Utwórzmy funkcję: $\Phi(z) = F(z)\cdot G(z)$; jakie osobliwości ma ta funkcja? By się o tem dowiedzieć możemy rozwinąć $\Phi(z)$ w otoczeniu bieguna funkcji $F(z)$, z_1, o którym zakładamy że jest biegunem 1-go rzędu. Punkt z_1 będzie dla funkcji $G(z)$ pierwiastkiem krotności 1.

Aby rozwinąć $\Phi(z)$, rozwijamy jej czynniki:

$F(z) = \frac{a}{z-z_1}$ + część regularna; $G(z) = (z-z_1)\,G_1(z)$, a więc:

$$\Phi(z) = \left(\frac{a}{z-z_1} + R(z)\right)(z-z_1)\,G_1(z) = a\,G_1(z) + R(z)(z-z_1)G_1(z) =$$
$$= a\,G_1(z) + R(z)\,G(z) = \text{f. regularna.}$$??

Gdyby biegun był rzędu n-tego, to mielibyśmy:

$F(z) = \frac{a}{(z-z_1)^n} + \frac{a_1}{(z-z_1)^{n-1}} + \dots +$ część regularna. Ale za to:

$G(z) = (z-z_1)^n G_1(z)$ i w iloczynie ujemne potęgi zniosłyby się, tak że $\Phi(z)$ i w tym wypadku jest f. regularną, całkowitą. !!!

Słowem mamy: $F(z)\cdot G(z) =$ f. całkowita $= G_2(z)$, a więc

$$F(z) = \frac{G_2(z)}{G(z)} \qquad \text{c. b. d. o.}$$

wykłady:
funkcje meromorficzne $tg\, z$ i $ctg\, z$ mogą być przedstawione jako ilorazy dwóch funkcji całkowitych! $tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$ $ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}$

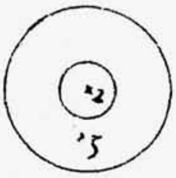
Zakończenie

Omówimy własności punktów regularnych, biegunów i punktów istotnie osobliwych.

1). Jeśli punkt jest regularny, to funkcja w jego otoczeniu przyjmuje wartości nieskończenie bliskie wartości funkcji w samym punkcie regularnym ($f(\zeta) \to f(z)$ o ile $\zeta \to z$).

2). Gdy punkt z jest biegunem, to punkt ζ, należący do jego otoczenia, ma tę własność, że funkcja rozwija się w nim na szereg Laurenta i mamy:

$$f(\zeta) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) + \text{część regularna.}$$



Gdy $|\zeta - z| < \rho$ to $\frac{1}{|\zeta - z|} > \frac{1}{\rho}$; oznaczmy $Z = \frac{1}{\zeta - z}$, wtedy $|Z| > \frac{1}{\rho}$ i gdy $\rho \to 0$ to $|Z| \to \infty$.

Jak wiemy wielomian ma tą własność, że do każdej liczby M można dobrać takie R_M, że gdy $|Z| > R_M$ to $|\mathcal{P}(Z)| > M$, i w naszym wypadku gdy $|Z| \to \infty$ to $|\mathcal{P}(Z)| \to \infty$

Ale gdy $|Z| \to \infty$ to $|\zeta - z| \to 0$ i $\zeta \to z$.

Widzimy więc, że gdy z jest biegunem, to gdy $\zeta \to z$, wtedy $|f(\zeta)| \to \infty$.

