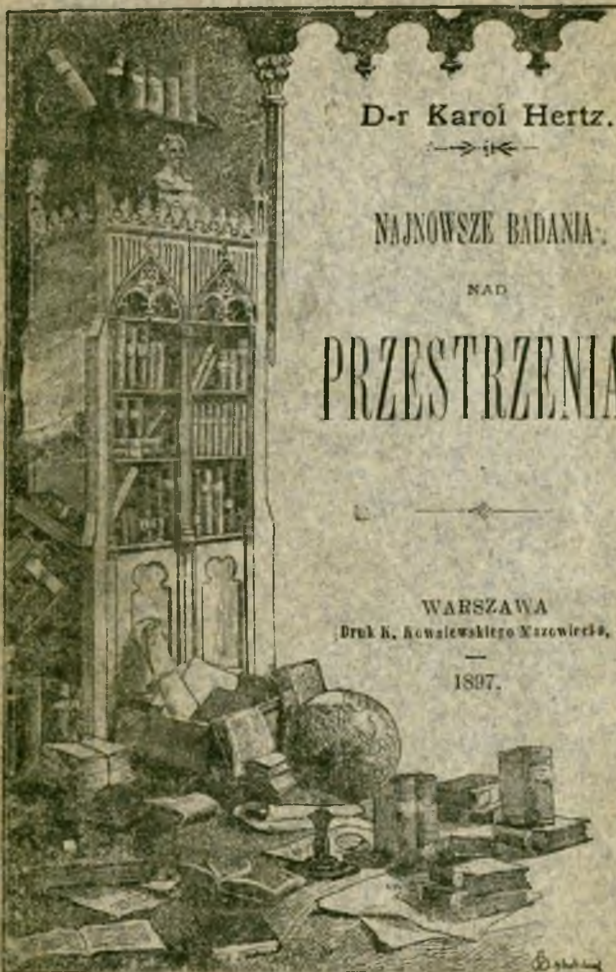
D-r Karol Hertz.

NAJNOWSZE BADANIA

NAD

PRZESTRZENIĄ.



WARSZAWA
Druk K. Kowalewskiego Mazowiecka, 8.

1897.

Dr. Karol Hertz.

NAJNOWSZE BADANIA

NAD

PRZESTRZENIĄ.

WARSZAWA.
DRUK K. KOWALEWSKIEGO, MAZOWIECKA, 8.

1897.

Дозволено Ценаурою
Варшава, 31 Декабря 1896 года.

Nowsze badania początków geometryi dały powód do najdziwaczniejszych pojęć o naszej przestrzeni, zarówno co do liczby jej wymiarów, jako też i rozciągłości, które-to pojęcia nie znajdują żadnego uzasadnienia w pracach tych uczonych, co wywołali nowy ruch naukowy w dziedzinie geometryi. Ponieważ badania te nietylko mają znaczenie czysto matematyczne, lecz są jeszcze niezmiernie ważne dla filozofii, teoryi poznania i psychologii, więc sądzę, że zainteresować one mogą szersze koło czytelników. Literatura zagraniczna jest bardzo bogata w prace, traktujące o tej kwestyi; nasz zaś język, oprócz tłómaczenia rozprawy Riemanna, nie posiada nic w tym kierunku. Zdaje mi się więc, że obszerniejsza nieco praca o tym przedmiocie nie będzie bez korzyści dla czytelników. Do napisania rozprawy skłania mnie jeszcze ta okoliczność, że w ostatnich czasach spirytyzm starał się korzystać z badań matematycznych, szukając w nich punktu oparcia dla swych rzekomych cudów. Ponieważ spirytyzm podkopuje wszelkie podstawy naukowe i zagraża dotychczasowemu naszemu dorobkowi umysłowemu, więc wyjaśnienie rzeczywistego stanu, o ile mi się zdaje, jest rzeczą niezmiernie ważną, a to tembardziej, że ludzie wogólności są skłonniejsi do uwierzenia w cuda, aniżeli w rezultaty najściślejszych badań naukowych.

W niniejszej rozprawie postaram się wyłożyć rzecz w sposób najprzystępniejszy, dotykając tylko konsekwencyi filozoficznych w sposób najogólniejszy.

I.

Pewniki Euklidesa.

Od najdawniejszych czasów, geometrya zwróciła na siebie uwagę wszystkich głębokich myślicieli. Pomiędzy wszystkiemi gałęziami wiedzy ludzkiej, ona jedynie nie potrzebowała długiego peryodu rozwoju, lecz zaraz, przy pierwszej poważnej próbie systematycznego traktowania, stanęła jako całość doskonała we wszystkich częściach. Co więcej, względem niej wszelka wątpliwość i niepewność stają się niemożebnemi. Pomimo, że do budowy swej nie zbiera faktów z doświadczeń i obserwacyj, lecz twierdzenia wyprowadza wyłącznie z czystej dedukcyi, drogą czystego rozumowania, to jednak obejmuje ona cały materyał, wypełniający przestrzeń, i żadne doświadczenie lub obserwacya nie zdołały w niczem zmienić wypadków, przez nią otrzymanych. Inżynierowie, mechanicy, budowniczowie, miernicy i fizycy posługują się nią dla celów praktycznych, nie obawiając się, ażeby kiedykolwiek jej twierdzenia nie były zgodne z rzeczywistością. Nic więc dziwnego, że w odwiecznym sporze filozoficznym o naturze naszego poznania, mianowicie czy ono jest wrodzone, lub też produktem doświadczenia, uciekano się do geometryi, którą uważano jako jedynie zdolną do rozstrzygnięcia tej ważnej kwestyi spornej. Jeżeli istnieje nauka,—rozumowali zwolennicy idej wrodzonych,—która wyprowadza wszystkie swe twierdzenia bez pomocy doświadczenia i jeżeli przytem twierdzenia te mają stosowalność ogólną i konieczną, to ten fakt dowodzi, że w umyśle ludzkim istnieją pojęcia, wyprzedzające wszelkie doświadczenie. Wiadomo, że cały układ filozoficzny nieśmiertelnego badacza królewieckiego opiera się na istnieniu twierdzeń apriorystycznych syntetycznych, czego dowodem są twierdzenia geometryczne. Zwolennicy przeciwnie idej nabytych utrzymują, że formy geometryczne są zależne od form przedmiotów empirycznych, z których powstały drogą uogólnienia, i geometrya, pomimo swej ogólności i konieczności, jest także nauką doświadczalną. Rozumie się, cały spór zogniskował się około pierwszych przesłanek sylogizmów geometrycznych, t. j. około tak nazwanych pewników, gdyż, raz je przyjąwszy, jako prawdy niezbite, umysł nasz z konieczności musi wyprowadzić z nich wszystkie nasze twierdzenia geometryczne. Przeciętny matematyk nie zastanawia się nad tymi pewnikami, lecz głębsi badacze, szukający prawdy zdala od drogi tłumów, zagłębiając się wszechstronnie nad pewnikami geometrycznymi, odkryli w nich pewne niedokładności, które starali się usunąć. Prace, odnoszące się do tego ostatniego punktu, stanowią oś, około której obracają się wszystkie badania nowoczesne nad przestrzenią, i dla tego musimy się niemi bliżej zająć.

Geometra grecki Euklides, żyjący w r. 280 przed naszą erą w Aleksandryi, oprócz wielu innych cennych prac, napisał też dzieło pod tytułem *Początki geometryi* (*Stoicheia*), które i w naszych czasach, po tylu genialnych badaniach, służy jako wzór jasności, ścisłości i konsekwencyi logicznej.

Euklides na samym początku dzieła podaje określenia (*oroi*), żądania (*aitemata, postulata*) i pewniki (*aksioma*) i na zasadzie ich wznosi wspaniały gmach geometryi, wyprowadzając z nich systematycznie wszystkie twierdzenia.

Postulata geometryczne Euklidesa są w liczbie trzech:

1. Pomiędzy danymi dwoma punktami poprowadzić linię prostą.

2. Daną linię prostą przedłużyć (nieograniczenie).

3. Z danego punktu, jako ze środka, dowolnym promieniem opisać okrąg koła.

Euklides przyjmuje, że tym żądaniom można zawsze uczynić zadość.

Pewniki geometryczne Euklidesa, których jest dwanaście, dzielą się na dwie kategorye: do pierwszej należą takie, które wyrażają równość wielkości wogóle i są podstawą wszystkich nauk matematycznych, mianowicie §§ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Do drugiej zaś należą pewniki czysto geometryczne (§§ 8, 10, 11, 12), wyrażające te właściwości przestrzeni, które jej nadać musimy, by z nich można było wyprowadzić twierdzenia geometryczne.

Pewniki pierwszej kategoryi dają się sprowadzić do dwóch, które nazwać można pewnikami równych wielkości.

I. Dwie wielkości, równe trzeciej, są równe nawzajem.

II*a*. Jeżeli do wielkości równych dodamy wielkości równe, to otrzymamy sumy równe.

II*b*. Jeżeli do wielkości równych dodamy wielkości nierówne, to otrzymamy sumy nierówne.

Pewniki drugiej kategoryi, które nazwać można pewnikami, odnoszącymi się do pojęcia przestrzeni, są następujące:

8-y. Dwie figury, które do siebie przystają, są sobie równe.

10-y. Wszystkie kąty proste są nawzajem równe.

11-y. Jeżeli dwie proste, przecięte trzecią, tworzą z nią kąty, których suma, po jednej stronie prostej przecinającej, jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to te proste, dostatecznie przedłużone, przetną się po tej stronie linii przecinającej, gdzie suma kątów wewnętrznych jest mniejszą od dwóch kątów prostych.

13-y. Dwie linie proste nie ograniczają części przestrzeni (pewnik ten w podręcznikach geometryi zwykle brzmi: dwie proste przecinają się w jednym tylko punkcie).

Cała geometrya jest niczem innem, tylko zastosowaniem tych prostych prawd do coraz bardziej skomplikowanych form przestrzeni. Nieomylność i zupełna dokładność wniosków, z pewników otrzymanych, zdawałoby się, są najlepszym dowodem konieczności szeregu pewników, przez Euklidesa podanych. Tymczasem historya geometryi uczy nas, że właśnie ta dziedzina najprostszych przypuszczeń stała się przedmiotem gorących sporów. Pomijając bowiem kwestyę filozoficzną o pochodzeniu tych pewników, musimy zwrócić uwagę na dwa pytania nadzwyczajnej doniosłości.

Przedewszystkiem zachodzi pytanie, czy podane wyżej pewniki rzeczywiście są dostateczne i konieczne dla geometryi euklidesowej. Z jednej strony bowiem, niewiadomo, czy czasem, przy wyliczeniu, nie opuszczono niektórych prawd zasadniczych, odnoszących się do przestrzeni, a to z powodu nadzwyczajnej prostoty, jaką posiadają przy wszystkich badaniach geometrycznych; z drugiej znów, w dziele Euklidesa nie znajdujemy nigdzie dowodu, że pewniki geometryczne są rzeczywiście nawzajem niezależne i że nie dadzą się wyprowadzić jedne z drugich. Taką kwestyą, która się nasuwa umysłowi badacza, jest to, czy prawdy, wyrażone pewnikami §§ 8, 10, 11 i 12, są rzeczywiście pewnikami, t. j., czy rzeczywiście nie dadzą się sprowadzić do prawd prostszych i oczywistszych. Co do tej ostatniej kwestyi, punktem wyjścia był pewnik jedenasty, który, jak łatwo widzieć, zajmuje odrębne stanowisko pomiędzy innymi pewnikami. Prawda bowiem, w nim wyrażona, nie jest ani tak prostą, ani też tak oczywistą, ażeby nie wymagała już żadnego dowodzenia.

Bardzo wcześnie, bo w w. V., komentator Euklidesa, Proclus Diadochus, zwrócił uwagę, jako pewnik ten stanowi odwrotne twierdzenie prawdy, że suma kątów w trójkącie płaskim równa się dwu kątom prostym. Od owego czasu usiłowano dowieść pewnika jedenastego, opierając się na własności sumy kątów trójkąta i posiłkując się prostszemi spostrzeżeniami geometrycznemi. Jedno z takich dowodzeń podał matematyk Nasir Eddin w w. XIII; później powtórzył je Simpson w wydaniu Euklidesa z r. 1781. Niektórzy znowu matematycy starali się wykazać, że pewnik ten jest wynikiem innych. Inni znowu probowali pewnik jedenasty zupełnie usunąć i zastąpić go innym, oczywistszym. Pomimo wielokrotnych usiłowań najznakomitszych matematyków, Gauss w r. 1816 mógł jeszcze powiedzieć: „Jeżeli mamy wyznać prawdę, nie posunęliśmy się na krok dalej niż Euklides przed dwoma tysiącami lat.“

Nic więc dziwnego, że kwestya owa w najwyższym stopniu zaciekawiła matematyków, gdyż bardzo słusznie zadano sobie pytanie, zkąd to pochodzi, że pomimo tak świetnych postępów wiedzy, pomimo odkrycia rachunku różniczkowego i geometryi analitycznej, nie udało się dowieść tak prostej prawdy, lub przynajmniej uczynić jej tak widoczną, ażeby wszelka wątpliwość co do jej prawdziwości ustała. Przed samym wchodem do wspaniałego i olbrzymiego gmachu geometryi, leżał kamień, przez który trzeba było przeskoczyć, chcąc się dostać do wnętrza budynku. Wszelkiemi więc sposobami starano się usunąć tę tak niemiłą przeszkodę.

II.

Badania Legendre'a, Łobaczewskiego i innych.

Matematyk francuski Legendre w r. 1833 przedstawił Akademii francuskiej rozprawę o liniach równoległych, w której usuwa jedenasty pewnik Euklidesa i na jego miejsce wprowadza twierdzenie o sumie kątów w trójkącie, na którem opiera całą teoryę linij równoległych. Wykazuje on bowiem, że jeśli z punktu danego zewnątrz linii prostej można do niej poprowadzić *jednę* tylko równoległą, to suma kątów w trójkącie płaskim równa się dwom kątom prostym, i naodwrót, jeżeli suma kątów w trójkącie równa się dwom kątom prostym, to z danego punktu można poprowadzić jednę tylko linię, równoległą do drugiej. Sposób dowodzenia przez Legendre'a twierdzenia o sumie kątów w trójkącie polega na tem, że stara się on dowieść, iż suma ta nie może być ani większa, ani też mniejsza od dwóch kątów prostych. Pierwsza część dała się ściśle dowieść przy pomocy jedynie dwóch pierwszych pewników geometrycznych; dla wykazania zaś, że suma kątów w trójkącie nie może być mniejsza od dwóch kątów prostych, Legendre wprowadza przypuszczenie, że przez punkt dany wewnątrz kąta można zawsze poprowadzić prostą tak, ażeby przecięła oba ramiona kąta. Łatwo widzieć, że to przypuszczenie jest równoznaczne z jedenastym pewnikiem Euklidesa. Pomimo tego jednak, badania Legendre'a miały tę zaletę, że wykazały, iż dowodzenie jedenastego pewnika nie jest możebne bez wprowadzenia drugiej równoważnej prawdy, że zatem trudność, napotkaną na samym wstępie do geometryi, niemożna usunąć przez najściślejszy nawet rozbiór matematyczny.

