żemy łatwo równocześnie przy konstrukcji wykreślnej zapomocą wieloboku sznurowego. Dla tego więc położenia otrzymamy jako linję momentów w przedziale *cd* prostą $c' d''$. W ten sam sposób wyznaczamy moment dla innego położenia, najniekorzystniejszego dla punktu *d* (jeden ciężar w *d*) i otrzymamy linję momentów w tym wypadku $c'' d$, więc linją największych momentów dla punktów, leżących między *c* i *d* będzie linja łamana $c' f d'$. Często zamiast tej linji bierzemy linję $c' d'$, przez co otrzymujemy momenty nieco za wielkie.

Możliwem jest wprawdzie jeszcze, że gdy inny ciężar jaki stoi na sąsiednich poprzecznicach, co w rysunku uwidoczniliśmy dla przedziału *ec*, otrzymamy linję momentów $e''' c'''$, która dla środkowej części przedziału będzie największością i że wtedy linja *najw M* będzie dwa razy łamaną w tym przedziale, lecz jest to rzadki wypadek, a z powodu, że różnica nie jest wielką, możemy przyjąć jako linję *najw M* linję raz łamaną $e' g c'$, a nawet $e' c'$.

b) Obciążenie jednostajne ciągłe. Z kształtu linji wpływowej wypływa, że największe momenty otrzymamy dla obciążenia zupełnego. Wyznaczamy więc momenty tak, jak dla ciężaru stałego (§. 28).

VI. Belka ciągła przegubowa.

§. 31. Określenie.

Jeżeli belka jest podparta w kilku punktach, nazywamy ją belką ciągłą, wieloprzęsłową (n. *kontinuirlicher Träger*, fr. *poutre continue*, a. *continuous beam*, cz. *nosník spojitý*, r. неразрѣзная балка). Mówiliśmy już o niej pokrótce przy wykładzie statyki budowli [1]), obszerniej zastanowimy się nad nią później [2]). Belka ciągła jest statycznie niewyznaczalną i aby ją obliczyć, musimy się uciec do prawideł sprężystości, co przedstawia wiele niedogodności, jak o tem później będziemy mówić.

Aby uczynić belkę statycznie wyznaczalną, urządzamy przeguby, którymi łączymy pojedyncze części belki w ten sposób, że każda jej część jest tylko w dwu punktach podparta.

---

[1]) Por. Podr. St. Budowli III. wyd. str. 259.

[2]) P. Podr. Teorji Mostów, część I. t. II.

Taką belkę (rys. 69) nazywamy belką ciągłą przegubową (n. *kontinuirlicher Gelenkträger*, a. *hinged continuous girder*, cz. *nosník spojitý kloubový*). Składa się ona z części w dwu punktach podpartych, jak *AE* i *FD*, które nazwiemy częściami wystającemi (n. *überhängender Theil*) i z części wiszących (n. *schwebender Theil*) *EF*, spoczywających na częściach wystających.

§. 32. Obciążenie dowolne.

Części wiszące zachowują się zupełnie tak, jak belki w dwu punktach podparte, a więc oblicza się je według zasad, wyłożonych w poprzednich rozdziałach. W ten sposób możemy wyznaczyć ciśnienia części wiszących na wystające w punktach podparcia *E* i *F*, a znając je możemy wyznaczyć oddziaływania, siły poprzeczne i momenty części wystających według zasad, wyłożonych w statyce budowli dla belek wystających[1]).

Na rysunku 69 wyznaczyliśmy oddziaływania, momenty i siły poprzeczne wykreślnie. Wykreślamy mianowicie wielobok sił, przyjmujemy biegun 0 dowolnie i kreślimy wielobok sznurowy. Ponieważ w *E* i *F* momenty są równe zeru, więc $E'F'$ jest zamykającą w przęśle *BC*, a połączywszy A' z B' i D' z C', otrzymamy kierunki zamykających w przęsłach skrajnych. Poprowadziwszy z *O* równoległe do zamykających, otrzymamy oddziaływania $O_4 = 6M$, $O_3 = ML$, $O_2 = LK$ i $O_1 = KO$, na podstawie których łatwo możemy wyznaczyć siły poprzeczne w znany sposób. Wielobok sznurowy wyznacza nam momenty.

§. 33. Linje wpływowe belki wystającej.

Nim wyznaczymy linje wpływowe belki ciągłej przegubowej, wyznaczamy je najprzód dla belki wystającej.

Rozumie się, że dla punktu *H* (rys. 70) między podporami *AB* linje wpływowe od *A* do *B* są te same, co dla belki zwykłej. Ponieważ równania dla *Q* i *M* (równ. 28, 31 i 32) nie zmieniają się, jeżeli ciężar przekroczy podporę *A* lub *B*, więc linje wpływowe poza podporami będą przedłużeniem linij wpływowych na długości *AB*, przez co powstaje zmiana znaku *Q* i *M*.

---

[1]) P. Podr. Statyki Budowli III. wyd. str. 32.

Dla przekrojów J i K (rys. 71) w częściach wystających powstaje Q i M w ogóle tylko wtedy, gdy siła leży na długości CJ albo KD, dla obciążenia na długości JK jest $M=0$ i $Q=0$.

Jeżeli ciężar P stoi na długości CJ, to w J jest $Q=-P$, $M=-P\xi$. Zróbmy więc $C_1C'_1=Px$ i połączmy C'_1 z J_1, a otrzymamy linję wpływową dla momentu w J. Jeżeli ciężar stoi na długości KD, to w K jest $Q=+P$, $M=+P\xi$, jeżeli ξ oznacza odstęp ciężaru od danego punktu (na prawo licząc ze znakiem dodatnim). Odnośne powierzchnie wpływowe wykreśliliśmy na rysunku 71 kreskowane.

§. 34. Linje wpływowe belki ciągłej przegubowej.

Części wystające belki ciągłej AE i FD (rys. 72) mają takie same linje wpływowe, jak belka wystająca. Jeżeli więc mamy wykreślić linję wpływową siły poprzecznej lub momentu dla punktu J lub K, to na długości AE otrzymamy je według poprzedniego paragrafu. W jaki sposób mamy dalej wykreślić linję wpływową na części wiszącej EF, zaraz zobaczymy.

Jeżeli ciężar P działa w odstępie x od E, to rozkłada się na P' i P''. Dla wszystkich punktów belki AE uwzględnić mamy tylko siłę $P'=P\frac{b-x}{b}$, działającą w E. Jeżeli $x=0$, uwzględnić więc mamy całą siłę P w punkcie E, to otrzymamy według poprzedniego pewną rzędną linji wpływowej $E'E''$. Dla $x=b$ t. j. dla punktu F jest $P'=0$, więc i rzędna linji wpływowej $=0$. Między tymi dwoma punktami linja wpływowa jest prosta, więc $E''F'$.

Rys. 72 b przedstawia linję wpływową dla siły poprzecznej w J, 72 d dla momentu w J, 72 c dla siły poprzecznej części wystającej w K, 72 e dla momentu w K.

Dla części wiszących są linje wpływowe, rozumie się, takie same, jak dla belki zwykłej, a obciążenie części wystających nie wpływa wcale na siłę poprzeczną lub moment tych części.

Na rysunku 73 wyznaczyliśmy na tej samej zasadzie linje wpływowe dla belki ciągłej, w której przeguby są w przęsłach skrajnych.

§. 35. Obciążenie jednostajne zupełne.

1. Przęsło średnie z dwoma przegubami:

a) Część wisząca *EF* (rys. 72) zachowuje się jak belka zwykła, więc gdy $EF=b$, otrzymamy według 71) i 72):

$$\left.\begin{aligned} Q&=\tfrac{1}{2}g(b-2x) \\ M&=\tfrac{1}{2}gx(b-x) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad 93)$$

$$\left.\begin{aligned} najw(+Q)&=\tfrac{1}{2}gb \\ najw\,M&=\tfrac{1}{8}gb^2 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad 94)$$

b) Dla części skrajnych *BE* i *FC* otrzymamy siłę poprzeczną i moment z linij wpływowych, $Q=g.K'K''E''F'=$ $=g(1.KE+\frac{1}{2}.b)$, a ponieważ $KE=-x$, jeżeli x liczymy od punktu *E* na prawo jako dodatnie, na lewo jako ujemne, więc

$$Q=\tfrac{1}{2}g(b-2x), \quad \dots\dots\dots \quad 95)$$

jak dla części wiszącej.

Podobnie otrzymamy z rys. 72 *e*, zważywszy, że $E'E''=x$,

$$M=\tfrac{1}{2}gx(b-x), \quad \dots\dots\dots \quad 96)$$

jak dla części wiszącej.

Z równ. 95) i 96) otrzymamy w punkcie *B* dla $-x=a$:

$$najw(+Q)=\tfrac{1}{2}g(b+2a) \quad \dots\dots \quad 97)$$

$$najw\,M=\tfrac{1}{2}ga(b+a) \quad \dots\dots \quad 98)$$

2. Przęsło skrajne bez przegubu. Z linji wpływowej widzimy, że dla punktu *J* w odstępie x od *A* otrzymamy siłę poprzeczną *Q* jak dla belki w dwu punktach podpartej $\frac{1}{2}g(l-2x)$, a do tego dodać musimy: $-g(B'E''F')=$ $=\frac{1}{2}g(a+b)E'E''=-\frac{1}{2}g\frac{a(a+b)}{l}$.

Zatem $$Q=\tfrac{1}{2}g(l-2x)-\tfrac{1}{2}g\,\frac{a(a+b)}{l}. \quad \dots \quad 99)$$

Podobnie jest dla momentu $B'E''F$ (rys. 72 *d*)

$$=\tfrac{1}{2}g\,\frac{a(a+b)}{l}\,x,$$

więc $$M=\tfrac{1}{2}gx(l-x)-\tfrac{1}{2}g\,\frac{a(a+b)x}{l}. \quad \dots \quad 100)$$

Siły poprzeczne i momenty dla ciężaru jednostajnego zupełnego są na podstawie równań 94) do 100) przedstawione na rys. 74. Linja momentów musi przechodzić przez przeguby.

3. Przęsło skrajne z przegubem. Tu dadzą się zastosować wprost wzory 93) do 96) dla przęsła średniego z dwoma przegubami, jeśli przyjmiemy, że jedna z długości *EB* lub $CF=0$.

4. Przęsło średnie bez przegubu (rys. 73). W przegubach E i F działają wtedy siły $\frac{1}{2}gb$ i $\frac{1}{2}gb_1$. Ustawmy teraz równanie momentów ze względu na punkt C, a otrzymamy:

$$O_2 l - \tfrac{1}{2}gb(a+l) - \tfrac{1}{2}g(a+l)^2 + \tfrac{1}{2}a_1^2 g + \tfrac{1}{2}gb_1 a_1 = 0,$$

a stąd oddziaływanie w B

$$O_2 = \frac{g}{2l}[(a+l)(a+b+l) - a_1(a_1+b_1)].$$

Dla przekroju H w odstępie x od B jest:

$$Q = O_2 - \tfrac{1}{2}gb - g(a+x),$$

a po wstawieniu wartości za O_2:

$$\mathbf{Q = \frac{g}{2l}[l(l-2x) + a(a+b) - a_1(a_1+b)]} \quad . \quad . \quad 101)$$

Moment w punkcie H będzie $M = O_2 x - \frac{1}{2}gb(x+a) + - \frac{1}{2}g(a+x)^2$,

$$\mathbf{M = \frac{g}{2l}[lx(l-x) - a(a+b)(l-x) - a_1(a_1+b_1)x]} \quad . \quad . \quad 102)$$

Jeżeli $a = a_1$ i $b = b_1$, to

$$Q = \frac{g}{2}(l-2x), \text{ a } M = \frac{g}{2}[x(l-x) - a(a+b)]. \quad . \quad . \quad 103)$$

§. 36. Największe siły poprzeczne.

1. Przęsło średnie z dwoma przegubami. Tu wyznaczymy tylko największe siły poprzeczne dla części wystających, bo części wiszące zachowują się zupełnie tak, jak belki w dwu punktach podparte.

Dla punktu K w odstępie x od B linja wpływowa wykreślona jest na rys. 72 c. Dla $najw(+Q)$ ma być obciążona długość KF, przyczem otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} &najw\,(+\mathbf{Q}) = p\,K'K''E''F' = \mathbf{p\,(a - x + \tfrac{1}{2}b)} \\ &najw\,(-\mathbf{Q}) = \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 104)$$

Jest to równanie linji prostej stycznej do linji największych sił poprzecznych w części wiszącej.

Dla części FC można zastosować te same wzory, zmieniwszy tylko znak.

Przy obciążeniu ciężarami skupionymi należy obciążyć dla $najw(+Q)$ długość KF, największe ciężary umieścić na długości KE i jeden ciężar postawić na K.

2. Przęsło skrajne bez przegubu. Dla $najw(-Q)$ musi być obciążona lewa część odnośnego przęsła i przęsło sąsiednie do drugiego przegubu (rys. 72 b).

Dla obciążenia długości AJ w przęśle AB będzie, jak dla belki zwykłej $najw\,(-Q) = -\frac{px^2}{2l}$, dla obciążenia długości BF $Q = -\frac{p}{2} E'E''(a+b)$. Z rysunku widzimy, że $E'E'' : 1 = a : l$, więc $E'E'' = \frac{a}{l}$. Wstawiwszy to, otrzymamy dla obciążenia długości AJ i BF

$$najw\,(-Q) = -\frac{px^2}{2l} - \frac{pa}{2l}(a+b) = -\frac{p}{2l}[x^2 + a(a+b)] \quad 105)$$

Dla $najw\,(+Q)$ ma być obciążona długość JB, więc jak dla belki zwykłej $najw\,(+Q) = +\frac{p(l-x)^2}{2l}$. . . . . 106)

Oba równania przedstawiają parabole. W A $najw\,(-Q) = -\frac{pa(a+b)}{2l}$, a nie jest zerem, jak dla belki zwykłej. W B $najw\,Q = 0$.

Przy obciążeniu ciężarami skupionymi należy dla największości obciążyć prawą stronę przęsła, jak dla belki zwykłej: dla $najw\,(-Q)$ należy obciążyć lewą część przęsła i długość BF. Dla mostów drogowych należy więc przyjąć dwa oddzielne układy ciężarów skupionych, jak to przewidują przepisy ministerjalne polskie, pierwszy ciężar jednego układu postawić na J, drugiego zaś jeden z ciężarów na E wedle §. 17 i 19. Przy mostach kolejowych jest to niemożliwem, należałoby więc przyjąć takie obciążenie mostu, aby na długości AJ znajdowały się parowozy, przyczem na J stoi jedno koło, na długości JB wozy próżne, a na BF parowóz lub wozy ładowane.

3. Przęsło skrajne z przegubem. Tu da się zastosować wzór 104) dla przęsła średniego z dwoma przegubami. Widzimy bowiem na rys. 73, że linja wpływowa jest taka, sama, jak w powyższym wypadku.

4. Przęsło średnie bez przegubu (rys. 73 b). Dla $najw\,(+Q)$ ma być obciążona prawa część przęsła odnośnego i sąsiednie lewe przęsło, dla $najw\,(-Q)$ przeciwnie część lewa odnośnego przęsła i sąsiednie prawe przęsło.

Przy obciążeniu długości HC danego przęsła powstaje siła poprzeczna, jak przy belce zwykłej, $Q_1 = \frac{p(l-x)^2}{2l}$, przy obciążeniu przęsła AB $Q_2 = p \cdot \frac{1}{2}(a+b)E'E'' = \frac{p(a+b)a}{2l}$, więc:

$$najw\,(+Q) = Q_1 + Q_2 = \frac{p}{2l}[(l-x)^2 + a(a+b)]. \quad . \ 107)$$

Podobnie otrzymamy:

$$najw\,(-Q) = -\frac{p}{2l}[x^2 + a_1(a_1 + b_1)] \quad . \quad . \quad . \quad 108)$$

Oba równania przedstawiają parabole, niedotykające osi, bo dla $x = l$ $najw\,Q = \frac{pa(a+b)}{2l}$, dla $x = 0$ $najw\,(Q) = -\frac{pa_1(a_1+b_1)}{2l}$.

Co do obciążenia układem ciężarów skupionych zastosować możemy i tutaj uwagi, wypowiedziane pod 2.

Na rys. 75 i 76 oznaczyliśmy wedle powyższego *najw* $(+Q)$ i *najw* $(-Q)$.

W części wiszącej są, rozumie się, linje *najw* sił poprzecznych te same, co dla belki zwykłej.

W częściach wystających przęsła średniego z dwoma przegubami są te linje proste. To samo da się powiedzieć o części wystającej przęsła skrajnego (rys. 76). Linje te proste są stycznemi do linij *najw* Q w przegubach.

§. 37. Największe momenty.

1. Przęsło średnie z dwoma przegubami. Tutaj także wyznaczymy tylko największe momenty dla części wystających, bo części wiszące zachowują się zupełnie tak, jak belki w dwu punktach podparte. Dla punktu K mamy wykreśloną linję wpływową $K'E''F'$ (rys. 72 *e*), z której widzimy, że dla *najw* $(-M)$ mamy obciążyć długość $K'F'$, a obciążenie reszty belki jest obojętne. Możemy więc także przyjąć obciążenie zupełne belki, dla którego już w §. 35. wyznaczyliśmy moment. Zmienimy tylko g na p w równ. 98) i otrzymamy:

$$najw\,(-M) = \tfrac{1}{2}\,bx\,(p - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 109)$$

przyczem x należy liczyć od punktu E na prawo, jako dodatnie, na lewo jako ujemne. Z równ. 109) widzimy, że *najw* M przedstawia wykreślnie przedłużenie paraboli EGF (rys. 75) dla części wiszącej.

Dla układu ciężarów skupionych obciążyć należy długość KF (rys. 72), jak dla momentów belki zwykłej w ten sposób aby ciężar jednostkowy na KE i EF był, ile możności, równy, a jeden ciężar stał na E. Obciążenie reszty belki jest obojętne.

Wyznaczyć momenty wykreślnie możemy zapomocą wieloboku sznurowego, jak dla belki zwykłej (§. 20), uwzględniwszy tę okoliczność, że moment w przegubie jest równy zeru, że więc linja zamykająca musi przecinać wielobok sznurowy w tem miejscu.

2. Przęsło skrajne bez przegubu. Linja wpływowa momentów wykreślona jest na rys. 72 *d*. Z rysunku widzimy, że dla *najw* $(+M)$ ma być obciążone całe dane przęsło, na którem linja wpływowa $A' J'' B'$ ma kształt taki sam, jak dla belki zwykłej, następne zaś przęsło do F ma być nieobciążone. Otrzymamy więc moment taki sam, jak dla belki zwykłej

$$najw\,(+M) = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{p}\mathbf{x}\,(\mathbf{l}-\mathbf{x}) \quad \ldots\ldots \quad 110)$$

Jest to równanie paraboli AHB (rys. 75).

Dla *najw* $(-M)$ nie powinno być obciążone przęsło skrajne AB, przęsło następne ma być obciążone do F, a obciążenie reszty belki jest obojętnem. Widzimy więc, że obciążenie dla *najw* $(-M)$ uzupełnia obciążenie dla *najw* $(+M)$ do obciążenia zupełnego.

A zatem *najw* $(+M) = M_x -$ *najw* $(+M)$, więc

$$najw\,(-M) = \tfrac{1}{2}\,px\,(l-x) - \tfrac{1}{2}\,p\,\frac{a\,(a+b)\,x}{l} - \tfrac{1}{2}\,px\,(l-x), \text{ zatem}$$

$$najw\,(-\mathbf{M}) = -\tfrac{1}{2}\,\mathbf{p}\,\frac{\mathbf{a}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,\mathbf{x}}{\mathbf{l}} \quad \ldots\ldots \quad 111)$$

Jest to równanie linji prostej AB' (rys. 75).

