Istnienie funkcji wielowartościowych jest okolicznością utrudniającą wiele zagadnień z teorji f. analitycznych. Wprowadzenie f. wielowartościowych nie da się jednak uniknąć, ponieważ odwrócenie najprostszej zależności funkcyjnej daje już f. wielowartościowe.

Np. jeżeli $u=(z-z_0)^n$ to $z=z_0+\sqrt[n]{u}$ (n l. całkowita), i już wtedy mamy f. wielowartościową. Tak samo jeśli $u=e^z$ to $z=\lg u$.

Rozdział 15. Funkcje całkowite.

Funkcją całkowitą nazywamy funkcję nie posiadającą p. osobliwego w skończoności. Promień zbieżności takiego szeregu: $\rho=\infty$ i funkcja:

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest określona przez jeden tylko element.

Szczególnym wypadkiem f. całkowitych są wielomiany. Wtedy wszystkie współczynniki a_n począwszy od pewnego miejsca równają się zeru.

Funkcje całkowite mające nieskończenie wiele wyrazów nazywamy funkcjami całkowitemi przestępnemi.

Można udowodnić że f. całkowite $G(z)$, o ile nie są stałemi mają taką własność: Jakkolwiek wielkie weźmiemy M, to istnieją takie punkty ζ dla których $|G(\zeta)|>M$. [illegible] funkcji całkowitej

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności: Wiemy że f. $f(\zeta)$ rozwija się na szereg Taylora o współczynnikach:

$$(1)\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta \qquad (z_0=0).$$

Gdyby twierdzenie nasze było fałszywe, istniałaby taka l. M, że dla wszystkich punktów ζ byłoby: $|f(\zeta)|<M$; stąd wynikałaby nierówność dla równania (1);

$$|a_n|<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\,2\pi r$$, gdzie r oznacza promień

funkcja całkowita $\rightleftarrows$ regularna na całej płaszczyźnie koła C w równaniu (1). Jasnem jest że na kole C $|\zeta| = r$. Stąd mielibyśmy

$$(2) \quad |a_n| < \frac{M}{r^n}.$$

Z określenia l. M i z tego, że f. $f(\zeta)$ jest regularna w całej płaszczyźnie wynika, że w nierówn. (2) r może być dowolnie duże, a więc liczba $|a_n|$, dla $n > 0$ musiałaby być mniejsza od l. dowolnie małych. Możliwe to jest tylko wtedy gdy: $|a_n| = 0$ czyli $a_n = 0$ $(n \neq 0)$. Liczba a_0 może być różna od zera.

Ale taki szereg daje jako sumę a_0 czyli f. stałą. Tak więc doszliśmy do sprzeczności, co dowodzi naszego twierdzenia. Jest to twierdzenie Liouville'a.

Za pomocą wniosku z tw. Liouville'a można udowodnić zasadnicze twierdzenie algebry:

Każde równanie: (3) $P_n(z) = 0$, gdzie $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \cdots + a_1 z + a_0$ posiada pierwiastek.

P_n jest wielomianem; tw. Liouville'a można wielomianów bardziej sprecyzować; dla funkcji całkowitych wogóle udowodniliśmy, że jakkolwiek wielka byłaby l. M to istnieją takie p. ζ, że: $|G(\zeta)| > M$; dla wielomianów udowodnimy więcej, a mianowicie, że wszystkie p. zewnątrz pewnego koła o promieniu R posiadają tą własność.

Dowód:

$$|P_n(z)| = |a_n| \cdot |z^n| \, |1 + \eta|, \text{ gdzie } \eta \text{ jest to pewna liczba taka,}$$

że gdy $|z| \to \infty$ to $\eta \to 0$.

Jeśli więc tylko $|a_n| |z^n| > 2M$ to (4) $|P_n(z)| > M$.

Wystarczy w tym celu wziąć $|z^n| > \frac{2M}{|a_n|}$, t. znaczy $|z| > \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_n|}}$, i prócz tego tak duże by:

$$\frac{1}{2} < |1 + \eta| < 2;$$

Wtedy nierówność (4) jest spełniona i nasze twierdzenie udowodnione.

