

wewnętrzna w przecie AC będzie w jednym układzie $\frac{M_1}{nh}$, w drugim $\frac{M_2}{nh}$ i t. d., gdy M_1 i $M_2 \dots$ oznaczają momenty dla poszczególnych układów, a więc ze względu na punkt F , C i D . Cała siła wewnętrzna w AB będzie:

$$S = \frac{1}{nh} (M_1 + M_2 + M_3 + \dots M_n).$$

Jeżeli $M = \frac{1}{n} (M_1 + M_2 + \dots M_n)$ jest średnią arytmetyczną momentów $M_1, M_2 \dots M_n$, to $S = \frac{M}{h}$ 127)

Zamiast tworzyć średnią arytmetyczną poszczególnych momentów, możemy też przyjąć, że M jest momentem ze względu na punkt średni między F i D . Punkt ten średni C otrzymamy, jeżeli środek części pasu AB połączymy z wierzchołkiem H trójkąta, jaki tworzą sąsiednie krzyżulce i tę prostą przedłużymy aż do drugiego pasu do punktu C .

§. 46. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w krzyżulcach.

Zadaniem naszym będzie najpierw wyznaczyć linię wpływową dla danego krzyżulca BC (rys. 85). Wykreślmy najprzód linię wpływową dla BC tak, jak gdyby krata była pojedyncza. Jeżeli pomost jest na pasie górnym, to otrzymamy linię $ab' e' d$. Jeżeli ciężar $P=1$ stoi w punkcie B , to cały ten ciężar działa na układ pełnemi linjami wyciągnięty, więc siła wewnętrzna w BC będzie bb' .

Jeżeli ciężar porusza się na prawo i przyjdzie do sąsiedniego węzła F , to cały ciężar przenosi się na drugi układ, a dla krzyżulca BC , należącego do układu wyciągniętego pełnemi linjami, siła wewnętrzna równa jest zeru. Gdy ciężar $P=1$ znajduje się między B i F , to działa on pośrednio przez poprzecznicę, więc według §. 29 otrzymamy linię wpływową, gdy połączymy b' z f . Tak samo postępujemy z drugiej strony punktu B i otrzymamy linię wpływową gb' . To samo powtarzamy we wszystkich obciążonych węzłach danego układu E , L , I i K i otrzymujemy jako linie wpływowe same trójkąty.

Jeżeli krata jest dwukrotną, to te trójkąty schodzą się i otrzymujemy w węzłach drugiego układu punkty obojętne. Jeżeli zaś krata jest co najmniej trzykrotną, to otrzymamy

długości, w których, jeżeli ciężar stoi, nie sprawia żadnej siły poprzecznej w danym krzyżulcu. Długość taką nazywamy długością obojętną (n. *neutrale Strecke*), taką jest np. długość FH . Dla największości siły wewnętrznej w BC należy więc obciążyć prawą część belki aż do punktu H , części lewej AF nie obciążać, a obciążenie długości FH jest obojętnem.

Załóżmy, że belka jest obciążona ciężarem jednostajnym ciągłym i badajmy tylko wpływ obciążenia na długości LI , to otrzymamy P , siłę wewnętrzną w BC , według sposobu przybliżonego (§. 45), gdy $a = ne_1$, $P = \frac{p}{n} a \frac{ll' + ii'}{2} = \frac{pe_1}{2} (ll' + ii')$, zaś według sposobu dokładnego jest $P = (ll' \frac{1}{2} e_1 + ii' \frac{1}{2} e_1) p = = \frac{p}{2} e_1 \times (ll' + ii')$, jak poprzednio.

Widzimy więc, że dla ciężaru jednostajnie ciągłego według sposobu przybliżonego otrzymujemy te same wyniki, co według sposobu dokładnego. Tylko przy końcu belki, gdzie nie zawsze $a = ne_1$, sposób przybliżony staje się nieco niedokładnym. Zważywszy jednak, że przy podporach rzędne linji wpływowej są bardzo małe, zrozumiemy, że różnica między sposobem dokładnym a przybliżonym jest bardzo małą.

Dla kraty podwójnej widzimy z rys. 86, że powierzchnia kreskowana jest dokładnie połową powierzchni bee_1 . Tu więc należałoby przy obliczeniu uwzględnić Q dla E , końca krzyżulca, który leży na pasie innym, niż pomost.

