bocznej od linij dla belki równoległej. Nie podajemy tu tych linij, odsyłając czytelników do rozprawy Wacława Balickiego [1]) w tym przedmiocie.

Zresztą linje wpływowe możemy też wykreślić sposobem ogólnym Müllera Breslaua, wyłożonym w §. 66 zapomocą dwu planów sił [2]).

E. Ugięcie belki.

XVIII. Analityczne i wykreślne wyznaczenie ugięcia.

§. 103. Ogólne uwagi.

Przy mostach nowo zbudowanych urządzamy zwykle próbę obciążenia i badamy wtedy ugięcie belki (n. *Durchbiegung*, fr. *deflection*, a. *deflection*) czyli pionowe przesunięcie poszczególnych punktów belki (węzłów) wskutek obciążenia. Próby takie obciążenia powtarza się w pewnych odstępach czasu, a wielkość ugięcia może dać pewne wskazówki co do dobroci roboty mostu, a później co do jego stanu. Mówimy tylko „pewne wskazówki“, bo ugięcie większe od obliczonego wskazuje nam, że naprężenia są większe od obliczonych, a w niektórych prętach może przekroczyły granicę sprężystości; należy więc miejsce słabe wynaleść i je wzmocnić. Z drugiej strony jedno takie słabe miejsce tak mało wpływa na ugięcie ogólne, że nie da się istnienie jego poznać przy próbie obciążenia, a pomimo tego może być bardzo niebezpiecznem dla mostu. Próby obciążenia byłyby lepszą gwarancją wytrzymałości, gdyby dla obciążenia przyjęto ciężar znacznie większy od obciążenia, dla którego belkę liczono. Tego się jednak zwykle nie robi przy mostach kolejowych z powodu trudności dostarczenia obciążenia większego, niż najcięższe parowozy, przy drogowych, aby zanadto materjału nie naprężać. Przy próbach mostów drogowych kanału Dortmund-Ems użyto jednak piasku, ziemi i kamieni w ten sposób, aby największy moment był o 30% przekroczony. Wyznaczenie ugięcia mostu

---

[1]) Balicki: „Linje wpływowe dla belek trzypasowych wspornikowych“. „Czasopismo Techniczne“ 1903.

[2]) Haberkalt podał w „Allg. Bauzeitung“ 1902 przy opisie mostu na Salzachu jeszcze trzeci sposób wyznaczenia linij wpływowych.

jest także z tego powodu pożytecznem, że za pomocą ugięcia dadzą się wyznaczyć oddziaływania w belkach statycznie niewyznaczalnych, o czem mówić będziemy w następnym tomie.

Na niedokładności pomiarów ugięcia wpływa trudność wyznaczenia prawdziwego ciężaru obciążenia przy zmiennej wilgoci i zmiennej gęstości i zmiana ciepłoty powietrza podczas czasu, potrzebnego do próby.

O wartości prób obciążenia mostów żelaznych J. E. Robertson, naczelnik biura technicznego kolei egipskich [1]) wyrażając się ujemnie, podaje na udowodnienie swych zapatrywań fakt następny: Most na Nilu pod Embabek obok Kairu próbowano w r. 1892, obciążając pięciu parowozami. W r. 1896 przerwała się blacha stojąca pasu górnego mostu ruchomego przy środkowym filarze. Wymieniono tę blachę na silniejszą, poddano próbie i oddano do użytku. W miesiąc później pękł dźwigar drugi zupełnie na tem samem miejscu. Jest to jeden dowód więcej, że próby obciążenia, robione w ten sposób, jak dotychczas, nie pozwalają wnioskować o bezpieczeństwie mostu.

Ugięcie może być trwałem (n. *bleibend*) albo sprężystem. Trwałe powstaje wskutek małych przesunięć, wżarcia się stykających przekrojów i błędów wykonania i okazuje się tylko przy pierwszem obciążeniu mostu. Ugięcie trwałe, okazujące się dopiero przy następnych próbach, wskazywałoby na przekroczenie granicy sprężystości. Ugięcie sprężyste (n. *elastisch*) po ustaniu obciążenia znika. To ugięcie będziemy się starali obliczyć zwłaszcza, że obliczenie to jest potrzebnem do porównania wyników próby z ugięciem obliczonem.

. Polskie przepisy budowy i utrzymanie mostów drogowych z r. 1920 §. 52. 2. Dla mostów, które mają dźwigary główne o rozpiętościach, nie przekraczających 8 *m* w świetle, należy z reguły, równocześnie z badaniem wykonania przeprowadzić obciążenie próbne. 3. Do próby mostu należy użyć obciążenia, mogącego wywołać bezwzględnie największy moment, na podstawie którego obliczono największe naprężenie, przyczem należy dla tego obciążenia sporządzić obliczenie statyczne ugięcia. 4. Ciężary próbne powinny tak długo obciążać most, jak długo daje się spostrzegać przyrost ugięcia. 6. Przy obciążeniu próbnem należy wyznaczyć w sposób jak najdokładniejszy w odniesieniu do punktów stałych wysokości dolnego pasa głównych dźwigarów nad środkami łożysk i w połowie rozpiętości każdego przęsła, ewentualnie także w punktach pośrednich. §. 53. 3. Mostu nie można oddawać do użytku pu-

[1]) Por. Z. d. öst. Ing. und Arch. Ver. 1898, str. 13.

blicznego: *a)* w razie, jeżeli ugięcie stałe przekracza jedną czwartą całkowitego ugięcia, *b)* w razie, jeżeli ugięcie sprężyste mierzone przekracza o jedną dziesiątą ugięcie obliczone. §. 57. Dodatkowe próbne obciążenie mostu: 1. Jeżeli przy pomiarze mostu i porównaniu z wynikami, zebranymi przy próbie obciążenia, okazałby się przyrost ugięcia stałego dźwigarów głównych, którego powodu nie wykryłaby szczegółowa rewizja konstrukcji, natenczas powinna władza budowlana zarządzić dodatkowe próbne obciążenie mostu. 2. Obciążenie należy ze względów bezpieczeństwa zwiększać stopniowo aż do osiągnięcia obciążenia, dla którego most był projektowany. §. 58. Mosty dawniejsze. 3. Dla mostów, które nie mają punktów stałych, należy takowe urządzić i przeprowadzić próbę obciążenia mostu w sposób, poprzednim paragrafem przepisany.

