kie. Mielibyśmy: $|a_p| = \frac{1}{2\pi i}\left|\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta^{p+1}}\,d\zeta\right| < \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi r\,\frac{M|\zeta|^n}{|\zeta^{p+1}|}$,

ponieważ na kole: $|\zeta| = r$ więc byłoby: $|a_p| < \frac{M}{r^{p-n}}$

Rozpatrzymy dwa wypadki:

1) Gdy $p > n$, to $|a_p|$ byłoby nieskończenie małe (bo r jest dowolnie duże), a więc $|a_p| = 0$, skąd $a_p = 0$;

2) Gdy $p < n$ to $|a_p| < M r^{n-p}$, i wtedy a_p mogłoby być dowolnie duże.

Doszliśmy do wniosku:

Gdyby mogła zachodzić możliwość: $|g(z)| < M|z|^n$, to funkcja $g(z)$ rozwijałaby się na szereg kształtu: $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$, mający skończoną ilość wyrazów, a więc nie byłaby f. przestępną wbrew założeniu, a byłaby wielomianem. Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Dowiedziona nierówność: (6) $|g(\zeta)| > M|\zeta|^n$, oznacza, że funkcja przestępna wzrasta szybciej niż dowolny wielomian.

Trzeba podkreślić, że twierdz. mówi, iż takie p. istnieją i jest ich nieskończenie wiele, ale są i takie p., w których nierówność (6) nie zachodzi:

Np. funkcja: $f(z) = e^z$ $(z = x + iy)$; rozważmy ją na osi x-ów.

Gdy $x \to +\infty$ to $e^z \to \infty$, gdy zaś $x \to -\infty$ to $e^z \to 0$. Widzimy więc że f. wykładnicza wzrasta szybciej niż wielomian tylko w pewnych kierunkach.

Rozdział 16. Twierdzenie i szereg Laurent'a

Klasyfikacja punktów osobliwych funkcji jednowartościowych.

Zajmiemy się teraz funkcjami posiadającemi punkty osobliwe. Dotychczas rozpatrywaliśmy szeregi kształtu: (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, teraz zajmiemy się także i takiemi szeregami, których wyrazami są ujemne potęgi różnicy $(z - z_0)$ t. zn.

(2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + \frac{a_1}{z-z_0} + \frac{a_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots$

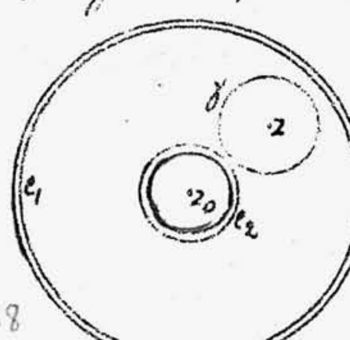
Szeregiem Laurenta nazywamy szereg, który jest sumą 2-u szeregów takich jak (1) i (2) a więc jest to szereg:

$$\overset{\text{regularny}}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n} + \overset{\text{główny}}{\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n}.$$

Udowodnimy twierdzenie Laurenta, które brzmi tak:

Mamy pierścień dokoła p. z_0, utworzony z dwóch kół o nierównych promieniach. Jeśli f. jest regularna w takim pierścieniu i jednowartościowa, to daje się rozwinąć na szereg Laurenta zbieżny w tym pierścieniu tak, że jego suma równa się właśnie tej funkcji.

Twierdzenie stosuje się tylko do p. wewnętrznych pierścienia, ale możemy zakreślić koło C_1, takie, że jego promień jest o ε mniejszy od promienia koła większego i drugie koło C_2 o prom. o ε większym od prom. koła mniejszego; wtedy brzegi owego pierścienia składają się z punktów regularnych. Dokoła p. z zakreślmy koło γ tak by nie przecinało kół C_1 i C_2. Na mocy znanego twierdz. mamy:



$$\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta + \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

bo koło C_1 obejmuje koło C_2 i γ. Ale:

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = 2\pi i f(z), \quad \text{więc:}$$

$$(3) \qquad \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = 2\pi i f(z)$$

Rozwińmy na szeregi obie całki: przekonamy się że jedna da szereg o wykładnikach dodatnich, druga o – ujemnych. Rozwijamy całkę pierwszą równości (3):

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{f(\zeta)}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{f(\zeta)}{1-u} \quad \text{gdzie } u=\frac{z-z_0}{\zeta-z_0};$$

ponieważ ζ leży na kole C_1 więc $|\zeta-z_0|>|z-z_0|$ i ułamek : $|u|<k<1$.
Wobec tego: $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{f(\zeta)}{1-u} = \frac{1}{\zeta-z_0} f(\zeta)(1+u+u^2+\dots+u^n+\dots) =$

$$= \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} + (z-z_0)\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2} + (z-z_0)^2\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^3} + \dots + (z-z_0)^n\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} + \dots$$

Szereg ten jest jednostajnie zbieżny względem ζ bo $|u|<k<1$, a $f(\zeta)$ jest na kole C_1 ograniczone : $|f(\zeta)|<M$. Całka sumy tego szeregu jest równa sumie całek wyrazów:

$$\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta + (z-z_0)\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta + \dots + (z-z_0)^n\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta + \dots$$

Każda z całek jest pewną liczbą, bo z_0 jest stałe, a ζ po scałkowaniu znika jako zmienna pozorna. Wprowadzimy oznaczenie:

$$2\pi i\, a_n = \int_{C}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

Szereg ostatni jest zbieżny bo powstał przez całkowanie szeregu jednostajnie zbieżnego, a więc: (4). $\int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)$

Rozłożymy podobnie drugą całkę różnicy (3).

$$-\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta$$

$$\frac{f(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{f(\zeta)}{z-z_0-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{f(\zeta)}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$; W tej całce ζ leży na kole C_2 a więc : $|\zeta-z_0|<|z-z_0|$ i mamy : $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| = |v|<k<1$;
I to więc wyrażenie rozwinie się na szereg zbieżny: $\frac{f(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{f(\zeta)}{z-z_0} + \frac{1}{(z-z_0)^2}f(\zeta)(\zeta-z_0)+\dots+\frac{1}{(z-z_0)^n}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}+\dots$

Szereg ten jest jednostajnie zbieżny więc całkując mamy:

$$\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta=(z-z_0)^{-1}\int_{C_2}f(\zeta)d\zeta+(z-z_0)^{-2}\int_{C_2}f(\zeta)(\zeta-z_0)d\zeta+\cdots+(z-z_0)^{-n}\int_{C_2}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta+\cdots$$

Oznaczmy wartość całek przez:

$$2\pi i\, b_n=2\pi i\, a_{-n}=\int_{C_2}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta\,,$$

wtedy otrzymamy: (5) $\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta=2\pi i\sum_{n=-1}^{n=-\infty}a_n(z-z_0)^n$

Jeśli wartości obu całek podstawimy do różnicy (3) to otrzymamy

(6) $2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+2\pi i\sum_{n=-1}^{n=-\infty}a_n(z-z_0)^n=2\pi i f(z)$ skąd:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-1}^{n=-\infty}a_n(z-z_0)^n$$, albo łącząc obie

sumy w jedną: (6) $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}a_n(z-z_0)^n$

