$$najw(-M) = -\frac{p}{2} a(a+b) \quad \ldots\ldots \quad 115)$$

Jest to równanie linji prostej poziomej $B'C'$ (rys. 76).

Dla układu ciężarów skupionych wynika obciążenie najniekorzystniejsze z kształtu linij wpływowych. Dla *najw* $(-M)$ muszą być dwa układy ciężarów skupionych dla mostów drogowych, dla kolejowych zaś należy pociąg w ten sposób przyjąć, jak to wyłożyliśmy w §. 36 ust. 2.

Na rys. 75 i 76 dodaliśmy siły poprzeczne i momenty, wywołane ciężarem własnym i ruchomym i otrzymaliśmy linje *najw* Q i *najw* M dla obciążenia równoczesnego obu ciężarami.

C. Belka kratowa równoległa.

VII. Belka o kracie pojedyńczej.

§. 38. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Belkę kratową poznaliśmy już w wykładzie statyki budowli [1]); poznaliśmy tam rozmaite jej rodzaje i części składowe. Tu podamy dalsze rozwinięcie zasad tamże podanych, a najprzód zastanawiać się będziemy nad belką kratową równoległą o kracie pojedyńczej. Przetnijmy daną belkę, której część widzimy na rys. 77, płaszczyzną II i odejmijmy prawą część belki. Aby lewa część pozostała w równowadze, musimy w przeciętych przekrojach zaczepić takie siły, jakie w nich pierwej działały. Ponieważ przypuszczamy, że siły zewnętrzne działają tylko w węzłach, a krzyżulce są połączone przegibnie, więc siły wewnętrzne działają w kierunku osi przeciętych prętów.

Nazwijmy S_1 i S_2 siły wewnętrzne, działające w pasach belki równoległej, D siłę, działającą w krzyżulcu CE, h wysokość belki, Q siłę poprzeczną czyli wypadkową wszystkich sił, działającą na lewą część belki, to na lewą część belki działają cztery siły: S_1, D, S_2 i Q. Cztery te siły muszą być w równowadze, więc ze względu na punkt E suma momentów wszystkich sił musi być równą zeru. Zatem $M_1 + S_1 h = 0$, jeżeli $M_1 = Qz$ jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt E. Stąd otrzymamy:

---

[1]) P. Podr. Statyki Budowli III. wyd., str. 371 i nast.

$$S_1 = -\frac{M_1}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 116)$$

Podobnie otrzymamy ze względu na punkt C $M_2 - S_2 h = 0$, więc:

$$S_2 = \frac{M_2}{h}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 117)$$

jeżeli M_2 jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt C.

Ponieważ h jest liczbą stałą, więc z wzorów 116) i 117) wynika, że siły wewnętrzne w pasach są proporcjonalne do momentów, zatem linje wpływowe sił wewnętrznych w pasach są te same, co dla momentów, jeżeli tylko zmienimy odpowiednio podziałkę, a najniekorzystniejsze obciążenie będzie to, dla którego moment będzie największym; wyznaczamy je więc według §. 20.

§. 39. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w krzyżulcach.

Jeżeli przetniemy belkę kratową płaszczyzną II (rys. 78), która przecina także krzyżulec BE, to dla równowagi suma pionowych składowych sił, działających na lewą część belki, S_1, D, S_2 i Q, ma być równą zeru, zatem $Q - D$ dost $\alpha = 0$. Stąd:

$$D = Q \text{ siecz } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 118)$$

Podobny wzór otrzymamy dla krzyżulca BC:

$$D_1 = -Q_1 \text{ siecz } \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 119)$$

jeżeli Q_1 oznacza siłę poprzeczną dla przekroju $II\ II$.

Z równ. 118) i 119) widzimy, że dopóki Q nie zmienia znaku, krzyżulce są naprzemian ciśnione i ciągnione. Ciągnione są te, które spadają ku miejscu belki, gdzie $Q = 0$, więc moment największy, ciśnione, które spadają w stronę przeciwną.

§. 40. Wykreślne wyznaczenie sił wewnętrznych.

a) Sposób wielobokowy.

Wykreślnie możemy wyznaczyć siły wewnętrzne dla danego obciążenia zapomocą planu sił [1]).

Wyznaczywszy oddziaływania znanym sposobem, wykreślamy wielobok sił na linji mn (rys. 6, tabl. I), albo też rozsuwamy go dla przejrzystości tak, jak to na rysunku uwidoczniliśmy.

---

[1]) P. Podr. Statyki Budowli III. wyd., str. 321 i 373.

Teraz wykreślamy w znany sposób plan sił i tak wyznaczamy wszystkie siły zewnętrzne. Sposobu tego z korzyścią użyć możemy dla ciężaru stałego i także do obliczania sił wewnętrznych w pasach, wywołanych ciężarem ruchomym ciągłym, gdyż wiemy, że największe siły wewnętrzne w pasach powstają dla obciążenia zupełnego.

Dla obciążenia układem ciężarów skupionych jest najniekorzystniejsze obciążenie dla każdej części pasu inne, więc musielibyśmy dla każdej części pasu kreślić osobny rysunek. Także i dla krzyżulców sposób ten nie da się użyć z korzyścią.

b) Wyznaczenie sił wewnętrznych na podstawie sił poprzecznych i momentów.

1. Krzyżulce. Jeżelibyśmy otrzymali linję qq (rys. 79), jako linję największych sił poprzecznych, to dla krzyżulca AB przedstawia *najw* Q długość ab.

Według równ. 118) jest $D = Q$ siecz α, więc $P = ab$ siecz α. Wykreślmy przez punkt a linję $ae \parallel AB$, to $ae = ab$ siecz α, więc $ae =$ *najw* Q siecz $\alpha =$ *najw* D. Zatem ae przedstawia największą siłę wewnętrzną, działającą w AB.

Jeżeli podzielimy D przez naprężenie dopuszczalne τ, to otrzymamy powierzchnię przekroju F. Dla stałego τ możemy to zrobić, zmieniając odpowiednio podziałkę, a wtedy ae przedstawia wprost teoretyczną powierzchnię przekroju.

2. Pasy. Według równ. 116) i 117) siły wewnętrzne w pasie górnym lub dolnym bez względu na znak są $S = \frac{M}{h}$. Jeżeli man przedstawia linję *najw* M (rys. 80), a chcemy wynaleść siłę wewnętrzną w części pasu AB, to największy moment dla punktu C jest ab.

Moment ten mamy jeszcze podzielić przez h, co najlepiej zrobić, zmieniając podziałkę tak, że prosta ab da wprost siłę wewnętrzną S. Jeżeli chcemy otrzymać przekrój, należy dla stałego naprężenia dopuszczalnego jeszcze raz zmienić podziałkę.

§. 41. Przykład.

Most kolejowy jednotorowy o dwu belkach głównych kratowych z kratą równoboczną o rozpiętości teoretycznej 21 m. Pomost leży górą (tabl. I). Przyjmujemy wysokość belki $h = 2{,}5\ m$, a odstęp węzłów $\frac{21}{7} = 3\ m$. Niechaj będzie w przybliżeniu jak dla poc. austrjackiego według Velflika dla pomostu górą (§. 2) ciężar stały dla jednej belki $g=\frac{1}{2}(41,21+934)$ *kg/m* $=$ $=0,9$ *t/m*. Osobno obliczyliśmy ciężar pomostu z poręczami, który waży w przybliżeniu 600 *kg/m*, więc dla jednej belki 0,3 *t/m* i działa na pas górny, to $g_1=0,60$ *t/m*, $g_2=0,30$ *t/m*. Jako ciężar ruchomy przyjmujemy pociąg normalny polski dla kolei drugorzędnych, a naprężenie dopuszczalne według rozporządzenia polskiego.

Pasy. Ciężar węzłowy górny wynosi $G_1=3.0,6=1,8\,t$, dolny $G_2=$ $=3.0,3=0,9\,t$. Nie uwzględniając ciężarów nad podporą mamy sumę ciężarów $7.1,8+6.0,9=18,0\,t$. Oddziaływanie $O_1=O_2=9,0\,t$. Otrzymamy moment $M_{\mathrm{I}}=9,0.1,5=13,5$ *tm*, $M_{\mathrm{II}}=9,0.4,5-1,8.3,0+$ $-0,9.1,5=35,1$ *tm* i t. d. Wyniki zestawiliśmy w tabl. XVI.

Dla ciężaru ruchomego wyznaczamy według §. 19 najniekorzystniejsze obciążenie i otrzymujemy, że dla węzła I ma stać na nim 1 koło, dla węzłów II i 1 drugie koło, dla węzła III trzecie koło, dla węzła IV czwarte koło, dla węzła 2 ma stać na prawej poprzecznicy 3 koło, dla węzła zaś 3 4 koło. Dla tych położeń pociągu obliczyliśmy dla najniekorzystniejszego położenia (równ. 92) momenty, uwzględniając poprzecznice.

Siłę wewnętrzną obliczyliśmy wedle wzoru 116) i 117), zaś przekrój teoretyczny wedle wzoru $F=\frac{S}{\tau}=\frac{S}{0,900}$ wedle rozporządzenia polsk. min. kol. Wyniki obliczenia zestawiliśmy w następnej tabliczce dla połowy belki, dla drugiej połowy są one takie same.

Tabl. XVI.

Część pasu	Moment w *t/m*: ze względu na węzeł	z powodu ciężaru: stałego	z powodu ciężaru: ruchomego	razem	Siła wewnętrzna w *t*	Przekrój teoretyczny w cm^2
A—1	I	13,5	60,9	74,4	29,8	33,2
1—2	II	33,8	147,0	180,8	72,3	80,4
2—3	III	45,9	195,7	241,6	96,7	107,5
3—4	IV	50,0	202,4	252,4	101,0	112,3
0—I	A	0,0	0,0	0,0	0	0
I—II	1	24,3	104,0	128,3	51,3	57,0
II—III	2	40,5	171,5	212,0	84,8	94,3
III—IV	3	48,6	200,4	249,0	99,6	110,7

Wykreślnie wyznaczyliśmy siły wewnętrzne w pasach na tabl. I. i przyjęliśmy następujące podziałki: I. dla długości $\frac{1\,cm}{2\,m}=1:200$, II. dla sił $\frac{1\,cm}{2\,t}$. Przyjąwszy odległość biegunową $a=20\,t$, mamy III. podziałkę dla momentów $\frac{1\,cm}{20.2\,tm}=\frac{1\,cm}{40\,tm}$. Dla ciężaru ruchomego przyjęliśmy 4 razy mniejszą podziałkę $\frac{1\,cm}{8\,t}$, dla długości $\frac{1\,cm}{2\,m}$ zaś $a=20\,t$ tak, że momenty odczytujemy w tej samej podziałce, co dla ciężaru stałego $\frac{1\,cm}{20.2\,tm}=\frac{1}{40\,tm}$. Chcąc odczytać wprost przekroje, zrobiliśmy podziałkę IV. $\frac{1\,mm}{4:(2,5.0,92)}=\frac{1\,mm}{1,78\,cm^2}$. Przekroje te wykreśliliśmy według podziałki V. $\frac{1\,cm}{50\,cm^2}$, na rys. 4, który przedstawia teoretyczny rozkład materjału pasów.

Krzyżulce. Dla ciężaru stałego najlepiej wyznaczyć siły poprzeczne na podstawie ciężarów węzłowych. Ciężar węzłowy w pasie dolnym wynosi $G_2=0,9\,t$, w pasie górnym $G_1=1,8\,t$, w punktach I $G_3=\frac{3}{4}1.8=1,35\,t$, w 0 $G_4=\frac{1}{4}1,8=0,45\,t$. Oddziaływanie wyznaczamy, nie uwzględniając ciężarów węzłowych w A i B, bo one przenoszą się wprost na podpory. A więc otrzymamy $O_1=\frac{1}{2}(6.0,9+5.1,8+2.1,35+2.0,45)=9,0\,t$. Siły poprzeczne wyznaczymy teraz przez odejmowanie.

Siły poprzeczne dla ciężaru ruchomego obliczyliśmy na podstawie §. 29, przyczem dla drugiego i trzeciego przedziału stoi drugie koło na prawej poprzecznicy. Dla tego położenia jest dla drugiego przedziału:

$$O_1=\frac{1}{21}(5.8.15+4.5,0.5,75=34,7\,t.\quad Q=34,7-\frac{8.1,5}{3}=30,7\,t.$$

Dla pierwszego, czwartego i następnych przedziałów sprawia *najw* Q położenie pociągu, gdy 1 koło parowozu stoi na prawej poprzecznicy. Dalej mamy $D=Q$ siecz α, przyczem st $\alpha=\frac{1,5}{2,5}=0,6$, więc siecz $\alpha=$ $=\sqrt{1+0,6^2}=1,166$. Przekrój obliczyliśmy wedle wzoru $F=\frac{D}{0,90}$, a dla porównania także według wzoru 20) w §. 12, przyczem $\tau=800\left(1\pm\frac{1}{2}\frac{najm\,D}{najw\,D}\right)$.

Tabl. XVI*a*.

Krzyżulce	Siła poprzeczna w t: wskutek ciężaru stałego	wskutek ciężaru ruchomego: *najw* $+Q$	wskutek ciężaru ruchomego: *najw* $-Q$	Suma: *najw* $+Q$	Suma: *najmn* $-Q$	Sieczna α	Siła w krzyżulcach w t: *najw* D	*najmn* D	Przekrój teoret. w *cm* według rozporządzenia minister. cm^2	wzoru Weyraucha $\tau=800(1+\frac{1}{2}\xi)$
A 0	+0,45	+40,55	0,00	+41,00	+0,45	1,000	∓41,00	∓ 0,50	—45,6	—50,9
A I	+8,65	+40,55	0,00	+49,20	+8,65	1,176	∓57,90	∓10,20	—64,3	—66,6
1 I	+7,35	+61,20	—0,80	+38,55	+6,55	1,176	+45,40	+ 7,70	+50,4	+52,3
1 II	+6,55	+31,20	—0,80	+37,75	+5,75	1,176	—44,40	— 6,80	—49,4	—51,6
2 II	+4,80	+22,08	—3,36	+26,88	+1,44	1,176	+31,60	+ 1,70	+35,2	+38,5
2 III	+3,90	+22,08	—3,36	+25,98	+0,54	1,176	—30,60	+ 0,70	—34,0	—38,6
3 III	+2,15	+14,80	—8,72	+16,95	—6,57	1,176	+20,00	— 7,70	+22,2	+30,5
3 III	+1,20	+14,80	—8,72	+16,00	—7,52	1,176	—18,80	+ 8,90	—20,9	—30,8

Z tabliczki powyższej widzimy, że przekroje krzyżulców w średniej części belki, obliczone według rozporządzenia ministerjalnego, są za małe. Należałoby przynajmniej tam, gdzie *najmn* D ma znak przeciwny, liczyć wedle Weyraucha. Znak — w czterech ostatnich kolumnach oznacza, że przekrój pracuje na ciśnienie.

Wykreślnie wyznaczyliśmy siły poprzeczne według zasad, poprzednio wyłożonych, mierząc siły wedle podziałki II. Na pionowej przez A odcinamy ciężary kół parowozów i jaszczyka (rys. 2) i przyjąwszy biegun w B, kreślimy wielobok sznurowy, którego rzędne przedstawiają oddziaływania O_1 dla obciążenia jednostronnego, dlatego nazywamy go też wielobokiem oddziaływań. A że dla tego obciążenia *najw* $Q=O_1$, więc według §. 29 otrzymamy siły poprzeczne, kreśląc poziome z punktów przecięcia się wieloboku O_1 z punktami węzłowymi. Badamy także, czy drugie koło nie sprawia *najw* Q (p. rys. 62). Gdy drugie koło stoi w r, pierwsze w m, P_1 rozdziela się na $P'=mn$, i $P''=P_1-mn$. Wtedy $Q=O_1-P'=mp-mn=np$. Zróbmy $rt=np$, to widzimy, że tu $rt>rs$. A więc w drugim przedziale drugie koło na węźle sprawia największość. Powtarzając to samo dla innych węzłów, przekonamy się, że to samo dzieje się w trzecim przedziale, zresztą wszędzie 1 koło sprawia *najw* Q. Dodajmy do tego siły poprzeczne wskutek ciężaru własnego, a otrzymamy *najw* siły poprzeczne. Przez siecz α pomnożyliśmy, kreśląc równoległe do krzyżulców. Długości te przedstawiają siły wewnętrzne D, a odczytane według podziałki VI przekroje teoretyczne. Podziałkę VI zrobiliśmy, zmieniając jednostkę podziałki II w stosunku 0,9 : 1, więc $\frac{1\ cm}{8:0{,}9\ cm^2}=\frac{1\ cm}{8{,}89\ cm^2}$.

Siły wewnętrzne wskutek ciężaru własnego wyznaczyliśmy oprócz tego według metody wielobokowej w rys. 6, a to według podziałki II $\frac{1\ cm}{2t}$. Wielobok sił mn rozsuwamy przytem dla przejrzystości i kreślimy go w ten sposób, że uwzględniamy osobno ciężary węzłowe górne i dolne i kreślimy je po porządku naokół belki, a więc ciężary dolne, 1, 2, 3...6, oddziaływanie O_2, potem ciężary górne VIII, V...1, 0, nakoniec O_1. Wykreślenie planu sił nie przedstawia teraz żadnych trudności.

§. 42. Drugorzędne zawieszenie poprzecznic.

Ze względów ustrojowych nieraz odstęp węzłów jest za wielkim i zachodzi potrzeba urządzenia poprzecznic między węzłami. Punkty te pasu podpieramy wtedy osobnymi krzyżulcami i otrzymujemy w ten sposób kratę z drugorzędnem zawieszeniem (c. *soustava z podružnymi pruty)*. Rysunek 80 przedstawia belkę z zawieszeniem drugorzędnem węzłów pasu dolnego na przekątniach. Zbadajmy, jakie są linje wpływowe krzyżulców drugorzędnych i o ile zmieniają się te linje dla prętów pierwszorzędnych belki kratowej.

Jeżeli siła $P=1$ działa w E, to ciągnienie w GE jest równe P, a linja wpływowa ma kształt trójkąta cef (rys. f). Dla największości ciągnienia w GE ma być przedział całkowicie obciążony, obciążenie reszty przęsła jest obojętnem. Ciągnienie w *EG* równa się *C*, ciężarowi węzłowemu w *E*.

W ściągnie drugorzędnem *GK* powstaje wskutek ciężaru *P* w *E* ciągnienie $\frac{1}{2}$ *P* siecz α, linja wpływowa ma ten sam kształt, co dla *EG*, należy rzędne tylko pomnożyć przez $\frac{1}{2}$ siecz α. Ciągnienie w *GK* równa się tu $\frac{1}{2}$ *C* siecz α.

Co się tyczy linij wpływowych prętów pierwszorzędnych w przedziale *CEF* to drugorzędne zawieszenie sprawia tylko zmianę tych linij w tym przedziale, poza przedziałem linje wpływowe zostają takie same, jak gdyby nie było drugorzędnego podparcia. Dla pasu górnego *HK* przedstawia rys. *b)* linję wpływową. Powierzchnia wpływowa została tu zwiększoną o trójkąt *cef*, który jest linją wpływową momentu ze względu na *G*. Dla pasu dolnego *CF* linja wpływowa, a zatem i siły wewnętrzne pozostają te same, co dla kraty bez zawieszenia drugorzędnego. To samo możemy powiedzieć o linji wpływowej ściągna *GF* (rys. *c*), gdy powierzchnia wpływowa dla ściągna *HG* (rys. *d*) jest zwiększoną o trójkąt *cef* równy powierzchni wpływowej dla *GK*. O takiż trójkąt *cef* jest też zwiększoną powierzchnia wpływowa siły wewnętrznej w słupie *CH* (rys. *e*). Tutaj zachodzi jednak zmiana także na długości *CL*, bo przecięcie słupa trafia też pręt *HM*, należący do drugiego przedziału.

