Z tego widzimy, że objętość pasów, kraty i narożników ma się dla belki o kracie równoramiennej jak $\frac{l}{h} : 3{,}3 : 3{,}3 \frac{h}{l}$,

„ „ „ „ prostokątnej „ $\frac{l}{h} : 5 \quad : 6{,}2 \frac{l}{h}$;

więc dla

$h = \frac{l}{10}$ i kraty równoramiennej jak $10 : 3{,}3 : 0{,}33$ czyli $30 : 10 : 1$,

„ „ „ „ prostokątnej „ $10 : 5 \quad : 0{,}62$ „ $13 : \ 8 : 1$,

a dla

$h = \frac{l}{8}$ i kraty równoramiennej jak $8 : 3{,}3 : 0{,}41$ czyli $20 : 8 \quad : 1$,

„ „ „ „ prostokątnej „ $8 : 5 \quad : 0{,}78$ „ $10 : 6{,}4 : 1$.

Wzorów tych jednak wprost zastosowywać nie możemy do obliczenia ciężaru własnego, gdyż musimy poszczególne wyrazy jeszcze pomnożyć spółczynnikami ustrojowymi.

D. Belka kratowa wieloboczna.

XI. Belka o kracie pojedynczej.

§. 59. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Nazwijmy M_1 moment sił zewnętrznych ze względu na punkt A (rys. 98), S_1 siłę wewnętrzną w części pasu BE a S_2 w części CA, to $M_1 + S_1 r_1 = 0$, więc

$$S_1 = -\frac{M_1}{r_1}, \quad \ldots\ldots \quad 167)$$

podobnie

$$S_2 = +\frac{M_2}{r_2}, \quad \ldots\ldots \quad 168)$$

przyczem M_2 oznacza moment sił zewnętrznych ze względu na punkt B.

Z rysunku widzimy, że $h_1 = r_1$ siecz σ, $h_2 = r_2$ siecz τ, zatem

$$\mathrm{S}_1 = -\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{h}_1} \text{ siecz } \sigma \quad \ldots\ldots \quad 169)$$

$$\mathrm{S}_2 = +\frac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{h}_2} \text{ siecz } \tau \quad \ldots\ldots \quad 170)$$

§. 60. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w kracie.

Chcąc wyznaczyć siłę wewnętrzną D w krzyżulcu CH (rys. 99) według sposobu Rittera[1]), musimy przedłużyć przecięte części pasów aż do przecięcia się w punkcie L. Poprowadźmy następnie przez punkt L linję poziomą (prostopadłą do kierunku sił zewnętrznych) aż do przecięcia się z krzyżulcem w punkcie F, zaś Q niech będzie siłą poprzeczną, więc dla belki prostej wypadkową wszystkich sił zewnętrznych po prawej stronie punktu F. Ustawmy teraz równanie momentów ze względu na punkt L, to otrzymamy:

$$Dz-Qc=0, \text{ więc } \mathbf{D}=\mathbf{Q}\,\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{z}}, \quad . \; . \; . \quad 171)$$

gdy c oznacza długość prostopadłej, spuszczonej z L na kierunek Q, a z na kierunek D.

Nazwijmy α kąt nachylenia krzyżulca HC do pionu, to także kąt między z i poziomą LF będzie α, zatem b dost $\alpha = z$, jeżeli $FL=b$. Wstawiwszy to w równ. 171), otrzymamy

$$D=\frac{Qc}{b \operatorname{dost} \alpha} \text{ lub } \mathbf{D}=\mathbf{Q}\,\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} \operatorname{siecz} \alpha. \quad . \; . \quad 172)$$

$$\text{Nazwijmy dla skrócenia } \frac{\mathbf{Qc}}{\mathbf{b}}=\mathbf{Y}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 173)$$

$$\text{to } \mathbf{D}=\mathbf{Y} \operatorname{siecz} \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 174)$$

podobnie, jak dla belki równoległej (§. 39) tylko że tu zamiast Q mamy Y, dlatego też nazywamy Y sprowadzoną siłą poprzeczną. Z równ. 174) wypływa $Y=D$ dost α, zatem Y jest równe i wprost przeciwne pionowej składowej siły wewnętrznej, działającej w krzyżulcu.

Siłę Y możemy jeszcze inaczej wyznaczyć. Nazwijmy M moment sił zewnętrznych ze względu na punkt F, to z rysunku widzimy, że $M=Q\xi$, więc $\xi=\frac{M}{Q}$. A ponieważ $\xi=b-c$, zatem $b-c=\frac{M}{Q}$, a stąd $c=b-\frac{M}{Q}$. Wstawiwszy tę wartość za c w równ. 173), otrzymamy $Y=\frac{Q}{b}\left(b-\frac{M}{Q}\right)$, czyli:

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Q}-\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{b}}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 175)$$

---

[1]) P. Podr. Statyki Budowli III. wyd., str. 322.

