zakładamy, że $\chi(t_1)$ jest funkcją ciągłą rosnącą (lub malejącą) parametru t_1; wtedy:

$$x = \varphi[\chi(t_1)] \quad a \quad y = \psi[\chi(t_1)]$$

W ten sposób punkty krzywej zostają podporządkowane punktom osi zmiennej t_1; dwa takie przedstawienia parametryczne nazywamy równoważnemi; zwrot zostaje zachowany ($\chi(t)$ rosnące) lub zmieniony na przeciwny ($\chi(t)$ malejące); przy odpowiednim wyborze funkcji $\chi(t)$, przedział (α_1, β_1) może być identyczny z przedziałem (α, β).

Między równoważnemi równaniami parametrycznemi danej krzywej ważną rolę odgrywa to, w którem zmienną jest łuk s; mianowicie jak wynika z założenia droga jest krzywą wyprostowalną, możemy więc na niej obrać pewien punkt początkowy A i każdemu p. M podporządkować długość s łuku AM i odwrotnie.

Jeżeli mamy 3-y różne punkty M_1, M_2, M_3 to jeden z nich jest wewnątrz do pozostałych; mianowicie: jeśli tym punktom odpowiadają wartości parametru: t_1, t_2, t_3, to ten punkt jest wewnątrz, którego parametr zawarty jest między pozostałemi; np gdy $t_1 < t_2 < t_3$ to punkt M_2 jest p. wewnętrznym. Ta własność zachowuje się przy przejściach do parametrów równorzędnych.

Niech t będzie parametrem i niech p. A odpowiada wartości początkowej $t = \alpha$; jeżeli łuk AM wyrazimy zapomocą parametru s, to łatwo się przekonać, że łuk ten będzie funkcją monotoniczną ciągłą parametru t, a więc przejście od t do s jest przejściem do parametru równorzędnego.

Rozdział 5. Całkowanie

Wyobraźmy sobie, że mamy pewną funkcję $f(z)$, określoną w pewnym obszarze zmiennej z; narazie zakładamy tylko ciągłość tej funkcji; ale nie zakładamy regularności.

Całkowanie w zakresie zmiennej zespolonej jest naturalnem uogólnieniem pojęcia całkowania w zakresie zmiennej rzeczywistej. Jak tam, tak i tu mamy f. podcałkową i drogę całkowania, a zmienna, która figuruje pod znakiem całki jest zmienną pozorną. Różnica polega na tem, że tu drogą całkowania może być dowolna krzywa w obszarze, gdzie funkcja jest określona. Całkę taką będziemy oznaczać symbolem:

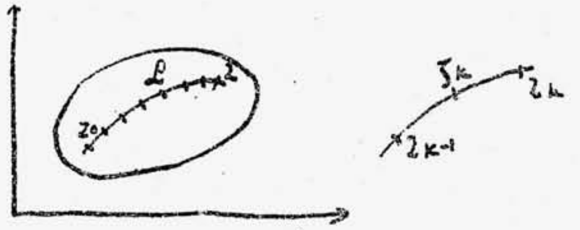
$$\int_L f(z)\,dz$$

Jeżeli zaś specjalnie nam chodzi o zaznaczenie p. początkowego i końcowego to używamy symbolu:

$$\overset{L}{\int_{z_0}^{z}} f(z)\,dz$$

, gdzie z_0 i z oznaczają punkty: początkowy i końcowy drogi całkowania L.

Całka będzie równa granicy sumy iloczynów wartości które przyjmuje funkcja na łukach, na jakie została podzielona droga całkowania przez odpowiednie różnice zmiennej całkowania.



Na krzywej L mamy zbiór punktów: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = z$, czyli $n+1$ punktów dzielących drogę na n części (droga nasza jest krzywą którą można wyrazić za pomocą równania parametrycznego: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$)

Na każdym „odcinku" drogi całkowania przy danym podziale obieramy punkt; i tak: na „odcinku" z_0, z_1 obieramy punkt ζ_1

" " z_1, z_2 " " ζ_2

" " z_{k-1}, z_k " " ζ_k

" " z_{n-1}, z_n " " ζ_n

Punkt ζ_k może być nietylko p. wewnętrznym, ale także jednym z punktów końcowych : z_{k-1} lub z_k;
Bierzemy wartości funkcji $f(z)$ w tych przedziałach; i tak w punkcie ζ_1 mamy wartość $f(\zeta_1)$ i wogóle w p. ζ_k wartość $f(\zeta_k)$; otrzymane wartości $f(\zeta_k)$ mnożymy przez różnicę wartości zmiennej na końcach odpowiadającego odcinka i tworzymy sumę:

$$f(\zeta_1)(z_1-z_0)+f(\zeta_2)(z_2-z_1)+\dots+f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})+\dots+f(\zeta_n)(z_n-z_{n-1})$$

