Więc poziome składowe sił w pasach są równe. Dla równowagi w punkcie K otrzymamy:

$$D_m \text{ wst } \alpha = D'_m \text{ wst } \beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 193)$$

Więc i składowe poziome przekątni są także równe.

Dalej mamy: $V_0 = G_1 = S_1 = 0$, $V_0' = 0$.

Z wzoru 191) i 192) widzimy, że siła w pasach dla $m+1$ przedziału jest tak wielką, jak siła w kracie pojedynczej dla m tego przedziału. Z tego wynikają linje wpływowe dla pasów. Znając Q, G_m i S_m otrzymamy z wieloboku sił D' i D. Jeżeli przyjmiemy $Q = O_1$ i $Q = O_2$, otrzymamy odcinki potrzebne do wykreślenia linji wpływowej wedle Müllera Breslaua.

Z równ. 193) wynika, że jeżeli $\alpha = \beta$, jeżeli przekątnie są równo nachylone do pionu, to siły wewnętrzne w krzyżulcach jednego przedziału, $D_m = D'_m$, są równe.

Jeżeli przetniemy pręty naokoło węzła m, to G_m, D_m, V_m i G_{m+1} muszą być w równowadze, z tego znamy G_m i D_m, wyznaczymy V_m i G_{m+1}.

Tak samo postąpimy ze względu na punkt m' i otrzymamy V'_m i teraz możemy sposobem Müllera Breslaua wykreślić linje wpływowe. D'_m, D_m, V_m i V'_m oznaczają odnośne siły dla $O_2 = 1$. Dla V'_m przekrój $II\,II$ wkracza w sąsiedni przedział wskutek czego, jeżeli siła stoi w m', mamy $Q = O_1 - P$. Dlatego przedłużamy proste $a_1 b_1$ do m, tu odcinamy $m_1 m_2 = 1$ i w ten sposób otrzymujemy punkt m_2.

Prostą $r_1 m_2$ możemy otrzymać też, przedłużając D_m do przecięcia się z przedłużeniem pasu dolnego r, wtedy $r_1 n_2$ przedłużamy do m_2. Dla słupa środkowego wyznaczyć możemy linję wpływową dla równowagi w węźle $m+1$.

§. 68. Linje wpływowe dla belki z drugorzędnem podparciem.

Na rys. 122 widzimy belkę kratową wieloboczną z drugorzędnem podparciem. Chodzi o wyznaczenie linij wpływowych w jednym przedziale.

W tym celu przetnijmy belkę płaszczyzną $I\,I$ i wyznaczmy G, S i D' sposobem Cullmanna dla $O_1 = 1$ i $O_2 = 1$. Przeciąwszy belkę płaszczyzną $II\,II$, możemy wyznaczyć też dla obu wypadków V, przyczem zauważymy, że $D'_1 = 0$, bo w D_1 powstaje tylko siła dla obciążenia danego przedziału.

Teraz sposobem Müllera Breslaua możemy wyznaczyć linje wpływowe, przyczem zauważyć musimy, że dla G trójkąt *mnp* odpowiada sile, powstającej wskutek obciążenia danego przedziału, przenoszącej się przez drugorzędny słup wiszący. Z tego samego powodu różni się powierzchnia wpływowa D' od powierzchni wpływowej D o trójkąt *mnp*. Dla słupa V musimy przeciąć płaszczyzną $II\,II$, a więc w poprzednim przedziale G_1 i D'_1, w danym przedziale C. Dlatego tu wpływ obciążenia dwu przedziałów objawia się w kształcie linji wpływowej. Z prostej rm_1 zatrzymujemy tylko rp. Trójkąt *rpn* odpowiada ciśnieniu, wywołanemu przez słup wiszący poprzedniego przęsła, które zmniejsza ciągnienie pierwszorzędne.

§. 69. Wyznaczenie analityczne największych sił wewnętrznych w krzyżulcach.

1. Obciążenie ciągłe. Dla *najw* $(+Y)$ musi belka być obciążona na prawo od punktu obojętnego na długości KB' (rys. 111), a nie powinna być obciążoną na długości $A'K$ na lewo od punktu obojętnego.

A zatem, jeżeli ciężar jednostkowy jest p, będzie

$$najw\ (+Y) = p.\tfrac{1}{2}KB'.E'E'' = \frac{p}{2}(l - x' - x_2')\,E'E''.$$

Z rysunku widzimy, że $E'E'' : A'A = (l - x' - a) : l$, zaś $A'A'' : 1 = m : b$. Pomnóżmy obie te proporcje, a otrzymamy $A'A''.E'E'' : A'A'' = m(l - x' - a) : bl$, a stąd $E'E'' = \dfrac{m(l - x' - a)}{bl}$.
Wstawiwszy tę wartość i wartość za x_2' z rów. 188) w rów. dla *najw* $+Y$, otrzymamy

$$najw\ (+Y) = \frac{p}{2}\left(l - x' - \frac{(l+m)\,x'}{ln - am}\,a\right)\frac{m(l - x' - a)}{bl},$$

czyli zważywszy, że $m + x' = n$,

$$najw\ (+Y) = \frac{(l - a - x')^2\,mn}{ln - am}\,\frac{p}{2b} \quad . \quad . \quad . \quad 194)$$

