wartości skrajnych aż do 90 *kg*, względnie aż do 15 i 30 *kg* na centymetr kwadratowy.

Rozporządzenie rosyjskie z r. 1900.

1. Naprężenie dopuszczalne drzewa. Przy projektowaniu mostów drewnianych kolejowych przyjmować należy następne naprężenie dopuszczalne:

a) dla drzewa iglastego gatunku zwykłego: na ciągnienie (bezpośrednie) 100 kg/cm^2, na ciśnienie (bezpośrednie) 50 kg/cm^2, na ciśnienie prostopadłe do włókien 15 kg/cm^2, na zginanie 65 kg/cm^2.

b) dla dębu (którego wytrzymałość na ciągnienie jest nie mniejszą, niż 965 kg/cm^2) na ciągnienie (bezpośrednie) 140 kg/cm^2, na ciśnienie (bezpośrednie) 75 kg/cm^2 na ciśnienie prostopadle do włókien 38 kg/cm^2, na zginanie 100 kg/cm^2.

c) dla drzewa iglastego lepszego (którego wytrzymałość na ciągnienie jest nie mniejszą, niż 812 kg/cm^2) na ciągnienie bezpośrednie 115 kg/cm^2, na ciśnienie bezpośrednie 65 kg/cm^2, na ciśnienie prostopadle no włókien 20 kg/cm^2, na zginanie 75 kg/cm^2.

d) Przy sprawdzaniu wytrzymałości pasów w belkach kratowych należy uwzględnić także zginanie miejscowe, jeśli ono zachodzi. Przy sprawdzaniu na działanie wiatru i obciążenia pionowego w belkach kratowych, wszystkie naprężenia powyższe należy zwiększyć o 12,5 kg/cm^2.

e) Przy obliczaniu mostów drewnianych czasowych wszystkie podane powyżej pod *a)*, *b)*, *c)* i *d)* naprężenia można zwiększyć o 25%.

B. Belka prosta jednoprzęsłowa.

III. Działanie ciężarów skupionych.

§. 14. Linie wpływowe sił poprzecznych.

W Statyce Budowli wyłożyliśmy, jak się wyznacza siły poprzeczne i momenty dla belki w dwu punktach podpartej [1]) dla danego obciążenia. Teraz mamy wyznaczyć momenty i siły poprzeczne, które sprawia ciężar ruchomy. W tym celu zastanowimy się najpierw nad tem, jakie siły poprzeczne w danym punkcie C (rys. 22), odległym o x od A, sprawia ciężar P, gdy posuwa się od A do B.

Załóżmy, że na AB działa siła P w punkcie E w odległości u od lewej podpory A, to oddziaływanie $O_1 = P\frac{l-u}{l}$.

W celu wyznaczenia siły poprzecznej musimy rozróżnić dwa wypadki:

$$a)\ l > u > x, \text{ lub: } b)\ x > u > 0.$$

---

[1]) P. Podr. Statyki Budowli, III. wyd. str. 20 i nast.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dla wypadku } a) \text{ jest } Q=O_1=P\dfrac{l-u}{l} \\ \text{zaś dla } b) \; Q=O_1-P=P\dfrac{l-u}{l}-P=-P\dfrac{u}{l}\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad 28)$$

Gdy ciężar porusza się po belce od A do B, to wraz z u zmienia się Q, bo, jak widzimy, Q jest funkcją u. A że Q jest funkcją pierwszego stopnia zmiennej u, więc siła poprzeczna zmienia się dla zmiennej u według prawa linji prostej.

Wykreślmy w punkcie, w którym siła działa, t. j. w E, rzędną ee' w podziałce sił równą $Q=P\frac{l-u}{l}$, to rzędna ta będzie przedstawiała siłę poprzeczną w C, gdy P działa w E. Gdy zrobimy to samo dla rozmaitych położeń siły P, t. j. gdy wykreślimy w punktach zaczepienia siły P rzędne, równe sile poprzecznej w punkcie C, to końce tych rzędnych będą leżały według poprzedniego na linji prostej bc'.