Z rysunku widzimy dalej, że $h=b\,(\mathrm{st}\,\sigma+\mathrm{st}\,\tau)$[1]), czyli $\frac{1}{b}=\frac{1}{h}(\mathrm{st}\,\sigma+\mathrm{st}\,\tau)$, po wstawieniu tej wartości w równ. 175), otrzymamy:

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Q}-\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{h}}(\mathrm{st}\,\sigma+\mathrm{st}\,\tau)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 176)$$

Nazwijmy M' moment sił zewnętrznych ze względu na punkt C, to z rysunku widzimy, że $M'=Q(\xi-e)=Q\xi-Qe$, a ponieważ $Q\xi=M$, więc $M'=M-Qe$, a stąd $Q=\frac{M-M'}{e}$.

Dalej widzimy z rysunku, że $h-h'=e\,(\mathrm{st}\,\sigma+\mathrm{st}\,\tau)$. Podstawiwszy te wartości w równ. 176), otrzymamy:

$$Y=\frac{M-M'}{e}-\frac{M}{h}\,\frac{h-h'}{e}, \text{ czyli } \mathbf{Y}=\left(\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{h}}-\frac{\mathbf{M}'}{\mathbf{h}}\right)\frac{\mathbf{h}'}{\mathbf{e}}. \quad . \quad 177)$$

Nazwijmy wreście h'' wysokość belki w punkcie H, a M'' moment sił zewnętrznych ze względu na punkt H, to $S_1 h''$ dost $\sigma+M''=0$. Ze względu na punkt C', będzie $S_1 h'$ dost $\sigma+$ $+Dh'$ wst $\alpha+M'=0$. Z porównania tych dwóch równań otrzymamy:

$$\mathbf{D}=\left(\frac{\mathbf{M}''}{\mathbf{h}''}-\frac{\mathbf{M}'}{\mathbf{h}'}\right)\text{dosiecz } \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad 178)$$

więc

$$\mathbf{Y}=\left(\frac{\mathbf{M}''}{\mathbf{h}''}-\frac{\mathbf{M}'}{\mathbf{h}'}\right)\text{dot } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 179)$$

Chcąc obliczyć Y w przybliżeniu, przyjmujemy zamiast pasów wielobocznych pasy ciągle krzywe, czyli odstęp węzłów nieskończenie mały. Wtedy $e=dx$ a $h'=h$, więc z równ. 177) otrzymamy:

$$\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{d}\left(\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{h}}\right)\mathbf{h}}{\mathbf{dx}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 180)$$

Ponieważ tutaj $h'-h=dh$ więc $dh=dx\,(\mathrm{st}\,\sigma+\mathrm{st}\,\tau)$. Wstawiwszy to w równ. 176) otrzymamy

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Q}-\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{h}}\,\frac{\mathbf{dh}}{\mathbf{dx}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 181)$$

Dla belki równoległej jest $\sigma=\tau=0$, wtedy z tych wszystkich równań dla Y otrzymamy $Y=Q$.

Powyżej zaznaczyliśmy, że Q i M mamy obliczyć ze względu na punkt F, założywszy ciężary, działające w węzłach.

Równania 173) do 181) można też w przybliżeniu stosować do belki blaszanej o pasach wielobocznych, jeżeli przy

[1]) Jeżeli punkt L jest po prawej stronie przekroju, to kąty σ i τ są ujemne.

obliczeniu przekroju ze względu na moment nie uwzględnimy ścianki, a żebra obliczać będziemy ze względu na siłę poprzeczną.

§. 61. Krzyżulce gibkie.

Gdy krzyżulce mają pracować na ciśnienie i ciągnienie, urządzamy czasem dla kraty prostokątnej podobnie, jak w belce równoległej (§. 48), krzyżulce podwójne gibkie z żelaza płaskiego.

Z obu przekątni jednego przedziału pracuje wtedy tylko ciągniona, a druga wygina się i nie wpływa zupełnie na siły, w belce działające.

Dla danego obciążenia musimy wiedzieć, która przekątnia jest ciągniona, aby przy obliczeniu sił wewnętrznych w pasach orzec, ze względu na który punkt wyznaczyć mamy moment.

Z równ. 184) $D=\left(\frac{M''}{h''}-\frac{M'}{h'}\right)$ dosiecz α wypływa, że jeżeli ma być $D>0$ (rys. 100), to $\frac{M''}{h''}>\frac{M'}{h'}$, to znaczy, że ciągnioną jest ta przekątnia, która spada ku słupowi, dla którego iloraz $\frac{M''}{h''}$ jest większym; druga przekątnia wcale nie pracuje.

Jeżeli $\frac{M''}{h''}>\frac{M'}{h'}$, to przekątnia, spadająca na prawo, CG jest ciągniona, więc

$$S_1=-\frac{M''}{h''}\text{ siecz }\sigma,\quad S_2=-\frac{M'}{h'}\text{ siecz }\tau.$$

Gdy zaś $\frac{M''}{h''}<\frac{M'}{h'}$, to przekątnia, spadająca na lewo, EB jest ciągniona, więc $S_1=\frac{M'}{h'}$ siecz σ, $S_2=\frac{M''}{h''}$ siecz τ.