Podobnie otrzymamy $najw\ (-Y) = -\tfrac{1}{2}p\,A'K.G'G'' = -\tfrac{1}{2}p\,(x' + x_2')\,G'G''$. Z rysunku widzimy, że $G'G'' : B'B'' = x' : l$ i $B'B'' : 1 = (m + l) : b$. Pomnożywszy obie te proporcje, otrzymamy $G'G''.B'B'' : B'B'' = x'(m + l) : bl$, więc $G'G'' = \dfrac{(m + l)x'}{bl}$. Wstawiwszy w równ. dla *najw* $(-Y)$ tę wartość za $G'G''$ i za x_2' z rów. 188), otrzymamy:

$$najw\,(-Y) = -\tfrac{1}{2}p\left(x' + \frac{(m+l)x'}{ln - am}a\right)\frac{(m+l)x'}{bl}, \text{ czyli}$$

$$najw\,(-Y) = -\frac{(a+n)\,(l+m)\,x'^2}{ln - am}\,\frac{p}{2b} \quad . \quad . \quad 195)$$

2. Dla obciążenia ciężarami skupionymi postępujemy według ogólnych prawideł. Nazwijmy P' wypadkową sił na długości KE (rys. 111), zaś P'' na długości $E'B'$, to wiemy, że dla największości ciężary jednostkowe mają być, ile możności, równe. Jeden ciężar stać więc musi na prawej poprzecznicy.

Zupełnie tak samo postępujemy dla *najw* $(-Y)$.

Czasem, zwłaszcza dla dachów, punkt L wpada na podporę, albo też między podpory. Konstrukcja linji wpływowej zostaje wtedy ta sama (rys. 123), a z niej widzimy, że gdy L wpada między podpory, niema wcale punktu obojętnego i *najw* siła wewnętrzna jest wtedy dla zupełnego obciążenia.

Jeżeli punkt L wpada na punkt A, to A'' wpada na A' i E'' na E' i otrzymujemy długość obojętną EB. Wtedy obciążenie prawej strony belki jest obojętnem, gdyż nie wywołuje żadnych sił wewnętrznych w krzyżulcach lewej strony belki.

§. 70. Linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach. Największe i najmniejsze siły.

Wiemy z §. 59, że siła wewnętrzna w pasie według 167) $S = \pm\frac{M}{h}$ siecz σ. Ponieważ h i σ są dla pewnej części pasu stałe, to zmiennym jest tylko moment, jak dla belki równoległej. Linie wpływowe dla S będą więc po odpowiedniej zmianie podziałki takie same, jak dla momentów. Wyznaczywszy w znany sposób największe momenty dla obciążenia stałego i zmiennego, otrzymamy w ten sposób największe i najmniejsze siły wewnętrzne w pasach.

§. 71. Wyznaczenie wykreślne największych sił wewnętrznych.

a) Pasy. Dla ciężaru stałego najlepiej użyć tu sposobu wielobokowego lub Culmanna, lub też któregokolwiek innego szczegółowego, podanego w §. 63.

Jeżeli ciężar ruchomy jest ciągłym, to z powodu, że obciążenie zupełne jest najniekorzystniejszem, postępujemy, jak dla ciężaru stałego.

Dla obciążenia układem ciężarów skupionych jest najniekorzystniejsze położenie dla każdego węzła inne. Jeżeli mamy dokładnie wyznaczone największe momenty (§. 30), to dla najniekorzystniejszego obciążenia dla punktu B (rys. 124), sprawiającego w tym punkcie największy moment, mamy wykreśloną część wieloboku sznurowego *abc*, która potrzebna do wyznaczenia położenia i wielkości siły poprzecznej Q. Znając Q i M, wyznaczymy siłę wewnętrzną w pasie wedle §. 62. i 63.

b) Krzyżulce. Tu wyznaczymy siły wewnętrzne osobno dla ciężaru stałego, a osobno dla ciężaru ruchomego.

Dla ciężaru stałego używamy tu wprost jednego ze sposobów, podanych w §. 62 lub §. 64. Dla ciężaru ruchomego możemy ich także użyć, tu jednak zrobimy jeszcze parę uwag i podamy kilka innych sposobów.

§. 72. Największe siły wewnętrzne w krzyżulcach dla obciążenia ciągłego.

Z kształtu linij wpływowych wiemy, że dla *najw* sił wewnętrznych w krzyżulcach dla ciężaru ruchomego musi być obciążoną prawa strona belki od punktu obojętnego.

Jeżeli ciężar jest ciągłym, to najlepiej wykreślnie wyznaczymy *najw* siłę wewnętrzną, obliczając powierzchnię wpływową i mnożąc ją przez p. Licząc w przybliżeniu, możemy przyjąć, że belka jest obciążona od węzła prawego G do prawej podpory B (rys. 125), a oprócz tego w węźle prawym ciężarem $\frac{pa}{2}$, jeżeli a oznacza długość przedziału. Otrzymujemy wtedy siłę poprzeczną nieco większą, niż przy obciążeniu najniekorzystniejszem. Wtedy mamy ze względu na punkt B

$$O_1 l - \frac{pa}{2}u - \frac{pu^2}{2} = 0, \text{ a stąd } O_1 = \frac{pu}{2l}(u+a) = Q \quad . \quad 196)$$

Siłę poprzeczną otrzymamy wtedy wykreślnie według Müllera Breslaua w następny sposób. Robimy $A'I = \frac{1}{2}pl$ i łączymy B' z I. Z obu sąsiednich węzłów M i G spuszczamy pionowe, z punktu T na lewej pionowej kreślimy TR poziomo, to $A'R = ST = \frac{A'I(a+u)}{l} = \frac{1}{2}p(a+u)$. Jeżeli teraz połączymy B' z R, to $GH = \frac{A'Ru}{l} = p\frac{(a+u)u}{2l} = Q$.