Ale wiemy, że jeśli punkt z jest biegunem dla f. $f(\zeta)$, to ten sam p. z jest dla f. $\frac{1}{f(\zeta)}$ punktem zerowym, to $f(\zeta)$ da się wyrazić tak:

$$f(\zeta) = \frac{\Phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}; \quad \text{gdzie } \Phi(\zeta) \text{ jest regularne.}$$

Wtedy: $\frac{1}{f(\zeta)} = \frac{(\zeta - z)^n}{\Phi(\zeta)}$, ale $\Phi(\zeta)$ jest regularne i nie ma pierwiastka w p. z, a więc: $\frac{1}{\Phi(\zeta)} = E(\zeta)$ jest f. regularną; więc:

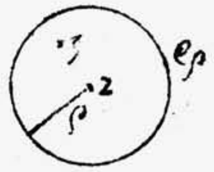
$$\frac{1}{f(\zeta)} = (\zeta - z)^n \cdot E(\zeta)$$

Stąd już widać, że „osobliwość" funkcji w punkcie, który jest biegunem jest dość prosta, bo już f. odwrotna t.zn. $\frac{1}{f(z)}$ posiada p. zerowy tam, gdzie dana funkcja miała punkt osobliwy.

3). Gdy rozpatrzymy p. istotnie osobliwy, to przekonamy się, że i odwrotność funkcji badanej $f(z)$ t.j. $\frac{1}{f(z)}$ jest w nim osobliwa.

Udowodnimy twierdzenie Weierstrassa o punkcie istotnie osobliwym. Brzmi ono: W otoczeniu p. istotnie osobliwego funkcja zbliża się do każdej dowolnej wartości (zbliża się nie prosto nieskończenie).

Wewnątrz koła o promieniu ρ dokoła punktu osobliwego istnieją takie punkty ζ, że $f(\zeta)$ ma wartość dowolną, to znaczy że gdy:



$e = \alpha + i\beta$ to $|f(\zeta) - e| < \varepsilon$, dla nieskończenie wielu punktów ζ zewnątrz koła C_ρ.

Twierdzenie nasze udowodnimy najpierw dla p. istotnie ~~osobliwego~~ w nieskończoności: mianowicie dla funkcji całkowitej przestępnej:

Mamy więc w tym wypadku udowodnić, że w otoczeniu punktu w nieskończoności, to znaczy zewnątrz koła o promieniu R dowolnie dużym istnieją punkty ζ, spełniające nierówność:

$$(3) \quad |G(\zeta) - e| < \varepsilon \quad \text{o ile } |\zeta| > R.$$

Rozpatrzymy 3-y wypadki: $G(\zeta) - c = 0$

1). Gdy równanie: (α) ~~$G(\zeta) = c$ ma~~ nieskończenie wiele pierwiastków, to pierwiastki te nie mają p. skupienia w skończoności, bo funkcja jest regularna, a więc punkty zerowe oddalają się w nieskończoność, tak, że ich moduły możemy uporządkować:

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \ldots \leq |z_n| \leq \ldots \to \infty$$

Z pomiędzy tych pierwiastków bierzemy z_n taki, że $|z_n| > R$. Wtedy utożsamiając ζ z z_n mamy:

$$|G(\zeta) - e| = 0.$$

Nasze tw. jest udowodnione w formie mocniejszej, niż było zapowiedziane. bo mieliśmy udowodnić, że $|G(\zeta) - c| < \varepsilon$

2). Gdy równanie: (α) $G(\zeta) - e = 0$ nie posiada wcale pierwiastków, to $\frac{1}{G(\zeta) - e} = G_1(\zeta)$ jest funkcją regularną i całkowitą, a więc na mocy twierdzenia Liouville'a*) musi istnieć takie R, że gdy $|\zeta| > R$ to $|G_1(\zeta)| > M$, gdzie M jest dowolnie duże: Obierzmy $M = \frac{1}{\varepsilon}$, to mamy:

$$\frac{1}{|G(\zeta) - e|} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{czyli} \quad |G(\zeta) - e| < \varepsilon$$

*) tw. L. funkcja regularna i całkowita (o ile nie jest stała) ma taką własność: jakkolwiek wielkie wybralibyśmy M, to istnieją takie punkty ζ, dla których $|G(\zeta)| > M$