Jeżeli przetniemy krzyżulce w około punktu *G*, to suma składowych poziomych równa się zeru, więc D wst $\alpha + D_2$ wst $\alpha =$ $= D_1$ wst α, zatem $D = D_1 - D_2$. Ponieważ gdy siła działa na długości *AC* i *FB*, więc poza przedziałem, $D = 0$, więc wtedy $D_1 = D_2$, linja wpływowa dla D i D_2 jest ta sama. Jeżeli siła działa w przedziale *CF*, to siła D_1 jest większą od D_2 w D, co odpowiada trójkątowi *cef*. Podobny dowód da się przeprowadzić dla linji wpływowej dla *HK* i uzasadnić dodanie trójkąta *cef*.

O prawdziwości podanych w rys. 80 linij wpływowych przekonać się zresztą można łatwo w następny sposób. Przypuszczamy, że w *C* działa siła $P = 1$ i wykreślamy dla tego wypadku plan sił, powtarzamy to samo dla wypadków, gdy siła $P = 1$ zaczepia w *E* a potem w *F*, *L* i *N*, to na podstawie tych planów sił, możemy dla wszystkich prętów danego przedziału wyznaczyć linje wpływowe.

Rys. 81 przedstawia zawieszenie drugorzędne na pasie górnym belki Warrena. Linja wpływowa dla słupa wiszącego przedstawia trójkąt *cef* (rys. *f*). Linje wpływowe dla pasów S_1 i S_2 nie doznają zmiany (rys. *b* i *c*). Powierzchnie wpływowe dla krzyżulców ukośnych powiększają się o trójkąty *cef* (rys. *e*) i *chu* (rys. *d*) podobnie, jak powyżej.

Znając linje wpływowe, potrafimy łatwo w znany sposób wyznaczyć największe siły wewnętrzne dla obciążenia ciągłego lub układem ciężarów skupionych [1]).

kątniowa

§. 43. Krata półprze~~gubowa~~.

W ostatnich czasach zaczęto na wniosek Haeselera używać także kraty półprze~~gubowej~~ kątniowej (n. *K-Ausfachung, Fachwerk mit halben Diagonalen).*

Zastanowimy się tu nad siłami w niej powstającemi (rys. 82). W jednym przedziale mamy tu dwie półprzekątnie (n. *Halbdiagonale*), nachylone pod tym samym kątem α. Schodzą się one w połowie słupa D i D_1. Ze względu na równowagę w węźle G musi być D_1 wst $\alpha + D$ wst $\alpha = 0$, zatem $D_1 = -D$, więc D i D_1 mają znak przeciwny. Jeżeli przetniemy belkę płaszczyzną II i utworzymy sumę składowych pionowych, to $Q + D_1$ dost $\alpha + D$ dost $\alpha = O$, stąd

$$Q = 2\,D_1 \operatorname{dost} \alpha = 0, \qquad D_1 = -\frac{Q}{2} \operatorname{dost} \alpha = -D. \qquad 120)$$

Jeżeli utworzymy równanie momentów ze względu na K, to otrzymamy $-S_r\,h + M_{r-1} + D_1\,d_1 - D\,d = 0$. Ale składowe poziome sił D_1 i D są równe, a $D_1\,d.\,\mathrm{wst}\,\alpha = D\,d$ wst $\alpha = D\,\mathrm{wst}\,\alpha . \frac{h}{2}$.
Więc $D_1\,d_1 - D\,d = 0$, stąd:

$$S_r = \frac{M_{r-1}}{h} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 121)$$

Zarazem otrzymamy ze względu na to, że suma sił poziomych równa się zeru $\qquad S_r = S_{1\,r}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 122)$

Siły wewnętrzne w obu częściach pasu jednego przedziału są równe i wprost przeciwne i mniejsze w pasie górnym, niż dla kraty pojedyńczej.

Dla równowagi w punkcie G otrzymamy:

$$W - U + D_1 \operatorname{dost} \alpha - D \operatorname{dost} \alpha = 0, \text{ więc } \mathbf{W} = \mathbf{U} + \mathbf{2\,D} \operatorname{\mathbf{dost}} \alpha \qquad 123)$$

Ze względu na równowagę w F

$$D'_1 \operatorname{dost} \alpha + U = 0, \quad \mathbf{U} = -\mathbf{D}'_1 \operatorname{\mathbf{dost}} \alpha. \; . \; . \qquad 124)$$

---

[1]) P. Balicki. „Czasop. Techn." 1902, str. 293.