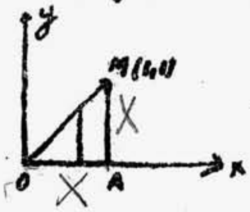
Znów widzimy, że otrzymaliśmy wynik taki sam jak dla zmiennej rzeczywistej i niezależny od drogi całkowania L. Otóż jeżeli funkcja $f(z)$ jest funkcją ciągłą, a poza tem dowolną to jednak nie zawsze wynik całkowania będzie niezależny od drogi, jak to widać z przykładu:

$f(z) = R(z) = x$ (bo $z = x+iy$);

Obliczmy całkę tej funkcji dwiema drogami:



1) wzdłuż boków kwadratu:

$$\int_0^1 R(z)\,dz = \int_0^1 x\,dx + 1 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 1 = \frac{3}{2};$$

2) wzdłuż przekątnej tego kwadratu:

$$\int_0^1 x\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 x\,dx = \sqrt{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rozdział 6. Obliczanie całki przy pomocy sprowadzenia całki do całki krzywolinjowej.

Całkę wzdłuż pewnej drogi możemy obliczyć wprowadzając całki krzywolinjowe zmiennej rzeczywistej. Dana jest całka:

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \quad (L)$$

i droga L określona jest przez równania $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, przyczem gdy t zmienia się od α do β, to p. z, opisuje na krzywej L drogę od p. z_0 do p. Z.

Zakładamy ciągłość pochodnych $\varphi'(t)$ i $\psi'(t)$.

Podziałowi drogi L w punktach: $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$, odpowiada podział odcinka α, β w punktach: $\alpha = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = \beta$, tak że:

$$\begin{cases} x_k = \varphi(t_k) \\ y_k = \psi(t_k) \end{cases} \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Punktom $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$, na drodze L odpowiadają punkty $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$

na odcinku α, β w ten sposób, że θ_k leży między t_{k-1} i t_k, ponieważ przy odwzorowaniu ~~porządek~~ czyli następstwo punktów jest zachowane.

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k \quad \text{przytem } \xi_k = \varphi(\theta_k), \text{ a } \eta_k = \psi(\theta_k)$$

Ogólny wyraz sumy, której granica odwzorowania całce, jest:

$$(z_k - z_{k-1}) f(\zeta_k) = [(x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1})] f(\xi_k + i\eta_k) =$$

$$= \{(x_k - x_{k-1}) + (y_k - y_{k-1}) i\} [u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k)]$$

ponieważ $f = u + iv$; przemnażając otrzymamy:

$$(z_k - z_{k-1}) f(\zeta_k) = [(x_k - x_{k-1}) u(\xi_k, \eta_k) - (y_k - y_{k-1}) v(\xi_k, \eta_k)] +$$

$$+ i [(x_k - x_{k-1}) v(\xi_k, \eta_k) + (y_k - y_{k-1}) u(\xi_k, \eta_k)]$$

Przechodząc teraz do samej sumy, mamy:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(\zeta_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) u(\xi_k, \eta_k) - \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) v(\xi_k, \eta_k) +$$

$$+ i \left\{ \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) v(\xi_k, \eta_k) + \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) u(\xi_k, \eta_k) \right\}$$

Rozpatrzmy każdą z sum:

$$\lim \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) u(\xi_k, \eta_k) = \int_L u(x, y)\, dx$$

bo: $x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(t'_k)(t_k - t_{k-1})$, gdzie $t_{k-1} < t'_k < t_k$, a to na mocy wzoru na wartość średnią. Stąd wynika, że:

$$(x_k - x_{k-1}) u(\xi_k, \eta_k) = \varphi'(t'_k)\, u\{\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\}(t_k - t_{k-1})$$

Przypuśćmy, że odcinek α, β został w p. $t_1, t_2, \dots, t_n$ podzielony tak, że oscylacja funkcji $\varphi'(t)$ była w jednym odcinku t_k, t_{k-1}, mniejsza od ε, wtedy.

$$\varphi'(t'_k) - \varphi'(\theta_k) = \varepsilon_k \qquad \text{gdzie } |\varepsilon_k| < \varepsilon;$$

$$\text{czyli} \qquad \varphi'(t'_k) = \varphi'(\theta_k) + \varepsilon_k$$

A więc = $(t_k - t_{k-1})U(\xi_k, \eta_k) = \varphi'(\theta_k)U\{\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\}(t_k - t_{k-1}) + \varepsilon_k U\{\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\}(t_k - t_{k-1})$

i suma:

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})U(\xi_k, \eta_k) - \sum_{k=1}^{n}\varphi'(\theta_k)U\{\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\}(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k U\{\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\}(t_k - t_{k-1})$$

Przechodząc do modułów mamy:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})U(\xi_k, \eta_k) - \sum_{k=1}^{n}\varphi'(\theta_k)U\{\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\}(t_k - t_{k-1})\right| = \sum_{k=1}^{n}|\varepsilon_k||U\{\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\}|(t_k - t_{k-1})$$

Funkcja $U\{\varphi(t), \psi(t)\}$ jest funkcją ciągłą zmiennej t, w przedziale zamkniętym zmiennej t, jest więc ograniczoną w tym przedziale, t.zn.:

$$|U\{\varphi(t), \psi(t)\}| < M \quad , \text{ a ponieważ } |\varepsilon_k| < \varepsilon$$

więc: $\left|\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})U(\xi_k, \eta_k) - \sum_{k=1}^{n}\varphi'(\theta_k)U\{\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\}(t_k - t_{k-1})\right| < M\varepsilon\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = \varepsilon M(\beta - \alpha)$

Różnica między sumami po lewej stronie dąży więc do zera wraz z ε, gdy przedziały rozdrabniamy nieskończenie. Ale wtedy:

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi'(\theta_k)U\{\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\}(t_k - t_{k-1}) \to \int_\alpha^\beta U\{\varphi(t), \psi(t)\}\varphi'(t)\,dt,$$

więc $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})U(\xi_k, \eta_k) = \int_\alpha^\beta U\{\varphi(t), \psi(t)\}\varphi'(t)\,dt$

Ponieważ to samo zupełnie rozumowanie można zastosować do wszystkich 4-ech sum wzoru 81, więc:

$$L\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta U\{\varphi(t), \psi(t)\}\varphi'(t)\,dt - \int_\alpha^\beta V\{\varphi(t), \psi(t)\}\psi'(t)\,dt +$$
$$+ i\int_\alpha^\beta U\{\varphi(t), \psi(t)\}\psi'(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V\{\varphi(t), \psi(t)\}\varphi'(t)\,dt,$$

co można napisać krócej:

$$L\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta [U\{\varphi(t), \psi(t)\} + iV\{\varphi(t), \psi(t)\}](\varphi'(t) + i\psi'(t))\,dt$$

albo jeszcze krócej: $\boxed{L\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt \quad , \text{ gdzie}}$

$z(t) = \varphi(t) + i\,\psi(t)$;

Przykład: $f(z) = \frac{1}{z}$; $\mathcal{L}$ jest kołem $\mathcal{C}$, którego równanie jest: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$
według naszego wzoru nasza całka będzie

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{d(r\cos t) + i\,d(r\sin t)}{r\cos t + i\,r\sin t} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + i\cos t}{\cos t + i\sin t}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

, bo przez pomnożenie łatwo sprawdzić że:

$$\frac{-\sin t + i\cos t}{\cos t + i\sin t} = i$$

Widzimy że w tym przykładzie wartość całki nie zależy od promienia koła r.

Najprostsze własności całek:

Jeżeli zmienimy kierunek drogi całkowania to znak całki zmieni się na przeciwny t. zn.:

$$\int_{z_0}^{(-\mathcal{L})\,z} f(z)\,dz = -\int_{z_0}^{(\mathcal{L})\,z} f(z)\,dz$$

Symbol $\int_{z_0}^{(-\mathcal{L})\,z}$ oznacza całkę wziętą na tej samej drodze $\mathcal{L}$, ale w kierunku przeciwnym.

Jeżeli drogę całkowania $\mathcal{L}$ podzielimy punktem ζ na dwie części: $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$, to całki rozciągnięte na te drogi częściowe dają w sumie całkę rozciągniętą na całą drogę:

$$\int_{z_0}^{\mathcal{L}\,z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{\mathcal{L}_1\,\zeta} f(z)\,dz + \int_{\zeta}^{\mathcal{L}_2\,z} f(z)\,dz$$

Wzór ten łatwo wyprowadzić z definicji całki jako granicy sumy.

W podobny sposób z definicji całki jako sumy wyprowadzą się wzory:

$$\int_{z_0}^{Z} c\, f(z)\,dz = c \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \quad (\mathcal{L})$$

, bo stałą c, która wystąpi przy każdym wyrazie sumy, możemy wynieść przed znak sumy.

Tak samo:

$$\int_{z_0}^{Z} \{f_1(z) + f_2(z)\}\,dz = \int_{z_0}^{Z} f_1(z)\,dz + \int_{z_0}^{Z} f_2(z)\,dz; \quad (\mathcal{L})$$

Widzimy więc, że całka w zakresie zmiennej zespolonej ma te same (niektóre) własności, co całka w zakresie zmiennej rzeczywistej.

(Bardzo ważną jest następująca własność całki: jeżeli dla wszystkich wartości z-a na drodze $\mathcal{L}$ zachodzi nierówność: $|f(z)| < M$, to

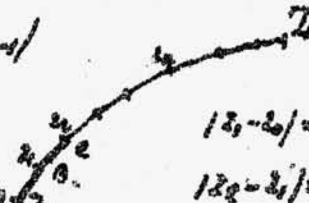
$$\left| \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \right| < M\,l, \quad (\mathcal{L})$$

*) gdzie l oznacza długość drogi całkowania $\mathcal{L}$.

Własność ta wynika z definicji całki, bo:

$$\left| \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1})\, f(\xi) \right| \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|\,|f(\xi)| <$$

$$< \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} M |z_k - z_{k-1}| = \lim_{n \to \infty} M \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$$



$|z_1 - z_0| = AC$

$|z_2 - z_1| = BC$

Ale $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$ jest długość linji łamanej łączącej punkty podziału drogi $\mathcal{L}$, a więc ta długość jest zawsze mniejsza albo równa długości samej drogi $\mathcal{L}$, więc:

$$\left| \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \right| < \lim_{n \to \infty} M \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leq M\,l$$

Nasza własność jest już udowodniona.

*) słownie: moduł całki ≤ maximum modułu wartości funkcji podcałkowej przez długość drogi całkowania
= gdy f(z) = constans a droga całkowania $\mathcal{L}$ jest linją prostą