Linję, która wyraża wpływ zmiany położenia skupionego ciężaru ruchomego na pewną ilość mechaniczną n. p. siłę poprzeczną, moment, oddziaływanie, siłę wewnętrzną, nazywamy linją wpływową (n. *Einflusslinie*, fr. *ligne d'influence*, a. *influence line*, cz. *příčinkova čara*, r. линия влияния). W tym wypadku jest tu linja wpływowa bc' prostą, a aby wykreślić tę linję prostą dla wypadku b), dość będzie wyznaczyć dwa jej punkty. Przypuszczamy więc najpierw, że $u=0$, to z równ. 28) otrzymamy: $Q=0$, a odnośny punkt linji wpływowej będzie a. Załóżmy teraz, że $u=l$, to $Q=-P$, zatem robimy $bb'=-P$, i otrzymujemy b' drugi punkt linji wpływowej ab'. Ta linja jest jednak tylko ważną od a do c'', więc ac'' t. j. dla $x>u>0$.

Dla wypadku a) t. j. gdy $l>u>x$, mamy: $Q=P\frac{l-u}{l}$. Podstawiwszy tu $u=0$, otrzymamy: $Q=P$, robimy więc: $aa'=$ $=P$, a a' jest punktem linji wpływowej. Drugi punkt b' otrzymamy, wstawiwszy w 28) $u=l$, wtedy $Q=0$. Łączymy teraz punkt a' z b i otrzymujemy drugą prostą, która jest ważną od c' do b. Linja wpływowa sił poprzecznych w C składa się więc z dwu równoległych prostych ac'' i $c'b$. Wykreśliwszy tę linją, możemy wynaleść siłę poprzeczną w punkcie C dla któregokolwiek położenia siły P, jeżeli tylko wykreślimy rzędną w punkcie zaczepienia siły i odczytamy ją w podziałce sił.

Jeżeli zamiast siły P działa siła P', to chcąc użyć tej samej linji wpływowej, musimy rzędną y pomnożyć przez $\frac{P'}{P}$, więc $Q=\frac{P'y}{P}$, a dla $P=1$, będzie: $Q=P'y$.

Jeżeli kilka ciężarów działa na belkę w rozmaitych punktach, to: $Q=\frac{P'y'}{P}+\frac{P''y''}{P}+\frac{P'''y'''}{P}+\ldots=$

$$=\frac{1}{P}(P'y'+P''y''+P'''y'''+\ldots)=\frac{1}{\mathbf{P}}\Sigma\mathbf{Py} \quad . \quad . \quad 29)$$

a dla $P=1$, to jest, jeśli wykreślając linją wpływową, zrobimy $aa'=bb'=1$, otrzymamy:

$$Q=P'y+P''y''+P'''y'''+\ldots=\Sigma\mathbf{Py} \quad . \quad . \quad . \quad 30)$$

Następnie będziemy zawsze przypuszczać, żeśmy wykreślili linję wpływową dla $P=1$, w przeciwnym razie podzielić jeszcze musimy wynik przez P (według rów. 29).

§. 15. Linje wpływowe momentów.

Aby wyznaczyć linją wpływową momentów, przypuśćmy znowu, że siła $P=1$ działa na belkę AB w punkcie E (rys. 22). Wtedy zachodzą te same dwa wypadki: *a)* $l>u>x$ i *b)* $x>u>0$.

Dla wypadku *a)* jest moment ze względu na punkt C $M=O_1 x$, więc $\frac{M}{x}=O_1$. Nazwijmy $\frac{M}{x}=M'$, to $M'=O_1$, a chcąc otrzymać M, trzeba pomnożyć M' przez x.

Podstawmy za O_1 wartość, to

$$M'=O_1=P\frac{l-u}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

a dla wypadku *b)* $M=O_1 x-P(x-u)$, zatem:

$$M'=O_1-P\left(1-\frac{u}{x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

Równanie 31) jest zupełnie takie samo, jak pierwsze równanie 28); więc w ten sam sposób kreślimy prostą $a'b$, jak dla sił poprzecznych, z którejto prostej tylko część $c_1 b$ jest ważną.

Według równ. 32) M' składa się z różnicy, której pierwszy wyraz O_1 przedstawia się wykreślnie prostą $a'b$, względnie na długości x prostą $a'c_1$. Od rzędnych tej linji musimy odjąć rzędne linji, wyrażonej równaniem $P\left(1-\frac{u}{x}\right)$, równaniem także linji prostej. Różnica $M'=O_1-P\left(1-\frac{u}{x}\right)$ przedstawia równanie linji prostej, do wyznaczenia której, wystarczają dwa punkty. Jeżeli w tem równaniu zrobimy $u=0$, to $P\left(1-\frac{u}{x}\right)=P$. Odciągnąwszy więc od rzędnej aa' rzędną $P=aa'$, otrzymamy rzędną linji M' równą zeru, a zatem a jako punkt linji wpływowej. Jeżeli zaś $u=x$, to $P\left(1-\frac{u}{x}\right)=0$; w tym punkcie nie mamy więc nic do odciągania, zatem cc_1 jest rzędną linji wpływowej. Ponieważ ta linja jest prostą, więc jeśli połączymy punkt a z c_1, to ac_1b jest linją wpływową dla momentów w punkcie C.