Możemy teraz użyć któregokolwiek sposobu, podanego w §. 64, przyczem zauważyć należy, że Q przechodzi przez A. Dokładniejsze i prostsze są sposoby podane przez Velflika, Melana i Bażanta.

Velflik podał łatwy sposób wyznaczania największych sił wewnętrznych dla kraty przedziałowej. Jeżeli chodzi o siłę D w przekątni $G'F$ (rys. 126), to wedle 194) $najw\,(+Y)=$ $=\frac{l-a-x')^2 mn}{ln-am}\,\frac{p}{2\,b}$, więc

$$najw\,(+D)=najw\,(+Y)\text{ siecz }\alpha=najw\,(+Y)\frac{d}{h'}=$$

$$=\frac{(l-a-x')^2 mn}{ln-am}\,\frac{pd}{2\,bh'}\quad.\;.\;.\;.\;.\quad 197)$$

Wedle 188) $x_2'=\frac{(l+m)\,x'}{ln-am}\,a$, więc

$$x_2''=a-x_2'=a-\frac{l+m)\,x'}{ln-am}\,a=\frac{ln-am-lx'-mx'}{ln-am}\,a,$$

a że $m=n-x'$, więc

$$x_2''=\frac{(l-a-x')\,(n-x')}{ln-am}\,a=\frac{(l-a-x')\,m}{ln-am}\,a,\text{ a stąd}$$

$ln-am=\frac{(l-a-x')\,am}{x_2''}$. Jeżeli tę wartość i $h'=h''\frac{n}{b}$ wstawimy w rów. 197), to

$$najw\,(+D)=\frac{(l-a-x')\,pdx_2''}{2\,h''a}\quad.\;.\;.\quad 198)$$

Wielkość $najw\,(+D)$ według rów. 198) możemy wyznaczyć wykreślnie. Zróbmy $A'A''=\frac{1}{2}\,pl$, to

$$md=\tfrac{1}{2}\frac{pl\,(l-x'-a)}{l}=\frac{p\,(l-x'-a)}{2}.$$

Poprowadźmy teraz z K_1 poziomą K_1r, to $K_1rF\backsim FGG'$, a stąd $x_2'':K_1F=a:d$, więc $K_1F=\frac{x_2''d}{a}$.

Połączmy teraz F' z K_1 i poprowadźmy $ds\,||\,F'K_1$ i $ms\,||\,d$, to $FF'K_1\backsim mds$. Zatem $md:ms=h'':K_1F$, więc $ms=\frac{md.K_1F}{h''}$, a gdy wstawimy wartość za K_1F i md, to

$$\mathbf{ms}=p\,\frac{(l-x'-a)}{2}.\frac{x_2''d}{ah''}=\mathbf{najw}\,(+\mathbf{D}),$$

wedle 198), zatem ms przedstawia $najw\,(+D)$.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie *najw* $(-D)$, to mamy wedle rów. 195) *najw* $(-Y)=-\frac{(a+n)(l+m)x'^2}{ln-am}\frac{p}{2b}$, stąd

$$najw\ (-D)=(najw-Y)\frac{d}{h'}=-\frac{(a+n)\ (l+m)\ x'^2}{ln-am}\frac{pd}{2\ bh'}.$$

Wstawmy w to równanie $a+n=b$ i z rów. 188)

$$ln-am=\frac{(l+m)\ x'a}{x_2'},\ \text{to otrzymamy}$$

$$najw\ (-D)=-\frac{b\ (l+m)\ x'^2 x_2'}{(l+m)\ x'a}\frac{pd}{2\ bh'}=-\frac{pd}{2a}\frac{x'x_2'}{h'}. \qquad 199)$$

Jeżeli teraz wykreślimy $m'\ d'$, to $m'd' : \frac{1}{2}pl=x' : l$, więc $m'd'=\frac{px'}{2}$. Połączmy G z K_1 i wykreślmy $K_1r'\parallel GF$, to $K_1r'G'\backsim GG'F$, więc $x'_2 : K_1G'=a : d$, stąd $K_1G'=\frac{x'_2 d}{a}$. Teraz wykreślmy $d's'\parallel GK_1$ i $m's'\parallel G'F$, to $GG'K\backsim m'd's'$, więc $m'd' : m's'=h' : G'K_1$, stąd $m's'=\frac{m'd'.G'K_1}{h'}=\frac{px'}{2}\frac{x_2'd}{ah'}=$ **najw (— D)** wedle 199).

Dla słupów konstrukcję widzimy podaną na rys. 127. Tu $b=n=m+x'$. Wedle 194) mamy

$$najw\ (+Y)=\frac{(l-a-x')^2 mn}{ln-am}\frac{p}{2b}=najw\ (-V)$$

Wedle 188) jest $x'_2=\frac{(l+m)\ x'}{ln-am}a$, a poprzednio udowodniliśmy, że $x_2''=\frac{am\ (l-a-x')}{ln-am}$, a $ln-am=\frac{am\ \ (l-a-x')}{x_2''}$.

Wstawiwszy to w rów. dla *najw* $(-V)$, otrzymamy

$$najw\ (-V)\frac{(l-a-x')^2 mnp x_2''}{am\ (l-a-x')\ 2\ b}=\frac{(l-a-x')\ px_2''}{2\ a}. \qquad 200)$$

Jeżeli spuścimy z F_1K i G pionowe, z punktu z poprowadzimy poziomą i wykreślimy $m'f$, z g zaś znów poziomą $g'w$, to $m'gw\backsim m'fz$. Zatem $m'w : x_2''=m'z : a$, więc $m'w=mg'=\frac{x_2''.m'z}{a}$. Z trójkąta $B'm'z\backsim B'A''A'$ mamy $m'\ z : (l-x'-a)=\frac{1}{2}pl : l$, więc $m'z=\frac{(l-x'-a)p}{2}$. Wstawiwszy to w poprzednie równanie, otrzymamy $mg'=\frac{x_2''\ (l-x'-a)\ p}{2\ a}=$ **najw (—V)**.

W podobny sposób znajdziemy *najw* $(+V)$. Wedle 199) jest bez względu na znak

$$najw\,(-V)=\frac{(a+n)(l+m)x'^2}{ln-am}\,\frac{p}{2b}=-najw\,(+V).$$

Wedle 194) jest $x_2'=\frac{(l+m)x'}{ln-am}a$, więc $ln-am=\frac{(l+m)x'a}{x_2'}$

$$\text{zatem } najw\,(+V)=\frac{(a+n)(l+m)x'^2px_2'}{(l+m)x'a2b}=\frac{(a+n)x'x_2'p}{2an}, \qquad 201)$$

bo $b=n$.

Na tej podstawie mamy następną konstrukcję. Wykreślmy $B'B''=\frac{1}{2}pl$. Połączmy A' z B'', wykreślmy pionowe przez F, K i G przez d poziomą, połączmy m z d', przez a' wykreślmy poziomą $a'b'$, to $ma'b' \backsim mdd'$, więc $b'm:x_2'=dm:a$, stąd $b'm=\frac{x'_2\,dm}{a}$.

Dalej mamy $A'dm \backsim A'B'B''$, więc $dm:x'=\frac{1}{2}pl:l$, więc $dm=\frac{x'p}{2}$, zatem $b'm=\frac{x_2'}{a}\,\frac{x'p}{2}$. Połączmy teraz l z b' i przedłużmy prostą do e, to $lmb' \backsim lm'e$, więc $m'e:mb'=(n+a):n$, stąd

$$\mathbf{m'e=me'}=\frac{mb'(n+a)}{n}=\frac{(n+a)x'x_2'p'}{2an}=\mathbf{najw(+V)} \text{ wedle 201).}$$

Jeżeliby punkt l wypadł poza papier, możemy inaczej postąpić. Zróbmy $mt=FF_1$, $mt_1=GG_1$, to FF_1 i $GG_1=mt:mt_1=$ $=n:(n+a)$. Jeżeli połączymy t z b' i poprowadzimy $t_1e' \parallel tb'$, to $me':mb'=(n+a):n$, jak pierwej.

Teraz omówimy sposób M e l a n a. Niechaj znowu p będzie ciężar jednostajnie rozłożony. Wyznaczamy w zwykły sposób punkt obojętny K (rys. 128) i obciążamy dla *najw* D długość KB.

Przypuśćmy najprzód, że obciążenie sięga od B tylko do F, to da się ono rozłożyć na dwie siły $\frac{1}{2}px_3$, działające w F i B. Siły S_1, D, S_2 i O_1 muszą być w równowadze. Siły S_1 i D przecinają się w G', O_1 i S_2 w A, więc wypadkowa z obu tych sił musi mieć kierunek AG'. Jeżeli teraz zauważymy prawą stronę belki, to siły $S_2 . D$ wst β, O_2 i $\frac{1}{2}px_3$ przecinają się w B, zaś D dost β, S_1 i $\frac{1}{2}px_3$ w F', więc wypadkowa ich ma kierunek BF'. A więc wypadkowa z S_1 i D ma kierunek AG_1', wypadkowa z $-S$, $-D$ dost β i $\frac{1}{2}px_3$ kierunek BF'. Te dwie wypadkowe dadzą się złożyć w jedną wypadkową, przechodzącą przez K' i F a wielkość jej równa wypadkowej z D wst β

i $\frac{1}{2}px_3$. Jeżeliby więc KK' było $=\frac{1}{2}px_3$, toby $K'F$ było równe D.