Okazaliśmy że nasza f. daje się rozwinąć na szereg Laurent'a. c. b. d. o.
Funkcja daje się rozwinąć w pierścieniu na szereg Laurent'a o ile jest w danym obszarze regularna i jednowartościowa. To, że f. jest regularna nie jest równoznaczne z tem, że jest jednowartościowa, bo pierścień nie jest obszarem jednospójnym i p. krytyczny może leżeć wewnątrz mniejszego koła.
Tak np. f. lgz jest w pierścieniu utworzonym przez dwa koła o środku w p. 0 regularna (bo p. nieregularny z=0 nie należy do pierścienia), ale nie w nim jednowartościowa i nie daje się rozwinąć na szereg Laurent'a.
Założenie że f. jest jednowartościowa jest konieczne dlatego, że inaczej nie moglibyśmy mówić że: $\int_{C_1}=\int_{C_2}+\int_{\gamma}$, twierdzenie to dowiedliśmy bowiem (patrz rozdział 7), zakłada-

jąc jednowartościowość funkcji, gdyż inaczej całki wzdłuż odcinków łączących różne brzegi mogłyby się nie znieść.
Gdy warunki założenia są spełnione to jak okazaliśmy:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}. \quad (b_n=a_{-n})$$

Jeśli oznaczymy:

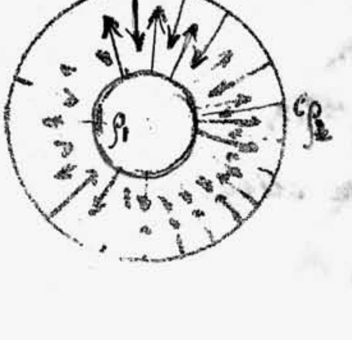
$$(4)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=f_1(z) \quad i \quad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z)^{-n}=f_2(z)$$

to $$(6'')\quad f(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

Funkcja $f(z)$ została rozłożona na dwie części składowe.
Szereg (4) jest to szereg potęgowy. Obszarem jego zbieżności jest pewne koło o środku w p. 0 ($z_0=0$), a promieniu ρ_2. Szereg ten jest więc zbieżny, gdy $|z-z_0|<\rho_2$, t. zn. w całem kole większem (nietylko w pierścieniu)
Zbadajmy, jaki jest obszar zbieżności szeregu (5).
Załóżmy w tym celu: $(z-z_0)^{-1}=\frac{1}{z-z_0}=\zeta$; wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n$ jest to szereg potęgowy; jest on więc zbieżny wewnątrz pewnego koła t. zn. dla $|\zeta|<r$; ale wtedy: $|z-z_0|=\frac{1}{|\zeta|}>\frac{1}{r}=r'$
Widać stąd, że szereg (3) jest zbieżny zewnątrz pewnego koła. Ponieważ suma obu szeregów jest zbieżna w pierścieniu, więc, o ile szereg (3) jest zbieżny zewnątrz pewnego koła to jest, rzecz prosta, zbieżny zewnątrz mniejszego koła pierścienia, t. zn. dla $|z-z_0|>\rho_1$;
Teraz jasnem jest, że że szereg Laurent'a jest zbieżny wewnątrz pierścienia: w tym pierścieniu bowiem zachodzi jednoczesna zbieżność obu szeregów cząstkowych (4) i (5)



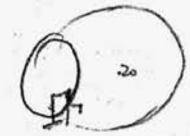
Trzeba się teraz przekonać, czy rozwinięcie f. na szereg Laurent'a jest jedyne, czy nie. Udowodnimy, że jest jedyne:

Gdyby istniały dwa różne rozwinięcia tej samej funkcji $f(z)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

to jak udowodnimy musiałoby być $a_n = c_n$ t. zn. szeregi takie muszą być identyczne.

Pomnóżmy oba szeregi przez $(z-z_0)^{k-1}$, wtedy zachodziłoby:



$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z-z_0)^{n+k-1} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(z-z_0)^{n+k-1}$$

Obydwa te szeregi są jednostajnie zbieżne wewnątrz pierścienia. Weźmy koło leżące wewnątrz pierścienia i scałkujmy wzdłuż tego koła Γ oba szeregi. Symbole całki i sumy możemy przestawić; otrzymamy:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_\Gamma (z-z_0)^{n+k-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_\Gamma (z-z_0)^{n+k-1}dz \qquad \text{ale } \int_\Gamma (z-z_0)^{n+k-1}dz = \frac{(z-z_0)^{n+k}}{(n+k)}\,?$$

Ponieważ Γ jest drogą zamkniętą, więc punkt początkowy i końcowy zlewają się, a zatem całka jest równa zeru gdy $n \neq -k$ (mamy wtedy drogę Γ I-ej kategorji), t. zn gdy $n+k \neq 0$. Gdy zaś $n=-k$ to: ??

$$\int_\Gamma (z-z_0)^{n+k-1}dz = \int_\Gamma (z-z_0)^{-1}dz = \int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}.$$

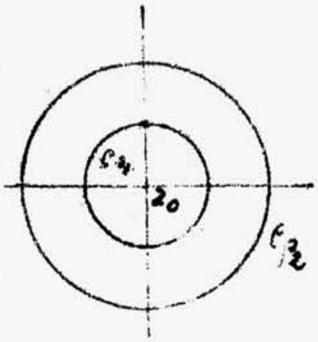
Dla naszej f. podcałkowej punkt $z=z_0$ jest p. nieregularnym, a ponieważ Γ okrąża ten punkt raz, więc: $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$

Ponieważ w przedziale $(-\infty, +\infty)$, gdzie n jest zmienne, a k stałe, n tylko raz przybiera wartość: $n=-k$, więc po scałkowaniu obu szeregów mamy:

$$2\pi i\, a_{-k} = 2\pi i\, c_{-k} \quad \text{skąd} \quad \underline{c_{-k} = a_{-k}}$$

Ale k było liczbą zupełnie dowolną (całkowitą), więc twierdzenie udowodnione jest dla wszystkich wskaźników.

<u>Przykład:</u> $$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$



Dnie koła o prom. $\rho_1=1$ i $\rho_2=2$ płaszczyzna została podzielona na 3-y części:

1) $|z|<1$; funkcja rozwija się na szereg potęgowy
2) $1<|z|<2$ " " " " " Laurent'a
3) $|z|>2$ " " " " " Laurent'a (ale inny niż w pierścieniu)

Rozwiniemy funkcję na szereg Laurent'a; zajdzie to w pierścieniu:

$$f(z)=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}=\frac{(A+B)z-2A-B}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

a więc stąd: $\begin{cases} A+B=0 & \text{czyli } A=-B \\ -2A-B=1; & \text{skąd } -A=1 \text{ więc } A=-1 \text{ i } B=1; \text{ tak więc} \end{cases}$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1-z};$$ Obie części traktujemy oddzielnie: część 1-szą rozwiniemy na szereg Taylor'a wewnątrz koła większego, część 2-ą rozwiniemy na szereg względem $\frac{1}{z}=\zeta$;

Część 1-a: $$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\left\{1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\dots+\frac{z^n}{2^n}+\dots\right\}$$

Szereg ten jest zbieżny nietylko w pierścieniu, ale w całem większem kole t.zn. gdy tylko: $|z|<2$.

Część druga: $$\frac{1}{1-z}=\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left\{1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots+\frac{1}{z^n}+\dots\right\}=$$
$$=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\dots-\frac{1}{z^n}-\dots;$$

Szereg ten jest zbieżny, gdy $\frac{1}{|z|}<1$ t.zn. dla $|z|>1$.

Łącząc oba szeregi w jeden otrzymamy:

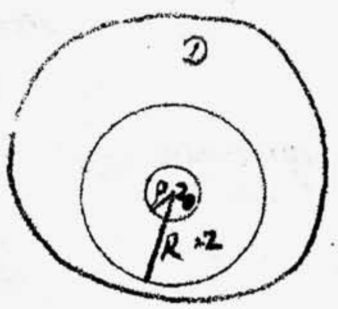
$$f(z) = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\frac{z}{4}+\frac{1}{z^2}+\frac{z^2}{8}+\frac{1}{z^3}+\dots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\dots\right)$$

Szereg ten jest zbieżny wewnątrz pierścienia.

Zewnątrz większego koła otrzymalibyśmy szereg o wykładnikach tylko ujemnych. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}$.