§. 104. Wyznaczenie analityczne ugięcia belki.

Najczęściej jeden pas belki kratowej jest prosty. Wyznaczymy więc analitycznie ugięcie belki w tym wypadku, gdy pas dolny jest prosty i pójdziemy przytem za wskazówkami Müllera Breslaua[1]).

Przypuśćmy, że dla pewnego obciążenia pas dolny prosty AB (rys. 184) ugnie się i przybierze kształt wieloboku $A'm'B'$. Niech y_{m-1}, y_m, y_{m+1} będą ugięcia czyli pionowe przesunięcia węzłów $m-1$, m, $m+1$ itd. Kąty nachylenia boków wieloboku ugięcia do poziomu nazwijmy γ, a kąty między dwoma następującymi bokami tego wieloboku ϑ, to możemy napisać $\frac{\Delta y_m}{a_m} = \operatorname{st}\gamma_m$, $\frac{\Delta y_{m+1}}{a_{m+1}} = \operatorname{st}\gamma_{m+1}$. $\vartheta_m = \gamma_m - \gamma_{m+1}$. A ponieważ te kąty są bardzo małe, więc możemy napisać $\vartheta_m = \operatorname{st}\gamma_m - \operatorname{st}\gamma_{m+1} = \frac{\Delta y_m}{a_m} - \frac{\Delta y_{m+1}}{a_{m+1}}$, a wreście

$$\vartheta_m = \frac{y_m - y_{m-1}}{a_m} - \frac{y_{m+1} - y_m}{a_{m+1}}. \quad . \quad . \quad . \quad 280)$$

Załóżmy teraz, że we wszystkich węzłach pasu dolnego działają siły ϑ_{m-1}, ϑ_m, ϑ_{m+1} itd., które wywołują oddziaływania O_1 i O_2. Obliczmy siły poprzeczne i momenty, to widzimy, że $Q_{m+1} = Q_m - \vartheta_m$, więc $\vartheta_m = Q_m - Q_{m+1}$. . . . . . . 281)

[1]) Müller Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktion. Lipsk 1886, str. 19 i nast. Tam podany jest tauże analogiczny sposób obliczenia ugięcia w razie, gdy pas na którym leży pomost, jest wieloboczny.

Dalej mamy moment w m $M_m = O_1 x - \Sigma_1^{m-1} \vartheta e$, zaś moment w $m-1$ $M_{m-1} = O_1 (x - a_m) - \Sigma_1^{m-1} \vartheta (e - a_m)$, a więc $M_m - M_{m-1} = O_{1m} a - a_m \Sigma_1^{m-1} \vartheta = a_m (O_1 - \Sigma_1^{m-1} \vartheta) = a_m Q_m$.

A zatem $Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{a_m}$, a podobnie $O_{m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{a_{m+1}}$.

Wstawiwszy te wartości w równ. 281) otrzymamy:

$$\vartheta_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{a_m} - \frac{M_{m+1} - M_m}{a_{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 282)$$

Równanie 282) ma zupełnie ten sam kształt, co równ. 280) tylko, że zamiast y tu wszędzie znajduje się M. Z tego wynika, że jeżeli przypuścimy, że w węzłach pasu dolnego działają siły ϑ i dla tego obciążenia pomyślanego obliczymy w każdym węźle moment M, to moment ten M przedstawia zarazem ugięcie y odnośnego węzła. Twierdzenie to da się inaczej tak wypowiedzieć. W i e l o b o k   u g i ę c i a   p a s u   p r o s t e g o   b e l k i   k r a t o w e j   d a   s i ę   p r z e d s t a w i ć   j a k o   w i e l o b o k   s z n u r o w y   d l a   b e l k i   *AB*,   o b c i ą ż o n e j   c i ę ż a r a m i ϑ_{m-1}, ϑ_m, ϑ_{m+1}...

Chodzi jeszcze teraz tylko o wyznaczenie kątów ϑ, jakie tworzą następujące po sobie boki wieloboku ugięcia. Aby kąt ten wyznaczyć, obliczamy zmianę kątów w danym trójkącie ABC (rys. 185) po odkształceniu. Z rysunku wynika $c_1 = c_2 \operatorname{dost} \alpha_3 + c_3 \operatorname{dost} \alpha_2$, a zatem $\Delta c_1 = \Delta c_2 \operatorname{dost} \alpha_3 - c_2 \operatorname{wst} \alpha_3 \Delta \alpha_3 + \Delta c_3 \operatorname{dost} \alpha_2 - c_3 \operatorname{wst} \alpha_2 \Delta \alpha_2$, albo:

$$\Delta c_1 = \frac{\Delta c_2}{c_2} c_2 \operatorname{dost} \alpha_3 + \frac{\Delta c_3}{c_3} c_3 \operatorname{dost} \alpha_2 - h (\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3) \quad . \quad . \quad 283)$$

Wiemy, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^0$, więc $\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 = 0$, zatem $\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 = -\Delta \alpha_1$. Dalej z rysunku wynika, że $c_2 \operatorname{dost} \alpha_3 = h \operatorname{dot} \alpha_3$, $c_3 \operatorname{dost} \alpha_2 = h \operatorname{dot} \alpha_2$.

Wstawiwszy to w równ. 283), otrzymamy:

$$\Delta c_1 = \frac{\Delta c_2}{c_2} h \operatorname{dot} \alpha_3 + \frac{\Delta c_3}{c_3} h \operatorname{dot} \alpha_2 + h \Delta \alpha_1,$$

a więc
$$\Delta \alpha_1 = \frac{\Delta c_1}{c_1} \cdot \frac{c_1}{h} - \frac{\Delta c_2}{c_2} \operatorname{dot} \alpha_3 - \frac{\Delta c_3}{c_3} \operatorname{dot} \alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad 284)$$

Jeżeli naprężenie, wywołane danem obciążeniem w prętach c_1, c_2 i c_3, nazwiemy ν_1, ν_2 i ν_3, a E spółczynnik sprężystości, to wiemy, że:

$$\frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{\nu_1}{E}, \quad \frac{\Delta c_2}{c_2} = \frac{\nu_2}{E}, \quad \frac{\Delta c_3}{c_3} = \frac{\nu_3}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 185)$$

Dalej wynika z rysunku, że $\frac{c_1}{h} = \operatorname{dot} \alpha_2 + \operatorname{dot} \alpha_3$.

Wstawiwszy to w równ. 284) i pomnożywszy przez E, otrzymamy $E\Delta\alpha_1 = v_1 \operatorname{dot} \alpha_2 + v_2 \operatorname{dot} \alpha_3 - v_2 \operatorname{dot} \alpha_4 - v_3 \operatorname{dot} \alpha_2$, albo wreście $E\Delta\alpha_1 = (v_1 - v_3) \operatorname{dot} \alpha_2 + (v_1 - v_2) \operatorname{dot} \alpha_3$. . . . 286)

Chcąc teraz wyznaczyć ϑ_m, zastosujemy to równanie do trzech trójkątów, mających wspólny wierzchołek w m (rys. 184), a otrzymamy:

$$E\vartheta_m = (v_1 - v_2) \operatorname{dot} \alpha_1 + (v_1 - v_3) \operatorname{dot} \alpha_2 + (v_4 - v_3) \operatorname{dot} \alpha_3 + \\ + (v_4 - v_5) \operatorname{dot} \alpha_4 + (v_7 - v_5) \operatorname{dot} \alpha_5 + (v_7 - v_6) \operatorname{dot} \alpha_6 \,. \qquad 287)$$

Przykład. Wyznaczymy ugięcie belki Schwedlera, którąśmy obliczyli w §. 92, przypuszczając, że most obciążony jest trzema szeregami wozów w ten sposób, że tylne koła wozów stoją na 4, a oba chodniki tłumem ludzi, którego ciężar na jedną belkę wynosi 0,75 t/m (tabl. VI). W tym punkcie działa więc ciężar 12 t, inne ciężary 12 t i 6 t musimy rozłożyć na ciężary węzłowe i otrzymamy, uwzględniając, że ciężar węzłowy wskutek obciążenia chodników wynosi 1,88 w węźle 1. $6 . \frac{1,9}{25} + 1,88 + \frac{0,4}{2,5} 12 = 4,56 + 1,88 + 1,92 =$ $= 8,36\ t$, w węzłach:

	1	2	3	4	5	6	7
	8,36	12,44	7,40	13,88	7,40	12,94	2,36 t

Oddziaływanie $O_1 = \frac{1}{20}(3 . 12 . 10 + 3 . 6 . 12,7) + 3,5 . 1,88 = 35,66\ t$,
$O_2 = 3\,(12 + 6) + 7 . 1,88 - 35,66 = 30,50$.

Na podstawie tych ciężarów węzłowych i oddziaływań wyznaczymy w jakikolwiek sposób siły wewnętrzne we wszystkich prętach. Tu uskuteczniliśmy to wykreślnie zapomocą planu sił i otrzymaliśmy następujące wyniki:

Tabl. XXX.

Pręt	Siła wewnętrzna t	Przekrój cm^2	Naprężenie kg/cm^2	Długość cm	Przedłużenie mm	Pręt	Siła wewnętrzna t	Przekrój cm^2	Naprężenie kg/cm^2	Długość cm	Przedłużenie mm
A I	−59,8	150	−395	312	−0,59	6 7=78	+42,2	100	+428	250	+0,54
I II	−61,3	160	−385	266	−0,49	1 I	+ 8,4	26	+323	186	+0,36
II III	−63,6	160	−397	251	−0,49	I 2	+10,6	35	+303	312	+0,45
III IV	−59,0	150	−393	250	−0,46	2 II	+ 7,0	35	+200	275	+0,26
IV V	−59,0	150	−393	250	−0,46	II 3	+ 8,9	35	+254	372	+0,41
V VI	−62,1	160	−388	251	−0,48	3 III	+ 1,3	15	+ 81	300	0,15
VI VII	−58,0	160	−362	266	−0,47	III 4	0	35	0	390	0
VII B	−51,7	150	−345	312	−0,56	4 IV	0	10	0	300	0
A 1	+48,2	100	+482	250	+0,60	4 V	+10,0	35	+286	390	0,53
1 2	+48,2	100	+482	250	+0,60	V 5	+ 1,0	15	+ 62	300	0,09
2 3	+57,0	125	+456	250	+0,68	5 VI	+ 9,7	35	+277	372	0,49
3 4	+62,0	110	+443	250	+0,59	VI 6	+ 3,0	35	+ 89	275	0,12
4 5	+61,5	140	+440	250	+0,51	6 VII	+15,3	35	+437	312	+0,65
5 6	+54,4	125	+435	250	+0,51	VII 7	+ 2,4	26	+ 92	186	+0,08
6 7=7 8	+42,8	110	+428	250	+0,54						

W trzecim rządku tabliczki podaliśmy przekroje rzeczywiste bez odciągnięcia dziur, gdyż dziury sprawiają tylko miejscowe większe naprężenia bez znaczniejszego wpływu na odkształcenia pręta. Czwarty i piąty rządek potrzebny nam będzie później przy wykreślnem wyznaczeniu ugięcia.

Następnie obliczyliśmy dotyczne kątów wszystkich u górnego pasu i naznaczyliśmy je na rys. 1. tablicy.

$E\vartheta_m$ obliczamy na podstawie równ. 287) i otrzymamy:

$$E\vartheta_1=(-395-482)134+(-395-323)0{,}75+(303-323)0{,}75+\\+(303-482)1{,}34=-1969\ kg/cm^2.$$

$$E\vartheta_2=(323-303)0{,}75+(323-482)0+(-385-303)0{,}66+(-385+\\-290)0{,}36+(254-290)1{,}10+(254-456)0{,}91=-905\ kg/cm^2.$$

$$E\vartheta_3=(290-254)1{,}10+(-347-254)0{,}72+(-347-81)0{,}10+\\+(0-81)1{,}20+(0-443)0{,}83=-901\ kg/cm^2.$$

$$E\vartheta_4=(81-0)1{,}20+(-393-0)0{,}83+(-393-0)0+(-393+\\-286)0{,}83+(-62-286)1{,}20=-1210\ kg/cm^2.$$

$$E\vartheta_5=(286-62)1{,}20+(286-440)0{,}83+(-388-62)0{,}10+(-388+\\-277)0{,}72+(88-277)1{,}1=-590k\ g/cm^2.$$

$$E\vartheta_6=(277-435)0{,}91+(277-88)1{,}10+(-362-88)0{,}36+(-362+\\-437)0{,}66+(92-437)0{,}75=-891\ kg/cm^2.$$

$$E\vartheta_7=(437-92)0{,}75+(437-428)1{,}34+(-345-92)0{,}75+(-345+\\-428)1{,}34=-1103\ kg/cm^2.$$

Kąty ϑ uważamy jako siły w *kg* ze znakiem przeciwnym, bo tu — oznacza kierunek na dół.

Otrzymamy wtedy: $EO_1=(1969.7+905.6+901.5+1210.4+$ $+590.3+891.2+1103.1)=4152$, $O_2=7569-4152=3417$.

Stąd otrzymamy momenty i ugięcia $EM_1=4152.250$, więc $M_1=4152.\frac{250}{2100000}=0{,}49\ cm=y_1$. Dalej otrzymamy:

$$M_2=\frac{4152.500-1969.250}{2100000}=0{,}75\ cm=y_2,$$

a podobnie także $M_3=0{,}91\ cm=y_3$, $M_4=0{,}95\ cm=y_4$, $M_5=0{,}84\ cm=$ $=y_5$, $M_6=0{,}67\ cm=y_6$, $M_7=0{,}41\ cm=y_7$.

Obliczenie powyższe ugięcia jest dość żmudne. Jeżeli chodzi o szybkie wyznaczenie ugięcia przybliżone, to możemy wedle S t e i n e r a [1]) użyć wzoru znanego dla belki o przekroju stałym [2]), przyjąwszy tylko inną stałą C. Mamy wtedy ugięcie

$$\mathbf{f}=\mathbf{C}\frac{\mathbf{pl^4}}{\mathbf{EJ}}. \quad \ldots\ldots \quad 288)$$

Dla przekroju stałego jest $C=\frac{5}{384}=0{,}013021$.

Dla belki zaś parabolicznej niezbieżnej oblicza S t e i n e r następną tabliczkę dla C.

---

[1]) P. Steiner: Zur Berechnung der Durchbiegung frei aufliegender Brückenträger. *Zeit. des österr. Ing. u. Arch. Verein.* 1892, str. 566.

[2]) P. Podr. Statyki Budowli III. wyd., str. 240, równ. 324.

Tabl. XXXI.

$\frac{h_0}{h_1}$	C	$\log C$
0	0,021761	8,335675—10
0,1	0,019925	8,299392
0,2	0,019004	8,278854
0,3	0,018318	8,262872
0,4	0,017762	8,249483
0,5	0,017291	8,237818
0,6	0,016882	8,227414
0,7	0,016518	8,217970
0,8	0,016192	8,209310
0,9	0,015897	8,201306
1,0	0,015625	8,193820

Przy obliczeniu nie uwzględniono jednak wpływu kraty. Aby tę okoliczność uwzględnić po części, lepiej we wzorze 283) przyjmować J po odciągnięciu dziur na nity.

§. 105. Ugięcie pasu zakrzywionego.

Potrzeba wyznaczenia ugięcia pasu zakrzywionego zachodzi bardzo rzadko. Podamy jednak w krótkości tu sposób wyznaczenia go liczebnego wedle Müllera Breslaua.

Rys. 186 przedstawia pas zakrzywiony, wyznaczony rzędnemi x i y. Z rysunku widzimy, że $y_{m-1}-y_m=s_m \operatorname{wst}\beta_m$, zatem $\Delta y_{m-1}-\Delta y_m=s_m \operatorname{dost}\beta_m \Delta\beta_m+\operatorname{wst}\beta_m \Delta\beta_m$, albo $\frac{\Delta y_m-\Delta y_{m-1}}{a_m}=$ $=-\frac{s_m \operatorname{dost}\beta_m \Delta\beta_m}{a_m}-\frac{\operatorname{wst}\beta_m \beta \Delta s_m}{a_m}$, przyczem $a_m=s_m \operatorname{dost}\beta_m$, więc $\frac{\Delta y_m-\Delta y_{m-1}}{a_m}=-\Delta\beta_m-\operatorname{st}\beta_m \frac{\Delta s_m}{s_m}$. Ale $\frac{\Delta s_m}{s_m}=\frac{\sigma_m}{E}$, więc

$$\frac{\Delta y_m-\Delta y_{m-1}}{a_m}=-\Delta\beta_m-\operatorname{st}\beta_m \frac{\sigma_m}{E},\ \text{podobnie}$$

$$\frac{\Delta y_{m+1}-\Delta y_m}{a_{m+1}}=-\Delta\beta_{m+1}-\operatorname{st}\beta_{m+1}\frac{\sigma_{m+1}}{E}.$$

Nazwijmy $w_m=\frac{\Delta y_m-\Delta_{m-1}}{a_m}-\frac{\Delta y_{m+1}-\Delta y_m}{a_{m\ 1}}=-\Delta\beta_m+\Delta\beta_{m+1}+$ $-\operatorname{st}\beta_m \frac{\sigma_m}{E}+\operatorname{st}\beta_{m+1}\frac{\sigma_{m+1}}{E}$. Zmiana kąta w m $\varepsilon_m=180+\beta_{m+1}-\beta_m$, więc $\Delta\varepsilon_m=\vartheta_m=\Delta\beta_{m+1}-\Delta\beta_m$, stąd:

$$w_m=-\vartheta_m-\operatorname{st}\beta \frac{\sigma_m}{E}+\operatorname{st}\beta_{m+1}\frac{\sigma_{m+1}}{E} \quad \ldots \quad 289)$$

w_m nazywamy ciężarem sprężystym (n. *elastisches Gewicht*). Jeżeli $\beta_m = \beta_{m+1} = 0$, $w_m = \vartheta_m$ jak w równ. 280).

Zupełnie w ten sam sposób, co poprzednie, da się więc udowodnić, że wielobok ugięcia pasu wielobokowego belki kratowej da się przedstawić jako wielobok sznurowy dla belki *AB*, obciążonej ciężarami sprężystymi w_{m-1}, w_m, w_{m+1}.....

Belka o pasie prostym przedstawia tylko szczegółowy wypadek, gdy $w_m = \vartheta_m$.

§. 106. Wyznaczenie wykreślne ugięcia belki kratowej.

W Podręczniku Statyki Budowli[1]) mówiliśmy o wykreślnem wyznaczeniu ugięcia belki o ściance pełnej zapomocą wieloboku sznurowego, teraz podamy tylko sposób wykreślnego wyznaczenia ugięcia belki kratowej według Williota.

Zasada wykreślnego wyznaczenia ugięcia jest bardzo prosta. Gdy belkę obciążymy w dany sposób, powstają wskutek tego we wszystkich prętach naprężenia, które, jak wiadomo, dadzą się łatwo wyznaczyć zapomocą planu sił, jeżeli znamy przytem przekroje prętów. Z naprężeń łatwo obliczymy zmianę długości Δl prętów według wzoru:

$$\Delta l = \frac{lP}{EF} = \frac{lv}{E}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 290)$$

jeżeli l i F oznaczają długość i przekrój pręta, P siłę wewnętrzną a E spółczynnik sprężystości. Jeżeli wykreślimy teraz belkę na podstawie zmienionych w ten sposób długości prętów, otrzymamy ugiętą belkę.

Ale te przedłużenia i skrócenia prętów są bardzo małe np. dla $l = 600\ cm$, $v = 600\ kg/cm^2$, $E = 2100000\ kg/cm^2$, otrzymamy z równ. 290) $\Delta l = \frac{600.600}{2100000} = 0{,}17\ cm < 2\ mm$. Przedłużenia te lub skręcenia wynoszą więc przy długości prętów najwięcej około 2 *mm*. Otóż gdybyśmy wykreślili ugiętą belkę nawet w bardzo wielkiej podziałce, otrzymalibyśmy prawie zupełnie taki sam kształt belki, jak przed ugięciem.

Aby odkształcenie belki uczynić widocznem, musimy przyjąć dla odkształceń Δl inną podziałkę, kreślimy je w naturalnej wielkości lub jeszcze większe. Przy kreśleniu nowego kształtu belki musimy jednak zachować jeszcze pewną ostroż-

---

[1]) III. wyd. str. 252 i następne.

ność, mianowicie, kreśląc poszczególne trójkąty, nie możemy zataczać łuków długościami $l \pm \Delta l$ właśnie z powodu różnych podziałek, lecz kreślimy zamiast łuków prostopadłe do kierunków boków, co ze względu na bardzo małe kąty obrotu a wielkie promienie możemy śmiało uczynić.

Przypuśćmy na chwilę, że pręt A I (rys. 187) nie zmienia swego położenia, tylko przedłuży się o 1 1′, niechaj pręt A I skróci się o I a, a pręt 1 I przedłuży się o I b. Z powodu przesunięcia się węzła 1 o 1 1′ musi się przesunąć też koniec pręta b o $bb' \# 1\,1'$. Zatoczmy teraz łuki z punktów A i 1′, a raczej wykreślmy prostopadłe do odnośnych prętów a I′ $\perp A$ I i b' I′ $\perp$ 1 I, a punkt ich przecięcia się I′ wyznacza nam położenie nowe punktu I.

Niechaj będą 2 c i 2 d przedłużenia prętów I 2 i 1 2, to musimy uwzględnić także przesunięcia początkowych punktów odnośnych prętów. Kreślimy więc $cc' \#$ I I′ i $dd' \#$ 1 1′. Z punktów c' i d' kreślimy teraz prostopadłe c' 2′ $\perp$ I 2 i d' 2′ $\perp$ 1 2, a punkt ich przecięcia się 2′ wyznacza nowe położenie punktu 2.

W ten sposób postępując, możemy wyznaczyć położenie wszystkich węzłów (tabl. V, rys. 5), przyczem, jeżeli punkt B' nie wpada na podporę (jak np. tutaj), musimy belkę obrócić o kąt $\alpha = BAB'''$, aby sprowadzić belkę na łożysko.

