$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_p z_p,$$ gdzie $z_1, z_2, \dots$ .. z_p są pierwiastkami równania $f(z)=0$, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ są to krotności odpowiednich pierwiastków.

W tym celu rozwińmy obie f. na szeregi w otoczeniu p. z_k:

$$z = z_k + (z - z_k) \quad , \text{zaś} \quad \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{\alpha_k}{z - z_k} + \text{część regularna}$$

Po pomnożeniu otrzymamy rozkład samego iloczynu:

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{\alpha_k z_k}{z - z_k} + \text{część regularna}$$

Część regularna jest sumą iloczynów wyrazów części regularnych czynników.

Widać już stąd, że residuum w punkcie z_k: $r_{z_k} = \alpha_k z_k$

$$\text{a więc} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z_k \qquad \text{c.b.d.o}$$

<u>Zadanie</u>: Udowodnić że: $\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varphi(z_k)$

<u>Rozdział 17.</u> — <u>Odwrócenie zależności funkcyjnej.</u>

Wyobraźmy sobie że mamy element f. analitycznej:

$$(1) \quad u = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

(Do tego wypadku da się zawsze sprowadzić wypadek ogólny:

$u - u_0 = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$, przez odpowiednią zamianę zmiennych: $z - z_0$ przez z, a $u - u_0$ przez u).

Aby określić f. odwrotną postaramy się znaleźć jeden element tej funkcji odwrotnej: $(2)\quad z = d_1 u + d_2 u^2 + \dots + d_n u^n + \dots$;

jasna rzecz, że ten element jest określony jednoznacznie, ponie-

spółczynniki rozwinięcia dają się formalnie określić w sposób jednoznaczny, a funkcja w jeden tylko sposób rozwija się na szereg Taylora.
W necy samej: zakładamy, że $c_1 \neq 0$, wtedy:

$$w = c_1(\alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_n w^n + \dots) +$$
$$+ c_2(\alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_n w^n + \dots)^2 + \dots$$
$$\dots + c_n(\alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_n w^n + \dots)^n + \dots$$

Utożsamiając spółczynniki mamy:

$$c_1 \alpha_1 = 1 \quad \text{więc} \quad \alpha_1 = \frac{1}{c_1}$$
$$c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_1^2 = 0 \quad \text{skąd} \quad \alpha_2 = \frac{-c_2 \alpha_1^2}{c_1} \quad \text{i t. d.}$$

Jeśli udowodnimy, że funkcja odwrotna, która dla $w = 0$ przyjmuje wartość $z = 0$, jest w p. $w = 0$ regularna, to tem samem udowodnimy, że:

$$z = \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_n w^n + \dots$$

jest zbieżny; wtedy będziemy mieli element f. odwrotnej i zagadnienie będzie rozwiązane.
Udowodnimy w tym celu twierdzenie następujące: Niech C oznacza koło zatoczone z p. $z = 0$ na płaszcz zmiennej z, o promieniu tak małym, by na obwodzie koła szereg:

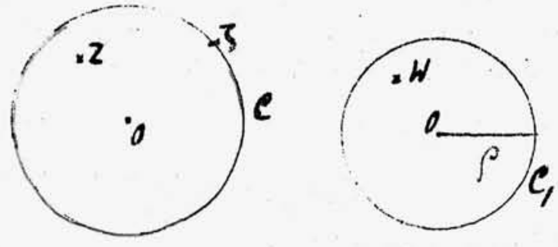
$$h(z) = w = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

(gdzie $h(z)$ oznacza nie samą f. a tylko jeden jej element) był zbieżny i tak, by dla wszystkich punktów wewnątrz koła i na jego obwodzie suma w tego szeregu była $w \neq 0$, za wyjątkiem p. $z = 0$. Wtedy istnieje na płaszcz zmiennej w koło C_1 o środku w p. $w = 0$ takie, że każdemu punktowi wewnątrz koła C_1 odpowiada jeden i tylko jeden p. z wewnątrz koła C. Gdy w zmienia się wewnątrz koła C_1, to zbiór odpowiednich wartości z stanowi funkcję jednowartościową tej zmiennej w. Ta funkcja jest regularna w otoczeniu $w = 0$ i daje się wskutek tego rozwinąć na szereg potęgowy.

Dowód: Gdy z zakreśla koło C to wartość bezwzględna $|h(z)| = |w|$ posiada pewne minimum: $m \neq 0$, na mocy naszych założeń o kole C.