W przybliżeniu możemy tę samą regułę stosować i do kraty trzy i więcejkrotnej.

Inaczej rzecz się ma przy obciążeniu układem ciężarów skupionych. Tu musimy obliczać siły wewnętrzne na podstawie linji wpływowych, gdyż różnice między obu sposobami są znaczne. Przypuśćmy np., że belka jest obciążona układem ciężarów w odstępach $= a$, to gdy pierwszy ciężar postawimy na E , drugi wpadnie na L , trzeci na I itd. i P będzie takim, jak dla kraty pojedynczej, podczas gdy według sposobu przybliżonego mamy $\frac{P}{n}$. Z drugiej strony możliwem jest, że gdy ciężar postawimy na E , inne ciężary wpadną na długości obojętne i P może być mniejszem, niż według sposobu przybliżonego.

Dla *najw* P musimy obciążyć prawą stronę belki, a nie obciążać lewej strony, największe ciężary mają stać w pobliżu

prawej poprzecznicy E , jeden z ciężarów ma stać na E . Przy mostach kolejowych trzeba zwykle drugie lub trzecie koło parowozu postawić na E .

Wielkość siły P wyznaczmy najlepiej wykreślnie za pomocą linii wpływowych, rachunkiem zaś w ten sposób, że dla najniekorzystniejszego położenia obliczymy ciężary węzłowe i uwzględnimy tylko należące do danego układu.

§. 47. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Cheąc wyznaczyć linie wpływowe dla siły wewnętrznej S w części pasu ab (rys. 87), wykreślimy najprzód parabolę, na której leżą wierzchołki trójkątów linii wpływowych dla kraty pojedynczej.

Część pasu ab leży w czterech układach. Wykreślimy najprzód linię wpływową dla układu oznaczonego linjami pełnymi, $ac'b$. Ponieważ na ten układ działają tylko ciężary, zaczepiające w węzłach tego układu, a więc otrzymamy podobnie, jak w poprzednim paragrafie, trójkąty, których wierzchołki leżą na liniach ac' i $c'b$.

To samo robimy ze wszystkimi innymi układami i w ten sposób dostaniemy szereg trójkątów, które się po części nakrywają. Łatwo jednak dostrzeżemy, że dwa takie trójkąty $gtm + mog = gmot$, że zatem, aby otrzymać sumę powierzchni wszystkich trójkątów, potrzebujemy tylko połączyć kolejno wierzchołki wszystkich trójkątów. W ten sposób otrzymamy jako linię wpływową wcale nieregularny wielobok zupełnie odmienny od linii wpływowej do kraty pojedynczej. Z linii wpływowej wynika, że dla *najw* S musi być cała belka obciążoną, dla układu ciężarów skupionych największe ciężary mają być w pobliżu danej części pasu, a jeden ciężar musi być na jednej z poprzecznic, gdzie rzędne linii wpływowej są największe.

Licząc w przybliżeniu wedle §. 45, otrzymalibyśmy linię wpływową $am'b$. Powierzchnia wpływowa przybliżona jest prawie równa powierzchni wpływowej dokładnej, a zatem i tutaj dla ciężaru jednostajnie rozłożonego, otrzymamy w przybliżony sposób wyniki dość zgodne ze sposobem dokładnym.

Ale doświadczenia, w których mierzyłem wprost naprężę-

nie prętów¹⁾ okazały, że w rzeczywistości linja wpływowa zajmuje pośrednie miejsce między dokładną a przybliżoną i zbliża się raczej do przybliżonej. Powodem tego jest ciągłość pasów, która sprawia, że ciężar, zaczepiający w węźle danego układu, przenosi się w części także i na inne układy.

Engesser dochodzi teoretycznie do tych samych wyników dla belek większych, o rozpiętości większej niż 30 m, gdy przy mniejszych rozpiętościach układy, wprost obciążone, stosunkowo większą część obciążenia przyjmują. W praktyce jednak dla małych rozpiętości nie będziemy stosować kraty wielokrotnej, a dla większych należałoby obliczać takie belki raczej sposobem przybliżonym.