Twierdzenie Liouville'a możemy tak wysłowić: jeśli funkcja $f(z)$ jest regularna w całej płaszczyźnie i jest wszędzie ograniczona, to funkcja ta identycznie jest równa liczbie stałej

$|f(z)| < M$ $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n$; na zasadzie nierówności Cauchy $|a_n| \leq \frac{M}{R^n}$ gdzie R jest liczbą dowolną, M liczbą stałą

zatem $|a_n| \to 0$, i pozostaje a_0, a więc $\underline{f(z) = a_0}$ (liczba stała)

Teraz możemy dowieść, że każde równanie: $\mathcal{P}_n(z)=0$ ma pierwiastek.
Gdyby bowiem ich nie miało to byłoby:

$$\mathcal{P}_n(z)\neq 0 \quad \text{dla wszystkich } z,$$

ale wtedy funkcja: $f(z)=\frac{1}{\mathcal{P}_n(z)}$ byłaby wszędzie regularna a więc i całkowita (w znaczeniu zasadniczego określenia tego rozdziału).
Ale ponieważ $\mathcal{P}_n(z)$ jest wielomianem więc do każdego M można dobrać takie R_M, by dla $|z|>R_M$ zachodziła nierówność:

$$|\mathcal{P}_n(z)|>M.$$

Załóżmy $M=1$; wtedy byłoby: $|f(z)|=\frac{1}{|\mathcal{P}_n(z)|}<1$; zewnątrz tego koła.
Ale to byłoby sprzeczne z tw. Liouville'a,
które mówi, że dla f. całkowitej zawsze w dowolnej odległości od p. 0 istnieją takie punkty ζ, że: $|f(\zeta)|>1$.
Tak więc nasze tw. o istnieniu pierwiastków jest dowiedzione.
Teraz rozszerzymy twierdzenie Liouville'a. Dana jest f. całkowita; przestępna:

$$(5)\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dowiedziemy, że dla f. całkowitej, przestępnej istnieją takie p. ζ, że

$$(6)\ |g(\zeta)|>M|\zeta|^n \quad \text{(gdzie } n \text{ jest l. całkowitą)}$$

t. zn. że f. całkowita, przestępna ma wartość większą niż dowolny wielomian (albo najwyższy jego wyraz).
Dowód: Gdyby to nie zachodziło to mielibyśmy:

$$(7)\ |g(z)|\leq M|z^n|, \quad \text{dla wszystkich } z.$$

Wiemy, że wtedy ogólny sp-k rozwinięcia jest: $a_p=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta^{p+1}}d\zeta$;
C oznacza tu koło którego promień r nie przekracza promienia zbieżności szeregu, a więc które w naszym wypadku może być dowolnie wiel-

kie. Mielibyśmy: $|a_p| = \frac{1}{2\pi i}\left|\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta^{p+1}}\, d\zeta\right| < \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi r\, \frac{M|\zeta|^n}{|\zeta^{p+1}|}$,

również na kole: $|\zeta| = r$ więc byłoby: $|a_p| < \frac{M}{r^{p-n}}$

Rozpatrzymy dwa wypadki:

1) Gdy $p>n$, to $|a_p|$ byłoby nieskończenie małe (bo r jest dowolnie duże), a więc $|a_p|=0$, skąd $a_p=0$;

2) Gdy $p \leq n$ to $|a_p| < M r^{n-p}$, i wtedy a_p mogłoby być dowolnie duże.

Doszliśmy do wniosku:

Gdyby mogła zachodzić możliwość: $|g(z)| < M|z|^n$, to funkcja $g(z)$ rozwijałaby się na szereg kształtu: $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$, mającej skończoną ilość wyrazów, a więc nie byłaby f. przestępną wbrew założeniu, a byłaby wielomianem. Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Dowiedziona nierówność: (6) $|g(\zeta)| > M|\zeta|^n$, oznacza, że funkcja przestępna wzrasta szybciej niż dowolny wielomian.

Trzeba pamiętać, że twierdz. mówi, iż takie p. istnieją i jest ich nieskończenie wiele, ale są i takie p., w których nierówność (6) nie zachodzi:

Np. funkcja: $f(z)=e^z$ $(z=x+iy)$; rozważmy ją na osi x-ów.

Gdy $x \to +\infty$ to $e^z \to \infty$, gdy zaś $x \to -\infty$ to $e^z \to 0$. Widzimy więc że f. wykładnicza wzrasta szybciej niż wielomian tylko w pewnych kierunkach.

Rozdział 16. Twierdzenie i szereg Laurenta

Klasyfikacja punktów osobliwych funkcji jednowartościowych.

Zajmiemy się teraz funkcjami posiadającemi punkty osobliwe. Dotychczas rozpatrywaliśmy szeregi kształtu: (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, teraz zajmiemy się także i takiemi szeregami, których wyrazami są ujemne potęgi różnicy $(z-z_0)$ t. zn. (2) $\sum_{n=-\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots$