$$z = \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \dots + \beta_p t^p + \dots$$

lecz $t = u^{1/n}$, więc:

$$z = \beta_1 u^{1/n} + \beta_2 u^{2/n} + \dots + \beta_p u^{p/n} + \dots$$

Otóż[3] widzimy, że p. $u=0$ jest punktem osobliwym krytycznym. Jeżeli wyjdziemy z pewnej wartości $u$, to gdy argument zmiennej $u$ zwiększy się o $2\pi k$, to po $k$ okrążeniach p. początkowego $u=0$, $u^{1/n}$ zmieniwszy wartość w ten sposób, że nowa wartość będzie się równała dawnej pomnożonej przez: $e^{\frac{2\pi k i}{n}} = \varepsilon^k$ (nowa gałąź pierwiastka),

czyli szereg:
$$z = \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_p t^p + \dots =$$
$$= \beta_1 t \varepsilon^k + \beta_2 t^2 \varepsilon^{2k} + \dots + \beta_p t^p \varepsilon^{pk} + \dots$$

Ponieważ $\varepsilon^n = 1$, to widzimy, że otrzymujemy w ten sposób $n$ wartości funkcji $z$ w zależności od $u$, które stanowią $n$ gałęzi funkcji w otoczeniu punktu krytycznego algebraicznego $u=0$ (p. krytyczny nazywa się algebraicznym jeżeli liczba gałęzi, które można otrzymać przez dowolną l. okrążeń jest skończona, w przeciwieństwie do punktów krytycznych przestępnych, gdzie f. rozgałęzia się na nieskończoną liczbę gałęzi jak np. funkcja logarytm).

## Rozdział 18. Funkcje meromorficzne.

Udowodniliśmy już kiedyś, że gdy $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (f. ułamkowa), to $f(z)$ posiada tylko skończoną l. biegunów przyczem rząd bieguna jest równy krotności tego pierwiastka mianownika, któremu dany biegun odpowiada. (patrz str 145)

Teraz udowodnimy tw. odwrotne: Każda funkcja, która nie posiada innych osobliwości jak tylko skończoną l. biegunów jest funkcją ułamkową.

Jeśli biegunami są punkty: $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots \zeta_k, \dots \zeta_n$, to w otoczeniu p. $\zeta_k$ można funkcję rozwinąć na szereg Laurent'a:

$$f(\zeta) = W_{\ell_k}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_k}\right) + \text{część regularna.}$$

Część główna jest w takiem rozwinięciu wielomianem, którego stopień jest, jak wiemy, równy rzędowi bieguna $\zeta_k$; utwórzmy różnicę:

$$(1)\quad f(\zeta) - W_{\ell_1}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}\right) - W_{\ell_2}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_2}\right) - \dots - W_{\ell_n}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_n}\right) = F(\zeta)$$

Punktami nieregularności f. $F(\zeta)$ mogą być tylko punkty: $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$, ale i w tych p. $F(\zeta)$ jest regularne, a to z tej racji: weźmy p. $\zeta_k$; wiemy, że $f(\zeta) = W_{\ell_k}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_k}\right)$ + część regularna, którą oznaczymy przez $F_1(\zeta)$. Wobec tego, po ~~po~~ podstawieniu do wzoru (1) wartości $f(\zeta)$ otrzymamy:

$$F(\zeta) = \cancel{W_{\ell_k}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_k}\right)} + F_1(\zeta) - \cancel{W_{\ell_k}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_k}\right)} - \Phi(\zeta), \quad \text{gdzie}$$

$$\Phi(\zeta) = W_{\ell_1} + W_{\ell_2} + \dots + W_{\ell_{k-1}} + W_{\ell_{k+1}} + \dots + W_{\ell_n},$$

a więc $\Phi(\zeta)$ jest w p. $\zeta_k$ regularne, a stąd wniosek, że i $F(\zeta)$ jest regularne w p. $\zeta_k$, a więc i na całej płaszczyźnie.

Funkcja $F(\zeta)$ jest to pewien wielomian. Mamy więc ze wzoru (1):

$$f(\zeta) = F(\zeta) + W_{\ell_1}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}\right) + W_{\ell_2}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_2}\right) + \dots + W_{\ell_n}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_n}\right).$$

Widzimy że: $f(z)$ = wielomian + ułamki, a więc $f(\zeta)$ jest f. ułamkową: $f(\zeta) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, jako otrzymana przez dodanie ułamków do wielomianu $F(\zeta)$.

Dokonaliśmy zarazem rozkładu funkcji na ułamki proste.

Określimy <u>funkcję</u> <u>meromorficzne</u>, jako takie funkcje jednowartościowe, które mają nieskończenie wiele biegunów i żadnych innych punktów osobliwych w skończoności. Ponieważ bieguny są p. osobliwemi odosobnionemi, więc można je ponumerować (tworzą zbiór przeliczalny). Załóżmy narazie, że p. $z=0$ nie jest biegunem. Biegunami będą p., których moduły tworzą ciąg:

$$|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots \quad \text{gdzie } z_n \to \infty \text{ gdy } n \to \infty.$$

Udowodnimy tw. Mittag-Leffler'a, które mówi, że istnieje funkcja która posiada w tych właśnie p. $z_1, z_2, \dots, z_n$, bieguny, która oprócz tego spełnia ten warunek, że w każdym z nich może mieć z góry zadaną część główną; i tak: w p. $z_1 \sim \mathcal{P}_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right)$, w p. $z_2 \sim \mathcal{P}_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right)$; .... w p. $z_k \sim \mathcal{P}_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$, ... gdzie stopień wielomianu jest równy rzędowi bieguna w odpowiadającym mu punkcie.

Funkcja, o którą nam chodzi nie powinna mieć żadnych innych biegunów, prócz tych z góry zadanych.

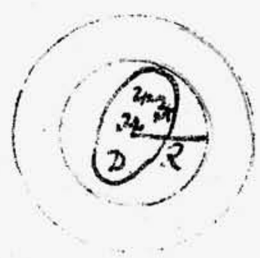
Trzeba zauważyć, że o ile istniałaby jedna taka funkcja $F(z)$, to wszystkie funkcje kształtu $F(z)+\mathcal{G}(z)$, gdzie $\mathcal{G}(z)$ oznacza f. całkowitą, są także funkcjami spełniającemi warunki naszego twierdzenia, bo posiadają te same bieguny co i f. $F(z)$, (i żadnych innych) i te same części główne rozwinięcia. Innych takich funkcji, które nie byłyby kształtu $F(z)+\mathcal{G}(z)$, a które spełniałyby warunki naszego twierdzenia, niema, bo gdyby istniały inne np. f. $\Phi(z)$, to musiałoby być: $\Phi(z)-F(z) =$ f. całkowitej; skąd $\Phi(z)-F(z)=\mathcal{G}(z)$ a więc $\Phi(z)=F(z)+\mathcal{G}(z)$.

Trzeba nam więc tylko okazać że taka funkcja $F(z)$ istnieje i, o ile istnieje, podać sposób jej zbudowania.

Dowód: Weźmy pod uwagę sumę: $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$; gdyby ten szereg był zbieżny, to jego suma byłaby żądaną funkcją: cała trudność polega na zastąpieniu tego szeregu przez inny, który byłby zbieżny, a który

w rozwinięciu dawałby te same części główne co szereg: $\sum_{k=1}^{\infty} P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$.
Trudność tę przezwyciężył Mittag-Lefler w ten sposób, że do każdego wyrazu naszej sumy dodał taką f. całkowitą (co wolno zawsze robić, bo od tego część główna nie zmienia się), że szereg stał się jednostajnie zbieżny.

Chcemy, by szereg był jednostajnie zbieżny wewnątrz obszaru $D$. Zakreślmy koło promieniem $R$ takim, by to koło obejmowało obszar $D$, a drugie koło promieniem $kR$, gdzie $k > 1$.




Tylko skończona ilość biegunów naszej szukanej funkcji znajdzie się wewnątrz koła o promieniu $kR$, reszta będzie leżała zewnątrz, tak że możemy napisać:

$$|z_n| > kR \quad \text{gdy} \quad n > n_0.$$

Zajmiemy się właśnie temi zewnętrznemi punktami (biegunami).
Weźmy jeden taki biegun $z_n$; część główna w jego otoczeniu jest $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$, a punktem osobliwym tej części głównej jest tylko p. $z_n$, inne zaś są punktami regularności. Wielomian ten można zatem rozwinąć np. w otoczeniu punktu $z=0$ na szereg potęgowy:

$$P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^{(n)} z^m,$$

który będzie jednostajnie zbieżny wewnątrz koła o promieniu $kR$, bo to koło nie zawiera, jak wiemy, punktu $z=z_n$. Rozbijmy ten szereg na sumę częściową i resztę:

$$P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^{(n)} z^m = \sum_{m=0}^{N_n} \alpha_m^{(n)} z^m + \sum_{m=N_n+1}^{\infty} \alpha_m^{(n)} z^m = S_{N_n} + R_{N_n}$$

Weźmy taki ciąg liczb $\varepsilon_n$, by szereg:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + \dots$$

był szeregiem zbieżnym (możemy np. wybrać $\varepsilon_n = \frac{1}{n^2}$)
Wskaźnik $N_n$, w którym dzielimy wielomian $P_n\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$ na sumę skończoną

i resztę możemy tak wybrać, by na kole o promieniu $k \cdot R$ zachodziło: $|R_{N_n}| < \varepsilon_{N_n}$. Zamiast wielomianu $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$, weźmy różnicę: $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - \sum_{m=0}^{N_n} \alpha_m^{(n)} z^m$ i rozważmy szereg:

$$(1) \qquad \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left\{ P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - \sum_{m=0}^{N_n} \alpha_m^{(n)} z^m \right\} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} R_{N_n}(z)$$

Szereg ten jest zbieżny, a nawet jednostajnie zbieżny, bo jego wyrazy są mniejsze odpowiednio od wyrazów szeregu liczbowego: $|R_{N_n}| < \varepsilon_{N_n}$, utworzonego przez ciąg liczb $\varepsilon_n$; Łatwo widzieć, że funkcja:

$$(2) \quad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - h_n(z) \right\} = \sum_{n=1}^{n_0} \left\{ P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - h_n(z) \right\} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left\{ P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - h_n(z) \right\},$$

gdzie $h_n(z) = S_n(z)$, jest szukaną przez nas funkcją.

W rzeczy samej: w każdym punkcie $z \neq z_k$, obie częściowe sumy szeregu przedstawiającego f. $F(z)$ są regularne: pierwsza suma dlatego, że ma skończoną liczbę wyrazów: $\sum_{n=1}^{n_0}$, druga zaś $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}$ dlatego, że szereg ten jest zbieżny jednostajnie, a jego wyrazy są f. regularnemi. Wobec tego i cała suma: $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty}$ jest w punkcie $z = z_k$ regularna.

W punkcie $z = z_k$, część druga prawej strony równości (2) jest także jednostajnie zbieżna (dla tej samej przyczyny); część zaś pierwsza da się przedstawić tak:

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{n_0} = \sum_{n=1}^{k-1} \left\{ P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - h_n(z) \right\} + \left\{ P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) - h_k(z) \right\} + \sum_{n=k+1}^{n_0} \left\{ P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - h_n(z) \right\}.$$

Tylko środkowy nawias równości (3) przedstawia część nieregularną w p. $z_k$, bo pozostałe dwie sumy $\sum_{n=1}^{k-1}$ i $\sum_{n=k+1}^{n_0}$ są f. regularnemi w p. $z_k$. Jeśli teraz jeszcze z tego środkowego nawiasu wzoru (3) wyłączymy $h_k(z)$, jako f. regularną w p. $z = z_k$, a włączymy do sum regularnych, to otrzymamy:

$$(4)\quad \sum_{n=1}^{n_0}\left\{P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-h_n(z)\right\}=P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)+\left[-h_k(z)+f.\,regularna\right]$$

Jeśli teraz weźmiemy pod uwagę równości (2) i (4), to druga suma po prawej stronie równości (2) połączy się z wyrażeniem zawartem w nawiasie w równości (4), gdyż zarówno to wyrażenie jak i wspomniana suma są w p. $z=z_k$ regularne, a jako część główna pozostanie: $P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$, tak, że:

$$(5)\quad F(z)=P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)+f.\,regularna\ w\ otoczeniu\ p.\ z_k.$$

Naszemu rozwinięciu nadaliśmy formę rozwinięcia na szereg Laurenta, gdzie $P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$ jest częścią główną. Z równości (5) widać że f. $F(z)$ spełnia żądane przez twierdzenie warunki.

Gdyby i p. $z=0$ był biegunem, a odpowiadająca mu część główna była równa $P_0\left(\frac{1}{z}\right)$, to szukaną funkcją byłoby, jak to łatwo okazać,:

$$(6)\quad F_1(z)=F(z)+P_0\left(\frac{1}{z}\right),$$

gdzie $F(z)$ oznacza odpowiednią f., w wypadku gdy p. $z=0$ nie jest biegunem (wzór (5)).

Twierdzenie Mittag-Lefflera daje możność rozkładu na ułamki proste funkcyj bardziej ogólnych niż f. wymierne, bo funkcyj meromorficznych.

<u>Rozkład f. całkowitej na czynniki</u> (<u>twierdzenie Weierstrass'a</u>)

Tak jak tw. Mittag-Lefflera daje możność rozkładu na ułamki proste f. ogólniejszych niż f. wymierna, tak tw. Weierstrass'a pozwala na coś analogicznego do rozkładu wielomianu na czynniki, ale w zastosowaniu do f. ogólniejszych niż wielomiany, bo do f. całkowitych. Udowodnimy mianowicie, że f. całkowite dają się roz-

łożyć na czynniki, z których każdy ma tylko jeden punkt zerowy.
Jak wiemy istnieją takie f. całkowite, które nie posiadają wcale punktów zerowych. Do takich f. należy: $e^z = e^x \cdot e^{iy}$; wiemy bowiem, że $|e^z| = e^x \neq 0$, a więc i $e^z \neq 0$ dla wszystkich $z$.
Tą samą własność posiada także funkcja kształtu: $e^{g(z)}$, gdzie $g(z)$ jest funkcją całkowitą, więc dla skończonych wartości $z$ ma wartość skończoną, a zatem:

$$e^{g(z)} \neq 0, \text{ gdyż } |e^{g(z)}| = e^{R\,g(z)} \neq 0,$$

gdzie $R\,g(z)$ oznacza część rzeczywistą wartości $g(z)$.
Łatwo sprawdzić, że każda f., która nie posiada pierwiastków jest kształtu $e^{g(z)}$. Załóżmy bowiem, że funkcja $G(z)$ nie posiada pierwiastków.
Wtedy iloraz: $\frac{G'(z)}{G(z)}$ jest funkcją regularną na całej płaszczyźnie.
Oznaczmy: $\frac{G'(z)}{G(z)} = g'(z)$; całkując otrzymamy: $\lg G(z) = g(z)$, a więc rzeczywiście nasza funkcja da się przedstawić: $G(z) = e^{g(z)}$.
Istnieją także i takie funkcje, któr przeciwnie posiadają nieskończenie wiele miejsc zerowych. Tak np. p. zerowemi funkcji $\sin \pi z$ są punkty:

$$z = 0, +1, -1, +2, -2, +3, \dots$$

Po tej uwadze przejdźmy do dowodu tw. Weierstrass'a.
Mamy f. całkowitą $G(z)$, mającą nieskończenie wiele punktów zerowych. Punkty te są odosobnione więc tworzą ciąg przeliczalny; ustawmy je w ciąg rosnący: $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$; zakładamy narazie że p. $z=0$ nie jest punktem zerowym naszej funkcji.
Iloczyn nieskończony:

$$a(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)\dots$$

byłby żądanym rozkładem gdyby był zbieżny, ale to jak wiemy nie zawsze zachodzi

warunek kon[ieczny] i dost[ateczny] aby funkcja całkowita nie miała pierwiastków jest $f(z) = e^{g(z)}$

Jeśli jednak w naszym iloczynie nieskończonym zamiast czynnika: $(z-z_k)$ podstawimy iloczyn: $(z-z_k)e^{g(z)}$, który ma ten sam punkt zerowy, co i czynnik $(z-z_k)$ i tylko ten sam, (gdyż $e^{g(z)}$ nie ma p. zerowego), to przy odpowiednio wybranem: $e^{g(z)}$ możemy osiągnąć zbieżność naszego iloczynu nieskończonego.

Weźmy pod uwagę taki iloczyn nieskończony:

$$(7)\quad G(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_k}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^{p_k} + \cdots}$$

Okażemy, że ten iloczyn jest zbieżny, o ile wskaźnik $p_k$ będzie odpowiednio wybrany.

Czynnik $\left(1-\frac{z}{z_k}\right)$ występujący w naszym iloczynie (7) może być użyty zamiast $(z-z_k)$, bo $z_k$, występujące w mianowniku jest liczbą stałą.

Dowód naszego twierdzenia przeprowadzimy jako wniosek z tw. Mittag-Leflerà.

Czynnik $e^{g(z)}$ przed znakiem iloczynu nie gra istotnej roli, bo jak wiemy, o ile $G(z)$ i $G_1(z)$ mają te same miejsca zerowe, to iloraz:

$$\frac{G_1(z)}{G(z)} = g(z), \text{ jest f. całkowitą.}$$

Niech $G'(z)$ oznacza pochodną rozkładanej funkcji $G(z)$. Rozłóżmy ich iloraz $\frac{G'(z)}{G(z)}$ na szereg Laurenta w otoczeniu p. $z_k$:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{\alpha_k}{z-z_k} + \text{część regularna}$$

Punktami nieregularności są tylko miejsca zerowe funkcji $G(z)$. Są to bieguny 1-go rzędu takie, że część główna wynosi w nich: $\frac{\alpha_k}{z-z_k}$, gdzie $\alpha_k$ oznacza krotność odpow. pier. własna).

Na mocy twierdzenia Mittag-Leflerà możemy pisać.

$$(8)\quad \frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left\{ \frac{1}{z-z_k} - h_k(z) \right\}$$

, gdzie $h_k(z)$ jest to suma początkowych wyrazów rozwinięcia $\frac{1}{z-z_k}$ na szereg potęgowy:

$$\frac{1}{z-z_k} = -\frac{1}{z_k}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_k}} = -\frac{1}{z_k} - \frac{z}{z_k^2} - \frac{z^2}{z_k^3} - \dots - \frac{z^{p_k-1}}{z_k^{p_k}} - \dots$$

Skąd: $h_k(z) = -\frac{1}{z_k} - \frac{z}{z_k^2} - \frac{z^2}{z_k^3} - \dots - \frac{z^{p_k-1}}{z_k^{p_k}} - \dots$

Przy odpowiednio wybranem $p_k$ szereg, na który rozłożyliśmy iloraz $\frac{G'(z)}{G(z)}$ będzie zbieżny. W sumie Mittag-Lefflerowskiej możemy zamiast $\alpha_k$ pisać 1, ale za to odpowiedni wyraz brać przy sumowaniu $\alpha_k$ razy.

Wtedy:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \dots + \frac{z^{p_k-1}}{z_k^{p_k}} \right\} + g'(z);$$

wyraz $g'(z)$ t. j. f. całkowita występująca we wzorze Mittag-Leflera. Szereg ostatni jest na mocy twierdzenia Mittag-Leflera jednostajnie zbieżny, więc możemy go całkować.

$$(9)\quad \int_0^z \frac{G'(z)}{G(z)}dz = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^z \frac{dz}{z-z_k} + \int_0^z \frac{dz}{z_k} + \int_0^z \frac{z\,dz}{z_k^2} + \dots + \int_0^z \frac{z^{p_k-1}dz}{z_k^{p_k}} \right\} + g(z)$$

Skąd wobec założenia że p. $z=0$ nie jest p. zerowym, czyli $G(0)\neq 0$ mamy: (całkujemy i podstawiamy granice)

$$\lg \frac{G(z)}{G(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lg \frac{z_k - z}{z_k} + \frac{z}{z_k} + \frac{z^2}{2z_k^2} + \dots + \frac{z^{p_k}}{p_k z_k^{p_k}} \right\} + g(z)$$

Przechodząc od logarytmów do liczb otrzymamy zamiast sumy iloczyn.

$$\frac{G(z)}{G(0)} = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k} + \frac{z^2}{2z_k^2} + \dots + \frac{z^{p_k}}{p_k z_k^{p_k}}}$$

Ponieważ $G(0) =$ stałej $= e^c$ więc $e^{g(z)}\cdot e^c = e^{g(z)}$ i mamy:

$$(10)\quad G(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{z_k}\right)\cdot e^{\frac{z}{z_k} + \frac{z^2}{2z_k^2} + \dots + \frac{z^{p_k}}{p_k z_k^{p_k}}}$$