A więc, aby obliczyć siłę wewnętrzną w pasie górnym, uwzględniamy zawsze większy iloraz $\frac{M}{h}$, zaś dla dolnego pasu zawsze iloraz mniejszy z dwóch ilorazów odnośnych do słupów, ograniczających ten przedział.

§. 62. Ogólne wykreślne sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych.

Ogólny sposób wielobokowy zapomocą planu sił (§. 40), da się tu także zastosować zwłaszcza do wyznaczenia sił z powodu ciężaru stałego. Drugi sposób ogólny jest sposób Culmanna[1]), którego użyć można, jeśli znamy wielkość i położenie siły Q, co łatwo otrzymać z wieloboku sznurowego.

Trzeci sposób podał Zimermann, który polega na tem, że siłę poprzeczną Q zastępujemy dwiema siłami P_1 i P_2 (rys. 101), zaczepiającemi w obu końcach przeciętego krzyżulca CF. Ażeby Q było wypadkową sił P_1 i P_2, musi być

$$\left.\begin{array}{l} P_1 e = Q c_2 = M_2 \\ \text{i} \quad P_2 e = Q c_1 = M_1 \end{array}\right\}, \quad \ldots \quad 182)$$

a stąd otrzymamy $P_1 = Q\frac{c_2}{e} = \frac{M_2}{e}$, $P_2 = Q\frac{c_1}{e} = \frac{M_1}{e}$. . 183)

$$Q = P_1 - P_2 = \frac{M_2}{e} - \frac{M_1}{e}. \quad \ldots \quad 184)$$

Na podstawie rów. 184) łatwo wyznaczymy siły P_1 i P_2 wykreślnie w sposób, uwidoczniony na rysunku, lub też na podstawie znanych momentów.

Na rysunku mamy $Q : nn_1 = e : c_2$ i $Q : mm_1 = e : c_1$, a zatem $nn_1 = \frac{Qc_2}{e} = P_1$, $mm_1 = \frac{Qc_1}{e} = P_2$.

Dla równowagi między siłami P_1, P_2, S_1, D i S_2 kreślimy zamknięty wielobok sił osobno lub też, jak to czyni Zimmermann, w wykresie belki, przyjąwszy dość wielką podziałkę, zaczynając od punktu F lub też od węzła pasu górnego. Z tych pięciu sił trzy P_1, S_1 i D przechodzą przez C, dwie S_2 i P_2 przez F, więc wypadkowa z S_2 i P_2 będzie miała kierunek FC, kreślimy więc $P_2 = OF$, $OL \parallel$ do S_2, to LO jest S_2. Gdy $FH = P_1$, $HG \parallel S_1$, to $HG = S_1$, a $GL = D$. Dla wyróżnienia kreskujemy powierzchnię tego wieloboku sił.

Jeżeli e jest stałem, to możemy do wykresu użyć wprost rzędnych linij momentów. Jeżeli przyjmiemy do jej wykreślenia odległość biegunową $a = ae$, to $\frac{M_1}{e} = \frac{ay_1}{e} = ay$ i podobnie $\frac{M_2}{e} = ay_2$.

§. 63. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w pasach.

Szczegółowe sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych w pasach są następujące:

a) Możemy tu użyć z korzyścią sposobu Culmanna. Przetnijmy tylko belkę według *II* (rys. 102) i wyznaczmy od-

[1]) Por. Podr. St. Budowli III. wyd. str. 324.

nośną siłę poprzeczną. Przedłużmy dwa odnośne boki wieloboku sznurowego aż do przecięcia się w punkcie N', przez który przechodzi wypadkowa Q. Przedłużmy następnie część pasu CD, aż się przetnie z siłą poprzeczną Q w punkcie N, to wypadkowa z S_1 i Q musi mieć kierunek NA.

Zróbmy w wieloboku sił $OT \parallel N'A'$, zaś $OU \parallel N'A''$, to jak wiemy, będzie $TU = Q$. Wykreślmy $TM \parallel CD$ a $UM \parallel AN$, to UTM jest zamkniętym wielobokiem sił i $MT = S_1$.

Jeżeli chcemy użyć sposobu Culmanna, trzeba jednak, aby punkt N znajdował się jeszcze na papierze. Jeżeli punkt N wypada poza papier, użyć musimy innego sposobu.

b) Wykreślmy z punktu A pionową AB i siłę S_1 rozłóżmy na dwie składowe, poziomą H i pionową V. Wtedy ze względu na punkt A pionowa składowa V nie daje żadnego momentu, więc możemy napisać $Hh + M = 0$, więc $H = -\frac{M}{h}$, lub bez względu na znak $H = \frac{M}{h}$. Nazwijmy rzędną $A'A'' = y$, to $M = ay$, jeżeli a oznacza odległość biegunową, zatem $H = \frac{ay}{h}$, czyli $H : y = a : h$. Ten stosunek możemy wykreślnie wyznaczyć. Zróbmy $A'F = h$ i wykreślmy z punktów A'' i F poziome, następnie zróbmy $FK = a$ i połączmy punkt A' z K, a otrzymamy dwa trójkąty podobne $A'A''L$ i $A'FK$, więc $A''L : y = a : h$, zatem $A''L = \frac{ay}{h} = H$.

Wykreślmy dalej $LP \parallel CD$, to

$$LP = H \text{ siecz } \sigma = -\frac{M}{h} \text{ siecz } \sigma = S_1.$$

c) Według równ. 167) jest $S = \frac{M}{r} = \frac{ay}{r}$. Wykreślmy $AI \perp CD$, to $AI = r$, zróbmy dalej $CG = a$, $AI' = y$, połączmy A z G i wykreślmy $C'G' \parallel CG$, to $C'G' : CG = y : r$, a stąd $C'G' = \frac{ay}{r} = S$.

Sposób ten podał Müller Breslau.

Jeżeli odstęp poziomy węzłów jest stały (rys. 103), to dogodnieby było przyjąć odległość biegunową a równą temu odstępowi, jeżeli to w ogóle jest możliwe ze względu na wielkość rysunku i przyjęte podziałki. Znajdziemy wtedy najprzód $\frac{M}{h} = \frac{ay}{h}$, a wykreśliwszy w A pionową $AB = h$, to $CD = a$ siecz σ.

Teraz zrobimy $AB' = y$ i przez B' kreślimy $C'D' \parallel CD$, to $C'D' : CD = y : h$, $C'D' = \frac{CDy}{h} = \frac{ay}{h}$ siecz $\sigma = \frac{M}{y}$ siecz $\sigma = S_1$.

§. 64. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w krzyżulcach.

I. Pierwszy sposób według Culmanna. Przedłużywszy przecięte części pasów CD i BA do punktu przecięcia się L (rys. 104), kreślimy z punktu tego poziomą, aż przetnie przecięty krzyżulec CA w punkcie F, w którym kreślimy pionową $F_1 F_2$.

W znany sposób otrzymamy punkt N', przez który przechodzi siła poprzeczna, i przedłużamy AC, aż się przetnie z siłą Q w punkcie N. Wypadkowa sił D i Q będzie więc miała kierunek NL.

Jeżeli teraz z wieloboku sił $TU = Q$, to poprowadziwszy $TM \parallel AC$ i $UM \parallel LN$, otrzymamy trójkąt TMU, w którym $TM = D$.

Ten sposób wymaga, aby punkty L i N były jeszcze na papierze. Jeżeli punkt L wypada poza papier, a Q jest jeszcze na papierze, to możemy przedłużyć S_2 aż do przecięcia się z Q w N_1, w wieloboku sił wykreślić $TR \parallel S_2$, $UR \parallel N_1 C$, to UR jest wypadkowa z S_1 i D. Zrobiwszy $RZ \parallel S_1$ i $UZ \parallel AC$, otrzymamy $ZU = D$.

Jeżeli oba punkty L i N wypadają poza papier, to używamy następnego sposobu.

II. Drugi sposób. Według równ. 176) D dost $\alpha = Y = Q - \frac{M}{h}(\text{st}\,\sigma + \text{st}\,\tau)$. Nazwijmy, jak w poprzednim paragrafie, bez względu na znak iloraz $\frac{M}{h} = H$ i wykreślmy najprzód w ten sam sposób, co pierwej, $H = F''B'$ i z punktu B' poprowadźmy równoległe do obu pasów $B'R'$ i BR''. Z konstrukcji widzimy, że $R'R'' = H(\text{st}\,\sigma + \text{st}\,\tau) = \frac{M}{h}(\text{st}\,\sigma + \text{st}\,\tau)$, a więc $Y = Q - \frac{M}{h}(\text{st}\,\sigma + \text{st}\,\tau) = TU - R'R''$. Zróbmy $UW = R'R''$, to $Y = TU - UW = TW$.

Jeżeli teraz wykreślimy $TM \parallel CA$, a z punktu W poziomą, to $TM = Y$ siecz $\alpha = D$.

III. Trzeci sposób (rys. 105). Jeżeli dla danego obciążenia wyznaczyliśmy nietylko momenty, lecz i siły poprzeczne, lub jeśli znamy wielkość i położenie siły $Q=F_1 F_2$, to użyć możemy trzeciego sposobu. Połączmy L', rzut punktu L przecięcia się odnośnych części pasów, z F_2, a otrzymamy $Ny=$ $=F_1 F_2 \frac{c}{b}=Q\frac{c}{b}=Y$ według równ. 173).

Jeżeli punkty L i N wypadają poza papier, to robimy $Fi=\frac{1}{n}FJ$, $Pk=\frac{1}{n}FK$, $F'F=\frac{1}{n}F'F''$ i kreślimy $il \parallel CH$, $kl \parallel KE$ i $Fn' \parallel F''N'$, wskutek czego $F_1 l'=\frac{1}{n}F_1 L'$ i $F_1 n=$ $=\frac{1}{n}F_1 N$. W punkcie n wykreślamy pionową, łączymy l' z F_2, to $n'y'=Ny=Y$ na mocy konstrukcji.