Liczbę n zwiększamy nieograniczenie, a p. podziału zagęszczamy tak, by różnica między dwoma sąsiednimi punktami np: z_k-z_{k-1} dążyła do zera, t. zn. że cięciwa łącząca dwa kolejne p. podziału dąży do zera gdy $n\to\infty$.
Można udowodnić, że dla funkcji ciągłej wspomniana suma posiada wtedy granicę niezależną od tego w jaki sposób dzielimy drogę $\mathcal{L}$ na „odcinki" częściowe z_{k-1}, z_k, niezależną także od wyboru p. ζ_k wewnątrz „odcinka" z_{k-1}, z_k; tę właśnie granicę nazywać będziemy całką i oznaczać będziemy symbolem:

$$\overset{\mathcal{L}}{\int_{z_0}^{z}} f(z)\,dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})$$

<u>Dowód:</u> Z założenia, że $f(z)$ jest ciągłe na drodze $\mathcal{L}$, która jest zbiorem zamkniętym, wynika że $f(z)$ jest ograniczone na tym zbiorze t.zn:

$$|f(z)|<M.$$

gdy z należy do $\mathcal{L}$. Ponieważ droga $\mathcal{L}$ jest wyprostowalna, to posiada pewną długość którą oznaczymy przez l; wtedy łatwo zauważyć że zachodzi zawsze nierówność:

Jeżeli mówimy o ograniczoności to mamy na myśli moduł wyrażenia

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})\right| < M l;$$

Wynika to stąd, że:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})\right| < \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)||z_k - z_{k-1}| < M\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$$

ale $|z_k - z_{k-1}|$ jest to długość cięciwy więc:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})\right| < M\lambda_n,$$ gdzie λ_n oznacza długość łamanej, która jest sumą wszystkich cięciw. Jasnem jest że: $\lambda_n < l$, więc rzeczywiście zachodzi:

$$(1) \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})\right| < M l.$$

stąd $\left| \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz \right| \leq M . l$
W wyjątkowym wypadku będzie zachodziła równość, a to tylko wtedy gdy $f(z) = \text{constans}$.

Nierówność ta, którą będziemy stale stosować jest oczywiście spełniona nietylko wtedy gdy ją zastosujemy do całej drogi ale i do każdej z jej części.

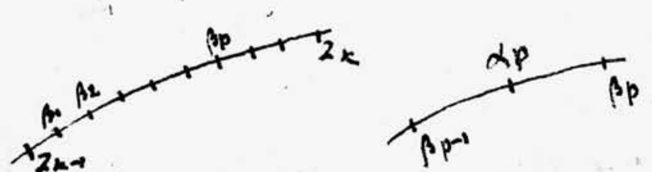
W celu udowodnienia istnienia granicy takiej sumy należy porównać ze sobą dwie takie sumy i okazać, że jeśli zagęszczenie punktów jest dostatecznie wielkie to różnica odpowiadających sum jest mniejsza od dowolnie małej liczby.

W tym celu rozpatrzmy naprzód dwa takie podziały i odpowiadające im sumy, takie że podziały jednej powstają przez rozdrobnienie podziału drugiej t. zn. że przy przejściu od jednego podziału do drugiego wszystkie punkty pierwszego podziału pozostają, a prócz tego przybywają nowe.

Wyobraźmy sobie, że pierwszy podział jest o tyle gęsty, że o ile dwa p. z' i z'' należą do tego samego łuku z_{k-1}, z_k, na które podzieliliśmy drogę całkowania to $|f(z'')-f(z')|<\varepsilon$; takie zagęszczenie jest zawsze możliwe ponieważ $f(z)$ jest funkcją ciągłą na drodze L.
Jeśli podział będziemy rozdrabniać to za każdym razem otrzymamy inną sumę iloczynów. Rozpatrzmy jeden wyraz takiej sumy.

$$u_k=(z_k-z_{k-1})f(\zeta_k)$$

i zbadajmy co się stanie z wyrazem u_k, jeżeli między z_k i z_{k-1} wstawimy nowe punkty podziału (rozdrobnienie):



Utwórzmy nowy iloczyn, który ma zastąpić u_k: punkty pośrednie nowego podziału oznaczamy przez α

$$v_k=(\beta_1-z_{k-1})f(\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1)f(\alpha_2)+\dots+(z_k-\beta_p)f(\alpha_{p+1})$$

Wyraz u_k można także napisać tak:

$$u_k=(\beta_1-z_{k-1})f(\zeta_k)+(\beta_2-\beta_1)f(\zeta_k)+\dots+(z_k-\beta_p)f(\zeta_k)$$

i wtedy różnica:

$$u_k-v_k=(\beta_1-z_{k-1})\{f(\zeta_k)-f(\alpha_1)\}+(\beta_2-\beta_1)\{f(\zeta_k)-f(\alpha_2)\}+\dots+\{f(\zeta_k)-f(\alpha_{p+1})\}(z_k-\beta_p)$$

Skąd, przechodząc do modułów mamy:

$$|u_k-v_k|\le|\beta_1-z_{k-1}||f(\zeta_k)-f(\alpha_1)|+|\beta_2-\beta_1||f(\zeta_k)-f(\alpha_2)|+\dots+|z_k-\beta_p||f(\zeta_k)-f(\alpha_{p+1})|$$

Na mocy zrobionej początkowo uwagi oscylacja między punktami leżącymi wewnątrz „odcinka” z_k, z_{k-1}, jest mniejsza od ε, więc:

$$|u_k-v_k|<\varepsilon\{|\beta_1-z_{k-1}|+|\beta_2-\beta_1|+\dots+|z_k-\beta_p|\}$$

Każda różnica w nawiasach jest to pewna cięciwa; ich suma jest to jakaś łamana wpisana w łuk z_k, z_{k-1}; oznaczmy przez l_k długość tego łuku, to oczywiście długość łamanej będzie mniejsza od l_k, a więc:

$$|u_k - v_k| < \varepsilon l_k$$

Udowodniliśmy, że przez zagęszczenie podziałów wartość każdego wyrazu

$$|z_k - z_{k-1}| f(\zeta_k)$$

zmieni się o liczbę mniejszą od εl_k;

Przejdźmy do całkowitej sumy
$S_1 = \sum f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum u_k$ - (dawna suma)
$S_2 = \sum v_k$ - (suma otrzymana przez rozdrobnienie)
Badamy różnicę
$S_1 - S_2 = \sum u_k - \sum v_k = \sum (u_k - v_k)$; Przechodząc do modułów
$|S_1 - S_2| = \sum_{k=1}^{n} |u_k - v_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon l_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} l_k = \varepsilon l$

Rozpatrzmy teraz całą sumę:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(\zeta_k)$$

Oznaczmy przez S' sumę, jaka powstanie z S_n przez rozdrobnienie podziałów. Otrzymamy:

$$|S' - S_n| < \varepsilon l_1 + \varepsilon l_2 + \dots + \varepsilon l_n = \varepsilon (l_1 + l_2 + \dots + l_n) = \varepsilon l.$$

To znaczy, że różnica między sumą S_n i sumą S', jaka z niej powstała przez zagęszczenie podziałów jest mniejsza od εl, gdzie l jest to długość drogi całkowania, a $\varepsilon > 0$ jest takie, że oscylacja na łukach częściowych $l_1, l_2, \dots, l_n$, jest mniejsza od ε.

Porównajmy teraz ze sobą dwie sumy dowolne, których podziały nie zależą od siebie, ale są dostatecznie małe. Niech punkty podziału drogi $\mathcal{L}$; odpowiadające obu sumom będą:

$$1)\ z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n = z;$$

$$2)\ z_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m = z;$$

Utwórzmy podział 3-i powstały przez połączenie punktów obu podziałów; będzie to podział:

$$3)\ z_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_l = z;$$

Każde δ_k jest to albo jakieś z_s albo też jakieś γ_r;
Niech sumy odpowiadające tym 3-em podziałom będą: S_1, S_2, S_3.