Aby więc wynaleść prawdziwe położenie jakiegoś punktu np. III po ugięciu, musimy przesunąć punkt III′ o długość $y = \frac{A\,\text{III}}{AB} BB'''$ prostopadle na A III, jako na promieniu obrotu. Robimy więc $Ae = A$ III, kreślimy $ee' \perp AB$, to $ee' = \frac{Ae}{AB} BB''' = y$. Kreślimy zatem prostopadle do A III III′ III″ $= ee'$ i otrzymujemy III″ jako prawdziwe położenie punktu III po ugięciu. Na rysunku zrobiliśmy to samo z innymi punktami i połączyliśmy poszczególne węzły prostemi. Otrzymaliśmy w ten sposób kształt ugiętej belki w spaczonej podziałce t. z., że tylko przesunięcia poszczególnych węzłów otrzymaliśmy w tej podziałce, w jakiej wykreśliliśmy odkształcenia. Kierunki jednak boków nie są prawdziwe z powodu użycia dwu różnych podziałek.

Powyższym sposobem wykreślnym wyznaczamy równocześnie poziome i pionowe przesunięcia wszystkich węzłów, podczas gdy sposobem analitycznym Müllera Breslaua wyznaczyliśmy tylko przesunięcia pionowe węzłów pasu dolnego.

Jeżeli belka jest symetryczna i symetrycznie obciążona, sposób ten znacznie się upraszcza, bo wtedy słup w środku rozpiętości pozostaje pionowym. Zaczynając więc konstrukcją od tego słupa i przyjmując go jako pionowy, otrzymujemy od razu belkę w należytem położeniu i nie potrzebujemy jej już obracać. Jeżeli belka niema słupa w środku rozpiętości, to środkowa część pasu dolnego lub górnego pozostanie po ugięciu pozioma, ten więc kierunek przyjmujemy jako stały.

Przykład. Na tabl. V. wyznaczyliśmy wykreślnie ugięcie takiej samej i tak samo obciążonej belki Schwedlera, dla której obliczyliśmy ugięcia sposobem Müllera Breslaua. Na rys. 2. wykreśliliśmy plan sił, rozłożywszy wszystkie ciężary na ciężary węzłowe. Tym sposobem otrzymaliśmy siły wewnętrzne, zestawione w tabl. XXX. umieszczonej w poprzednim paragrafie. Na podstawie równ. 290) obliczyliśmy dla wszystkich prętów przedłużenia i skrócenia, zestawione także w tej tabliczce. Przedłużenia te i skrócenia poszczególnych prętów oznaczyliśmy w rysunku w podziałce $\frac{5\,cm}{1\,cm}$ i przyjąwszy tymczasowo kierunek boku $A\,1$ jako stały, otrzymaliśmy ugiętą belkę AB'. Aby punkt B' sprowadzić na podporę, obróciliśmy belkę o kąt α i otrzymaliśmy ostatecznie ugiętą belkę AB''. W ten sposób otrzymaliśmy pionowe i poziome przesunięcia węzłów. Największe pionowe przesunięcie, największe ugięcie czyli strzałkę belki otrzymamy z rysunku w punkcie 3 równą 6,3 *mm*, największe przesunięcie poziome 7,5 *mm*. Porównując ten wynik z wynikiem liczebnym widzimy, że różnica, pochodząca z niedokładności rysunku nie jest wielką. W praktyce więc sposób wykreślny daje wyniki z dokładnością zupełnie wystarczającą.

§. 107. Odkształcenie kratownicy trójkątowej.

Zauważmy jakąkolwiek kratownicę dowolnie obciążoną, pozostającą w równowadze a złożoną z trójkątów (rys. 188), to odkształcenie jej da się wyznaczyć po kolei dla każdego trójkąta na zasadzie, że odkształcone boki tworzą znowu trójkąt i z danych przesunięć punktów b i d, da się wykreślnie wyznaczyć przesunięcie punktu e.

Zauważmy teraz tylko jeden trójkąt dbe (rys. 189). Przypuśćmy, że b przesunęło się do b', d do d', chodzi o położenie punktu e. Kreślimy wtedy $d'e' \# de$ i $e'e'' = \Delta de$ i w myśl zasady Williota $e''(e) \perp de$. Tak samo robimy $ee_1 \# bb'$, $e_1e' = \Delta eb$ i $e'_1(e) \perp eb$. Punkt przecięcia się (e) wyznacza nowe położenie punktu (e). Zamiast konstruować w wskazany sposób otrzymamy punkt (e) prędzej, jeżeli z punktu e wykreślimy ee_1;

dalej Δeb i wykreślimy prostopadłą do *de*. Punkt przecięcia się tych prostopadłych daje punkt (e) a $e(e)$ dają nam przesunięcia punktu *e*.

W ten sam sposób należy po kolei wyznaczać przesunięcia wszystkich punktów.

§. 108. Plan przesunięć.

Chcąc wykreślić plan przesunięć (n. *Verschiebungsplan*) dla całej belki, musimy przyjąć jeden węzeł i pewien kierunek jako stały. Mówiliśmy poprzednio, że jeżeli belka jest symetryczna i symetrycznie obciążona, przyjmujemy albo środkowy słup, albo gdy go niema jeden z pasów w środku belki jako stały kierunek i punkt jego w środku jako stały. Jeżeli belka jest niesymetryczną lub niesymetrycznie obciążoną, to po wykreśleniu pierwszego planu przesunięć, musimy przez odpowiedni obrót wypełnić warunki podparcia i wtedy dopiero otrzymujemy drugi plan przesunięć.

W rysunku 190 z powodu niesymetryczności przyjmujemy na razie dowolny punkt F i krzyżulec FG jako stały. Wyznaczywszy siły wewnętrzne, naprężenia i odkształcenia wszystkich prętów, możemy przystąpić do wykreślenia pierwszego planu przesunięć wedle poprzedniego paragrafu.