Około tego czasu, bo w r. 1829, profesor kazańskiego uniwersytetu M. I. Łobaczewskij wydrukował w *Gońcu kazańskim* rozprawę *O początkach geometryi*, w której zbudował zupełnie logiczny układ geometryczny bez pomocy jedenastego pewnika, co świadczy, że pewnika tego niemożna wyprowadzić z innych, w przeciwnym bowiem razie musiałby on otrzymać wypadki sprzeczne z logiką. W latach 1835, 1836 i 1838 zamieścił w uczonych zapiskach uniwersytetu kazańskiego pracę pod tytułem: *Nowe początki geometryi z dokładną teoryą linij równoległych.* Prace te, jako napisane w języku niedostępnym, mało były znane; dopiero rozprawy, zamieszczone w r. 1837 w *Dzienniku Crele'a* pod tytułem *Géométrie imaginaire*, i w r. 1848 *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* dały poznać uczonemu światu poglądy matematyka ruskiego. Matematycy z początku nie przypisywali pracy Łobaczewskiego wielkiego znaczenia naukowego, dopiero Gauss, jeden z największych matematyków naszego wieku, który niezależnie wpadł na ten sam pomysł, zwrócił uwagę na całą doniosłość tych badań.

Nie mam zamiaru podania w tem miejscu całej teoryi Łobaczewskiego, coby za daleko nas zaprowadziło, muszę jednak wspomnieć o myśli przewodniej tego autora.

Odrzuciwszy jedenasty pewnik Euklidesa, Łobaczewskij dzieli wszystkie proste, wychodzące z jednego punktu płaszczyzny, na dwie kategorye, stosownie do tego, czy one przecinają lub nie przecinają danej prostej.

Linię graniczną, oddzielającą wiązkę linij, przecinających daną prostą, od wiązki nieprzecinających, nazywa on równoległą do danej prostej. Z tego określenia wypada bezpośrednio, że, w tym układzie geometrycznym, z jednego punktu można poprowadzić dwie linie równoległe do danej prostej, jednę, leżącą po jednej stronie prostopadłej, spuszczonej z danego punktu na daną prostą, drugą po drugiej stronie. Obie te równoległe asymptotycznie zbliżają się do danej prostej. Wychodząc z tego założenia i opierając się wyłącznie na ósmym i dwunastym pewniku Euklidesa, Łobaczewskij zbudował układ geometryczny zupełnie odmienny od układu matematyka starożytności, lecz zupełnie logiczny i konsekwentny. W tym systemie suma kątów trójkąta jest mniejszą od dwóch kątów prostych. Pole trójkąta jest proporcyonalne do nadmiaru dwóch kątów prostych nad sumą kątów, tak że im pole trójkąta jest większe, tem nadmiar ów jest większy i dla trójkątów nieskończenie małych, geometrya Łobaczewskiego przechodzi w geometryę Euklidesa. Na tej zasadzie, Łobaczewskij układ swój nazwał *pangeometryą*, ponieważ zwykła geometrya jest tylko szczególnym przypadkiem nowej geometryi, niejako geometryą różniczkową. Wzory trygonometryi nieeuklidesowej zawierają pewną ilość stałą (promień tak zwanej pseudosfery), i, gdy ta staje się nieskończenie wielką, przechodzą na wzory zwyczajnej trygonometryi,—jeśli rozmiary figur są ilościami skończonemi. Ponieważ, jakieśmy widzieli, nie udało się dowieść, że suma kątów w trójkącie równa się dwom kątom prostym, więc co do tej sumy mogą być możebne dwa przypuszczenia, albo: że suma ta jest równa dwom kątom prostym, albo że jest mniejsza. Wprawdzie bezpośrednie pomiary zawsze dają sumę bardzo bliską dwóm kątom prostym, lecz różnica otrzymana może pochodzić albo z niedokładności pomiarów, lub też ztąd, że mierzone wielkości w stosunku do ilości stałej, o którejśmy wyżej mówili, są nieskończenie małe i w tym ostatnim przypadku geometrya Euklidesa byłaby tylko przybliżoną pangeometryą. Łobaczewskij starał się rozstrzygnąć tę kwestyę, obliczając sumę kątów w trójkącie, którego boki nie są mniejsze od średnicy drogi ziemskiej. Znalazł on, że suma kątów w takich trójkątach jest mniejszą od dwóch kątów prostych o 0,003". Tak mała różnica oczywiście może pochodzić od błędów w obserwacyi, lecz jeżeli uwzględnimy tę okoliczność, że robiąc podobne obliczenia, otrzymujemy zawsze sumę mniejszą od dwóch kątów prostych, to możemy z pewnem prawdopodobieństwem twierdzić, że gdyby takie trójkąty były jeszcze większe, równe np. odległości pewnej gwiazdy stałej od ziemi, to różnica pomiędzy dwoma kątami prostemi a sumą kątów trójkąta byłaby znacznie większą. Gdyby to ostatnie przypuszczenie się sprawdzilo, przestrzeń nasza rządziłaby się prawami, odmiennemi od prawd geometryi euklidesowej.