Szeregi Laurenta służą w niektórych przypadkach do badania osobliwości w funkcjach. Wiemy, że szereg Taylora o ile był zbieżny w kole zatoczonym z p. z_0, to mógł służyć do badania funkcji w otoczeniu p. z_0.

Szereg Laurenta jest na ogół w otoczeniu p. z_0 rozbieżny, (bo z_0 na ogół jest zewnątrz pierścienia), ale jest jeden wypadek kiedy może służyć do badania funkcji w otoczeniu p. z_0, a mianowicie gdy punkt osobliwy jest p. odosobnionym. Pierścień budujemy w ten sposób, że promień koła dużego czynimy równym odległości p. z_0 od najbliższego p. osobliwego funkcji, zaś promień koła małego wybieramy tak bliski zeru by punkt z znalazł się w pierścieniu t.zn. zewnątrz tego małego koła. Punkt z jest tu p. należącym do badanego otoczenia p. z_0. ?



Tak np. w obszarze D kreślimy jedno koło o prom. R drugie zaś o pr. ρ dowolnie małym tak by:

$$\rho<|z-z_0|<R$$

Wtedy funkcja rozwinie się w tym pierścieniu tak:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = f_1(z)+f_2(z),$$ gdzie

1) $$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

zaś 2) $$f_2(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

Pierwsza część jest to szereg potęgowy Taylora zbieżny przy $|z-z_0|<R$.

Druga część jest to szereg zbieżny zewnątrz małego koła. Załóżmy: $\frac{1}{z-z_0}=\zeta$, a
wtedy ta druga część:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\zeta^n=\mathcal{G}(\zeta)$$

będzie f. całkowitą zmiennej ζ: $\mathcal{G}(\zeta)$, bo zbieżność zachodzi gdy $|z-z_0|>\rho$, ale wtedy: $|\zeta|=\frac{1}{|z-z_0|}<\frac{1}{\rho}$; liczba ρ może być dowolnie mała, a więc $\frac{1}{\rho}$ dowolnie duża, tak więc szereg nasz ma względem ζ nieskończenie wielki promień zbieżności, a to już wystarcza, by $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ było f. całkowitą zmiennej $\frac{1}{z-z_0}=\zeta$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\zeta^n=\mathcal{G}(\zeta)=\mathcal{G}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

Funkcję $f(z)$ rozłożyliśmy na dwie części: $f(z)=f_1(z)+\mathcal{G}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$. Dla f. $f_1(z)$ punkt z_0 nie jest wcale p. osobliwym i dlatego część $f(z)$ nazywamy <u>częścią regularną</u> f. $f(z)$; $\mathcal{G}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$, która powoduje osobliwość p. z_0 dla f. $f(z)$ nazywamy <u>częścią osobliwą</u> albo częściej <u>częścią główną</u>.

Mogą się zdarzyć dwie możliwości:

1) Część główna $\mathcal{G}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ może być wielomianem (t.zn. mieć skończoną ilość wyrazów); wtedy mamy szereg:

$$\sum_{n=1}^{p}b_n\zeta^n=\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\dots+\frac{b_p}{(z-z_0)^p}$$

Punkt odosobniony nazywamy wtedy <u>biegunem</u> rzędu „p". Stopień wielomianu wskazuje rząd bieguna. Widzimy, że w tym wypadku funkcja $f(z)$ jest równa sumie f. regularnej $f_1(z)$ o punkcie z_0 plus wyrażenie $\sum_{n=1}^{p}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ n wielomian $W\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ stopnia p.

Gdy mamy biegun 1-go rzędu to $f(z)=f_1(z)+\frac{b_1}{z-z_0}$;

" " " 2-go " " $f(z)=f_1(z)+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}$;

" " " p-tego " " $f(z)=f_1(z)+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\dots+\frac{b_p}{(z-z_0)^p}$;

2) Część główna może być także f. całkowitą przestępną (o nieskończ. l. wyrazów), wtedy punkt z_0 nazywamy <u>punktem</u> <u>istotnie</u> <u>osobliwym</u> funkcji $f(z)$.

Tak np. funkcja: $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ posiada p. istotnie osobliwy: $z=0$, bo pochodna jest $f'(z)=e^{\frac{1}{z}}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)$ i w punkcie $z=0$ nie ma określonej wartości; wiemy ponadto że:
$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots+\frac{1}{n!z^n}+\dots$$
Szereg ten jest zbieżny o ile $z\neq 0$ ~~o ile $z\neq 0$~~; przekonamy się o tem kładąc: $\frac{1}{z}=\zeta$; wtedy: $e^{\zeta}=1+\frac{\zeta}{1!}+\frac{\zeta^2}{2!}+\frac{\zeta^3}{3!}+\dots+\frac{\zeta^n}{n!}+\dots$ daje szereg zbieżny dla wszystkich skończonych wartości ζ.

Widzimy, że f. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ rozwinęła się na szereg Laurent'a w ten sposób, że część regularna równa się zeru, a część główna jest f. całkowitą przestępną od $\frac{1}{z}$: więc oczywiście punkt $z=0$ jest p. istotnie osobliwym.

Aby taka klasyfikacja p. osobliwych na p. istotnie osobliwe i bieguny była możliwa, potrzeba żeby badana funkcja była jednowartościowa; przy funkcjach wielowartościowych mogą istnieć jeszcze inne p. osobliwe, które noszą nazwę p. krytycznych, gdzie się gałęzie f. razem łączą.

A więc gdy $f(z)$ posiada w obszarze, gdzie f. jest jest jednowartościowa p. nieregularny odosobniony to punkt ten może być tylko: albo biegunem albo p. istotnie osobliwym.

Funkcje jednowartościowe mogą posiadać p. istotnie osobliwe, tworzące zbiory wszędzie gęste np. pewne linje krzywe i t.p. O ile to zachodzi t.j. o ile p. osobliwe nie są odosobnione to mamy przed sobą zagadnienie b. złożone, którem zajmować się nie będziemy.

Punkt w nieskończoności:

Aby omówić zachowanie się funkcji w p. w nieskończoności robimy takie umowy: mamy f. $f(z)$; zakładamy $\frac{1}{z}=\zeta$ i wtedy $f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=F(\zeta)$.

Gdy f. $F(\zeta)$ jest w p. $\zeta=0$ regularna	Gdy f. $F(\zeta)$ jest w p. $\zeta=0$ nieregularna
to f. $f(z)$ " " " $z=\infty$ "	to f. $f(z)$ " " " $z=\infty$ "

Gdy f. $F(\zeta)$ posiada w p. $\zeta=0$ biegun lub punkt istotnie osobliwy, to

f. $f(z)$ posiada w p. $z=\infty$ biegun lub p. istotnie osobliwy.
Co się dzieje z pojęciem otoczenia?
Otoczeniem p. $\zeta=0$ nazywamy punkty leżące wewnątrz koła o prom. ρ, a więc punkty ζ takie że: $|\zeta|<\rho$. Wtedy jednak $|z|>\frac{1}{\rho}$ i dlatego otoczeniem p. w nieskończoności nazywamy p. leżące zewnątrz koła o dowolnie wielkim promieniu.
Z tych słów wyciągamy takie wnioski:
gdy szereg: $f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\dots+\frac{a_n}{z^n}+\dots$ będzie zbieżny dla wszystkich wartości $|z|>\frac{1}{\rho}$, to f. $f(z)$ będzie regularna w nieskończoności, bo wtedy: $f(z)=F(\zeta)=a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\dots+a_n\zeta^n\dots$ przedstawia szereg zbieżny dla $|\zeta|<\rho$, a więc f. $F(\zeta)$ będzie regularna w otoczeniu p. $\zeta=0$.
Gdy $f(z)$ daje się rozwinąć na szereg zbieżny: $f(z)=b_1z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\dots+\frac{a_n}{z^n}+\dots$ to f. ma w nieskończoności biegun 1-go rzędu bo wtedy:
$F(\zeta)=\frac{b_1}{\zeta}+a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\dots+a_n\zeta^n+\dots$ posiada w p. $\zeta=0$ biegun 1-go rzędu.
Gdy $f(z)$ rozwija się na szereg zbieżny:

$$f(z)=b_pz^p+b_{p-1}z^{p-1}+\dots+b_1z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\dots+\frac{a_n}{z^n}+\dots$$

to f. $f(z)$ posiada w nieskończoności biegun rzędu p, bo wtedy:
$F(\zeta)=\frac{b_p}{\zeta^p}+\frac{b_{p-1}}{\zeta^{p-1}}+\dots+\frac{b_2}{\zeta^2}+\frac{b_1}{\zeta}+a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\dots+a_n\zeta^n+\dots$ posiada w p. $\zeta=0$ biegun rzędu p.
Gdy $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n=b_1z+b_2z^2+\dots+b_nz^n+\dots+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\dots+\frac{a_n}{z^n}+\dots$, to znaczy gdy $f(z)$ daje się rozwinąć na szereg Laurent'a w którym części główna i część regularna są zbieżne dla dowolnie dużych z, to $f(z)$ posiada w nieskończoności p. istotnie osobliwy.
Wtedy część główna musi być całkowita i przestępna: $G(z)$, t. zn:

$$f(z)=G(z)+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\dots$$

, zaś ta druga część jest zawsze w otoczeniu p. w nieskończoności regularna.

Wniosek: Wielomian posiada w nieskończoności tylko bieguny rzędu równego stopniowi wielomianu (bo w rozwinięciu część główna ma skończoną ilość wyrazów); zaś funkcja przestępna posiada w nieskończoności tylko p. istotnie osobliwe (Obie te f. są jak wiemy w skończoności regularne).

Funkcja regularną w skończoności i w nieskończoności może być tylko stała.

Funkcje ułamkowe.

Weźmy pod uwagę f. $\frac{P(z)}{Q(z)}$; punktami osobliwemi tej f. będą tylko pierwiastki równania: $Q(z)=0$ t.zn.: $z=z_1, z_2, z_3 \dots z_n$; są to p. odosobnione, gdyż jest ich skończona ilość ($Q(z)$ jest stopnia n).

Udowodnimy, że punkty te są dla f. ułamkowej biegunami i rząd odpowiedniego bieguna jest równy krotności danego pierwiastka.

Weźmy dowolny pierwiastek: z_p, krotności α; wiemy że wtedy:

$$Q(z)=(z-z_p)^{\alpha}\cdot Q_1(z) \qquad \text{gdzie } Q_1(z_p)\neq 0.$$

Ułamek $\frac{P(z)}{Q(z)}$ rozwiniemy na szereg Laurent'a w otoczeniu p. z_p.

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)}{(z-z_p)^{\alpha}Q_1(z)}=\frac{1}{(z-z_p)^{\alpha}}\cdot\frac{P(z)}{Q_1(z)}$$

Czynnik $\frac{P(z)}{Q_1(z)}$ jest w otoczeniu p. $z=z_p$ regularny, bo $Q_1(z_p)\neq 0$, więc czynnik ten da się rozwinąć na szereg potęgowy, zbieżny wewnątrz pewnego koła, które przyjmiemy za zewnętrzne koło pierścienia:

$$\frac{P(z)}{Q_1(z)} = a_0+a_1(z-z_p)+a_2(z-z_p)^2+\dots+a_{\alpha}(z-z_p)^{\alpha}+a_{\alpha+1}(z-z_p)^{\alpha+1}+\dots$$

Skąd:
$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{(z-z_p)^{\alpha}}\left\{a_0+a_1(z-z_p)+\dots+a_{\alpha}(z-z_p)^{\alpha}+a_{\alpha+1}(z-z_p)^{\alpha+1}+\dots\right\}=$$

$$=\underbrace{\frac{a_0}{(z-z_p)^{\alpha}}+\frac{a_1}{(z-z_p)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{a_{\alpha-1}}{z-z_p}}_{\text{część główna}}+\underbrace{a_{\alpha}+\frac{a_{\alpha+1}}{1}(z-z_p)+a_{\alpha+2}(z-z_p)^2+\dots}_{\text{regularna}}$$

Rozwinęliśmy naszą f. ułamkową na szereg Laurent'a w pierścieniu o dowolnie małem kole wewnętrznem. Widzimy że część główna ma skończoną ilość

wyrazów, właśnie tyle ile wynosi krotność danego pierwiastka. Punkt więc z_0 jest biegunem rzędu krotności pierwiastka z_0.
Rozważmy co zachodzi w nieskończoności: Udowodnimy, że jeśli przez m oznaczymy stopień licznika $P(z)$, a przez n stopień mianownika $Q(z)$, wtedy gdy $m \leq n$ to p. w nieskończoności jest p. regularnym, gdy zaś $m > n$ to p. w nieskończoności jest biegunem rzędu $m-n$.
Dla dowodu załóżmy: $\frac{1}{z} = \zeta$; rozpatrzymy najpierw wypadek: $m \leq n$.

$$\frac{P\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{Q\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \frac{\zeta^n P_1(\zeta)}{\zeta^m Q_1(\zeta)} = \frac{\zeta^{n-m} P_1(\zeta)}{Q_1(\zeta)}$$

Dla naszego ułamka punkt $\zeta = 0$ jest p. regularnym, bo mianownik $Q(z)$ rozwija się na szereg:

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n =$$

$$= \frac{a_0}{\zeta^n} + \frac{a_1}{\zeta^{n-1}} + \dots + a_n \quad \text{a więc } Q_1(\zeta) = \zeta^n Q(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n$$

Tak więc $Q_1(0) = a_0 \neq 0$, bo $Q(\zeta)$ było stopnia n. Widzimy więc, że gdy $m \leq n$ to w p. $\zeta = 0$ zachodzi regularność f. względem ζ, a jak wiemy wtedy nasza f. jest regularna w p. $z = \infty$
Rozpatrzymy teraz wypadek: $m > n$; wtedy:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = W(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}$$

$R(z)$ ma stopień niższy niż $Q(z)$, a więc na mocy rozpatrywanego przed chwilą wypadku ułamek $\frac{R(z)}{Q(z)}$ jest w nieskończoności regularny.
Wielomian $W(z)$ jest stopnia $m-n$, a więc posiada w nieskończoności biegun rzędu $m-n$.
Okazaliśmy, że f. ułamkowe posiadają tylko skończoną l. biegunów a p. istotnie osobliwych nie posiadają.
Rozpatrując f. e^z, $\sin z$, $\cos z$ udowodnilibyśmy, że posiadają one tylko jeden p. istotnie osobliwy w nieskończoności.

Rozpatrzymy teraz f. $Ctg z = \frac{\cos z}{\sin z}$,
Udowodnimy, że posiada bieguny w nieskończoności. Funkcja ta może posiadać biegun tylko w p. $z = k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots \infty$), bo wtedy mianownik: $\sin z = 0$; punkty te będą p. odosobnionemi (bo każdy jest oddalony od sąsiednich o π), a więc rozwinięcie naszej f. na szereg Laurenta w otoczeniu każdego z tych p. jest możliwe.
Gdy z punktu $z = k\pi$, zakreślimy jako ze środka koło o prom. $\rho < \pi$ to wszystkie punkty leżące wewnątrz tego koła, oprócz środka, będą regularne; możemy więc w p. $z = k\pi + \zeta$ należącym do takiego koła rozwinąć:

$$Ctg z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos(k\pi+\zeta)}{\sin(k\pi+\zeta)} = \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta} = \frac{1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} + \dots}{\zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} - \dots} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\cos\zeta}{1 - \frac{\zeta^2}{3!} + \frac{\zeta^4}{5!} + \dots}$$

ponieważ: $\sin\zeta = \zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} - \frac{\zeta^7}{7!} + \dots$ a $\cos\zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} - \dots$

Ułamek: $\frac{\cos\zeta}{1 - \frac{\zeta^2}{3!} + \frac{\zeta^4}{5!} - \dots}$ jest w p. $\zeta = 0$ regularny, bo licznik jest dla $\zeta = 0$ regularny, a mianownik ma wtedy wartość 1; ułamek ten daje się więc rozwinąć na szereg potęgowy:

$$\frac{\cos\zeta}{1 - \frac{\zeta^2}{3!} + \frac{\zeta^4}{5!} - \frac{\zeta^6}{7!} + \dots} = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots + a_n\zeta^n + \dots$$

Wobec tego f. $\cotg z = \frac{1}{\zeta}(a_0 + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n + \dots) = \frac{a_0}{\zeta} + a_1 + a_2\zeta + \dots$

W naszym rozwinięciu f. $Ctg z$ część główna jest to jedyny wyraz: $\frac{a_0}{\zeta}$, a więc w p. $\zeta = 0$ czyli $z = k\pi$ mamy biegun pierwszego rzędu. Nasza f. $Ctg z$ (a podobnie i $tg z$) posiada zatem nieskończenie wiele biegunów leżących na osi x-ów i tworzących postęp o różnicy π.
Funkcje, które tak jak Ctg, tg (a także f. ułamkowe) posiadają w skończoności tylko bieguny nazywamy f. meromorficznemi.

Przez odwrócenie*) f. trygonometrycznych otrzymujemy funkcje które mają p. krytyczne.

Itak jeśli $z=\cos\zeta$, to po odwróceniu zależności mamy: $\operatorname{arc}\cos z=\zeta$

Weźmy pod uwagę wzór Eulera: $e^{\alpha i}=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $e^{-\alpha i}=\cos\alpha-i\sin\alpha$

Dodając te dwie równości stronami mamy:

$$e^{\alpha i}+e^{-\alpha i}=2\cos\alpha$$

Wzór ten jest prawdziwy i dla l. zespolonych, bo f. zmiennej zespolonej są przedłużeniami analitycznemi odpowiednich funkcji zmiennej rzeczywistej. Przedłużenie jest jak wiemy możliwe w jeden sposób:

$$e^{(\xi+i\eta)}+e^{-(\xi+i\eta)}=2\cos(\xi+i\eta) \qquad (\zeta=\xi+i\eta)$$

Oznaczmy: $u=e^{(\xi+i\eta)}$ wtedy $e^{-(\xi+i\eta)}=\frac{1}{u}$, więc

$$2\cos\zeta=u+\frac{1}{u}=2z \quad , \text{ to } \cos\zeta=z.$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika, otrzymamy:

$$u^2-2uz+1=0$$

$$\text{skąd: } u=z\pm\sqrt{z^2-1}=e^{\zeta i}, \text{ tak więc}$$

$$\zeta i=\lg u=\lg(z\pm\sqrt{z^2-1})$$

Mamy więc funkcję odwrotną do trygonometrycznej wyrażoną w formie logarytmu: gdy $z=\cos\zeta$ to

$$\zeta=\operatorname{arc}\cos z=\frac{1}{i}\lg(z\pm\sqrt{z^2-1})$$

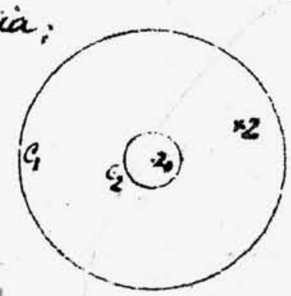
Punktem osobliwym tej f. jest p. $z=\pm1$; jest to punkt krytyczny, p. rozgałęzienia się funkcji. W tym punkcie zlewają się dwie wartości funkcji. Punkt w nieskończoności jest także p. krytycznym bo, kładąc: $z=\frac{1}{\zeta}$ mamy: $\lg z=\lg\frac{1}{\zeta}=-\lg\zeta$; p. $\zeta=0$ jest p. krytycznym dla tej nowej f. a więc p. $z=\infty$ jest p. krytycznym dla starej. W tym p. w nieskończoności zlewają się z sobą nieskończenie wiele gałęzi funkcji.

---

*) Ścisłe omówienie sposobu odwracania zależności funkcyjnej — poniżej.

Uwaga: Przy pomocy tw. Laurenta bardzo łatwo jest udowodnić że f. analityczna nie może posiadać w p. z_0 p. osobliwego z zachowaniem ciągłości o ile w jego otoczeniu f. jest jednowartościowa i nie ma innych p. osobliwych. (Innemi słowy w p. z_0 z 3-ch warunków Cauchy'go zakładamy 2-a pierwsze).

Niech będzie p. z_0; z warunków założenia wynika, że można utworzyć pierścień z dwu kół o środku w p. z_0, w którym f. jest regularna, a promień mniejszego koła dowolnie mały. Weźmy dowolny p. z z tego pierścienia; jak przy dowodzie tw. Laurenta (patrz wyżej) mamy:



$$(9)\qquad \int_{c_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int_{c_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=2\pi i f(z)$$

Skąd:
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

Łatwo widać że całka wzdłuż c_2 jest równa zeru, ponieważ $\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|<M$, gdyż $f(\zeta)$ jest f. ciągłą, a mianownik $|\zeta-z|>\lambda$ gdzie λ oznacza l. mniejszą od najmniejszej odległości p. z od koła c_2.

Wobec tego:
$$\left|\int_{c_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|<M\cdot 2\pi\rho$$
, gdzie ρ jest promieniem koła c_2, a ponieważ ρ jest tak małe jak się podoba, więc nasza całka musi się równać zeru. Z równości (9) pozostaje więc:

$$(7)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

Całka po prawej stronie we wzorze (7) jest całką Cauchy'go a więc przedstawia f. regularną we wszystkich p. koła c_1; f. ta jest identyczna we wszystkich p. poza p. z_0 z funkcją $f(z)$, a więc na zasadzie przedłużenia analitycznego musi być identyczna i w p. z_0; stąd widać, że p. z_0 jest dla naszej f. p. regularnym.

Z dowodu wynika, że do tego samego wyniku doszlibyśmy gdybyśmy nic nie założyli o f. $f(z)$, w samym p. $z=z_0$, ale zato przyjęli nowe założenie że $|f(z)|$ jest ograniczony w otoczeniu p. z_0.
Dla f. wielowartościowej twierdzenie to może nie zachodzić: np. $f(z)=\sqrt{z}$, posiada w p. $z=0$ p. osobliwy chociaż jest w tym p. ciągła.

O rezyduach.

Udowodnimy b. ważne twierdzenie Cauchy'go.
Wiemy że całka wzdłuż drogi zamkniętej z f. regularnej t.zn.

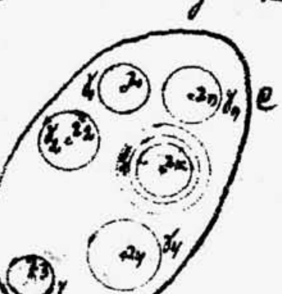
$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = 0$$ (w obszarze jej regularności)

Zajmiemy się teraz f. nieregularnemi. Niech f. $f(z)$ będzie regularną posiadającą skończoną l. biegunów lub p. istotnie osobliwych wewnątrz drogi całkowania. Wtedy, jak okażemy, zachodzi:

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} r_k$$

, gdzie n oznacza liczbę p. osobliwych, a r_k oznacza tu pewną wielkość związaną z punktem osobliwym, o numerze k, zwaną rezyduum p. osobliwego; r_k jest równe spółczynnikowi a_{-1} (t.zn. sp-kowi przy ζ^{-1}) w rozwinięciu f. $f(\zeta)$ na szereg Laurent'a w otoczeniu p. osobliwego z_k.

Dowód: Punkty z_k muszą leżeć wewnątrz drogi całkowania C. Każdy z p. osobliwych z_k otaczamy kołem γ_k takiem, by te koła nie przecinały się z sobą ani z krzywą C. Wtedy jak wiemy całka:



$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(\zeta)\,d\zeta$$

bo krzywa C otacza wszystkie koła γ_k (patrz str. 58).
Obliczmy wartość takiej całki wzdłuż γ_k; w tym celu

zakreślmy dokoła p. z_k dwa koła jedno większe, drugie mniejsze niż koło γ_k; w pierścieniu tworzonym przez te koła f. jest regularna i rozwija się na szereg Laurent'a.

$$f(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(\zeta-z_k)^n$$

Ponieważ szereg ten jest wewnątrz pierścienia jednostajnie zbieżny więc:

$$\int_{\gamma_k} f(\zeta)d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n\int_{\gamma_k}(\zeta-z_k)^n d\zeta$$

Rozważmy dwie możliwości: 1); $n\neq-1$; wtedy f. pierwotna od $(\zeta-z_k)^n$ jest $\frac{(\zeta-z_k)^n}{(n+1)!}$ i całka wzdłuż krzywej zamkniętej jest równa zeru.

$\frac{(\zeta-z_k)^{n+1}}{(n+1)}$

2) $n=-1$; wtedy $a_{-1}\int_{\gamma_k}\frac{d\zeta}{\zeta-z_k}=a_{-1}\lg(\zeta-z_k)=2\pi i a_{-1}=2\pi i r_k$

bo f. logarytm przy obieganiu p. zerowego raz dokoła zmienia wartość (gdy obiega w kierunku dodatnim, jak w naszym wypadku, to wzrasta), o $2\pi i$

W ten sposób w każdej z sum pozostanie jeden wyraz, właśnie $2\pi i r_k$, a więc:

$$\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(\zeta)d\zeta=2\pi i\sum_{k=1}^{n} r_k \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Twierdzenie to służy do obliczania niektórych całek.

<u>Przykłady:</u>

1) Obliczyć całkę: $\int_0^{2\pi} f(\sin x,\cos x)\,dx$, gdzie f. jest f. wymierną.

Oznaczmy: $e^{xi}=\zeta$; wtedy:

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\zeta+\dfrac{1}{\zeta}\right)\\[2ex] \sin x=\dfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}=\dfrac{1}{2i}\left(\zeta-\dfrac{1}{\zeta}\right)\end{cases}$$

Ponieważ $e^{xi}=\zeta$, więc $xi=\lg\zeta$ skąd $x=\frac{\lg\zeta}{i}$ i wreszcie $dx=\frac{d\zeta}{i\zeta}$

Wobec tego: $\int_0^{2\pi} f(\cos x,\sin x)\,dx=\int_C f\left\{\frac{1}{2i}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right),\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\right\}\frac{d\zeta}{i\zeta}$

Gdy x zmienia się od 0 do 2π, to $e^{xi} = \zeta = \cos x + i \sin x$ i jak widać $|\zeta| = 1$ (bo ζ jest necz jasna l. zespoloną), a więc drugą całkę całkujemy wzdłuż koła o prom. równym 1.

Nasza f. pocałkowa posiada wewnątrz koła tylko bieguny, więc sumę rezyduów należy rozciągnąć na wszystkie p. osobliwe wewnątrz C, tak więc:

$$\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\,dx = \int_C f\left\{\frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right), \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right\} \frac{d\zeta}{i\zeta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{n} r_k = 2\pi \sum_{k=1}^{n} r_k ,$$

gdzie r_k oznacza rezyduum funkcji: $f\left\{\frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right), \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right\} \cdot \frac{1}{\zeta}$ w p. osobliwym ζ_k.

Obliczmy w ten sposób np. całkę następującą:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{1}{i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta\left\{a + \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right\}} = \frac{2}{i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 2a\zeta + 1} = 2 \cdot 2\pi \sum_{k=1}^{n} r_k ,$$

gdzie C jest to koło o promieniu 1 dokoła p. zerowego. Funkcja jest nie regularna wtedy gdy: $\zeta^2 + 2a\zeta + 1 = 0$; skąd $\zeta_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$;

załóżmy $a > 0$; ponieważ $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = 1$ więc jeden z pierwiastków ma moduł większy od jedności, a drugi mniejszy od jedności. Wewnątrz naszego koła znajduje się więc tylko jeden p. nieregularny np.: $|\zeta_1| < 1$; mamy tylko jedno rezyduum; tak więc:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = 2 \cdot 2\pi \cdot r_k$$

Aby obliczyć r_k, rozwijamy na szereg funkcję: $\frac{1}{\zeta^2 + 2a\zeta + 1}$; rozwińmy ją przedtem na ułamki proste:

$$\frac{1}{\zeta^2 + 2a\zeta + 1} = \frac{A}{\zeta - \zeta_1} + \frac{B}{\zeta - \zeta_2} = \frac{(A + B)\zeta - (A\zeta_2 + B\zeta_1)}{(\zeta - \zeta_1)\cdot(\zeta - \zeta_2)}$$

Przez zrównanie spółczynników mamy:

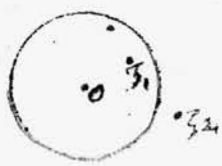
$A + B = 0$; $A = -B$; a także $A\zeta_2 + B\zeta_1 = -1$ albo $A\zeta_2 - A\zeta_1 = -1$, skąd

$A(\zeta_1 - \zeta_2) = 1$ i ostatecznie $A = \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}$ a $B = \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1}$

[illegible] $2 = \pm i$ [illegible] 2 [illegible]

II [illegible] ∞ [illegible]

Ułamek $\frac{B}{\zeta-\zeta_2}$ rozwinie się w otoczeniu p. ζ_1 (chodzi nam o rozwinięcie w otoczeniu p. ζ_1, bo tylko on leży wewnątrz drogi całkowania) na szereg potęgowy, bo $\zeta_1-\zeta_2 \neq 0$. Otrzymamy:



$$\frac{B}{\zeta-\zeta_1+(\zeta_1-\zeta_2)} = \frac{B}{\zeta_1-\zeta_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2}}$$ ale $\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2}=u$ i $u<1$, więc ten ułamek po rozwinięciu da nam szereg potęgowy, który nas nie interesuje, bo będzie cz. regularną naszego rozwinięcia.

Część główna pochodziłaby od ułamka: $\frac{A}{\zeta-\zeta_1}$; odrazu widać że rozwinięcie to ma tylko jeden wyraz: $\frac{A}{\zeta-\zeta_1}$, więc residuum p. ζ_1 jest A.

$$r_{\zeta_1} = A = \frac{1}{\zeta_1-\zeta_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

Podstawiając tą wartość do wzoru na całkę, otrzymamy:

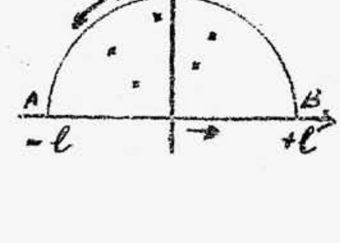
$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x} = 2\cdot 2\pi\cdot r_{\zeta_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

2).

Obliczyć całkę f. ułamkowej: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Zakładamy, że f. $\frac{P(z)}{Q(z)}$ jest regularna w nieskończoności; wtedy daje się rozwinąć w otoczeniu p. $z=\infty$ na szereg zbieżny; innemi słowy jeśli $P(x)$ jest stopnia m, a $Q(x)$ stopnia n, to musi być $m \leq n-2$. Zakładamy dalej, że $Q(x)$ ma pierwiastki tylko zespolone (nie ma zaś pierwiastków rzeczywistych).

Zastępujemy zmienną x przez z i obliczamy całkę: $\int_C \frac{P(z)}{Q(z)}dz$, gdzie C jest to półkole wraz ze średnicą; przez Γ oznaczamy to samo półkole bez średnicy. Odległość l dobieramy tak by wszystkie pierwiastki mianownika były wewnątrz półkola C (może ono być dowolnie duże); jeśli pierwiastkiem miano-



wnika jest : $z_k = x_k + iy_k$, to do naszego półkola wchodzą tylko te, u których $y_k > 0$. Wtedy:

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int_{-l}^{+l}\frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} r_k ,$$

bo na osi x-ów $z = x$;

Gdy $l \to \infty$ to biegunów nie przybywa więc prawa strona naszej równości t.j. suma rezyduów nie zmienia swej wartości i mamy:

$$\int_{-l}^{+l}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} r_k - \int_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

Całka: $\int_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int_\Gamma \frac{P(z)z^2}{Q(z)}\cdot\frac{1}{z^2}dz$ Ułamek $\left|\frac{z^2P(z)}{Q(z)}\right|$ jest właściwy więc dla pewnego $|z| > l_0$ mamy $\left|\frac{z^2P(z)}{Q(z)}\right| < M$, skąd:

$$\left|\int_\Gamma \frac{P(z)z^2}{Q(z)}\cdot\frac{1}{z^2}dz\right| < \frac{M}{l^2}\cdot\pi l = \frac{\pi M}{l}$$

Ale l może być dowolnie duże; gdy $l \to \infty$ to $\frac{\pi M}{l} \to 0$ a więc

$$\lim_{l\to\infty}\int_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0$$

Mamy więc: $\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{+l}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} r_k + 0$

czyli : $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} r_k .$$

Obliczenie tej całki sprowadza się do obliczenia rezyduów funkcji podcałkowej.

Obliczmy w ten sposób całkę: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$; W płaszczyźnie zmiennej zespolonej mamy: $\frac{1}{(1+z^2)^n}$; punktami osobliwemi są p.: $z = \pm i$, ale nas interesuje tylko p. $z=+i$, jako leżące nad osią x-ów. Wobec tego:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=2\pi i\, r_{+i}$$

Aby obliczyć wartość residuum p. $z=+i$, rozwijamy funkcję: $\frac{1}{(1+z^2)^n}$ w otoczeniu p. $z=+i$; oznaczmy $z-i=\zeta$, wtedy $z=i+\zeta$ i mamy:

$$\frac{1}{(1+z^2)^n}=\frac{1}{\{1+(i+\zeta)^2\}^n}=\frac{1}{(1+i^2+2i\zeta+\zeta^2)^n}=\left\{\frac{1}{2i\zeta(1-i\frac{\zeta}{2})}\right\}^n=\frac{1}{(2i)^n\zeta^n}\left\{1-i\frac{\zeta}{2}\right\}^{-n}$$

Czynnik drugi rozwiniemy tak jak dwumian Newton'a, otrzymamy:

$$\frac{1}{(2i)^n\zeta^n}\left\{1-i\frac{\zeta}{2}\right\}^{-n}=\frac{1}{(2i)^n\zeta^n}\left\{1+ni\frac{\zeta}{2}-\frac{n(n+1)}{2!}\frac{\zeta^2}{4}-i\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\frac{\zeta^3}{8}+\dots+\frac{n(n+1)\cdots(n+p-1)}{p!}\left(i\frac{\zeta}{2}\right)^p+\dots\right\}$$

Nas interesuje ten wyraz rozwinięcia, w którym $p=n-1$, bo gdy ten wyraz pomnożymy przez ζ^{-n}, to otrzymamy wyraz zawierający ζ^{-1}, a wiemy przecież, że spółczynnik przy ζ^{-1} jest to szukane residuum; wyraz ten jest:

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}\,i^{n-1}\cdot\frac{\zeta^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2^n i^n}\cdot\frac{1}{\zeta^n}=\frac{1}{i}\,\frac{(2n-2)!}{\{(n-1)!\}^2}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}\cdot\frac{1}{\zeta}$$

Widać odrazu, że residuum nasze jest: $r_{+i}=\frac{1}{i}\cdot\frac{(2n-2)!}{\{(n-1)!\}^2\cdot 2^{2n-1}}$,

a więc całka:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=2\pi i\, r_{+i}=\frac{\pi\cdot(2n-2)!}{\{(n-1)!\}^2\cdot 2^{2n-1}}$$

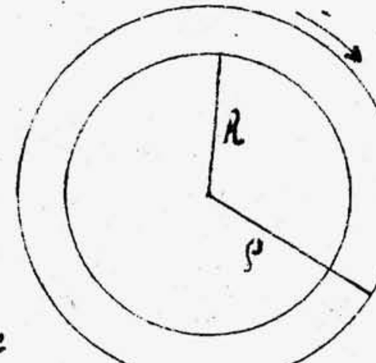
Residuum w punkcie w nieskończoności.

Symbolem r_∞ oznaczamy residuum odnoszące się do p. w nieskończoności. By je obliczyć trzeba rozwinąć f. na szereg Laurent'a w otoczeniu p. w nieskończoności.

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\dots+\frac{a_n}{z^n}+\dots+G(z)$$

, gdzie f. całkowita: $G(z)$ jest cz. główną, a szereg $a_0+\frac{a_1}{z}+\dots+\frac{a_n}{z^n}+\dots$, częścią regularną. Gdy $|z|>R$ to część regularna jest zbieżna. Zakreślamy koło o promieniu $\rho>R$; szereg

Laurenta będzie zbieżny wewnątrz tego koła.



Aby obliczyć całkę wzdłuż drogi otaczającej p. $z=\infty$, całkujemy nasz szereg nie tak jak zawsze, lecz kierunku przeciwnym, w ten sposób, by otoczenie p. w nieskończoności znalazły się po lewej ręce, przy otaczaniu koła.

Jak w zwykłym wypadku przy całkowaniu wszystkie wyrazy prócz jednego zniosą się, a tylko wyraz zawierający z^{-1} zostanie, ale wskutek zmiany kierunku całkowania zmieni znak.

Tak więc: $-2\pi i a_1 = 2\pi i r_\infty$ skąd $r_\infty = -a_1$

Ważną jest rzeczą, by dobrze rozwinąć f. na szereg Laurent'a przy szukaniu r_∞; że rozwinięcie jest dobre, poznajemy potem, że część główna jest f. całkowitą, a część regularna zbieżna dla $|z|>R$, gdzie R może być dowolnie duże.

Zauważymy z f. regularna w nieskończoności może posiadać rezyduum różne od zera.

Udowodnimy, że jeśli f. posiada skończoną l. rezyduów (w skończoności lub w nieskończoności), to suma tych rezyduów jest równa zeru.

Mamy f. $f(z)$. Zakreślmy koło otaczające wszystkie p. osobliwe i weźmy całkę wzdłuż tego koła ale w kierunku ujemnym. Wtedy

C 

$$\int_C f(z)\,dz = +2\pi i r_\infty,$$ bo w takim razie koło C otacza p. w nieskończoności.

Z drugiej strony wiemy że: $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} r_k$, tu jednak całka brana jest kierunku dodatnim. Obie całki różnią się tylko znakiem, a więc: $2\pi i \sum_{k=1}^{n} r_k = -2\pi i r_\infty$ albo $\sum_{k=1}^{n} r_k + r_\infty = 0$

Gdy w p. $z=\infty$ zachodzi $r_\infty = 0$, to wtedy $\sum_{k=1}^{n} r_k = 0$ c.b.d.o

Rezyduum logarytmiczne

Załóżmy że f. $f(z)$ jest w obszarze D regularna w każdym p. z wyjątkiem skończonej liczby punktów które są biegunami. Załóżmy jeszcze, że i na brzegu obszaru D f. $f(z)$ jest regularna, wtedy jak wiemy posiada skończoną l. p. zerowych. Niech C oznacza drogę zamkniętą w obszarze D, która każdy biegun i każde miejsce zerowe otacza w kierunku dodatnim tylko jeden raz.