Dla układu ciężarów skupionych wynika obciążenie najniekorzystniejsze z kształtu linij wpływowych, zastosować więc tu należy prawidła, wyłożone przy momentach belki zwykłej.

3. Przęsło skrajne z przegubem. Tu zastosować się da wzór 109), jeśli tylko zmienimy b na l, więc:

$$najw\,(+\mathbf{M}) = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{p}\mathbf{x}\,(\mathbf{l}-\mathbf{x}) \quad \ldots\ldots \quad 112)$$

4. Przęsło średnie bez przegubu. Linje wpływowe momentów wykreślone są na rys. 73 *d*. Wynika z nich, że dla *najw* $(+M)$ ma być dane przęsło całe obciążone, a sąsiednie przęsła nie. Ponieważ jednak linja wpływowa w danem przęśle BC jest taką samą, jak dla belki zwykłej, więc i *najw* $(+M)$ da się tym samym wzorem wyrazić. Zatem:

$$najw\,(+\mathbf{M}) = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{p}\mathbf{x}\,(\mathbf{l}-\mathbf{x}) \quad \ldots\ldots \quad 113)$$

Najw $(-M)$ wyznaczamy, jak pod 2), mianowicie:

najw $(-M) = M_x -$ *najw* $(+M)$, więc według równ. 102)

$$najw\,(-M) = \frac{p}{2\,l}\,[lx\,(l-x) - a\,(a+b)\,(l-x) - a_1\,(a_1+b_1)\,x] +$$
$$- \tfrac{1}{2}\,px\,(l-x),$$

$$najw\,(-M) = -\frac{p}{2\,l}\,[a\,(a+b)\,(l-x) + a_1\,(a_1+b_1)\,x]. \quad 114)$$

Jeżeli $a = a_1$, $b = b_1$ to:

$$najw\,(-M) = -\frac{p}{2}\,a\,(a+b)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 115)$$

Jest to równanie linji prostej poziomej $B'C'$ (rys. 76).

Dla układu ciężarów skupionych wynika obciążenie najniekorzystniejsze z kształtu linij wpływowych. Dla *najw* $(-M)$ muszą być dwa układy ciężarów skupionych dla mostów drogowych, dla kolejowych zaś należy pociąg w ten sposób przyjąć, jak to wyłożyliśmy w §. 36 ust. 2.

Na rys. 75 i 76 dodaliśmy siły poprzeczne i momenty, wywołane ciężarem własnym i ruchomym i otrzymaliśmy linje *najw* Q i *najw* M dla obciążenia równoczesnego obu ciężarami.

C. Belka kratowa równoległa.

VII. Belka o kracie pojedyńczej.

§. 38. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Belkę kratową poznaliśmy już w wykładzie statyki budowli [1]; poznaliśmy tam rozmaite jej rodzaje i części składowe. Tu podamy dalsze rozwinięcie zasad tamże podanych, a najprzód zastanawiać się będziemy nad belką kratową równoległą o kracie pojedyńczej. Przetnijmy daną belkę, której część widzimy na rys. 77, płaszczyzną II i odejmijmy prawą część belki. Aby lewa część pozostała w równowadze, musimy w przeciętych przekrojach zaczepić takie siły, jakie w nich pierwej działały. Ponieważ przypuszczamy, że siły zewnętrzne działają tylko w węzłach, a krzyżulce są połączone przegibnie, więc siły wewnętrzne działają w kierunku osi przeciętych prętów.

Nazwijmy S_1 i S_2 siły wewnętrzne, działające w pasach belki równoległej, D siłę, działającą w krzyżulcu CE, h wysokość belki, Q siłę poprzeczną czyli wypadkową wszystkich sił, działającą na lewą część belki, to na lewą część belki działają cztery siły: S_1, D, S_2 i Q. Cztery te siły muszą być w równowadze, więc ze względu na punkt E suma momentów wszystkich sił musi być równą zeru. Zatem $M_1 + S_1 h = 0$, jeżeli $M_1 = Qz$ jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt E. Stąd otrzymamy:

---

[1]) P. Podr. Statyki Budowli III. wyd., str. 371 i nast.