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, a długości drogi całkowania jest Δz, gdyż z racji, że wartość całki nie zależy od drogi całkujemy ją po prostej. Jeśli przyrost zmiennej z, $|\Delta z|\to 0$, to

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon\ ,\quad \text{a więc}\quad \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\to f(z),\ \text{o ile}$$

$\Delta z \to 0$, ale to oznacza przecież że: $\underline{F'(z) = f(z)}$

Widzimy więc że $F(z)$ jest regularna, ponieważ spełnia 3-y warunki Cauchy'go: jest określona, ciągła i ma pochodną 1-go rzędu. Wiemy jednak z poprzedniego twierdzenia, że jeżeli funkcja $F(z)$ jest regularna, to ma pochodne wszystkich rzędów, t. j. istnieje pochodna od $F'(z) = f(z)$; jest nią: $F''(z) = f'(z)$; A zatem i funkcja $f(z)$ jest regularna, bo ma pochodną 1-go rzędu (pozostałe 2-a warunki regularności były w założeniu. Nasze twierdzenie jest udowodnione.

Rozdział 10. Ciągi i szeregi funkcji zmiennej zespolonej.

Obszar zbieżności. Przypuśćmy, że dany jest ciąg funkcyj:

$$(1)\quad f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z), \dots, f_n(z) \dots$$

Ciągowi temu odpowiada szereg:

$$(2)\quad f_1(z) + \{f_2(z)-f_1(z)\} + \{f_3(z)-f_2(z)\} + \dots + \{f_n(z)-f_{n-1}(z)\} + \dots$$

Jeżeli dla pewnych wartości z, ciąg (1) dąży do pewnej granicy $f(z)$, to i szereg (2) jest zbieżny i sumą jego jest $f(z)$. Możliwe są dwa wypadki:

1) Ciąg (1) może być rozbieżny dla wszystkich wartości z i

2) Ciąg (1) może być zbieżny dla pewnych wartości z.

Możemy mówić o zbiorze Z punktów zbieżności ciągu (1). Jeżeli punkt z należy do tego zbioru, to ciąg jest zbieżny; jeżeli nie należy, to ciąg jest rozbieżny.

W przypadkach, któremi będziemy się zajmowali, punkty zbieżności będą tworzyły pewne continua i wtedy będziemy mówili o obszarach zbież-