Udowodnimy że wtedy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = N - P$$

, gdzie N oznacza liczbę punktów zerowych, a P liczbę biegunów f. $f(z)$ wewnątrz C.

Ponieważ f. pod znakiem całki jest pochodną logarytmu, wartość tej całki nazywają niekiedy „rezyduum logarytmiczne"

Dowód: Wystarczy zastosować tw. o rezyduach: punktami osobliwemi funkcji $\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}$ są punkty zerowe i bieguny f. $f(\zeta)$; mamy więc obliczyć rezyduum dla każdego z tych punktów.

Obliczmy je najpierw dla punktów które są pierwiastkami równania: $f(z) = 0$ (punkty zerowe).

Niech z_0 będzie takim punktem, a n niech oznacza jego krotność.

W takim razie:

$$f(z) = (z-z_0)^n \{c_n + c_{n-1}(z-z_0) + \dots + c_1(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n\} =$$

$$= (z-z_0)^n \{c_n + h(z-z_0)\}$$

Ponieważ f. jest regularna więc $c_n \neq 0$; logarytmując otrzymamy:

$$\lg f(z) = n \lg(z-z_0) + \lg\{c_n + h(z-z_0)\}$$

ponieważ $c_n \neq 0$ więc $\lg\{c_n + h(z-z_0)\}$ jest w p. $z = z_0$ regularny, a więc jego pochodna będzie regularna; oznaczmy ją przez $h_1(z-z_0)$.

Różniczkując poprzednią równość, mamy:

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{n}{(z-z_0)} + h_1(z-z_0)$$

a więc rezyduum w p. zerowym $z=z_0$ wynosi . n.
Podobne obliczenie dla biegunów. Przypuśćmy, że w p. $z=\zeta_0$ f. $f(z)$ posiada biegun rzędu p. wtedy:

$$f(z) = (z-\zeta_0)^{-p}\{C_p + h_2(z-\zeta_0)\} \qquad \text{gdzie } c_p \neq 0.$$

$$\lg f(z) = -p\lg(z-\zeta_0) + h_3(z-\zeta_0) \quad \text{i po zróżniczkowaniu:}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{p}{(z-\zeta_0)} + h_4(z-\zeta_0)$$

Stąd widzimy że odpowiednie rezyduum w p. który jest biegunem wynosi: $-p$. Wobec tego twierdzenie jest udowodnione, bo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum \text{liczby p. zerowych} - \sum \text{biegunów};$$

każdy punkt zerowy daje przyczynek równy swej krotności ze znakiem plus, a każdy biegun przyczynek równy swemu rzędowi ze znakiem minus. Naturalnie obliczając liczbę punktów zerowych lub biegunów, trzeba każdy punkt zerowy krotności n lub biegun krotności p, traktować jako n p. zerowych lub p biegunów pojedynczych.

<u>Wniosek I:</u> Opierając się na udowodnionem przed chwilą twierdzeniu możemy z łatwością dowieść zasadnicze twierdzenie algebry: <u>ilość pierwiastków wielomianu jest równa stopniowi wielomianu.</u>

Mamy równanie: $\quad P_m(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1}z + a_m = 0$

Weźmy całkę: $\quad \displaystyle\int_c \frac{P'_m(\zeta)}{P_m(\zeta)}d\zeta$, gdzie c oznacza koło o promieniu dowolnie dużym.

$$P_m(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1}z + a_m = a_0 z^m\left\{1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{z} + \frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{z^2} + \dots + \frac{a_m}{a_0}\cdot\frac{1}{z^m}\right\}$$

$$= a_0 z^m\left\{1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_{m-1}}{z^{m-1}} + \frac{b_m}{z^m}\right\}$$

Logarytmujemy obydwie strony ostatniej równości:

$$\lg \varphi(z) = \lg a_0 + m \lg z + \lg\left\{1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_m}{z^m}\right\}$$

Wyraz w nawiasie jest w otoczeniu p. w nieskończoności regularny, bo

gdy $z \to \infty$ to $\left\{1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_m}{z^m}\right\} \to 1$.

Weźmy pochodne obu stron: $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \dfrac{m}{z} + \dfrac{-\frac{b_1}{z^2} - \frac{2b_2}{z^3} - \dots}{1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots}$

Ułamek drugi jest w otoczeniu p. w nieskończoności f. regularną; da on się przedstawić jako szereg; mianowicie:

$$-\left(\frac{b_1}{z^2} + \frac{2b_2}{z^3} + \dots\right)\frac{1}{1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots} = -\left(\frac{b_1}{z^2} + \frac{2b_2}{z^3} + \dots\right)\left(1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots\right) =$$

$$= \frac{d_1}{z^2} + \frac{d_2}{z^3} + \dots$$

Szereg ten nie zawiera potęgi: z^{-1}, a więc nie wpływa na rezyduum:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{m}{z} + \frac{d_1}{z^2} + \frac{d_2}{z^3} + \dots$$

Widać już stąd że rezyduum w p. w nieskończoności jest: $r_\infty = -m$; ale jak wiemy:

$$r_\infty = -\sum_{k=1}^{n} r_k \quad \text{skąd} \quad \sum_{k=1}^{n} r_k = m;$$

Wobec tego: $\int_c \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} d\zeta = 2\pi i m$ ale z drugiej strony: $\int_c \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} d\zeta = 2\pi i N$

skąd $\underline{N = m}$, gdzie m oznacza stopień naszego wielomianu, a N liczbę jego pierwiastków.

<u>Wniosek II</u>: Gdy chodzi nam o pierwiastki równania: $f(z) = a$, t. zn. równania: $f(z) - a = 0$, to z góry można przewidzieć że:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - a} d\zeta = N_a$$, gdzie N_a oznacza liczbę pierwiastków naszego równania.

Teraz możemy łatwo udowodnić, że całka z takiego iloczynu:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_p z_p,$$ gdzie $z_1, z_2, \dots$ .. z_p są pierwiastkami równania $f(z)=0$, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ są to krotności odpowiednich pierwiastków.

W tym celu rozwińmy obie f. na szeregi w otoczeniu p. z_k:

$z = z_k + (z - z_k)$, zaś $\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{\alpha_k}{z - z_k}$ + część regularna

Po pomnożeniu otrzymamy rozkład samego iloczynu:

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{\alpha_k z_k}{z - z_k} + \text{część regularna}$$

Część regularna jest sumą iloczynów wyrazów części regularnych czynników. Widać już stąd, że residuum w punkcie z_k: $r_{z_k} = \alpha_k z_k$

a więc $$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z_k$$ c.b.d.o.

<u>Zadanie</u>: Udowodnić że: $$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varphi(z_k)$$

Rozdział 17. — Odwrócenie zależności funkcyjnej.

Wyobraźmy sobie że mamy element f. analitycznej:

$$(1) \quad u = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

(Do tego wypadku da się zawsze sprowadzić wypadek ogólny:

$u - u_0 = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$, przez odpowiednią zamianę zmiennych: $z - z_0$ przez z, a $u - u_0$ przez u).

Aby określić f. odwrotną postaramy się znaleźć jeden element tej funkcji odwrotnej: $(2)\quad z = d_1 u + d_2 u^2 + \dots + d_n u^n + \dots$;

jasna rzecz, że ten element jest określony jednoznacznie, ponie-