Ale my mamy tu jeszcze obciążenie na długości $KF=x_2''$. Rozłóżmy ciężar px_2'' na dwie składowe P' i P'', zaczepiające w węzłach G i F, to podobnie AG' jest wypadkowa z S_1, D i P', a BF' wypadkowa z $-S_1$, $-D$ dost β i P'', więc wypadkowa ze sił D wst β i px_2'' będzie przechodzić przez K i przez punkt zaczepienia siły px_2'' w połowie KF. Jeżeliby więc $K'K=px_2''$, to KF byłoby równe $2\,D$ wst β, więc $K_1F=2\,D$. Zatem gdyby $K'K$ było równe $\frac{1}{2}px_2''$, to K_1F byłoby $=D$. Jeżeli więc teraz obciążymy belkę od K do B, to gdy $K'K=$ $=\frac{1}{2}p(x_2''+x_3)$, to $K_1F=D$. Konstrukcję robimy na dole. Wykreślamy $A'A''=\frac{1}{2}pl$, to $K_0K_0'=\frac{1}{2}p(x_2''+x_3)$. Kreślimy $K_0'f' \parallel K'F$ a z f' $f'K_3 \parallel D$, to $f'K_3=$ *najw* $(+D)$.

Zupełnie w ten sam sposób da się udowodnić konstrukcja dla *najw* $(-D)$. Tu odcinamy $B'B''=\frac{1}{2}pl$. Kreślimy $A'B''$, wtedy $K_0K_2=\frac{1}{2}p(x'+x_2')$. Kreślimy $K_2g' \parallel K'G$ i $g'K_4 \parallel D$, to $g'K_4=$ *najw* $(-D)$.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie sił największych w słupie FF_1 (rys. 129), to najprzód wyznaczamy sposobem Culmanna punkt obojętny E względnie K i kreślimy $KK' \parallel F_1G$, dalej BF_1 aż do przecięcia się z K'. Punkt ten można wyznaczyć i w inny sposób, podany przez Melana. Kreślimy $FM \parallel GF_1$, dalej proste AM i BF_1 do przecięcia się w K'. Udowodnić to, można podobnie, jak w §. 65.

Tu tak samo pomyślmy najprzód, że długość GB jest obciążoną ciężarem p. Rozłóżmy px_3 na dwie siły $\frac{1}{2}px_3$, działające w G i B. Jeżeli przetniemy belkę w kierunku $K'K$, to można rozłożyć wszystkie siły w kierunku poziomym i ukośnym równoległym do GF. W kierunku AM działa wtedy wypadkowa z S_1 i V siecz β, zaś w kierunku BF_1 wypadkowa z $-S_1-V$ i $\frac{1}{2}px_3$ siecz β. Wypadkowa obu tych sił przechodzi przez punkt K' i równa się wypadkowej z poziomej V st β i px_3 siecz β, a więc przechodzi przez G. Gdyby KK' było równe $\frac{1}{2}px_3$ siecz β, toby KG było $=V$ st β, a więc $K_1F_1=V$. Teraz przychodzi jeszcze obciążenie px_2'', które znowu rozkładamy na P' i P'', działające w F i G i w ten sam sposób, co poprzednio, znachodzimy, że K_1F_1 oznaczałoby V, gdyby $K'K=\frac{1}{2}px''_2$ siecz β. Dla całego obciążenia KB przedstawia więc K_1F siłę V, jeżeli $KK'=\frac{1}{2}p(x_2''+x_3)$ siecz β. Jeżeli więc zrobimy $A'A''=\frac{1}{2}pl$, to $K'_0K_0=\frac{1}{2}p(x_2''+x_3)$, więc gdy zrobimy $K'_0g \parallel K'G$ i $K'_0g' \parallel F_1G_1$, to $K_0' g = \frac{1}{2} p (x_2'' + x_3)$ siecz β. Jeżeli zrobimy $F_1 K_3$ poziome, to $GF_1 K_3 \backsim K_0' rg$, więc ponieważ $KG = F_1 K_3$, zatem $rg = V \operatorname{st} \beta$ a $gg_1 = najw (-V)$.

Podobnie otrzymamy *najmn* V, jeżeli wykreślimy $K_0 K_2 = = \frac{1}{2} p (x' + x_2')$, $K_2 i // FK'$, fi' pionową i $K_2 f // F_1 G$, to $fi = najw (+V)$.

Nakoniec podajemy tu już bez dowodu konstrukcję dla wypadku, gdy oba pasy są zakrzywione (rys. 130). Przedłużywszy część pasu obciążonego gn do A' i $B'r$ aż do przecięcia się I, zrobiwszy $II' // mg$, otrzymamy punkt obojętny. Jeżeli $aa_1 = \frac{1}{2} pl$, to $I_1 I'_1 = \frac{1}{2} p (x' + x_2')$. Zróbmy $I_1 m' // A' B'$, połączmy I z g i n, i wykreślmy $I_1' n' // In$, $I'_1 i // mg$, $n'i // mn$, to $in' = najw (+D)$.

Gdy $I_1 I'_2 = \frac{1}{2} p (l - x' - x''_2)$, to wykreślmy $I'_2 q' // Ig$, $I'_2 i' // mg$, $q' i' // mn$, to $mn = najw (-D)$.

§. 73. Największe siły wewnętrzne w krzyżulcach dla układu ciężarów skupionych.