Czasem może powstać trudność wyznaczenia punktu F, a mianowicie, jeśli punkt L wypada poza papier. Jeżeli jeden z pasów jest poziomy, to punkt F leży na przecięciu się krzyżulca z pasem poziomym. Jeżeli oba pasy są zakrzywione, sprawa jest trudniejszą (rys. 106). Poprowadźmy w obu końcach krzyżulca $I'K$ pionowe, a z punktów L, I' i I poziome, to otrzymamy następujące trójkąty podobne: $LK'G \backsim I'K'V$, zatem $K'G:K'V=LG:I'V$. Z podobieństwa zaś trójkątów LGK i IWK wynika, że $LG:IW=KG:KW$. Porównawszy te dwie proporcje, otrzymamy $(K'G-K'V):K'V=(KG-KW):KW$, czyli $VG:K'V=WG:KW$.

Zróbmy $VV'=VK'$, $WW'=WK$ i połączmy punkty V' i W' z punktem G, to otrzymamy $VV'G \backsim WW'G$, bo dwa boki są proporcjonalne, mianowicie $VG:VV'=WG:WW'$, a kąt naprzeciw większego boku leżący prosty. Z tego wynika, że $\sphericalangle VGV'=\sphericalangle WGW'$, zatem $V'W'$ jest linją prostą. A więc chcąc wynaleść punkt F, robimy $VV'=VK'$ i $WW'=WK$, następnie łączymy punkt V' z W' i w ten sposób otrzymujemy punkt G, z którego kreślimy poziomą aż do przecięcia się z linją $I'K$ w punkcie F.

IV. sposób. Możemy tu użyć także ogólnego sposobu Zimmermanna (§. 62). Co do zastosowania jego do wyznaczania sił wewnętrznych w słupach, musimy tu zrobić jednak jeszcze pewną uwagę. Jeżeli pomost jest u góry, a w dolnych węzłach nie działają żadne ciężary, to według sposobu Zimmermanna robimy (rys. 107) $EK=\frac{M'}{e}$, $Ff=\frac{M''}{e}$, gdy M' i M''

oznaczają momenty sił zewnętrznych w E i F. Kreślimy dalej $Kg \parallel S_2$ i $fh \parallel S_1$, to $fh = S_1$, $hi = D$, $ig = S_2$. Dla równowagi w punkcie F musimy wykreślić wielobok sił S_2, S_2' D i V, a że S_2 i D są znane, więc otrzymamy szukany wielobok, kreśląc $hl \parallel S_2'$, to $hl = S_2'$ i $gl = V$. V jest tu ciśnieniem.

Jeżeli w punkcie F działa jeszcze ciężar C (rys. 108), to V i C mają ten sam kierunek, lg jest więc sumą $V+C$. Zrobiwszy $mg = C$, otrzymamy $lm = V$. A zatem chcąc uwzględnić ciężar węzłowy C. dodajemy do siły V ciężar $+C$ (bo V jest ujemnem).

Dla wypadku, gdy pomost jest u dołu, konstrukcję podobną uwidoczniliśmy w rys. 109. Jeżeli w H działa jeszcze ciężar C (rys. 110), to dodać musimy do V ciężar $-C$ (bo tu V ujemne jest wskutek ciężaru C większem).

§. 65. Linje wpływowe sił wewnętrznych w krzyżulcach.

W celu wyznaczenia linij wpływowych dla krzyżulców, zastosujemy równ. 175) $Y = Q - \frac{M}{b}$. Przypuściwszy, że ciężar P działa w odstępie x od lewej podpory A (rys. 111), otrzymamy oddziaływanie $O_1 = P\frac{l-x}{l}$. Dla $0 < x < x'$, t. j. gdy ciężar P znajduje się między A i G, będzie $Q = -P\frac{x}{l}$. Ponieważ moment M ze względu na punkt F równy jest $Q\xi$, więc możemy napisać $Y = Q\left(1 - \frac{\xi}{b}\right)$. Ponieważ Q jest wypadkową z O_1 i P, musi więc dla równowagi być równem sile O_2 i działać w punkcie B, więc $\xi = -(l - x_1)$. Podstawmy tę wartość w równ. 175) dla Y, a otrzymamy:

$$Y = -\frac{xP}{l}\left(1 + \frac{l - x_1}{b}\right) = -\frac{Px}{l}\,\frac{b + l - x_1}{b} = -\frac{Px}{l}\,\frac{m + l}{b}. \qquad 185)$$

Dla danego krzyżulca EH zmienia się Y tylko według x, zatem to równanie jest równaniem linji prostej.