3) Gdy równanie: (α) $G(z)-e=0$ ma skończoną liczbę pierwiastków:

z_1 krotności α_1
z_2 " α_2
z_k " α_k

gdzie $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k=n$, to tworzymy wielomian posiadający te właśnie pierwiastki: $P_n(z)=(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\dots(z-z_k)^{\alpha_k}$ i dzielimy przez ten wielomian naszą funkcję: $G(z)-e$; iloraz $\frac{G(z)-e}{P_n(z)}=G_1(z)$ jest funkcją regularną, bo w otoczeniu p. zerowego np. z_1 $F(z)=\frac{1}{g(z)}$
mamy: $G(z)-e=(z-z_1)^{\alpha_1}F(z)$, a zaś $\frac{1}{P(z)}=\frac{A}{(z-z_1)^{\alpha_1}}+\dots$
i wyrazy mogące dać p. osobliwe zniosą się; podobnie i przy innych p. zerowych.

Funkcja $G_1(z)$ nie posiada już p. zerowych, bo w rozwinięciu:

$$G(z)-e=(z-z_1)^{\alpha_1}\cdot G_2(z)\ ,\quad G_2(z)\neq 0$$

i podobnie w rozwinięciu: $\frac{1}{P_n(z)}=\frac{Q(z)}{(z-z_1)^{\alpha_1}}$, $Q(z)\neq 0$ dla $z=z_1$, a po przemnożeniu otrzymamy: $G_1(z)=Q(z)\cdot G_2(z)\neq 0$ dla $z=z_1$.

Weźmy pod uwagę: $\frac{1}{G_1(z)}=f(z)$; jest to funkcja całkowita. Zastosujmy do niej rozszerzone tw. Liouville'a:

dla $|z|>R$ mamy $|f(z)|>M|z|^n$, a więc

$|G_1(z)|<\frac{1}{M|z|^n}$ a stąd mamy: $\left|\frac{G(z)-e}{P_n(z)}\right|<\frac{1}{M|z|^n}$ a więc:

$$|G(z)-e|<\frac{1}{M}\cdot\frac{P_n(z)}{|z|^n}$$

Ale jak wiemy, gdy $z\to\infty$ to iloraz $\frac{P_n(z)}{|z|^n}\to k$, a więc dla $|z|>R$ zachodzi: $\left|\frac{P_n(z)}{z^n}\right|<k$ albo: $|G(z)-e|<\frac{k}{M}$; obierzmy $M=\frac{k}{\varepsilon}$, a otrzymamy: $|G(z)-e|<\varepsilon$ c.b.d.o.

Teraz rozpatrzymy wypadek gdy mamy do czynienia z dowolnym punktem istotnie osobliwym: chcemy dowieść (jak to już było zaznaczone), że dla $|\zeta-z|<\rho$ zachodzi: $|f(\zeta)-c|<\varepsilon$, gdzie z oznacza punkt istotnie osobliwy w skończoności.

Rozwińmy w otoczeniu tego punktu funkcję $f(\zeta)-c$ na szereg Laurent'a:

$$f(\zeta)-c = \text{część regularna} + G\left(\frac{1}{\zeta-z}\right);$$

część regularna $= F(\zeta)$ rozwija się w otoczeniu p. z na szereg Taylor'a i w punkcie z ma wartość oznaczoną: $F(z)=\gamma$;

oznaczając teraz $Z=\frac{1}{\zeta-z}$ mamy: $G\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)=G(Z)$, funkcję całkowitą od zmiennej Z. Dodajmy i odejmijmy od prawej strony rozwinięcia funkcji $f(\zeta)-c$ liczbę γ, otrzymamy:

czy $\gamma = a_0 + a$

$F(\zeta) = F(z) + F$

$$f(\zeta)-c=[F(\zeta)-\gamma]+[G(Z)+\gamma]$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia istnieją takie punkty ζ, dla których

$$|Z|>R\ , \quad a \quad |G(Z)+\gamma|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ale wtedy:}$$

$$|\zeta-z|=\frac{1}{|Z|}<\frac{1}{R}=\rho_1\ , \quad \text{a więc dla } |\zeta-z|<\rho_1 \text{ mamy:}$$

$$\left|G\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)+\gamma\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

?