Jako koło C_1 na płaszczyźnie zmiennej w bierzemy koło którego promień $\rho < m$, w takim razie w każdym punkcie ζ koła C zachodzi nierówność: $\rho < |h(\zeta)|$;

Weźmy dowolny punkt w wewnątrz koła C_1, wtedy: $|w| < \rho < |h(\zeta)|$;



Wprowadźmy nową zmienną u, taką, że $h(\zeta) - w = h(\zeta)\cdot(1-u)$ albo $u = \frac{w}{h(\zeta)}$; teraz widać że $0<|u|<1$, ponieważ moduł licznika jest mniejszy od modułu mianownika, gdy ζ zakreśla koło C. Zlogarytmujmy równość określającą u:

$$\lg[h(\zeta)-w] = \lg h(\zeta) + \lg(1-u);$$

różniczkując mamy: $d\lg[h(\zeta)-w] = d\lg h(\zeta) + d\lg(1-u)$

Całkujemy teraz obydwie strony wzdłuż koła C i dzielimy przez $2\pi i$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\lg[h(\zeta)-w] = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\lg h(\zeta) + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_C d\lg(1-u)}_{=0}$$

Ostatnia całka jest równa zeru, ponieważ, gdy ζ opisuje koło C, $|u|<1$, i $(1-u)$ opisuje w swojej płaszczyźnie drogę zamkniętą nie obejmującą p. zerowego, a więc wzdłuż tej drogi logarytm jest jednowartościowy i całka przy drodze zamkniętej daje zero.

Stąd wynika że:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\lg[h(\zeta)-w] = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\lg[h(\zeta)]$$

Ale jak wiemy (patrz poprzedni rozdział) taka całka jest równa liczbi

punktów zerowych funkcji logarytmowanej pod znakiem całki, zawartych wewnątrz koła C.
Stąd wynika, że wewnątrz koła C $h(z)-w$ ma tę samą liczbę pierwiastków co i $h(z)$; ale ta ostatnia posiada jak wiadomo z wyboru koła C tylko jeden punkt zerowy w środku koła, więc równanie:

$$\underline{h(z)-w=0}$$

jest spełnione przy jednej tylko wartości z dla każdego w wewnątrz koła C_1; pierwsza część naszego twierdzenia (o odpowiedniości doskonałej) jest udowodniona.

Dla dowodu drugiej części weźmy całkę:

$$(5)\qquad \underline{I} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{h'(\zeta)\,d\zeta}{h(\zeta)-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\lg[h(\zeta)-w]$$

O p. w zakładamy, że leży wewnątrz koła C_1, a $f(\zeta)$ jest regularna w naszym obszarze; wtedy funkcja podcałkowa posiada wewnątrz C tylko jeden p. osobliwy, mianowicie $z=z_w$, przy którym $f(z)=w$, a taki p. jest tylko jeden.
Ten punkt osobliwy jest oczywiście biegunem rzędu 1-go, bo:

$$\frac{h'(z)}{h(z)-w} = \frac{1}{z-z_w} + h_0(z-z_w)$$

, gdyż już poprzednio mieliśmy wyrażenie ogólne tego rodzaju (na pochodne logarytmu) kształtu:

$$\frac{n}{z-z_w} + h_1(z-z_w)$$

, a tutaj $n=1$, bo pierwiastek jak wyżej zauważyliśmy jest jednokrotny.
Rozwińmy $f(\zeta)$ na szereg Taylora: otrzymamy

$$f(\zeta) = f(z_w) + f'(z_w)(z-z_w) + \dots$$

stąd wynika że iloczyn:

$$f(\zeta)\frac{h'(z)}{h(z)-w} = \frac{f(z_w)}{z-z_w} + \text{część regularna}.$$ A więc residuum odpowiadające punktowi $z=z_w$ jest $f(z_w)$, a wobec tego:

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\zeta)\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)-w}\,d\zeta = f(z_w)$$. Lecz całkę tą możemy rozwinąć na szereg w sposób następujący:

$$f(\zeta)\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)-w} = f(\zeta)\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)}\cdot\frac{1}{1-u} \quad \text{gdzie} \quad u=\frac{w}{h(\zeta)}$$

i $|u|<k<1$, gdy ζ na kole c.

$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+\cdots+u^n+\cdots$ i szereg ten jest jednostajnie zbieżny bo na kole c: $|u|<k<1$;

Stąd: $$f(\zeta)\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)-w} = f(\zeta)\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)}(1+u+u^2+\cdots+u^n+\cdots) =$$
$$= f(\zeta)\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} + f(\zeta)\frac{h'(\zeta)}{h^2(\zeta)}w + \cdots + f(\zeta)\frac{h'(\zeta)}{h^{p+1}(\zeta)}w^p + \cdots$$

Otrzymany szereg jest także zbieżny, a więc całkując go wyraz po wyrazie znajdziemy:

$$(5) \quad \int_c f(\zeta)\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)-w}\,d\zeta = \int_c \frac{f(\zeta)h'(\zeta)}{h(\zeta)}\,d\zeta + w\int_c \frac{f(\zeta)h'(\zeta)}{h^2(\zeta)}\,d\zeta + \cdots + w^p\int_c \frac{f(\zeta)h'(\zeta)}{h^{p+1}(\zeta)}\,d\zeta + \cdots$$

I szereg (5) jest zbieżny, bo powstał przez całkowanie szeregu jednostajnie zbieżnego; biorąc pod uwagę równości (4) i (5) mamy:

$$(6) \quad f(z_w) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p w^p \quad \text{gdzie} \quad a_p = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)h'(\zeta)}{h^{p+1}(\zeta)}\,d\zeta$$

Wzór (6) nosi nazwę wzoru Lagrange'a. $a_p = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)h'(\zeta)}{h^{p+1}(\zeta)}\,d\zeta$

Za pomocą tego wzoru otrzymujemy na kole c, rozwinięcie w-g potęg zmiennej w dowolnej funkcji $f(z)$, spełniającej warunki regularności.