Z danego punktu F_1 kreślimy $F_1 G_1$ w kierunku $1 \Delta s_1$ odkształcenie pręta FG i otrzymujemy punkt G_1. Z tego punktu kreślimy w kierunku $6\ \Delta s_6$ i z F_1 w kierunku $7\ \Delta s_7$. Z końców obu odcinków kreślimy prostopadłe do 6 i do 7 aż do przecięcia się w E_1. Podobnie wyznaczamy dalej D_1, C_1 i A_1. Potem z F i G wyznaczamy H_1 i w końcu B_1. $F_1 A_1$ przedstawia przesunięcie punktu A względem B a $F_1 B_1$ punktu B względem F, więc $A_1 B_1$ przedstawia przesunięcie względne punktu B względem A. Ponieważ AB leży na łożyskach, więc B może się tylko poziomo przesuwać. $A_1 B_1$ rozkładamy na przesunięcie pionowe $A_1 B_2$ i poziome $B_1 B_2$. Przesunięcie pionowe musimy usunąć obracając około A układ o taki kąt, aby przesunięcie pionowe było zero i pozostało tylko przesunięcie poziome $B_1 B_2$. W punkcie A jest przesunięcie równe zeru, więc A_1 i A_2 spadają razem. Obróciliśmy układ dla promienia AB o łuk $A_2 B_2$. Obrót innych punktów będzie w stosunku do promienia, otrzymamy więc nowe położenia punktów po obrocie oznaczone znaczkiem 2 na zarysie podobnym do zarysu belki, którego boki stoją prostopadle na bokach zarysu belki.

W rys. 190 *c* wykreśliliśmy od pewnego stałego punktu A'' przesunięcia poszczególnych węzłów, robiąc $A'C' \# C_1 C_2$, $A'E' = E_1 E_2$, $A'G' \# G_1 G_2$ i t. d. W ten sposób zestawiliśmy wszystkie przesunięcia węzłów i widzimy, że największe ugięcie pionowe będzie w punkcie F_1 największe przesunięcie poziome w punkcie G_1.

§. 109. Dokładność wyznaczenia ugięcia.

Przy obliczeniu ugięcia mostów kratowych przypuszczaliśmy dotychczas, że niema prętów nadliczbowych, że pręty są połączone przegibnie bez tarcia, że wszystkie części mostu mają ten sam spółczynnik sprężystości i nie uwzględnialiśmy nagromadzenia materjału w węzłach. Otóż uwzględnienie prętów nadliczbowych, stałych połączeń prętów, a zwłaszcza nagromadzenia materjału w węzłach może wywołać w wynikach tak wielkie różnice, że wskutek tego mniemana dokładność metody staje się zupełnie zwodniczą. Co się tyczy spółczynnika sprężystości E, to nie mamy zwykle przy obliczeniu ugięcia mostu żadnych pewniejszych danych, bo przepisane próby wytrzymałości materjału nie żądają u nas zwykle wyznaczenia spółczynnika sprężystości E, jak to się dzieje w Ameryce. Byłoby pożądanem, aby warunki dostawcze zawierały pod tym względem żądanie ograniczenia zmian wielkości spółczynnika sprężystości. Obecnie liczyć możemy ugięcia tylko dla stałego E. Wykonane przekroje są najczęściej nieco większe od projektowanych. Wedle warunków dostawczych dopuszcza się różnicę 3%, o tyle jest też ugięcie mniejsze od obliczonego. Nagromadzenie materjału w węzłach sprawia zmniejszenie naprężeń, a przez to i odkształceń. To da się w każdym wypadku przynajmniej w przybliżeniu obliczyć. Trudniejszem już jest uwzględnienie stężenia pasów przez pomost. Inż. Labes oblicza [1]) wpływ tych wszystkich okoliczności na ugięcie na przykładzie i otrzymuje ugięcie o 17% mniejsze. Obliczenie to jest nadzwyczaj żmudne, nie można więc w praktyce żądać, aby w ten sposób obliczać ugięcia wszystkich mostów. Możnaby jednak obliczywszy w ten sposób szereg mostów wyznaczyć pewne spółczynniki, przez któreby należało pomnożyć wyniki, uzyskane w zwykły sposób, aby uzyskać wyniki dokładne.

Z powyższego widzimy, że rzeczywiste ugięcie będzie zazwyczaj mniejsze od obliczonego.

---

[1]) Por. Centr. d. Bauverw. 1894.

DODATEK.

LITERATURA.

Podajemy tu w chronologicznym porządku spis podręczników teorji mostów, niektórych ważniejszych artykułów i nowszych dzieł, odnoszących się do części teorji mostów, zawartej w niniejszym tomie.

Becker: Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften. 2 tom. Der Brückenbau. Stuttgart 1854, 4 wyd. 1873.

Rebhann: Theorie der Holz- und Eisenconstructionen. Wiedeń 1856.

Laissle i Schübler: Der Bau der Brückenträger. Stuttgart 1857, 4 wyd. 1876.

Mollinos i Pronnier: Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques. Paryż 1857.

Bresse: Cours de la mécanique appliquée. II. część. Paryż 1862.

Scheffler: Über Gitter und Bogenträger. Brunszwik 1862.

Culmann: Graphische Statik. Zurych 1 wyd. 1866, 2 wyd. 1875.

Collignon: Cours de la mécanique appliquée aux constructions. Paryż 1869.

Ritter: Theorie und Berechnung der eisernen Dach- und Brückenconstructionen. 1870.

Heinzerling: Die Brücken der Gegenwart. Akwisgran 1873—1885.

Levy: La statique graphique. 1 wyd. 1874, 2 wyd. 1886—1886.

Jay du Bois: The elements of graphical statics. Nowy Jork 1875—1877.

Tetmajer: Die äusseren und inneren Kräfte. Zurych 1875.

Winkler: Die Durchbiegung der Gitterträger. Technische Blätter 1876.

Williot: Notions pratiques sur la statique graphique. Paryż 1877.

Ott: Vorträge über Baumechanik. Praga 1877—1880.

Loewe: Grundzüge zu Vorlesungen über eiserne Balkenträger. Mnichów 1877.

