TECHNIKA CAŁKOWANIA

opracowana na podstawie

„ĆWICZEŃ PRAKTYCZNYCH Z RACHUNKU RÓŻNICZ. i CAŁKOWEGO"

prof. b. politechniki warsz.

Morduchaj-Bołtowskiego.

NA PRAWACH RĘKOPISU.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA.

1917.

Druk. i Lit. „SATURN" Marszałkowska 91.

I Zasadnicze twierdzenia i wzory z rachunku różniczkowego.

1). $y = af(x)$; $y' = af'(x)$; $dy = af'(x)dx$; —

2). $y = f(x) + C$; $y' = f'(x)$; $dy = f'(x)dx$; —

3). $y = f(x) + \varphi(x) + F(x) + \ldots\ldots$;
$y' = f'(x) + \varphi'(x) + F'(x) + \ldots\ldots$;
$dy = f'(x)dx + \varphi'(x)dx + F'(x)dx + \ldots\ldots$

4). $y = f(x)\varphi(x)$; $y' = f(x)\varphi'(x) + \varphi(x)f'(x)$;
$dy = f(x)\varphi'(x)dx + \varphi(x)f'(x)dx$; —

5). $y = \frac{1}{\varphi(x)}$; $y' = \frac{-\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$; $dy = \frac{-\varphi'(x)dx}{[\varphi(x)]^2}$; —

6). $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$; $y' = \frac{\varphi(x)f'(x) - f(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$;
$dy = \frac{\varphi(x)f'(x)dx - f(x)\varphi'(x)dx}{[\varphi(x)]^2}$; —

7). $y = x^n$; $y' = nx^{n-1}$; $dy = nx^{n-1}dx$; —

8). $y = \sqrt[n]{x^p} = x^{\frac{p}{n}}$; $y' = \frac{p}{n}x^{\frac{p}{n}-1}$; $dy = \frac{p}{n}x^{\frac{p}{n}-1}dx$; —

9). $y = \frac{1}{\sqrt[n]{x^p}} = x^{-\frac{p}{n}}$; $y' = -\frac{p}{n}x^{-\frac{p}{n}-1}$;
$dy = -\frac{p}{n}x^{-\frac{p}{n}-1}dx$; —

10). $y = \operatorname{Log}_{10} x$; $y' = \frac{\operatorname{Log} e}{x}$; $dy = \frac{\operatorname{Log} e \, dx}{x}$; —

11). $y = \log_e x$; $y' = \frac{1}{x}$; $dy = \frac{dx}{x}$; —

12). $y = a^x$; $y' = a^x \log a$; $dy = a^x \log a \, dx$; —

13). $y = e^x$; $y' = e^x \log e = e^x$; $dy = e^x dx$; —

14). $y = e^{-ax}$; $y' = -a e^{-ax}$; $dy = -a e^{-ax} dx$; —

15). $y = \sin x$; $y' = \cos x$; $dy = \cos x \, dx$; —

16). $y = \cos x$; $y' = -\sin x$; $dy = -\sin x \, dx$; —

17). $y = \operatorname{tang} x$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$; —

18). $y = \operatorname{cotg} x$; $y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$; $dy = \frac{-dx}{\sin^2 x}$; —

19). $y = \sec x$; $y' = \sec x \operatorname{tang} x$; $dy = \sec x \operatorname{tang} x \, dx$; —

20). $y = \operatorname{cosec} x$; $y' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$; $dy = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx$; —

21). $y = \arcsin x$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; —

22). $y = \arccos x$; $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $dy = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$; —

23). $y = \operatorname{arc\,tg} x$; $y' = \frac{1}{1+x^2}$; $dy = \frac{dx}{1+x^2}$; —

24). $y = \operatorname{arc\,cotg} x$; $y' = \frac{-1}{1+x^2}$; $dy = \frac{-dx}{1+x^2}$; —

3.

25). $y = \operatorname{arcsec} x$; $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; —

26). $y = \operatorname{arccosec} x$; $y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; —

27). $y = F[f(x)]$; $f(x) = u$; $y = F(u)$;
$y' = F'(u)u'$; $dy = F'(u)u'dx$; —

28). $y = F(u)$; $u = \varphi(v)$; $v = \gamma(w)$; $w = f(x)$; ....
$y' = F'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\gamma'(w)\cdot f'(x)$;
$dy = F'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\gamma'(w)\cdot f'(x)\,dx$; —

Różniczkowanie.

29). $y = x^5 - 6x^2 + 3x^7 - 1$; $dy = ?$
$y' = 1.5x^4 - 6.2x + 3.7x^6 - 0 = 5x^4 - 12x + 21x^6$;
$dy = (5x^4 - 12x + 21x^6)\,dx$; —

30). $y = x^7 - 6x^6 + 3x^2 - \frac{\pi}{8}\sqrt[2]{1+e^2}$; $dy = ?$
$y' = 7x^6 - 36x^5 + 6x$;
$dy = (7x^6 - 36x^5 + 6x)\,dx$; —

31). $y = x^3 + 3x^2 - \pi x + \sin^2\left(\frac{\pi}{121}\right)$; $dy = ?$
$y' = 3x^2 + 6x - \pi.1.x^0 = 3x^2 + 6x - \pi$;
$dy = (3x^2 + 6x - \pi)\,dx$; —

32). $y=(1-2x)(1+3x)=1+x-6x^2;$

$y'=1-12x;\quad dy=(1-12x)\,dx;$ —

33). $y=x(x-1)(x-2)(x-3)=x^4-6x^3+11x^2-6x;$

$y'=4x^3-18x^2+22x-6;$

$dy=(4x^3-18x^2+22x-6)\,dx;$ —

34). $y=0{,}13x^5+\frac{\pi}{2}x^3+ex^2+\sin x+8\pi^2;$

$y'=0{,}65x^4+\frac{3\pi}{2}x^2+2ex+\cos x;$

$dy=(0{,}65x^4+\frac{3}{2}\pi x^2+2ex+\cos x)\,dx;$ —

35). $y=\dfrac{x^7+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x+1)};$

$y=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1;$

$y'=6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+2x-1;$

$dy=(6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+2x-1)\,dx;$ —

36). $y=\dfrac{3x-1}{x^5}=(3x-1)x^{-5}=3x^{-4}-x^{-5};$

$y'=-12x^{-5}+5x^{-6}=\dfrac{-12x+5}{x^6};$

$dy=\dfrac{(5-12x)\,dx}{x^6};$ —

37). $y=\dfrac{3a^2}{x^2}-\dfrac{a}{3x^4}=3a^2x^{-2}-\frac{a}{3}x^{-4};$

$y'=-6a^2x^{-3}+\frac{4}{3}ax^{-5}=\dfrac{4a-18a^2x^2}{3x^5};$

$dy=\dfrac{(4a-18a^2x^2)\,dx}{3x^5};$ —

38). $y = 2x^{\frac{7}{2}} + x^{-1} + 3x^{2};$

$y' = 2\cdot\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} + (-1)x^{-2} + 6x = 7x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{x^2} + 6x;$

$dy = \left(7x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{x^2} + 6x\right)dx;$ —

39). $y = \sqrt[8]{x^7} = x^{\frac{7}{8}};$

$y' = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}};$

$dy = \frac{7dx}{8\sqrt[8]{x}};$ —

40). $y = x^2\sqrt{x^3} = x^{\frac{7}{2}};\ y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x};$

$dy = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}\,dx;$ —

41). $y = \sqrt[m]{x^a\sqrt[n]{x^b}} = \sqrt[m]{x^{\frac{an+b}{n}}} = x^{\frac{an+b}{nm}};$

$y' = \frac{an+b}{nm}x^{\frac{an+b}{nm}-1} = \frac{an+b}{nm}x^{\frac{an+b}{nm}}x^{-1} =$

$= \frac{na+b}{nm}\,\frac{\sqrt[m]{x^a\sqrt[n]{x^b}}}{x};$

$dy = \left[\frac{na+b}{nm}\,\frac{\sqrt[m]{x^a\sqrt[n]{x^b}}}{x}\right]dx;$ —

42). $y = \sqrt[3]{\frac{x^3\sqrt{x}}{m}} = \sqrt[3]{\frac{x^{\frac{7}{2}}}{m}} = \left(\frac{x^{\frac{7}{2}}}{m}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$= \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}}\left(x^{\frac{7}{6}}\right);\ y' = \frac{7}{6}\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{m}} = \frac{7}{6}\sqrt[6]{\frac{x}{m}};$

$dy = \frac{7}{6}\sqrt[6]{\frac{x}{m}}\,dx;$ —

6.

43). $$y=\frac{1}{\sqrt[5]{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^{\frac{33}{24}}}}=x^{-\frac{11}{40}};$$

$$y'=\frac{-11x^{-\frac{11}{40}-1}}{40}=-\frac{11x^{-\frac{11}{40}}}{40x}=-\frac{11}{40x\sqrt[5]{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}};$$

$$dy=-\frac{11dx}{40x\sqrt[5]{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}};$$

44). $$y=3\sqrt[3]{x\sqrt{x^3}}+\frac{2}{x^3}=3\sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}}+\frac{2}{x^3}=$$

$$=3x^{\frac{5}{6}}+2x^{-3};\ y'=\frac{15}{6}x^{-\frac{1}{6}}-6x^{-4}=$$

$$=\frac{5}{2x^{\frac{1}{6}}}-\frac{6}{x^4}=\frac{5}{2\sqrt[6]{x}}-\frac{6}{x^4}=\frac{5x^4-12\sqrt[6]{x}}{2x^4\sqrt[6]{x}};$$

$$dy=\frac{(5x^4-12\sqrt[6]{x})dx}{2x^4\sqrt[6]{x}};$$

45). $$y=(a+x^2)^3;\qquad a+x^2=u$$

$$y=u^3;\quad y'=(u^3)'u'=3u^2u'=$$

$$=3(a+x^2)^2\,2x=6x(a+x^2)^2;$$

$$dy=6x(a+x^2)^2dx;$$

46). $$y=\sqrt{1+x^2};\qquad 1+x^2=u$$

$$y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}};\quad y'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'=$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\quad dy=\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

47). $y=(1+x^4)(1+x^2)^2$; $(1+x^4)=u$; $(1+x^2)^2=v$;

$y=uv$; $y'=uv'+vu'$;

$v'=2(1+x^2)2x$; $u'=4x^3$;

$$y'=4x^3(1+x^2)^2+4x(1+x^2)(1+x^4)=$$

$$=4x(1+x^2)\left[x^2(1+x^2)+(1+x^4)\right]=$$

$$=4x(1+x^2)(2x^4+x^2+1);\ —$$

$$dy=4x(1+x^2)(2x^4+x^2+1)dx;\ —$$

48). $y=\frac{x^p}{x^m-a^m}$; $x^p=u$; $x^m-a^m=v$;

$y=\frac{u}{v}$; $y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}=$

$$=\frac{(x^m-a^m)px^{p-1}-x^p m x^{m-1}}{(x^m-a^m)^2}=$$

21

$$=\frac{x^{p-1}}{(x^m-a^m)^2}\left[p(x^m-a^m)-x^m m\right];$$

$$dy=\frac{x^{p-1}}{(x^m-a^m)^2}\left[p(x^m-a^m)-x^m m\right]dx;\ —$$

49). $y=\frac{1-2x^2}{2-x^2}$;

$$y'=\frac{(2-x^2)(-4x)-\left[(1-2x^2)(-2x)\right]}{(2-x^2)^2}=$$

$$=\frac{-6x}{(2-x^2)^2};\quad dy=\frac{-6x\,dx}{(2-x^2)^2};\ —$$

50). $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n}$; $\frac{x}{1+x}=u$; $y=u^{n}$;

$$y'=nu^{n-1}u'=n\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}};$$

$$u'=\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2};$$

$$dy=\frac{nx^{n-1}dx}{(1+x)^{n+1}};$$

51). $$y=\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=$$

$$=\frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}=\frac{x^6-1}{x^7-1};$$

(na zasadzie twierdz. Bezout'a).

$$y'=\frac{(x^7-1)6x^5-(x^6-1)7x^6}{(x^7-1)^2}=\frac{6x^{12}-6x^5-7x^{12}+7x^6}{(x^7-1)^2}=$$

$$=\frac{7x^6-6x^5-x^{12}}{(x^7-1)^2};$$

$$dy=\frac{(7x^6-6x^5-x^{12})dx}{(x^7-1)^2};$$

52). $y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}=\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=u$

$y=u^{\frac{1}{2}}$; $y'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'$

$$u'=\frac{(1+\sqrt{x})\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)-(1-\sqrt{x})\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}};$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}=$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{1}{2(1-x)\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}};$$

$$dy = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\, dx; \text{ —}$$

53). $y = \sqrt[4]{(2x^2-x^3)^3} = (2x^2-x^3)^{\frac{3}{4}};$

$2x^2 - x^3 = u;\quad y = u^{\frac{3}{4}};\quad y' = \frac{3}{4} u^{-\frac{1}{4}} u' =$

$$= \frac{3}{4}(2x^2-x^3)^{-\frac{1}{4}}(4x-3x^2) = \frac{3(4x-3x^2)}{4\sqrt[4]{2x^2-x^3}} =$$

$$= \frac{3x(4-3x)}{4\sqrt[4]{2x^2-x^3}};\quad dy = \frac{3x(4-3x)\,dx}{4\sqrt[4]{2x^2-x^3}}; \text{ —}$$

54) $y = (3x^2+5ax-2a^2)\sqrt{a^2+3x^2};$

$3x^2+5ax-2a^2 = u;\quad \sqrt{a^2+3x^2} = (a^2+3x^2)^{\frac{1}{2}} = v;$

$y = uv;\quad y' = uv' - vu';$

$$y' = (3x^2+5ax-2a^2)\frac{1}{2}(a^2+3x^2)^{-\frac{1}{2}}6x + (a^2+3x^2)^{\frac{1}{2}}(6x+5a) =$$

$$= \frac{5a^3+30ax^2+8x^3}{\sqrt{a^2+3x^2}};$$

$$dy = \frac{(5a^3+30ax^2+8x^3)\,dx}{\sqrt{a^2+3x^2}}; \text{ —}$$

55).
$$y=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}=$$
$$=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x};\quad 1-\sqrt{1-x^2}=u;\quad x=v;$$
$$y=\frac{u}{v};\quad y'=\frac{u'v-uv'}{v^2};$$
$$y'=\frac{x\left[-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\right]-\left[1-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]}{x^2}=$$
$$=\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}-1+\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}};$$
$$dy=\frac{(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx;\ \text{—}$$

56).
$$y=\left(6x^2-\frac{x^5}{5}\right)^4;\quad 6x^2-\frac{x^5}{5}=u;$$
$$y=u^4;\quad y'=4u^3u'=$$
$$=4\left(6x^2-\frac{x^5}{5}\right)^3(12x-x^4)=$$
$$=4x^6\left(6-\frac{x^3}{5}\right)x(12-x^3)=$$
$$=4x^7\left(6-\frac{x^3}{5}\right)(12-x^3);$$
$$dy=4x^7\left(6-\frac{x^3}{5}\right)(12-x^3)dx;\ \text{—}$$

57).
$$y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{a^2-x^2}=$$
$$=\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}};\quad dy=\frac{a^2dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}};\ \text{—}$$

58). $y=\log\sqrt{x}$; $\sqrt{x}=u$; $y=\log u$;

$y'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x}$; $dy=\frac{dx}{2x}$; —

59). $y=\log x^n$; $x^n=u$; $y=\log u$; $y'=\frac{1}{u}u'$;

$y'=\frac{1}{x^n}nx^{n-1}=\frac{n}{x}$; $dy=\frac{n\,dx}{x}$; —

60). $y=(\log x)^n$; $\log x=u$; $y=u^n$; $y'=nu^{n-1}u'$;

$y'=n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}$; $dy=\frac{n}{x}(\log x)^{n-1}dx$; —

61). $y=x\log x-x$;

$y'=x\cdot\frac{1}{x}+\log x-1=1+\log x-1=\log x$

$dy=\log x\,dx$;

62). $y=\log(x^3+2x^2)$; $y=\log u$;

$y'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{x^3+2x^2}\cdot(3x^2+4x)=$

$=\frac{3x+4}{x^2+2x}$; $dy=\frac{(3x+4)dx}{x^2+2x}$; —

63). $y=\log\frac{\sqrt{1+x^3}}{x}=\log u$; $y'=\frac{1}{u}u'$;

$u'=\frac{x\frac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}3x^2-\sqrt{1+x^3}}{x^2}=$

$=\frac{x^3-2}{2x^2\sqrt{1+x^3}}$; $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\cdot\frac{(x^3-2)}{2x^2\sqrt{1+x^3}}=$

$=\frac{x^3-2}{2x(1+x^3)}$; $dy=\frac{(x^3-2)dx}{2x(1+x^3)}$; —

64). $y = \log(1+\sqrt{1-x})$; $y = \log u$;

$y' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2(1-x+\sqrt{1-x})}$;

$dy = \frac{-dx}{2(1-x+\sqrt{1-x})}$; —

65). $y = \log(x+\sqrt{1+x^2})$; $y = \log u$;

$y' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; —

66). $y = x^3\left[(\log x)^3 - (\log x)^2 + \frac{2}{3}\log x - \frac{2}{9}\right]$;

$x^3 = p$; $\left[(\log x)^3 - (\log x)^2 + \frac{2}{3}\log x - \frac{2}{9}\right] = q$;

$y = pq$; $y' = pq' + qp'$;

$y' = x^3\left[\frac{3(\log x)^2}{x} - \frac{2\log x}{x} + \frac{2}{3x}\right] +$

$+ 3x^2\left[(\log x)^3 - (\log x)^2 + \frac{2}{3}\log x - \frac{2}{9}\right] =$

$= 3x^2(\log x)^3$;

$dy = 3x^2(\log x)^3\,dx$; —

67). $y = a^{2x}$; $2x = u$; $y = a^u$;

$y' = a^u \log a\, u' = a^{2x}\log a \cdot 2 =$

$= 2a^{2x}\log a$; $dy = 2a^{2x}\log a\,dx$;

68). $y = e^{mx^2+n}$; $mx^2+n = u$; $y = e^u$;

$y' = e^u \log e\, u' = 2me^{mx^2+n}x$; —

69). $y = a^{b^x}$; $b^x = u$; $y = a^u$; $y' = a^u \log a \, u'$;
$y' = a^{b^x} \log a \; b^x \log b = a^{b^x} b^x \log a \log b$;
$dy = a^{b^x} b^x \log a \log b \, dx$; ——

70). $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;
$dy = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})dx$; ——

71). $y = e^{-x}(a+bx)$; $y' = e^{-x} \cdot b + (a+bx)(-e^{-x}) =$
$= be^{-x} - ae^{-x} - be^{-x}x = e^{-x}(b - a - bx)$;
$dy = e^{-x}(b - a - bx)dx$; ——

72). $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;
$$y' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$
$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$; $dy = \frac{4dx}{(e^x + e^{-x})^2}$; ——

73). $y = \log \operatorname{tang} x$; $\operatorname{tang} x = u$;
$y = \log u$; $y' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{\operatorname{tang} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} =$
$= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\sin 2x}$; ——
$dy = \frac{2dx}{\sin 2x}$; ——

74). $y = \log\sqrt{\sin x} + \log\sqrt{\cos x}$;

$\sqrt{\sin x} = u$; $\sqrt{\cos x} = v$;

$y = \log u + \log v$; $y' = \frac{1}{u}u' + \frac{1}{v}v' =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \cdot \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{cotg} 2x;$$

$dy = \operatorname{cotg} 2x\, dx$; —

75). $y = \frac{3\sin 7x + 7\sin 3x}{42}$;

$$y' = \frac{1}{42}\left[3\cos 7x \cdot 7 + 7\cos 3x \cdot 3\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 7x + \cos 3x\right] = \frac{1}{2} \cdot 2\cos\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2} =$$

$$= \cos 5x \cos 2x;$$

$dy = \cos 5x \cos 2x\, dx$; —

76). $y = (\sin 5x)^3$; $y = u^3$;

$$y' = 3u^2u' = 3(\sin 5x)^2 \cos 5x \cdot 5 =$$

$$= 15 \sin 5x \cdot \sin 5x \cos 5x;$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$;

$y' = \frac{15}{2}\sin 5x \sin 10x$;

$dy = \frac{15}{2}\sin 5x \sin 10x\, dx$; —

77). $y = \operatorname{tang}^3(a^2-x^2)$; $\operatorname{tang}(a^2-x^2) = u$

$y = u^3$; $y' = 3u^2 u' =$

$= 3\operatorname{tang}^2(a^2-x^2)\dfrac{1}{\cos^2(a^2-x^2)}(-2x) =$

$= -\dfrac{6x\,\operatorname{tg}^2(a^2-x^2)}{\cos^2(a^2-x^2)}$;

$dy = -\dfrac{6x\,\operatorname{tg}^2(a^2-x^2)\,dx}{\cos^2(a^2-x^2)}$; —

78). $y = \log\cos\left(\dfrac{x-a}{x}\right)$; $\cos\left(\dfrac{x-a}{x}\right) = u$;

$y = \log u$; $y' = \dfrac{1}{u}u' =$

$= \dfrac{1}{\cos\left(\frac{x-a}{x}\right)}\left(-\sin\left(\dfrac{x-a}{x}\right)\right)\left(\dfrac{x-x+a}{x^2}\right) =$

$= -\dfrac{a}{x^2}\operatorname{tang}\left(\dfrac{x-a}{x}\right)$;

$dy = -\dfrac{a}{x^2}\operatorname{tang}\left(\dfrac{x-a}{x}\right)dx$; —

79). $y = (x\operatorname{tg}x)^2$; $x\operatorname{tg}x = u$; $y = u^2$;

$y' = 2uu' =$

$= 2x\operatorname{tg}x\left(\dfrac{x}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}x\right) = 2x\operatorname{tg}x\left(\dfrac{x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) =$

$= 2x\operatorname{tg}x\left(\dfrac{2x + 2\cos x\sin x}{2\cos^2 x}\right) = x\operatorname{tg}x\left(\dfrac{2+\sin 2x}{\cos^2 x}\right)$;

$dy = x\operatorname{tg}x\left(\dfrac{2+\sin 2x}{\cos^2 x}\right)dx$; —

80). $y = e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx);$

$y' = e^{ax}(-ab\sin bx + b^2\cos bx) + ae^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)$

$y' = e^{ax}(b^2 + a^2)\cos bx;$

$dy = e^{ax}(a^2 + b^2)\cos bx\, dx;$ —

81). $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x;$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x\,\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^4 x};$

$dy = \frac{dx}{\cos^4 x};$ —

82). $y = 3x + 3\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x;$

$y' = 3 - \frac{3}{\sin^2 x} - 3\operatorname{ctg}^2 x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} =$

$= 3\left(\frac{\sin^2 x - 1 + \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}\right) = 3\left(\frac{-\cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\sin^2 x}\right) =$

$= \frac{3\cos^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^4 x} = 3\operatorname{ctg}^4 x;$

$dy = 3\operatorname{ctg}^4 x\, dx;$ —

83). $y = [\log(\sin a^x)]^m;$ $y = z^m;$ $z = \log v,$ $v = \sin u,$

$u = a^x;$ $y' = (z^m)'(\log v)'(\sin u)'u' =$

$= m[\log(\sin a^x)]^{m-1} \cdot \frac{1}{\sin a^x} \cdot \cos a^x \cdot a^x \log a =$

$= y' = a^x \log a \operatorname{ctg} a^x\, m[\log(\sin a^x)]^{m-1};$ —

84). $y = \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$; $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

$y = \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right)$; $\operatorname{tang}\frac{x}{2} = z$;

$$y' = \frac{1}{1+z^2}\, z' = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2};\qquad dy = \frac{dx}{2};\ \text{—}$$

85). $y = e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$;

$\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = z$; $y = e^z$;

$y' = e^z \log e\, z'$; $z = \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$\operatorname{tang} z = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{\sin z}{\cos z} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$\frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{\sin^2 z}{1-\sin^2 z} = \frac{x^2}{1-x^2}$;

$x^2 = \sin^2 z$; $x = \sin z$; $z = \operatorname{arc\,sin} x$

$z' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$y' = \frac{e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$dy = \frac{e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx;\ \text{—}.$$

86). $y = \operatorname{arc\,tang}(n \operatorname{tang} x) = \operatorname{arc\,tang} z;$

$$y' = \frac{1}{(1+n^2 \operatorname{tang}^2 x)} \cdot \frac{n}{\cos^2 x} = \frac{n}{\cos^2 x\left(1 + n^2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} =$$

$$= \frac{n}{\cos^2 x + n^2 \sin^2 x}; \quad dy = \frac{n\,dx}{\cos^2 x + n^2 \sin^2 x};$$

87). $y = x^3 \arcsin \frac{1}{x}; \quad x^3 = u; \arcsin \frac{1}{x} = v;$

$y = uv; \quad y' = uv' + vu' =$

$$= x^3 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{-1}{x^2} + \arcsin \frac{1}{x} \cdot 3x^2 =$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} + 3x^2 \arcsin \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} + 3x^2 \arcsin \frac{1}{x} =$$

$$= x^2\left(3 \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right);$$

$$dy = x^2\left(3 \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) dx;$$

88). $y = x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2);$

$$y' = \frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x =$$

$= \operatorname{arc\,tg} x;$

$dy = \operatorname{arc\,tg} x \, dx;$

19.

Znajdowanie różniczek za pomocą logarytmowania.

89) $y = x^x$; $\log y = x \log x$;

$[\log y]' = [x \log x]'$;

$\frac{1}{y} y' = 1 . \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$;

$\frac{y'}{y} = \log x + 1$; $y' = (\log x + 1) y =$

$= x^x (\log x + 1)$;

$dy = x^x (\log x + 1)\, dx$; —

90) $y = (\sin x)^{\sin x}$;

$\log y = \sin x \log \sin x$; $(\log y)' = (\sin x \log \sin x)'$;

$\frac{y'}{y} = \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x + \log \sin x \cdot \cos x =$

$= \cos x\, (1 + \log \sin x)$;

$y' = \cos x . (1 + \log \sin x)\, y =$

$= \sin x^{\sin x} . \cos x . (1 + \log \sin x)$;

$dy = \sin x^{\sin x} \cos x . (1 + \log \sin x)\, dx$; —

91). $$y = \frac{(x-2)^9}{\left[(x-1)^5(x-3)^{11}\right]^{\frac{1}{2}}}; \quad dy = ?$$

$$\log y = \log \frac{(x-2)^9}{\left[(x-1)^5(x-3)^{11}\right]^{\frac{1}{2}}};$$

$$\log \frac{(x-2)^9}{\left[(x-1)^5(x-3)^{11}\right]^{\frac{1}{2}}} = \log(x-2)^9 - \log\left[(x-1)^5(x-3)^{11}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 9\log(x-2) - \tfrac{1}{2}\log\left[(x-1)^5(x-3)^{11}\right] =$$

$$= \log y = 9\log(x-2) - \tfrac{5}{2}\log(x-1) - \tfrac{11}{2}\log(x-3);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{9}{x-2} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{11}{2(x-3)};$$

$$y' = \frac{(x-2)^9}{\left[(x-1)^5(x-3)^{11}\right]^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{9}{x-2} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{11}{2(x-3)}\right];$$

$$dy = \frac{(x-2)^9}{\left[(x-1)^5(x-3)^{11}\right]^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{9}{x-2} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{11}{2(x-3)}\right]dx; -$$

Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych.

$$w = f(x, y, z, u \,\ldots\ldots\, v)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial u}du + \ldots\ldots \frac{\partial w}{\partial v}dv; -$$

92). $w = xyz^2$; $\quad dw = ?$

$dw = yz^2 dx + xz^2 dy + 2xyz\,dz$; —

93). $z = \log x^y$; $\quad dz = ?$

$dz = \frac{1}{x^y} y x^{y-1} dx + \frac{1}{x^y} x^y \log x\, dy =$

$= \frac{y}{x} dx + \log x\, dy$; —

94). $z = xye^{x+2y}$; $\quad dz = ?$

$dz = y[xe^{x+2y} \log e + e^{x+2y}]dx +$

$+ x[ye^{x+2y} \cdot \log e \cdot 2 + e^{x+2y}]dy =$

$= e^{x+2y}[y(x+1)dx + x(2y+1)dy]$; —

95).

$z = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}$;

$dz = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} dx + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} dy =$

$= \frac{dx}{y + \frac{x^2}{y}} - \frac{x\,dy}{y^2+x^2} =$

$= \frac{y\,dx}{y^2+x^2} - \frac{x\,dy}{y^2+x^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2+x^2}$; —

96)

$z = \log \sin \frac{x}{y}$;

$dz = \frac{1}{\sin\frac{x}{y}} \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} dx + \frac{1}{\sin\frac{x}{y}} \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} dy =$

$$= \frac{1}{y^2}\operatorname{cotg}\frac{x}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\operatorname{cotg}\frac{x}{y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{y^2}\operatorname{cotg}\frac{x}{y}(y\,dx - x\,dy) = \frac{1}{y^2}\operatorname{cotg}\frac{x}{y}(y\,dx - x\,dy) =$$

$$= \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2 \operatorname{tang}\frac{x}{y}};$$

97). $z = \log \operatorname{tg}\frac{x}{y};$

$$dz = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\,dx + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{-x}{y^2}\,dy =$$

$$= \frac{y\,dx}{y^2\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}} - \frac{dy}{y^2\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}} =$$

$$= \frac{2y\,dx}{y^2\sin\frac{2x}{y}} - \frac{2\,dy}{y^2\sin\frac{2x}{y}} =$$

$$= \frac{2(y\,dx - dy)}{y^2\sin\frac{2x}{y}};$$

98) $u = x^2 \arcsin\frac{y}{z};$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz;$$

$$du = 2x\arcsin\frac{y}{z}\,dx + x^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}}}\cdot\frac{1}{z}\,dy + - x^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}}}\cdot\frac{y}{z^2}\,dz =$$

$$= 2x\arcsin\frac{y}{z}\,dx + \frac{x^2\,dy}{z\sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}}} - \frac{x^2 y\,dz}{z^2\sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}}} =$$

$$= 2x\arcsin\frac{y}{z}\,dx + \frac{x^2\,dy}{\sqrt{z^2-y^2}} - \frac{x^2 y\,dz}{z\sqrt{z^2-y^2}} =$$

$$= 2x \arcsin\frac{y}{z}\,dx + \frac{x^2}{\sqrt{z^2-y^2}}\left(dy - \frac{y\,dz}{z}\right) =$$

$$= 2x \arcsin\frac{y}{z}\,dx + \frac{x^2(z\,dy - y\,dz)}{z\sqrt{z^2-y^2}};$$

II

Całkowanie.

Zasadnicze twierdzenia i wzory, dotyczące całkowania.

1) $$\int\left[\varphi(x) + f(x) + \ldots\ldots F(x)\right]dx = \int\varphi(x)\,dx + \int f(x)\,dx + \ldots\ldots \int F(x)\,dx;$$

2) $$\int a\varphi(x)\,dx = a\int\varphi(x)\,dx;$$

Całki zasadnicze.

99). $\int dx = x + C$

100). $\int m x^{m-1}\,dx = x^m + C$

101). $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$

102). $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$

103) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

104). $\int e^x dx = e^x + C$

105). $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

106) $\int \sin x\, dx = -\cos x\, dx + C$

107). $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

108). $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

109). $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

110). $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$

111). $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$

112). $\int \cot x = \log \sin x + C$

113). $\int \tan x = -\log \cos x + C.$

114). $\int 14x^2 dx = 14\int x^2 dx = 14 \int d\frac{x^3}{3} =$
$= \frac{14x^3}{3} + C.$ —

115). $\int \sqrt{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \int d\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} =$
$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C.$ —

116). $\int 5\sqrt[3]{x^2}\,dx = 5\int x^{\frac{2}{3}}dx = 5\int d\,\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = 3\sqrt[3]{x^5} + C$

117). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \int d\,\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x} + C.$

118). $\int (5 - 3x + 5x^2 + 7x^3)dx = \int 5dx - \int 3x\,dx +$

$+ \int 5x^2 dx + \int 7x^3 dx = 5x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C.$

119). $\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} - \frac{8}{x^5}\right)dx = 2\int x^{-2}dx +$

$-2\int x^{-3}dx + 6\int x^{-4}dx - 8\int x^{-5}dx =$

$= 2\frac{x^{-1}}{-1} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + 6\frac{x^{-3}}{-3} - 8\frac{x^{-4}}{-4} =$

$= -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4} + C.$ —

120). $\int \left(x^4 + 7\sqrt{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right)dx =$

$= \int x^4 dx + 7\int \sqrt{x}\,dx - 11\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} + 5\int \frac{dx}{x^6} =$

$= \frac{x^5}{5} + 7\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 11\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + \frac{5x^{-5}}{-5} =$

$= \frac{x^5}{5} + \frac{14}{3}\sqrt{x^3} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^5};$ —

121). $\int (a\sin x + b\cos x + ce^x)dx =$

$= -a\cos x + b\sin x + ce^x;$ —

122). $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{a}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$

$= \operatorname{arctg} x - a\operatorname{ctg} x + \arcsin x;$ —

123). $\int \frac{3\,dx}{4+2x} = 3\int \frac{1\,dx}{4+2x} = \frac{3}{2}\int d\log(4+2x) =$

$= \frac{3}{2}\log(4+2x)$; —

124). $\int \frac{3x^2\,dx}{a^3+x^3} = \int d\log(a^3+x^3) = \log(a^3+x^3)+C$;

125). $\int \frac{(5+x)\,dx}{10x+x^2} = \frac{1}{2}\int d\log(10x+x^2) =$

$= \frac{1}{2}\log(10x+x^2)+C$. —

126) $\int (x^3+2)^2\,dx = \int (x^6+4x^3+4)\,dx =$

$= \frac{x^7}{7} + \frac{4x^4}{4} + 4x = \frac{x^7}{7} + x^4 + 4x + C$. —

127) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x} =$

$= \int \frac{\sin^2 x\,dx + \cos^2 x\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$= \operatorname{tang} x - \operatorname{cotg} x + C$. —

128). $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int \frac{(x^2+1-1)\,dx}{1+x^2} =$

$= \int \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$= x - \operatorname{arc\,tang} x + C$. —

129). $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,dx = \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} =$

$= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$ —

Całki złożone.

Metoda całkowania przez części.

$d(uv) = u\,dv + v\,du$

$u\,dv = d(uv) - v\,du$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$ (zasadniczy wzór).

130) $\int x\cos x\,dx = ?$ $\int u\,dv = uv - \int v\,du;$

$x = u;$ $dx = du;$ $\cos x\,dx = dv;$

$\int dv = v = \sin x$

$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx =$

$= x\sin x + \cos x + C.$ —

131). $\int x e^x dx = ?$ $\int u dv = uv - \int v du;$

$x = u;$ $dx = du;$ $e^x dx = dv;$

$\int dv = v = e^x;$

$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x =$

$= e^x (x-1) + C.$ —

132) $\int \log x dx = ?$ $\int u dv = uv - \int v du;$

$\log x = u;$ $du = \frac{1}{x} dx;$ $dx = dv;$ $v = x$

$\int \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int dx =$

$= x \log x - x = x(\log x - 1) + C.$ —

133) $\int x \sin x dx = ?$

$x = u;$ $\sin x dx = dv;$ $dx = du;$ $v = -\cos x$

$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx =$

$= -x \cos x + \sin x + C.$ —

134) $\int \operatorname{arc tang} x dx = ?$

$\operatorname{arc tang} x = u;$ $du = \frac{1}{1+x^2};$ $dx = dv;$ $v = x;$

$\int \operatorname{arc tang} x dx = x \operatorname{arc tang} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} =$

$= x \operatorname{arc tang} x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) =$

$= x \operatorname{arc tang} x - \log \sqrt{1+x^2} + C.$ —

135). $\int x^2 \cos x\,dx = ?$

$x^2 = u$; $\cos x\,dx = dv$; $du = 2x\,dx$; $v = \sin x$;

$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x\,dx =$

$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$;

$\int x \sin x\,dx = ?$

$x = u$; $\sin x\,dx = dv$; $du = dx$; $v = -\cos x$;

$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x$;

$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$. —

136). $\int \sin^2 x\,dx = ?$

$\sin x = u$; $du = \cos x\,dx$; $\sin x\,dx = dv$; $v = -\cos x$;

$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx =$

$= -\sin x\cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx =$

$= -\sin x\cos x + \int dx - \int \sin^2 x\,dx =$

$= -\frac{1}{2}\sin 2x + x - \int \sin^2 x\,dx$;

$2\int \sin^2 x\,dx = x - \frac{1}{2}\sin 2x$;

$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$. —

137). $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = ?$

$\sqrt{a^2-x^2} = u$; $du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $dx = dv$; $v = x$;

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} +$$

$$-\int \frac{(a^2-x^2-a^2)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C.$$ —

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \arcsin\frac{x}{a}.$$

138). $\int \log^2 x\,dx = ?$

$\log^2 x = u$; $dx = dv$; $du = 2\log x \cdot \frac{1}{x}dx$; $v = x$;

$$\int \log^2 x\,dx = x\log^2 x - \int x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\log^2 x - 2\int \log x\,dx;$$

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= x\log x - x$$

| $\log x = u$; $dx = dv$;
| $du = \frac{dx}{x}$; $v = x$

$$\int \log^2 x\,dx = x\log^2 x - 2x\log x - 2x =$$

$$= x(\log^2 x - 2\log x - 2) + C.$$ —

139) $\int \frac{x \arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

$\arcsin x = u; \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv; \quad \int dv = v = -\int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2};$

$\int \frac{x \arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x -$

$- \int -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx =$

$= x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$ —

140) $\int \sin^2 x \cos x\,dx = ?$

$\cos x\,dx = dv; \quad v = \sin x; \quad \sin^2 x = u; \quad du = 2\sin x\cos x\,dx$

$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \sin^3 x - 2\int \sin^2 x \cos x\,dx;$

$3\int \sin x^2 \cos x\,dx = \sin^3 x$

$\int \sin x^2 \cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$ —

141) $\int \cos^2 x\,dx = ?$ $\quad \cos x = u; \; du = -\sin x;$

$\cos x\,dx = dv; \quad v = \sin x;$

$\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x - \int + \sin^2 x\,dx =$

$= \sin x\cos x + \int dx - \int \cos^2 x\,dx;$

$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + x;$

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + C.$ —

142). $\int \sin^5 x\,dx = ?$

$$\int \sin^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x)\sin x\,dx =$$

$$= \int \sin x\,dx - 2\int \cos^2 x \sin x\,dx + \int \cos^4 x \sin x\,dx;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x;$$

$$\int \cos^2 x \sin x\,dx = -\cos^3 x - 2\int \cos^2 x \sin x\,dx;$$

$$3\int \cos^2 x \sin x\,dx = -\cos^3 x;$$

$$\int \cos^2 x \sin x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x;$$

$$\int \cos^4 x \sin x\,dx = -\cos^5 x - 4\int \cos^4 x \sin x\,dx;$$

$$5\int \cos^4 x \sin x\,dx = -\cos^5 x;$$

$$\int \cos^4 x \sin x\,dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x;$$

$$\int \sin^5 x\,dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

143). $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ $\quad \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv;\quad x = u;\quad dx = du;\quad v = -\sqrt{1-x^2};$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx;$$

$$\int \sqrt{1-x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$2\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x;$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

144). $\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctang} x\,dx = ?$

$\operatorname{arctang} x = u;\quad du = \frac{dx}{1+x^2};\quad \frac{x^2 dx}{1+x^2} = dv;$

$v = \int \frac{(1+x^2-1)dx}{1+x^2} = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctang} x;$

$\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctang} x\,dx = \operatorname{arctang} x \cdot (x - \operatorname{arctang} x) +$

$- \int \frac{(x - \operatorname{arctang} x)\,dx}{1+x^2} = \operatorname{arctang} x (x - \operatorname{arctang} x) +$

$- \int \frac{x\,dx}{1+x^2} + \int \frac{\operatorname{arctang} x\,dx}{1+x^2};$

$\int \frac{\operatorname{arctang} x\,dx}{1+x^2} = ?\qquad \operatorname{arctang} x = u;\quad du = \frac{dx}{1+x^2};$

$\frac{dx}{1+x^2} = dv;\quad v = \operatorname{arctang} x;$

$\int \frac{\operatorname{arctang} x\,dx}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2};$

$2\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2} = \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2};$

$\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x\,dx = \operatorname{arctg} x \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x\right) - \log \sqrt{1+x^2};$—

Metoda całkowania przez części.

zamianą zmiennej.

145) $\int (ax+b)^m dx = ?\qquad (ax+b) = z;$

$dz = a\,dx;\quad dx = \frac{dz}{a};$

$$\int (ax+b)^m dx = \int z^m \frac{dz}{a} = \frac{1}{a}\int z^m dz =$$

$$= \frac{1}{a}\frac{z^{m+1}}{m+1} = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C; \text{ —}$$

146). $\int \frac{ax^3 dx}{bx^4+c} = ?$ $bx^4+c=z$; $dz = 4bx^3dx$;

$x^3dx = \frac{dz}{4b}$;

$$\int \frac{ax^3dx}{bx^4+c} = \int\frac{a\,dz}{4bz} = \frac{a}{4b}\int\frac{dz}{z} = \frac{a}{4b}\log z =$$

$$= \frac{a}{4b}\log(bx^4+c) + C; \text{ —}$$

147) $\int \frac{x^2dx}{(ax+b)^n} = ?$ $ax+b=z$; $dz = a\,dx$;

$dx = \frac{dz}{a}$; $x = \frac{z-b}{a}$;

$$\int\frac{x^2dx}{(ax+b)^n} = \int\frac{(z-b)^2dx}{a^3z^n} = \frac{1}{a^3}\int\frac{(z^2-2bz+b^2)dz}{z^n} =$$

$$= \int z^{2-n}dz - 2b\int z^{1-n}dz + b^2\int z^{-n}dz =$$

$$= \frac{1}{a^3}\left(\frac{z^{3-n}}{3-n} - \frac{2bz^{2-n}}{2-n} + \frac{b^2z^{1-n}}{1-n}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^3}\left[\frac{(ax+b)^{3-n}}{3-n} - \frac{2b(ax+b)^{2-n}}{2-n} + \frac{b^2(ax+b)^{1-n}}{1-n}\right] + C$$

148) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = ?$ $\sqrt{a^2+x^2}=z$; $z^2=a^2+x^2$; $z\,dz = x\,dx$;

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{z\,dz}{z} = \int dz = z = \sqrt{a^2+x^2} + C. \text{ —}$$

149). $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\frac{bx^2}{a}} = ?$ $\quad \frac{bx^2}{a} = z^2;$

$x\sqrt{\frac{b}{a}} = \pm z;$ $\quad \sqrt{\frac{b}{a}}\,dx = \pm dz;$ $\quad dx = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}\,dz;$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\int\frac{dz}{1+z^2} = \pm\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{b}}\,\operatorname{arc\,tang} z =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{ab}}\,\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right) + C. —$$

150). $\int \frac{x^2 dx}{(a+bx^3)^5} = ?$ $\quad z = a+bx^3;$
$dz = 3b x^2 dx;$ $\quad x^2dx = \frac{dz}{3b};$

$$\int \frac{x^2dx}{(a+bx^3)^5} = \int\frac{dz}{3bz^5} = \frac{1}{3b}\int z^{-5}dz = \frac{1}{3b}\frac{z^{-4}}{-4} =$$

$$= -\frac{1}{12b(a+bx^3)^4} + C; —$$

151) $\int \frac{x^2dx}{a+bx} = ?$ $\quad a+bx = z;$ $\quad dz = b\,dx;$ $\quad dx = \frac{dz}{b};$
$x = \frac{z-a}{b};$

$$\int\frac{x^2dx}{a+bx} = \int\frac{(z-a)^2dz}{b^3z} = \frac{1}{b^3}\left(\int z\,dz - 2a\int dz - a^2\int\frac{dz}{z}\right) =$$

$$= \frac{1}{b^3}\left[\frac{z^2}{2} - 2az - a^2\log z\right] =$$

$$= \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) - a^2\log(a+bx)\right] + C. —$$

152). $\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{a^4}\int \frac{x\,dx}{1+\frac{x^4}{a^4}} = ?$

$\frac{x^4}{a^4} = z^2$; $x^4 = a^4 z^2$; $x^2 = a^2 z$; $z\,dz = \frac{2x^3\,dx}{a^4}$;

$x\,dx = \frac{a^4 z\,dz}{2x^2} = \frac{a^2}{2}dz$;

$\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{a^4}\int \frac{a^2\,dz}{2(1+z^2)} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg} z =$

$= \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}$; —

153). $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx = ?$

$\sin x = z$; $dz = \cos x\,dx$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - z^2$

$\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^3 x\,(1 - \cancel{\cos^2 x}\,\sin^2 x)\cos x\,dx =$

$= \int z^3(1-z^2)\,dz = \int z^3\,dz - \int z^5\,dz =$

$= \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{6} = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.$ —

154) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x} = ?$ $1+\sin x = z$; $dz = \cos x\,dx$;

$\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x} = \int \frac{dz}{z} = \log z = \log(1+\sin x) + C.$ —

155) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = ?$ $\sqrt{1+x^2} = z$; $z^2 = 1+x^2$; $z\,dz = x\,dx$;

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{z\,dz}{z} = \int dz = z = \sqrt{1+x^2} + C.$ —

156) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x} = ?$ $\quad \sin^3 x = z^3;\ z = \sin x;$

$dz = \cos x\,dx;$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x} = \int \frac{dz}{z^3} = \int z^{-3} dz = \frac{z^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

157). $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{a^4}}} = ?$

$\frac{x^4}{a^4} = z^2;\quad z = \frac{x^2}{a^2};\quad dz = \frac{2x\,dx}{a^2};\ x\,dx = \frac{a^2}{2}dz;$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{2}\arcsin z =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin \frac{x^2}{a^2} + C. \text{ —}$$

158) $\int \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}} = ?$ $\quad e^x = z;\ e^{2x} = z^2;$

$dz = e^x dx;$

$$\int \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctang} z = \operatorname{arctang} e^x + C. \text{ —}$$

159) $\int e^{\arccos x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = ?$ $\quad \arccos x = z;$

$dz = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$

$$\int e^{\arccos x}\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int e^z dz = -e^z =$$

$$= -e^{\arccos x} + C. \text{ —}$$

160). $\int e^{\arccos x}dx = ?$ $\quad \arccos x = z; \quad x = \cos z;$

$$dz = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 z}} = -\frac{dx}{\sin z}; \quad dx = -dz \sin z;$$

$$\int e^{\arccos x}dx = -\int e^{z}\sin z\,dz; \quad e^{z} = u; \quad du = e^{z}dz;$$

$$dv = \sin z\,dz; \quad v = \int \sin z\,dz = -\cos z;$$

$$\int e^{z}\sin z\,dz = -e^{z}\cos z + \int \cos z\, e^{z}dz;$$

$$\int \cos z\, e^{z}dz = \qquad e^{z} = u; \; du = e^{z}dz; \quad \cos z\,dz = dv; \; v = \sin z;$$

$$= e^{z}\sin z - \int \sin z\, e^{z}dz;$$

$$\int e^{z}\sin z\,dz = -e^{z}\cos z + e^{z}\sin z - \int \sin z\, e^{z}dz;$$

$$2\int e^{z}\sin z\,dz = e^{z}(\sin z - \cos z);$$

$$-\int e^{z}\sin z\,dz = -\frac{e^{z}}{2}(\sin z - \cos z) = \frac{e^{z}}{2}(\cos z - \sin z);$$

$$\int e^{\arccos x}dx = \qquad z = \arccos x; \; x = \cos z; \quad \sin z = \sqrt{1-x^2};$$

$$= \frac{e^{z}}{2}(\cos z - \sin z) =$$

$$= e^{\arccos x}\left(\frac{x - \sqrt{1-x^2}}{2}\right) + C.$$

161). $$\int \frac{x^2dx}{a^3+x^3} = ?$$

$x^3+x^3=z$; $dz=3x^2dx$;

$x^2dx = \frac{dz}{3}$;

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{3}\log z = \frac{1}{3}\log(a^3+x^3) =$$

$$= \log\sqrt[3]{a^3+x^3} + C.$$

162). $$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x - \sqrt{1-x^2};$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$\sqrt{1-x^2}=z$; $z^2=1-x^2$;

$zdz=-xdx$;

$$= \int -\frac{zdz}{z} = -\int dz = -z = -\sqrt{1-x^2};$$

163) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \int\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})dx}{a-b} =$$

$$= \int\frac{\sqrt{x+a}}{a-b}dx - \int\frac{\sqrt{x+b}}{a-b}dx =$$

$$= \frac{1}{a-b}\int\sqrt{x+a}\,dx - \frac{1}{a-b}\int\sqrt{x+b};$$

$$\int\sqrt{x+a}\,dx =$$

$\sqrt{x+a}=z$; $z^2=x+a$;

$2zdz=dx$;

$$= 2\int z^2dz = \frac{2}{3}z^3 = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}};$$

164). $\int\sqrt{x+b} = 2\int z^2 dz = \frac{2}{3}z^3 = \frac{2}{3}(x+b)^{\frac{3}{2}};$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a-b}\cdot\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C.$$

165). $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = ?$ $\qquad x=\cos z;\ x^2=\cos^2 z;$

$1-x^2=\sin^2 z;$

$\sin z\cos z\, dz = -x\,dx;$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int-\frac{\sin z\cos z\, dz}{\cos^3 z\sin z} = \int\frac{-dz}{\cos^2 z} =$$

$$= -\operatorname{tg} z = -\frac{\sin z}{\cos z} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

166). $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = ?$ $\qquad x=a\sin z;\ dx=a\cos z\, dz;$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{a^3\sin^2 z\cos z\, dz}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 z}} =$$

$$= \int\frac{a^3\sin^2 z\cos z\, dz}{a\sqrt{\cos^2 z}} = a^2\int\sin^2 z\, dz;$$

$\int\sin^2 z\, dz = ?$ $\qquad \sin z = u;\ \sin z\, dz = dv;$

$du=\cos z\, dz;\quad v=-\cos z;$

$$\int\sin^2 z\, dz = -\sin z\cos z - \int -\cos^2 z\, dz =$$

$$= -\sin z\cos z + \int dz - \int \sin^2 z\,dz;$$

$$2\int \sin^2 z\,dz = -\sin z\cos z + z;$$

$$\int \sin^2 z\,dz = -\frac{1}{2}\sin z\cos z + \frac{z}{2};$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\left(z - \sin z\cos z\right);$$

$$x = a\sin z; \quad z = \arcsin\frac{x}{a}; \quad \cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.$$

167). $$\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = ? \qquad \frac{e^x}{1+x} = z;$$

$$dz = \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x dx}{(1+x)^2};$$

$$\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \int dz = z = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

168). $$\int \operatorname{tang}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tang} x - x + C.$$

169. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = ?$ $\qquad x = \operatorname{arc\,tang} z;\ dx = \frac{1}{1+z^2}$

$\operatorname{tang} x = z;\quad \frac{\sin x}{\cos x} = z$

$z^2\cos^2 x = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x;\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2};$

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dz}{2+z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+\frac{z^2}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\operatorname{tang} x}{\sqrt{2}} + C. —$$

170) $\int \frac{\sin x \cos^2 x\, dx}{1+a^2\cos^2 x} = ?$

$a^2\cos^2 x = z^2;\quad -a^2\cos x \sin x\, dx = z\,dz;$

$a\cos x = z;\quad \cos x = \frac{z}{a};$

$$\int \frac{\sin x \cos^2 x\, dx}{1+a^2\cos^2 x} = \int \frac{-z^2\,dz}{a^3(1+z^2)} =$$

$$= -\frac{1}{a^3}\int \frac{(1+z^2-1)\,dz}{1+z^2} = -\frac{1}{a^3}\left[\int dz - \int \frac{dz}{1+z^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{a^3}\left[a\cos x - \operatorname{arc\,tang}(a\cos x)\right] =$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,tang}(a\cos x) - \frac{\cos x}{a^2} + C. —$$

171). $\int \operatorname{arc\,tang} x\, dx = ?$ $\quad \operatorname{arc\,tang} x = u;$

$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx; \quad dv = dx; \quad v = x;$

$$\int \operatorname{arc\,tang} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) =$$

$$= x \operatorname{arc\,tang} x - \log\sqrt{1+x^2} + C. \text{ ---}$$

172). $\int \arcsin x\, dx = ?$ $\quad \arcsin x = u;$

$du = \frac{1\,dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad dx = dv; \quad v = x.$

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \text{ ---}$$

173) $\int x e^{ax} dx = ?$ $\quad ax = z; \quad dz = a\,dx;$

$dx = \frac{dz}{a}; \quad x = \frac{z}{a};$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2}\int z e^z dz = ?$$

$e^z dz = dv; \quad v = e^z; \quad z = u; \quad dz = du;$

$$\frac{1}{a^2}\int z e^z dz = \frac{1}{a^2}\left(z e^z - \int e^z dz\right) = \frac{1}{a^2}\left(z e^z - e^z\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} e^z (z-1) = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1);$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C. \text{ ---}$$

44.

174). $\int e^{ax}\sin bx\,dx = ?$ $\qquad \sin bx = u;\ du = b\cos bx\,dx;$

$e^{ax}dx = dv;\quad v = \frac{1}{a}e^{ax};$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx;$$

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = ?$ $\qquad \cos bx = u;\ dv = e^{ax}dx;$

$\qquad du = -\sin x\,dx;\quad v = \frac{e^{ax}}{a};$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}\cos bx\,e^{ax} + \int\frac{b}{a}e^{ax}\sin bx\,dx;$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\cos bx\cdot e^{ax} +$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx;$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(a\sin bx - b\cos bx);$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

175). $\int x^3e^x\,dx = ?$ $\qquad e^x dx = dv;\ v = e^x$

$\qquad x^3 = u;\quad du = 3x^2dx;$

$$\int x^3e^x\,dx = e^x x^3 - 3\int e^x x^2\,dx;$$

$$\int e^x x^2\,dx = x^2e^x - 2\int e^x x\,dx;\quad \int e^x x\,dx = xe^x - \int e^x dx;$$

$$\int x^3e^x\,dx = e^x x^3 - 3x^2e^x - 6xe^x - 6e^x =$$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 - 6x - 6).$$

176). $\int x \log x\, dx = ?$ $\qquad x\,dx = dv;\ v = \frac{x^2}{2}$

$\log x = u;\ du = \frac{1}{x}dx;$

$$\int x \log x\, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x^2}{2x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right) + C. —$$

177). $\int x^2 \cos x\, dx = ?$ $\qquad \cos x\, dx = dv;\ u = x^2;$

$du = 2x\,dx;\quad v = \sin x;$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx;$$

$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C. —$$

178). $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x} = ?$ $\qquad x = u;\quad du = dx;$

$\frac{dx}{\cos^2 x} = dv;\ v = \tan g\, x;$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \tan g\, x - \int \tan g\, x\, dx =$$

$$= x\, tg\, x - \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = x \tan g\, x + \log \cos x + c.$$

179). $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx = ?$

$\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = u; \quad dx = d(a+v) = dv; \quad v = a+x;$

$$du = \left[\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right]' \cdot \left[\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right]' dx =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a+x}}\right)dx}{(a+x)\sqrt{1-\frac{x}{a+x}}} =$$

$$= \frac{\frac{a+x-x}{2\sqrt{x(a+x)}}}{(a+x)\sqrt{1-\frac{x}{a+x}}}\,dx =$$

$$= \frac{a\,dx}{2(a+x)\sqrt{xa+x^2-\frac{x^2(a+x)}{(a+x)}}} =$$

$$= \frac{a\,dx}{2(a+x)\sqrt{ax}};$$

$$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx = (a+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - \int\frac{a(a+x)\,dx}{2(a+x)\sqrt{ax}} =$$

$$= (a+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - \int\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}} =$$

$$= (a+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - \sqrt{ax} + C.$$

Całki określone.

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

180). $\int_a^b m x^{m-1}\,dx = \left[x^m\right]_a^b = b^m - a^m.$ —

181). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0^\circ = 1.$ —

182). $\int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\log x\right]_a^b = \log b - \log a = \log\frac{b}{a};$ —

183). $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$= -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos 0^\circ = \frac{1}{2}.$ —

184) $\int_0^1 x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx;$

$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x;$

$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = \left[e^x(x^2 - 2x + 2)\right]_0^1 = e - 2 = 0{,}718.$

185). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$;

$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx = \Big[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2 = 1,14.$ —

186) $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos 3x \cos^3 x\,dx = \int \cos 3x \cdot \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}\,dx =$

$= \frac{1}{4}\int \cos^2 3x\,dx + \frac{3}{4}\int \cos 3x \cos x\,dx =$

$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 6x)\,dx + \frac{3}{8}\int (\cos 2x + \cos 4x)\,dx =$

$= \frac{1}{8}\Big[x + \frac{\sin 6x}{6}\Big] + \frac{3}{8}\Big[\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4}\Big] = \frac{1}{8}\Big[\pi - (-\pi)\Big] = \frac{\pi}{4}.$

187). $\int_1^2 \log x\,dx = x\log x - \int dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^2 =$

$= 2\log 2 - 1.$ —

188). $\int_2^3 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2) = \Big[\log\sqrt{1+x^2}\Big]_2^3 =$

$= \log\sqrt{10} - \log\sqrt{5} = \log\sqrt{2}.$ —

Koniec części pierwszej.

Warszawa. Czerwiec 1916 r.

Czesław Kłobukowski —

Rachunek całkowy

Wstęp

Działanie odwrotne do różniczkowania, nazywa się całkowaniem. Polega ono na odnalezieniu funkcji pierwotnej, dla której znamy różniczkę albo pochodną. Znalezioną funkcję pierwotną nazywamy całką i oznaczamy symbolem $\int$. Zatem, jeśli $d\varphi(x) = f(x)dx$, czyli $\varphi'(x) = f(x)$, to $\varphi(x) = \int f(x)dx$. Podobnież, jeśli $d\varphi(x) = \frac{dx}{x}$, to $\varphi(x) = \int\frac{dx}{x}$. Znaleźć $\int\frac{dx}{x}$, znaczy odszukać funkcję $\varphi(x)$, której różniczka równa się $\frac{dx}{x}$.
Z rachunku różniczkowego wiemy, że $d\log x = \frac{dx}{x}$, więc $\varphi(x) = \lg x$ jest rozwiązaniem zadania.

Odnajdywanie funkcji $\varphi(x)$ takiej, że $d\varphi(x)$ równa się danej różniczce $f(x)dx$ doprowadza do nieskończonej ilości rozwiązań, różniących się tylko stałą dowolną. Dajmy na to, że $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są jakieś 2 rozwiązania, wtedy $d\varphi_1(x) = f(x)dx$ i $d\varphi_2(x) = f(x)dx$, skąd $d\varphi_1(x) - d\varphi_2(x) = 0$, albo $d[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] = 0$, a więc $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = C$, wreszcie $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) + C$. Jeśli zatem $\varphi(x)$ jest jedno rozwiązanie, to wszystkie wyraża wzór $\varphi(x)+C$, gdzie C jest stała dowolna, ale w żadnym nie funkcja x. Jeśli przy całkowaniu mamy dodatkowy warunek, że $f(x)$ dla $x=a$ równą jest danemu A, to stałą dowolną wybieramy odpowiednio do równania $f(x) = A$. Np. mamy $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$ i $\varphi(1)=0$, to ponieważ $\varphi(x) = \lg x + C$, piszemy $\lg(1) + C = 0$, skąd $C = 0$, a więc $\varphi(x) = \lg x$.

Zasadnicze wzory rachunku całkowego.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, gdyż $d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n dx$ dla $n \neq 1$
3. $\int\frac{dx}{x} = \lg x + C$, gdyż $d\lg x = \frac{dx}{x}$.
4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, gdyż $d\cos x = -\sin x\, dx$.
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$, gdyż $d\sin x = \cos x\, dx$.
6. $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, gdyż $d\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, gdyż $d \operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, gdyż $d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, gdyż $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $\int a f(x)dx = a \int f(x)dx$, gdyż $d\, af(x) = a\, df(x)$

11. $\int e^x dx = e^x + C$, gdyż $de^x = e^x dx$

12. $\int [f(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots] dx = \int f(x)dx + \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots$

Wzory pożyteczne przy całkowaniu.

13. $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C.$

14. $\int (x-a)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$

15. $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$

16. $\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) + C$

17. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 \pm x^2}} = \pm\sqrt{1 \pm x^2} + C.$

Rozdział I

Funkcje algiebraiczne

Zad. №1 $y = \int 3x^3 dx$? $y = 3\int x^3 dx = \frac{3}{4}x^4 + C$ **Odp.** $y = \frac{3}{4}x^4 + C$

Zad. №2 $y = \int (10x^4 + 8x^3 + 6x^2)dx$? $y = 10\frac{x^5}{5} + 8\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + C$

Odp. $y = 2x^3(x^2+x+1) +$

Zad. №3 $y = \int (x^3 \sin a - x^2 \cos^2 a)dx = ?$ (a — wielkość stała)

$y = \sin a \int x^3 dx - \cos^2 a \int x^2 dx = \sin a \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\cos^2 a + C$

Odp. $y = \sin a \cdot \frac{x^4}{4} - \cos^2 a \frac{x^3}{3} + C$

Zad. №4 $y = \int \sqrt{1 - \sin\frac{1}{\sqrt{3}}}\,(\log 5 \cdot x^7 + 1)dx$?

$y = \sqrt{1 - \sin\frac{1}{\sqrt{3}}}\,\log 5 \int x^7 dx + \sqrt{1 - \sin\frac{1}{\sqrt{3}}}\int dx$

Odp. $\sqrt{1 - \sin\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\log 5 \cdot \frac{x^8}{8} + x\right) + C.$

Zad N5 $y = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 7x^{-\frac{3}{2}}\right) dx$?

$$y = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 7\,\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C$$

Odp. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 14x^{-\frac{1}{2}} + C$

Zad. N6 $y = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{x^2}}$?

$$\frac{1}{x^3\sqrt[5]{x^2}} = x^{-3} \cdot x^{-\frac{2}{5}} = x^{-\frac{17}{5}}; \quad y = \frac{x^{-\frac{17}{5}+1}}{-\frac{17}{5}+1} + C$$

Odp. $y = -\frac{5}{12}\,\frac{1}{x^2\sqrt[5]{x^2}} + C$

Zad. N 7. $y = \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx$?

$$y = \int \left(x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}\right) dx = \int x^{\frac{7}{8}} dx = \frac{x^{\frac{15}{8}}}{15/8} + C$$

Odp. $y = \frac{8}{15} x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + C.$

Zad. N8 $y = \int x^{\sin\sqrt[3]{2}} dx$?

$\sin.\sqrt[3]{2} = \text{const.}$ $\quad y = \frac{x^{\sin\sqrt[3]{2}+1}}{\sin\sqrt[3]{2}+1} + C.$

Odp. $y = \frac{1}{\sin\sqrt[3]{2}+1} \cdot x^{\sin\sqrt[3]{2}+1} + C.$

Zad. N9 $y = \int \frac{(5x^4 - 3x^2 + 7)}{x^3} dx$?

$$y = \int \left(5x - 3x^{-1} + 7x^{-3}\right) dx$$

Odp. $y = \frac{5}{2}x^2 - 3\log x - \frac{7}{2x^2} + C.$

Zad. N10 $y = \int \frac{x^{\cos^2\alpha}\sqrt{(1+x)^3}}{x \cdot (x+1)^{\frac{1}{2}}} dx$?

$$y = \int x^{\cos^2\alpha - 1}(1+x)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} dx = \int x^{-\sin^2\alpha}(1+x)\, dx =$$

$$= \int \left(x^{-\sin^2\alpha} + x^{\cos^2\alpha}\right) dx = \frac{x^{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin^2\alpha} + \frac{x^{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha} + C.$$

Odp. $\frac{x^{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha} + \frac{x^{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha} + C.$

Funkcje wykładnicze i trygonometryczne

Zad. N 11 $y = \int (5e^x + 7\cos x)\,dx$?

$$y = \int 5e^x dx + \int 7\cos x\,dx$$

Odp. $y = 5e^x + 7\sin x + C$

Zad. N 12 $y = \int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}\,dx$?

$$(x^3 + x + 1):(x^2 + 1) = x + \frac{1}{1 + x^2}; \quad y = \int \left(x + \frac{1}{1 + x^2}\right) dx, =$$

$$= \int x\,dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} = \tfrac{1}{2}x^2 + \operatorname{arctg} x + C$$

Odp. $\frac{1}{2} x^2 + \operatorname{arctg} x + C$

Zad. N 13 $y = \int \left(12\, a^x \lg a + \frac{17}{\cos^2 x}\right) dx$?

$$y = \int 12\, a^x \log a\, dx + \int \frac{17}{\cos^2 x}\,dx; \quad \int a^x \log a\, dx = a^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad \text{Odp. } y = 12 a^x + 17 \operatorname{tg} x + C.$$

Zad. N 14 $y = \int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$?

$$\operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1;$$

$$y = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx; \quad \text{Odp. } y = \operatorname{cotg} x - x + C.$$

Rozdział II

Całkowanie metodą podstawienia

Wiele całek, różnych kształtem od rozpatrzonych w rozdziale I-szym, daje się jednak podciągnąć pod ich kategorję przez stosowną zamianę zmiennej, czyli podstawienie. Nowy sposób polega na nadaniu całce $\int f(x)\,dx$ postaci $\int F(z)\,dz$, gdzie z jest znaną funkcją zmiennej x, czyli znajduje się z nią w związku $\varphi(x) = z$, lub $x = \xi(z)$

Znając $\xi(z)$, z łatwością określimy $F(z)$, gdyż $f(x) = f[\xi(z)]$, $dx = \xi'(z)\,dz$ i $\int f(x)\,dx = \int f[\xi(z)]\,\xi'(z)\,dz$. Zamianę zatem prowadzimy w następujący sposób: jeśli znamy $x = \xi(z)$, to zamieniamy poprostu w podcałkowej funkcji x na $\xi(z)$, a dx na $\xi'(z)\,dz$

Jeśli następnie rozwiążemy całkę, otrzymamy jakąś $\Phi(z)+C$, którą trzeba znowu przedstawić w zależności od x.

Np. $\int \arc\sin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; podstawiając $x=\sin z$, mamy $\int \arc\sin(\sin z)\cdot \frac{\cos z\, dz}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = \int z\,dz$, gdyż $\arc\sin(\sin z) = z$, a $\sqrt{1-\sin^2 z} = \cos z$ i $dx = d(\sin z) = \cos z\, dz$. Jeśli $y = \int \frac{a\cdot F'(x)}{F(x)}dx$, czyli licznik podcałkowego ułamka jest pochodną mianownika, pomnożoną przez stałą a, to również znajdziemy: $\int \frac{a\,F'(x)dx}{F(x)} = a\log F(x) + C$

Jeśli $y = \int F(x)\,F'(x)dx$, czyli podcałkowa funkcja przedstawia iloczyn pewnej funkcji przez jej pochodną, to kładziemy $z = F(x)$, $dz = F'(x)dx$, skąd $y = \int z\,dz = \frac{z^2}{2} + C$, a więc wzór będzie taki:
$\int F(x)\,F'(x)dx = \frac{[F(x)]^2}{2} + C.$

Wogóle jednak jakiejkolwiek zasady powszechnej, kierującej sposobem podstawienia niema, pomyślny zaś rezultat zależy najczęściej od pomysłowości

Zad. N15 $y = \int \frac{3x^3-3x^2+x-1}{x^4-x^3+x^2-x}dx$?

Dzieląc licznik i mianownik przez $(x-1)$ otrzymamy:

$$y = \int \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx \text{ ; } \underline{\text{Odp.}}\ y = \log(x^3+x) + C$$

Zad. N16 $y = \int \frac{x}{1-x^2}dx$?

$$y = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x)^2}{(1-x^2)};$$

$$\underline{\text{Odp.}}\ y = -\frac{1}{2}\log(1-x^2) + C$$

Zad. N17 $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$? $\sqrt{1-x^2} = z$; $1-x^2 = z^2$

$$-x\,dx = z\,dz;\ x\,dx = -z\,dz, \text{ więc } y = \int \frac{-z\,dz}{z} = -\int dz = -z$$

$$\underline{\text{Odp.}}\ y = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Zad. N18. $y = \int \frac{\sin x}{a - b\cos x}dx$? — $y = \frac{1}{b}\int \frac{b\sin x}{a-b\cos x}dx =$

$$= \frac{1}{b}\int \frac{d(a-b\cos x)}{a-b\cos x} \text{ ; } \underline{\text{Odp}}\ \frac{1}{b}\log(a-b\cos x) + C$$

Zad. N 19 $y=\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$? $y=\int\frac{d(e^x+e^{-x})}{e^x+e^{-x}}$;

Odp. $y=\log(e^x+e^{-x})+C$

Zad. N 20 $y=\int\frac{dx}{\cos^2x(3+tgx)}$? $y=\int\frac{d(3+tgx)}{3+tgx}$;

Odp. $y=\log(3+tgx)+C$

Zad. N 21 $y=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}$? $\sqrt{1+x^3}=z$; $1+x^3=z^2$;

$3x^2dx=2zdz$; $x^2dx=\frac{2}{3}z\,dz$; $y=\int\frac{2}{3}\frac{zdz}{z}=\frac{2}{3}z+C$

Odp. $y=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+C$

Zad. N 22 $y=\int x\,lg(11+12x^2)^{\frac{1}{11+12x^2}}dx$?

$y=\int\frac{xdx}{11+12x^2}\log(11+12x^2)$; $lg(11+12x^2)=z$,

skąd $dz=\frac{12xdx}{11+12x^2}$, więc $\frac{xdx}{11+12x^2}=\frac{dz}{12}$;

$y=\int\frac{zdz}{12}=\frac{z^2}{24}+C$; Odp: $y=\frac{1}{24}\log(11+12x^2)+C$

Zad. N 23 $y=\int\frac{arc\sin(x-\frac{1}{2})dx}{\sqrt{3-4x^2+4x}}$?

$arc\sin(x-\frac{1}{2})=z$; $\frac{dx}{\sqrt{1-(x-\frac{1}{2})^2}}=\frac{2dx}{\sqrt{3-4x^2+4x}}=dz$;

$y=\frac{1}{2}\int zdz=\frac{z^2}{4}+C$; Odp. $y=\frac{1}{4}arc\sin^2(x-\frac{1}{2})+C$;

Zad. N 24 $y=\int\frac{\sqrt{(arctg\,x)^3}}{1+x^2}dx$?

$arc\,tg\,x=z$; $\frac{dx}{1+x^2}=dz$; $y=\int\sqrt{z^3}\,dz=\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}+C$

albo inaczej $\sqrt{(arctg\,x)^3}=z$, skąd $arc\,tg\,x=z^{\frac{2}{3}}$;

$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}dz$; więc $y=\int\frac{2}{3}z^{\frac{2}{3}}dz=\frac{2}{3}\frac{z^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=$

$=\frac{2}{5}z^{\frac{5}{3}}+C$; Odp. $y=\frac{2}{5}(arctg\,x)^{\frac{5}{2}}+C$;

Zad. N 25 $y=\int\cos(\sin x)\cos x\,dx$? $\sin x=z$; $\cos x\,dx=dz$

$y=\int\cos z\,dz=\sin z+C$

Odp. $y=\sin(\sin x)+C$.

Zad. N26 $y = \int tg(tgx)[1+tg^2x]dx$?

$tgx = z$; $\frac{dx}{\cos^2 x} = (1+tg^2x)dx = dz$;

$y = \int tgz\,dz = \int \frac{\sin z}{\cos z}dz$; $y = -\log\cos z + C$

Odp. $y = -\log\cos(tgx) + C$.

Zad. N27 $y = \int \sin\sqrt{1+x^2}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$?

$\sqrt{1+x^2} = z$; $\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = dz$; $y = \int \sin z\,dz = -\cos z + C$

Odp. $y = -\cos\sqrt{1+x^2} + C$.

Zad. N28 $y = \int \sin^3 x\,dx$?

$y = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$;

$\cos x = z$; $-\sin x\,dx = dz$; $y = -\int (1-z^2)dz = -z + \frac{z^3}{3} + C$;

Odp. $y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

Zad. N29. $y = \int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$?

$y = \int \cos^2 x\ \sin^3 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\sin^3 x \cos x\,dx$;

$\sin x = z$; $\cos x\,dx = dz$; a więc $y = \int (1-z^2)z^3 dz =$

$= \int (z^3 - z^5)dz = \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{6} + C$

Odp. $y = \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C$.

Zad. N30 $y = \int e^{\sin(1+x^2)} x\cos(1+x^2)dx$?

$\sin(1+x^2) = z$; $\cos(1+x^2)\cdot 2x\,dx = dz$;

$y = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^z + C$.

Odp. $y = \frac{1}{2}e^{\sin(1+x^2)} + C$.

Rozdział III

Całkowanie przez części

Wzór: $udv + vdu = d(uv)$ rachunku różniczkowego pozwala wywnioskować następującą formułę:

$\int(udv+vdu)=\int d(uv)=uv+C$, czyli $\int udv+\int vdu=uv$, jeśli opuścimy stałą dowolną. u i v są funkcjami x.
Stąd $\underline{\int udv=uv-\int vdu.}$ Wzór ten przedstawia tak zwane całkowanie przez części.

Zwykle zamiana $\int udv$ na $\int vdu$ przyprowadza do całek, znajdowanych wprost według zasadniczych wzorów, czasem jednak użyć jeszcze trzeba podstawienia. Wreszcie w niektórych wypadkach musimy się posiłkować wzorem na całkowanie przez części kilka razy z rzędu; wówczas całkę $\int vdu$ przedstawiamy w postaci wdz, gdzie w i z różnią się od v i u. $\int wdz=wz-\int zdw$; zamieniamy dalej całkę $\int zdw$ i t.d.

Np. $\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx$; jeśli $x^2=u$; $e^xdx=dv$; a więc $v=\int e^xdx=e^x$. Następnie całka $\int xe^xdx=\int x\,de^x$; kładziemy $w=x$; $z=e^x$, wówczas $\int xe^xdx=e^xx-\int e^xdx=xe^x-e^x$.

Znajdowanie funkcji u i v nie podlega żadnym ogólnym regułom. Jeśli u wybraliśmy, to v znajdziemy, całkując równanie $dv=\frac{f(x)dx}{u}$; $v=\int\frac{f(x)dx}{u}$. Stałej całkowania nadajemy zwykle wartość 0. Np. $y=\int\frac{\arccos x\cdot x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; oznaczamy $u=\arccos x$; $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $v=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; t.d.

<u>Zad. N 31.</u> $y=\int\log x\,dx$?

$$y=\int\log x\,dx=x\log x-\int x\,d\lg x=x\lg x-\int dx=x\lg x-x+C$$

<u>Odp.</u> $y=x\log x-x+C.$

<u>Zad. N 32.</u> $y=\int(\log x)^2dx$?

$$u=(\log x)^2;\ v=x;\ du=\frac{2\lg x\,dx}{x};\ dv=dx;$$

$$y = x(\log x)^2 - \int \frac{x\,2\log x\,dx}{x} = x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$$

Odp. $y = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C.$

Zad. N 33 $y = \int \log x^{x^2+x}\,dx$?

$y = \int (x^2+x)\log x\,dx = \int u\,dv$, gdzie $u = \log x$; $du = \frac{dx}{x}$

$dv = (x^2+x)dx$; $v = \int (x^2+x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$, więc

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\log x - \int\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\log x - \int\left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2}\right)dx$$

Odp. $y = \frac{x^2(2x+3)}{6}\lg x - \frac{x^2(4x+9)}{36} + C.$

Zad. N 34 $y = \int e^x(x^2+x)dx$?

$u = x^2+x$, $du = (2x+1)dx$; $dv = e^x dx$; $v = e^x$, więc

$y = (x^2+x)e^x - \int e^x(2x+1)dx$; stosujemy jeszcze raz całkowanie przez części, albo

$$y = \int (x^2e^x dx + xe^x dx) = \int x^2e^x dx + \int xe^x dx$$

Odp. $y = e^x(x^2 - x + 1) + C$

Zad. N 35 $y = \int \arcsin x\,dx$?

$u = \arcsin x$; $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $v = x$; $dv = dx$;

$$y = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Odp. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

Zad. N 36 $y = \int \arccos x\,dx$?

$u = \arccos x$; $du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $dv = dx$; $v = x$;

$$y = uv - \int v\,du = x\arccos x + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Odp. $y = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

Zad. N 37 $y = \int \operatorname{arc\,tang} x\,dx$?

$u = \operatorname{arc\,ctg} x$; $du = \frac{dx}{1+x^2}$; $dv = dx$; $v = x$;

$$y = x\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \int x\frac{dx}{1+x^2}; \int\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2};$$

Odp. $y = x\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$

Zad. N38. $y = \int(\mathrm{arc\,cos}\,x)^2 dx$?

$u = (\mathrm{arc\,cos}\,x)^2$; $du = \frac{-2\,\mathrm{arc\,cos}\,x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $dv = dx$; $v = x$;

$y = x(\mathrm{arc\,cos}\,x)^2 + \int\frac{2\,\mathrm{arc\,cos}\,x \cdot x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x(\mathrm{arc\,cos}\,x)^2 + 2y_1$

Również y_1 znajdziemy, całkując przez części

$u = \mathrm{arc\,cos}\,x$; $du = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

$v = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$; $y_1 = -\mathrm{arc\,cos}\,x\sqrt{1-x^2} - \int dx$;

Odp. $y = x(\mathrm{arc\,cos}\,x)^2 - 2(\mathrm{arc\,cos}\,x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C.$

Zad. N39. $y = \int\cos^2 x\,dx$?

$y = \int\cos x\cos x\,dx$; $u = \cos x$; $du = -\sin x\,dx$; $dv = \cos x\,dx$;

$v = \sin x$; $y = \sin x\cos x + \int\sin x\sin x\,dx = \sin x\cos x +$

$+\int(1-\cos^2 x)dx = \sin x\cos x + \int dx - \int\cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + x - y$;

$2y = \sin x\cos x + x.$

Odp. $y = \frac{1}{2}(\sin x\cos x + x) + C$

Zad. N40. $y = \int e^x\sin x\,dx$?

$y = uv - \int v\,du$; $u = e^x$; $du = e^x dx$; $dv = \sin x\,dx$;

$v = -\cos x$; $y = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx$; ale $\int e^x\cos x\,dx =$

$= \int e^x d\sin x = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - y$, więc

$y = -e^x\cos x + e^x\sin x - y$

Odp. $y = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$

Rozdział IV

Całkowanie algiebraicznych funkcji uwikłanych.

Całka algiebraicznej funkcji typu

$y = \int\varphi(xy)dx$, gdzie $f(x,y) = 0$, tylko w niektórych wypadkach może być przedstawiona zapomocą symbolów, znajdujących się w naszym rozporządzeniu, to jest da się rozwinąć na szereg skończony. Jeśli $f(xy)=0$ wyraża równanie 1-go stopnia względem y, to $y=\frac{\xi(x)}{\eta(x)}$ pewnej wymiernej funkcji x, i $\varphi(xy)=\varphi\left(x, \frac{\xi(x)}{\eta(x)}\right)$ przedstawia wymierny ułamek, który potrafimy całkować. Jeśli $f(x,y)=0$ wyraża równanie 1-go stopnia względem x, ale jakiegokolwiek względem x, to $x=\frac{\xi(y)}{\eta(y)}$ jest wymierną funkcją y, a $\varphi(x,y)=\varphi\left(\frac{\xi(y)}{\eta(y)}, y\right)$ i $dx=\left(\frac{\xi(y)}{\eta(y)}\right)' dy$ oczywiście równiek przedstawia wymierną funkcję y, pomnożoną przez dy. Podstawiając do $\int\varphi(x,y)dx$ zamiast x i dx — y i dy, otrzymamy całkę wymiernej funkcji, już dla nas znaną.

Np. $\int y\,dx$, gdzie $y^5x+y-1=0$, to $x=-\frac{y-1}{y^5}=-\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^5}$;

$dx=\frac{4dy}{y^5}-\frac{5dy}{y^6}$; $\int y\,dx=4\int\frac{dy}{y^4}-5\int\frac{dy}{y^5}=\frac{15-16y}{12y^4}+C$

<u>Zad. N 41.</u> $Y=\int y\,dx$, jeśli $y^3-xy=1$? Całkujemy przez części:

$$Y=\int y\,dx=xy-\int x\,dy\,;\quad x=\frac{y^3-1}{y}$$

$$Y=xy-\int\frac{y^3-1}{y}dy=-\int y^2dy-\int\frac{dy}{y}+xy;$$

<u>Odp.</u> $Y=\frac{2}{3}y^3+\log y+C.$

<u>Zad. N 42</u> $Y=\int y\,dx$, jeśli $yx-x+y^4-1=0$?

$$x=\frac{1-y^4}{y-1}=-(1+y+y^2+y^3);\quad Y=xy-\int x\,dy=$$

$$=xy+\int(1+y+y^2+y^3)dy=xy+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{2}+\frac{y^4}{4}+C$$

<u>Odp.</u> $Y=\frac{y(1-y^4)}{y-1}+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}+C.$

<u>Zad. N 43</u> $Y=\int y\,dx$, jeśli $y^3+x=xy^2$?

$$Y=xy-\int x\,dy\,;\quad x=\frac{y^3}{y^2-1}=y+\frac{y}{y^2-1}\,;$$

$$\int x\,dy=\int y\,dy+\int\frac{y\,dy}{y^2-1}=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\lg(y^2-1)+C$$

$$Y = xy - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\lg(y^2-1) + C;$$

Odp. $Y = \frac{y^2}{2}\cdot\frac{y^2+1}{y^2-1} - \frac{1}{2}\lg(y^2-1) + C.$

Zad. N 44. $Y = \int y\,dx$, jeśli $y^5+2y^4-xy^3-(x+1)y-1=0$?

$\int y\,dx = xy - \int x\,dy$; $x = \frac{y^5+2y^4-y-1}{y^3+y}$;

Dla znalezienia $\int x\,dy$ wyłączamy całość:

$(y^5+2y^4-y-1):(y^3+y) = y^2+2y-1+\frac{-2y^2-1}{y^3+y}$;

$$\int x\,dy = \int(y^2+2y-1)dy + \int\frac{-2y^2-1}{y^3+y}dy =$$

$$= \frac{y^3}{3}+y^2-y-\int\frac{2y^2+1}{y(y^2+1)}dy = \frac{y^3}{3}+y^2-y-\int\frac{dy}{y}-\int\frac{y\,dy}{y^2+1} =$$

$$= \frac{y^3}{3}+y^2-y-\lg y-\frac{1}{2}\lg(y^2+1)+C;$$

Odp. $Y = \frac{y^5+2y^4-y-1}{y^2+1} - \frac{y^3}{3} - y^2 + y - \lg y - \frac{1}{2}\lg(y^2+1) + C.$

Rozdział V

Całkowanie algiebraicznych funkcji niewymiernych

1. Całki typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{Ax+B}{ax+b}}, \sqrt[n_1]{\frac{Ax+B}{ax+b}}\right)dx$

znajdujemy, kładąc $\sqrt[k]{\frac{Ax+B}{ax+b}} = y$, czyli $\frac{Ax+B}{ax+b} = y^k$, gdzie k — najmniejsza wspólna wielokrotna $n, n_1, \ldots\ldots$

Podcałkową funkcję sprowadzamy ogólnie do wymiernego ułamka.

Np. jeśli mamy

$\int\frac{x^7dx}{\sqrt[3]{2+3x}}$, kładziemy $\sqrt[3]{2+3x} = z$;

$\int\frac{x\sqrt{2+7x}\,dx}{\sqrt[3]{2+7x}-\sqrt{2+7x}}$ " " $\sqrt[30]{2+7x} = z$;

Zad. N 45 $y = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{4+2x}}$?

$\sqrt{4+2x} = t$; $4+2x = t^2$; $2dx = 2t\,dt$; $dx = t\,dt$;

$$y = \int\left(\frac{t^2-4}{2}\right)^2\cdot\frac{t\,dt}{t} = \frac{1}{4}\int(t^4-8t^2+16)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{8t^3}{3} + 16t\right) + C;$$

Odp. $y = \frac{1}{20}(4+2x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(4+2x)^{\frac{3}{2}} + 4(4+2x)^{1/2} + C.$

Zad. N 46 $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$?

Wykładniki pierwiastków 2 i 3, najmn. wsp. wielokrotna = 6.

Podstawiamy $1+x = t^6$ i $\sqrt{1+x} = t^3$.

$x = t^6 - 1$; $dx = 6t^5 dt$;

$$y = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{t^2 - t^3} = \int \frac{(t^6-1)6t^3\,dt}{1-t} =$$

$$= -6\int \frac{(t^6-1)t^3\,dt}{t-1} = -6\int (t^5+t^4+t^3+t^2+1)t^3\,dt =$$

$$= -6\int (t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3)\,dt$$

Odp. $-6(1+x)^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{(1+x)^{\frac{5}{6}}}{9} + \frac{(1+x)^{\frac{2}{3}}}{8} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{7} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}}{6} + \frac{(1+x)^{1/6}}{5} + \frac{1}{4}\right\} + C.$

Zad. N 47 $y = \int x\sqrt[3]{3x+7}\,dx$?

$3x+7 = t^3$; $x = \frac{t^3-7}{3}$; $3dx = 3t^2 dt$; $dx = t^2 dt$;

$$y = \int \frac{t^3-7}{3}t^3\,dt = \frac{1}{3}\int t^6\,dt - \frac{7}{3}\int t^3\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^7}{7} - \frac{7}{3}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{3}t^4\left(\frac{t^3}{7} - \frac{7}{4}\right) + C$$

Odp. $y = \left(\frac{1}{7}x - \frac{1}{4}\right)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7} + C$

Zad. N 48, $y = \int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$?

Wspólna wielokrotna wykładników = 6.

$x = t^6$; $dx = 6t^5 dt$; $\sqrt[3]{x^2} = t^4$; $\sqrt{x} = t^3$;

$$y = \int \frac{6t^5\,dt}{2t^4+t^3} = 6\int \frac{t^2\,dt}{2t+1}; \left[t^2:(2t+1) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2t+1}\right]$$

$$6\int\left\{\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right) + \frac{1/4}{2t+1}\right\}dt = \frac{3}{2}(t^2 - t) + \frac{3}{4}\log(2t+1) + C$$

Odp. $y = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}\right) + \frac{3}{4}\lg\left(1 + 2\sqrt[6]{x}\right) + C$

Zad. № 49. $y = \int \frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[6]{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt[12]{x^{11}}}$?

$x = t^{12}$; $dx = 12t^{11}dt$;

$\sqrt[3]{x} = t^4$; $\sqrt[6]{x} = t^2$; $\sqrt[12]{x} = t$; $\sqrt[12]{x^{11}} = t^{11}$;

$$y = \int \frac{t+t^4}{1+t^2} \cdot \frac{12t^{11}dt}{t^{11}} = 12\int \frac{t^4+t}{t^2+1}dt =$$

$$= 12\int\left(t^2 - 1 + \frac{t+1}{t^2+1}\right)dt = 12\left(\frac{t^3}{3} - t + \int\frac{t\,dt}{t^2+1} + \int\frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= 4t^3 - 12t + 12\tfrac{1}{2}\lg(t^2+1) + 12\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C;$$

Odp. $y = 4\sqrt[4]{x} - 12\sqrt[12]{x} + 6\lg(\sqrt[6]{x}+1) + 12\,\mathrm{arctg}\sqrt[12]{x} + C$

B. Całki typu $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

Całki takie sprowadzamy do całek wymiernych ułamków zapomocą t.zw. podstawień Eulera.

1) Podstawienie $\sqrt{ax^2+bx+c} = z - x\sqrt{a}$; $z = x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2+bx+c}$,

$ax^2+bx+c = z^2 - 2xz\sqrt{a} + ax^2$, $bx+c = z^2 - 2xz\sqrt{a}$;

skąd widać, że x wyraża się wymiernie w zależności od z, a więc wymierną będzie $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

Jeśli mamy całkę $\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, to najdogodniej jest postępować dalej w sposób następujący:

różniczkujemy — $b\,dx = 2z\,dz - 2x\sqrt{a}\,dz - 2z\sqrt{a}\,dx$;

$dx(\sqrt{a}\,z + b) = (z - x\sqrt{a})dz$;

$\frac{dx}{z - x\sqrt{a}} = \frac{dz}{z\sqrt{a}+b}$, czyli $\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{dz}{z\sqrt{a}+b}$;

pozostaje tylko wyrazić $f(x)$ w zależności od z.

2) Podstawienie $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz - \sqrt{c}$

$z = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{c}}{x}$;

$ax^2+bx+c = x^2z^2 - 2xz\sqrt{c} + c$; $ax+b = xz^2 - 2z\sqrt{c}$;

znowu x wyraziliśmy wymiernie zapomocą z, a więc wymierną będzie $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

3) <u>Podstawienie $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)z$</u>;

x_1 i x_2 — pierwiastki

$$z = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1} = \frac{\sqrt{a(x-x_2)}}{x-x_1}; \quad \frac{x-x_2}{x-x_1} = \frac{z^2}{a};$$

x, dx, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, a więc i $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ wyrażają się wymiernie zapomocą z.

1-sze podstawienie używamy, gdy $a>0$
2-ie " " " " $c>0$
3-ie " " " " x_1 i x_2 (pierwiastki) — rzeczywiste liczby.

Ponieważ podstawienia Eulera wymagają znacznego zachodu i nakładu pracy, w ogólności staramy się ich uniknąć i sprowadzać szukaną całkę do całek typu:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ i } \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$$

Te ostatnie całkujemy, nie używając podstawień Eulera.

W drugiej całce podstawiamy $\sqrt{ax^2+bx+c} = z$;

$ax^2+bx+c = z^2$; $(2ax+b)dx = 2zdz$, więc

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = 2\int dz = 2z + C = \underline{2\sqrt{ax^2+bx+c} + C}$$

W szczególnym wypadku $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 \pm x^2}} =$

$= \pm\sqrt{1 \pm x^2} + C$

Jeśli $a<0$ to podstawiamy w całce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad z = \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}, \text{ i całkę szukaną}$$

sprowadzamy do $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

Zatem $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C$;

Jeśli $a > 0$, niepodobna uniknąć pierwszego podstawienia Eulera. Używając go, mamy wzór:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c}\right) + C$$

W szczególnym wypadku $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \lg(x+\sqrt{1+x^2}) + C$

Całkowanie $\int \frac{S\,dx}{\sqrt{R}}$, gdzie $S = Ax+B$, zaś $R = ax^2+bx+c$, wykonywujemy tak: dzielimy S przez pochodną R, to $S = \frac{A}{2a}(2ax+b)+d$; ($d$ — reszta $= B - \frac{A}{2a}b$) otrzymujemy

$$\int \frac{S\,dx}{\sqrt{R}} = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + d\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

Np. $\int \frac{(5x-9)\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+3)-9-\frac{15}{2}}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx =$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx - \frac{33}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+3x+2} - \frac{33}{2}\log(2x+3+\sqrt{x^2+3x+2}) + C$$

Całkowanie $J = \int f(x, \sqrt{R})dx$, gdzie $R = ax^2+bx+c$ prowadzimy w następującym porządku:

1) przedstawiamy $f(x)$ w postaci $\frac{P+Q\sqrt{R}}{S+T\sqrt{R}}$, gdzie P, Q, S i T funkcje całkowite x.

2) mnożymy licznik i mianownik przez $\frac{S-T\sqrt{R}}{\sqrt{R}}$, otrzymamy $\frac{p+q\sqrt{R}}{r\sqrt{R}} = \frac{q}{r} + \frac{p}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{R}}$, gdzie p, q, r — funkcje całkowite x, więc $J = \int \frac{q}{r}dx + \int \frac{p}{r}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}$;

3) $\int \frac{p}{r} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{s\,dx}{\sqrt{R}} + \int \frac{t}{r} \frac{dx}{\sqrt{R}}$, gdzie s — funkcja całkowita x, a $\frac{t}{r}$ właściwy wymierny ułamek.

4) Całkowanie $\int \frac{t}{r} \frac{dx}{\sqrt{R}}$ pokażemy tylko w wypadku pierwiastków rzeczywistych.

Rozkładamy $\frac{t}{r}$ na najprostsze wymierne ułamki $\frac{A}{x-a}$; $\frac{A_k}{(x-a)^k}$; otrzymamy wówczas sumę całek kształtu $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, i $\int \frac{dx}{(x-a)^k \sqrt{R}}$. W pierwszej i w drugiej używamy podstawienia $(x-a) = \frac{1}{y}$; otrzymamy wtedy $\int \frac{dy}{\sqrt{Ay^2+By+C}}$ i $\int \frac{y^{k-1}\,dy}{\sqrt{ay^2+By+C}}$

Np. chcąc znaleźć $y = \int \frac{(2x+5)\,dx}{(x^2-5x+4)\sqrt{1+x^2}}$, rozkładamy ułamek $\frac{2x+5}{x^2-5+4}$ na najprostsze $\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1}$; $A = \left[\frac{2x+5}{2x-5}\right] = \frac{13}{3}$; $B = \frac{-7}{3}$;

$$y = \frac{13}{3}\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{1+x^2}} - \frac{7}{3}\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}};$$

podstawiamy $x-4 = \frac{1}{y}$; $x = \frac{4+y}{y}$; $1+x^2 = \frac{y^2+16+8y+y^2}{y^2}$

$\sqrt{2y^2+8y+16} = y\sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-y}$; $dx = \frac{-dy}{y^2}$;

$$\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{2y^2+8y+16}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lg\left(\frac{4y+8}{2\sqrt{2}} + \sqrt{iden}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \lg\left(\frac{4x-14+\sqrt{1+x^2}}{x-4}\right) + C$$

Podobnież znajdziemy drugą całkę równą $-\frac{1}{\sqrt{2}} \lg\left(\frac{x+1+\sqrt{1+x^2}}{x-1}\right)$, a więc

$$Y = -\frac{13}{3\sqrt{2}} \lg\left(\frac{4x-14+\sqrt{1+x^2}}{x-4}\right) + \frac{7}{3\sqrt{2}} \lg\left(\frac{x+1+\sqrt{1+x^2}}{x-1}\right) + C.$$

Podstawienie Abela okazuje się wielce dogodne przy szukaniu całki $\int \frac{dx}{(\sqrt{Ax^2+Bx+C})^{2n+1}}$; mianowicie podstawiamy:

$y = \sqrt{Ax^2+B+C}$; $y' = \frac{Ax+B}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$;

$yy' = Ax+B$; $y\,dy' + y'^2\,dx = A\,dx$;

$y\,dy' = (A - y'^2)dx$; $\frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \frac{dy'}{A-y'^2}$;

Określamy y przy pomocy y':

$y^2 = Ax^2 + Bx + C$;

$$\left.\begin{array}{l} y^2y'^2 = A^2x^2 + 2ABx + B^2 \\ Ay^2 = Ax^2 + 2ABx + AC \end{array}\right\} \begin{array}{l} (A-y'^2)y^2 = AC - B^2 \\ y^2 = \frac{AC-B^2}{A-y'^2} \end{array}$$

$$y = \frac{1}{(AC-B^2)^n}\int (A-y'^2)^{n-1}dy' = \frac{1}{(AC-B^2)^n}\int (A-z^2)^{n-1}dz$$

Otrzymaliśmy więc funkcję całkowitą.

Zad. N50. $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}$? $y = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}}$

Odp. $y = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C$

Zad. N51 $y = \int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$?

$7 - 6x - x^2 = 16 - (x+3)^2 = 1 - \left(\frac{x+3}{4}\right)^2$

$$y = \int \frac{dx\left(\frac{x+3}{4}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x+3}{4}\right)^2}} = \arcsin\frac{x+3}{4} + C$$

Odp. $y = \arcsin\frac{x+3}{4} + C$

Zad. N52. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$?

$2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$; $y = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

Odp. $y = \arcsin(x-1) + C$

Zad. N53 $y = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+7}}$?

I-sze podstawienie Eulera $\sqrt{x^2+5x+7} = z - x$

$x^2 + 5x + 7 = z^2 - 2zx + x^2$; $5x + 7 = z^2 - 2zx$;

$5\,dx = 2z\,dz - 2z\,dx - 2x\,dz$; $(5+2z)dx = 2(z-x)dz$;

$$\frac{dx}{z-x} = \frac{2dz}{2z+5}; \int\frac{dx}{z-x} = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+7}} = \int\frac{2dz}{2z+5} = \lg(2z+5) + C$$

Odp. $y = \lg\left(2x+5+\sqrt{x^2+5x+7}\right)+C.$

Zad. N 54. $y=\int\frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$?

$$y=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}+3\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=y_1+3y_2\,;$$

$$y_1=-\frac{1}{8}\int\frac{d(-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}}=-\frac{1}{8}\int\frac{d(1-4x^2)^{1/2}}{1/2}=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C.$$

$$y_2=1/2\int\frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}}=1/2\arcsin 2x+C.$$

Odp. $y=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{2}\arcsin 2x+C.$

Zad. N 55 $y=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$? $\frac{1}{x}=z$; $\frac{dx}{x^2}=-dz$

$$y=\int\frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=-\arcsin z+C$$

Odp. $y=-\arcsin 1/x+C$

Zad. N 56 $y=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}$?

$$y=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x+2}{\sqrt{2x-x^2}}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=-\frac{1}{2}y_1+y_2$$

$y_1=2\sqrt{2x-x^2}+C$; y_2 podług zadania № 52

Odp. $y=-\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)+C.$

Zad. N 57 $y=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{5+6x+7x^2}}$?

$$y=\frac{1}{14}\int\frac{d(7x^2+6x+5)}{\sqrt{7x^2+6x+5}}-\frac{6}{14}\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2+6x+5}}=$$

$$=\frac{1}{14}\frac{\sqrt{5+6x+7x^2}}{1/2}-\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\lg\left(\frac{7x+3}{\sqrt{7}}+\sqrt{7x^2+6x+5}\right)+C$$

Zad. N 58 $y=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$?

$$y=-\frac{1}{6}\int\frac{-6x-2}{\sqrt{1-2x-3x^2}}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{6}\int\frac{d(1-2x-3x^2)}{\sqrt{1-2x-3x^2}}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$$

Odp. $y=-\frac{1}{3}\sqrt{1-2x-3x^2}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{2}+C$

Zad. № 59 $y = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$?

$$y = \int x \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int x\, d\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\, dx =$$
$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - y \text{ ; ale } \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \lg(x+\sqrt{1+x^2}) + C,$$
więc $2y = x\sqrt{1+x^2} - \lg(x+\sqrt{1+x^2}) + C$

Odp. $y = \frac{1}{2} x\sqrt{1+x^2} - \lg\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} + C.$

Zad. № 60 $y = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int x\, d\sqrt{1-x^2} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\, dx =$
$$= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{(1-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - y.$$

Odp. $y = -\frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C.$

Zad. № 61 $y = \int \sqrt{1+x^2}\, dx$?

$$y = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Dalej podług zad. № 59.

Odp. $y = -\frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin x + C.$

Zad. № 62 $y = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$?

$$y = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dalej podług zad. № 60.

Odp. $y = \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C$

Zad. № 63. $y = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$?

I podst. Eulera: $\sqrt{1+x^2} = z - x$; $1+x^2 = z^2 - 2zx + x^2$;

$x = \frac{z^2-1}{2z}$; $0 = z dz - x dz - z dx$; $z dx = (z-x) dz$;

$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{z-x} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; a więc $y = \int \frac{2z}{(z^2-1)} \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dz}{z^2-1} = \lg \frac{z+1}{z-1} + C$

Zad. № 64 $y = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$?

3-ie podst. Eulera: $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{(x-1)(x-2)}=z(x-1)$;

$z^2=\frac{x-2}{x-1}$; $\frac{dx}{(x-1)^2}=2z\,dz$;

$$\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}=\frac{dx}{(x-1)^2}:z=2dz;\quad y=\int 2dz=2z+C$$

Odp. $y=2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$;

Zad. N 65 $y=\int\frac{dx}{(\sqrt{1+x+x^2})^3}$?

$y=\sqrt{1+x+x^2}$; $z=y'=(\sqrt{1+x+x^2})'=\frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}$;

$y^2=1+x+x^2$; $yy'=yz=x+\frac{1}{2}$;

$z\,dy+y\,dz=z^2dx+y\,dz=dx$; $dx(1-z^2)=y\,dz$;

$\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\frac{dx}{y}=\frac{dz}{1-z^2}$, ale również

$y^2z^2=x^2+x+\frac{1}{4}=y^2-\frac{3}{4}$; $y^2=\frac{3}{4(1-z^2)}$, więc

$$\frac{dx}{(\sqrt{1+x+x^2})^3}=\frac{dx}{y^3}=\frac{4}{3}dz;\quad y=\frac{4}{3}z+C$$

Odp. $y=\frac{2(1+2x)}{3\sqrt{1+x+x^2}}+C$.

Rozdział VI

Całkowanie wymiernych funkcyj ułamkowych

Jeśli mamy całkę $y=\int\frac{f(x)}{F(x)}dx$, gdzie $\frac{f(x)}{F(x)}$ jest wymiernym ułamkiem, to przedewszystkiem należy zbadać:

1°, czy $f(x)$ nie jest wielokrotnością $F(x)$, gdyż wtedy y byłoby całką wymiernej funkcji, i

2°, czy $f(x)$ nie jest pochodną $F'(x)$, pomnożoną przez jakiś stały czynnik; w tym wypadku $y=\alpha\log F(x)+C$.

Powyższe zbadanie może nas uwolnić od wielu trudności, jakie przedstawia całkowanie wymiernych ułamków.

Gdyby wymiar licznika był większym od wymiaru mianownika, to

to należy wyłączyć całość z ułamka.
W ten sposób ułamek $\frac{f(x)}{F(x)}$ przedstawimy w formie funkcji całkowitej $\varphi(x)$ więcej ułamek właściwy $\frac{f_1(x)}{F(x)}$.
Wówczas $y = \int \varphi(x)dx + \int \frac{f_1(x)}{F(x)} dx$. Pierwszą całkę znajdziemy jednym ze sposobów podanych wyżej, obecnie zaś zajmiemy się znalezieniem $\int \frac{f_1(x)}{F(x)} dx$.
W tym celu przedstawiamy $\frac{f_1(x)}{F(x)}$, jako sumę ułamków o mianownikach równych prostym czynnikom funkcji $F(x)$, co pociąga za sobą znajomość pierwiastków równania $F(x)=0$.

1-szy wypadek.

Równanie $F(x)=0$ posiada pierwiastki rzeczywiste i jednokrotne

Wówczas $\frac{f_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$, (x) gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ — pierwiastki, czyli $F(x) = A(x-\alpha_1)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$, zaś $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ — wielkości stałe, które można znaleźć podług wzoru

$$A_n = \left[\frac{f_1(x)}{F'(x)}\right]_{x=\alpha_n} = \frac{f_1(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}$$

Np. $\frac{f_1(x)}{F(x)} = \frac{7x^2+1}{x^3-x}$; równanie $x^3-x=0$ posiada pierwiastki $0, -1, +1$, więc $A_1 = \left[\frac{7x^2+1}{3x^2-1}\right]_{x=0} = -1$; $A_2 = 4$ i $A_3 = 4$;

więc $\frac{7x^2+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{4}{x+1} + \frac{4}{x-1}$, skąd

$$\int \frac{f_1(x)dx}{F(x)} = A_1 \int \frac{dx}{x-\alpha_1} + A_2 \int \frac{dx}{x-\alpha_2} + \ldots\ldots + A_n \int \frac{dx}{x-\alpha_n}, \text{ ale}$$

$\int \frac{dx}{x-\alpha_1} = \log(x-\alpha_1) + C$ i t. d., zatem

$$\int \frac{f_1(x)}{F(x)} dx = A_1 \lg(x-\alpha_1) + A_2 \lg(x-\alpha_2) + \ldots A_n \lg(x-\alpha_n) + C$$

Wartości $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ można odszukać inaczej:
niech $\frac{f_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots\ldots \frac{A_n}{x-\alpha_n}$; i pomnóżmy

obie części równania przez $F(x) = A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$

$f_1(x) = AA_1(x-\alpha_2)\dots\dots(x-\alpha_n) + AA_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\dots\dots(x-\alpha_n)+\dots\dots$

Jeśli podstawimy $x=\alpha_1$, to w drugiej części równania odpadną wszystkie wyrazy oprócz pierwszego. Z otrzymanego równania znajdziemy A_1, gdyż A jest znane; podstawiamy dalej $x=\alpha_2$, znajdziemy A_2 i t.d.

Np. $\frac{7x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$; mnożymy przez

$x^3-x = x(x-1)(x+1)$, mamy

$7x^2+1 = A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1);$

Podstawiamy $x=0,\quad 1 = A(0-1);\quad A=-1;$

$x=1;\quad 7+1 = B.2;\quad B=4;$

$x=-1;\quad 7+1 = C.2;\quad C=4;$

Sposób ten jest bardzo dogodnym, jeżeli funkcja $F(x)$ jest przedstawiona jako iloczyn czynników prostych.

Wreszcie $A_1, A_2, \dots\dots A_n$ znaleść można sposobem, jakiego będziemy używali w ogólnym wypadku rzeczywistych i urojonych pierwiastków równania $F(x)=0$.

Mnożymy obie części tożsamości (x) przez $F(x)$, wypełniamy mnożenie, i po zredukowaniu podobnych wyrazów, przyrównujemy spółczynniki przy jednakowych funkcjach x;

otrzymamy szereg równań, z których znajdziemy $A_1, A_2 \dots\dots A_n$.

Np. $\frac{7x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$; mnożymy przez (x^3-x);

$7x^2+1 = A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1);$

$7x^2+1 = Ax^2-A+Bx^2+Bx+Cx^2-Cx;$

$7x^2+1 = (A+B+C)x^2+(B-C)x-A;$

$A+B+C=7;\quad B-C=0;\quad -A=-1;$

$A=1;\quad B=C=4;$

Bardzo często trafne podstawienie, znakomicie upraszcza całe zadanie.

Np. $\int \frac{x^2 dx}{x^9 - x^3}$; $x^3 = t$, wtedy otrzymamy $y = \int \frac{dt}{t^3 - t}$;

Zad. N 66 $y = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$?

Podcałkowy ułamek przedstawiamy $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$; ponieważ $x = +a, -a$ są pierwiastkami równania $x^2 - a^2 = 0$, A i B określimy albo ze wzoru $A = \left[\frac{f(x)}{F'(x)}\right]_{x=a}$ i $B = [\ ]_{x=-a}$, gdzie $f(x) = 1$, a $F'(x) = 2x$;

więc $A = \frac{1}{2a}$, $B = -\frac{1}{2a}$; albo mnożąc tożsamość $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$ przez $x^2 - a^2$ otrzymamy:

$1 = Ax + Aa + Bx - Ba$, skąd $A + B = 0$; $Aa - Ba = 1$;

$A = \frac{1}{2a}$; $B = -\frac{1}{2a}$.

Czyli $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a}$$

Odp. $y = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + C$

Zad. N 67. $y = \int \frac{3x+2}{x^2+x-2} dx$?

Pierwiastek równania $x^2 + x - 2 = 0$ są: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, a więc $\frac{3x+2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$; ze wzoru: $A = \left[\frac{3x+2}{2x+1}\right]_{x=1} = \frac{5}{3}$;

zaś $B = \frac{4}{3}$; $y = \int \frac{\frac{5}{3} dx}{x-1} + \int \frac{\frac{4}{3} dx}{x+2}$

Odp. $y = \frac{5}{3} \lg(x-1) + \frac{4}{3} \lg(x+2) + C$.

Zad. N 68 $y = \int \frac{x+2}{x^2-6x+5} dx$?

$\frac{x+2}{x^2+6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}$; mnożymy tożsamość przez x^2-6x+5;

mamy $x+2 = A(x-5)+B(x-1)$; podstawiamy $x=1$, $3=-4A$;

$A=-\frac{3}{4}$; podstawiamy $x=5$; $7=4B$; $B=\frac{7}{4}$.

$$y = -\frac{4}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{7}{4}\int\frac{dx}{x-5}$$

Odp. $y=-\frac{4}{3}\lg(x-1)+\frac{7}{4}\lg(x-5)+C$

Zad. №69 $y=\int\frac{3x-7}{2x^2+4x-16}\,dx$?

$x_1=2$; $x_2=-4$; $\frac{3x-7}{2x^2+4x-16}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+4}$;

$A=\left[\frac{3x-7}{4x+4}\right]=-\frac{1}{12}$; $B=\left[\;\right]_{x=-4}=\frac{19}{12}$;

$y=-\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{19}{12}\int\frac{dx}{x+4}$; **Odp.** $y=-\frac{1}{12}\lg(x-2)+\frac{19}{12}\lg(x+4)+C$.

Zad. №70 $y=\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx$?

Rozkładamy mianownik na czynniki:

$x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6)=x(x-2)(x+3)$, gdyż $x=2$ i $x=-3$

są pierwiastkami równ. $x^2+x-6=0$;

$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+C}$, skąd

$7x-5=A(x-2)(x+3)+B(x+3)x+C(x-2)x$

Jeśli $x=0$, to $-5=A(-2)(+3)$; $A=\frac{5}{6}$

" $x=2$, " $14-5=B.2(2+3)$; $B=\frac{9}{10}$

" $x=-3$, " $7(-3)-5=C(-3)(-3-2)$; $C=-\frac{26}{15}$

$$y=\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{9}{10}\int\frac{dx}{x-2}+\left(-\frac{26}{15}\right)\int\frac{dx}{x+3};$$

Odp. $y=\frac{5}{6}\lg x+\frac{9}{10}\lg(x-2)-\frac{26}{15}\lg(x+3)+C$.

Zad. №71 $y=\int\frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2}\,dx$?

Przedewszystkiem wyciągamy część całkowitą z ułamka

$$\frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{12}{x^2-3x+2}$$

Równ. $x^2-3x+2=0$, ma pierw. $x_1=1$ i $x_2=2$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$; $\frac{12}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$, skąd

$12=A(x-2)+B(x-1)$; dla $x=1$, $A=-12$;

dla $x=2$, $B=12$.

$$y=-12\int\frac{dx}{x-1}+12\int\frac{dx}{x-2}+\int(x+3)dx;$$

Odp. $y=\frac{x^2+6x}{2}+12\log\frac{x-2}{x-1}+C$.

Zad. № 72 $y=\int\frac{6x^4+14x^3-35x^2+21x-4}{x^2+3x-4}dx$?

Wyłączając całość, mamy:

$$\frac{6x^4+14x^3-35x^2+21x-4}{x^2+3x-4}=6x^2-4x+1+\frac{2x}{x^2+3x-4}$$

$\frac{2x}{x^2+3x-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}$, gdyż $x_1=1$, $x_2=-4$;

$2x=A(x+4)+B(x-1)$; dla $x=1$, $A=\frac{2}{5}$; dla $x=-4$, $B=\frac{8}{5}$.

$$y=\int(6x^2-4x+1)dx+\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{8}{5}\int\frac{dx}{x+4};$$

Odp. $y=2x^3-2x^2+x+\frac{2}{5}\lg(x-1)+\frac{8}{5}\lg(x+4)+C$.

Zad. № 73 $y=\int\frac{9x^2+48x}{x^3+8x^2+1}dx$?

Ponieważ $y=3\int\frac{d(x^3+8x^2+1)}{x^3+8x^2+1}$, więc

Odp. $y=3\log(x^3+8x^2+1)+C$

Zad. № 74 $y=\int\frac{x^2dx}{x^6-3x^3}$?

$x^3=t$; $x^2dx=\frac{1}{3}dt$; zatem $y=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t(t-3)}$;

$\frac{1}{t(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}$; $1=A(t-3)+Bt$;

dla $t=0$, $A=-\frac{1}{3}$; dla $t=3$, $B=\frac{1}{3}$.

$$y=-\frac{1}{9}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{9}\int\frac{dt}{t-3}=-\frac{1}{9}\lg t+\frac{1}{9}\lg(t-3)+C$$

Odp. $y=\frac{1}{9}\lg\frac{x^3-3}{x^3}+C$.

2-gi wypadek:

Równanie $F(x)=0$ posiada pierwiastki rzeczywiste i wielokrotne.

Jeżeli $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots\ldots=\alpha_k$ jest k-krotnym pierwiastkiem, to wyrazy $\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots\ldots+\frac{A_k}{x-\alpha_k}$ w rozwinięciu funkcji $\frac{f(x)}{F(x)}$, należy zastąpić wyrazami:

$\frac{A_k}{(x-\alpha_1)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha_1)^{k-1}}+\ldots\ldots+\frac{A_1}{x-\alpha_1}$. Zatem

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_k}{(x-\alpha_1)^k}+\ldots\ldots+\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_{k+1}}{x-\alpha_{k+1}}+\ldots\ldots\frac{A_n}{x-\alpha_n};$$

Wartość A_k; $A_1 \ldots A_n$ znajdziemy podług sposobu, wskazanego wyżej, mnożąc obie części tożsamości przez $F(x)$, i porównywując spółczynniki przy podobnych wyrazach. Porównanie to da nam cały szereg równań warunkowych, z których znajdziemy $A_k \ldots, A_1 \ldots A_n$.

Np. $\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$;

$x+1=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2$;

$x+1=Ax-2A+Bx^2-3Bx+2B+Cx^2-2Cx+C$

$x+1=(-2A+2B+C)+(A-3B-2C)x+(B+C)x^2$;

$B+C=0$; $C=-B$; $A=-2$;

$A-3B-2C=1$; $A-B=1$; $B=-3$;

$-2A+2B+C=1$; $-2A+B=1$; $C=3$

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}=-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x-2};$$

Czasami dogodniej jest określać wartość A_k innym sposobem wskazanym również wyżej, albo wreszcie połączonym jednym i drugim sposobem. Np. $(x+1)=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2$ (patrz wyżej)

Podstawiamy $x=2$; $2+1=C$; $C=3$;

" $x=1$; $A=-2$;

" $x=0$; $B=-3$;

O ile mamy $A_1, A_2 \ldots\ldots A_k, A_{k+1}\ldots$ całka

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx=A_k\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k}+A_{k-1}\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k}+\ldots A_1\int\frac{dx}{(x-\alpha_1)}+A_{k+1}\int\frac{dx}{(x-\alpha_{k+1})}+$$

$+\ldots\ldots$, albo

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}dx = -\frac{A_k}{(k-1)(x-\alpha_1)^{k-1}} - \frac{A_{k-1}}{(k-2)(x-\alpha_1)^{k-2}} - \dots\dots$$

$$- \dots - \frac{A_2}{x-\alpha_1} + A_1 \lg(x-\alpha_1) + A_{k+1} \lg(x-\alpha_{k+1}) + \dots$$

Wzór $\int \frac{dx}{(x-\alpha_1)^l} = \frac{1}{(l-1)(x-\alpha_1)^{l-1}} + C$, należy zapamiętać w podanej formie w celu uniknięcia zamian $\frac{1}{(x-\alpha_1)^l}$ na $(x-\alpha_1)^{-l}$; Np. $\int \frac{dx}{(x+5)^3} = \frac{-1}{2(x+5)^2} + C$

Przykład: $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}dx = \int \frac{-2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{-3dx}{x-1} + \int \frac{3dx}{x-2} =$
$= \frac{2}{x-1} - 3\lg(x-1) + 3\lg(x-2) + C.$ (patrz wyżej)

Całki kształtu $\int \frac{f(x)}{(x-a)^n}dx$, gdzie $f(x)$ funkcja całkowita, a $F(x)$, zawiera jeden tylko, n-krotny pierwiastek, lepiej jest odnajdywać innemi sposobami. Np. posiłkując się szeregiem Taylora rozwinąć $f(x)$ na

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^m f^m(a)}{m!},$$

wówczas otrzymamy sumę całek

$$f(a)\int \frac{dx}{(x-a)^n} + f'(a)\int \frac{dx}{(x-a)^{n-1}} + \dots \frac{f^m(a)}{m!}\int \frac{dx}{(x-a)^{m-n}},$$

których sposób całkowania pokazaliśmy wyżej.

Inny sposób całkowania $\int \frac{f(x)dx}{(x-a)^n}$: podstawiamy $x-a=y$; $dx=dy$; wyrażamy $f(x)$ w zależności od y; $f(x)=\varphi(y)$, zatem

$$y = \int \frac{\varphi(y)}{y^n}dy = \int \frac{A_n + A_{n-1}y + \dots}{y^n}dy. —$$

Naprzykład: $y = \int \frac{2+x}{(x-3)^2}dx$? $x-3=y$; $x+2=y+5$; $dx=dy$;

$$y = \int \frac{y+5}{y^2}dy = \int \frac{dy}{y} + 5\int \frac{dy}{y^2} = \lg y - \frac{5}{y} + C = \lg(x-3) - \frac{5}{x-3} + C. —$$

Inaczej, podług szeregu Taylora:

$$x+2 = (x+2)_{x=3} + \frac{(x-3)}{1}(x+2)'_{x=3} = 5 + (x-3).$$

$$y = \int \frac{5+(x-3)}{(x-3)^2}dx = 5\int \frac{dx}{(x-3)^2} + \int \frac{dx}{x-3} = -\frac{5}{x-3} + \lg(x-3) + C. —$$

Zad. № 75 $y = \int \frac{2x-5}{(x-1)^3} dx$?

Rozwiąz. 1-sze. Rozwijamy $(2x-5)$ podług szeregu Taylora.

$f(x) = 2x-5 = f(1) + (x-1) f'(1) = -3 + 2(x-1)$, gdyż

$f'(x) = 2$; $f'(1) = 2$;

$$y = \int \frac{-3+2(x-1)}{(x-1)^3} = -3\int \frac{dx}{(x-1)^3} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + C$$

Odp. $y = -\frac{4x-7}{2(x-1)^2} + C$

Rozwiąz. 2-gie. Całkujemy przez części: $u = 2x-5$; $du = 2dx$;

$dv = \frac{dx}{(x-1)^3}$; $v = -\frac{1}{2(x-1)^2}$, skąd

$$y = -\frac{2x+5}{2(x-1)^2} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} ; \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C.$$

Odp. $y = \frac{-4x-7}{2(x-1)^2} + C.$

Zad. № 76. $y = \int \frac{x^3-3}{(x-1)^4} dx$?

$x-1 = y$; $x = y+1$; $x^3-3 = y^3+3y^2+3y-2$;

$dx = dy$; $y = \int \frac{y^3+3y^2+3y-2}{y^4} dy =$

$$= \int \frac{dy}{y} + 3\int \frac{dy}{y^2} + 3\int \frac{dy}{y^3} - 2\int \frac{dy}{y^4} = \lg y - \frac{3}{y} - \frac{3}{2y^2} + \frac{2}{3y^3} + C$$

Odp. $y = \frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \lg(x+1) + C$

Zad. № 77. $y = \int \frac{x^2-2}{(x^2-2x+1)^2} dx$?

$\frac{x^2-2}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{x^2-2}{(x-1)^4}$; podług szeregu Taylora:

$f(x) = x^2-2 = f(1) + \frac{x-1}{1} f'(1) + \frac{(x-1)^2}{1.2} f''(1) + \ldots\ldots$;

ale $f(1) = -1$; $f'(1) = 2.1 = 2$; $f'''(1) = 0$, więc

$x^2-2 = -1 + (x-1)2 + (x-1)^2$;

$$\frac{x^2-2}{(x-1)^4} = \frac{-1+(x-1)2+(x-1)^2}{(x-1)^4} = \frac{-1}{(x-1)^4} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

zatem $y = -\int \frac{dx}{(x-1)^4} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$;

Odp. $y = \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + C$

Zad. N78 $y = \int \frac{x^4-6x^2+7}{(x-3)^5}dx$?

$x-3=z;\ (x-3)^5=z^5;\ x=z+3;\ dx=dz;$

$x^4 = z^4+12z^3+54z^2+108z+81;$

$-6x^2 = -6z^2-36z-54;\ x^4-6x^2+7 = z^4+12z^3+48z^2+72z+34$

$$y=\int \frac{z^4+12z^3+48z^2+72z+34}{z^5}dz =$$

$$=\lg z - \frac{12}{z^2} - \frac{24}{z^3} - \frac{17}{z^4} + C;$$

Odp. $y = -\frac{1}{4}\frac{x^4-6x^2+7}{(x-3)^4} - \frac{1}{3}\frac{x^3-3x}{(x-3)^3} - \frac{1}{2}\frac{x^2-1}{(x-3)^2} - \frac{x}{x-3} + \lg(x-3)+C$

Zad. N79 $y=\int\frac{x^3-4x^2+1}{(x-2)^4}dx$?

Rozwijamy (x^3-4x^2+1) na szereg Taylora:

$x^3-4x^2+1 = -7-4(x-2)+2(x-2)^2+(x-2)^3$

$$y = -7\int\frac{dx}{(x-2)^4} - 4\int\frac{dx}{(x-2)^3} + 2\int\frac{dx}{(x-2)^2} + \int\frac{dx}{x-2};$$

Odp. $y = \frac{7}{3(x-2)^3} + \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + \lg(x-2)+C.$

Zad. N80 $y=\int\frac{x^3-5x^2+2}{(x+1)^2}dx$? Wyłączając całość z ułamka mamy: $\int\frac{x^3-5x^2+2}{(x+1)^2} = \int(x-7)dx + \int\frac{13x+9}{(x+1)^2}dx;$

$\int(x-7)dx = \frac{x^2}{2} - 7x + C.$

Chcąc znaleźć drugą całkę, podstawiamy:

$x+1=z;\ dx=dz;\ x=z-1;\ 13x+9 = 13z-13+9;$

$13x+9=13z-4;\ \int\frac{13x+9}{(x+1)^2}dx = \int\frac{13z-4}{z^2}dz =$

$=13\int\frac{dz}{z} - 4\int\frac{dz}{z^2} = 13\lg z + \frac{4}{z};$

Odp. $y=\frac{x^2}{2}-7x+13\lg(x+1)+\frac{4}{x+1}+C$

Zad. N81 $y=\int\frac{x^5+2x^3}{(x^2+5x)^3}dx$?

$$\int \frac{x^5+2x^3}{(x^2+5x)^3}dx = \int \frac{x^2+2}{(x+5)^3}dx;$$

$x+5=z$; $x=z-5$; $dx=dz$; $x^2=z^2-10z+25$

$x^2+2=z^2-10z+27$

$$y=\int\frac{dz}{z}-10\int\frac{dz}{z^2}+27\int\frac{dz}{z^3}=\lg z+\frac{10}{z}-\frac{27}{2z^2}+C$$

Odp. $y=-\dfrac{27}{2(x+5)^2}+\dfrac{10}{x+5}+\lg(x+5)+C.$

Zad. N82 $y=\int\dfrac{x^3+1}{(x+1)^4}$? Skracamy podcałkowy ułamek przez $(x+1)$, wtedy $y=\int\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)^3}dx=\int(x^2-x+1)\,d\left(-\dfrac{1}{2(x+1)^2}\right)=$

$$=\frac{-x^2-x+1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{(x+1)^2}dx;$$

$$\int\frac{2x-1}{(x+1)^2}dx=\int(2x-1)\,d\left(-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{-2x-1}{x+1}+2\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-\frac{2x-1}{x+1}+2\lg(x+1)+C.$$

Odp. $y=\dfrac{-(x^2-x+1)}{2(x+1)^2}-\dfrac{2x-1}{2(x-1)}+\lg(x+1)+C$

Zad. N83. $y=\int\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}dx$?

$\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}=\dfrac{A}{(x+1)^2}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x}$; skąd $x^2+1=(B+C)x^2+(2C+B+A)\cdot x+C$

$C=1$; $B+C=1$;

$B=0$; $A+B+2C=0$; $A=-2$

$y=-2\int\dfrac{dx}{(x+1)^2}+\int\dfrac{dx}{x}$. Odp. $y=\dfrac{2}{1+x}+\lg x+C.$

Zad. N84 $y=\int\dfrac{7x^2+6}{x^3(x-5)}dx$?

Dzielimy $(6+7x^2):(5+x)=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{6}{25}x-\dfrac{181}{125}x^2+\dfrac{181}{125}x^3$ Reszta

$$\frac{7x^2+6}{x^3(x-5)}=-\frac{6}{5x^3}-\frac{6}{25x^2}-\frac{181}{125x}+\frac{181}{125(x-5)};$$

$$y=-\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x^3}-\frac{6}{25}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{181}{125}\int\frac{dx}{x}+\frac{181}{125}\int\frac{dx}{x-5}=$$

$$= \frac{3}{5x^2} + \frac{6}{25x} + \frac{181}{125} \lg \frac{x-5}{x} + C$$

Odp. $y = \frac{3(5+2x)}{25x^2} + \frac{181}{125} \lg \frac{x-5}{x} + C$

Zad. № 85. $y = \int \frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^3(x^2+6x+9)} dx$?

$$x^3(x^2+6x+9) = (x-0)(x-0)(x-0)(x+3)(x+3)$$

$$\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^3(x^2+6x+9)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x+3)^2} + \frac{E}{x+3}$$

$$x^4+2x^3-18x^2+54 = Ax^2+6Ax+9A+Bx^3+6Bx^2+9Bx+$$
$$+Cx^4+6Cx^3+9Cx^2+Dx^3+Ex^4+3Ex^3;$$ stąd

$A=6$; $B=-4$; $C=0$; $D=3$; $E=1$.

$$y = 6\int\frac{dx}{x^3} - 4\int\frac{dx}{x^2} + 3\int\frac{dx}{(x+3)^2} + \int\frac{dx}{x+3};$$

Odp. $y = -\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{3}{x+3} + \lg(x+3) + C$.

3-ci wypadek

Równanie $F(x)=0$ posiada pierwiastki urojone

Wiemy, że jeśli równanie $F(x)=0$ posiada współczynniki rzeczywiste, to wszystkie pierwiastki urojone będą dwukrotne zespolone, t.j. każdemu $\alpha_1 = a+bi$ odpowiada $\alpha_2 = a-bi$. Wskutek tego możemy dwa wyrazy rozwinięcia połączyć: $\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2}$ zamieniamy na jeden $\frac{B_1x+C_1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} = \frac{B_1x+C_1}{(x-a)^2+b^2}$.

Wogóle, jeśli α – pierwiastek k-krotny:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{C_k+B_kx}{[(x-a)^2+b^2]^k} + \frac{B_{k-1}x+C_{k-1}}{[(x-a)^2+b^2]^{k-1}} + \dots \frac{B_1x+C}{(x-a)^2+b^2} + \frac{A_{k+1}}{x-\alpha_{k+1}} + \dots$$

$B_k, C_k, B_{k-1} \dots B_1, C_1, A_{k+1} \dots$ znajdujemy, mnożąc ostatnią tożsamość przez $F(x)$ i przyrównywując współczynniki przy jednakowych potęgach x.

Np. $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x+3}{x^2(x^2+3)} = \frac{x+3}{x^2(x-\sqrt{-3})(x+\sqrt{-3})} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x}$

$x+3 = Ax^3 + Bx^2 + Cx^2 + 3C + Dx^3 + 3Dx;$

$A = -\frac{1}{3};\ B = -1;\ C = 1;\ D = \frac{1}{3};$

$\frac{x+3}{x^2(x^2+3)} = \frac{-\frac{1}{3}x - 1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{3}}{x}.$

Zatem po rozwinięciu na najprostsze ułamki $\int \frac{f(x)}{F(x)}dx$, sprowadza się do całek typu $\int \frac{dx}{x-\alpha}$ i $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n}$, których znajdowanie poznaliśmy wyżej i do całek $\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}dx$, $\int \frac{(Bx+C)dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}$ l i

Podobne całki znajdujemy w sposób następujący:

oznaczamy $\frac{x-a}{b} = z$; więc $\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{1}{b}\int \frac{Bbz+Ba+C}{z^2+1}dz =$
$= B\int \frac{z dz}{z^2+1} + \frac{Ba+C}{b}\int \frac{dz}{z^2+1};$

Całka $\int \frac{z dz}{z^2+1} = \frac{1}{2} lg(1+z^2)+C.$

Wzór ten, jak również i ogólny:

$$\int \frac{x dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} lg(x^2+a^2)+C$$

należy dobrze zapamiętać.

$\int \frac{dz}{z^2+1}$ arctg $z+C$. Zatem poszukiwana całka $=$

$= \frac{B}{2} lg(z^2+1) + \frac{Ba+C}{b} \operatorname{arctg} z + C =$

$= \frac{B}{2} lg[(x-a)^2+b^2] + \frac{Ba+C}{b} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{b} + C$

Np. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2(x^2+3)} = -\int \frac{\frac{1}{3}x+1}{x^2+3}dx + \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} =$

$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3} lg x - \frac{1}{3}\int \frac{x\,dx}{x^2+3} - \int \frac{dx}{x^2+3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3} lg x - \frac{1}{6} lg(x^2+3) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$

Uwaga: Jeśli mamy do czynienia z całkami kształtu:

$y = \int \frac{(ax+b)dx}{Ax^2+Bx+C}$, gdzie równanie $Ax^2+Bx+C=0$ posiada pierwiastki urojone zespolone, to nie można podcałkowego ułamka rozkładać na sumę najprostszych, a należy postępować w następujący sposób.

$$\int\frac{(ax+b)dx}{Ax^2+Bx+C}=\int\frac{\frac{a}{2A}(2Ax+B)+b-\frac{aB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}dx=$$

$$\frac{a}{2A}\int\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}dx+\frac{2Ab-aB}{2A}\int\frac{dx}{Ax^2+Bx+C};$$

$$\int\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}dx=\int\frac{d(Ax^2+Bx+C)}{Ax^2+B+C}=\lg(Ax^2+Bx+C)+C.$$

$$\int\frac{dx}{Ax^2+Bx+C}=\int\frac{4Adx}{4A^2x^2+4ABx+4AC}=\int\frac{4Adx}{(2Ax+B)^2+4AC-B^2}=$$

$$=2\int\frac{d(2Ax+B)}{(2Ax+B)^2+h^2}=\int\frac{2}{h}\cdot\frac{d\,\frac{2Ax+B}{h}}{\left(\frac{2Ax+B}{h}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{2}{h}\operatorname{arctg}\frac{2Ax+B}{h}+C,\text{ gdzie } h=\sqrt{4AC-B^2};$$

$$\int\frac{dx}{Ax^2+Bx+C}=\frac{2}{\sqrt{\text{wyróżnik}}}\operatorname{arctg}\frac{\text{pochodna mian}}{\sqrt{\text{wyróżnik}}}.$$

Warto zapamiętać powyższy wzór.

Na podstawie tego wzoru:

$$\int\frac{(ax+b)}{Ax^2+Bx+C}dx=\frac{a}{2A}\lg(Ax^2+Bx+C)+\frac{2Ab-aB}{Ah}\operatorname{arctg}\frac{2Ax+B}{h}$$

Całka $y=\int\frac{(Bx+C)\,dx}{[(x-a)^2+b^2]^l}=\int\frac{\alpha z+\beta}{(z^2+\beta^2)}dz$, jeśli użyjemy podstawienia $\frac{x-a}{b}=z$, lub $x-a=z$.

$$y=\alpha\int\frac{zdz}{(z^2+\beta^2)}l+\beta\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)}l;$$

$$\int\frac{zdz}{(z^2+\beta^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(z^2+\beta^2)}{(z^2+\beta^2)^l}=\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v^l}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(l-1)v^{l-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2(l-1)(z^2+\beta^2)^{l-1}}+C\quad(\text{Wzór})$$

Stosując powyższy wzór, mamy:

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)^5}=-\frac{1}{2.4(x^2+1)^4}+C.$$

Zad. N 86. $y=\int\frac{dx}{x+x^3}$? $\frac{1}{x+x^3}=\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$;

$1=A+Ax^2+Bx^2+Cx$; $A=1$; $C=0$; $B=-1$; $y=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{\ldots}$

Odp. $y = \lg x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2) + C$

Zad. N 87. $y = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$?

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4};$$

$1 = (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1);$

Dla wartości $x = 0$ $\quad 4B + D = 1;$

" " $\quad x = 1$ $\quad 5(A+B) + 2(C+D) = 1$

" " $\quad x = -1$ $\quad 5(A-B) + 2(C-D) = 1$

Spółczynnik przy x^3: $A + C = 0$. A więc

$5A - 2C = 0$; $5B + 2D = 1$; $2A + 2C = 0$; $A = C = 0$;

$B = \frac{1}{3}$; $D = -\frac{1}{3}$;

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4};$$

Odp. $y = \frac{1}{3}\operatorname{arc.tg} x - \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C.$

Uwaga. Rozwinięcie ułamka można wykonać prościej, po zastosowaniu podstawienia $x^2 = z$.

Zad. N 88. $y = \int \frac{dx}{x^2+x^4}$?

$$\frac{1}{x^2+x^4} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{1+x^2};$$

$1 = A + Ax^2 + Bx(1+x^2) + (Cx+D)x^2$; skąd

$A = 1$; $B = 0$; $C = 0$; $D = -1$.

Działania powyższe możemy uprościć, kładąc $x^2 = z$;

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2+1}.$$

A więc $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$; $y = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2}$;

Odp. $y = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$

Zad. N 89 $y = \int \frac{3x+5}{x(1+x^2)^2}\,dx$?

$$\frac{3x+5}{x(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(1+x^2)^2} + \frac{Dx+E}{1+x^2};$$

$3x+5=A(1+2x^2+x^4)+Bx^2+Cx+Dx^2+Dx^4+Ex+Ex^3$;

stąd $A=5$; $B=-5$; $C=3$; $D=-5$; $E=0$;

$$y=5\int\frac{dx}{x}+\int\frac{-5x+3}{(1+x^2)^2}dx+\int\frac{-5x}{1+x^2}dx=y_1+y_2+y_3$$

$y_1=5\lg x$; $y_3=-\frac{5}{2}\lg(1+x^2)$;

$$y_2=-5\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{5}{2}\,\frac{1}{1+x^2}+\frac{3}{2}\,\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$$

Zad. N 90. $y=\int\frac{dx}{a^3+x^3}$?

Dwumian $a^3+x^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$; pierwiastki $x^2-ax+a^2=0$ posiada urojone.

$$\frac{1}{a^3+x^3}=\frac{A}{x+a}+\frac{Bx+C}{x^2-ax+a^2},\text{ skąd}$$

$$1=Ax^2-Aax+Aa^2+Bx^2+Cx+Bax+Ca$$

$A=\frac{1}{3a^2}$; $B=-\frac{1}{3a^2}$; $C=\frac{2}{3a}$;

$$y=\int\frac{dx}{a^3+x^3}=\frac{1}{3a^2}\int\frac{dx}{a+x}-\frac{1}{3a^2}\int\frac{x-2a}{x^2-ax+a^2}dx.$$

$$\int\frac{dx}{a+x}=\lg(a+x)+C.$$

$$\int\frac{x-2a}{x^2-ax+a^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-a}{x^2-ax+a^2}dx-\frac{3a}{2}\int\frac{dx}{x^2-ax+a^2}=$$

$$=\lg(x^2-ax+a^2)-\frac{3a}{2}y_1;$$

$$y_1=\frac{1}{4}\int\frac{4dx}{(a-2x)^2+3a^2}=-\frac{1}{2\sqrt{3}a}\int\frac{d\left(\frac{a-2x}{\sqrt{3}a}\right)}{1+\left(\frac{a-2x}{\sqrt{3}a}\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2a\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a-2x}{a\sqrt{3}}\right)+C.$$

Odp. $y=\frac{1}{6a^2}\lg\frac{(a+x)^2}{x^2-ax+a^2}+\frac{1}{4a^2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{a-2x}{a\sqrt{3}}+C.$

Zad. N 91 $y=\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$? $y=\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$;

$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C$; drugą całkę znajdujemy, całkując przez części, mianowicie: $\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$

$=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$. Odp. $y=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$

Rozdział VII.

Całkowanie różniczkowych dwumianów.

Dwumianem różniczkowym nazywamy wyrażenie kształtu $x^m(a+bx^n)^p dx$.—

I. Jeśli p — liczba całkowita, to przy całkowaniu podobnych dwumianów nie spotykamy żadnych trudności, gdyż rozwinąwszy podług dwumianu Newtona, całkujemy sumę postępowych funkcji

Np. $\int \sqrt[3]{x}\,(2+3\sqrt[5]{x})^3 dx = \int x^{1/3}(2+3x^{1/5})^3 dx =$

$= \int x^{1/3}(8+36x^{1/5}+54x^{1/5}+27x^{3/5})dx = \int (8x^{1/3}+36x^{8/15}+54x^{11/15}+27x^{14/15})dx$ i t. d.

II. Jeżeli jednak p jest ułamkiem, to niezawsze można skończyć całkowanie.—

Dokładne całkowanie możliwym jest w 2-ch wypadkach:

a) jeśli $\frac{m+1}{n}$ — liczba całkowita.

Podstawiamy $a+bx^n = z^\beta$, gdzie β jest mianownikiem ułamka $p=\frac{\alpha}{\beta}$, i tym sposobem sprowadzamy całkę $\int x^m(a+bx^n)^p$ do całki wymiernego ułamka.—

Np. $J = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{(5+2x^2)^7}} = \int x^3(5+2x^2)^{-7/3}dx$;

$m=3$, $n=2$, $p=-\frac{7}{3}=\frac{\alpha}{\beta}$, więc $\beta=3$, $\alpha=-7$.

Podstawiamy 1) $5+2x^2=z^3$; różniczkując $4x\,dx =$ $= 3z^2dz$, otrzymamy: $x\,dx = \frac{3}{4}z^2dz$, jednak musimy przedstawić w zależności od z wyrażenie: $x^3dx = x^2\,x\,dx$

Z równania 1) skreślimy $x^2 = \frac{z^3-5}{2}$, więc

$$J=\int\frac{z^3-5}{2}\cdot\frac{3}{4}z^2\cdot z^{-7}dz=\frac{3}{8}\int(z^3-5)\cdot z^{-5}dz=$$
$$=\frac{3}{8}\int z^{-2}dz-\frac{15}{8}\int z^{-5}dz=-\frac{3}{8}z^{-1}+\frac{15}{32}z^{-4}+C$$

6) Jeśli $\frac{m+1}{n}+p$ – liczba całkowita. —

W tym wypadku podstawiamy $ax^{-n}+b=z^{\beta}$, gdzie β jest mianownikiem ułamka p. —

$\int x^m(a+bx^n)^p dx$ – sprowadzamy do postaci $\int x^{m+n}(ax^{-n}+b)^p dx$, biorąc x^n za nawias.

Np. $J=\int x^6(3x^{-3}+2)^{1/3}dx=\int x^5(3+2x^3)^{1/3}dx$

$m=6$, $n=-3$, $p=\frac{1}{3}$, $\beta=3$, $\frac{m+1}{n}+p=2$. —

Podstawiamy $3+2x^3=z^3$; $6x^2dx=3z^2dz$

$x^2dx=\frac{1}{2}z^2dz$; $x^3=\frac{z^3-3}{2}$; $x^5dx=x^3x^2dx=\frac{1}{4}(z^5-3z^2)dz$

$$J=\frac{1}{4}\int(z^5-3z^2)z\,dz=\frac{1}{4}\int z^6dz-\frac{3}{4}\int z^3dz=$$
$$=\frac{z^7}{28}-\frac{3z^4}{16}+C \ldots \text{ i t. d.}$$

$$J=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^6-1}}.$$

Zad. N 92. $J=\int x^{-1}(x^6+1)^{-\frac{1}{2}}dx$: Ponieważ $\frac{m+1}{n}=0$ liczba cała, podstawiamy $x^6+1=z^2$ ($p=-1/2$, więc $\beta=2$).

$x^6=z^2-1$, $6x^5dx=2z\,dz$, $x^5dx=\frac{1}{3}z\,dz$

tworzymy tożsamości $\frac{dx}{x}=\frac{x^5dx}{x^6}=\frac{1}{3}\frac{z.dz}{z^2-1}$

$$J=\int\frac{1}{3}\frac{z\,dz}{(z^2-1)z}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2-1}, \text{ skąd}$$

$$J=\frac{1}{6}\log\frac{z-1}{z+1}+C$$

Zad. N 93. $J=\int x^5\sqrt{1+x^3}\,dx$:

$\frac{m+1}{n}=2$ – liczba całkowita, niech $1+x^3=z^2$, więc

$x^3=z^2-1$; $3x^2dx=2z\,dz$, $x^2dx=\frac{2}{3}z\,dz$,

$x^5dx = x^3 \cdot x^2dx = \frac{2}{3}(z^2-1)z\,dz$

$$J = \int \frac{2}{3}(z^2-1)z \cdot z\,dz = \frac{2}{3}\int (z^4-z^2)dz,$$

podstawiając $z = \sqrt{1+x^3}$, otrzymamy

$$J = \frac{2}{45}(3x^2-2)(1+x^3)\sqrt{1+x^3} + C.$$

Zad. № 94. $$J = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$$J = \int x^{-2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}dx = \int x^{-5}(1-x^{-2})^{-\frac{3}{2}}dx$$

$1-x^{-2} = z^2$, $x^{-2} = 1-z^2$; $2x^{-3}dx = 2z\,dz$

$x^{-3}dx = z\,dz$; $(1-x^{-2})^{-\frac{3}{2}} = z^{-3}$

$x^{-5}dx = x^{-3} \cdot x^{-2}dx = z \cdot (1-z^2)dz$

$$J = \int z(1-z^2) \cdot z^{-3}dz = \int z^{-2}dz - \int dz = -z^{-1} - z + C.$$

Rozdział VIII

Całkowanie funkcji goniometrycznych

Całki kształtu $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$, gdzie f — funkcja wymierna $\sin x$ i $\cos x$, — sprowadzamy do całek wymiernych ułamków przy pomocy podstawienia

$$tg\,\frac{x}{2} = z \quad \ldots\ldots (1)$$

W tym celu zamieniamy $\sin x$ i $\cos x$ na $\sin\frac{x}{2}$ i $\cos\frac{x}{2}$, a następnie na $tg\,\frac{x}{2} = z$

Mianowicie: $$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{\sqrt{1+tg^2\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\frac{x}{2}}} = \frac{2z}{1+z^2}$$

Oprócz tego z równania (1) mamy

$\frac{x}{2} = arctg\,z$; $x = 2\,arctg\,z$; $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

Np. $$J = \int \frac{(1-\cos x)\sin x \cdot dx}{(1+\cos x)(2-2\cos x-3\sin x+3\sin x \cdot \cos x+\sin 2x)}$$

podstawiamy $tg\frac{x}{2}=z$, więc $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$,

$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$ $\quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$1+\cos x = \frac{2}{1+z^2}$ $\quad 1-\cos x = \frac{2z^2}{1+z^2}$, $\quad \sin x.\cos x = \frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}$

$\sin^2 x = \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}$, a więc

$$J = \int \frac{\frac{2z^2}{1+z^2}\cdot\frac{2z}{1+z^2}\cdot\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{2}{1+z^2}\left[2-\frac{2(1-z^2)}{1+z^2}-\frac{6z}{1+z^2}+\frac{6z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}+\frac{2.2z(1-z^2)}{(1+z^2)(1+z^2)}\right]} \text{ i t.d.}$$

W wielu jednak wypadkach możemy stosować inne prostsze podstawienia, a więc dla całek kształtu $\int \sin^m x.\cos^n x.dx$, gdzie m i n — liczby całkowite, a przynajmniej jedna z nich nieparzysta, podstawiamy dla m — parzystego, n — nieparzystego — $\sin x = z$, i dla m — nieparzystego, zaś n — parzystego — $\cos x = z$.

Jeśli m i n — nieparzyste liczby, wówczas podstawienie nie sprawia różnicy. Jeśli m i n są liczbami parzystemi, to podobne podstawienia doprowadzają do całek typu $\int z^l\sqrt{(1-z^2)^k}\,dz$, które również możemy scałkować, używając wzoru dla całkowania przez części.

Np. niech $n=0$, i m — dodatnie mamy

$\int \sin^m x\,dx = \int \sin^{m-1}x.\sin x\,dx$, podstawiamy

$u = \sin^{m-1}x$; $du = (m-1)\sin^{m-2}x.\cos x.dx$; $dv = \sin x.dx$,

$v = -\cos x$, a więc

$$\int \sin^m x\,dx = -\cos x.\sin^{m-1}x + (m-1)\int \sin^{m-2}x.\cos^2 x\,dx =$$

$$= -\cos x.\sin^{m-1}x + (m-1)\int \sin^{m-2}x(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= -\cos x.\sin^{m-1}x + (m-1)\int \sin^{m-2}x\,dx - (m-1)\int \sin^m x\,dx, \text{ więc}$$

$$m\int \sin^m x\,dx = -\cos x.\sin^{m-1}x + (m-1)\int \sin^{m-2}x\,dx, \text{ a zatem}$$

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\cos x.\sin^{m-1}x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x.dx;$$

Od całki drugiej przejdziemy do $\int \sin^{m-2} x\, dx$, i t. d., wreszcie dojdziemy dla m parzystego do $\int \sin^0 x\, dx = x + C$, a dla m nieparzystego do $\int \sin x . dx = -\cos x + C$.

[zauważymy, że $\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$ i $\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$]

Całkowanie przez części również wypada stosować, gdy m i n — ujemnemi i t. p.

Np. niech $m = -p$ i $n = 0$.

$$J = \int \frac{dx}{\sin^p x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^p x} dx = \int \frac{dx}{\sin^{p-2} x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^p x} dx$$

Dla drugiej całki kładziemy $u = \cos x$, $du = -\sin x\, dx$

$dv = \frac{\cos x}{\sin^p x} dx$; $v = \int \frac{\cos x}{\sin^p x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^p x}$, a więc jeśli $\sin x = z$, to $v = \int \frac{dz}{z^p} = -\frac{1}{(p-1) z^{p-1}} = \frac{-1}{(p-1)\sin^{p-1} x}$

Otrzymamy wzór $\int \frac{\cos x}{\sin^p x} dx = \frac{-1}{(p-1)\sin^{p-1} x}$

i analogiczny $\int \frac{\sin x}{\cos^p x} dx = \frac{1}{(p-1)\cos^{p-1} x}$

Zatem $\int \frac{dx}{\sin^p x} = \int \frac{dx}{\sin^{p-2} x} - \frac{\cos x}{(p-1)\sin^{p-1} x} - \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{\sin^{p-2} x}$

$$\int \frac{dx}{\sin^p x} = \frac{p-2}{p-1} \int \frac{dx}{\sin^{p-2} x} - \frac{\cos x}{(p-1)\sin^{p-1} x}$$

Przechodzimy w ten sposób od $\int \frac{dx}{\sin^p x}$ do $\int \frac{dx}{\sin^{p-2} x}$, od tej całki do całki $\int \frac{dx}{\sin^{p-4} x}$, wreszcie do całki $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, — dla p parzystego i do całki $\int \frac{dx}{\sin x}$ dla p — nieparzystego.

Całkę $\int \frac{dx}{\sin x}$ rozwiniemy, zakładając $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, poczem otrzymamy

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

analogicznie dla $\int \frac{-n}{\cos x} = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C$

Zupełnie w podobny sposób całkujemy

$\int \sin^m(\alpha x+\beta)\cos^n(\alpha x+\beta)\,dx$, gdzie α i β const.

Natomiast całki kształtu

$$\int \cos(\alpha_1 x+\beta_1)\cos(\alpha_2 x+\beta_2)\ldots\cos(\alpha_k x+\beta_k)\ldots\sin(\gamma_1 x+\delta_1)\sin(\gamma_2 x+\delta_2)\ldots\ldots(\gamma_l x+\delta_l)\,dx,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \beta_1, \beta_2 \ldots \gamma_1, \gamma_2 \ldots, \delta_1, \delta_2, \ldots$ liczby stałe. Powyższą całkę należy, stosując zasadnicze wzory trygonometryi, sprowadzić do sumy całek. –

$$\int \cos(Ax+B)\,dx = \frac{\sin(Ax+B)}{A}+C$$

$$\int \sin(Ax+B)\,dx = \frac{-\cos(Ax+B)}{A}+C$$

Np. Chcąc znaleźć $\int \sin(3x+5)\cos(x+3)\,dx$, uważamy, że

$$\sin[(3x+5)+(x+3)] = \sin(3x+5)\cos(x+3)+\cos(3x+5)\sin(x+3)$$

$$\sin[(3x+5)-(x-3)] = \sin(3x+5)\cos(x+3)-\cos(3x+5)\sin(x+3)$$

dodając, otrzymamy

$$\sin(3x+5)\cos(x+3) = \tfrac{1}{2}[\sin(4x+8)+\sin(2x+2)]$$

skąd

$$J = \tfrac{1}{2}\int \sin(4x+8)\,dx + \tfrac{1}{2}\int \sin(2x+2)\,dx =$$

$$= -\tfrac{1}{8}\cos(4x+8) - \tfrac{1}{4}\cos(2x+2)+C$$

Spotykamy jeszcze w zadaniach całki kształtu

$\int f(x)\sin x\,dx$ i $\int f(x)\cos x\,dx$, gdzie $f(x)$ funkcja całkowita. – Powyższe typy całek rozwiązujemy, stosując sposób per partes.

Np. kładziemy $u = f(x)$, $du = f'(x)\,dx$

$dv = \sin x\,dx$, $v = -\cos x$, skąd

$$\int f(x)\sin x\,dx = -f(x)\cos x + \int f'(x)\cdot\cos x\,dx$$

Znowu oznaczamy $u = f'(x)$, $du = f''(x)dx$, $dv = \cos x\,dx$, $v = \sin x$, skąd

$$\int f'(x)\cos x\,dx = f'(x)\sin x - \int f''(x)\sin x\,dx. -$$

Z otrzymaną całką postępujemy podobnie, póki nie otrzymamy $\int \sin x\,dx$ lub $\int \cos x\,dx$. —

Tegoż sposobu używamy, chcąc znaleźć $\int f(x)\sin(\alpha x+\beta)dx$, lub $\int f(x)\cos(\alpha x+\beta)dx$, gdzie α i β - stałe.

Np. $\int (x^2+x+3)\sin 2x\,dx = \int (x^2+x+3)\,d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) =$

$= -(x^2+x+3)\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int (2x+1)\cos 2x\,dx$

$\int (2x+1)\cos 2x\,dx = \int (2x+1)\,d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) =$

$= (2x+1)\frac{\sin 2x}{2} - 2\int \sin x\,dx = \frac{2x+1}{2}\sin 2x + \cos 2x + C$

$J = -(x^2+x+3)\frac{\cos 2x}{2} + (2x+1)\frac{\sin 2x}{2} + \cos 2x + C.$ —

<u>Niezbędne wzory.</u>

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$$

$$\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \lg \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^m x}dx = \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1}x} + C$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^m x}\,dx = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}x} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\lg\cos x + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \lg\sin x + C$$

Zad. N95 $J = \int \sin^2 x\,dx$. Całkujemy przez części:

$$J = \int \sin^2 dx = -\int \sin x \cdot d(\cos x) = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx$$

jednak $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, więc

$$J = -\sin x \cdot \cos x + \int dx - \underbrace{\int \sin^2 x\,dx}_{J}$$

$$2J = x - \sin x \cdot \cos x$$

$$J = \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C.$$

Zad. N96 $J = \int \cos^2 x\,dx$?

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad J = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx.$$

$$J = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Zad. N97 $J_1 = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

$$J_1 = \int \cos x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \cos x \cdot \frac{d\sin^3 x}{3} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{3} + \frac{1}{3}\int \sin^4 x\,dx$$

Całkę $J_2 = \int \sin^4 x\,dx$ – rozwiniemy w następujący sposób:

$$\sin^4 x = \frac{(1-\cos^2 x)^2}{4} = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 4x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$J_2 = \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx$$

$$J_2 = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C, \text{ więc}$$

$$J_1 = \frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{2}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right] + C$$

i t. d.

Zad. N 98 $J=\int \cos^4 x\,dx=\int \cos^3 x \cdot d(\sin x)=$

$=\cos^3 x \sin x+3\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x\,dx$

Sprowadziliśmy do poprzedniego zadania. —

Zad. N 99 $J=\int \cos^5 x\,dx.$

Załóżmy, iż $\sin x=z$, to $\cos x=\sqrt{1-z^2}$

$\cos x\,dx=dz$, $\cos^4 x=(1-z^2)^2=1-2z^2+z^4$

$$J=\int \underbrace{\cos^4 x}\cdot \underbrace{\cos x\,dx}=\int (1-2z^2+z^4)\,dz=$$

$$=\int dz-2\int z^2 dz+\int z^4 dz=z-\frac{2z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+C.$$

$$J=\sin x+\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

Zad. N 100. $J=\int \frac{dx}{\sin x}$

$$J=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\int \frac{\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}}{tg\,\frac{x}{2}}$$

oznaczymy $tg\,\frac{x}{2}=z$, mamy $dz=\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}$,

skąd $J=\int \frac{dz}{z}=lg\,z+C$

$$J=lg\,tg\,\frac{x}{2}+C.$$

Zad. N 101 $J=\int \frac{dx}{\cos x}$

oznaczymy $tg\,\frac{x}{2}=z$, $dz=\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}$.

$$J=\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=2\int \frac{\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1-tg^2\frac{x}{2}}=2\int \frac{dz}{1-z^2}=$$

$$=lg\,\frac{1+z}{1-z}+C=lg\,\frac{1+tg\,\frac{x}{2}}{1-tg\,\frac{x}{2}}+C,$$

ale ponieważ $\frac{1+tg\,\frac{x}{2}}{1-tg\,\frac{x}{2}}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$, więc

$$J = \lg tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$$

<u>Zad. N 102</u> $J = \int \frac{dx}{3 + \cos x}$

oznaczymy $tg\frac{x}{2} = z$, $x = 2 \operatorname{arc} tg z$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+z^2} - \frac{z^2}{1+z^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$J = \int \frac{2\,dz}{3(1+z^2)+1-z^2} = 2\int\frac{dz}{2z^2+4} = \int\frac{dz}{z^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} tg \frac{z}{\sqrt{2}} + C$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} tg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} tg\frac{x}{2}\right) + C$$

<u>Zad. N 103</u> $J = \int\frac{dx}{1+\sin x}$

oznaczmy $\frac{\pi}{2} + x = z$, $x = z - \frac{\pi}{2}$, $dx = dz$

$$J = \int\frac{dz}{1-\cos z} = \int\frac{dz}{2\sin^2\frac{z}{2}} = \int\frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2\frac{z}{2}} =$$

$$= -ctg\frac{z}{2} + C$$

<u>Zad. N 104</u> $J = -ctg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$

$$J = \int\frac{dx}{\cos x + \sin x}$$

niech $tg\frac{x}{2} = z$ $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$ $\cos x + \sin x = \frac{(1-z)^2}{1+z^2}$

$$J = 2\int\frac{dz}{(1-z)^2} = -\frac{2}{1-z} + C$$

$$J = -\frac{2}{1-tg\frac{x}{2}} + C$$

Zad. N 105. $\mathcal{J} = \int \frac{dx}{\sin^4 x}$

$$\mathcal{J} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C\,; \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \cos x \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin^4 x}\right)dx =$$

$$= -\int \cos\, d\left(\frac{1}{3\sin^3 x}\right) = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{1}{3}\int \frac{\sin x}{\sin^3 x}\,dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg} x + C$$

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{3}\,\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x + C$$

Zad. N 106 $\mathcal{J} = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$

$$\mathcal{J} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\,; \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx =$$

$$= \int \sin x \cdot d\left(\frac{1}{3\cos^3 x}\right) = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}\int \frac{\cos x}{\cos^3 x}\,dx =$$

$$= \frac{\sin x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x + C$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + C$$

Zad. N 107. $\mathcal{J} = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$

$$\mathcal{J} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = \int \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = -\int \cos x \, d\left(\frac{1}{2\sin^2 x}\right) =$$

$$= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \int \frac{\sin x}{2\sin^2 x}dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

$$J = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

Zad. N108 $J = \int \frac{dx}{\cos 3x}$

$$J = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos 3x}dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{\sin^2 dx}{\cos^2 x} = \int \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos 3x}dx = \int \sin x \cdot d\left(\frac{1}{2\cos^2 x}\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \int \frac{\cos x \, dx}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$J = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$$

Zad. N109 $J = \int \operatorname{tg}^3 x \, dx$

$$J = \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= -\int \operatorname{tg} x \, dx + \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \lg \cos x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$$

Zad. N110 $J = \int \sin(5x+3)\cos(3x+2)\,dx$

$$\sin(5x + 3x + 3 + 2) = \sin(8x+5) =$$

$$= \sin(5x+3)\cos(3x+2) - \cos(5x+3)\sin(3x+2)$$

$$\sin\left[(5x+3) - (3x+2)\right] = \sin(2x+1) = \sin(5x+3)\cos(3x+2)$$
$$+ \cos(5x+3)\sin(3x+2)$$

dodajemy

$\sin(5x+3)\cos(3x+2)=\frac{1}{2}\sin(2x+1)+\frac{1}{2}\sin(8x+5)$

$J=\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)dx+\frac{1}{2}\int\sin(8x+5)dx$

$J=-\frac{1}{4}\cos(2x+1)-\frac{1}{16}\cos(8x+5)+C$

Zad. N111 $J=\int\cos 5x.\cos 7x.dx$

$\cos(7x+5x)=\cos 12x=\cos 7x.\cos 5x-\sin 7x.\sin 5x$

$\cos(7x-5x)=\cos 2x=\cos 7x.\cos 5x+\sin 7x.\sin 5x$

dodajemy

$$\cos 5x.\cos 7x=\frac{\cos 12x+\cos 2x}{2}$$

$J=\frac{1}{2}\int\cos 12x\,dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x.dx$

$J=\frac{1}{24}\sin 12x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

Zad. 112 $J=\int x\sin x\,dx$

$J=-\int x\,d(\cos x)=-x\cos x+\int\cos x\,dx$

$J=-x\cos x+\sin x+C$

Zad. N113 $J=\int x^2\sin x\,dx$

$J=-\int x^2 d(\cos x)=-x^2\cos x+2\int x.\cos x\,dx$

$\int x\cos x\,dx=\int x\,d(\sin x)=x\sin x-\int\sin x\,dx=$
$=x\sin x+\cos x+C$

$J=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C=$
$=2x\sin x-(x^2-2)\cos x+C$

Zad. N114 $J=\int x^2\cos x\,dx$

$J=\int x^2 d(\sin x)=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx-$

$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

$J = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + C$

Rozdział IX: Całkowanie funkcji wykładniczej

Całki kształtu $\int f(x) e^{\alpha x} dx$ całkujemy przez części, zupełnie tak samo, jak całkowaliśmy $\int f(x)\sin x\, dx$ i $\int f(x)\cos x\, dx$ w rozdziale poprzednim. A mianowicie zakładamy $u = f(x)$ $du = f'(x)dx$, $dv = e^{\alpha x}$, $v = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$, więc $\int f(x) e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} f(x) - \frac{1}{\alpha}\int f'(x) e^{\alpha x} dx$

$\int f'(x) e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} f'(x) - \frac{1}{\alpha}\int f''(x) e^{\alpha x} dx$ i td.,

póki nie otrzymamy $\int A e^{\alpha x} dx$, gdzie A const. i

$\int A e^{\alpha x} dx = A\int e^{\alpha x} dx = \frac{A e^{\alpha x}}{\alpha} + C$.

Np. $\int e^{5x}(x+9)dx = \int (x+9)\, d\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) =$

$= (x+9)\frac{e^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5x} dx = (x+9)\frac{e^{5x}}{5} + \frac{e^{5x}}{25} + C$

Co się tyczy całek $\int f(e^x) dx$, gdzie f - funkcja algiebraiczna, to stosujemy, oczywiście, podstawienie $e^x = t$, $x = \lg t$, $dx = \frac{dt}{t}$, i sprowadzamy do całki $\int \frac{f(t)dt}{t}$, a to jest całka algiebraicznej funkcji lub wymiernego ułamka.

Zasadnicze wzory

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\lg a} + C$$

$$\int e^{\alpha x}dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

<u>Zad. N115</u> $J = \int e^{x} x\, dx$

$$J = \int x\, d(e^{x}) = x.e^{x} - \int e^{x}dx = x.e^{x} - e^{x} = (x-1)e^{x}$$

<u>Zad. N116</u> $J = \int (7x+1)e^{5x}dx$

$$J = \frac{1}{5}\int (7x+1)d(e^{5x}) = \frac{7x+1}{5}e^{5x} - \frac{7}{5}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{e^{5x}}{5}(7x+1) - \frac{7}{25}e^{5x} + C$$

<u>Zad. N117</u> $J = \int x^{3}e^{x}dx$

$$J = \int x^{3}d(e^{x}) = x^{3}e^{x} - 3\int x^{2}e^{x}dx =$$

$$= x^{3}e^{x} - 3\int x^{2}d(e^{x}) = x^{3}e^{x} - 3x^{2}e^{x} + 6\int x e^{x}dx =$$

$$= x^{3}e^{x} - 3x^{2}e^{x} + 6xe^{x} - 6e^{x}.$$

$$J = e^{x}(x^{3} - 3x^{2} + 6x - 6) + C.$$

<u>Zad. N118</u> $J = \int \frac{e^{x}(x^{3}-1)}{(x-1)}dx$

$$J = \int e^{x}(x^{2}+x+1)dx = \int (x^{2}+x+1)d(e^{x}) =$$

$$= e^{x}(x^{2}+x+1) - \int e^{x}(2x+1)dx =$$

$$= e^{x}(x^{2}+x+1) - e^{x}(2x+1) + 2\int e^{x}dx =$$

$$= e^{x}(x^{2}+x+1) - e^{x}(2x+1) + 2e^{x} + e =$$

$$= e^{x}(x^{2}-x+2) + C.$$

<u>Zad. N119.</u> $J = \int x^{4}e^{x}dx$

$$J = \int x^{4}d(e^{x}) = x^{4}e^{x} - 4\int x^{3}e^{x}dx$$

$$\int x^{3}e^{x}dx = \int x^{3}d(e^{x}) = x^{3}e^{x} - 3\int x^{2}e^{x}dx$$

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

$$\int x e^x dx = \int x\, d(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$J = x^4 e^x - 4\{x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)]\} + C$$

$$J = x^4 e^x - 4\{x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x]\} + C$$

$$J = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x + C$$

$$J = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$$

<u>Zad. N120</u> $J = \int (x^3+1) e^{2x} dx$

$$J = \frac{1}{2}\int (x^3+1) d(e^{2x}) = \frac{1}{2}(x^3+1)e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x} dx$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int x^2 d(e^{2x}) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx$$

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int x\, d(e^{2x}) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int e^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

po podstawicmy i wykonaniu otrzymamy

$$J = e^{2x}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{5}{16}\right) + C$$

<u>Zad. N121</u> $J = \int \frac{e^x}{1-e^{2x}} dx$ podstawiamy $e^x = z$

$$J = \int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\lg\frac{1+z}{1-z} + C$$

$$J = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) + C$$

<u>Zad. N122</u> $J = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ $e^x = z$

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C$$

$$J = \arcsin e^x + C$$

Zad. N 123 $\quad \mathcal{J} = \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \quad e^x = z$

$$\mathcal{J} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc} tg z + C$$

$$\mathcal{J} = \operatorname{arctg} e^x + C$$

Rozdział X

Całkowanie funkcji logarytmicznych

Całki kształtu $\int f(x) \lg[\varphi(x)] dx$, gdzie $f(x)$ i $\varphi(x)$ — funkcje całkowite znajdujemy całkowanie przez części. —

Niech $u = \lg[\varphi(x)]$, $du = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$, $dv = f(x) dx$, $v = \int f(x) dx = w(x)$, gdzie $w(x)$ — również funkcja całkowita. —

$$\mathcal{J} = w(x) \lg[\varphi(x)] - \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} w(x) dx$$

Tym sposobem otrzymujemy jako całkę wymierny ułamek $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$

Dla całek kształtu $\int f(x) (\lg x)^n dx$ należy stosować całkowanie przez części n razy, kładąc najpierw $u = (\lg x)^n$

$du = \frac{n[\lg(x)]^{n-1}}{x}$ $\quad dv = f(x) dx$, $v = \int f(x) dx = W = (x)$

$$\int (\lg x)^n f(x) dx = w(x) (\lg x)^n - n \int \frac{w(x)}{x} (\lg x)^{n-1} dx.$$

Tutaj nietylko $w(x)$, ale również $\frac{w(x)}{x}$ — funkcja całkowita, gdyż, jeżeli

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0 \text{, to}$$

$$w(x) = \frac{a_m x^{m+1}}{m+1} + \frac{a_{m-1} x^m}{m} + \dots\dots + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_0 x}{1} \text{, a}$$

$$\frac{w(x)}{x} = \frac{a_m}{m+1} x^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} x^{m-1} + \dots\dots + \frac{a_1}{2} x + a_0 .$$

Całkujemy przez części dalej, póki nie dojdziemy do

$\int v(x)(\lg x)^0 dx = \int v(x) dx$, t.j. całki funkcji całkowitej.

Zad. N124. $J = \int \lg x \, dx$

$$J = \int \lg x \, dx = \int \lg x \, d(x) =$$
$$= x \lg x - \int dx = x \lg x - x + C$$
$$J = x(\lg x - 1) + C$$

Zad. N125 $J = \int x \lg x \, dx$

$$J = \int \lg x . d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \lg x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x}$$
$$J = \frac{x^2}{2} \lg x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Zad. N126 $J = \int x^3 \lg (x-1) \, dx$

$$J = \frac{1}{4} \int \lg (x-1) \, d(x^4 - 1) = \frac{1}{4}(x^4-1) \lg (x-1) - \frac{1}{4} \int \frac{x^4-1}{x-1} dx =$$
$$= \frac{1}{4}(x^4-1) \lg (x-1) - \frac{1}{4} \int (x^3 + x^2 + x + 1) \, dx$$
$$J = \frac{1}{4}(x^4-1) \lg (x-1) - \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + C$$

Zad. N127 $J = \int (x^2 + 5x - 1) \lg (x) \, dx$

$$J = \int \lg x \, d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x\right) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x\right) \lg x -$$
$$- \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x\right) \frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x\right)\frac{dx}{x}=\frac{1}{3}\int x^2dx+\frac{5}{2}\int x\,dx-\int dx=$$

$$=\frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{4}-x+C.$$

$$J=\frac{2x^3+15x^2-6}{6}\lg x-\frac{4x^3+45x^2-36x}{36}+C$$

Zad. N128 $J=\int x^2\lg(1+x^2)\,dx$

$$J=\int\lg(1+x^2)\,d\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3}{3}\lg(1+x^2)-\frac{1}{3}\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$$

$$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1}{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=\int(x^2-1)dx+$$

$$+\operatorname{arctg}x=$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$$

$$J=\frac{1}{3}x^3\lg(1+x^2)-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x+C$$

Zad. N129 $J=\int(\lg x)^3dx$

$$J=x(\lg x)^3-3\int x(\lg x)^2\frac{dx}{x}=$$

$$=x(\lg x)^3-3\int(\lg x)^2dx$$

$$\int(\lg x)^2dx=x(\lg x)^2-2x\lg x+2x+C$$

$$J=x\left\{(\lg x)^3-3(\lg x)^2-6\lg x-6\right\}+C$$

Zad. N130 $J=\int x^2(\lg x)^2dx$

$$J=\int(\lg x)^2d\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3}{3}(\lg x)^2-\frac{2}{3}\int x^2\lg x\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^3}{3}(\lg x)^2-\frac{2}{3}\int x^2\lg x\,dx$$

$$\int x^2\lg x\,dx=\int\lg x\,d\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3}{3}\lg x-\frac{1}{3}\int x^3\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^3}{3}\lg x-\frac{x^3}{9}+C$$

$$J=\frac{x^3}{3}\left\{(\lg x)^2-\frac{2}{3}\lg x+\frac{2}{9}\right\}+C$$

Rozdział XI

Całkowanie funkcji cyklometrycznych

Całki kształtu $\int f(x) \operatorname{arc\,tg}[\varphi(x)]\,dx$ całkujemy tym samym sposobem, co i całki $\int f(x) \lg[\varphi(x)]\,dx$, t. j. przez części.

Zakładamy $u = \operatorname{arc\,tg}[\varphi(x)]$, $du = \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\,dx$,

$dv = f(x)\,dx$, $v = \int f(x)\,dx = W(x)$,

skąd $J = W(x) \operatorname{arc\,tg}[\varphi(x)] - \int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\,dx$ i t. d.

To samo stosuje się do $\int f(x) \arcsin[\varphi(x)]\,dx$, która tylko w pewnych wypadkach daje dokładny rezultat; np. $\varphi(x) = x$

Zasadnicze wzory

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

Zad. N 131 $J = \int x (\operatorname{arc\,tg} x)^2\,dx$

$$J = \int (\operatorname{arc\,tg} x)^2 \frac{d(x^2+1)}{2} = \frac{x^2+1}{2} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 -$$

$$- \int \frac{x^2+1}{2}\, 2 \operatorname{arc\,tg} x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{2} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 -$$

$$- \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \int \operatorname{arc\,tg} x \cdot d(x) =$$

$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) + C$$

$J = \frac{1}{2}(x^2+1)(\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) + C$

<u>Zad. N 132</u> $J = \int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$

$$J = \int \operatorname{arctg} x \; d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{1+x^2} = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \int x \, dx - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) + C$$

$$J = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \lg(1+x^2)\right] + C$$

<u>Zad. N 133</u> $J = \int x \arcsin x \, dx$

$$J = \int \arcsin x \; d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int x \, d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = -x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} \, dx =$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x^2 \, d(\arcsin x) =$$

$$= x^2 \arcsin x - 2 \int x \arcsin x \cdot dx$$

$$\int x \arcsin x \, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2}\Big[-x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x -$$

$$- x^2 \arcsin x + 2 \int \arcsin x \, dx\Big] =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x^2}{2} \arcsin x -$$

$$- \int x \arcsin x \, dx$$

$$2\int x \arcsin x \, dx = \frac{1}{2}\left(x^2 \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + x^2 \arcsin x\right)$$

$$\int x \arcsin x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \arcsin x + \frac{1}{4} x\sqrt{1-x^2} + C$$

Materjał do ćwiczeń
według prof. Z. Straszewicza

Zad. 1. $\int \sqrt{x^3}\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}$ 2. $\int 5\sqrt[3]{x^2}\,dx = 3\sqrt[3]{x^5}$. Zad. N3. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{4x^3}} = 2\sqrt{2}\sqrt[4]{x}$

Zad. N4. $\int (5-3x+5x^2+7x^3)\,dx = 5x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4$.

Zad. N5 $\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} - \frac{8}{x^5}\right) dx = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4}$

Zad. N6. $\int \left(x^4 + 7\sqrt{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{14}{3}\sqrt{x^3} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^5}$

Zad. N7. $\int (a\sin x + b\cos x + c\,e^x)\,dx = -a\,cs\,x + b\,sn\,x + c\,e^x$.

Zad. N8. $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{a}{sn^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \operatorname{arctg} x - a\,ctg\,x + \arcsin x$

Zad. N9. $\int \frac{3dx}{4+2x} = \frac{3}{2}\lg(4+2x)$; Zad. N10 $\int \frac{5x\,dx}{3x+2} = \frac{5x}{3} - \frac{10}{9}\lg(2+3x)$

Zad. N11 $\int \frac{3x^2\,dx}{a^3+x^3} = \lg(a^3+x^3)$. Zad. N12 $\int \frac{(5+x)\,dx}{10x+x^2} = \frac{1}{2}\lg(10x+x^2)$

Zad. N13 $\int \frac{3x\,dx}{(2+3x^2)^3} = \frac{-1}{4(2+3x^2)^2}$ Zad. N14. $\int \frac{cs\,x\,dx}{1+sn\,x} = \lg(1+sn\,x)$

Zad. N15 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$ Zad. N16 $\int \frac{dx}{x\lg x} = \lg(\lg x)$ Zad. N17.

$\int \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}} = \lg(e^x+x)$ Zad. N18 $\int (sn^4x - 3sn^3x + 4sn^2x + 11\,sn\,x)\,cs\,x\,dx =$

$= \frac{sn^5x}{5} - \frac{3sn^4x}{4} + \frac{4sn^3x}{3} + \frac{11sn^2x}{2}$. Zad. N19. $\int \frac{cs\,x\,dx}{sn^3x} = -\frac{1}{2sn^2x}$. Zad. N20

$\int sn^5x\,dx = -cs\,x + \frac{2cs^3x}{3} - \frac{cs^5x}{5}$. Zad. N21 $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Zad. N22 $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. Zad. N23 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =$

$= -2\operatorname{arc\,tg}(x-\sqrt{x^2-1}) = -\operatorname{arc\,sn}\frac{1}{x}$. Zad. N24. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} =$

$= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Zad. N25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+b\lg x}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+b\lg x}$. Zad. N26

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sn}\frac{x^2}{a^2}$ (podst: $x^2 = a^2u$). Zad. N27. $\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}$

Zad. N 28 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}\cdot\sqrt{b^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sn}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}$. ~~Zad. N 29~~ (podstawa: $\sqrt{x^2-a^2}=u$). Zad. N 29. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot dx = \operatorname{arc\,sn} x - \sqrt{1-x^2}$ (należy uwolnić licznik od $\sqrt{\ }$). Zad. N 30 $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\cdot dx}{x} = \sqrt{x^2+a^2} + a\lg\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$.

Zad. N 31 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a-b}\left\{(x+a)^{3/2}-(x+b)^{3/2}\right\}$ (pomnożyć licznik i mianownik przez $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$). Zad. N 32 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (podst: $x=\operatorname{cs} u$). Zad. N 33. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sn}\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

Zad. N 34 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sn}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$ (podst: $x=a\operatorname{sn} u$)

Zad. N 35 $\int \frac{xe^x\cdot dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}$ (podst: $e^x=(1+x)u$).

Zad. N 36 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \lg\frac{e^x}{1+e^x}$; Zad. N 37. $\int \frac{dx}{\operatorname{sn}^2 x\cdot\operatorname{cs}^2 x} = -2\operatorname{ctg} 2x$.

Zad. N 38 $\int \frac{dx}{a(1+\operatorname{cs} x)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ Zad. N 39. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x$

Zad. N 40. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{cs}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$; (podst: $\operatorname{tg} x = u$)

Zad. N 41. $\int \frac{\operatorname{sn} x\cdot\operatorname{cs}^2 x\,dx}{1+a^2\operatorname{cs}^2 x} = -\frac{\operatorname{cs} x}{a^2} + \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}(a\cdot\operatorname{cs} x)$

Zad. N 42 $\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x} = \frac{1}{a^2+b^2}\left\{ax + b\lg(a\operatorname{cs} x + b\operatorname{sn} x)\right\}$

Zad. N 43 $\int \operatorname{arc\,tg} x\cdot dx = x\operatorname{arc\,tg} x - \lg\sqrt{1+x^2}$ (Całk. przez części)

Zad. N 44 $\int \operatorname{arc\,sn} x\cdot dx = x\operatorname{arc\,sn} x + \sqrt{1-x^2}$ Zad. N 45 $\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)$. Zad. N 46 $\int e^{ax}\cdot\operatorname{sn} bx\cdot dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sn} bx - b\operatorname{cs} bx)}{a^2+b^2}$

Zad. N 46 $\int x^3e^x dx = (x^3-3x^2+6x-6)e^x$ Zad. N 47 $\int \frac{dx}{1+\operatorname{cs} x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Zad. N 48 $\int x\lg x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\lg x - \frac{1}{2}\right)$ Zad. N 49 $\int x^2\operatorname{cs} x\,dx = x^2\operatorname{sn} x + 2x\operatorname{cs} x - 2\operatorname{sn} x$

Zad. N 50 $\int \frac{x\operatorname{arc\,sn} x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x - \sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{arc\,sn} x$ {Całkowanie przez części; dana całka $= -\int \operatorname{arc\,sin} x\, d(\sqrt{1-x^2})$}.

Zad. N 51. $\int \operatorname{arc} \sin\left(\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right)dx = (x+a)\cdot\operatorname{arc}\sin\left(\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right) - \sqrt{ax}$; (dana całka $= \int \operatorname{arc}\sin\left(\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right)d(a+x)$).

Zad. N 52 $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg}x + \lg\cos x$ Zad. N 53. $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2-2x+2)$

Zad. N 54. $\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}$. Zad. N 55. $\int \frac{dx}{x^2+10x+16} = -\frac{1}{6}\lg\frac{x+2}{x+8}$ Zad. N 56 $\int \frac{3\,dx}{5-7x+2x^2} = \lg\frac{2x-5}{x-1}$. Zad. N 57 $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x+3}{2}$; Zad. N 58 $\int \frac{dx}{5x^2+4x+3} = \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{5x+2}{\sqrt{11}}$.

Zad. N 59. $\int \frac{(2x+43)dx}{x^2+x-12} = 7\lg(x-3) - 5\lg(x+4)$.

Zad. N 60. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-4x+20} = \lg(x^2-4x+20) + \frac{1}{4}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x-2}{4}$.

Zad. N 61 $\int \frac{(4x-7)dx}{x^2+6x+9} = 4\lg(x+3) + \frac{19}{x+3}$ Zad. N 62.

$\int \frac{15x^2-70x-95}{x^3-6x^2-13x+42}dx = \lg(x-7)^3\cdot(x+3)^5(x-2)^7$ Zad. N 63

$\int \frac{4x^2-15x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = \lg\frac{(x-1)^5\,(x-3)^5}{(x-2)^5}$

Zad. N 64 $\int \frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7}dx = x^2+5x+\frac{3}{2\sqrt{2}}\lg\left(\frac{x-3-\sqrt{2}}{x-3+\sqrt{2}}\right) + \lg(x^2-6x+7)^5$.

Zad. N 65. $\int \frac{x^5\,dx}{x^3-7x-6} = \frac{x^3}{3} + 7x + \frac{1}{4}\lg(x+1) - \frac{32}{5}\lg(x+2) + \frac{243}{20}\lg(x-3)$

Zad. N 66. $\int \frac{13x^2-68x+95}{x^3-11x^2+43x-65} = \lg(x-5)^{10}\cdot\sqrt{(x^2-6x+13)^3} + 8\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x-3}{2}$; (jednym z pierw. mian. jest 5)

Zad. N 67. $\int \frac{3x^2dx}{2+5x^2+3x^4} = 3\operatorname{arc}\operatorname{tg}x - \sqrt{6}\operatorname{arc}\operatorname{tg}x\sqrt{3/2}$

Zad. N 68 $\int \frac{4x^3-63x^2+338x-619}{(x-7)(x-5)^3}dx = 4\lg(x-7) + \frac{3x-16}{(x-5)^2}$

Zad. N 69. $\int \frac{x^2-2}{(x^2-2x+1)^2}dx = \frac{1+3x-3x^2}{3(x-1)^3}$

Zad. N 70 $\int \frac{x^3-4x^2+1}{(x-2)^4}dx = -\frac{6x^2-30x-29}{3(x-2)^3} + \lg(x-2)$

Zad. N 71. $\int \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4-5x^2+4} = \frac{1}{3} lg \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}$

Zad. N 72 $\int \frac{(2x^3+7x^2+6x+2)dx}{x^4+3x^3+2x} = lg \frac{x^{3/2}(x+1)}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{x}$.

Zad. N 73 $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{4}{x+2} + lg(x+1)$ (jeden pierw. mianow. $= -1$)

Zad. N 74 $\int \frac{x^2 dx}{x^4+x^2-2} = \frac{1}{6} lg \frac{x-1}{x+1} + \frac{\sqrt{2}}{3} arc\,tg \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Zad. N 75 $\int \frac{(3x^2+x-2)dx}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{3}{4} lg \frac{x^2+1}{(x-1)^2} - arc\,tg\,x - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{5}{2(x-1)}$.

Zad. N 76. $\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2} arc\,tg\,x$

Zad. N 77 $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} lg \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} arc\,tg\,x$.

Zad. N 78. $\frac{1}{4} \int \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}} dx = -\frac{1}{3} x^{3/4} + \frac{1}{2} x^{1/2} + x^{1/4} - \frac{1}{2} lg(1+\sqrt{x}) -$
$- arc\,tg \sqrt[4]{x}$.

Zad. N 79. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+2x}} = \frac{1}{15}(32-8x+3x^2)\sqrt{4+2x}$.

Zad. N 80 $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x+x^2}} = lg\left(x-2+\sqrt{3-4x+x^2}\right)$

Zad. N 81 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = lg\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)$

Zad. N 82 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x+2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} lg\left[2x-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]$.

Zad. N 83 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} arc\,sn \frac{5x-2}{3}$.

Zad. N 84 $\int \frac{dx}{\sqrt{-2-5x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} arc\,sn\,(6x+5)$

Zad. N 85 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x-1} \left\{\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3}{5}(x-1)^2 + x\right\}$.

Zad. N 86. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} lg \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}$.

Zad. N 87. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}} = \frac{(3x+2)\sqrt{x-1}}{4x^2} + \frac{3}{4} arc\,cs \frac{1}{\sqrt{x}}$

Zad. N 88 $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^{3/2}} = \frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}}$

Zad. N 89 $\int (a+bx)^{3/2} x\,dx = \frac{2(a+bx)^{5/2}}{b^2} \cdot \left(\frac{a+bx}{7} - \frac{a}{5}\right)$

Zad. N 90 $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{1+x}$

Zad. N 91 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x+2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg\left(2x - \frac{3}{2} + \sqrt{(2x-3/2)^2 - \frac{1}{4}}\right)$

Zad. N 92. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \arcsin(x-1)$

Zad. N 93. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = -\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)$.

Zad. N 94 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}} = -\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$ (podst: $\sqrt{2x-x^2} = xu$)

Zad. N 95. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-x^2}} = -\frac{(1+x)\sqrt{2x-x^2}}{3x^2}$.

———·———