Jeżeli belka jest obciążona układem ciężarów skupionych, to dla największych sił wewnętrznych w krzyżulcach wedle poprzedniego (§. 69) ma stać na prawej poprzecznicy jeden ciężar; może to być pierwszy ciężar, ale może być także drugi lub trzeci. Konstrukcja znacznie się upraszcza, jeżeli przypuszczamy, że pierwszy ciężar stoi na prawym węźle i dlatego robimy zwykle to przypuszczenie. Że jednak obliczone w ten sposób siły nie byłyby zawsze największemi, chociaż nie wiele różnią się od największych, więc Müller Breslau radził przyjmować w tym wypadku dla wyrównania pierwszą siłę nieco większą n. p. 18 t zamiast 16 t, co zresztą nie daje dokładnych wyników.

Podamy tu więc najprzód sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych w kracie dla tego przypuszczenia, że pierwszy ciężar stoi na prawym węźle. Siła poprzeczna równa się wtedy oddziaływaniu O_1, które otrzymujemy wykreślnie, kreśląc wielobok sznurowy według §. 18. i zaczepia w lewej podporze.

I. Sposobu Culmanna (§. 64. I) użyć tu możemy z korzyścią. Konstrukcja upraszcza się tu o tyle, że nie potrzebujemy szukać punktu N', (rys. 104), bo wiemy, że siła poprzeczna zaczepia na podporze. W rys. 131. przypuściliśmy pomost u dołu i wyznaczyli odrazu *najw* D_3 i *najw* D_4, które powstaje, gdy pierwszy ciężar stoi w F.

*

II. Drugi sposób odpowiada sposobowi, opisanemu w §. 64. pod / III. i opiera się na równ. 179) $Y = Q\frac{c}{b}$. Ponieważ tu przyjmujemy, że siła poprzeczna Q (rys. 132) zaczepia w punkcie A, więc $L'A_1 = c$, a zatem $A_1 A_1' = Q\frac{c}{b} = Y$.

Jeżeli L wypada za papier, to możemy sobie poradzić w sposób następujący. W punkcie F kreślimy pionową HI, a z punktu A' $A'h \parallel DE$ i $A'i \parallel IC$. Z rysunku wypływa, że $HI : hi = b : (b-c)$, więc $(HI - hi) : HI = c : b$. Zróbmy $F_1'm = HI$ i $F_1'n = hi$, następnie wykreślmy $F'm$ i pionową w punkcie n, a otrzymamy $nn' : Q = mn : mF_1'$, stąd $nn' = Q\frac{HI-hi}{HI}$, a wstawiwszy wartość za $\frac{HI-hi}{HI} = \frac{c}{b}$, dostaniemy $nn' = Q\frac{c}{b} = Y$. Wreście, gdy $n'p \parallel DC$, to $n'p =$ *najw* D.

III. Trzeci sposób. Załóżmy, że w przedostatnim węźle 4 (rys. 133). zaczepia siła P, która sprawia $O_1 = 1$, a której wielkości nie potrzebujemy wyznaczać. Dla tego obciążenia wykreślmy plan sił, a dla kontroli D_4 wyznaczymy także sposobem Culmanna.

Jeżeli teraz chcemy wyznaczyć *najw* D_1' i *najw* D_2, a pomost jest na dole, to stawiamy pierwszy ciężar na 2 i obciążamy prawą stronę belki. W znany sposób otrzymamy wtedy oddziaływanie O_1, a zatem *najw* $D_2 = + O_1 D_2$, *najw* $D_1' = - O_1 D_1$.

W ten sposób możemy wyznaczyć wszystkie siły wewnętrzne z wyjątkiem D_4', które dla obciążenia prawego jest $=0$, a dla lewego w belce symetrycznej równa się sile D_1.

Jeżeli D_4 jest za wielkie i nie mieści się na rysunku, to trzeba *najw* D_4 wyznaczyć sposobem Culmanna.

IV. Sposób Zimmermanna (§. 62 i 64) IV.) da się tu także zastosować. Dla wyznaczenia *najw* D_3 (rys. 134) przypuszczamy, że pierwszy ciężar stoi w 3. Oddziaływanie w A niech będzie wtedy O_1, to otrzymamy momenty $M_3 = O_1 x_3 = \alpha e y_3$, $M_2 = O_1 x_2 = \alpha e y_2$, jeżeli αe jest odległością biegunową. Stąd otrzymamy $y_3 = \frac{O_1 x_3}{\alpha e} = \frac{O_1 l}{\alpha e} \cdot \frac{x_3}{l}$, $y_2 = \frac{O_1 l}{\alpha e} \frac{x_2}{l}$.

Jeżeli kreśląc wielobok sznurowy dla oddziaływania przyjmiemy biegun nie w B, lecz w odległości αe od A', to otrzymamy wprost wielobok $\frac{O_1 l}{\alpha e}$. Zróbmy teraz $B'R = \frac{O_1 l}{\alpha e}$, w punkcie 3, to $GE=y_3$, $KL=y_2$. Znając y_3 i y_2 możemy łatwo według Zimmermanna znaleść *najw* D_3.

Zastanówmy się teraz nad zmianą, jaka powstaje w konstrukcji, jeżeli przypuścimy, że największa siła wewnętrzna powstaje w krzyżulcu, gdy drugi ciężar stoi na prawej poprzecznicy. Siła poprzeczna składa się wtedy z oddziaływania i z siły P', działającej na dół w punkcie C, przyczem $P'=P_1\frac{e}{a}$ (rys. 135). Wyznaczmy więc najprzód wpływ oddziaływania O_1, a potem siły P'.