Zbieżność iloczynu (10) wynika ze zbieżności szeregu (9).
Przy logarytmowaniu nie potrzebujemy się troszczyć o to wzdłuż jakiej gałęzi logarytmujemy; jako różnica bowiem może wystąpić wyraz $2k\pi i$, ale w iloczynie czynnik $e^{2k\pi i}=1$ nie ma żadnego znaczenia.
Zastanówmy się nad wyznaczeniem liczby $p_k$ w naszem twierdzeniu.
Aby iloczyn, którego wyrazem ogólnym jest:

$$\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\cdot e^{\frac{z}{z_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2+\dots+\frac{1}{p_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^{p_k}}$$

był zbieżny, wskaźnik $p_k$ musi być tak dobrany, aby szereg, którego ogólnym wyrazem jest:

$$\frac{1}{z-z_k}+\frac{1}{z_k}+\frac{z}{z_k^2}+\dots+\frac{z^{p_k-1}}{z_k^{p_k}}$$

był zbieżny. Wyrażenie to występuje we wzorze Mittag-Leffler'a; jest to jak wiemy reszta szeregu, na jaki rozkłada się: $\frac{1}{z-z_k}$. Wobec tego:

$$\frac{1}{z-z_k}+\frac{1}{z_k}+\frac{z}{z_k^2}+\dots+\frac{z^{p_k-1}}{z_k^{p_k}}=\frac{z^{p_k}}{z_k^{p_k+1}}+\frac{z^{p_k+1}}{z_k^{p_k+2}}+\dots=\frac{z^{p_k}}{z_k^{p_k+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_k}};$$

Punkt $z$ jest to dowolny punkt w pewnym obszarze w skończoności, zaś punkt $z_k$ oddala się w nieskończoność gdy $k\to\infty$, a więc wyrażenie: $\frac{1}{1-\frac{z}{z_k}}\to 1$, tak że dla wszystkich wskaźników $k>k_0$ zachodzi:

$$1-\varepsilon<\left|\frac{1}{1-\frac{z}{z_k}}\right|<1+\varepsilon$$

Jednem słowem badany tutaj szereg Mittag-Lefflera możemy napisać tak:

$$(11)\qquad \frac{G'(z)}{G(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{p_k}}{z_k^{p_k+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_k}}$$

przyczem czynnik: $\frac{1}{1-\frac{z}{z_k}}$ nie wpływa na zbieżność szeregu (11), bo jak zauważyliśmy od pewnego wskaźnika $k>k_0$, czynnik ten mało się różni od jedności:

$$1-\varepsilon<\left|\frac{1}{1-\frac{z}{z_k}}\right|<1+\varepsilon$$

Wobec tego szereg Mittag-Leflera jest zbieżny, gdy zbieżny jest szereg:

$$(12)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z^{p_k}}{z_k^{p_k+1}}\right|$$

Wtedy jest także zbieżny i iloczyn Weierstrass'a.
Trzeba więc tak wybrać $p_k$, by szereg (12) był zbieżny. Okażemy, że jeśli tylko $p_k = k$, to już szereg (12) jest zbieżny. Pomnóżmy w tym celu wyrazy szeregu (12) przez $z$ i zastosujmy do niego regułę Cauchy'go.

Otrzymamy: $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z^{p_k+1}}{z_k^{p_k+1}}\right|$; $\sqrt[k+1]{\left|\frac{z}{z_k}\right|^{p_k+1}} = \left|\frac{z}{z_k}\right| \to 0$ o ile $p_k = k$,

gdyż $z_k \to \infty$, a $z$ jest skończone.
Widzimy więc, że przy $p_k = k$ szereg (12) a więc i szereg (11), a co za tem idzie i iloczyn Weierstrass'a są zbieżne. Iloczyn te będzie miał postać:

$$\left(1-\frac{z}{z_1}\right)e^{\frac{z}{z_1}}\cdot\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\cdot e^{\frac{z}{z_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_2}\right)^2}\cdot\left(1-\frac{z}{z_3}\right)\cdot e^{\frac{z}{z_3}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_3}\right)^3}\cdots$$

Niedogodność polega na tem, że liczba wyrazów w wykładniku przy $e$ rośnie nieograniczenie.
Funkcje, które dają się w ten sposób rozwinąć na iloczyn Weierstrassa, by wykładnik przy $e$ mógł być zawsze wielomianem tego samego stopnia nazywamy <u>funkcjami</u> <u>rzędu</u> <u>skończonego</u>.
Aby zbadać kiedy f. jest rzędu skończonego, trzeba rozpatrzyć szereg:

$$(12)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z^{p_k}}{z_k^{p_k+1}}\right|$$

i zdać sobie sprawę kiedy może zachodzić zbieżność przy $p_k = p = \text{Const.}$
Szereg (12) miałby postać: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^p}{|z_k^{p+1}|} = z^p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_k^{p+1}|}$

więc jeśli pierwiastki danej f. są takie że szereg: $\sum_{k=1}\frac{1}{|z_k|^{p+1}}$ jest zbieżny to wystarczy przy $e$ wziąć jako wykładnik sumę skończonej liczby wyrazów. t.zn. $p=$ Constans. Rozpatrzmy ten szereg, zakładając wciąż, że żaden z pierwiastków funkcji $G(z)$ nie jest zerem.

$$(13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{\alpha}}$$

Widać odrazu, że przy $\alpha=0$ szereg (13) jest rozbieżny. O ile istnieją takie wartości na $\alpha$, że szereg (13) jest przy nich zbieżny, to badana f. jest rzędu skończonego.

Określimy <u>wykładnik</u> <u>zbieżności</u> $\rho$ przy pomocy takiego przekroju:
1) Do klasy 1-ej zaliczymy takie liczby $\alpha$, przy których szereg (13) jest rozbieżny. 2) Do klasy 2-ej zaliczymy takie wartości na $\alpha$, przy których szereg (13) jest zbieżny. Warunki przekroju są tu spełnione: przekrój wyznacza taką liczbę $\rho$, że $\rho-\varepsilon$ należy do klasy 1-ej, zaś

$\rho+\varepsilon$ " " " 2-ej.

Sama liczba $\rho$ może należeć zarówno do klasy 1-ej jak i do kl y 2-ej. Rozważmy dwie możliwości:

1) $\rho$ nie jest l. całkowitą; wybieramy takie $p$, by było $p<\rho<p+1$; ponieważ przy $\alpha=p+1$ szereg jest zbieżny i ponieważ $p+1$ jest najmniejszą z liczb całkowitych, przy których zbieżność zachodzi więc o ile weźmiemy $p=E(\rho)$, to szereg (13) będzie zbieżny.

2) $\rho$ jest liczbą całkowitą; wtedy mogą zajść dwie możliwości:

2,1) $\rho$ należy do klasy 1-ej liczb przekroju; wtedy zbieżność szeregu (13) zachodzi przy $\alpha=\rho+1$; obieramy więc $p=\rho$.

2,2). $\rho$ należy do klasy 2-ej liczb wyznaczających przekrój. wtedy zbieżność szeregu (13) zachodzi przy $\alpha=\rho$, a więc mamy $\rho=p+1$, skąd $p=\rho-1$

Przykłady.