Jeżeli w równ. 185) założymy $x = 0$, to będzie $Y = 0$, dla $x = l$ będzie $Y = -\frac{l+m}{b}$, co możemy łatwo wykreślić. Zrobiwszy $F'F'' = P$ i przedłużywszy $L'F''$ aż do B'', otrzymamy $L'B'B'' \backsim L'F'F''$, z czego wynika, że $B'B'' : P = (l+m) : b$, więc $B'B'' = -P\frac{l+m}{b}$. A zatem dla $x = 0$ otrzymamy punkt A', dla $x=l$ B'' jako punkt linji wpływowej, która jednak jest tylko ważną od A' do G''.

Dla $l>x>x_1+a_2$ będzie $Q=P\left(1-\frac{x}{l}\right)$, zaś $\xi=x_1$, a więc według równ. 175):

$$Y=P\frac{l-x}{l}\left(1-\frac{x_1}{b}\right)=P\frac{l-x}{l}\frac{m}{b}. \quad . \quad . \quad . \quad 186)$$

Znów więc otrzymujemy równanie linji prostej, dla wykreślenia której potrzebujemy wyznaczenia dwóch punktów i tak dla $x=0$ będzie $Y=P\frac{m}{b}$, zaś dla $x=l$ będzie $Y=0$. Wykreślmy $F'F''=P$, połączmy L' z punktem F'', a otrzymamy $A'A''=\frac{Pm}{b}$; $A''B'$ jest więc prostą, wyznaczoną równ. 186). Według założenia z prostych $A'B''$ i $A''B'$ zatrzymać możemy tylko części $A'G''$ i $E''B'$. Z równ. 185) i 186) otrzymamy dla $x=-m$ $Y=\frac{Pm}{l}\frac{m+l}{b}=L'L''$, zatem proste $A'B''$ i $A''B'$ przecinają się w L'' nad punktem L'.

Pozostaje teraz jeszcze tylko wykreślenie linji wpływowej, gdy ciężar działa w przedziale GE (rys. 111), którą otrzymamy według §. 29, połączywszy G'' z E'' prostą. Aby otrzymać równanie tej prostej, załóżmy, że $x_1-a_1<x<x_1+a_2$ (rys. 112) i zróbmy $x=x_1-a_1+x_2$, to $Q=P\frac{l-x}{l}-P\frac{a-x_2}{a}$. Więc według równania 175)

$$Y=P\frac{l-x}{l}\frac{m}{b}-P\frac{a-x_2}{a}\left(\frac{b-a_1}{b}\right)$$

albo
$$Y=\frac{P}{b}\left[\frac{(l-x_1+a_1-x_2)m}{l}-\frac{(a-x_2)(b-a_1)}{a}\right]. \quad . \quad . \quad 187)$$

równanie prostej $G''E''$ (rys. 111).

Cała więc linja wpływowa składa się z trzech prostych $A'G''$, $G''E''$ i $E''B'$. Linja $G''E''$ przecina oś w punkcie obojętnym K.

Nazwijmy x_2' odstęp punktu K od G', to dla $x_2=x_2'$ musi być $Y=0$, więc z równ. 187) otrzymamy $am(l-x_1+a_1-x_2')=$ $=(a-x_2')(b-a_1)l$, a stąd

$$\mathbf{x}_2'=-\frac{(x_1-a_1)(m+l)}{a(b-x_1)-l(b-a_1)}a=\frac{(\mathbf{l}+\mathbf{m})\,\mathbf{x}'}{\mathbf{ln}-\mathbf{am}}\mathbf{a}, \quad . \quad . \quad 188)$$

jeżeli $\boldsymbol{n}=b-\boldsymbol{a}_1$.

Jeżeli punkt L wypada poza papier, łatwo obejść się będzie można bez punktu L' zapomocą konstrukcji pomocniczej, wskazanej w rys. 113).

Na pionowej linji FF_1' odcinamy $Ff = \frac{1}{n} FF_1'$, przyczem n jest dowolną liczbą całą. Wykreślmy teraz $fl // F_1' E$, to $Fl = \frac{1}{n} FL$.

Połączmy punkt l' z F'' i F''' prostemi, zróbmy $F'a' = \frac{1}{n} F'A'$ i $F'b' = \frac{1}{n} F'B'$, wyprowadźmy w a' i b' prostopadłe, a otrzymamy a'' i b''. Poziome, wykreślone przez te punkty, wyznaczają punkty A'' i B'', odpowiadające takimże punktom w rys. 111, poczem wykreślamy linję wpływową, jak poprzednio.

Punkt obojętny możemy wyznaczyć też w inny sposób, podany przez Culmanna (rys. 114).

Jeżeli ciężar P znajduje się w przedziale CG (pomost tu na pasie dolnym), rozkłada się na siły P_1 i P_2, działające w węzłach sąsiednich pasu, na którym znajduje się pomost (tu dolnego). Ciężar ten wywołuje siłę wewnętrzną D w krzyżulcu HG. Dla pewnego położenia tego ciężaru $D=0$. Punkt obojętny, w którym gdy działa P, D jest $=0$, znajdziemy w następny sposób. Przedłużamy przeciętą część pasu górnego HT do pionowych podporowych, łączymy A' z C i B' z G i przedłużamy te proste do przecięcia się w E, to E jest właśnie punktem obojętnym. Aby tego dowieść, załóżmy, że w E działa siła P i uważajmy wielobok $A'CGB'$, jako wielobok sznurowy, to, jeżeli $st=P$, gdy zrobimy $sO//A'E$, $tO//EB$ i $Or//GC$, to $sr=P_1$, $rt=P_2$. Jeżeli teraz wykreślimy $Ou//HT$, to $su=O_1$, $ut=O_2$. Położenie siły poprzecznej $Q=O_1-P_1$ otrzymamy, przedłużywszy odnośne boki wieloboku sznurowego aż do przecięcia się w punkcie L. Z równ. 178) widzimy, że jeżeli siła poprzeczna zaczepia w L, czyli jeśli $c=0$, $D=0$, a więc rzeczywiście E jest punktem obojętnym.

Jeżeli pomost jest na pasie prostym, to zamiast powyższej konstrukcji dla wyznaczenia punktu obojętnego, możemy użyć innej, podanej na rys. 115 dla kraty prostokątnej.

Według powyższej konstrukcji należałoby dla wyznaczenia punktu obojętnego dla siły D w CG przedłużyć HT do przecięcia się z pionowemi podporowemi w A' i B' i wykreślić $A'C$ i $B'G$ do przecięcia się w E. Zamiast tego łatwiej jest wykreślić proste AH i BT do przecięcia się w E', które leży ponad punktem E, jak to zaraz udowodnimy. Z rysunku mamy:

$$\frac{\begin{array}{c}E'K:HC=(x'+a_1'):x',\\ TG:E'K=x_3:(x_3+a_2')\end{array}}{TG:EC=x_3(x'+a_1'):x'(x_3+a_2')} \quad \ldots \quad 189)$$

Zaś dla pierwszej konstrukcji jest:

$$\frac{\begin{array}{c}K_1E:HC=(x'+a_1):x'\\ TG:K_1E=x_3:(x_3+a_2)\end{array}}{TG:HC=x_3(x'+a_1):x'(x_3+a_2)} \quad \ldots \quad 190)$$

a więc

Z porównania równ. 189) i 190) wynika, że $a_1=a_1'$, że więc punkt E' wyznacza punkt obojętny.

Linję wpływową sił wewnętrznych w krzyżulcach możemy też wyznaczyć w sposób podany przez Müllera Breslaua, jeżeli znamy linje wpływowe sił wewnętrznych w pasach. Niech będą linje mm i $m'm'$, linjami wpływowemi sił wewnętrznych w częściach pasów CG i GT (rys. 116), to z nich możemy łatwo wyznaczyć linje wpływowe dla sił wewnętrznych D i D' w krzyżulcach HG i GN. Załóżmy, że siła $P=1$ działa w H, $S_2=op_1$, $S'_2=op_2$. Siły wewnętrzne, zaczepiające w węźle G muszą być w równowadze, da się więc wykreślić zamknięty wielobok sił, z którego otrzymamy wielkości sił wewnętrznych $-D$ i $+D'$.

Zróbmy teraz $op_3=-D$ i $op_4=+D$, to punkty p_3 i p_4 będą punktami linij wpływowych D i D'. Jeśli przypuścimy, że siła $P=1$ działa w innych punktach, to wyznaczymy w ten sam sposób inny punkt linij wpływowych D i D'. Ponieważ linja wpływowa składa się w tym wypadku z trzech prostych, więc wystarczy w ten sposób wyznaczyć 2 lub 3 punkty, aby całą linję wykreślić.

§. 66. Ogólny sposób wykreślenia linij wpływowych według Müllera Breslaua.

Linje wpływowe sił wewnętrznych jakichkolwiek belki statycznie wyznaczalnej dadzą się wedle Müllera Breslaua jeszcze inaczej wyznaczyć.

Przypuśćmy, że w punkcie K, ostatnim węźle przed B, zaczepia siła P' tak wielka, że oddziaływanie $O_1=1$ (rys. 117). Siły wewnętrzne w przeciętych trzech prętach niech będą S_1', D' i S_2', dadzą się one łatwo wyznaczyć zapomocą sposobu Cullmanna, lub, gdy nam chodzi też o siły w innych prętach, zapomocą planu sił, który kreślimy, zacząwszy od A. W tym ostatnim wypadku wypadają jednak siły przy K dość wielkie, a że błędy konstrukcji się dodają, nie bardzo dokładne, trzeba więc je skontrolować albo rachunkiem albo sposobem Cullmanna. Podobnie zaczepiamy w węźle K_1, najbliższym A (rys. 118), siłę P'' tak wielką, aby $O_2=1$. Dla tego wypadku wyznaczymy zapomocą sposobu Cullmanna lub planu sił, siły S_1'', D'' i S_2'', przyczem wyznaczamy siły, począwszy od B, nie wyznaczając jednak w żadnym wypadku sił poza P' i P''. Jeżeli belka jest symetryczna, to plany sił dla przypadku $O_1=1$ i dla $O_2=1$ będą zupełnie podobne tak, że wystarczy wykreślenie jednego planu sił.