Zimmermann: Das Momentenschema. *Zeitschr. d. hann. Arch. u. Ing. Ver.* 1877.

Böhlk: Statische Berechnung der Balkenbrücken einer Öffnung. Hanower 1877.

Thullie: O krzywych influencyjnych i ich zastosowaniu do wyznaczania graficznego sił, działających w zwykłej belce kratowej. *Dźwignia* 1878.

Šolin: Analytische Bestimmung des absoluten Maximalmomentes. *Woch. d. öst. Ing. u. Arch. Ver.* 1878.

Hermansky: Die elastische Durchbiegung eiserner Fachwerke. *Zeit. d. öst. Ing. u. Arch. Verein.* 1878.

Krohn: Resultate aus der Theorie des Brückenbaues und deren Anwendung I. Theil. Balkenbrücken. Akwisgran 1879.

Holzhey: Vorträge über Baumechanik. Wiedeń 1879.

Foeppl: Theorie der Fachwerkes. Lipsk 1880.

Melan: Beitrag zur graphischen Behandlung der Fachwerksträger mit Zugrundelegung des Principes der Influenzcurven. *Zeit. d. hann. Arch. u. Ing. Ver.* 1880.

Burr: A course on the stresses in bridge and roof trusses. Nowy Jork 1880.

Schäffer i Sonne: Handbuch der Ingenieurwissenschaften. 2 tom: Der Brückenbau. Lipsk 1880. 2 wyd. 1886—1889.

Stelzel: Theorie einfacher statisch bestimmter Brückenträger. Wiedeń 1880.

Humber Will. A handybook for the calculation of strains in girders III-e. Londyn 1880.

Thullie: Oznaczenie sił, działających w belce ciągłej przegubowej zapomocą linij wpływowych. *Dźwignia* 1881.

Chalmers: Graphical determination of forces. Londyn 1881.

Winkler: Theorie der Brücken. 2 i 3 wydanie 1881—1886.

Müller Breslau: Graphische Statik der Bauconstructionen. 1 wyd. Berlin 1881, 2 wyd. Lipsk 1887, 3 wyd. Lipsk 1901.

Maurer: Graphische Statik. 1882.

Ott: Graphische Statik. 4 wyd. Praga 1883—1885.

Thullie: O wykreślnem oznaczeniu sił, działających w belce dwuprzęsłowej na podstawie ugięcia belki. *Przegląd Techniczny* 1884. *Woch. d. österr. Ing. u. Arch. Vereines.* 1884.

Weyrauch: Aufgaben zur Theorie elastischer Körper. Lipsk 1885.

Résal: Ponts métalliques. Paryż 1885—1889.

Müller Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstructionen. Lipsk 1886.

Weyrauch: Theorie des statisch bestimmten Träger. Lipsk 1887.

Levy M.: La statique graphique. Paryż 1887.

Thullie: Analityczne wyznaczenie najniekorzystniejszego obciążenia belki prostej układem ciężarów skupionych. *Przegl. Techn.* 1887 i *Woch. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.* 1887.

Emperger: Über die Zulässigkeit schwerer Fahrbetriebsmittel vom Standpunkte einer neuen Verordnung für Eisenbahnbrücken. Wiedeń 1887.

Leber: Die neue Brückenverordnung des österr. Handelsministeriums. Wiedeń 1888.

Koechlin: Applications de la statique graphique. Paryż 1889. 2 wyd. Paryż 1898.

Ritter W.: Anwendungen der graphischen Statik. II. Theil: Das Fachwerk. Zurych 1890.

Moreau An. et Petit G.: Congrès international des procèdés des constructions. Paryż 1891.

Madamet A.: Résistance des materiaux. Paryż 1891.

Résal Jan: Construction métalliques, élasticité et résistance des materiaux, fonte, fer et acier. Paryż 1892.

Keck W.: Vorträge über Elasticitätlehre. Hanower 1892.

Fidler T. Claxton: A practical treatise on bridge construction. Londyn 1893.

Cart A. i Portes L.: Calcul des ponts métalliques par la méthode des lignes d'influence. Paryż 1895.

Dechamps: Les principes de la construction des charpentes métalliques. Paryż. Leodjum 2 wyd. 1893.

Keck W.: Vorträge über graphische Statik. Hanower 1894.

Stöckl Karol, Hauser Wilh.: Hilfstabellen für die Berechnung eiserner Träger. 2 wyd. Wiedeń 1899.

Velflík: Stavitelství mostní d. II. Praga 1896. d. III. Praga 1910—1912.

Ritter A.: Lehrbuch der Ingenieur Mechanik. 3 wyd. Lipsk 1899.

Föppl A.: Vorlesungen über technische Mechanik. Lipsk 1900.

Landsberg: Handbuch der Ingenieurwissenschaften. II. B. Brückenbau. II. Abth. Die eisernen Brücken. Theorie der eisernen Balkenbrücken. 3. wyd. Lipsk 1901.

Zschetsche A. F.: Handbuch der Baustatik I. Düsseldorf 1912.

Ostenfeld: Technische Statik. Lipsk 1904.

Landsberg: Handbuch der Ingenieurwissenschaft I. Th. Der

Brückenbau III. B. Die eisernen Brücken im Allgemeinen Theorie der eisernen Balkenbrücken. Lipsk 1909.

Bažant: Theorié čar příčnikovych. C. I. Obecna theorie a nosnikí staticky určité. Praga 1909.

Mehrtens Georg Chr.: Vorlesungen über Ingenieurwissenschaften I. Th. Statik und Festigkeitslehre II. B. Lipsk 1910.

Balicki Wacław: Linje wpływowe dla belek trzypasowych wspornikowych. Lwów 1903.

Schwengler: Die Elastizitätstheorie und der Eisenbau. Strelitz 1911.

Melan Jos.: Der Brückenbau III. B. I. H. Eiserne Brücken. I. T. Lipsk i Wiedeń 1914.