Mamy funkcję, punktami zerowemi której są p. $1, 2, 3, 4, \ldots n, \ldots$, odpowiadającą jej szereg typu (13) jest: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$; jak wiemy w tym wypadku $\rho=1$; ponieważ $\rho$ należy do klasy niższej, więc bierzemy $p=\rho=1$ i f. rozłoży się na iloczyn, którego ogólny czynnik ma postać:

$$\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\cdot e^{\frac{z}{z_n}}$$

W ten właśnie sposób rozłoży się funkcja $\sin \pi z$, ponieważ moduły punktów zerowych tej funkcji tworzą ciąg naturalny; do p. zerowych należy także i p. $z=0$. A więc funkcja nasza da się rozłożyć na taki iloczyn:

$$\sin \pi z \sim z \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot e^{\frac{z}{n}}$$

Czynnik $z$ występuje przed iloczynem dlatego, że i punkt $z=0$ jest punktem zerowym. Pod znakiem iloczynu czynnika tego umieścić nie można, bo przy $n=0$ iloczyn nie ma sensu. Aby zamiast znaku odpowiedniości między $\sin \pi z$ i iloczynem móc napisać znak równości trzeba nasz iloczyn pomnożyć jeszcze przez czynnik nie posiadający miejsc zerowych: $e^{g(z)}$

Wtedy mamy: $\sin \pi z = e^{g(z)}\cdot z \cdot \prod_{n=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot e^{\frac{z}{n}} = e^{g(z)}\cdot z\cdot \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$

Iloczyn drugi otrzymujemy z pierwszego przemnażając parami te czynniki, których wskaźnik różnią się tylko znakiem; rzecz jasna, że czynnik wykładniczy wtedy zniknie, gdyż: $e^{\frac{z}{n}}\cdot e^{-\frac{z}{n}}=1$.

Musimy teraz wyznaczyć funkcję $e^{g(z)}$, a nasze zadanie (rozkład funkcji $\sin \pi z$) będzie skończone. W tym celu logarytmujemy w ostatniej równości stronami: stronę lewą i część środkową; iloczyn po zlogo rytmowaniu da sumę logarytmów:

$$\lg \sin \pi z = g(z) + \lg z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{ \lg\left(1-\frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n} \right\}$$

(znak $\Sigma'$ sumy z przecinkiem oznacza, że z pośród jej wyrazów wyłączamy te, przy których wyrażenie traci sens; w naszym wypadku zachodzi to przy $n=0$). Weźmy pochodne obu stron ostatniej równości:

$$\pi \operatorname{Ctg} \pi z = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

Otrzymaliśmy rozwinięcie na szereg Mittag-Leflera funkcji $\operatorname{ctg} \pi z$, która, jak wiemy posiada nieskończenie wiele biegunów. Różniczkując dalej mamy:

$$-\pi^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \pi z} = g''(z) - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left( \frac{1}{z-n} \right)^2$$

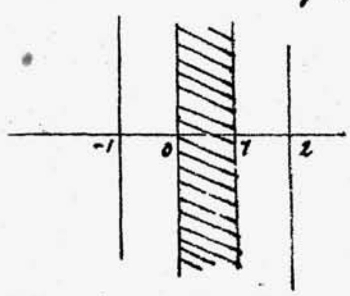
Suma nasza jest zbieżna, bo pod znakiem sumy jest wyraz kwadratowy. Otrzymaliśmy rozwinięcie na sumę Mittag-Leflera funkcji $\frac{1}{\sin^2 \pi z}$, która ma także nieskończenie wiele biegunów 2-go rzędu: jest to także f. meromorficzna; w tym wypadku wielomian, który odejmujemy zwykle przy rozwinięciu na szereg Mittag Leflera, jest równy zeru.
Z równości tej mamy wartość na $g''(z)$:

$$g''(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}.$$

Wyraz $\frac{1}{z^2}$ włączamy pod znak sumy i piszemy symbol $\Sigma$ bez przecinka, bo suma nasza przy $n=0$ nie traci sensu.
Funkcja $\sin^2 \pi z$ ma okres równy jedności, bo f. $\sin z$ ma okres równy $\pi$, tak że zachodzi: $\sin^2 \pi(z+1) = \sin^2 \pi z$.
Jeśli chodzi o funkcję: $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$, to jest to także funkcja okresowa, o okresie równym jedności; by się o tem przekonać porównajmy $F(z+1)$ i $F(z)$

$$F(z+1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\{z-(n-1)\}^2}$$

Łatwo zauważyć, że obie sumy $F(z)$ i $F(z+1)$ są sobie równe, bo zarówno $n$ jak i $(n-1)$ przechodzą te same wartości w przedziale $(-\infty,+\infty)$.
Oba składniki funkcji $g''(z)$ są okresowe, o okresie równym $1$, a więc i sama f. $g''(z)$ jest f. o okresie $1$, to znaczy $g''(z+1)=g''(z)$; wobec tego zamiast badać ją w całej płaszczyźnie, możemy ograniczyć się do zbadania jej w pewnym pasie o szerokości $1$, równoległym do osi $y$-ów.



Jeśli $z=x+iy$, to badamy pas $0<x<1$.
Wtedy:

$$g''(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n+iy)^2}-\frac{\pi^2}{\left(\frac{e^{i\pi z}-e^{-\pi i z}}{2i}\right)^2}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n+iy)^2}+\frac{4\pi^2}{(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})^2}.$$

Obliczmy mianownik drugiego wyrazu:

$$(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})^2=\{e^{i\pi(x+iy)}-e^{-i\pi(x+iy)}\}^2=(e^{-\pi y}e^{i\pi x}-e^{\pi y}e^{-i\pi x})^2=$$

$$=e^{-2\pi y}e^{2\pi i x}-2+e^{2\pi y}e^{-2\pi i x}$$

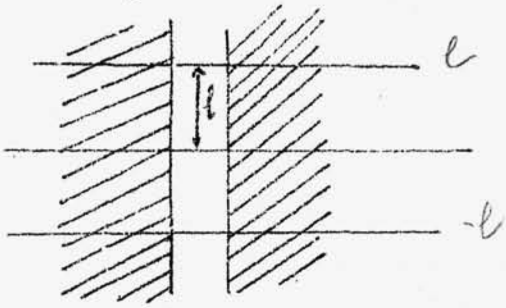
Wobec tego: $$g''(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n+iy)^2}+\frac{4\pi^2}{e^{-2\pi y}e^{2\pi i x}-2+e^{2\pi y}e^{-2\pi i x}}$$

W pasie w którym badamy $g''(z)$, $y$ może dążyć do $+\infty$ lub $-\infty$.
Gdy $y\to-\infty$ to $e^{-2\pi y}\to\infty$ zaś $e^{2\pi y}\to 0$
" $y\to+\infty$ " $e^{-2\pi y}\to 0$ " $e^{2\pi y}\to\infty$
W obu tych wypadkach drugi wyraz funkcji $g''(z)$ staje się nieskończenie mały; wobec tego mamy:

$$g''(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n+iy)}+\varepsilon,\quad o\ ile\quad y>l.$$

Rzuca się znów w oczy, że gdy $y\to\infty$ to i wyrazy sumy dążą do zera, a więc gdy $y>l$ to i suma jest mniejsza od $\varepsilon$, czyli:

$$g''(z)<2\varepsilon\quad o\ ile\ y>l.$$




W części płaszczyzny poza prostokątem

$$0\leq x\leq 1\quad,\ -l\leq y\leq +l$$

funkcja nasza jest mniejsza od $2\varepsilon$. Wewnątrz prostokąta jest ograniczona. Stąd wynika wniosek, że nasza funkcja w paśmie $0\leq x\leq 1$, a po uwzględnieniu okresowości i na całej płaszczyźnie ograniczona. Zatem na całej płaszczyźnie zachodzi nierówność:

$$|g''(z)|<M.$$

Ale na mocy twierdzenie Liouville'a funkcja całkowita i ograniczona musi być constans, więc $g''(z)=$ constans; ponieważ jednak w pewnej części płaszczyzny zachodzi: $g''(z)<2\varepsilon$, więc jasna rzecz że musi być $\underline{g''(z)=0.}$ Wtedy $g'(z)=C_1$ a $\underline{g(z)=C_1(z)+C_2}$

Podstawmy tą wartość funkcji $g(z)$ we wzorze na rozwinięcie funkcji $\sin\pi z$:

$$\sin\pi z=e^{C_1z}\cdot C\cdot z\cdot\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot e^{\frac{z}{n}}\qquad (e^{C_2}=C).$$

Pozostaje tylko obliczyć wartość stałych $C_1$ i $C$.