Załóżmy, że punkty odpowiadające S_1, S_2 są tak zagęszczone, że oscylacja funkcji $f(z)$ na łukach cząstkowych podziałów jest mniejsza od $\frac{\varepsilon}{8l}$, t.zn.

$$|f(z'') - f(z')| < \frac{\varepsilon}{8l};$$

o ile tylko z'' i z' należą do tego samego przedziału, czy to dla sumy S_1, czy też dla S_2;

Sumę S_3 możemy rozpatrywać jako sumę, która która powstała z S_1, albo z S_2, drogą zagęszczania punktów podziału. Porównując S_1 i S_3 mamy na zasadzie tylko co otrzymanego wyniku:

$$|S_1 - S_3| < \varepsilon' l \quad \text{tak samo} \quad |S_2 - S_3| < \varepsilon' l \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{8l}$$

Wobec tego:

$$|S_1 - S_2| < |(S_1 - S_3) + (S_3 - S_2)| \leq |S_1 - S_3| + |S_3 - S_2| < 2\varepsilon' l = \frac{2\varepsilon l}{8l} = \frac{\varepsilon}{4};$$

Jeżeli odległość między dwu kolejnemi p. podziału dąży do zera, to oscylacja funkcji $f(z)$ dąży do zera; wyobraźmy sobie ciąg:

$$\frac{\varepsilon_1}{8l}, \frac{\varepsilon_2}{8l}, \frac{\varepsilon_3}{8l}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{8l}, \frac{\varepsilon_{n+1}}{8l}, \ldots, \frac{\varepsilon_{n+p}}{8l}, \quad \text{malejący i dążący do zera.}$$

Wyobraźmy sobie dalej taki ciąg podziałów, że odpow. im oscylacje są mniejsze od odpowiednich wyrazów naszego ciągu; sumy odpowiadające tym podziałom oznaczmy przez:

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \ldots, \sigma_{n+p}, \ldots$$

w takim razie utożsamiając σ_n z S_1, a σ_{n+p} z S_2 mamy na zasadzie poprzedniego:

$$|\sigma_{n+p} - \sigma_n| < \frac{\varepsilon_n}{4}; \quad \text{dla dowolnego } p.$$

To znaczy, że ciąg sum: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots, \sigma_{n+p}, \ldots$, jest zbieżny, na mocy kryterjum zbieżności Cauchy'go (które rzecz jasna stosuje się i dla liczb zespolonych), a więc istnieje:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = I.$$

W nierówności: $|\sigma_{n+p}-\sigma_n|<\frac{\varepsilon_n}{4}$ niech n pozostaje stałe a $p\to\infty$, przechodząc do granicy $\sigma_{n+p}\to I$, otrzymamy więc nową nierówność:

$$|I-\sigma_n|<\frac{\varepsilon_n}{4}$$, przyczem ε_n jest związane z σ_n w ten sposób, że jak wiemy oscylacja na łuku podziału odpowiednie σ_n jest mniejsza od $\frac{\varepsilon_n}{8l}$;

Udowodniliśmy więc, że każdy ciąg $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots, \sigma_{n+p}$ posiada granicę o ile przedziały zagęszczają się nieograniczenie ($\varepsilon_n\to 0$). Należy teraz udowodnić, że ta granica jest wyznaczona jednoznacznie t.zn., że gdy weźmiemy jakiś inny ciąg to jego granica będzie ta sama. Załóżmy więc, że gdy dwa różne podziały rozdrabniamy to:

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \ldots \to I$$

$$\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \ldots, \sigma_n', \ldots \to I'$$

Należy dowieść, że $I=I'$;

$$I-I' = (I-\sigma_n)+(\sigma_n-\sigma_n')+(\sigma_n'-I')$$

Przechodząc do modułów mamy:

$$|I-I'|\leq|I-\sigma_n|+|\sigma_n-\sigma_n'|+|\sigma_n'-I'|$$

Ale z poprzednich rozważań wiemy że gdy tylko n jest dostatecznie wielkie, to: $|I-\sigma_n|<\frac{\varepsilon}{4}$, $|\sigma_n'-I'|<\frac{\varepsilon}{4}$ tak samo $|\sigma_n'-\sigma_n|<\frac{\varepsilon}{4}$.
Liczba n musi być tak wielka, żeby oscylacja w odpowiednich przedziałach była mniejsza od $\frac{\varepsilon}{8l}$; przypuśćmy, że dla $n>n_0$ te warunki są spełnione; wtedy:

$$|I-I'|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon$$

Ponieważ I i I' są stałe, więc z powyższego wynika że:

$$\underline{I=I'}$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie o istnieniu jednoznacznie określonej granicy, a więc symbol:

$$\int_{z_0}^{\mathcal{L}\, Z} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(\zeta_k)$$

ma sens, oczywiście przy założeniu, że gdy $n\to\infty$ to największa odległość między dwoma kolejnemi p. podziału $z_k - z_{k-1} \to 0$

Tak określona całka zależy naogół od drogi całkowania.