Dla innego punktu D, oddalonego od punktu A o x_1, otrzymamy inną linję wpływową, której rzędne trzeba będzie pomnożyć przez x_1. Abyśmy mogli linje wpływowe dla rozmaitych przekrojów porównywać, musimy je sprowadzić do wspólnej podstawy. Otóż wiemy, że moment w punkcie D, gdy siła $P=1$ stoi w tymże punkcie, jest $M=dd_1 . x_1=dd_1\frac{x_1}{x}x$. Poprowadźmy z punktu d_1 poziomą d_1f, to $cf=dd_1$, połączmy punkt a z punktem f, aż prosta af przetnie pionową dd_2, a otrzymamy prostą ad_2. Z rysunku widzimy, że $dd_2 : dd_1=x_1 : x$, czyli: $dd_2=dd_1\frac{x_1}{x}$. Punkt d_2 jest więc punktem linji wpływowej momentów w E dla tej samej podstawy x. Połączmy punkt d_2 z punktem b, a otrzymamy linję wpływową ad_2b dla podstawy x.

Zamiast mnożyć rzędne linji wpływowej przez stałą podstawę x, możemy zmienić odpowiednio podziałkę tak, żeby odrazu odczytywać momenty. W takim razie trzeba jednak, aby wszystkie linje wpływowe były wykreślone ze względu na jednę podstawę. Aby się dowiedzieć, na jakiejto linji będą leżały wierzchołki trójkątów wpływowych, załóżmy, że $u=x$, to otrzymamy z równ. 31) $M'=\frac{P(l-x)}{l}$, a więc $M=\frac{P(l-x)x}{l}$. Widzimy więc, że linja ta jest parabolą (rys. 23). Jeżeli siła $P=1$ stoi w środku belki, to moment w tym punkcie jest $M_g=\frac{1}{4}Pl$. Wykreślmy wedle przyjętej podziałki momentu $gg_1=M_g$, to g_1 jest wierzchołkiem szukanej paraboli o osi pionowej. Wykreślenie tej paraboli nie przedstawia już trudności.

W rysunku 22. dla linji wpływowej momentów jest $aa'=1$, ale mamy rzędne mnożyć jeszcze przez x. Jeżeli chcemy wykreślić linją wpływową, której rzędnych nie trzebaby mnożyć, to zróbmy $aa'=x$ (rys. 24). Z rysunku wynika $cc_1=x\frac{(l-x)}{l}$, a gdy to zastosujemy do trójkątów acc_1 i abb', to $bb'=l-x$.

§. 16. Sumowa linja wpływowa.

Jeżeli mamy wykreśloną dowolną linję wpływową, której rzędne wyznaczają wpływ jednego ciężaru P, to łatwo z niej otrzymamy sumową linję wpływową[1]) (n. *Summeneinflusslinie*, cz. *součtova cara přičinkova)*, której rzędne wyznaczą nam wpływ dwu, trzech lub więcej poruszających się ciężarów, których odstęp pozostaje stałym. Ciężary takie, razem się poruszające, nazywamy układem ciężarów skupionych (a. *number of concentrate rolling weights*, cz. *soustava osamělych břemen)*.

Na rys. 25 przedstawia abc' linję wpływową momentu w C dla jednej siły P. Jeżeli mamy wykreślić linję wpływową sumową dla dwu ciężarów, to gdy drugi ciężar stoi w b, pierwszy stanie w b_1 i odtąd począwszy musimy sumować rzędne linji wpływowej dla pierwszej i drugiej siły. Zróbmy $b_1c_1=bc$ i $c_1'c_1''=cc'$ to $b_1'c_1''$ będzie linja sumowa. Ponieważ po przekroczeniu pierwszego ciężaru przez c, linja wpływowa się zmienia, więc zróbmy $c_1''e_1'=c_2'e_1$ to $c''e_1'$ jest dalszym ciągiem linji sumowej. Teraz gdy oba ciężary są na ac, linja sumowa jest prosta aż do podpory, przyczem pierwszy ciężar spoczywa na podporze. Gdy drugi ciężar jest na podporze wtedy $aa_0=mm_0$ rzędnej dla drugiego ciężaru. W a_1 jest rzędna równa zeru. Podobnie otrzymamy aa_0', gdy trzeci ciężar jest na podporze.

W podobny sposób wykreśliliśmy linję wpływową sumową momentu w a dla 3 ciężarów $bb_1'b_2'c'''c_1''c_2'a_0'a_1'a_2$.

§. 17. Najniekorzystniejsze obciążenie ze względu na siły poprzeczne.

Wykreśliwszy dla punktu C i siły $P=1$ linję wpływową sił poprzecznych (rys. 26), widzimy, że każdy ciężar, który stoi po prawej stronie przekroju C sprawia dodatnią siłę poprzeczną, zaś ciężar po lewej stronie tego przekroju ujemną. Jeżeli chcemy znaleść największą siłę poprzeczną dodatnią, obciążamy, o ile możności, długość CB, długości zaś AC nie obciążamy wcale.

---

[1]) Por. art. Bedaux w Génie civil t. XX. str. 316.

Ponieważ rzędne od B do C wzrastają, więc przesuwamy w tym kierunku układ ciężarów, rozmieszczonych w danych odstępach, odpowiadających pociągowi lub szeregowi wozów. Dla największości więc musi stać pierwszy ciężar w punkcie C. Możliwem jest jednak, że gdy przesuniemy układ ciężarów skupionych jeszcze dalej tak, że drugi ciężar stanie na przekroju C, że wprawdzie pierwszy ciężar P' wywoła siłę poprzeczną ujemną, ale przez przesunięcie na lewo siła poprzeczna, wywołana resztą ciężarów, tak wzrośnie, że będzie większą, niż dla wypadku, gdy ciężar pierwszy stoi na przekroju. Chodzi więc teraz o zbadanie, czy dla największych sił poprzecznych pierwszy ciężar, czy też drugi ma stać na przekroju C. Wyznaczmy najprzód siłę poprzeczną, jaka powstaje, jeżeli ciężary P', P_0, P_1, P_2 znajdują się na belce AB, a drugi ciężar P_0 w punkcie danym C. Siła poprzeczna będzie wtedy: $Q = -P'y' + P_0 y_0 + P_1 y_1 + P_2 y_2$.

Jeżeli układ ciężarów posuniemy na prawo tak, aby pierwszy ciężar stał w punkcie C, to wtedy Q powiększy się o $\Delta Q = P'y' + P'y_0 - \Sigma_o^n P dy$. ΔQ będzie mniejsze niż 0, gdy $\Sigma_o^n P dy < P' (y_0 + y')$. Z rysunku widzimy, że $dy : e = 1 : l$, czyli $dy = \frac{e}{l}$, podobnie otrzymamy $y_0 = \frac{l-x}{l}$ a $y' = \frac{x-e}{l}$. Podstawmy te wartości, a otrzymamy $\Sigma_o^n P \frac{e}{l} > P' \frac{l-e}{l}$, czyli

$$\Sigma_o^n Pe + P'e > Pl, \text{ zatem } \frac{\Sigma_o^n \mathrm{P} + \mathrm{P}'}{\mathrm{l}} > \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{e}} \quad . \quad . \quad 33)$$

Gdy ten warunek zachodzi, to wtedy $\Delta Q > 0$, to znaczy, że posuwając ten układ ciężarów na prawo, zmniejszymy siłę poprzeczną, a ponieważ my szukamy *najw* Q, więc w takim razie nie będziemy posuwać na prawo, zatem dla *najw* Q drugi ciężar ma stać na C. Jeżeliby zaś $\frac{\Sigma_o^n P + P'}{l} < \frac{P}{e}$, toby $\Delta Q > 0$, trzebaby więc posunąć na prawo układ ciężarów, a zatem pierwszy ciężar stać będzie w takim razie na przekroju dla *najw* Q. Prawo to możemy wyrazić słowami w następujący sposób: „Drugi ciężar ma stać na przekroju, gdy ciężar jednostkowy na długości e jest mniejszy, niż ciężar jednostkowy na całej belce". A stać się to może, gdy P' jest małe a e wielkie, więc gdy mały ciężar idzie naprzód w odległości wielkiej. Przy zwykłych obciążeniach mostów drogowych i kolejowych sprawia *najw.* siły poprzeczne układ ciężarów, gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju.

Jeżeli wykreślimy w każdym punkcie belki rzędną, która przedstawia *najw* Q, to rzędne te wyznaczają linją największych sił poprzecznych. Chcąc wyznaczyć kształt tej linji dla danej belki AB (rys. 27), nazwijmy R wypadkową wszystkich sił, odległą o c od podpory B, to, jak wiemy, dla przekroju E będzie *najw* $Q = \frac{Rc}{l}$, gdy w punkcie E stoi pierwszy ciężar. Jeżeli *najw*. Q w punkcie E jest dla położenia, gdy w punkcie tym stoi drugi ciężar, to *najw* $Q = \frac{Rc}{l} - P_1$. Jeżeli teraz chcemy wyznaczyć *najw* Q dla sąsiedniego przekroju F, odległego od E o dx, to musimy przesunąć nieco cały układ ciężarów. R pozostanie wtedy niezmienione, zmieni się tylko c o dx. Ponieważ *najw* Q jest funkcją pierwszego stopnia zmiennej c, więc *najw* Q zmieni się według prawa linji prostej. Widzimy więc, że dla przekrojów, dla których te same ciężary znajdują się na belce, *najw* Q możemy przedstawić linją prostą. Chcąc zatem wykreślić największe siły poprzeczne, najlepiej wyznaczyć *najw* Q dla tych przekrojów, dla których przy najniekorzystniejszem obciążeniu jeden ciężar stoi właśnie na podporze, wykreślić odnośne rzędne, równe *najw* Q, w tych punktach i połączyć je linjami prostemi.

Dla *najmn* Q należy zastosować te same prawidła z tą różnicą, że obciążać należy lewą stronę belki od danego przekroju.

§. 18. Wyznaczenie największych sił poprzecznych.

1. Liczebnie. Obliczamy dla najniekorzystniejszego położenia układu ciężarów siły poprzeczne według wzorów, znanych ze statyki budowli [1]).

Przykład. Belka o rozpiętości 9 *m* obciążona jest połową ciężaru parowozu normalnego polskiego. Chcąc wyznaczyć największe siły poprzeczne, obliczamy je najpierw dla przekroju C (rys. 28), gdy jedno koło stoi na podporze B. Tu dla największości stoi pierwsze koło na przekroju. Dla tego położenia:

$$O_1 = \tfrac{1}{9}\,4{,}10\,.\,3{,}75 = 16{,}7\ t,\quad \textit{najw}\ Q = O_1 = 16{,}7\ t.$$

W ten sam sposób obliczamy siły poprzeczne dla innych przekrojów.

2. Za pomocą linij wpływowych. Wykreślamy linje wpływowe dla siły $P = 1$, wyznaczamy najniekorzystniejsze po-

---

[1]) Por. Podr. St. Budowli III. wyd. str. 20.

łożenie, według tego ustawiamy układ ciężarów i odczytujemy poszczególne rzędne, mnożymy każdą rzędną przez odnośną siłę i dodajemy. Mnożenie to możemy zrobić także wykreślnie zapomocą kąta proporcjonalnego. Zwyczajnie mamy do czynienia z dwiema wielkościami ciężarów, czasem z jedną. Wtedy lepiej wykreślić wprost linję wpływową dla siły P_1, odcinając nie 1 lecz P_1, ewentualnie wykreślić drugą linję wpływową dla P_2 (rys. 29). Układ zaś ciężarów skupionych wykreślamy na kalce, kreśląc w odstępach siły pionowe i jedną lub dwie linje poziome. Wtedy możemy cyrklem dodawać rzędne linji wpływowych pierwszej lub drugiej, wedle tego, jak która siła oznaczona. Kalki tej możemy użyć dla innych położeń układu sił, względnie dla linij wpływowych dla innych punktów.

Sposób ten jest tem korzystniejszy, im trudniejsze są inne sposoby. Tu dla sił poprzecznych zazwyczaj nie opłaca się używać linij wpływowych, bo inne sposoby prowadzą prędzej do celu.

3. Zapomocą wieloboku sznurowego sposobem Winklera. Jeżeli dana jest belka AB (rys. 30), na którą działają ciężary P_1, P_2, P_3, P_4 i chcemy wykreślić linję największych sił poprzecznych, wystawiamy na podporze A pionową i odcinamy na niej siły P_1, P_2, P_3, P_4, zaczynając od siły P_1 stojącej w B mianowicie $P_1 = 1A$, $P_2 = 21$, $P_3 = 32$, $P_4 = 43$, a drugą podporę B odbieramy jako biegun i kreślimy promienie. Teraz ustawiamy dany układ ciężarów w ten sposób, że pierwszy ciężar stawiamy w B, przyczem dalsze ciężary działają w punktach C, D i E. W tych punktach wystawiamy pionowe i kreślimy wielobok sznurowy $BC'D'E'A'$. Wielobok ten sznurowy przedstawia linję oddziaływań O_1 w lewej podporze, a zarazem linję *najw* Q, gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju. Chcąc tego twierdzenia dowieść, wyznaczymy w zwykły sposób największą siłę poprzeczną w dowolnym punkcie N, odległym od A o x_1, gdy w tym punkcie stoi pierwszy ciężar P_1 (rys. 31). Ponieważ wtedy tylko trzy ciężary mieszczą się na belce, wielobok sił będzie $321B$, przyczem $P_1 = 1B$, $P_2 = 21$, $P_3 = 32$. Obieramy teraz biegun w A i kreślimy wielobok sznurowy $ANM'S'N'$. Zamykającą jest tu AN', a wiemy, że oddziaływanie O_1 otrzymujemy, kreśląc z bieguna równoległą do zamykającej, więc tu $AN'.BN'$ jest zatem O_1, oddziaływaniem w A, a zarazem największą siłą poprzeczną w N, jeżeli pierwszy ciężar P_1 stoi w tym punkcie. Z porównania powierzchni kreskowanych w rys. 30. i 31. widzimy, że są przystające, więc

NN' (rys. 30), równe jest oddziaływaniu, a zarazem *najw.* sile poprzecznej w N. W ten sam sposób możemy dla każdego innego punktu belki dowieść, że rzędna między prostą AB a wielobokiem sznurowym $BC''D'E'A'$ przedstawia *najw* Q w tym punkcie, gdy na przekroju stoi pierwszy ciężar.

Jeżeli chcemy dla jakiego przekroju F (rys. 30) sprawdzić, czy *najw* Q powstaje wtedy, gdy drugi ciężar stoi na przekroju, to wiemy, że pierwszy ciężar stoi w takim razie w G, przyczem $GF=e_1$, więc siła poprzeczna w punkcie F będzie: $Q= =O_1-P_1=GG'-A1=GG'-GG''=G'G''$. Tu, jak widzimy, $G'G''<FF'$, więc *najw* Q powstaje, gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju.

§. 19. Najniekorzystniejsze położenie układu ciężarów ze względu na momenty.

Powyżej w §. 15. udowodniliśmy, że linja wpływowa momentów w punkcie C ma kształt $a'c'b'$ (rys. 32).

Załóżmy, że belka AB jest obciążoną dowolnie ciężarami $P_1, P_2 \ldots P_n$; moment w C jest wtedy:

$$M=P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3+\ldots+P_ny_n=\Sigma Py.$$

Jeżeli układ ciężarów przesuniemy o dx na prawo, to zmieni się moment o dM, przyczem

$$dM=(P_1+P_2)\,dy'-(P_3+P_4+\ldots P)\,dy''=R'dy'-R''dy'' \qquad 34)$$

jeżeli R' i R'' oznaczają wypadkowe wszystkich ciężarów na lewo i na prawo od przekroju C.

Z rysunku widzimy, że: $dy':dx=cc':a$, $dy'=\frac{cc'}{a}dx$,

$$dy'':dx=cc':b,\quad dy''=\frac{cc'}{b}\,dx.$$

Wstawiając powyższe wartości w równ. 34), otrzymujemy:

$$dM=cc'dx\left(\frac{R'}{a}-\frac{R''}{b}\right),\text{ a więc } dM>0,\text{ gdy } \frac{R'}{a}>\frac{R''}{b} \qquad 35)$$

Jeżeli więc szukamy takiego położenia układu ciężarów, któreby wywołało największy moment w C, to przesuniemy układ ciężarów na prawo, jeśli $\frac{R'}{a}>\frac{R''}{b}$, bo wtedy $dM>0$.