Gdy w ostatnim wzorze zamienimy $z$ przez $-z$, to iloczyn $\prod_{n=-\infty}^{+\infty}$ nie zmieni znaku, gdyż wyrazy ujemne staną się dodatniemi i naodwrót. Czynnik $z$ zmieni znak, a że wyrażenie po lewej stronie zmieni znak więc czynnik $e^{C_1z}$ nie może zmienić znaku przy naszem podstawieniu. Mamy więc: $e^{C_1z}=e^{-C_1z}$, a że $e^{C_1z}\cdot e^{-C_1z}=1$, więc:

$$e^{C_1 z} = 1 \quad \text{skąd} \quad \underline{C_1 = 0}.$$

Obliczmy wartość stałej $C$.

$$\sin \pi z = C z \cdot \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot e^{\frac{z}{n}} = C \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

skąd $$\frac{\sin \pi z}{z} = C \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

gdy $z \to \infty$ to prawa strona naszej równości dąży do $C$; ale wtedy lewa strona t.j. $\frac{\sin \pi z}{z} \to \pi$; a więc

$$\underline{C = \pi.}$$

Mamy więc ostatecznie rozwinięcie funkcji $\sin \pi z$:

$$\underline{\sin \pi z = \pi \cdot z \cdot \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot e^{\frac{z}{n}}}$$

Ponieważ $g(z) = \pi$, więc $g'(z) = 0$; wobec tego rozkład f. $\operatorname{ctg} \pi z$ ma postać:

$$\underline{\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)}$$

Podobnie rozkład funkcji odwrotnej do $\sin^2 \pi z$ ma postać:

$$\underline{-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}}$$

W ten sposób rozwijając funkcję $\sin \pi z$ na iloczyn Weierstrass'a, rozwinęliśmy zarazem $\operatorname{ctg} \pi z$ i $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ na szereg Mittag-Leflera.

2). Funkcje eliptyczne są to f. meromorficzne podwójnie okresowe; mają dwa okresy $\omega$ i $\omega'$, to znaczy że:

$$f(z + \omega) = f(z) \quad \text{a także} \quad f(z + \omega') = f(z).$$

Stosunek $\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$, musi być l. zespoloną, gdyż razie o ile ten stosunek był l. rzeczywistą wymierną, to $\omega$ i $\omega'$ byłyby wielokr

przykład jednookresowej
$f(z) = e^{iz}$

$\sin(z + 2\pi) = \sin z$
$\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z$

$f(z + 2k\pi) = e^{iz + i2\pi} = e^{iz} \cdot e^{i2\pi} = e^{iz}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \underline{e^{iz}}$

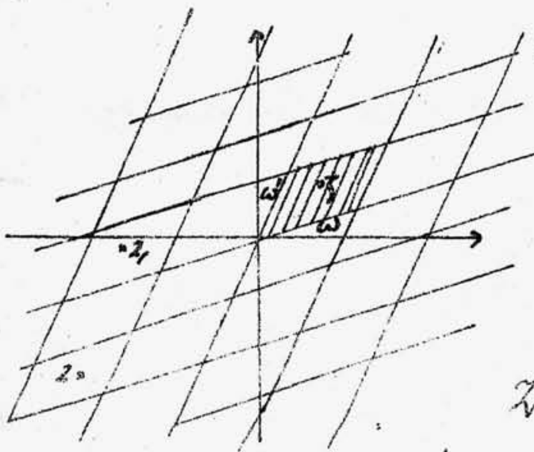
np. $\omega' = 4\omega_2$, $\omega = 6\omega_2$ } stąd $\frac{\omega'}{\omega} = $ [illegible]



pomiarami jakiejś wielkości $\omega_2$, która byłaby okresem pojedynczym; gdyby stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ był l. rzeczywistą niewymierną, to funkcja o ile byłaby regularna musiałaby być Constans. W rzeczy samej: na zasadzie określenia okresu: $f(z) = f(m\omega + m'\omega' + z)$, lecz jeśli stosunek liczb $\omega$ i $\omega'$ jest l. niewymierną, to można liczby $m$ i $m'$ tak dobrać, by $|m\omega + m'\omega'| < \varepsilon > 0$, gdzie $\varepsilon$ dowolnie małe. Ale wtedy f. regularna $f(z)$ przyjmowałaby tę samą wartość w p. nieskończenie bliskich, co jest niemożliwe dla f. regularnej nie będącej constans.

Funkcje eliptyczne spotykamy przy zagadnieniach o wyprostowaniu łuku elipsy i t. p.; spotykamy je także i przy całkowaniu. Wiemy np. że całka: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x + bx + c}}$ daje się sprowadzić do funkcji arcSinus; podobnie gdy pod pierw. jest wyrażenie stopnia 3-go lub 4-go, to taka całka daje się sprowadzić do f. odwrotnych do funkcyj eliptycznych. Zajmiemy się rozwijaniem takich funkcyj podwójnie okresowych na szereg Weierstrass'a.

Jeżeli funkcja ma dwa okresy, to możemy zbudować równoległobok tych okresów. Jest to równoległobok zbudowany na dwuch wektorach $\omega$ i $\omega'$ jako bokach. Można takiemi równoległobokami pokryć całą płaszczyznę,




(wybrukować niby posadzkę kaflami). Utworzy się siatka, której oczkami są te równoległoboki.

Funkcja dwuokresowa przyjmuje w całej płaszczyźnie tylko te wartości, jakie przyjmuje wewnątrz równoległoboku perjodów.

Zrozumiemy to, biorąc pod uwagę, że ponieważ funkcja ma okres $\omega'$, możemy ją rozpatrywać tylko w paśmie utworzonem przez dwie proste równoległe do wektora $\omega$, z których każda następna otrzymuje się przez przesunięcie poprzedniej o $\omega'$, a ponieważ ma okres $\omega$, możemy ją rozpatrywać w odpowiedniem paśmie utworzonem przez proste równoległe do $\omega'$;

Dwa jakiekolwiek równoległoboki przystają do siebie i nakrywają się przez odpowiednie przesunięcie. Dwa punkty należące do $2^{ch}$ różnych równoległoboków nazwiemy odpowiedniemi (homologicznemi), jeżeli przez nasunięcie jednego równoległoboku na drugi, przy którem następuje przykrycie wzajemne tych równoległoboków, punkty te $\zeta$ i $z$ zlewają się.