Ponieważ R było dowolnie duże, więc ρ_1 jest dowolnie małe.

Co do pierwszego składnika, to o ile $|\zeta-z|<\rho_2$ wtedy na zasadzie ciągłości: $|F(\zeta)-\gamma|<\frac{\varepsilon}{2}$, bo $F(z)=\gamma$, a $F(\zeta)$ regularne w otoczeniu punku z, a więc $F(\zeta)\to\gamma$ gdy $\zeta\to z$.

Mniejszą z liczb ρ_1 i ρ_2 nazwijmy ρ; wtedy o ile $|\zeta-z|<\rho$ to

$$|F(\zeta)-\gamma|<\frac{\varepsilon}{2} \quad i \quad \left|G\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)+\gamma\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{a więc: } |f(\zeta)-c|\leq|F(\zeta)-\gamma|+\left|G\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)+\gamma\right|<\varepsilon$$

i ostatecznie: $|f(\zeta)-c|<\varepsilon$ **c. b. d. o.**

$$F(\zeta) = F(z) + \frac{F'(z)}{1!}(\zeta-z) + \frac{F''(z)}{2!}(\zeta-z)^2$$

$$G(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2$$

Udowodniliśmy nasze twierdzenie dla wszystkich możliwych wypadków. Widzimy, że w otoczeniu punktu istotnie osobliwego funkcja nie ma oznaczonej wartości.

Poznane dotychczas 3-y rodzaje punktów możemy więc scharakteryzować w sposób następujący:

I. Punkty regularne są to takie punkty, że w ich otoczeniu funkcja jest jednowartościowa i przyjmuje wartości nieskończenie bliskie wartości funkcji w samym p. regularnym.

II. Bieguny: w ich otoczeniu funkcja przyjmuje wartości nieskończenie wielkie.

III. Punkty istotnie osobliwe: w ich otoczeniu funkcja jest zupełnie nieokreślona.

Może nas interesować pytanie, czy w twierdzeniu Weierstrassa można liczbę ε zastąpić zerem, t. zn. czy można dowieść, że w otoczeniu p. istotnie osobliwego zachodzi: $|f(z)-c|=0$. Zagadnieniem tem zajmował się Picard i dowiódł, że z wyjątkiem najwyżej może dwu wartości na c, równość ta ma miejsce.

Tak np. równanie $e^z=c$ ma zawsze pierwiastki w otoczeniu p. $z=\infty$ a równanie $e^{1/z}=c$ pierwiastki w otoczeniu p. $z=0$, jakiekolwiek byłoby c, za wyjątkiem wartości $c=0$.

Tw. Picarda: w dowolnie małem otoczeniu punktu istotnie osobliwego funkcja $f(z)$ może być równa dowolnej z góry oznaczonej skończonej wartości c z wyjątkiem 2
$(c=\alpha+i\beta)$ Zbiór tych wartości c może być nieskończony

— KONIEC —

Spis rzeczy

---

równania różniczkowe
Definicje. Otrzymywanie równań różniczkowych przez eliminację stałych. [illegible] typy równań, rozdzielenie zmiennych, równanie jednorodne. równanie liniowe I rzędu. Równanie Bernoulliego, Riccati, [illegible] Całka ogólna i osobliwa równania Clairauta. Metody rozwiązań I rzędu. Obniżanie wyższych równań do równań I rzędu. Całki pierwsze. Metoda równań. Równanie liniowe w szczególności jednorodne. Całki ogólne. Metody
Równanie liniowe o współczynnikach stałych. [illegible]
liniowe jednorodne. Równanie liniowe niejednorodne. Charakterystyki ich równań. Całki ogólne.