Jeżeli przytem nowy ciężar wejdzie na belkę, to $\frac{R'}{a}$ będzie jeszcze większem, jeśli jeden ciężar zejdzie z belki, to $\frac{R''}{b}$

będzie jeszcze mniejszem, a więc przy przesunięciu na prawo zyskujemy jeszcze więcej. A zatem zmiana znaku nierówności nie może nastąpić ani przez wejście, ani przez zejście jakiego ciężaru z belki, lecz tylko przez przekroczenie jednego ciężaru przez punkt C. Stąd wynika, że dla największości stać musi jeden ciężar na przekroju. Z kształtu linji wpływowej widzimy też, że dla największości muszą w pobliżu przekroju stać największe i najbardziej skupione ciężary, a więc n. p. dla mostów kolejowych będzie stać na przekroju dla największego momentu parowóz, a nie jaszczyk albo wóz.

To, co powyżej udowodniliśmy, podał pierwszy Winkler, ale w rzeczywistości cecha Winklera nie wystarcza zawsze do wyszukania najniekorzystniejszego położenia układu ciężarów skupionych.

Załóżmy, że ciężar P_1 (rys. 33) stoi na przekroju C, a właściwie o dx na prawo od przekroju, wtedy $R'=P_1+P_2$, $R''=P_3+P_4+P_5+\ldots+P_n$. Załóżmy dalej, że $\frac{R'}{a}<\frac{R''}{b}$, należałoby zatem według 35) posuwać układ ciężarów na lewo.

Wystarczy tu posunięcie na lewo o dx, aby tylko P_3 stanęło po lewej stronie punktu C. Załóżmy, że teraz

$$\frac{R'+P_3}{a}>\frac{R''-P_3}{b},$$

że zatem układ ciężarów należałoby przesunąć na prawo.

W takim razie na mocy cechy Winklera musiałby układ ciężarów skupionych w tem położeniu wywołać największy moment w C. Tak jednak nie jest zawsze.

Przesuńmy bowiem układ ciężarów o e na prawo tak, aby P_2 stanęło na C (na lewo o dx) i załóżmy, że przytem ciężar P_0 wchodzi na belkę, a ciężar P_n schodzi z belki, to będzie: $\Delta M=P_0 y_0+R'\Delta y'-(R''-P_n)\Delta y''-P_n y_n$.

Z rysunku otrzymamy:

$$y_0=\frac{cc' x_0}{a},\quad \Delta y'=\frac{cc' e}{a},\quad \Delta y''=\frac{cc' e}{b},\quad y_n=\frac{cc'(e-x_n)}{b},\ \text{więc}$$

$$\Delta M=P_0 cc'\frac{x_0}{a}+R' cc'\frac{e}{a}-(R''-P_n)\frac{cc' e}{b}-P_n\frac{cc'(e-x_n)}{b},$$

$$\Delta M=cc'\left(\frac{P_0 x_0}{a}+\frac{R' e}{a}-\frac{R'' e}{b}+\frac{P_n x_n}{b}\right).$$

Będzie więc: $\Delta M>0$, gdy $\frac{P_0 x_0+R' e}{a}>\frac{R'' e-P_n x_n}{b}$, lub:

$$\frac{R' + P_0 \frac{x_0}{e}}{a} > \frac{R'' - P_n \frac{x_n}{e}}{b} \quad \ldots \ldots \quad 36)$$

Widzimy więc, że, ponieważ $\frac{R'}{a} < \frac{R''}{b}$, przy przesunięciu układu ciężarów na prawo wprawdzie z początku moment się zmniejsza, że jednak od chwili, gdy nowy ciężar P_0 wchodzi na belkę, a inny ciężar P_n z belki schodzi, że od tej chwili moment zaczyna wzrastać tak, że po przesunięciu o e moment będzie większy, niż poprzednio, wtedy, gdy zachodzi nierówność 36). Nierówność 36) jest tą drugą cechą, którą trzeba jeszcze zbadać, ile razy znak nierówności się zmienia, aby wyznaczyć dokładnie najniekorzystniejsze położenie.

Z nierówności 36) widzimy, że wpływ ciężarów P_0 i P_n jest tem większym, im większe są stosunki $\frac{x_0}{e}$ i $\frac{x_n}{e}$, im bliżej podpór więc siły P_0 i P_n były przed przesunięciem. Wpływ ten jest też po tej stronie przekroju większym, która jest mniejszą, więc gdy $a < b$, to wpływ $P_0 \frac{x_0}{e}$ jest większym, niż wpływ wyrazu $P_n \frac{x_n}{e}$. Wpływ ciężarów P_0 i P_n jest wreszcie tem większy, im większe są te siły, a im mniejsze wypadkowe R' i R''.