Jasna rzecz, że $\zeta = z + k\omega + k'\omega'$

Postawmy sobie za zadanie zbudować taką funkcję, aby jej punktami zerowemi były wszystkie wierzchołki równoległoboków perjodu, t. zn. punkty przecięcia się prostych równoległych do $\omega$ i $\omega'$. Temi punktami są:

$$0,\ \omega,\ \omega',\ (\omega+\omega'), \dots, (k\omega+k'\omega'), + \cdots$$

gdzie liczby $k$ i $k'$ są całkowite zawarte w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Utwórzmy iloczyn Weierstrassa:

$$z \prod_{k,k'=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{k\omega+k'\omega'}\right) e^{\frac{z}{k\omega+k'\omega'} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{k\omega+k'\omega'}\right)^2}$$

Przez przecinek przy znaku iloczynu $(\Pi')$ wyłączamy wypadek: $k = k' =$ przy którym wyrażenie pod znakiem iloczynu traci sens, a które uzupełniamy dodatkowym czynnikiem: $z$.

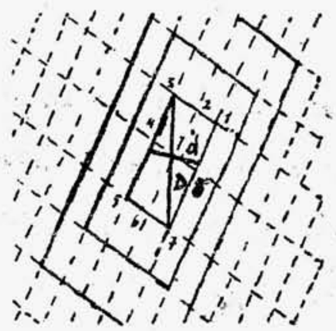
Okażemy, że <u>dla zbieżności tego iloczynu wystarcza by wykładnikiem przy $e$ były dwa wyrazy.</u> Aby tego dowieść trzeba rozpatrzyć wyrażenie

$$\sum_{k,k'} \frac{1}{|k\omega+k'\omega'|^{\alpha}}$$

i zbadać przy jakiej wartości $\alpha$ ten szereg jest zbieżny, a przy jakiej

-rozbieżny.

Wszystkie p. zerowe znajdują się na bokach równoległoboków nawzajem się obejmujących (rysunek), tak że przy naszem sumowaniu możemy brać grupy punktów leżących na obwodzie tego samego równoległoboku. Grupy te nazwiemy:



$$S_{8p} \quad dla \quad p = 1, 2, 3, \dots \infty$$

Tak więc:

$$\sum_{k,k'} \frac{1}{(k\omega + k'\omega')^\alpha} = S_{8\cdot 1} + S_{\underset{8\cdot 2}{16}} + S_{\underset{8\cdot 3}{24}} + S_{\underset{8\cdot 4}{32}} + \dots + S_{8\cdot p} + \dots$$

Przy przejściu od jednej grupy do drugiej liczba punktów zwiększa się o 8. Oznaczmy przez $D$ połowę największej odległości między dwoma wierzchołkami, a przez $d$ połowę najmniejszej odległości między dwoma bokami pierwszego, najmniejszego równoległoboku, wtedy wszystkie punkty zerowe są odległe od p. $z=0$ o długość zawartą między $p\cdot d$ i $pD$. Możemy pisać:

$$p d < |k\omega + k'\omega'| < p D \quad \text{a więc} \quad p^\alpha d^\alpha < (k\omega + k'\omega')^\alpha < p^\alpha D^\alpha$$

$$\text{skąd:} \quad \frac{1}{p^\alpha D^\alpha} < \frac{1}{|k\omega + k'\omega'|} < \frac{1}{p^\alpha d^\alpha}$$

Ta nierówność pozwala nam oznaczać dowolną grupę:

$$\frac{8p}{p^\alpha D^\alpha} < |S_{p\cdot 8}| < \frac{8p}{p^\alpha d^\alpha} \quad \text{skąd} \quad \frac{8}{p^{\alpha-1} D^\alpha} < |S_{8p}| < \frac{8}{p^{\alpha-1} d^\alpha} \ ;$$

A więc:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{8}{p^{\alpha-1} D^\alpha} < \sum \frac{1}{|k\omega + k'\omega'|^\alpha} < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{8}{p^{\alpha-1} d^\alpha}$$

$$\text{albo} \quad \frac{8}{D^\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}} < \sum \frac{1}{|k\omega + k'\omega'|} < \frac{8}{d^\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Aby obydwa szeregi ograniczające rozważaną sumę były zbieżne musi być $\alpha - 1 > 1$; jeśli bowiem $\alpha - 1 < 1$ to są one rozbieżne.

Wobec tego wykładnikiem zbieżności jest $\alpha = 2$; że zaś przy $\alpha = p = 2$

szereg jest rozbieżny więc $\rho$ należy do klasy 1-ej znanego przekroju, a zatem przy $p=\rho=2$ suma: $\sum_{k,k'} \frac{1}{|k\omega+k'\omega'|^\alpha}$

jest zbieżna, a więc i iloczyn Weierstrassa jest zbieżny; to znaczy, że o ile w iloczynie Weierstrassa weźmiemy jako wykładnik przy e dwa wyrazy to już iloczyn ten będzie zbieżny i wyznaczy pewną funkcję: Funkcję to oznaczył Weierstrass symbolem:

$$\underline{\sigma(z, \tfrac{1}{2}\omega, \tfrac{1}{2}\omega') = z \prod_{k,k'=-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{z}{k\omega+k'\omega'}\right)\cdot e^{\frac{z}{k\omega+k'\omega'}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{k\omega+k'\omega'}\right)^2}}$$

Funkcja $\sigma$ jest to funkcja całkowita, która we wszystkich wierzchołkach równoległoboków przyjmuje wartość 0. Sama f. $\sigma$ nie jest podwójnie okresową, ale jak okażemy, jeśli f. $\sigma$ zlogarytmujemy i dwa razy zróżniczkujemy to w wyniku otrzymamy f. podwójnie perjodyczną. Logarytmujmy więc f. $\sigma$; otrzymamy:

$$\lg\sigma(z, \tfrac{1}{2}\omega, \tfrac{1}{2}\omega') = \lg z + \sum_k \sum_{k'} \left\{\lg\left(1-\frac{z}{k\omega+k'\omega'}\right)+\frac{z}{k\omega+k'\omega'}+\frac{z^2}{2(k\omega+k'\omega')^2}\right\}$$

Różniczkujemy raz:

$$\frac{d\lg\sigma}{dz} = \frac{1}{z} + \sum_k \sum_{k'} \left\{\frac{1}{z-(k\omega+k'\omega')}+\frac{1}{k\omega+k'\omega'}+\frac{z}{(k\omega+k'\omega')^2}\right\}$$

Różniczkujemy drugi raz; funkcję, jaką otrzymamy po drugiem różniczkowaniu, wziętą ze znakiem minus oznaczmy przez $\wp(z, \tfrac{1}{2}\omega, \tfrac{1}{2}\omega')$

$$\underline{-\frac{d^2\lg\sigma}{dz^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_k \sum_{k'} \left\{\underbrace{\frac{1}{[z-(k\omega+k'\omega')]^2}}_{\text{część główna}}-\frac{1}{(k\omega+k'\omega')^2}\right\}} = \underline{\wp(z, \tfrac{1}{2}\omega, \tfrac{1}{2}\omega')}$$

Ta nowa funkcja $\wp$ jest szeregiem Mittag-Lefflera; jest to więc f. meromorficzna. Suma szeregu jest, jak widać, sumą części głównych, od których odjęto w-g zasady Mittag-Leflera pewien wielomian (zredukowany u nas do jednego wyrazu) dla zapewnienia szeregowi zbieżności. Ta f. $p$ jest to f. meromorficzna, posiadająca bieguny w punktach wierzchołkowych równoległoboków perjodów. Ogólną postacią takiego punktu jest: $k\omega + k'\omega' = w_{k,k'}$.