Liczebne wyznaczenie *najw* S wedle metody dokładnej jest bardzo mozolnem. Najlepiej wyznaczyć, jak w poprzednim paragrafie ciężary węzłowe dla kilku położań, które się nam wydają najniekorzystniejsze, gdy ciężar jest na jednej z poprzecznic, dla których rzędne są największe. Obliczamy teraz dla tego położenia S dla każdego układu z osobna i dodajemy wyniki.

Wykreślnie możemy wyznaczyć siły wewnętrzne na trzy sposoby:

1. Nie rozkładając na pojedyncze układy, wyznaczamy siły poprzeczne i momenty tak, jak dla kraty pojedynczej. Siłę poprzeczną wyznaczamy ze względu na przekrój przez koniec danego krzyżulca, który leży na innym pasie, niż pomost, a moment ze względu na punkt, który otrzymamy, jeżeli środek części pasu AB (rys. 87) połączymy z wierzchołkiem trójkąta, jaki tworzą sąsiednie krzyżulce i tę prostą przedłużymy aż do drugiego pasu. Dla krzyżulców dzielimy wyniki przez n . Metoda ta, odpowiadająca metodzie analitycznej, opisanej w §. 45, jest dostatecznie dokładną, zwłaszcza dla obciążenia ciągłego.

2. Rozkładamy na pojedyncze układy i przypuszczamy, że cały ciężar działa na jeden układ. Dla tego układu wyznaczamy siły poprzeczne i momenty, następnie dla wszystkich innych. Q dzielimy przez n , a za M bierzemy średnią arytmetyczną momentów dla pojedynczych układów. Według tego sposobu możemy w przybliżeniu obliczać siły wskutek ciężaru własnego i ciężarów skupionych.

¹⁾ Por. autora: Spannungen in den Gitterträger mit mehrtheiligem Gitterwerke Zeit. d. öster. Ing. u. Arch. Vereines 1895, Nr. 43.

3. Zapomocą linii wpływowych wyznaczamy siły wewnętrzne w pasach i krzyżulcach, co mogłoby być stosownem chyba dla układu ciężarów skupionych.

Ze względu na doświadczenia, powyżej omawiane, obliczamy w praktyce wedle sposobu pierwszego.

§. 48. Krzyżulce gibkie.

Dla kraty prostokątnej urządzamy czasem tegie słupy, pracujące na ciśnienie, gibkie zaś przekątnie (n. *schlaffe Diagonalen*) z żelaza płaskiego. Rozumie się, że nie mogą one wtedy pracować na ciśnienie; w tej części belki więc, w której siła poprzeczna może być dodatnią i ujemną, urządzamy dwa rzędy przekątni, jeden spadający na prawo, drugi na lewo. Otóż w takim razie w jednym przedziale jedna przekątnia pracowałaby powinna na ciągnięcie, druga na ciśnienie, ale z powodu, że jest gibka, przekątnia ciśniona wygina się i nie działa wcale.

Kratę o podwójnych gibkich przekątniach obliczamy więc zwykle tak, jak gdyby istniały tylko przekątnie ciągnięte. Właściwie jednak i gibkie przekątnie mogą pracować na małe ciśnienie, które łatwo obliczyć, znając wielkość i kształt przekroju: siłę działającą w przekątniach ciągniętych, należałoby więc zmniejszyć o siłę potrzebną do wygięcia przekątni ciśnionych. Siła ta jednak jest zwykle tak mała, że jej nie uwzględniamy.

Przekątnie podwójne urządzamy tylko o tyle, o ile siła poprzeczna zmienia swój znak, a więc na długości wychylenia się przekroju środkowego (§. 26).

§. 49. Przykład. Obliczenie belki głównej mostu drogowego o kracie dwukrotnej prostokątnej.

Rozpiętość teoretyczna wynosi 30 m (tabl. II.), pomost drogi II. klasy 5 m szeroki leży u góry. Przyjmujemy wysokość belki $h = \frac{l}{8} = 3,75$ m, a odstęp węzłów $30:14 = 2,14$ m. Ciężar własny przyjmujemy według równ. 3) na m^2 pomostu $g = 215 + 2,3l + 0,02l^2 = 302$ kg, więc na mb 5.302, a na jedną belkę $g = \frac{5}{2} \cdot 302 = 755$ kg = 0,76 t. Jeżeli z tego przypada na ciężar pomostu 192 kg/m², co obliczymy dokładnie, projektując pomost, to na jedną belkę $g = \frac{5}{2} \cdot 192 = 480$ kg = 0,48 t, a więc ciężar samej belki 0,76 - 0,48 = 0,26 t/m, z czego połowa 0,13 t/m działa na pas górny, połowa na pas dolny,

a zatem $g_1 = 0,61 \text{ t/m}$, $g_2 = 0,13 \text{ t/m}$. Jako ciężar ruchomy przyjmujemy obciążenie wozami, przepisane rozporządzeniem minist. polskiem dla dróg II. klasy (rys. 3), przyczem na szerokość mostu, przyjmujemy dwa wozy, więc na jedną belkę przypada ciężar jednego szeregu wozów. W praktyce musielibyśmy jeszcze wyznaczyć siły wewnętrzne dla obciążenia wałkiem i kolejką wąskotorową. W tym przykładzie ograniczymy się jednakże tylko do uwzględnienia obciążenia szeregiem wozów. Naprężenie dopuszczalne przyjmujemy także wedle tego rozporządzenia $\tau = 800 + 3.30 = 890 \text{ kg/cm}^2$.

1. Wyznaczenie rachunkowe.

a) Krzyżulce. Ciężar węzłowy dla mostu nieobciążonego wynosi dla pasu górnego $G_1 = 2,14.0,61 = 1,31 \text{ t}$, dla pasu dolnego $G_2 = 2,14.0,13 = 0,28 \text{ t}$, w węzłach skrajnych o połowę mniej $G_1' = 0,65$, $G_2' = 0,14 \text{ t}$. Dla ciężaru ruchomego *najw* Q będzie tu zawsze, gdy I koło stoi na prawej poprzecznicy.

Tabl. XVIII.

Krzy- żulce	Siła poprzeczna w t				Siła wewnętrzna w t		Przekrój teoretyczny w cm^2		siecz α			
	wskutek ciężaru wła- stnego	wskutek ciężaru ruchomego		s u m a		najo	najmn	najo		najmn	dla $\sigma=890$ kg/cm^2	wedle Way- raucha
		najo + Q	najmn Q	najo	najmn							
0 1	10,34	20,91	-0,50	31,25	9,84	18,0	5,8	20,2	19,4	1,15		
0 2	8,75	18,68	-1,01	27,43	7,74	20,8	6,0	23,4	22,7	1,52		
I 3	7,16	16,42	-1,81	23,58	5,35	18,0	4,2	20,2	20,1	1,52		
II 4	5,57	14,17	-3,63	19,74	1,94	15,0	1,2	17,0	18,0	1,52		
III 5	3,98	11,92	-4,82	15,90	-0,84	12,2	- 0,4	13,8	15,5	1,52		
IV 6	2,39	9,67	-5,83	12,06	-3,44	9,2	- 2,6	10,3	13,4	1,52		
V 7	0,80	9,10	-9,10	9,90	-8,80	7,6	- 6,4	8,6	16,4	1,52		
VI 7	0,80	9,10	-9,10	9,90	-8,80	5,8	- 4,8	6,5	9,9	1,15		
A 0	10,99	20,91	-0,50	31,90	10,49	-31,9	-10,5	35,8	34,2	1,0		
1 I	10,06	20,91	-0,50	30,97	9,56	-15,5	- 4,8	17,4	16,8	1,0		
2 II	8,47	18,68	-1,01	27,15	7,46	-13,6	- 3,8	15,3	14,9	1,0		
3 III	6,88	16,42	-1,81	23,80	5,07	-11,6	- 2,6	13,0	13,0	1,0		
4 IV	5,29	14,17	-3,63	10,46	1,66	- 9,7	- 0,4	10,9	11,9	1,0		
5 V	3,70	11,92	-4,82	15,62	-0,62	- 7,8	0,4	8,8	10,0	1,0		
6 VI	2,11	9,67	-5,83	11,78	-3,72	- 5,9	1,8	6,6	8,8	1,0		
7 VII	—	—	—	—	—	- 4,1	- 0,6	4,6	4,8	1,0		

