na przekroju C. To się jednak w tym wypadku nie sprawdza, jak to możemy się łatwo o tem przekonać, badając drugą cechę (równ. 36).

Przesuńmy mianowicie pociąg jeszcze o 1,32 m na prawo tak, aby ciężar 3′ stanął na przekroju C, to wtedy wchodzi nowy ciężar 4′ (rys. 36) na belkę, a ciężar 8 schodzi z belki. Wtedy jest: $P_0=12{,}5\ t$, $x_0=1{,}241\ m$, $P_n=8{,}2\ t$, $x_n=0{,}749\ m$, a więc:

$$\frac{12{,}5+\dfrac{12{,}5\,.\,1{,}241}{1{,}32}}{2{,}561} > \frac{115{,}2+\dfrac{8\,.\,2\,.\,0{,}749}{1{,}32}}{23{,}049}.$$

Przy przesunięciu na prawo o 1,32 m zyskujemy więc i moment staje się większym.

Gdy ciężar 3′ przekracza punkt C, to $\frac{12{,}5}{2{,}561} < \frac{119{,}5}{23{,}049}$. Musimy więc jeszcze zbadać drugą cechę. Ale przez posunięcie pociągu o 1,32 m na prawo nie wchodzi żaden nowy ciężar na belkę i nie schodzi żaden ciężar z belki, więc $P_0=P_n=0$, a druga cecha staje się równa pierwszej.

A więc najniekorzystniejsze położenie pociągu dla momentu w C jest, gdy ciężar 3′ stoi w C i w istocie jest wtedy moment $M=175{,}7\ tm$, gdy przeciwnie, gdy koło 2′ stoi na C, moment jest mniejszy, mianowicie: $M=161{,}6\ tm$.

§. 20. Wyznaczenie największych momentów.

a) Liczebnie zwykłym sposobem. Dla najniekorzystniejszego położenia, które według poprzedniego paragrafu wyznaczyliśmy, liczymy momenty według zasad, wyłożonych w statyce budowli[1]). Dla większych rozpiętości wystarczy podzielić połowę rozpiętości na 5 lub 10 części i dla tych punktów wyznaczyć *najw* momenty. Te punkty łączymy linją krzywą. Linja ta największych momentów jest obwiedną poszczególnych parabol, przecinających się w punktach, dla których siła jaka przebywa na belkę lub też ubywa. Dla pewnego bowiem położenia układu ciężarów, sprawiającego *najw* moment w danym punkcie C (rys. 32) jest:

$$najw\ M=O_1\,a-R'\,c=\frac{R'\,(b+c)+R''\,(b-c')}{l}\,a-R'\,c=$$

$$=\frac{(R'+R'')\,a\,(l-a)}{l}-\frac{c R'\,(l-a)+c'\,R''\,a)}{l},$$

Dla punktu E, odległego o da, posunie się tylko cały układ o da na prawo, więc *najw* M zmieni się jako funkcja zmiennej a. Z równania tego widzimy, że *najw* M zmieniać się będzie wedle paraboli, dopóki te same ciężary stać będą na belce.

[1]) P. Podr. Statyki Budowli III. wyd., str. 20.

Przykład. Dla belki o rozpiętości 7 *m* mamy wyznaczyć *najw* moment w punkcie C (rys. 37), dla którego $x=2\ m$, jeżeli belka jest obciążona parowozem normalnym polskim. Jeżeliby stało drugie koło na przekroju C (o dx na prawo), to byłoby na belce pięć ciężarów i wtedy byłoby: $\frac{10}{2}<\frac{40}{5}$. Musimy więc posunąć parowóz na lewo, aż drugie koło stanie o dx na lewo od C. Wtedy $\frac{20}{2}>\frac{30}{5}$, więc powinniśmy przesunąć parowóz na prawo. Ponieważ więc przez przesunięcie układu ciężarów ani na prawo, ani na lewo nie otrzymujemy większego momentu, zatem to położenie jest najniekorzystniejszem. Dla tego położenia mamy: $O_1=\frac{1}{7}5.10(7{,}0-2-1.5)=25\ t$, więc *najw* $M=25.2-10.1{,}5=35\ tm$.

b) Liczebnie za pomocą tablicy momentów Zimmermanna. Siła P może być w trojakiem położeniu pod względem danego punktu C belki AB (rys. 38); może działać na lewo od C, w C (rys. 39) lub na prawo od C (rys. 40). Moment w C mamy w pierwszym wypadku:

$$M=P\frac{d+x_1}{l}x-Pd=\frac{Pxx_1}{l}-\frac{P(l-x)d}{l}=\frac{Pxx_1}{l}-\frac{Px_1d}{l}.$$

A jeżeli więcej takich sił działa na lewo od C,

$$\Sigma M=\frac{xx_1}{l}\Sigma P-\frac{x_1}{l}\Sigma Pd. \quad \ldots \quad 37)$$

Dla $d=0$ jest: $$M_n=\frac{P_nxx_1}{l}. \quad \ldots \quad 38)$$

Dla trzeciego wypadku jest:

$$M_1=\frac{P_1(x_1-d_1)}{l}x=\frac{P_1xx_1}{l}-\frac{P_1d_1x}{l}.$$

więc: $$\Sigma M_1=\Sigma P_1\frac{xx_1}{l}-\Sigma P_1d_1\frac{x}{l}. \quad \ldots \quad 39)$$

Jeżeli belka obciążona jest równocześnie ciężarami ΣP, P_n i ΣP_1, to:

$$M_s=\frac{xx_1[\Sigma P+P_n+\Sigma P_1]-[\Sigma Pd]x_1-[\Sigma P_1d_1]x}{l}. \quad 40)$$

Otóż ułożywszy tablicę, w której dla danego pociągu podane są: ΣP, ΣP_1, ΣPd i ΣP_1d_1, możemy bardzo prędko dla każdego położenia wyznaczyć moment.

Na następnej stronicy podajemy tabliczkę dla pociągu złożonego z dwu normalnych parowozów polskich dla kolei drugorzędnych, w której uwidoczniliśmy ilości d, d_1, ΣP, ΣP_1, ΣPd i ΣP_1d_1 dla drugiej, trzeciej i czwartej osi drugiego parowozu.

T a b l. XIV.

	16	16	16	16	16	11,2	11,2	11,2	11,2	16	16	16	16	16	11,2	11,2	11,2	11,2	
d	19,5	18	16,5	15,0	13,5	9,5	8,0	6,5	5,0	1,5	*	1,5	3,0	4,5	8,5	10	11,5	13	d_1
ΣP	140,8	124,8	108,8	92,8	76,8	60,8	49,6	38,4	27,2	16	*	16	32	48	59,2	70,4	81,6	92,8	ΣP_1
ΣPd	1668,8	1356,8	1068,8	804,8	564,8	348,8	242,4	152,8	80,0	24,0	*	24,0	72,0	144	239,2	351,2	480,0	625,6	$\Sigma P_1 d_1$
d	21,0	19,5	18,0	16,5	150	11,0	9,5	8,0	6,5	3,0	1,5	*	1,5	3,0	7,0	8,5	10,0	11,5	d_1
ΣP	156,8	140,8	124,8	108,8	92,8	76,8	65,6	54,4	43,2	32	16	*	16	32	43,2	54,4	65,6	76,8	ΣP_1
ΣPd	1904	1568	1256	968	704	464	340,8	234,4	144,8	72,4	24,0	*	24	72	150,4	245,6	357,6	486,4	$\Sigma P_1 d_1$
d	22,5	21,0	19,5	18,0	16,5	12,5	11,0	9,5	8,0	4,5	3,0	1,5	*	1,5	5,5	7,0	8,5	10,0	d_1
ΣP	172,8	156,8	140,8	124,8	108,8	92,8	81,6	70,4	59,2	48	32	16	*	16	27,2	38,4	49,6	60,8	ΣP_1
ΣPd	2163,2	1803,2	1467,2	1155,2	867,2	603,2	463,2	340,0	233,6	144	72	24	*	24	85,6	164,0	259,2	371,2	$\Sigma P_1 d_1$

Jeżeli mamy n. p. wyznaczyć dla belki o rozpiętości 20 *m* *najw* moment w środku belki, to stawiając drugie koło na środek belki, otrzymamy:

$$M=\tfrac{1}{20}[10.10(60,8+16+70,4)-348,8.10-351,2.10]=386\ tm$$

Postawiwszy trzecie koło na środku belki otrzymamy:

$$M=\tfrac{1}{20}[10.10(65,6+16+65,6)-340,8.10-357,6.10]=386,8\ tm$$

A wreście, gdy czwarte koło będzie stało na środku belki, będziemy mieli:

$$M=\tfrac{1}{20}[10.10(70,4+16+60,8)-340.10-371,2.10)=380,4\ tm.$$

W tym wypadku więc największy moment powstaje, gdy trzecie koło parowozu stoi na środku belki, moment największy wynosi 386,8 *tm*.

Tablicę momentów możemy użyć też do wyznaczenia sił poprzecznych. Gdy bowiem siła P działa na lewo od C (rys. 38), to siła poprzeczna w C

$Q=\frac{P(d+x_1)}{l}-P=\frac{Pd}{l}-\frac{Px}{l}$, a dla więcej sił

$$\Sigma Q=\frac{1}{l}[\Sigma Px-\Sigma Pd]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41)$$

Gdy siła P_n stoi na C (rys. 39), to siła poprzeczna w C jest, jeżeli P_n oddalone od dx na prawo od C, $Q_n=\frac{P_n x_1}{l}$, . . 42)

„ P_n „ „ „ „ lewo „ C, $Q_n=-\frac{P_n x}{l}$. . 43)

Jeżeli siła P_1 działa na prawo od C, (rys. 40), to siła poprzeczna w C jest $Q_1=\frac{P_1(x_1-d_1)}{l}$, a dla więcej sił

$$\Sigma Q_1=\frac{1}{l}(\Sigma P_1 x-\Sigma P_1 d_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44)$$

Aby otrzymać *najw* $(+Q)$, obciążamy prawą stronę belki, wtedy *najw* $(+Q)=\frac{1}{l}[x_1(\Sigma P_1+P_n)-\Sigma P_1 d_1]$, ... 45)

a przy obciążeniu lewej strony belki:

$$najw\,(-Q)=-\frac{1}{l}[x(\Sigma P+P_n)-\Sigma Pd]. \quad . \quad . \quad 46)$$

c) Zapomocą linij wpływowych przez dodawanie rzędnych w ten sam sposób, co dla sił poprzecznych (§. 18).

d) Zapomocą wieloboku sznurowego. Mając dany układ ciężarów skupionych P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (rys. 41), kreślimy wielobok sił, obieramy biegun O i wykreślamy wielobok sznurowy *psuzl*. Wykreśliliśmy tu wielobok sznurowy, nie oznaczywszy jeszcze położenia belki, a to dla tego, aby można użyć tego samego wieloboku sznurowego dla rozmaitych położeń układu ciężarów. Zamiast bowiem posuwać układ ciężarów po belce, możemy układ ciężarów, a więc i wielobok sznurowy, zostawić na miejscu, a belkę przesuwać; położenie względne układu ciężarów i belki będzie w obu razach takie samo.

Załóżmy n. p., że mając daną belkę AB (rys. 42), chcemy wyznaczyć *najw* M dla punktu C. Nie wiemy dokładnie, który ciężar ma stać na C dla największości, wiemy jednak, że w pobliżu C mają stać największe i najbardziej skupione ciężary i że cała belka ma być obciążona; będzie więc stał na C ciężar P_1, P_2 lub P_3. Załóżmy najpierw, że pierwszy ciężar P_1 stoi na C. Na dowolnej linji poziomej (rys. 41) odcinamy od pionowej przez P_1 $A'C'=AC$ i $C'B'=CB$. Teraz więc podpory są w. A' i B', gdy ciężar P_1 stoi w C', kreślimy zatem przez A' i B' pionowe, mn będzie zamykającą, więc moment w C będzie pr. Teraz próbujemy, czy drugi ciężar P_2, stojąc na przekroju C, nie wywoła większego momentu, przyczem postępujemy w ten sam sposób. Robimy $A''C''=AC$, $C''B''=CB$, kreślimy przez A'' i B'' pionowe i łączymy punkty m' i n' przecięcia się tych pionowych z wielobokiem sznurowym. W ten sposób wyznaczamy moment w tym wypadku dla przekroju C równy st. To samo powtarzamy jeszcze dla wypadku, gdy P_3 stoi na C i otrzymujemy moment uw; która z tych trzech długości jest największą, tę zatrzymujemy i robimy ją równą CC' na pionowej w C (rys. 42). To samo robimy dla innych punktów i otrzymujemy linję największych momentów $AC'B$.

Jeżeli y jest rzędną między zamykającą a wielobokiem sznurowym, to, jak wiemy, $M=ay$, jeżeli a oznacza odległość biegunową. Chcąc uniknąć mnożenia, możemy zmienić podziałkę, a wtedy jednostką momentów musi być $\frac{1}{a}$ jednostki długości. Jednostka długości ma więc wartość a jednostek momentów, przyczem a należy odczytać w podziałce sił.

Przykład. Jeżeli podziałka sił jest $\frac{1\,mm}{1\,t}$ (rys. 41), a podziałka długości $\frac{1\,mm}{0{,}2\,m}$, odległość zaś biegunowa, wyrażona w podziałce sił $a=20\,t$, to podziałka momentów jest $\frac{1\,mm}{20.\frac{2}{10}\,tm}=\frac{1\,mm}{4\,tm}$. Wedle tej podziałki wynosi pr 26 tm, ts 32 tm, $uv=35$ tm. Liczebnie otrzymaliśmy powyżej w tym wypadku 35 tm, a więc wynik zupełnie zgodny. Ze względu na małą podziałkę wynik wykreślny może być też nieco różnym.

§. 21. Bezwzględnie największy moment.

Chcąc wyznaczyć, jak wielki i w jakim punkcie będzie bezwzględnie największy moment, wiemy przedewszystkiem, że na tym przekroju musi stać jeden ciężar.

Wyznaczmy *najw* moment w przekroju C, odległym od lewej podpory o x (rys. 43). Załóżmy, że wtedy P stoi na przekroju, a wypadkowa ciężarów na długości AC jest P_1, a na długości CB P_2, wtedy:

$O_1 l=P(l-x)+P_1(l-x+a_1)+P_2(l-x-a_2)$, a $M=O_1 x-P_1 a_1$, więc
$Ml=O_1 lx-P_1 la_1=P(l-x)x+P_1(l-x+a_1)x+P_2(l-x-a_2)x-P_1 a_1 l.$

Jeżeli M ma być największem, to musimy zrobić $\frac{dM}{dx}=0$.

Więc $l\frac{dM}{dx}=Pl-2Px+P_1l-2P_1x+P_1a_1+P_2l-2P_2x+$ $-P_2a_2=0$, a stąd:

$$x=\frac{(P+P_1+P_2)l+(P_1a_1-P_2a_2)}{2(P+P_1+P_2)}, \text{ czyli:}$$

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{l}}{2}+\frac{\mathbf{P_1a_1-P_2a_2}}{2(\mathbf{P+P_1+P_2})}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47)$$

Wstawmy wartość za x w równanie dla M, to otrzymamy:

$$najw\, M=\tfrac{1}{4}(P+P_1+P_2)l-P_2a_2+\frac{(P_1a_1-P_2a_2)^2}{4(P+P_1+P_2)l}. \quad 48)$$

Załóżmy, że obliczyliśmy z równ. 47) x i że w C (rys. 44) jest bezwzględnie *najw* moment. Złóżmy teraz siły P, P_1 i P_2 w wypadkową R, a odległość jej od punktu C niechaj będzie r (dodatnie, jeżeli po prawej stronie punktu C), to $R=P+$ $+P_1+P_2$, a biorąc równanie momentów ze względu na punkt C, $Rr=P_2a_2-P_1a_1$.

Wstawmy to w równ. 47), a otrzymawszy $x=\frac{l}{2}-\frac{Rr}{2R}$

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{l}}{2}-\frac{\mathbf{r}}{2}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{l-r}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 49)$$

Niechaj punkt E będzie środkiem belki, to $AE=\frac{l}{2}$. Dalej nazwijmy $CE=d$, to $d=\frac{l}{2}-x$. Podstawiwszy za x wartość z 49), otrzymamy $d=\frac{l}{2}-\left(\frac{l}{2}-\frac{r}{2}\right)$, zatem:

$$\mathbf{d}=\frac{\mathbf{r}}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 50)$$

A zatem środek belki E jest równo oddalony od C, punktu zaczepienia siły P i od wypadkowej i połowi długość r, a stąd także $FB=AC=x$.

Dalej mamy oddziaływanie $O_1=\frac{Rx}{l}$, a moment

$$najw\, \mathbf{M}=\frac{\mathbf{Rx^2}}{\mathbf{l}}-\mathbf{P_1a_1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 51)$$

Widzimy więc, że *najw* M nie otrzymamy w środku belki, lecz w punkcie C w odstępie d od środka (rys. 45). Jeżeli układ ciężarów skupionych wchodzi na belkę z drugiej strony, to otrzymamy takie samo *najw* M w punkcie D, który leży symetrycznie do C po drugiej stronie środka belki E. W środku belki będzie zatem moment nieco mniejszy. Tylko, gdy $P_1 a_1 = P_2 a_2$, a więc zawsze, gdy obciążenie jest ze względu na P symetryczne, $r=0$, $x=\frac{l}{2}$, więc moment jest największy w środku belki.

Ponieważ punkt E połowi długość r (rys. 44), więc na tem polega następująca konstrukcya. Jeżeli dla danego układu ciężarów, które się na belce mieszczą, wykreślimy wielobok sznurowy i skrajne boki przedłużymy, to przez ich punkt przecięcia się przechodzi wypadkowa (rys. 46). Jeżeli przepołowiliśmy długość $CD=r$, to środek belki będzie w E, punkt C zaś nazywamy ze względu na punkt zaczepienia wypadkowej D przekrojem symetrycznym (n. *Symmetriequerschnitt)* punktu C. Konstrukcję tę podał pierwszy Culmann (1866).

Twierdzenie Culmanna da się słowami tak wyrazić: Moment staje się największym przy pewnym ciężarze, gdy ten ciężar i wypadkowa wszystkich ciężarów są od środka belki równo oddalone. Nie wiemy jednak jeszcze, który z ciężarów należy postawić na przekroju symetrycznym punktu D. Zwykle największy moment powstaje pod ciężarem najbliższym punktu D, jednak nie zawsze. Jeżeli zachodzi wątpliwość, trzeba dla kilku najbliższych ciężarów spróbować, czy nie otrzymamy większego momentu. Zresztą ta konstrukcja jest tak długo ważną, jak długo ciężary te same znajdują się na belce. Jeżeli chcemy się przekonać, jak wielki może wywołać *najw* moment inna grupa ciężarów (I, II, III, IV, V, 1, 2) to musimy dla niej tę samą konstrukcję powtórzyć, a wtedy zobaczymy, który moment będzie większym [1]).

Przykłady. 1. Belka o rozpiętości 15 *m* niech będzie obciążona pociągiem, złożonym z dwu parowozów czteroosiowych polskich którego część przedstawiliśmy na rys. 46. Największy moment będzie około środka, gdzie mamy umieścić największe ciężary, a więc I, II, III, IV, V; na przekroju stanie prawdopodobnie ciężar III. Wtedy

---

Šolin (Mittheil. des Arch. u. Ing. V. in Böhmen 1877) podaje wprawdzie znamię, aby poznać, czy siła P, czy też sąsiednie siły P' i P'', oddalone od P o e' i e'' wywołują bezwzględną największość. Otrzymuje on, że *najw M* wywołuje P, jeżeli $\frac{P'}{x-\frac{1}{4}e'} < \frac{P}{l} > \frac{P'}{l-x-\frac{1}{4}e''}$. Ale próbowaniem równie prędko znajdziemy bezwzględnie *najw. M.*

zmieszczą się na belce siły 4′ 5′ I, II, III, IV, V, 1. Wypadkowa tych sił R' jest odległa od III o

$$r=\frac{2.7,5.6,75+5.10.0-7,5.7}{2.7,5+5.10+7,5}=\frac{48,7}{72,5}=0,67\ m,$$

$$\text{więc } x=\frac{15-0,67}{2}=7,16, \quad l-x=7,84.$$

Dla tego x właśnie tych 8 ciężarów będzie stąć na belce. Jeżeli III stoi o dx na lewo od punktu C, to $\frac{45}{7,16}>\frac{27,5}{7,84}$, więc suniemy na prawo. Jeżeli II stoi o dx na prawo od C, to $\frac{35}{7,16}>\frac{37,5}{7,84}$, więc jeszcze musimy sunąć na prawo, czyli musielibyśmy siłę II postawić na przekroju. Jednak tu widzimy, że przy obliczonem $x=7,16$ siła 4′ stoi bardzo blisko (0,34 m) podpory i na moment ma bardzo mały wpływ. Spróbujemy więc obliczyć x dla grupy ciężarów z opuszczeniem 4′ a więc dla 5′, I, II, III, IV, V, 1.

Mamy wtedy ze względu na siłę III:

$$r'=\frac{7,5.6+5.10.0-7,5.7}{7,5+5.10+7,5}=-\frac{7,5}{65}=-0,12\ m,$$

$$\text{więc } x=\frac{15+0,12}{2}=7,56, \quad l=7,44\ m.$$

Dla tego x stoi właśnie tych 7 ciężarów na belce. Jeżeli III stoi o dx na lewo od C, to $\frac{37,5}{7,56}>\frac{27,5}{7,44}$. Jeżeli zaś III stoi o dx na prawo od C, to $\frac{27,5}{7,55}<\frac{37,5}{7,45}$, więc największy moment będzie w C, gdy III stoi na przekroju. Mamy wtedy:

$$naj w\ M=\frac{65.7,56^2}{15}-35.2,57=157,7\ tm, \text{ przyczem:}$$

$$a_1=\frac{7,5.6+20.2,25}{35}=2,57.$$

Jeżeli teraz policzymy moment dla grupy ciężarów 3′, 4′, 5′, I, II, III, IV, V, to otrzymamy ze względu na siłę II:

$$r''=\frac{3.7,5.6-5.10.1,5}{3.7,5+5.10}=\frac{60}{72,5}=0,828\ m,$$

$$x=\frac{15-0,828}{2}=7,086\ m, \quad l-x=7,914\ m.$$

Dla tego x jednak siła 3′ już nie znajduje się na belce, więc ją opuszczamy i szukamy x dla ciężarów 4′, 5′, I, II, III, IV, V. Ze względu na II otrzymamy:

$$r=\frac{2.7,5.5,25-5.10.1,5}{2.7,5+50}=\frac{3,75}{65}=0,058\ m,$$

$$x=\frac{15-0,058}{2}=7,471, \quad l-x=7,529\ m.$$

Dla tego x powyższych siedm ciężarów znajduje się na belce. Jeżeli ciężar II znajduje się o dx na prawo od C, to $\frac{25}{7,471} < \frac{40}{7,529}$. Jeżeli siła II stoi o dx na lewo od C, to $\frac{35}{7,471} > \frac{30}{7,529}$. Zatem dla największości stoi II na przekroju C.

Mamy wtedy:

$$a_1 = \frac{2.7,5.5,25+10.1,5}{2.7,5+10} = 3,75,$$

$$\text{a } \mathit{najw}\ M = \frac{65.7,471^2}{15} - 25.3,75 = 148\ tm,$$

więc mniej, niż dla momentu, pod ciężarem III. Bezwzględnie największy moment jest więc $M = 157,7\ tm$.

2. Wyznaczyć należy największy moment, jaki sprawia parowóz normalny polski kolei głównych na obie belki o rozpiętości 3,4.

Możliwe są dwa wypadki, albo na belce znajdują się trzy koła albo dwa koła. Jeżeli na belce znajdują trzy koła (rys. 47), to ze względu na symetrję największy moment będzie w środku belki.

Wtedy $O_1 = O_2 = \frac{60}{2} = 30\ t$,

a moment w C *najw* $M = 30.1,7 - 20.1,5 = 21\ tm$.

Jeżeli na belce znajdują się dwa koła (rys. 48), to wypadkowa $R = 40\ t$ leży w oddaleniu $\frac{1,5}{2} = 0,75\ m$ od C, a środek belki w odstępie $\frac{0,75}{2} = 0,375\ m$, więc $CE = 0,375$, $AC = 1,325\ m$, $DB = 3,4 + - 1,375 - 1,5 = 0,525$. Stąd $O_1 = \frac{40.(1,7-0,375)}{3,4} = 15,6\ t$, a w C *najw* $M = 15,6.1,325 = 20,7\ tm$.

Tu większy więc jest największy moment dla 3 kół.

Jeżeli uwzględnimy, że na belkę obok ciężaru ruchomego działa także ciężar własny, który dla jednostajnego obciążenia wywołuje *najw* moment w środku rozpiętości, to punkt, dla którego moment sumaryczny jest największym, przysuwa się nieco do środka, chociaż nie wiele.

Mamy wtedy dla oddziaływania O_1 (rys. 49):

$$O_1 l = P(l-x) + P_1(l-x+a_1) + P_2(l-x-a_2) + \frac{gl^2}{2}, \text{ a}$$

$$Ml = O_1 lx - P_1 l a_1 - \frac{gx^2 l}{2} = P(l-x)x + P_1(l-x+a_1)x +$$

$$+ P_2(l-x-a_2)x + \frac{gl^2 x}{2} - \frac{gx^2 l}{2} - P_1 l a_1,$$

$$Ml = P(l-x)x + P_1(l-x+a_1)x + P_2(l-x-a_2)x +$$

$$- P_1 a_1 l + \frac{gxl}{2}(l-x).$$

Jeżeli M ma być największem, to musimy zrobić $\frac{dM}{dx}=0$, więc $\frac{l\,dM}{dx}=0=Pl-2Px+P_1 l-2P_1 x+P_1 a_1+P_2 l+2P_2 x-P_2 a_2+$ $+\frac{gl}{2}(l-2x)=0$, zatem:

$$x=\frac{(P+P_1+P_2)l+(P_1 a_1-P_2 a_2)+\frac{1}{2}gl^2}{2(P+P_1+P_2)+gl}. \quad . \quad . \quad 52)$$

To możemy inaczej napisać:

$$x=\frac{Rl-Rr+\frac{1}{2}gl^2}{2R+gl}=\frac{l-r+\frac{gl^2}{2R}}{2+\frac{gl}{R}}. \quad . \quad . \quad . \quad 53)$$

Jeżeli $d=\frac{l}{2}-x$, to

$$d=\frac{l}{2}-\frac{l-r+\frac{gl^2}{2R}}{2+\frac{gl}{R}}=\frac{r}{2+\frac{gl}{R}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 54)$$

Widzimy więc, że tu jest $d<\frac{r}{2}$. Różnica jest zwykle tak mała, że wystarczy, jeżeli *najw* M_p obliczymy dla C, a *najw* M_g dla E i ilości te dodamy, wtedy otrzymamy *najw* M_q nieco większe, niż w rzeczywistości.

§. 22. Największe momenty dla zmiennych rozpiętości.

Jeżeli dla jakiejś kolei lub drogi obliczamy więcej mostów na podstawie danego układu ciężarów skupionych, a chodzi nam o bezwzględnie największe momenty dla rozmaitych rozpiętości, to dadzą się według Empergera ustawić wzory, zapomocą których da się obliczyć *najw* M dla zmiennej rozpiętości.

Dla bardzo małych rozpiętości sprawia bezwzględnie największy moment jedna oś w środku rozpiętości mostu, wtedy

$$M=\frac{Pl}{4}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

więc dla zmiennej l jest to równanie linji prostej Oa (rys. 50).

Jeżeli dwie osie mieszczą się na moście, to może być moment największy dla jednej osi lub dla obciążenia dwiema osiami. Tu musimy próbować. Według twierdzenia Culmanna środek belki E musi wtedy połowić odstęp siły P_1 od wypadkowej R. Mamy wtedy, gdy O_1 oznacza oddziaływanie w lewej podporze:

$$\mathbf{M}=\mathbf{O}_1\,\mathbf{x}=\frac{\mathbf{R}\mathbf{x}}{\mathbf{l}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 56)$$

co zgadza się z równ. 51), bo tu $P_1\,a_1=0$. Przytem według równ. 49) $x=\frac{l-r}{2}$, zatem:

$$najw\;M=\frac{R}{4\,l}(l-r)^2. \quad . \; . \; . \; . \quad 57)$$

Jest to dla zmiennej l równanie hyperboli, bardzo zresztą płaskiej, której część ab zatrzymujemy.