W rozwinięciu f. $p$ na szereg Mittag-Leflera mamy jako część główną: $\frac{1}{(z-w_{k,k'})^2}$, a więc bieguny są rzędu 2-go.

Gdyby się okazało że:

$$p(z+\omega) = p(z)$$

$$\text{i} \quad p(z+\omega') = p(z),$$

to nasza f. $p$ byłaby podwójnie perjodyczną. Sprawdzamy:

$$p(z+\omega) = \frac{1}{(z+\omega)^2} + \sum_{k,k'}{}' \left\{ \frac{1}{\{z-[(k-1)\omega+k'\omega']\}^2} - \frac{1}{(k\omega+k'\omega')^2} \right\}$$

Suma jest rozciągnięta na wszystkie wartości $k$ i $k'$ zawarte w przedziale $(-\infty, +\infty)$, a więc zarówno $k$ jak $(k-1)$ przyjmują ten sam zbiór wartości. Wyrazy, które pod znakiem sumy tracą sens, wypisane są przed znakiem sumy; suma, która równała się $p(z)$ traciła sens przy $k=k'=0$ i dlatego przed znakiem sumy mieliśmy tam wyraz: $\frac{1}{z^2}$; suma dająca w wyniku $p(z+\omega)$, traci sens przy $k=1$, $k'=0$, ale wyrazem uzupełniającym dla niej nie jest już $\frac{1}{z^2}$ lecz $\frac{1}{(z+\omega)^2}$, a ten właśnie wyraz stoi przed znakiem nowej sumy.

Widzimy więc, że obie sumy są identyczne więc: $p(z+\omega) = p(z)$.

W zupełnie podobny sposób można okazać, że: $p(z+\omega') = p(z)$.

Doszliśmy więc do wniosku, że funkcja $p(z)$ jest podwójnie okresowa, a okresami jej są $\omega$ i $\omega'$.

Funkcja $\sigma(z)$ nie jest już f. podwójnie okresową. Aby ją otrzymać, musielibyśmy f. $p(z)$ dwa razy całkować, przez co musielibyśmy dodać wyraz linjowy, a potem przejść od logarytmów do liczb; byłoby:

$$\sigma(z+\omega)=e^{az+b}\sigma(z), \text{ a także } \sigma(z+\omega')=e^{a_1z+b_1}\sigma(z).$$

Wartość stałych $a$, $b$, $a_1$, $b_1$ jest łatwo znaleźć.

O funkcji $p(z)=u$ można udowodnić, że:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2=4u^3-g_2u-g_3 \quad \text{albo} \quad \frac{du}{dz}=\sqrt{4u^3-g_2u-g_3}$$

skąd $$dz=\frac{du}{\sqrt{4u^3-g_2u-g_3}} \quad \text{a więc} \quad z=\int\frac{du}{\sqrt{4u^3-g_2u-g_3}}$$ całka eliptyczna

Widzimy, że $z$ jako funkcja od $u$ jest całką z wyrażenia podobnego do takiego wyrażenia, z którego całka jest równa arcsinus (wtedy wyrażenie podpierwiastkowe jest kwadratowe). Ta całka jest to właśnie funkcja odwrotna do funkcyj eliptycznych tak, jak arcsin, arctg i t.d są odwrotne do f. trygonometrycznych.

Liczby: $g_2$ i $g_3$ są w pewien sposób związane z okresami, a mianowicie:

$$g_2=60\sum_{k,k'}\frac{1}{(k\omega+k'\omega')^4} \text{ i } g_3=140\sum_{k,k'}\frac{1}{(k\omega+k'\omega')^6};$$

gdybyśmy mieli $g_2$ i $g_3$ to moglibyśmy obliczyć naszą całkę, a z niej obliczyć perjody $\omega$ i $\omega'$.

Udowodnimy teraz, że funkcję meromorficzną można przedstawić jako ~~iloczyn~~ iloraz dwu funkcyj całkowitych.

Mamy daną funkcję meromorficzną $F(z)$. Budujemy funkcję całkowitą $G(z)$, posiadającą jako p. zerowe te punkty które dla $F(z)$ są biegunami, i to w ten sposób, żeby krotność p. zerowego była równa rzędowi bieguna.

$$F(z)=\frac{1}{\cos z} \qquad f(z)=\frac{1}{\cos z}$$

$$G(z)=\cos z \qquad f(z)=\frac{1}{\sin z}$$

Mamy daną funkcję meromorficzną budujemy funkcję całkowitą $G(z)$ posiadającą jako punkty zerowe te punkty które dla $F(z)$ są biegunami

Utwórzmy funkcję: $\Phi(z) = F(z)\cdot G(z)$; jakie osobliwości mała funkcja? By się o tem dowiedzieć możemy rozwinąć $\Phi(z)$ w otoczeniu bieguna funkcji $F(z)$, $z_1$, o którym zakładamy że jest biegunem 1-go rzędu. Punkt $z_1$ będzie dla funkcji $G(z)$ pierwiastkiem krotności 1.

Aby rozwinąć $\Phi(z)$, rozwijamy jej czynniki:

$F(z) = \frac{a}{z-z_1}$ + część regularna; $G(z) = (z-z_1)\, G_1(z)$, a więc:

$$\Phi(z) = \left(\frac{a}{z-z_1} + R(z)\right)(z-z_1)\, G_1(z) = a\, G_1(z) + R(z)(z-z_1)G_1(z) =$$
$$= a\, G_1(z) + R(z)\, G(z) = \text{f. regularna.} \qquad ??$$

Gdyby biegun był rzędu n-tego, to mielibyśmy:

$F(z) = \frac{a}{(z-z_1)^n} + \frac{a_1}{(z-z_1)^{n-1}} + \dots +$ część regularna. Ale za to:

$G(z) = (z-z_1)^n\, G_1(z)$ i w iloczynie ujemne potęgi znosiły by się, tak że $\Phi(z)$ i w tym wypadku jest f. regularną, całkowitą. !!!

Słowem mamy: $F(z)\cdot G(z) =$ f. całkowita $= G_2(z)$, a więc

$$F(z) = \frac{G_2(z)}{G(z)} \qquad \text{c. b. d. o.}$$

wykłady: funkcji meromorficzne tg z i ctg z mogą być przedstawione jako iloraz dwóch funkcji całkowitych!

$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$ $\quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}$

## Zakończenie

Omówimy własności punktów regularnych, biegunów i punktów istotnie osobliwych.

1). Jeśli punkt jest regularny, to funkcja w jego otoczeniu przyjmuje wartości nieskończenie bliskie wartości funkcji w samym punkcie regularnym ( $f(\zeta) \to f(z)$ o ile $\zeta \to z$ ).

2). Gdy punkt $z$ jest biegunem, to punkt $\zeta$, należący do jego otoczenia, ma tę własność, że funkcja rozwija się w nim na szereg Laurenta i mamy: