Dla VI VII bierzemy dla obu układów moment w 7, więc $M=242{,}3$ *tm*. Siła w pasie $S=\frac{M}{h}=\frac{M}{3{,}75}$. Więc dla IV 5 $S=\frac{222{,}1}{3{,}75}=59{,}0\,t$. Przekrój teoretyczny obliczamy wedle $F=\frac{S}{\tau}=\frac{S}{890}$.

2. Sposób wykreślny.

a) Krata. Na rys. 2 tabl. II. wyznaczyliśmy siły poprzeczne dla ciężaru własnego i ruchomego zapomocą wieloboku oddziaływań z uwzględnieniem poprzecznic. Dodaliśmy je i wykreślili równoległe do krzyżulców. Używaliśmy przytem dla długości podziałki I $\frac{1\,cm}{2\,m}$, a dla sił podziałki II $\frac{1\,cm}{5\,t}$.

Długości w ten sposób otrzymane, odczytane na podziałce III $\frac{1\,cm}{2{,}5\,t}$ dają siły wewnętrzne D, a na podziałce IV przekroje teoretyczne, dla stałego napr. dopuszcz. 890 kg/cm^2, przyczem dla podziałki IV jest $\frac{1\,cm}{2{,}5:0{,}89}=\frac{1\,cm}{2{,}81\,cm^2}$.

b) Pasy. Dla wyznaczenia sił wewnętrznych w pasach, wyznaczyliśmy największe momenty dla każdej części pasu na rys. 4 i uwidoczniliśmy je na rys. 5. Momenty wykreśliliśmy według podziałki V $\frac{1\,cm}{30\,tm}=\frac{1\,cm}{15.2\,m}$, gdyż odległość biegunowa $a=15\,t$, której użyliśmy do wykreślenia momentów z powodu ciężaru własnego i ruchomego. Aby otrzymać siły w pasach odczytamy w odnośnych punktach rzędne wedle podziałki VI $\frac{1\,cm}{30:3{,}75}=\frac{1\,\mathrm{cm}}{8\,t}$, a aby otrzymać przekrój, należy zmienić podziałkę, a mianowicie przyjąć podziałkę VII $\frac{1\,cm}{8:(0{,}89)}=\frac{1\,cm}{9\,cm^2}$.

Na rys. 6 i 7 wykreśliliśmy dla ciężaru własnego dwa plany sił według podziałki III. Z tych planów sił otrzymujemy siły wewnętrzne w krzyżulcach wprost, zaś w pasach po dodaniu odnośnych sił z obu układów.

IX. Belka o kracie złożonej.

§. 50. Krata złożona bez sztucznego naprężenia.

W kracie złożonej mamy trzy rzędy krzyżulców (rys. 88), słupy (n. *Pfosten, Verticalen*, fr. *montant*, a. *vertical brace*, wł. *montante verticale*, cz. *svislica*, r. стонка) *ab*, *cd*, zwykle pionowe, czasem w mostach amerykańskich pochyłe i przekątnie (n. *Diagonalen*, fr. *diagonale*, a. *diagonal brace*, wł. *diagonale*, cz. *příčka*, r. раскôсъ дiачоналъ) *ad* i *cb*, nachylone do pionowej pod kątem α.

Belka o kracie złożonej jest statycznie niewyznaczalną; licząc w przybliżeniu, rozkładamy ją na dwie belki o kracie pojedynczej, przyczem nietylko pasy, ale i słupy są w obydwu układach. Jeden z nich ma przekątnie, spadające w prawo, drugi w lewo.

Krata złożona może też być wielokrotną (rys. 89). Jeśli liczba podziału jest n, to, gdy rozłożymy kratę na dwa układy, w każdym z tych układów jest liczba podziału $n' = \frac{1}{2} n$ (rys. 90).

Słupy. Słupy należą do obu układów, więc wyznaczamy siłę wewnętrzną dla obu układów i dodajemy. Dalej przypuszczamy, że na jeden układ działa tylko połowa ciężaru, działającego na całą belkę, więc siła wewnętrzna w słupie EC będzie według równ. 118).

$$\text{dla I. układu (rys. 90)} \quad V_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{Q_1}{n'} = -\frac{Q_1}{n},$$

$$\text{„ II. „ „} \quad V_2 = +\tfrac{1}{2}\frac{Q_2}{n'} = +\frac{Q_2}{n},$$

przyczem Q_1 oznacza siłę poprzeczną dla przekroju I I, a Q_2 dla przekroju II II.