Dla ciężaru własnego oddziaływania $O_A = O_B = 0,65 + 0,15 + \frac{1}{2}(1,31 + 0,28) = 1,13$. Przez odciąganie ciężarów węzłowych otrzymamy Q , przyczem dla każdego krzyżulca przyjmujemy Q dla dolnego końca jego. Dla *najw* Q dla 01 stawiamy ostatnie koło, 7 t wazące, na 1 i otrzymamy *najw* $Q = O_1 = \frac{1}{8}(3.7.21,06 + 3.3.5.17,66 = 20,91$. Obliczymy w ten sposób wszystkie *najw* Q i *najmn* Q . Aby otrzymać siły trzeba pomnożyć je przez $\frac{1}{2}$ siecz α . Dla 01 jest siecz $\alpha = \frac{\sqrt{3,75^2 + 2,14^2}}{3,75} = 1,15$, dla 02 siecz $\alpha = \frac{\sqrt{3,75^2 + 4,28^2}}{3,75} = 1,52$. Otrzymamy więc w 01

$$\text{najw } D = \frac{31,25 \cdot 1,15}{2} = 18,0 \text{ t, w } 02 \text{ najw } D = \frac{18,09 \cdot 1,52}{2} = 13,8 \text{ itd.}$$

Siła w VII 7 jest równa ciężarowi węzłowemu: dla ciężaru własnego $P_g = 0,61 \text{ t}$, dla ciężaru ruchomego $P_r = 3,5 \text{ t}$, więc $P_q = 4,11 \text{ t}$.

Przekrój teoretyczny wyznaczamy dla $\sigma = 890 \text{ kg/cm}^2$ i wedle Weyraucha dla $\sigma = 850 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\text{najw } Q}{\text{najw } P}\right)$. Większy przekrój zatrzymujemy. Wyniki zestawiliśmy w tabl. XVIII.

b) Narożniki. Siła, powstająca w A 0 z powodu ciężaru własnego jest $= \frac{1}{2} [13(1,31 + 0,28) + 2,066] = 10,99 \text{ t}$. Z powodu ciężaru ruchomego jest największa siła poprzeczna, gdy tylne koło wozu ustawimy na podporze. Wtedy otrzymamy $O_1 = \frac{1}{30} (2,1 \cdot 23,2 + + 3,3 \cdot 5,1 \cdot 98 = 11,34 \text{ t}$. A więc $V = 10,99 + 11,34 = 22,33 \text{ t}$.

c) Pasy. Dla ciężaru własnego otrzymamy dla m -go węzła górnego lub dolnego układu I-go $M = \frac{1}{2} (1,31 + 0,28) m \cdot 2,14 + - \frac{m-1}{2} 2,14(1,31 + 0,28) = m \cdot 1,07 \cdot 1,59 [13 - (m-1)] = 1,701 m (14 - m)$.

Wstawiając za m wartości od 1 do 7, otrzymamy wartości M_g , uwidocznione w tabl. XIX. Dla ciężaru ruchomego ustawiamy wóz w najniekorzystniejszym położeniu i obliczamy momenty. N. p. dla punktu 7 stawiamy trzeci ciężar 7 t na punkcie 7 i otrzymamy $O_1 = \frac{1}{30} (21,15 + 10,5 \cdot 18,4) \cdot 15 - 14,3,4 - 7 \cdot 6,8 = 158,9 \text{ t}$. Momenty te zestawiamy w tabliczce poniższej. Ponieważ krata jest podwójna,

Tabl. XIX.

Węzeł	Moment w <i>tm</i>			Część pasu	Moment		Siła w pa-sie <i>t</i>	Prze-kroj teore-tyczny <i>cm</i> ²
	z powodu		suma		ze wzglę-du na	<i>tm</i>		
	ciężaru własne-go	ciężaru ruchomego						
0	0	0	0	0 I	1½	93,1	24,8	27,9
I	22,4	44,8	67,2	I II	2½	142,1	38,0	42,7
II	40,8	78,2	119,0	II III	3½	178,6	47,5	53,4
III	56,1	109,0	165,1	III IV	4½	201,6	53,8	60,5
IV	68,0	124,0	192,0	IV V	5½	222,1	59,0	66,8
V	76,5	134,6	211,1	V VI	6½	233,7	62,1	69,8
VI	81,6	151,5	233,1	VI VII	7½	242,3	64,6	72,6
VII	83,4	158,9	242,3	A 1	0	0	0	0
A	0	0	0	1 2	1½	93,6	9,0	10,1
1	22,1	44,8	67,2	2 3	1½	93,1	24,8	27,9
2	40,8	78,2	119,0	3 4	2½	142,1	38,0	42,7
3	56,1	109,0	165,1	4 5	3½	178,6	47,5	53,4
4	68,0	129,0	192,0	5 6	4½	201,6	53,8	60,5
5	76,5	131,6	211,7	6 7	5½	222,1	59,0	66,8
6	81,6	151,5	233,1					
7	83,4	158,9	242,3					

więc dla każdej części pasu bierzemy średnią arytmetyczną dwu momentów; i tak dla IV V $M = \frac{M_5 + M_6}{2} = \frac{211,1 + 233,1}{2} = 222,1 \text{ tm}$.

Dla VI VII bierzemy dla obu układów moment w 7, więc $M=242,3 \text{ tm}$. Siła w pasie $S=\frac{M}{h}=\frac{M}{3,75}$. Więc dla IV 5 $S=\frac{222,1}{3,75}=59,0 \text{ t}$. Przekrój teoretyczny obliczamy wedle $F=\frac{S}{\tau}=\frac{S}{890}$.

2. Sposób wykreslny.

a) Krata. Na rys. 2 tabl. II. wyznaczyliśmy siły poprzeczne dla ciężaru własnego i ruchomego zapomocą wieloboku oddziaływań z uwzględnieniem poprzecznic. Dodaliśmy je i wykreslili równoległe do krzyżulców. Używaliśmy przytem dla długości podziałki I $\frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ m}}$, a dla sił podziałki II $\frac{1 \text{ cm}}{5 \text{ t}}$.

Długości w ten sposób otrzymane, odczytane na podziałce III $\frac{1 \text{ cm}}{2,5 \text{ t}}$ dają siły wewnętrzne D , a na podziałce IV przekroje teoretyczne, dla stałego napr. dopuszcz. 890 kg/cm^2 , przyczem dla podziałki IV jest $\frac{1 \text{ cm}}{2,5:0,89}=\frac{1 \text{ cm}}{2,81 \text{ cm}^2}$.

b) Pasy. Dla wyznaczenia sił wewnętrznych w pasach, wyznaczaliśmy największe momenty dla każdej części pasu na rys. 4 i uwidoczniliśmy je na rys. 5. Momenty wykresliliśmy według podziałki V $\frac{1 \text{ cm}}{30 \text{ tm}}=\frac{1 \text{ cm}}{15,2 \text{ m}}$, gdyż odległość biegunowa $a=15 \text{ t}$, której użyliśmy do wykreslenia momentów z powodu ciężaru własnego i ruchomego. Aby otrzymać siły w pasach odczytamy w odnośnych punktach rzędne wedle podziałki VI $\frac{1 \text{ cm}}{30:3,75}=\frac{1 \text{ cm}}{8 \text{ t}}$, a aby otrzymać przekrój, należy zmienić podziałkę, a mianowicie przyjąć podziałkę VII $\frac{1 \text{ cm}}{8:(0,89)}=\frac{1 \text{ cm}}{9 \text{ cm}^2}$.

Na rys. 6 i 7 wykresliliśmy dla ciężaru własnego dwa plany sił według podziałki III. Z tych planów sił otrzymujemy siły wewnętrzne w krzyżulcach wprost, zaś w pasach po dodaniu odnośnych sił z obu układów.

IX. Belka o kracie złożonej.

§. 50. Krata złożona bez sztucznego naprężenia.

W kracie złożonej mamy trzy rzędy krzyżulców (rys. 88), słupy (n. *Pfosten*, *Verticalen*, fr. *montant*, a. *vertical brace*, wł. *montante verticale*, cz. *svishica*, r. *стопка*) *ab*, *cd*, zwykle pionowe, czasem w mostach amerykańskich pochyłe i przekątnie (n. *Diagonalen*, fr. *diagonale*, a. *diagonal brace*, wł. *diagonale*, cz. *příčka*, r. *раскосъ діагональ*) *ad* i *cb*, nachylone do pionowej pod kątem α .