6 po Cra

WYDAWNICTWA KOŁA MATEMATYCZNO-FIZYCZNEGO
SŁUCHACZY UNIW. ST. BATOREGO
w WILNIE

FUNKCJE ANALITYCZNE

Hrabiak
Stud. U.S.B.

Według wykładów pr. J Rudnickiego wygłoszonych na Uniwersytecie St. Batorego w trymestrze 2-im roku ak. 1928-29.

Wilno-1929.

LIT. CH. ŁASKOWA I S-YN WILNO

Rozdział 1. Liczby zespolone

Chodzi o uogólnienie pojęcia liczby tak, żeby pierwiastkowanie liczb ujemnych o wykładnikach dodatnich było możliwe. Jednocześnie uzyskamy uogólnienie tego rodzaju, że nowemu zbiorowi liczb będą odpowiadały geometrycznie punkty na całej płaszczyźnie, a nie jak dotychczas na prostej, albo w ujęciu wektorowem nie wektory odłożone z punktu początkowego na jednej osi, ale zbiór wszystkich wektorów wychodzących z punktu O.

Nowe liczby utworzymy przy pomocy par liczb rzeczywistych. Taką parę: (a, b) uważamy za jedną liczbę i podporządkowujemy jej w interpretacji geometrycznej wektor o składowych a i b z punktem początkowym w O. Nowy zbiór liczb musi zawierać w sobie zbiór liczb rzeczywistych, jako zbiór części (podzbiór). Przedstawicielami liczb rzeczywistych będą wektory leżące na pewnej prostej przechodzącej przez punkt O. Tę prostą wybieramy za oś x-ów; nazywamy ją także osią liczb rzeczywistych. Stąd wynika, że jeśli w parze liczbowej: (a, b) liczba b = o, to mamy liczbę rzeczywistą równą: a, ponieważ wtedy odpowiedni wektor leży na osi l. rzeczywistych

Działania i **pojęcie** **równości** definiujemy dla liczb rzeczywistych w sposób następujący:

Równość: (a, b) = (c, d) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy a = c i b = d; geometrycznie oznacza to przystawanie odpowiednich wektorów. Liczba jest zerem, gdy obie składowe są zerami t.j. gdy p. początkowy i końcowy w-ra zkwają się.

Dodawanie: (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d); łatwo sprawdzić, że określone w ten sposób dodawanie jest zgodne z prawem dodawania vektorów w-g równoległoboków. Znak plus między liczbami nowego typu nabiera sensu dopiero na mocy definicji dodawania.

Dodanie zera nie zmienia liczby, jak to widać z definicji.

Dwie liczby są przeciwne gdy ich suma jest równa 0: mamy wtedy: $(a,b)+(c,d)=0$, skąd na mocy definicji: $a+c=0$ i $b+d=0$, albo $a=-c$, $b=-d$; a więc liczby: (a,b) i $(-a,-b)$ są przeciwne, jak zresztą i odpowiadające im vektory.

Każdy vektor możemy scharakteryzować nietylko przez jego rzuty, na dwie wzajemnie prostopadłe osie, ale także przez <u>wielkość i kierunek</u>. Długość „r" nazywamy modułem vektora, a kąt θ z osią liczb rzeczywistych jego argumentem kątowym, a także modułem i argumentem danej przez ten w-r liczby. Moduł liczby zespolonej z oznaczamy często symbolem $|z|$;

Widać odrazu związek między obu oznaczeniami:

$a = r\cos\theta$ i $b = r\sin\theta$ i odwrotnie: $r=\sqrt{a^2+b^2}$ i $\begin{cases}\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

Liczba θ nie jest przez te wzory wyznaczona jednoznacznie, bo: $\sin\theta = \sin(\theta+2k\pi)$ i $\cos\theta = \cos(\theta+2k\pi)$,
czyli θ ma nieskończenie wiele wartości różniących się o wielokrotność 2π.

<u>Mnożenie</u> określamy najprzód charakteryzując liczby zespolone przy pomocy modułu r i argumentu kątowego θ.

Niech OA oznacza vektor o module $=1$;
OM i OM_1 oznaczają odpowiednio vektory czynników: (r,θ) i (r_1,θ_1);
Iloczynem tych liczb jest liczba: (R,φ), której od-

powinda w-r OM_2, taki, że trójkąt OM_1M_2 jest podobny do tr. OAM. Widać odrazu, że w ten sposób w-r OM_2 jest określony jednoznacznie. Oprócz tego widać, że $\varphi = \theta + \theta_1$ zaś $R = r \times r_1$, ponieważ z podobieństwa trójkątów mamy proporcję:

$$\frac{OM_2}{OM_1} = \frac{OM}{OA};$$

Mamy więc prawidło: moduł iloczynu jest równy iloczynowi modułów, argument iloczynu — sumie argumentów; czyli, krótko mówiąc, mnożymy moduły, a dodajemy argumenty.

To określenie mnożenia posiada oczywiście własność przemienności. Zawiera ono w sobie określenie mnożenia liczb rzeczywistych, bo gdy $\theta = 0$, to odpowiednia liczba jest rzeczywista dodatnia, gdy $\theta = \pi$, to odpow. liczba jest rzeczywista ujemna. Przy mnożeniu l. rzeczywistych mogą zajść następujące wypadki:

1) Oba czynniki są dodatnie czyli: $\theta = 0$ i $\theta_1 = 0$; wtedy $\theta + \theta_1 = 0$, więc iloczynem jest liczba dodatnia.

2) Jeden z czynników jest dodat[illegible] a drugi ujemny: $\theta = 0$, $\theta_1 = \pi$; $\theta + \theta_1 = \pi$; iloczynem jest l. ujemna.

3) Oba czynniki są ujemne: $\theta = \pi$, $\theta_1 = \pi$; $\theta + \theta_1 = 2\pi$; iloczynem jest l. dodatnia.

Z podanego poprzednio podanego określenia mnożenia, możemy wyprowadzić wzór na mnożenie par liczbowych w postaci, w której w-r charakteryzowaliśmy wzorami:

Mnożąc (a, b) przez (c, d) otrzymamy (A, B); należy liczby rzeczywiste A, B wyznaczyć przez a, b, c, d;

$A = R \cos\varphi$, $B = R \sin\varphi$; jeśli teraz zamiast R podstawimy $r r_1$, a zamiast φ podstawimy $\theta+\theta_1$ to otrzymamy:

$A = r \cdot r_1 \cos(\theta+\theta_1) = r\cos\theta\, r_1\cos\theta_1 - r\sin\theta \cdot r_1 \sin\theta_1 = ac - bd;$

$B = r \cdot r_1 \sin(\theta+\theta_1) = r\sin\theta\, r_1\cos\theta_1 + r\cos\theta\, r_1\sin\theta_1 = bc + ad;$

Tak więc: $(a, b)\cdot(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$

Z naszych definicyj możemy wysnuć następujący ważny wniosek: zbiór l. zespolonych możemy otrzymać ze zbioru l. rzeczywistych przez dołączenie do nich jednej tylko nowej liczby: wiemy bowiem, że:

$\underline{(a, b)} = (a,0) + (0, b) = a + (b,0)\cdot(0,1) = \underline{a} + \underline{b(0{\cdot}1)}$, bo

$(b,0)\cdot(0,1) = (b\cdot 0 - 0\cdot 1, b\cdot 1 + 0\cdot 0) = (0, b)$ tę liczbę $(0,1)$ oznaczamy symbolem „i"; odpowiada jej w-r o długości 1, skierowany w kier... prostopadłym do osi l. rzeczywistych (i w kierunku dodatnim).

Łatwo zauważyć, że $\underline{i^2=-1}$; w rzeczy samej:

$\underline{i}^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1, 0) = \underline{-1};$

Tak więc ostatecznie: $\underline{(a, b)} = \underline{a+bi}$; widzieliśmy, że $i^2=-1$; $i^3=-i$; $i^4=1$, a w ogóle:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{gdy reszta od dzielenia } n \text{ przez 4 jest } 0 \\ i & \text{〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 } 1 \\ -1 & \text{〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 } 2 \\ -i & \text{〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 } \end{cases}$$

Z podanych powyżej prawideł na dodawanie i mnożenie można łatwo wyprowadzić prawidła na te działania nad liczbami w postaci: $a+bi$. Możemy mianowicie sprawdzić, że należy wykonywać nad dwumianami: $a+bi$ działania w-g zwykłych prawideł algebry, gdzie „i" gra rolę zmiennej x z wyrażenia: $a+bx$; mnożąc i dodając takie jednomiany, otrzymamy po redukcji wielomian: $Pi^n + Qi^{n-1} + Li^{n-2} + \dots + Mi$; następnie trzeba i^p zastąpić przez jedną z 4-ch wartości: $1, i, -1, -i$; po tem podstawieniu wielomian nasz będzie zawierał „i" tylko w zerowej albo pierwszej potęgi, więc po zredukowaniu przyjmie postać: $A+Bi$, t.zn. że wynikiem działań jest para liczbowa: (A, B);

Np. suma: $(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i$;

iloczyn: $(a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 =$

$$= ac+adi+bci-bd = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Możemy jeszcze inaczej przedstawić l. zespoloną: wiemy że: $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, a więc $a+bi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$;

Moduł liczby $\cos\theta + i\sin\theta$ wynosi: $|\cos\theta + i\sin\theta| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Widzimy że l. zespoloną można rozłożyć na dwa czynniki: rzeczywisty „r"; drugi czynnik $(\cos\theta + i\sin\theta)$ o module równym 1.

Dzielenie. Określimy najpierw l. odwrotną do $a+bi$.

Znaleźć odwrotność danej liczby to znaczy znaleźć taką liczbę zespoloną (ρ, φ) żeby iloczyn: $(\rho, \varphi)\cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1$.

Mnożymy moduły: $r\cdot\rho = 1$ powinno więc być $\rho = \frac{1}{r}$; dodajemy argumenty: $\varphi + \theta = 0$, wynika stąd zachodzi $\varphi = -\theta$ (gdy $r=1$, to $\rho=1$)

Zatem: $\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$

Sprawdzimy, że liczba: $\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ jest naprawdę poszukiwaną odwrotnością liczby: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$:

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta - i^2\sin^2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Dzielenie możemy traktować jako mnożenie przez l. odwrotną, tak więc:

$$\frac{c+di}{a+bi} = (c+di)\cdot\frac{1}{a+bi} = \frac{R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{R}{r}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(\cos\theta - i\sin\theta) =$$

$$= \frac{R}{r}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = \frac{R}{r}[\cos(\vartheta - \theta) + i\sin(\vartheta - \theta)]$$

Mamy prawidło: przy dzieleniu moduły dzielimy, zaś argument dziel-

nika odejmujemy od argumentu dzielnej.
Możemy to także określić tak:

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{R}{r}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{R(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)(\cos\theta-i\sin\theta)r}{r^2}=$$

$$=\frac{(c+di)(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{[(ac+bd)+i(ad-bc)]}{a^2+b^2}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+i\,\frac{ad-bc}{a^2+b^2}$$

Gdybyśmy $\frac{c+di}{a+bi}$ obliczyli wykonując działania jak na wielomianach, to:

$$\frac{c+dx}{a+bx}=\frac{(c+dx)(a-bx)}{(a+bx)(a-bx)}=\frac{ac-bdx^2+x(ad-bc)}{a^2-b^2x^2}=\frac{ac+bd+x(ad-bc)}{a^2+b^2}$$

podstawiając $x=i$ otrzymalibyśmy zupełnie ten sam wynik.

<u>Potęgowanie</u>: Wzór Moivre'a

$$(a+bi)^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=$$

$$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^n\cos n\theta+i\,r^n\sin n\theta.$$

$C_n^2=\frac{n(n-1)}{1.2}$

$C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos^n\theta+C_n^1\,i\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta+C_n^2\,i^2\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta+$$
$$+\ldots+\ldots$$

gdzie C_n^1 i C_n^2 są współczynnikami dwumianu Newtona.
Zastępując potęgi „i" przez odpowiednie wartości, otrzymamy:

$$(\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-C_n^6\cos^{n-6}\theta\sin^6\theta+\ldots)+$$
$$+i(C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta+\ldots)$$

Równość l. zespolonych pociąga za sobą równość ich części rzeczywistych i urojonych; tak więc otrzymamy wzory:

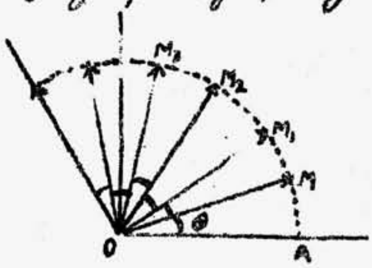
1) $\cos n\theta=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-C_n^6\cos^{n-6}\theta\sin^6\theta+\ldots$

2) $\sin n\theta=C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\ldots$

wyrażające funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta θ, przez f. trygonometr. samego kąta θ.

Geometrycznie potęgowanie można przedstawić tak:

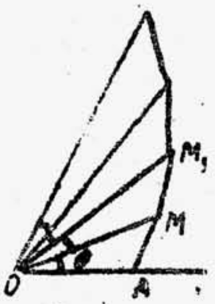
1) Gdy potęgujemy l. zespoloną, której moduł jest równy 1.



W-r OM_1 jest drugą potęgą w-ra OM, w-r OM_2 trzecią i. t. d.

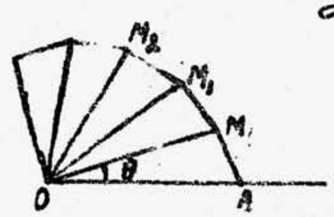
Jeżeli θ jest wymierny względem 2π, to otrzymamy wielokąt zamknięty, jeżeli nie to wielokąt nie zamknie się.

2)



Gdy moduł liczby potęgowanej jest większy od jedności to końce w-rów odpowiadających różnym potęgom, utworzą „spiralę" łamaną, której promienie rosną nieograniczenie.

3)



Gdy moduł l. potęgowanej jest mniejszy od 1, wtedy końce w-rów odpowiadających różnym potęgom, utworzą „spiralę" łamaną, o prom. dążącym do zera.

<u>Pierwiastkowanie</u> Pierwiastkiem stopnia n, liczby z (zespolonej), nazywamy taką l. ζ (o ile istnieje), która spełnia równanie: $\underline{\zeta^n = z}$

Liczba z jest dana i równa się parze liczbowej:

$$(a, b) = a + bi = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Szukaną liczbę ζ oznaczymy przez: $\zeta = (x, y) = x + iy = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Należy ρ i α wyznaczyć w ten sposób, żeby było spełnione równanie:

$$(1)\quad \zeta^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Równość l. zespolonych pociąga równość ich modułów skąd: $\rho^n = R$, więc $\rho = \sqrt[n]{R}$, gdzie ρ i R są liczbami rzeczywistemi dodatniemi, co wyznacza ρ jednoznacznie (pierwiastek arytmetyczny).

Z równości l. zespolonych wynika, że argumenty ich są równe albo różnią się o $2k\pi$; argumentem liczby po lewej stronie równ. (1) jest $n\alpha$, po prawej zaś θ; mamy więc równość:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \qquad \text{gdzie } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm\infty,$$

skąd $\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$; nadając na k wartości całkowite otrzymamy wartości argumentu liczby zespolonej ζ:

$$\alpha_1 = \frac{\theta}{n}; \quad \alpha_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \alpha_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\cdot 2\pi}{n}; \dots\dots$$

liczby te tworzą postęp arytmetyczny o różnicy $\frac{2\pi}{n}$; chociaż wartości na α jest nieskończenie wiele, jednakże otrzymamy tylko n różnych wartości liczby ζ, albowiem dwie wartości argumentu α, różniące się o wielokrotność 2π, dadzą tę samą wartość na ζ.

Otóż łatwo sprawdzić, że w naszym postępie różnica dwu jakichkolwiek wyrazów, których wskaźniki różnią się o n np: $\alpha_{p+n} - \alpha_p$ równa się n razy wziętej różnicy postępu czyli: $n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$; a więc odpowiadające tym argumentom wartości na ζ będą równe i będziemy mieli tylko n liczb ζ różnych między sobą, które można otrzymać nadając na k wartości: $k = 0, 1; 2, \dots (n-1)$; (Zaleca się zrobić odpowiedni rysunek i podać interpretację geometryczną; wskazówka — w-ry o argumentach α_1 i $\alpha_1 + 2k\pi$ nakryją się.)

Otrzyme n pierwiastków możemy wyrazić następującemi wzorami:

$$\zeta_1 = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right); \quad \zeta_2 = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right);$$

$$\zeta_{k+1} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right); \quad \zeta_n = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

Jeżeli każdą z otrzymanych wartości na ζ podniesiemy do n-tej potęgi, to, jak łatwo sprawdzić, otrzymamy liczbę daną z.

Wychodząc ze zbioru liczb rzeczywistych i wykonując nad niemi działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (o ile dzielnik nie równa się zeru), otrzymamy zawsze liczby należące do tego samego zbioru. Ogólniej: jeśli mamy n równań linjowych o n niewiadomych i o sp-ach rzeczywistych, to albo układ jest sprzeczny albo niesprzeczny, ale jeśli jest niesprzeczny to rozwiązaniami są zawsze liczby rzeczywiste.
Potrzeba wyjścia poza zbiór l. rzeczywistych zjawia się już przy rozwiązywaniu równań kwadratowych, albowiem rozwiązanie równania kwadratowego sprowadza się do 4-ch pierwszych działań w zakresie l. rzeczywistych i pierwiastkowania drugiego rzędu.

W rzeczy samej: równanie $z^2=5$ albo lepiej: $z^2+az+b=0$ można pisać w postaci: $(z+\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}-b$; oznaczając $z+\frac{a}{2}=Z$ mamy:

$$\underline{Z=\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}}$$

Z poprzedniego wynika, że dla rozwiązania tego równania potrzebne są i wystarczają liczby zespolone.
Zachodzi pytanie, czy l. zespolone wystarczą do rozwiązywania równań wyższych stopni. A priori powiedzieć nic nie można bo może być tak, że każdorazowo do równania następnego stopnia potrzebne byłyby nowe liczby. Otóż na szczęście tak nie jest: można udowodnić (zasadnicze twierdzenie algebry), że w zakresie liczb. zespolonych możliwe jest rozwiązywanie równań każdego stopnia.
Wracając do równania: $z^2+az+b=0$ mamy że jeśli a i b są l. rzeczywistemi to gdy: 1) $a^2 \geqslant 4b$ mamy pierwiastki rzeczywiste,

gdy zaś 2) $a^2<4b$ to mamy pierwiastki zespolone, bo wtedy:

$$z_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-b} = -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b-\frac{a^2}{4}} = \alpha \pm i\beta$$

Takie dwie liczy zespolone jak: $\alpha+i\beta$ i $\alpha-i\beta$ nazywamy sprzężonemi. Odpowiadające im wektory są symetryczne względem osi l. rzeczywistych. Widzimy więc, że gdy równanie kwadratowe ma sp-ki rzeczywiste, to jego pierwiastki są l. rzeczywistemi albo zespolonemi sprzężonemi.

Odwrotnie: jeżeli pierwiastki równania kwadratowego są rzeczywiste albo sprzężone to jego sp-ki są rzeczywiste. Dla dowodu wystarczy zauważyć że i suma i iloczyn l. sprzężonych są równe liczbom rzeczywistym.

Porównywując liczby zespolone z liczbami rzeczywistemi widzimy, że o ile chodzi o równość podlegają one tym samym prawom formalnym co i l. rzeczywiste (łączność, przemienność) i dlatego, przekształcając wzory algebraiczne, nie potrzeba troszczyć się, czy symbole wchodzące do wyrażenia oznaczają l. zespolone czy też rzeczywiste; tembardziej godnym uwagi jest fakt, że gdy chodzi o nierówność, to pomiędzy l. obu zbiorów zachodzi zupełna różnica, chociby z tego względu, że wypowiedzenie kryterjum dla uporządkowania tych liczb pod względem wielkości nie jest celowem, chociażby takie porównanie można było w sposób sztuczny zrobić.

O dwu liczbach zespolonych: $3+5i$ i $7+4i$ nie będziemy więc nigdy mówili, która z nich jest większa, a która mniejsza; możemy porównać ich moduły, ale te są, jak wiemy, l. rzeczywistemi. Tak więc l. zespolone są naturalnem rozszerzeniem zbioru liczb rzeczywistych, potrzebnem we wszystkich wzorach wyrażających równość mo-

żliwe jest przejście od jednej dziedziny do drugiej, choć takie przejście jest niemożliwe gdy chodzi o nierówność.
W dalszym ciągu mówiąc o l. zespolonych będziemy się stale posługiwali interpretacją geometr. tych liczb, przytem jako odpowiednik będziemy brali bądź sam w-r, bądź jego punkt końcowy (przy punkcie początkowym w O).
Należy przyzwyczaić się do szybkiego przejścia od symboli liczbowych do ich odpowiedników geometrycznych. Tak np. niech będzie dane wyrażenie utworzone z 3-ch liczb zespolonych: $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$; by podać interpret. tej liczby $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ zaznaczamy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej punkty: z_1, z_2, z_3, odpow. danym trzem liczbom i łączymy punkty z_2 i z_3 z punktem z_1; wtedy odrazu widać że moduł tego wyrażenia:

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right| = \frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|} = \text{stosunkowi odcinków łączących } \underline{z_2 z_1} \text{ i } \underline{z_3 z_1};$$

Argument tej liczby równa się kątowi o który trzeba obrócić w-r łączący z_3 i z_1, ~~w kierunku~~ w kierunku dodatnim, by co do kierunku był on zgodny z wektorem łączącym p. z_2 i z_1;

Rozdział 2. Wiadomości wstępne. Określenie pochodnej.

Przechodzimy teraz do badania zależności funkcyjnej w zakresie liczb zespolonych. Chodzi tu o odpowiedniość między dwoma zbiorami l. zespolonych: każdej liczbie $z = x + iy$ pierwszego zbioru odpowiada liczba: $Z = u + iv$ drugiego zbioru. Mówimy wtedy, że „Z" jest funkcją zmiennej „z" na płaszczyźnie zmiennej zespolonej i oznaczamy symbolem:

Co przedstawia wyrażenie $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| \geq 2$

$$\underline{Z = f(z)}$$