A zatem siła wewnętrzna w słupie CE będzie $V = V_1 + + V_2 = -\frac{1}{n}(Q_1 - Q_2)$. Jeżeli ciężar jednostkowy na pasie górnym wynosi q_1, na dolnym q_2, to $Q_1 - Q_2 = (q_1 - q_2)h \operatorname{st} \alpha$, więc

$$V = -\frac{h \operatorname{st} \alpha}{n}(q_1 - q_2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 128)$$

A więc gdy pomost jest u góry, $q_1 > q_2$, zatem słupy pracują na ciśnienie; gdy zaś pomost jest u dołu, na ciągnienie. Wogóle siły wewnętrzne w słupach są bardzo małe.

Przekątnie. Przekątnie znajdują się tylko w jednym układzie, więc:

$$\left.\begin{aligned} D &= \tfrac{1}{2}\frac{Q_1}{n'} \operatorname{siecz} \alpha = \frac{Q}{n} \operatorname{siecz} \alpha \\ D' &= -\tfrac{1}{2}\frac{Q_2}{n'} \operatorname{siecz} \alpha = -\frac{Q}{n} \operatorname{siecz} \alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 129)$$

bo tu przekroje są pionowe, więc $Q_1 = Q_2$.

Widzimy więc, że w przybliżeniu są siły wewnętrzne, działające w przekątniach, takie, jak gdyby słupów nie było.

Pasy. Ponieważ siła, działająca w słupach jest bardzo małą, więc w przybliżeniu obliczamy pasy tak, jak gdyby słupów nie było.

Przy dokładnej teorji belek kratowych o kracie złożonej, musimy wziąć do pomocy prawidła sprężystości i uwzględnić materjał i przekroje, które obliczamy najprzód w przybliżeniu. Teorję tę podamy w drugim tomie.

§. 51. Krata złożona ze sztucznem naprężeniem.

Przypuśćmy najprzód, że belka jest podpartą na rusztowaniu tak, że ciężar własny na belkę także nie działa. Jeżeli teraz w jednym słupie sprawimy sztuczne ciągnienie w jakikolwiek sposób n. p. naciągnięciem śruby, to w pasach i przekątniach powstaną wskutek tego siły, które nazwiemy sztucznemi siłami wewnętrznemi (n. *künstliche Spannung*, cz. *umělé napjetí*).

Jeżeli sztuczne ciągnienie w słupie (rys. 91) jest V_0, a powstałe stąd siły wewnętrzne w przekątniach nazwiemy D_0 i D'_0, a w pasach S_0 i S'_0, to z powodu symetrji $D_0 = D'_0$ i $S_0 = S'_0$.

Dla równowagi musi być D_0 dost $\alpha + D'_0$ dost $\alpha + V = 0$, albo $2 D_0$ dost $\alpha = V$, $\mathbf{D_0 = D'_0 = \frac{1}{2} V_0}$ **siecz** α. . . . . 130)

Gdy przetniemy belkę płaszczyzną pionową (rys. 92), otrzymamy dla równowagi $2 S_0 + 2 D_0$ wst $\alpha = 0$, a stąd

$$\mathbf{S_0} = -D_0 \text{ wst } \alpha = \tfrac{1}{2} \mathbf{V} \text{ st } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 131)$$

Dla kraty n-krotnej otrzymamy w podobny sposób

$$\mathbf{S_0} = + \tfrac{1}{4} \mathbf{n} \mathbf{V_0} \text{ st } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 132)$$

Jeżeli teraz zdejmiemy rusztowanie i belkę obciążymy, to musimy dodać siły wewnętrzne, wywołane ciężarem stałym i ruchomym, do sił, wywołanych sztucznem naprężeniem, V_0 i otrzymamy siłę wewnętrzną w słupach wiszących

$$V = V_0 + V_1 = V_0 - \frac{h \text{ st } \alpha}{n}(q_1 - q_2) \quad . \quad . \quad . \quad 133)$$

Dalej mamy w przekątniach:

$$\left.\begin{aligned} D = D_0 + D_1 &= -\tfrac{1}{2} V_0 \text{ siecz } \alpha + \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \alpha \\ D' = D_0 + D'_1 &= -\tfrac{1}{2} V_0 \text{ siecz } \alpha - \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 134)$$

V_0 jest zależnem od nas, możemy więc sprawić tak wielkie ciągnienie V_0, aby D i D' były zawsze ujemne, a więc dla *najw* D_1, a zatem i *najw* Q_1, aby $D = 0$.