Jeżeli liczymy według drugiego sposobu, to robimy $F_1F''=HH'$, t. j. rzędnej wieloboku sznurowego O_1 w pionowej przez punkt zaczepienia pierwszej siły i w znany sposób znajdujemy $Y'=A'A_1'$. Siłę P' wyznaczymy, robiąc $C_1C'=P_1$ i łącząc E_1 z C', to $HH''=P'$, a ponieważ siła ta działa w C, więc potrzebujemy tylko zrobić $F_1F_2=HH''$ i połączyć L' z F_3, a otrzymamy Y'', t. j. część Y, powstającą z P', mianowicie $Y''=C_1C_2$ a $Y=Y'-Y''$. Zrobiwszy $C_1C_3=A'A_1'=Y'$, $C_3C_4=C_1C_2=Y''$, otrzymamy $C_1C_4=Y$, a jeżeli $C_3P \parallel CG$, to $C_4P=D$.

W razie, gdy L wypada poza papier, postępujemy nieco odmiennie, jak to już powyżej podaliśmy.

Wpływ P' na siłę wewnętrzną D w krzyżulcach możemy też wyznaczyć zapomocą sposobu Culmanna. Mamy tu siły P', D', S' i S_1', które muszą być w równowadze. Z tych P' i S' przecinają się w C, S_1 i D' w G, więc wypadkowa ma kierunek CG. Kreślimy zatem trójkąt sił mnp, więc $S_1'=0$. Jeżeli chcemy wyznaczyć D'_1, to siły P', S', D_1' i S_2' muszą byc w równowadze. Wypadkowa sił Y, i S'' i S_2'' i D_1' ma kierunek GC. Na tej podstawie wykreśliliśmy wielobok sił $P'S'D'S_1'$ w większej podziałce.

Jeżeli odstęp węzłów jest znacznym, to może się zdarzyć, że trzeci ciężar, stojąc na prawej poprzecznicy, wywołuje największe siły wewnętrzne w krzyżulcu CHG (rys. 136). Ze względu na punkt L mamy tu $-Dd-O_1m+P'n=0$, jeżeli siły P_1 i P_2 rozkładają się na siły P' i P''.

Zatem $D=-\frac{1}{d}m\left(O_1-\frac{P'n}{m}\right)$. A więc, gdy P' wyznaczymy zapomocą wieloboku oddziaływania, ale nie dla odległości biegunowej a, lecz $a'=\frac{am}{n}$, to $rs=\frac{P'n}{m}$, więc $O_1-\frac{P'n}{m}=$

$=O_1'=r_1$. Możemy więc teraz dalej tak konstruować, jak gdyby siła poprzeczna O_1' zaczepiała w pionowej podporowej. Sposobem Culmanna n. p. otrzymamy wtedy $w2=D$.

§. 74. Podwójne krzyżulce gibkie.

Czasem urządzamy w belce o kracie prostokątnej krzyżulce gibkie. Chcąc zbadać, czy jaki krzyżulec gibki pracuje czy nie, należy według §. 60 utworzyć $\frac{M''}{h''}$ i $\frac{M'}{h'}$. W danym przedziale pracuje ta przekątnia, która spada ku słupowi, dla którego iloraz $\frac{M}{h}$ jest większy. Aby zbadać, czy dla danego położenia $\frac{M''}{h''} \lessgtr \frac{M'}{h'}$, najlepiej wykreślić linję wpływową dla M w zwykły sposób, poczem możemy rozstrzygnąć, który krzyżulec działa, a który nie, uwzględniając przytem także momenty, powstałe wskutek ciężaru własnego.

Dla największego ciągnienia w danym krzyżulcu należy obciążyć prawą lub lewą stronę belki od punktu obojętnego (rys. 137). Na ciśnienie nie obliczamy krzyżulców gibkich, bo przypuszczamy, że się wyginają w takim razie.

Ponieważ dla krzyżulca, spadającego w prawo, jest F gdzieindziej, niż dla spadającego w lewo, więc linje wpływowe będą dla obu krzyżulców różne, punkt obojętny będzie jednak ten sam, jak to się można z konstrukcji Culmanna łatwo przekonać. Z obu linij wpływowych zatrzymujemy tylko te części, które odnoszą się do ciągnienia danego krzyżulca.

Trudniejsza jest rzecz ze słupami. Tu możliwe są rozmaite wypadki działania przekątni. N. p. w rys. 138 wykreślono linje wpływowe siły wewnętrznej w słupie V_5 dla trzech wypadków, gdy działają przekątnie D_5 i D_6, D_5' i D_6' i D_5 D_6'. W pierwszych dwóch wypadkach słup pracuje na ciśnienie, w trzecim na ciągnienie.

W pierwszych dwu wypadkach linje wpływowe dadzą się w zwykły sposób łatwo wykreślić i największe naprężenie wyznaczyć. Trzeci wypadek, ważny ze względu na ciągnienie, powstające w słupie (jeżeli liczymy według Weyraucha), powstaje wtedy, gdy $\frac{M}{h}$ dla danego słupa jest większem, niż dla sąsiednich. Dla tego położenia najlepiej wtedy wyznaczyć siły wewnętrzne w częściach pasu IV V i V VI, z których za pomocą wieloboku sił łatwo otrzymamy V_5.