Do wypadków podobnych doszedł też i Węgier Wolfgang Bolyai, przyjaciel młodości Gaussa. W ślady ojca poszedł i syn jego, I. Bolyai. Prace tych uczonych, z powodu szczególnej swej formy, nie znalazły wielkiego uznania w świecie naukowym. Dopiero w ostatnich czasach, a mianowicie w r. 1872, Frischauf w dziele *Absolute Geometrie nach I. Bolayi* starał się je uprzystępnić. Bolayi niedość wyraźnie akcentował prawdziwy charakter swej tak zwanej *geometryi bezwzględnej* i przyznawał jej takie samo prawo obywatelstwa, jak i geometryi euklidesowej, co oczywiście wywołać musiało gorące protesty ze strony matematyków, gdyż nowa hipoteza była w rażącej sprzeczności z rzeczywistością. (To samo daje się powiedzieć i o pracach profesora M. I. Łobaczewskiego). Wprawdzie twierdził on tylko, że jego przypuszczenie nie prowadzi do przypadków niezgodnych z logiką, lecz sposób syntetyczny dowodzenia, użyty przez tego uczonego, dał powód do fałszywego tłómaczenia myśli autora. Gdyby uczeni ci użyli do swoich badań metody, jaką nam daje nowoczesna geometrya analityczna, w której zamiast spostrzegania bezpośredniego mamy do czynienia z czysto logicznemi działaniami, niezależnemi od wielkości, poddanych działaniom, wtedy prace ich najniezawodniej przyczyniłyby się do dalszego rozwoju ich idej.

Idea, raz rzucona, kiełkuje, a przy sprzyjających okolicznościach rozwija się i wydaje plon cudowny. Myśl o dalszym rozwoju geometryi podniósł największy z matematyków nowoczesnych, B. Riemann, który w odczycie, wygłoszonym w r. 1854 *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* [1]), rozwiązał kwestyę, nad zbadaniem której napróżno silili się najwięksi filozofowie i matematycy i przez to wywołał żywy ruch, zarówno wśród matematyków jak i filozofów. I tym razem sprawdził się fakt, że wszelkie odkrycie naukowe zależy od ducha czasu, że gdy pewna kwestya dojrzewa, to rozwiązanie jej samo się nasuwa, tak, że bardzo często dokonywa go jednocześnie wielu badaczy. W tym samym bowiem czasie fizyk Helmholtz, wychodząc z zupełnie innego punktu widzenia, doszedł do tych samych rezultatów, co i Riemann, i przez to dowiódł całej doniosłości tych badań dla ówczesnego stanu matematyki.

III.
Badania Riemanna i Helmholtza.

Na początku niniejszej pracy powiedzieliśmy, że ani Euklides, ani też inni matematycy nie zbadali, czy

---

[1]) Tłómaczony na język polski przez pp. S. Dikszteina i W. Gosiewskiego.

znany układ pewników geometryi zwyczajnej jest konieczny i dostateczny. Dowodzenie takie winno było wykazać, że ten układ zawiera wszystkie główne orzeczenia, stanowiące treść naszego wyobrażenia o przestrzeni. Tymczasem pewniki te może odnoszą się tylko do pewnych szczególnych form przestrzeni, jako to kątów i linij.

Riemann przedewszystkiem starał się zbadać cechy, charakteryzujące naszą przestrzeń, i w tym celu usiłował przedstawić ją, jako szczególny przypadek ogólniejszego pojęcia. Dla zrozumienia myśli tego genialnego badacza, musimy podać niektóre wiadomości czysto filozoficzne.

* * *

Filozof królewiecki Immanuel Kant dowiódł, że czas i przestrzeń są czystemi spostrzeżeniami (*Anschauungen*) natury apriorystycznej, a zatem nie są pojęciami.

Jaka jest różnica pomiędzy spostrzeżeniem a pojęciem?

Kant powiada: „wyobrażenie, które otrzymujemy od pojedynczego przedmiotu, jest spostrzeżeniem.“ [1]).

Przez spostrzeżenie zatem należy rozumieć istotę, jedyną co do swoich właściwości i raz tylko istnie-

---

[1]) Die Vorstellung, die nur durch einen einzigen Gegenstand gegeben werden kann, ist aber Anschauung.

jącą. Poeta np. Mickiewicz jest taką pojedynczą jednostką, niemającą nigdzie coś równego sobie, o której zatem żadnym opisem ani też wyjaśnieniem nie mogę wyrobić tak jasnego wyobrażenia, jakie nam daje spostrzeżenie bezpośrednie.

Czem znowu jest pojęcie? Pojedyncza sosna, rosnąca nad brzegiem Niemna w lasku druskienickim i nazwana „babką,“ jest spostrzeżeniem. Pojęcie, przeciwnie, „sosna“ oznacza wszelkie sosny, bez względu na różnice, pomiędzy niemi zachodzić mogące.

Jaki więc jest stosunek pojęcia do spostrzeżenia? Pojęcie otrzymujemy, gdy z wielu różnych osobników wyciągamy wszystko, co mają nawzajem wspólnego, i tworzymy z tego układ cech. Pojęcie zatem nie zawiera w sobie wszystkich cech pojedynczego przedmiotu, lecz tylko część ich, jest ono zatem wyobrażeniem *cząstkowem*, nie zaś *całkowitem*. Cząstkowe wyobrażenie sosny jest pojęciem sosny, daje ono mi niektóre tylko cechy. Przeciwnie spostrzeżenie sosny „babki“ daje mi wyobrażenie wszystkich cech, charakteryzujących tę pojedynczą sosnę.