Musimy tu jeszcze dodać, że te same cechy dadzą się zastosować wszędzie tam, gdzie linje wpływowe mają ten sam kształt, co dla momentów belki prostej, zatem kształt trójkąta z podstawą w osi.

Dla bliższego wyjaśnienia niech posłuży następny przykład. Chodzi o wyznaczenie najniekorzystniejszego położenia pociągu, przedstawionego na rys. 34 (dawnego normalnego rosyjskiego) dla momentu w punkcie C.

Jeżeli postawimy ciężar 1′ na C i wyobrazimy go sobie jako oddalony o dx na prawo od punktu C, to $\frac{12{,}5}{2{,}561} > \frac{102{,}71}{23{,}049}$, więc pociąg trzeba posunąć na prawo, aż ciężar 2′ stanie na przekroju.

Wtedy wejdzie ciężar 3′ na belkę, a $\frac{R'}{a}$ będzie jeszcze większem (rys. 35) i otrzymamy $\frac{25}{2{,}561} > \frac{102{,}71}{23{,}049}$. Musimy więc posunąć dalej pociąg na prawo, a mianowicie o tyle, aby 2′ było po prawej stronie punktu C. Wtedy jest: $\frac{12{,}5}{2{,}561} > \frac{115{,}2}{23{,}040}$.

Tu zmienia się znak nierówności i według cechy Winklera powinien ciężar 2′ wywoływać największy moment, znajdując się na przekroju C. To się jednak w tym wypadku nie sprawdza, jak to możemy się łatwo o tem przekonać, badając drugą cechę (równ. 36).

Przesuńmy mianowicie pociąg jeszcze o 1,32 m na prawo tak, aby ciężar 3′ stanął na przekroju C, to wtedy wchodzi nowy ciężar 4′ (rys. 36) na belkę, a ciężar 8 schodzi z belki. Wtedy jest: $P_0=12{,}5\ t$, $x_0=1{,}241\ m$, $P_n=8{,}2\ t$, $x_n=0{,}749\ m$, a więc:

$$\frac{12{,}5+\frac{12{,}5\,.\,1{,}241}{1{,}32}}{2{,}561} > \frac{115{,}2+\frac{8.2\,.\,0{,}749}{1{,}32}}{23{,}049}.$$

Przy przesunięciu na prawo o 1,32 m zyskujemy więc i moment staje się większym.

Gdy ciężar 3′ przekracza punkt C, to $\frac{12{,}5}{2{,}561}<\frac{119{,}5}{23{,}049}$. Musimy więc jeszcze zbadać drugą cechę. Ale przez posunięcie pociągu o 1,32 m na prawo nie wchodzi żaden nowy ciężar na belkę i nie schodzi żaden ciężar z belki, więc $P_0=P_n=0$, a druga cecha staje się równa pierwszej.

A więc najniekorzystniejsze położenie pociągu dla momentu w C jest, gdy ciężar 3′ stoi w C i w istocie jest wtedy moment $M=175{,}7\ tm$, gdy przeciwnie, gdy koło 2′ stoi na C, moment jest mniejszy, mianowicie: $M=161{,}6\ tm$.

§. 20. Wyznaczenie największych momentów.

a) Liczebnie zwykłym sposobem. Dla najniekorzystniejszego położenia, które według poprzedniego paragrafu wyznaczyliśmy, liczymy momenty według zasad, wyłożonych w statyce budowli[1]). Dla większych rozpiętości wystarczy podzielić połowę rozpiętości na 5 lub 10 części i dla tych punktów wyznaczyć *najw* momenty. Te punkty łączymy linją krzywą. Linja ta największych momentów jest obwiedną poszczególnych parabol, przecinających się w punktach, dla których siła jaka przebywa na belkę lub też ubywa. Dla pewnego bowiem położenia układu ciężarów, sprawiającego *najw* moment w danym punkcie C (rys. 32) jest:

$$najw\ M=O_1 a-R'c=\frac{R'(b+c)+R''(b-c')}{l}\,a-R'c=$$

$$=\frac{(R'+R'')a(l-a)}{l}-\frac{cR'(l-a)+c'R''a)}{l},$$

Dla punktu E, odległego o da, posunie się tylko cały układ o da na prawo, więc *najw* M zmieni się jako funkcja zmiennej a. Z równania tego widzimy, że *najw* M zmieniać się będzie wedle paraboli, dopóki te same ciężary stać będą na belce.

[1]) P. Podr. Statyki Budowli III. wyd., str. 20.