Przypuśćmy teraz, że siła $P=1$ porusza się po belce od A do B (rys. 119) i szukajmy n. p. siły D, to gdy P stoi w F, wtedy $O_1=P\frac{b}{l}$. Gdyby $O_1=1$, to wedle planu sił byłoby $D=D'=A'A''$, ale że $O_1=P\frac{b}{l}$, więc $D=A'A''.\frac{Pb}{l}=Py$, bo $y=A'A''\frac{b}{l}$. A zatem $B'A''$ jest linją wpływową dla D i to aż do H''. Jeżeli teraz $B'B''$ jest D'', to jest to siła w D dla $O_2=1$, a z tego samego powodu jest $A'B''$ linją wpływową dla D od A' do G''. Jeśli teraz połączymy G'' z H'' prostą, otrzymamy linję wpływową $A'G''H''S'$.

Jeżeli chcemy wyznaczyć linję wpływową dla siły S_1 (rys. 120), postępujemy w ten sam sposób. Jeżeli dla $O_1=1$ wyznaczymy S_1' i zrobimy $A'A''=S_1'$, to wedle powyższego jest $B'H''$ linją wpływową dla S_1. W tym wypadku wiemy, że po lewej stronie linja wpływowa jest $A'H''$, ogólnie jednak będzie $B'B''=S_1''$ dla $O_2=1$.

§. 67. Linje wpływowe sił wewnętrznych dla belki z kratą półprzekątniową.

Przetnijmy belkę z kratą półprzekątniową w linji II (rys. 121) i utwórzmy momenty ze względu na punkt m', to otrzymamy:

$$G_{m+1}=-\frac{M_m}{r_m}=-\frac{M_m}{h_m}\text{siecz}\,\sigma_{m+1}\quad\ldots\quad 191)$$

Dla przekroju $II\,II$ ze względu na punkt m otrzymamy:

$$S_{m+1}=\frac{M_m}{b_m},\quad\text{więc}\ S_{m+1}=-G_{m+1}\,\text{dost}\,\sigma_{m+1}\quad\ldots\quad 192)$$

Więc poziome składowe sił w pasach są równe. Dla równowagi w punkcie K otrzymamy:

$$D_m \text{ wst } \alpha = D'_m \text{ wst } \beta . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 193)$$

Więc i składowe poziome przekątni są także równe.

Dalej mamy: $V_0 = G_1 = S_1 = 0$, $V_0' = 0$.

Z wzoru 191) i 192) widzimy, że siła w pasach dla $m+1$ przedziału jest tak wielką, jak siła w kracie pojedynczej dla m tego przedziału. Z tego wynikają linje wpływowe dla pasów. Znając Q, G_m i S_m otrzymamy z wieloboku sił D' i D. Jeżeli przyjmiemy $Q = O_1$ i $Q = O_2$, otrzymamy odcinki potrzebne do wykreślenia linji wpływowej wedle Müllera Breslaua.

Z równ. 193) wynika, że jeżeli $\alpha = \beta$, jeżeli przekątnie są równo nachylone do pionu, to siły wewnętrzne w krzyżulcach jednego przedziału, $D_m = D'_m$, są równe.

Jeżeli przetniemy pręty naokoło węzła m, to G_m, D_m, V_m i G_{m+1} muszą być w równowadze, z tego znamy G_m i D_m, wyznaczymy V_m i G_{m+1}.

Tak samo postąpimy ze względu na punkt m' i otrzymamy V'_m i teraz możemy sposobem Müllera Breslaua wykreślić linje wpływowe. D'_m, D_m, V_m i V'_m oznaczają odnośne siły dla $O_2 = 1$. Dla V'_m przekrój $II\,II$ wkracza w sąsiedni przedział wskutek czego, jeżeli siła stoi w m', mamy $Q = O_1 - P$. Dlatego przedłużamy proste $a_1 b_1$ do m, tu odcinamy $m_1 m_2 = 1$ i w ten sposób otrzymujemy punkt m_2.

Prostą $r_1 m_2$ możemy otrzymać też, przedłużając D_m do przecięcia się z przedłużeniem pasu dolnego r, wtedy $r_1 n_2$ przedłużamy do m_2. Dla słupa środkowego wyznaczyć możemy linję wpływową dla równowagi w węźle $m+1$.

§. 68. Linje wpływowe dla belki z drugorzędnem podparciem.

Na rys. 122 widzimy belkę kratową wieloboczną z drugorzędnem podparciem. Chodzi o wyznaczenie linij wpływowych w jednym przedziale.

W tym celu przetnijmy belkę płaszczyzną $I\,I$ i wyznaczmy G, S i D' sposobem Cullmanna dla $O_1 = 1$ i $O_2 = 1$. Przeciąwszy belkę płaszczyzną $II\,II$, możemy wyznaczyć też dla obu wypadków V, przyczem zauważymy, że $D'_1 = 0$, bo w D_1 powstaje tylko siła dla obciążenia danego przedziału.