Po tem określeniu zbadajmy, czy przestrzeń jest spostrzeżeniem, czy też pojęciem?

Gdyby przestrzeń była pojęciem, to musiałaby ona powstać z abstrakcyi. Uformowanie pojęcia „przestrzeń“ przypuszcza istnienie wielu innych przestrzeni. Lecz, czy takie różne przestrzenie rzeczywiście istnieją? Nie! gdyż analizując nasze wiadomości o przestrzeni, przychodzimy do przekonania, że dla nas istnieje tylko jedna, jedyna przestrzeń, rozciągająca się do nieskończoności. Przestrzeń zatem nie może być pojęciem, lecz tylko spostrzeżeniem. Wywód Kanta jest prawdą niezbitą, której dotychczas obalić nie zdołano. Pomimo tego jednak, nie zawiera on w sobie całej prawdy, gdyż badania matematyczne właśnie wykazały, że, niezależnie od tego pierwotnego charakteru, możemy przestrzeń jeszcze uważać, jako pojęcie, zajmujące określone miejsce w całym szeregu pojęć odpowiednich. Uskuteczniamy to za pomocą metody Descartes'a, czyli tak zwanej geometryi analitycznej, która uczy nas przedstawiać w postaci wielkości liczebnych te stosunki miarowe figur przestrzeni, które geometrya euklidesowa oznacza za pomocą konstrukcyj,

Punktem wyjścia dla Descartes'a było następujące rozumowanie: Położenie każdego punktu na płaszczyźnie można wyznaczyć za pomocą dwóch liczb, wyrażających długość odcinków dwóch prostych, poprowadzonych od danego punktu w dwóch zupełnie określonych kierunkach. Te dwie liczby nazywamy *współrzędnemi* danego punktu, stałe zaś kierunki *osiami współrzędnych*. Jan Bernoulli uogólnił tę metodę dla punktu w przestrzeni, którego położenie wyznaczają trzy współrzędne, t. j. długości trzech odcinków prostopadłych, spuszczonych z danego punktu na trzy płaszczyzny, wzajemnie prostopadłe. Jeżeli do tego dodamy, że położenie punktu na linii prostej możemy wyznaczyć za pomocą jednej współrzędnej, a mianowicie odległości tego punktu od punktu stałego na prostej, to widzimy, że położenie elementu (punktu) w układzie jednowymiarowym (linii) bywa określane za pomocą jednej współrzędnej, w układzie dwuwymiarowym (płaszczyźnie) za pomocą dwóch, nakoniec w układzie trójwymiarowym (przestrzeni) za pomocą trzech współrzędnych.

W taki sam sposób możemy też i inne właściwości charakterystyczne przestrzeni, jako to: jej ciągłość, przystawalność różnych jej części i t. p., przedstawić analitycznie. Dla wyrażenia np. ciągłości wielkości przestrzennych możemy powiedzieć, że współrzędne punktów przechodzą przez wszystkie wartości, zawarte pomiędzy dwiema granicami.

* * *

Jeżeli więc dla każdej charakterystycznej cechy przestrzeni możemy znaleźć określenie analityczne, więc jasną jest rzeczą, że i samą przestrzeń możemy przedstawić, jako pojęcie wielkości. Przedstawienie takie wtedy tylko jest możebne, gdy dane będą liczba i związek pomiędzy cechami, mającemi charakteryzować przestrzeń. Do tego zaś celu trzeba, aby można było tworzyć inne pojęcia wielkościowe, dające się porównywać z pojęciem wielkościowem przestrzeni. Tworzenie pojęć wielkościowych dla układów nieciągłych jest rzeczą bardzo łatwą i bardzo powszechną, gdyż, dla najróżnorodniejszych przedmiotów, zawsze możemy znaleść pojęcie, w którem wszystkie są zawarte. Natomiast tworzenie pojęć wielkościowych dla rozmaitości ciągłych jest niezmiernie trudne; bo w życiu powszedniem takich układów jest bardzo mało. Przestrzeń i czucie wrażenia barw i dźwięków są jedynymi takimi układami.

Dla tworzenia pojęć wielkościowych, analogicznych z przestrzenią, wychodzimy z dwóch jej cech charakterystycznych: rozciągłości w trzech kierunkach i ciągłości. Łatwo widzieć, że i układ wrażeń barwnych posiada te dwie cechy. Przedewszystkiem bowiem układ ten analitycznemu badaniu przedstawia się jako wielkość ciągła, gdyż dwa dowolne wrażenia barwne mogą dla naszego czucia być połączone ciągłym szeregiem innych barw; oprócz tego, analogia układu barw z naszą przestrzenią powiększa się jeszcze, gdy zważymy, że układowi temu możemy analitycznie przypisywać trzy wymiary, a mianowicie: ton barwy, stopień nasycenia i natężenie światła, które-to wielkości w ogóle są nawzajem niezależne. Zachodzi jednak ważna różnica pomiędzy temi dwoma pojęciami. Trzy bowiem wymiary przestrzeni dają się pomiędzy sobą porównywać, możemy np. wyznaczyć, o ile różnica dwóch długości jest większą od różnicy dwóch szerokości lub wysokości, co oczywiście niema miejsca dla dwóch wymiarów układu barw.