Wtedy musi być $\frac{1}{2} V_0$ siecz $\alpha = \frac{1}{n}$ *najw* Q siecz α, więc

$$\mathbf{V_0} = \frac{2}{\mathbf{n}} \textit{najw } \mathbf{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 135)$$

Jeżeli więc V_0 ma powyższą wartość, to *najw* $D=0$,

$$\text{a } najw\, D' = -\tfrac{1}{2}\frac{2}{n} najw\, Q \text{ siecz } \alpha - \frac{1}{n} najw\, Q \text{ siecz } \alpha =$$

$$= -\frac{2}{n} najw\, Q \text{ siecz } \alpha = 2\, najw\, D_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 136)$$

Widzimy więc, że dla najniekorzystniejszego obciążenia siła wewnętrzna w jednej przekątni staje się zerem, ale za to w drugiej przekątni ciśnienie wzrasta do podwójnej wielkości.

§. 52. Belki Howe'a i Ridera.

Belka Howe'a jest to belka o kracie złożonej, której wszystkie części są drewniane z wyjątkiem słupów wiszących, które są żelazne i zakończone gwintami. Naciągnięciem śrub wywołujemy sztuczne naprężenie. Zastrzały rozróżniamy podwójne; te, któreby bez sztucznego naprężenia byłyby także zastrzałami, nazywamy zastrzałami głównymi (n. *Hauptstrebe*, fr. *lien, lien principal*, a. *principal strut*, cz. *přička výstupna*), te zaś, które bez sztucznego naprężenia byłyby ścięgnami, nazywamy zastrzałami drugorzędnymi lub odstrzałami (n. *Gegenstrebe*, fr. *contrelien*, a. *counterstrut*, cz. *přička sestupna*).

Jeżeli zamiast drzewa użyjemy żelaza lanego, a w pasie dolnym spawanego, to otrzymamy belkę Schiffkorna, którą oblicza się zupełnie tak, jak belkę Howe'a.

Ciągnienie sztuczne w pasach wiszących ma być według 135) $V_0 = \frac{2}{n} najw\, Q$, dla belki obciążonej jest

$$V = \frac{2}{n} najw\, Q - \frac{h \operatorname{st} \alpha}{n}(q_1 - q_2).$$

Według tego, czy $q_1 \lessgtr q_2$ jest drugi wyraz ujemny lub dodatni, zatem $V_0 \lessgtr V$. Stosownie do tego obliczamy słupy albo dla belki obciążonej lub nieobciążonej. Zastrzały główne obliczamy według równ. 136).

Z poprzedniego widzimy, że ponieważ dla jednostronnego obciążenia belki siła wewnętrzna w zastrzałach drugorzędnych jest równą zeru, więc największe siły wewnętrzne w zastrzałach głównych i słupach wiszących możemy obliczać tak. jak gdyby zastrzałów drugorzędnych nie było.

To samo stosuje się do pasów, które obliczamy dla obciążenia zupełnego, przy którem siły wewnętrzne w odstrzałach są bardzo małe. Obliczamy więc je, jak gdyby odstrzałów wcale nie było. Dla belki nieobciążonej powstaje w pasie górnym ciśnienie z powodu ciężaru własnego, a ciągnienie z powodu naprężeń sztucznych wedle równ. 132).

Największa siła wewnętrzna odstrzałów jest dla belki nieobciążonej $D = -\frac{1}{2} V_0$ siecz $\alpha + \frac{1}{n} Q_g$ siecz $\alpha = D_1 + \frac{1}{n} Q_g$ siecz α.

A więc ciśnienie w odstrzałach jest o siłę wewnętrzną $\frac{1}{n} Q_g$ siecz α mniejszem, niż D_1. Zwykle przyjmujemy w przybliżeniu, że *najw* $D = D' = \frac{1}{2}$ *najw* D_1', a więc siła wewnętrzna w odstrzałach równa się w przybliżeniu połowie *najw* siły wewnętrznej, działającej w zastrzałach głównych.

Trudno jednak bardzo w praktyce śruby naciągnąć i utrzymać w naprężeniu takiem, jakiego teorja wymaga. Często naciąga się śruby tak, aby oś pasu według oka była regularną linją, trochę na górze wygiętą, wtedy jednak panuje wielka niepewność co do rzeczywistych naprężeń, które nie zgadzają się z naprężeniami, obliczonemi na podstawie powyżej wyłuszczonych przypuszczeń.

Przy dokładnem wyznaczeniu sił wewnętrznych musimy się uciec do prawideł sprężystości, robić pewne przypuszczenia, stąd wyznaczenie naprężeń staje się niepewnem i bardzo zawiłem.

Belka Ridera jest podobną do belki Howe'a, różni się od niej jednakże tem, że tam naciągamy sztucznie przekątnie, a słupy pracują na ciśnienie. Wartość tego rodzaju belek, używanych zresztą tylko w Ameryce, jest taka sama, jak Howe'a.

X. Ilość materjału.

§. 53. Uwagi ogólne.

Znajomość ilości materjału potrzebna jest do obliczenia przybliżonego ciężaru własnego (§. 2) i do wyznaczenia najkorzystniejszego kształtu belki. Rozróżniamy ilość materjału teoretyczną (n. *theoretische Materialmenge*, a. *theoretical*), którąby posiadała belka, gdyby wszystkie jej części miały tyle tylko materjału, ile teorja wymaga i rzeczywistą (n. *wirklich*, a. *practical*) ilość materjału, większą z powodu, że w rzeczywistości musimy często używać przekrojów większych z powodu połączeń, których przy teoretycznej ilości materjału nie uwzględniamy i z powodu potrzebnego powiększenia przekrojów ze względu na wyboczenie.

Aby otrzymać rzeczywistą ilość materjału musimy ilość teoretyczną pomnożyć liczbą, większą od jedności t. z. spółczynnikiem ustrojowym (n. *Konstructionskoefficient*). Teraz będziemy mówić tylko o ilości teoretycznej, idąc za wywodami Winklera; spółczynniki ustrojowe podamy dopiero w ustrojowej części budowy mostów[1]).

§. 54. Objętość pasów.

Przypuszczamy, że oba pasy są z jednego materjału, dla którego naprężenie dopuszczalne według Winklera jest τ_0, τ_1 i τ_2. Nazwijmy objętość obu pasów V_1, a licząc na jednostkę długości v_1, to wyznaczamy te ilości w następujący sposób (rys. 93).

a) Ciężar stały. Niech będzie moment z powodu ciężaru stałego dla pewnej części pasu górnego ee', a dla odnośnej części dolnego pasu ff', to siła wewnętrzna w pasie górnym będzie $\frac{ee'}{h}$, a w dolnym $\frac{ff'}{h}$, zatem $v_1 = \frac{ee'+ff'}{h\tau_0}$. Niech będzie $ee'+ff' = 2M$, gdzie M jest momentem średnim, a więc ze względu na punkt średni między bardzo bliskimi punktami e i f, to otrzymamy $\frac{2M}{h\tau_0}$, zatem objętość całego pasu:

$$V_1 = \int_A^B \frac{2M}{h\tau_0}\,dx, \quad \text{czyli} \quad V_1 = \frac{2}{h\tau_0}\int_A^B M dx. \quad . \quad . \quad 137)$$

b) Ciężar ruchomy. Dla ciężaru ruchomego otrzymamy zupełnie ten sam wzór, tylko musimy za M wstawić *najw* M i *najmn* M, a τ_1 i τ_2 za τ_0. Więc cała objętość pasów będzie

$$V_1 = \frac{2}{h\tau_0}\int_A^B M dx + \frac{2}{h\tau_1}\int_A^B najw\, M dx + \frac{2}{h\tau_2}\int_A^B najmn\, M dx.$$

$$V_1 = \frac{2}{h}\left[\frac{1}{\tau_0}\int_A^B M dx + \frac{1}{\tau_1}\int_A^B najw\, M dx + \frac{1}{\tau_2}\int_B^B najmn\, M dx\right]. \; 138)$$

Dla belki jednoprzęsłowej jest $M = \frac{1}{2} gx(l-x)$, $najw\, M = \frac{1}{2} px(l-x)$, $najmn\, M = 0$; więc $V_1 = \frac{g}{h\tau_0}\int_A^B x(l-x)\,dx + \frac{p}{h\tau_1}\int_A^B x(l-x)\,dx$, a stąd

$$V_1 = \frac{l^3}{6h}\left(\frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 139)$$

---

[1]) Autora: „Mosty żelazne kratowe".

I tak n. p. dla $h=0{,}1\,l$ jest $\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{5l^2}{3}\left(\frac{g}{\tau_0}+\frac{p}{\tau_1}\right) \\ \text{a} \;\; „ \;\; h=\tfrac{1}{8}l \;\; „ \quad v_1 &= \frac{4l^2}{3}\left(\frac{g}{\tau_1}+\frac{p}{\tau_1}\right)\end{aligned}\right\}$. 140)

Jeżeli obliczamy przekroje dla stałego naprężenia dopuszczalnego τ i to według *najw* $M_q = M +$ *najw* M, to otrzymamy zamiast 138) $V_1 = \frac{2}{h\tau}\int_A^B najw\ M_q$ . . . . . . 141)

a wstawiwszy *najw* $M_q = \frac{1}{2}qx(l-x)$, $V_1 = \frac{ql^3}{6h\tau}$. . . . . 142)

§. 55. Objętość kraty z jednego materjału.

Niech będą oba rzędy krzyżulców z tego samego materjału. Dla kraty n-krotnej jest siła wewnętrzna w CD (rys. 94) $D_1 = \frac{1}{n}\,Q$ siecz α, zaś siła wewnętrzna w AB będzie

$D_2 = \frac{1}{n}\,Q'$ siecz β. A więc

przekrój krzyżulca CD będzie... $\frac{1}{n}$ siecz $\alpha\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)$,

zaś „ AB . $\frac{1}{n}$ siecz $\beta\left(\frac{Q_0'}{\tau_0}+\frac{Q_1'}{\tau_1}+\frac{Q_2'}{\tau_2}\right)$,

gdzie Q_0, Q_1 i Q_2 oznaczają siły poprzeczne wskutek ciężaru własnego i największe i najmniejsze wskutek ciężaru ruchomego. Długość krzyżulców jest: $CD = h$ siecz α, zaś $AB = h$ siecz β, a w przybliżeniu możemy też przyjąć $Q_0 = Q_0'$, $Q_1 = Q_2'$, $Q_2 = Q_2'$.

Objętość dwu krzyżulców równa się więc:

$$\frac{h}{n}\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)(\text{siecz}^2\,\alpha + \text{siecz}^2\,\beta).$$

Na długości AD mamy $\frac{1}{2}n$ krzyżulców każdego rzędu, gdy n oznacza liczbę podziału; chcąc więc mieć ilość materjału wszystkich krzyżulców, musimy pomnożyć objętość obu krzyżulców przez $\frac{n}{2}$, zatem $\frac{n}{2}\,\frac{h}{n}\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)$ (siecz^2 α + siecz^2 β) przedstawia objętość wszystkich krzyżulców na długości $AD = \frac{1}{2}h$ (st α + st β). Więc na jednostkę długości otrzymamy:

$$v_3 = \frac{2}{h}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{h}{n}\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)\frac{\text{siecz}^2\,\alpha+\text{siecz}^2\,\beta}{\text{st}\,\alpha+\text{st}\,\beta}$$

czyli $$v_3 = \left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)\frac{\text{siecz}^2\,\alpha+\text{siecz}^2\,\beta}{\text{st}\,\alpha+\text{st}\,\beta} \;.\;.\;.\quad 143)$$

Z równania tego widzimy, że ani wysokość belki h, ani liczba podziału n nie mają wpływu na objętość teoretyczną v_2.

Dla najmniejszości tej funkcji ze względu na α i β muszą być jej pochodne $=0$, a że wyraz ten jest dla α i β symetrycznym, więc dla najmniejszości musi być $\alpha=\beta$, a wtedy

$$v_2=\left(\frac{Q_0}{\tau^0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)\frac{\text{siecz}^2\alpha}{\text{st}\,\alpha}=\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)\frac{2}{\text{wst}\,2\,\alpha}. \quad 144)$$

v_2 będzie najmniejszem, gdy wst $2\,\alpha$ będzie największą, mianowicie gdy wst $2\,\alpha=1$ czyli $\alpha=45^0$, a więc krata równoramienna, dla której $\alpha=45^0$, wymaga najmniej materjału. Wstawiwszy w równ. 144) $\alpha=45^0$, otrzymamy:

$$najmn\ v_2=2\left(\frac{Q_0}{\tau^0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad 145)$$

Dla stałego naprężenia dopuszczalnego otrzymamy:

$$najmn\ v_2=\frac{2\,Q}{\tau}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 146)$$

Dla kraty prostokątnej jest $\beta=0$, a zatem wstawiwszy to w równ. 143), otrzymamy $v_2=\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)\frac{\text{siecz}^2\,\alpha+1}{\text{st}\,\alpha}$,

$$v_2=\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)\frac{\text{st}^2\,\alpha+2}{\text{st}\,\alpha}. \quad . \quad . \quad . \quad 147)$$

Niech st $\alpha=x$, to podstawiwszy tę wartość w równ. 147), otrzymamy $v_2=\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right)\frac{x^2+2}{x}$. Z tego wzoru widzimy, że v_2 będzie najmniejszem, gdy wyraz $\frac{x^2+2}{2}$ będzie najmniejszym. Zróbmy pochodną tego wyrazu równą zeru, to $\frac{2x^2-(2+x^2)}{x^2}=0$, a stąd $x=\sqrt{2}=\text{st}\,\alpha$. Zatem $\alpha=54^0\,44'\,8''$. 148)

Wstawmy tę wartość w równ. 147), a otrzymamy dla kraty prostokątnej:

$$najmn\ v_2=2\sqrt{2}\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad 149)$$

Porównawszy równ. 145) i 149), widzimy, że dla kraty prostokątnej potrzebujemy 1,41 razy tyle, czyli 41% więcej materjału dla najkorzystniejszego α, niż dla kraty równoramiennej i kąta nachylenia 45^0. Jeżeli $\alpha=45^0$ a $\beta=0$, to według równ. 147):

$$v_3=3\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 150)$$

Tu więc potrzeba o 50% więcej materjału, niż dla kraty równoramiennej. Dla jakiegokolwiekbądź kąta α i β możemy napisać

$$v_2 = C\left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 151)$$

gdzie C jest spółczynnikiem stałym, wahającym się między granicami 2 a 3. Objętość całej kraty otrzymamy więc:

$$V_2 = C\int_A^B\left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2}\right)dx, \quad . \quad . \quad . \quad 152)$$

przyczem mamy całkować od początku aż do końca belki, albo, co lepiej, od początku do środka, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2. Dla belki jednoprzęsłowej otrzymamy następne wartości dla Q_0, Q_1 i Q_2:

$$Q_0 = \tfrac{1}{2}g(l-2x),\; Q_1 = \tfrac{1}{2}p\frac{(l-x)^2}{l},\; Q_2 = \tfrac{1}{2}\frac{px^2}{l}, \text{ więc}$$

$$V_2 = 2\,C\left(\frac{1}{\tau_0}\int_0^{\frac{l}{2}}\tfrac{1}{2}g(l-2x)\,dx + \frac{1}{\tau_1}\int_0^{\frac{l}{2}}\tfrac{1}{2}p\frac{(l-x)^2}{l}\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\frac{l}{2}}\tfrac{1}{2}\frac{px^2}{l}\,dx\right),\quad V_2 = \frac{Cl^2}{4}\left(\frac{g}{\tau_0} + \frac{7p}{6\tau_1} + \frac{p}{6\tau_2}\right). \quad . \quad 153)$$

Dla żelaza możemy przyjąć $\tau_2 = 2{,}35\,\tau_1$, więc:

$$\mathbf{V_2 = Cl^2\left(0{,}25\frac{g}{\tau_0} + 0{,}31\frac{p}{\tau_1}\right)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 154)$$

Dla stałego naprężenia dopuszczalnego τ obliczamy przekrój wedle *najw* $Q = Q_g + Q_p$, Q_2 zaś nie uwzględniamy, wtedy otrzymamy z 153)

$$V_2 = \frac{Cl^2}{4\tau}(g + \tfrac{7}{6}p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 155)$$

§. 56. Objętość kraty z różnego materjału.

Jeżeli krata składa się z krzyżulców z rozmaitego materjału, to dla ocenienia najlepszego ustroju należy poznać nietylko objętość, ale także i koszt, który otrzymamy, pomnożywszy objętość przez odnośną cenę jednostki objętości materjału c i c'.

Analogicznie do równ. 143) otrzymamy koszt kraty na jednostkę długości:

$$c_2 = \frac{\left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2}\right)c \operatorname{siecz}^2\alpha + \left(\frac{Q_0'}{\tau_0'} + \frac{Q_1'}{\tau_1'} + \frac{Q_2'}{\tau_2'}\right)c' \operatorname{siecz}^2\beta}{\operatorname{st}\alpha + \operatorname{st}\beta}. \quad 156)$$