Jeżeli C jest ciężar węzłowy górny, to siły S, S', C i V_5 muszą być w równowadze (r. 139). Jeżeli mamy S, S' i C, to V_5 łatwo da się wyznaczyć. Jeżeli $C=0$, co jest zwykle dla obciążenia ruchomego, to zamiast wieloboku sił otrzymujemy trójkąt. Wyznaczenie jednak najniekorzystniejszego położenia w tym razie jest dość żmudnem.

Najlepiej zrobimy to zapomocą prób. Przyjmujemy pewne położenie obciążenia ruchomego, wyznaczamy dlań momenty, do tego dodajemy momenty wskutek ciężaru własnego i tworzymy ilorazy $\frac{M}{h}$. Dla którego słupa $\frac{M'}{h'}<\frac{M}{h}>\frac{M''}{h''}$ dla tego mamy wypadek, przedstawiony w r. 139, wtedy otrzymamy $najw+V_5$.

§. 75. Podwójne krzyżulce tęgie.

Użycie na pewnej długości belki krzyżulców podwójnych gibkich uzasadnione jest tem, że krzyżulce gibkie nie mogą pracować na ciśnienie. Jeżeli krzyżulce robimy tęgie, to nie zachodzi wcale potrzeba urządzania krzyżulców podwójnych (rys. 140). W dawniejszych mostach jednak spotykamy czasem na tej długości, na której Y zmienia znak, krzyżulce podwójne tęgie. Jest to zupełnie nieuzasadnionem, a przytem robimy przez to belkę statycznie niewyznaczalną. Siły wewnętrzne w krzyżulcach dadzą się wyznaczyć wtedy tylko w przybliżeniu.

W takim razie musimy rozróżnić dwa wypadki:

a) S ł u p w p i e r w s z y m p r z e d z i a l e z p o d w ó j n e m i p r z e k ą t n i a m i (rys. 141). Tu rozkładamy belkę kratową na dwa układy I i II, na które działa połowa ciężaru i wyznaczamy w każdym z nich siłę w słupie m-tym.

Całkowita siła $\mathbf{V}_m=\mathbf{V}_m'+\mathbf{V}_m''$. . . . . . 202)

W układzie I otrzymamy wedle równ. 183)

$$\mathbf{V}_m'=-\left(\mathbf{Q}-\frac{\mathbf{M}_m}{\mathbf{h}_m}\frac{\mathbf{h}_m-\mathbf{h}_{m-1}}{\mathbf{a}_m}\right). \quad . \quad . \quad . \quad 203)$$

W układzie II mamy ze względu na równowagę sił, działających na punkt m'

$$V_m''+S \operatorname{wst} \sigma_m - S_{m+1} \operatorname{wst} \sigma_{m+1}=0, \text{ więc}$$

$$\mathbf{V}_m''=\frac{M_m}{h_m}(\operatorname{st}\sigma_m-\sigma_{m+1})=\frac{\mathbf{M}_m}{\mathbf{h}_m}\left(\frac{\mathbf{h}_m-\mathbf{h}_{m-1}}{\mathbf{a}_m}-\frac{\mathbf{h}_{m+1}-\mathbf{h}_m}{\mathbf{a}_{m+1}}\right). \quad 204)$$

Zważyć przytem musimy, że Q i M w równ. 203) i 204) obliczać należy dla obciążenia ciężarem $\frac{p}{2}$.

b) Słup między dwoma przedziałami z podwójnemi przekątniami. Tu w słupie działa mała tylko siła, jak to widzieliśmy w kracie złożonej. Największą siłę otrzymamy dla obciążenia zupełnego; mamy wtedy:

$$V = V' - V'' \quad \ldots\ldots \quad 205)$$

przyczem V' wyznaczyć należy dla układu I V'' dla układu II.

XII. Belka o kracie wielokrotnej.

§. 76. Zasada obliczenia.

Niechaj rysunek 142. przedstawia belkę wieloboczną o kracie wielokrotnej. Z ogólnej teorji belek kratowych wiadomo, że jest to układ statycznie niewyznaczalny. W przybliżeniu możemy wyznaczyć siły wewnętrzne, rozłożywszy belkę na pojedyncze układy. Tu dokładność jednak jest znacznie mniejszą, niż dla belki równoległej, bo dla poszczególnych układów np. dla BAG musimy przyjąć cięciwę BG zamiast rzeczywistego pasu zakrzywionego $BDEFG$.

Dla dokładnego obliczenia takich belek musimy się uciec do prawideł sprężystości, więc musimy znać już przekroje. Aby zaś wyznaczyć przekroje, obliczamy belkę według tego przybliżonego sposobu, rozkładając belkę kratową na poszczególne układy.

Będziemy więc rozkładać belkę o kracie wielokrotnej na poszczególne układy, w każdym węźle umieścimy takie ciężary, jakie działają w odpowiednich węzłach danego układu i przyjmiemy zamiast pasu wielobocznego cięciwę między dwoma węzłami tego samego układu.

§. 77. Wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Nazwijmy h pionowy odstęp cięciwy BG od punktu A, to wiemy, że $S = \mp \frac{M}{h}$ siecz σ, gdzie S oznacza siłę, działającą w cięciwie BG.