Drugi przykład wielkości ciągłej o trzech wymiarach przedstawia układ wrażeń dźwięku.

Wychodząc z takiego punktu, Riemann uogólnił to pojęcie i wprowadził rozmaitości (*Mannigfaltigkeiten*) więcej niż o trzech wymiarach. Przez *rozmaitość n wymiarową* rozumie on pojęcie wielkości, której każdy pierwiastek (w przestrzeni punkt) wyznaczyć trzeba za pomocą *n* wielkości, nawzajem niezależnych.

Przestrzeń zatem będzie rozmaitością o trzech wymiarach. Taką samą rozmaitością będzie system barw. Powierzchnia znowu będzie rozmaitością o dwóch wymiarach, linia—rozmaitością o jednym wymiarze. Rozmaitość zatem *n*-wymiarowa stanowi najogólniejsze pojęcie, pod które podpada i nasza przestrzeń, rozważana jako wielkość.

Pojęcie jednak rozmaitości jest zbyt ogólne, by można było je użyć do wyprowadzenia cech, charakteryzujących naszą przestrzeń, i dla tego musimy je przedewszystkiem ograniczyć, a mianowicie będziemy tylko badali takie rozmaitości, których wymiary są jednorodne, t. j. dają się wzajem porównywać, jak to ma miejsce dla naszej przestrzeni.

Rozmaitości takie nazywać będziemy *rozmaitościami przestrzennemi o n wymiarach*, czyli, jak je Helmholtz zowie, *przestrzeniami o n wymiarach.*

* * *

Pozostaje teraz zbadać, jakie są cechy, odróżniające jedną przestrzeń *n*-wymiarową od drugiej, gdyż tylko tym sposobem zdołamy wyróżnić naszą przestrzeń od wszelkich innych przestrzeni trójwymiarowych. Takie cechy otrzymał Riemann, opierając się na badaniach Gaussa nad krzywemi powierzchniami.

Postaramy się badania te wyłożyć językiem, przystępnym dla ogółu czytelników.

Gdy na płaszczyźnie, np. na papierze, nakreślimy jakąkolwiek figurę, trójkąt chociażby, to figurę tę możemy dowolnie przesuwać po powierzchni, nie zmieniając w niczem jej kształtu. To samo można też uskutecznić i na powierzchni kuli dowolnego promienia, gdyż każdą figurę, nakreśloną na niej, można przenieść w dowolne miejsce tejże samej powierzchni bez zmiany kształtu.

Lecz właściwość ta obowiązuje nie wszelkie powierzchnie. Weźmy np. powierzchnię jajka: mała figura papierowa, która szczelnie przystaje do tej powierzchni w okolicach równika, nie przystanie do niej, gdy ją przyłożymy do miejsca, blisko biegunów położonego, chyba jeżeli zmienimy kształt figury. Na odwrót, małą krymkę papierową, szczelnie przylegającą do biegunów jajka, nie można bez zmiany kształtu dopasować do powierzchni jajka w okolicach równika. Dla wyrażenia tej różnicy powiadamy, że krzywizna powierzchni kuli jest wszędzie jedna i ta sama, krzywizna zaś powierzchni jajka zmienia się od punktu do punktu.

Jeśli teraz weźmiemy dwie kule, jedną o promieniu 3, drugą o promieniu 6, to wprawdzie możemy na każdej z nich przesuwać figury bez zmiany kształtów, lecz nie możemy tego uczynić, jeśli przenosimy figurę, nakreśloną na powierzchni jednej kuli, na powierzchnię drugiej, gdyż krzywizny powierzchni tych kul są odmienne, a zatem figura, przeniesiona z jednej powierzchni na drugą, musi się przystosować do krzywizny nowej powierzchni, t. j. musi zmienić swój kształt.

Gauss, wprowadziwszy t. zwaną *miarę krzywizny*, dowiódł, że tylko wtedy można przenosić figury z jednego miejsca powierzchni na inne, gdy krzywizny w obu miejscach są jednakie. Przy wszelkich przekształceniach powierzchni bez zgięć i zdarć, miara krzywizny się nie zmienia, i dla tego to powierzchnie, mające jednakowe miary krzywizny, można nawijać jedne na inne, jak np. ma to miejsce, gdy powierzchnie walcowe lub stożkowe rozwijamy na płaszczyznę.

Odnośnie do miary krzywizny, powierzchnie, czyli rozmaitości przestrzenne o dwóch wymiarach, można podzielić na dwie wielkie grupy, a mianowicie: 1-o na powierzchnie o stałej mierze krzywizny, i 2-o na powierzchnie, w których miara krzywizny zmienia się od punktu do punktu.

Powierzchnie o stałej mierze krzywizny dzielimy znowu na trzy rodzaje: Pierwsze miejsce zajmują powierzchnie, których miara krzywizny jest zerem. Tu należą płaszczyzna i powierzchnie, dające się rozwijać na płaszczyznę, jak walce i stożek. Drugie zajmują powierzchnie, których miara krzywizny jest dodatnią, np. powierzchnie kuliste i te, które się dają rozwinąć na kulę. Trzecie miejsce zajmują powierzchnie tak zwane pseudosferyczne.