Przypuśćmy, że $\tau_0' = a\tau_0$, $\tau_1' = a\tau_1$, $\tau_2 = a\tau_2$, a następnie, że $Q_0 = Q_0'$, $Q_1 = Q_1'$, $Q_2' = Q_2'$, to otrzymamy:

$$c_2=\left(\frac{Q_0}{\tau_0}+\frac{Q_1}{\tau_1}+\frac{Q_2}{\tau_1}\right)\frac{c\text{ siecz}^2\alpha+\frac{c'}{a}\text{ siecz}^2\beta}{\text{st }\alpha+\text{st }\beta}\quad .\quad .\quad 157)$$

Chcąc wyznaczyć najmniejsze c_2, różniczkujemy równ. 157) według α i β i pochodne robimy równe zeru. W ten sposób otrzymamy:

$$(\text{st }\alpha+\text{st }\beta).2c\text{ siecz}^2\alpha\text{ st }\alpha-(c\text{ siecz}^2\alpha+\frac{c'}{a}\text{ siecz}^2\beta)\text{ siecz}^2\alpha=0$$

$$(\text{st }\alpha+\text{st }\beta)\frac{2c'}{a}\text{ siecz}^2\beta\text{ st}\beta-(c\text{ siecz}^2\alpha+\frac{c'}{a}\text{ siecz}^2\beta)\text{ siecz}^2\beta=0.$$

Podzielmy pierwsze równanie przez drugie, to otrzymamy $\frac{\text{st }\alpha}{\text{st }\beta}=\frac{c'}{ac}$, $\text{st }\beta=\frac{ac}{c'}\text{st }\beta$. Wstawmy tę wartość w równ. 157) a zamiast $\text{siecz}^2\alpha=1+\text{st}^2\alpha$, to otrzymamy:

$$2c\text{ st}^2\alpha\left(1+\frac{ac}{c'}\right)=c(1+\text{st}^2\alpha)+\frac{c'}{a}(1+\frac{a^2c^2}{c'^2}\text{st}^2\alpha),\text{ a stąd st }\alpha=\sqrt{\frac{c'}{ac}}.$$

Wstawiwszy $a=\frac{\tau_0'}{\tau_0}$, otrzymamy $\text{st }\alpha=\sqrt{\frac{\tau_0 c'}{\tau'_0 c}}$. . . 158)

a podobnie: $\text{st }\beta=\sqrt{\frac{\tau'_0 c}{\tau_0 c'}}$. . . . . . . 159)

Z porównania równań 158) i 159) widzimy, że

$$\text{st }\alpha=\frac{1}{\text{st }\beta},\text{ czyli że }\alpha=90-\beta.\quad .\quad .\quad .\quad 160)$$

A więc dla najmniejszości kosztów krzyżulce mają stać na sobie prostopadle. Z równ. 158) widzimy też, że $\text{st }\alpha<1$, gdy $\frac{\tau_0}{c}<\frac{\tau_0'}{c'}$, więc ten rząd krzyżulców ma być więcej stromym, którego materjał jest droższym, a naprężenie dopuszczalne mniejszem.

Dla $\alpha=\beta=45^0$ otrzymamy jednak nie o wiele większą objętość, niż przy najkorzystniejszem nachyleniu krzyżulców.

§. 57. Objętość narożników.

Przy zakończeniu regularnem kraty (rys. 95) siła wewnętrzna w narożniku wynosi przy podporze $\frac{1}{2}(p+g)l$ i zmniejsza się aż do B, gdzie jest równa prawie zeru. W przybliżeniu więc średnia siła wewnętrzna będzie $\frac{1}{4}(p+g)l$, zatem objętość obu narożników

$$V_2=2\frac{lh}{4}\left(\frac{g}{\tau_0}+\frac{p}{\tau_1}\right)=\frac{lh}{2}\left(\frac{g}{\tau_0}+\frac{p}{\tau_1}\right).\quad .\quad .\quad 161)$$

Przy nieregularnem zakończeniu kraty n-krotnej równoramiennej (rys. 96) narożnik znajduje się w $\frac{n}{2}$ układach, a więc siła wewnętrzna w słupie AB jest $=\frac{1}{2}O_1=\frac{1}{4}(p+g)l$, zatem dla obu narożników, jak poprzednio, będzie:

$$V_3'=\tfrac{1}{2}lh\left(\frac{g}{\tau_0}+\frac{p}{\tau_1}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 162)$$

Przy zakończeniu nieregularnem kraty n-krotnej prostokątnej (rys. 97) jest siła wewnętrzna w narożniku $=O_1$, więc 2 razy większą, niż poprzednio, zatem dla obu narożników

$$V_3''=lh\left(\frac{g}{\tau_0}+\frac{p}{\tau_0}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 163)$$

§. 58. Objętość całej belki kratowej.