<u>Przykłady:</u>

1) $f(z) = c$; $\int_{z_0}^{\mathcal{L}\, Z} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(\zeta_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1})\, c =$

$$= \lim_{n\to\infty} c\,(z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + z_3 - z_2 + \dots + Z - z_{n-1}) = \underline{c(Z - z_0)}$$

Widzimy, że wynik jest taki sam jak dla zmiennej rzeczywistej i nie zależy od drogi $\mathcal{L}$ tylko od p. początkowego z_0 i końcowego Z;

2) $f(z) = z$; $\int_{z_0}^{\mathcal{L}\, Z} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \{\zeta_1(z_1 - z_0) + \zeta_2(z_2 - z_1) + \dots + \zeta_n(Z - z_{n-1})\} =$

$$= \lim \sigma_n = \lim \sigma_n' = \lim \frac{\sigma_n + \sigma_n'}{2}$$, gdzie σ_n oznacza szczególny przypadek sumy, gdy na ζ_k nadajemy wartości w początkowych, a σ_n' gdy w końcowych p. podziału, tak, że:

$$\sigma_n = z_0(z_1 - z_0) + z_1(z_2 - z_1) + z_2(z_3 - z_2) + \dots + z_{n-1}(Z - z_{n-1})$$

$$\sigma_n' = z_1(z_1 - z_0) + z_2(z_2 - z_1) + z_3(z_3 - z_2) + \dots Z(Z - z_{n-1})$$

Na zasadzie poprzedniego dowodu $\lim \sigma_n = \lim \sigma_n'$ a więc także każda z tych granic jest równa:

$$\lim \frac{\sigma_n + \sigma_n'}{2}$$

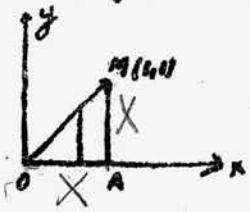
Tak więc $\int_{z_0}^{\mathcal{L}\, Z} z\,dz = \lim \frac{\sigma_n + \sigma_n'}{2} = \frac{(z_1 - z_0)(z_1 + z_0)}{2} + \frac{(z_2 - z_1)(z_2 + z_1)}{2} + \dots + \frac{(Z - z_{n-1})(Z + z_{n-1})}{2}$

$$\frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2 + z_2^2 - z_1^2 + z_3^2 - z_2^2 + \dots + Z^2 - z_{n-1}^2) = \underline{\frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2)}$$

Znów widzimy, że otrzymaliśmy wynik taki sam jak dla zmiennej rzeczywistej i niezależny od drogi całkowania L. Otóż jeżeli funkcja $f(z)$ jest funkcją ciągłą, a poza tem dowolną to jednak niezawsze wynik całkowania będzie niezależny od drogi, jak to widać z przykładu:

$f(z) = R(z) = x$ (bo $z = x + iy$);

Obliczmy całkę tej funkcji dwiema drogami:



1) wzdłuż boków kwadratu:

$$\int_0^1 R(z)\,dz = \int_0^1 x\,dx + 1 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 1 = \frac{3}{2};$$

2) wzdłuż przekątnej tego kwadratu:

$$\int_0^1 x\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 x\,dx = \sqrt{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rozdział 6. Obliczanie całki przy pomocy sprowadzenia całki do całki krzywolinjowej.

Całkę wzdłuż pewnej drogi możemy obliczyć wprowadzając całki krzywolinjowe zmiennej rzeczywistej. Dana jest całka:

$$\int_{z_0}^{Z} {}^{L} f(z)\,dz$$

i droga L określona jest przez równania $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, przyczem gdy t zmienia się od α do β, to p. z, opisuje na krzywej L drogę od p. z_0 do p. Z.

Zakładamy ciągłość pochodnych $\varphi'(t)$ i $\psi'(t)$.

Podziałowi drogi L w punktach: $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$, odpowiada podział odcinka α, β w punktach: $\alpha = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = \beta$, tak że:

$$\begin{cases} x_k = \varphi(t_k) \\ y_k = \psi(t_k) \end{cases} \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Punktom $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$, na drodze L odpowiadają punkty $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$