Jeżeli $P_1=P_2$, a odstęp sił wynosi a, to $R=2\,P_1$, $r=\frac{a}{2}$,

wtedy: $$najw\;M=\frac{R}{16\,l}(2\,l-a)^2=\frac{P}{8\,l}(2\,l-a)^2. \quad . \; . \; . \quad 58)$$

Rozpiętość l, dla którego 1 i 2 osie dadzą ten sam największy moment, znajdziemy z równ. $\frac{Pl}{4}=\frac{P}{8\,l}(2\,l-a)^2$, a stąd:

$$l=a(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{1})=1{,}707\,a. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 59)$$

Jeżeli trzy osie stoją na moście, to zwykle wypadkowa R wpada na koło średnie, a największy moment jest w środku i otrzymamy:

$$O_1=\frac{P_1+P_2+P_3}{2}=\frac{R}{2}, \text{ a}$$

$$najw\;\mathbf{M}=\frac{\mathbf{R}}{2}\cdot\frac{\mathbf{l}}{2}-\mathbf{P}_1\,\mathbf{a}_1=\frac{\mathbf{R}\mathbf{l}}{4}-\mathbf{P}_1\,\mathbf{a}_1. \quad . \; . \; . \quad 60)$$

Dla zmiennej l jest to równanie linji prostej bc. Jeżeli wypadkowa R jest oddalona od średniego koła o r, to postępujemy wedle ogólnych wzorów 49) i 51) i otrzymujemy płaską hyperbolę. Jeżeli ciężary kół P są równe, to rozpiętość l, dla którego 2 i 3 osie dadzą ten sam największy moment, znajdziemy z równ. $\frac{P}{8\,l}(2\,l-a)^2=\frac{3\,Pl}{4}-Pa$, a stąd:

$$\mathbf{l}=\mathbf{a}\left(2+\sqrt{\frac{\mathbf{a}}{2}}\right)=2{,}225\,\mathbf{a}. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 61)$$

Jeżeli cztery osie stoją na moście w równych odstępach a, to największy moment będzie pod drugą siłą. Odstęp wypadkowej od tej siły $r=\frac{a}{2}$, odstęp środka belki $\frac{a}{4}$, więc $x=\frac{1}{2}\left(l-\frac{a}{2}\right)$, $M=\frac{Rx^2}{l}-Pa$, a że $R=4\,P$, więc:

$$M=\frac{4P}{4l}\left(1-\frac{a}{2}\right)^2-Pa=\frac{P}{l}\left(1-\frac{a}{2}\right)^2-Pa. \quad . \quad 62)$$

Rozpiętość l, dla której 3 i 4 osie dadzą ten sam największy moment, znajdziemy z równania:

$$\frac{3Pl}{4}-Pa=\frac{P}{l}\left(l-\frac{a}{2}\right)^2-Pa, \text{ stąd:}$$

$$l=a(2+\sqrt{3})=3{,}732\,a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63)$$

Jeżeli pięć osi stoi na moście w równych odstępach, to największy moment będzie pod trzecim ciężarem w środku rozpiętości. Wtedy:

$$M=2{,}5.\frac{l}{2}-2P\frac{3}{2}a=1{,}25\,Pl-3\,aP. \quad . \quad . \quad 64)$$

Rozpiętość, dla której 4 i 5 osi dadzą ten sam największy moment, znajdziemy z równ. $\frac{P}{l}\left(l-\frac{a}{2}\right)^2-Pa=1{,}25\,Pl-3\,aP$,

stąd: $l=4{,}236\,a.$ . . . . 65)

Czasem może zachodzić pytanie, czy szereg wozów, lub wóz motorowy z przyczepnym, wałek parowy czy kolejka wąskotorowa wywołują największe momenty. Najlepiej wykreślić wtedy linje największych momentów dla tych wszystkich układów ciężarów skupionych, a na podstawie takiego rysunku możemy dla każdej rozpiętości od razu powiedzieć, który układ sprawia największy moment i jak wielki jest ten moment.

Jako przykład wykreśliliśmy powyższe linje największych momentów dla parowozów kolei głównych polskich w następny sposób:

a) Jeżeli jedna oś znajduje się na moście, to wedle równ. 55) $M=\frac{20.l}{4}=5\,l.$

Jest to linja prosta Oa, ważna do $l=1{,}707\,a=1{,}707\,.\,1{,}5=$ $=2{,}56\,m.$

Dla tego l jest $M=5\,.\,2{,}56=12{,}8\,tm.$

b) Gdy 2 osie znajdują się na moście, to $a=1{,}5$, $r=0{,}75\,m$, $M=\frac{20}{8\,l}(2\,l-1{,}5)^2=2{,}5\,(2\,l-1{,}5)^2$. Stąd otrzymamy:

dla $l=$	2,56	3	3,34
$M=$	12,73	16,87	20,1.

Hyperbola ta ważna jest do $l=2{,}225\,.\,1{,}5=3{,}34\,m.$

c) Gdy 3 osie znajdują się na moście, to $M=\frac{60\,l}{4}-20\,.\,1{,}5=$ $=15\,l-30.$

dla $l=$	3,34	4	5	5,6
$M=$	20,1	30	45	54

Prosta ta ważna jest do $l=3{,}732\,.\,1{,}5=5{,}60.$

d) Gdy 4 osie znajdują się na moście, to:

$$M=\frac{20}{l}\left(l-\frac{1,5}{2}\right)^2-20.1,5=\frac{20}{l}(l-0,75)^2-30$$

dla $l=$	5,6	6	6,35
$M=$	54	61,9	68,8

Hyperbola ta ważna jest do $l=4,236.1,5=6,35$.