Jeżeli dodamy objętość pasów, kraty i narożników, otrzymamy objętość całej belki $V=V_1+V_2+V_3$, czyli:

$$V=\left(A_1\frac{l}{h}+B_1+C_1\frac{h}{l}\right)\frac{gl^2}{\tau_0}+\left(A_2\frac{l}{h}+B_2+C_2\frac{h}{l}\right)\frac{pl^2}{\tau_1}+B_3\frac{pl^2}{\tau_2}, \quad 164)$$

gdzie A, B i C oznaczają spółczynniki, które poniżej dla belki jednoprzęsłowej podajemy.

Dla pasów jest $A_1=A_2=0{,}167=\frac{1}{6}$.

Jeżeli krata jest równoramienną i $\alpha=\beta=45^0$, to $B_1=\frac{1}{2}=0{,}5$, $B_2=\frac{7}{12}=0{,}58$, $B_3=\frac{1}{12}=0{,}083$.

Jeżeli krata jest prostokątną, a $\alpha=45^0$ i $\beta=0$, to $B_1=0{,}75$, $B_2=0{,}87$, $B_3=0{,}14$.

Nakoniec otrzymamy dla narożnika, jeżeli uwzględnimy większą ilość materjału dla kraty przy końcu belki, dla kraty równoramiennej $C_1=C_2=0{,}5$ dla zakończenia regularnego, $C_1=C_2=0{,}5$ do $0{,}63$ dla zakończenia nieregularnego. Dla kraty prostokątnej mamy $C_1=C_2=1{,}0$ do $1{,}13$.

Jeżeli przyjmiemy średnie wartości tych wszystkich spółczynników, to otrzymamy w przecięciu dla belki o kracie równoramiennej:

$$V=0{,}17\,l^2\left(\frac{l}{h}+3{,}3+3{,}3\frac{h}{l}\right)\left(\frac{g}{\tau_0}+\frac{p}{\tau_1}\right). \quad . \quad . \quad 165)$$

a dla belki o kracie prostokątnej

$$V=0{,}17\,l^2\left(\frac{l}{h}+5+6{,}2\frac{h}{l}\right)\left(\frac{g}{\tau_0}+\frac{p}{\tau_1}\right). \quad . \quad . \quad 166)$$

Z tego widzimy, że objętość pasów, kraty i narożników ma się dla belki o kracie równoramiennej jak $\frac{l}{h} : 3{,}3 : 3{,}3\frac{h}{l}$,

" " " " prostokątnej " $\frac{l}{h} : 5 \quad : 6{,}2\frac{l}{h}$;

więc dla

$h = \frac{l}{10}$ i kraty	równoramiennej	jak	$10 : 3{,}3 : 0{,}33$	czyli	$30 : 10 : 1$,
" " " "	prostokątnej	"	$10 : 5 \quad : 0{,}62$	"	$13 : \ 8 : 1$,

a dla

$h = \frac{l}{8}$ i kraty	równoramiennej	jak	$8 : 3{,}3 : 0{,}41$	czyli	$20 : 8 \quad : 1$,
" " " "	prostokątnej	"	$8 : 5 \quad : 0{,}78$	"	$10 : 6{,}4 : 1$.

Wzorów tych jednak wprost zastosowywać nie możemy do obliczenia ciężaru własnego, gdyż musimy poszczególne wyrazy jeszcze pomnożyć spółczynnikami ustrojowymi.

D. Belka kratowa wieloboczna.

XI. Belka o kracie pojedynczej.

§. 59. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Nazwijmy M_1 moment sił zewnętrznych ze względu na punkt A (rys. 98), S_1 siłę wewnętrzną w części pasu BE a S_2 w części CA, to $M_1 + S_1 r_1 = 0$, więc

$$S_1 = -\frac{M_1}{r_1}, \quad \ldots\ldots \quad 167)$$

podobnie

$$S_2 = +\frac{M_2}{r_2}, \quad \ldots\ldots \quad 168)$$

przyczem M_2 oznacza moment sił zewnętrznych ze względu na punkt B.

Z rysunku widzimy, że $h_1 = r_1$ siecz σ, $h_2 = r_2$ siecz τ, zatem

$$S_1 = -\frac{M_1}{h_1} \text{ siecz } \sigma \quad \ldots\ldots \quad 169)$$

$$S_2 = +\frac{M_2}{h_2} \text{ siecz } \tau \quad \ldots\ldots \quad 170)$$