Jeśli teraz wzory Lagrange'a zastąpimy $f(z)$ przez z, to otrzymamy w tym szczególnym wypadku wynik szukany.

$$z = \sum_{p=0}^{\infty} c_p w^p \quad \text{gdzie} \quad c_p = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\zeta\, h'(\zeta)}{h^{p+1}(\zeta)}\, d\zeta \quad .$$

Widzimy więc, że otrzymaliśmy f. odwrotną, a więc cel nasz jest osiągnięty.

Rozpatrzyliśmy wypadek, gdy $c_1 = h'(z_0) \neq 0$; założenie to było istotne o ile chcemy przy odwróceniu otrzymać element f. odwrotnej (regularny).

Załóżmy teraz, że $c_1 = 0$; dla ogólności załóżmy, że wszystkie

$c_k = 0$, dla $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$, a dopiero $c_n \neq 0$;

Wtedy $w = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + c_{n+2} z^{n+2} + \dots = c_n z^n (1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots)$

gdzie $d_1 = \frac{c_{n+1}}{c_n}$; ....

Możemy napisać, że:

$$w = c_n z^n h_2(z), \text{ gdzie } h_2(z) = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots$$

Wyciągnijmy z obu stron ostatniej równości pierwiastek n-tego stopnia:

$w^{1/n} = c_n^{1/n} z \sqrt[n]{h_2(z)}$, ale $h_2(0) = 1$, a więc

$\sqrt[n]{h_2(z)} = h_3(z)$ jest f. regularną, więc:

$h_3(z) = 1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \dots + \gamma_n z^n + \dots$, który to szereg jest zbieżny dla $|z| < \rho$

Oznaczmy: $w^{1/n} = t$, a $c_n^{1/n} = b_1$; wtedy:

$$t = b_1 z (1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots + b_n z^n + \dots$$

gdzie $b_1 \neq 0$ bo $b_1 = \sqrt[n]{c_n} \neq 0$.

Sprowadziliśmy zadanie do przypadku poprzednio rozważanego; dla tej nowej zależności funkcyjnej między t i z można znaleźć element funkcji odwrotnej, czyli że:

$$z = \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \dots + \beta_p t^p + \dots$$

lecz $t = u^{1/n}$, więc:

$$z = \beta_1 u^{1/n} + \beta_2 u^{2/n} + \dots + \beta_p u^{p/n} + \dots$$

Otóż[3] widzimy, że p. $u=0$ jest punktem osobliwym krytycznym. Jeżeli wyjdziemy z pewnej wartości u, to gdy argument zmiennej u zwiększy się o $2\pi k$, to po k okrążeniach p. początkowego $u=0$, $u^{1/n}$ zmieni swą wartość w ten sposób, że nowa wartość będzie się równała dawnej pomnożonej przez: $e^{\frac{2\pi k i}{n}} = \varepsilon^k$ (nowa gałąź pierwiastka),

czyli szereg: $$z = \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_p t^p + \dots =$$
$$= \beta_1 t\,\varepsilon^k + \beta_2 t^2 \varepsilon^{2k} + \dots + \beta_p t^p \varepsilon^{pk} + \dots$$

Ponieważ $\varepsilon^n = 1$, to widzimy, że otrzymujemy w ten sposób n wartości funkcji z w zależności od u, które stanowią n gałęzi funkcji w otoczeniu punktu krytycznego algebraicznego $u=0$ (p. krytyczny nazywa się algebraicznym jeżeli liczba gałęzi, które można otrzymać przez dowolną l. okrążeń jest skończona, w przeciwieństwie do punktów krytycznych przestępnych, gdzie f. rozgałęzia się na nieskończoną liczbę gałęzi jak np. funkcja logarytm).

Rozdział 18. Funkcje meromorficzne.

Udowodniliśmy już kiedyś, że gdy $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (f. ułamkowa), to $f(z)$ posiada tylko skończoną l. biegunów przyczem rząd bieguna jest równy krotności tego pierwiastka mianownika, któremu dany biegun odpowiada. (patrz str. 145

Teraz udowodnimy tw. odwrotne: Każda funkcja, która nie posiada innych osobliwości jak tylko skończoną l. biegunów jest funkcją ułamkową.