e) Gdy 5 osi znajduje się na moście, to:

$$M=1,25.20.l-3.1,5.20=25\,l-90$$

dla $l=$	6,35	7	8	9	10	12 *m*
$M=$	68,8	85	110	135	160	210 *tm*

Jeżeli ciężary przenoszą się na belki główne pośrednio przez poprzecznice, to chodzi nam tylko o momenty na poprzecznicach. Jeśli poprzecznica jedna jest w środku, co zwłaszcza się zdarza przy większych rozpiętościach dla belek kratowych o parzystej ilości przedziałów, to chodzi tu o największy moment w środku rozpiętości, a wtedy wzory powyższe nieco się zmieniają. Przypuszczamy P równe w równych odstępach.

a) Jeżeli j e d n a o ś stoi w środku mostu, wtedy jak 55) $M=\frac{Pl}{4}$.

b) Jeżeli d w i e o s i e stoją na moście, a jedna w środku, to:

$$O_1=\frac{P}{l}\left[\frac{l}{2}+\left(\frac{l}{2}-a\right)\right]=\frac{P(l-a)}{2},\ \text{a}\ M=O_1\frac{l}{2}=P\frac{l-a}{2}. \quad 66)$$

Rozpiętość, dla której 1 i 2 osie dadzą ten sam moment, otrzymamy z równ. $\frac{Pl}{4}=\frac{P(l-a)}{2}$, a stąd:

$$l=2a. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

c) Jeżeli t r z y o s i e stoją na moście, to otrzymamy jak pierwej wedle równ. 60):

$$M=\frac{3}{4}Pl-Pa=\frac{P}{4}(3\,l-4\,a). \quad \ldots \quad 68)$$

Rozpiętość, dla której 2 i 3 osie dadzą ten sam moment, otrzymamy z równ. $\frac{P(l-a)}{2}=\frac{P}{4}(3\,l-4\,a)$, stąd:

$$l=2\,a. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

Z tego wynika, że od $l-2\,a$ już od razu nie 2, lecz 3 osie sprawiają *najw M.*

d) Jeżeli 4 o s i e stoją na moście, a druga w środku rozpiętości, to $O_1=\frac{4\,P}{l}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)=\frac{2\,P}{l}(l-a)$, $M=O_1\frac{l}{2}-Pa$, więc:

$$M=P(l-a)-Pa=P(l-2\,a). \quad \ldots \quad 70)$$

Rozpiętość, dla której 3 i 4 osie dają ten sam moment, otrzymamy z równ. $\frac{P}{4}(3l-4a)=P(l-2a)$, stąd $l=4a$.

c) Jeżeli 5 osi stoi na moście, a trzecia w środku rozpiętości, otrzymamy wedle 64) $M=1{,}25\,Pl-3\,aP$.

Rozpiętość, dla której 4 i 5 osi dają ten sam moment, otrzymamy z równ. $P(l-2a)=\frac{5}{4}Pl-3aP$, stąd:

$$l=4a. \qquad \qquad 71)$$

Stąd widzimy, że znowu 4 osie nie sprawiają największego momentu, lecz już od $l=4a$ pięć osi.

Przykład. Wyznaczmy linje największych momentów w środku rozpiętości dla tego samego parowozu polskich kolei głównych, a otrzymamy dla jednej, trzech i pięciu osi te same równania, co pierwej, więc:

dla jednej osi $M=5\,l$

„ trzech „ $M=15\,l-30$

„ pięciu „ $M=25\,l-90$.

Na rysunku widzimy trzy linje proste, punkty przecięcia się ich będą $l=2a=3\,m$ i $l=4a=6\,m$ (rys. 50).

Obie linje największych momentów różnią się bardzo mało, krzywe dla 2 i 4 osi nie są styczne do obu sąsiednich prostych.

Mamy *najw M*	wedle 1 założenia	wedle 2 założenia
dla 3 *m*	16,87	15,0 *tm*
6 „	61,9	60 „

To są największe różnice w momentach.

IV. Obciążenie ciągłe.

§. 23. Obciążenie jednostajne zupełne.

W wykładzie statyki budowli mówiliśmy już o obciążeniu ciągłem dowolnem i o obciążeniu jednostajnem zupełnem [1]), podamy więc tu tylko wyniki. Jeżeli g jest ciężarem jednostkowym, to w dowolnym punkcie C (rys. 51) jest siła poprzeczna:

$$Q=\tfrac{1}{2}g(l-2x) \qquad \qquad 72)$$

a moment:

$$M=\tfrac{1}{2}gx(l-x) \qquad \qquad 73)$$

Stąd: $najw\,Q=\tfrac{1}{2}gl$ jest dla $x=0$, a $najw\,M=\tfrac{1}{8}gl^2$ $\qquad$ 74)

dla $x=\frac{l}{2}$. Równanie 72) przedstawia linję prostą $a'b'$, zaś 73) parabolę $a''d''b''$.

---

[1]) P. Podr. Statyki Budowli, III. wyd. str. 22 i nast.