Funkcje, któremi będziemy się zajmowali na przyszłość będą to funkcje spełniające te 3-y warunki na pewnych obszarach, które mogą stanowić tylko części płaszczyzny zmiennej zespolonej i stanowią obszar spójny.

Rozdział 4. Pewne określenia i pojęcia pomocnicze.

Określenie granicy dla ciągu l. zespolonych. Niech $z_n = x_n + iy_n$; mamy ciąg liczb zespolonych: $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$ i odpowiadające mu dwa ciągi liczb rzeczywistych:
$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \\ y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots \end{cases}$$

Definicja: Ciąg utworzony z liczb z_n jest zbieżny i zmierza do granicy wtedy i tylko wtedy, gdy oba ciągi utworzone z liczb x_n i y_n są zbieżne. Niech: $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, wtedy $z = x + iy$ jest granicą ciągu: $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$ i piszemy to:
$$\lim z_n = z$$

Interpretacja geometryczna: jeżeli $z_n \to z$ to $\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2} = 0$ i odwrotnie; gdy ten pierwiastek zmierza do zera, to $x_n \to x$ i $y_n \to y$, czyli $|z - z_n| \to 0$; oznacza to, że odległość punktów z_n i z zmierza do zera.

Jeżeli z punktu z, zakreślimy koło o dowolnie małym promieniu r, i jeżeli istnieje taka liczba n_0, zależna od r, że gdy $n > n_0$ to wszystkie punkty z_n leżą wewnątrz tego koła, to koło to stanowi otoczenie punktu z.

Możemy w ten sam sposób jak pojęcie granicy uogólnić pojęcie p. skupienia. Punkt z jest p. skupienia, o ile w dowolnie małem otoczeniu p. z

(koło, kwadrat) znajduje się nieskończenie wiele p. ciągu: $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$
Łatwo udowodnić, że p. z jest jednym z punktów skupienia ciągu:
$z_1, z_2, z_3, \ldots z_n, \ldots$ to z tego ciągu można utworzyć ciąg częściowy:
$z_{n_1}, z_{n_2}, z_{n_3}, \ldots, z_{n_p}, \ldots$, który jest zbieżny i dla którego p. z jest granicą.

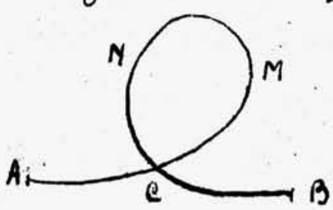
Zbiór p. na płaszczyźnie zmiennej zespolonej nazywa się ograniczonym, jeżeli wszystkie jego p. dadzą się zawrzeć wewnątrz koła o dostatecznie dużym promieniu. Do zbiorów ograniczonych stosuje się twierdzenie Weierstrassa: o ile taki zbiór posiada nieskończenie wiele wyrazów, to posiada przynajmniej jeden punkt skupienia.

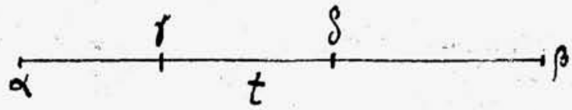
W dalszych rozważaniach uogólnimy pojęcie całki dla funkcji zmiennej zespolonej. Drogą całkowania będzie tu niekoniecznie odcinek zmiennej rzeczywistej, ale jakaś, w pewnym stopniu dowolna linja krzywa, łącząca punkt początkowy i końcowy, między któremi odbywa się całkowanie.

Musimy określić bliżej, co będziemy nazywali „drogą" całkowania na płaszcz. x, y; będziemy tak nazywali krzywą określoną przez równania: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ czyli $z = \varphi(t) + i\psi(t)$, gdzie oznaczają w pewnym przedziale na osi zmiennej t: (α, β), pewne funkcje ciągłe i posiadające ciągłe pochodne, które nigdy w tym samym punkcie nie są równe zeru. Gdy t rośnie od α do β to odpowiednio p. z opisuje właśnie krzywą $\mathfrak{L}$, której punkt początkowy odpowiada wartości $t = \alpha$, a końcowy wartości $t = \beta$; funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są ciągłe w przedziale domkniętym, przyczem na końcach zachodzi ciągłość odpowiednio lewo i prawostronna. Zakładamy, że nigdy dwom różnym wartościom t znajdującym się wewnątrz (α, β) nie odpowiada ta sama wartość funkcji φ i ψ; wtedy odpowiedniość między punktami drogi $\mathfrak{L}$ i odcinka (α, β) na osi zmiennej t jest odwracalnie jednoznaczna cz. doskonała.

Natomiast gdy dla wartości końcowych zmiennej t, funkcje φ i ψ mogą przyjmować te same wartości t. j. $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ i $\psi(\alpha)=\psi(\beta)$, to nasza krzywa jest krzywą zamkniętą.

Możemy rozpatrywać drogi bardziej ogólne: zachowujemy mianowicie założenie ciągłości funkcji $\varphi(t)$ i $\psi(t)$, co zaś do pochodnych, to zakładamy, że cały przedział (α,β) da się podzielić na skończoną liczbę przedziałów częściowych: (α,α_1), (α_1,α_2), ..., (α_n,β), takich że w każdym z nich założenia poprzednie są spełnione. W ten sposób nie wykluczamy z pod naszych rozważań dróg, które się same z sobą przecinają.





Krzywej AB odpowiada odcinek α,β zmiennej t, w ten sposób, że między łukiem AC i odcinkiem $\alpha\gamma$ zachodzi odpowiedniość doskonała, tak samo łukowi CMNC odpowiada odcinek $\gamma\delta$, a łukowi CB odc. $\delta\beta$.

Możemy uważać że między krzywą AB i odc. $\alpha\beta$ odpowiedniość jest doskonała, o ile umówimy się punkt C uważać za dwa różne punkty, z których jeden odpowiada punktowi γ, a drugi p. δ.

Na mocy tych założeń drogi o których mowa posiadają określony zwrot i gdy t rośnie od α do β, to odpow. mu punkt przebiega drogę w pewnym określonym kierunku od pewnego p. początkowego do pewnego p. końcowego.

We wzorach $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ możemy zamiast parametru t wprowadzić inny, za pomocą zależności: $t=\chi(t_1)$, gdzie t_1 jest nowym parametrem zmieniającym się w przedziale zamkniętym (α_1,β_1), przytem zakładamy, że $\chi(t_1)$ jest funkcją ciągłą rosnącą (lub malejącą) parametru t_1; wtedy:

$$x=\varphi[\chi(t_1)] \quad a \quad y=\psi[\chi(t_1)]$$

W ten sposób punkty krzywej zostają podporządkowane punktom osi zmiennej t_1; dwa takie przedstawienia parametryczne nazywamy równoważnemi; zwrot zostaje zachowany ($\chi(t)$ rosnące) lub zmieniony na przeciwny ($\chi(t)$ malejące); przy odpowiednim wyborze funkcji $\chi(t)$, przedział (α_1, β_1) może być identyczny z przedziałem (α,β).

Między równoważnemi równaniami parametrycznemi danej krzywej ważną rolę odgrywa to, w którem zmienną jest łuk s: mianowicie jak wynika z założenia droga jest krzywą wyprostowalną, możemy więc na niej obrać pewien punkt początkowy A i każdemu p. M podporządkować długość s łuku AM i odwrotnie.

Jeżeli mamy 3-y różne punkty M_1, M_2, M_3 to jeden z nich jest wewnątrz do pozostałych; mianowicie: jeśli tym punktom odpowiadają wartości parametru: t_1, t_2, t_3, to ten punkt jest wewnątrz, którego parametr zawarty jest między pozostałemi; np gdy $t_1<t_2<t_3$ to punkt M_2 jest p. wewnętrznym. Ta własność zachowuje się przy przejściach do parametrów równorzędnych.

Niech t będzie parametrem i niech p. A odpowiada wartości początkowej $t=\alpha$; jeżeli łuk AM wyrazimy zapomocą parametru s, to łatwo się przekonać, że łuk ten będzie funkcją monotoniczną ciągłą parametru t; a więc przejście od t do s jest przejściem do parametru równorzędnego.

Rozdział 5. Całkowanie