Drugą grupę powierzchni można także podzielić na trzy rodzaje, a mianowicie: 1-o powierzchnie o krzywiźnie zmiennej i dodatniej, 2-o powierzchnie o krzywiźnie zmiennej, lecz ujemnej, i w końcu 3-o powierzchnie o krzywiźnie zmiennej, już to dodatniej, już też ujemnej.

Na powierzchniach o stałej krzywiźnie zero, t. j. na płaszczyźnie, walcu i stożku, i wogóle na powierzchniach rozwijalnych, mają miejsce ósmy i dwunasty pewniki Euklidesa, t. j., że figury można przenosić z jednego miejsca na inne bez zmiany ich kształtu, że pomiędzy dwoma punktami można poprowadzić jednę tylko prostą, która będzie najkrótszą odległością pomiędzy nimi. Należy tylko zwrócić uwagę na to, że prosta na płaszczyźnie, będąc nawinięta na walcu, może się zamienić na prostą, łuk koła lub linię śrubową. Te dwie ostatnie krzywe nazywają się najprostszemi liniami, czyli liniami geodezyjnemi powierzchni walca, gdyż posiadają wszelkie własności prostych na płaszczyźnie. Co się tyczy jedenastego pewnika Euklidesa, to ma on miejsce na wszystkich powierzchniach rozwijalnych, jeśli tylko będzie prawdziwy dla płaszczyzny.

Ponieważ miara krzywizny kuli jest wszędzie ta sama, więc na kuli ma miejsce ósmy pewnik Euklidesa, dotyczący możności przenoszenia figur bez zmiany kształtu z jednego miejsca na inne. Najprostszemi liniami na powierzchni kuli są łuki kół wielkich. Ztąd wypada, że pomiędzy danymi dwoma punktami na powierzchni kuli można poprowadzić nie jedną najprostszą linię, lecz dwie, ale tylko jedna z nich będzie najkrótszą. Oprócz tego, pomiędzy dwoma punktami, leżącymi na końcach średnicy kuli, można poprowadzić nieskończenie wiele najprostszych linij. Dwunasty zatem pewnik Euklidesa obowiązuje powierzchnią kuli z pewnemi tylko ograniczeniami i dla tego-to niektóre twierdzenia planimetryi nie są prawdziwe dla sfery. Tak np. przez dany punkt na powierzchni kuli nie można poprowadzić równoległej do najprostszej linii. Dwie linie najprostsze, prostopadłe do trzeciej, przecinają się. Jedenasty pewnik Euklidesa, albo równoważne mu twierdzenie o sumie kątów trójkąta płaskiego, nie istnieje dla powierzchni kuli, gdyż suma kątów trójkąta sferycznego jest ilością zmienną, proporcyonalną do powierzchni trójkąta i zawierającą się pomiędzy dwoma i sześcioma kątami prostymi i dla tego na powierzchni kuli niema figur podobnych. Trygonometrya sferyczna jest odmienną od trygonometryi płaskiej, tylko w przypadku, gdy promień kuli zbliża się do nieskończoności, wzory trygonemetryi sferycznej zamieniają się na wzory trygonometryi płaskiej.

Trzecim rodzajem rozmaitości przestrzennych, dwuwymiarowych o stałej krzywiźnie, są powierzchnie o krzywiźnie ujemnej. Powierzchnie te zostały w ostatnich czasach zbadane analitycznie przez geometrę włoskiego Beltrami'ego. Nazwane powierzchniami pseudosferycznemi, mają one krzywiznę stałą i ujemną. W każdym punkcie są one kształtu siodła. Powierzchni tych w całości w naszej przestrzeni przedstawić niemożna, lecz tylko ich pojedyncze części. Tak np. niektórą część można otrzymać, obracając około osi łuk koła, zwrócony wypukłością do osi. Inna część znowu ma niejakie podobieństwo z kielichem do wina szampańskiego, którego nóżka, stawając się coraz cieńszą, ciągnie się do nieskończoności. Ponieważ na pseudosferze miara krzywizny jest ilością stałą, więc po niej możemy przesuwać figury bez zmiany ich kształtu, czyli na niej ma miejsce ósmy pewnik Euklidesa. Pomiędzy dwoma danymi punktami na pseudosferze można poprowadzić jednę tylko najprostszą linię, czyli dla tej powierzchni ma miejsce dwunasty pewnik Euklidesa. Wszystkie zatem twierdzenia planimetryi euklidesowej, które zależą tylko od tych dwóch pewników, są też prawdziwe i dla pseudosfery. Przez każdy punkt powierzchni możemy poprowadzić nieskończenie wiele najprostszych linij, nie przecinających danej najprostszej, chociażbyśmy je przedłużali do nieskończoności. Jeżeli z punktu danego spuścimy linię geodozyjną prostopadle na daną geodezyjną pseudosfery, to po obu stronach tej prostopadłej znajdują się dwie linie geodezyjne, które asymptotycznie przybliżają się do danej geodezyjnej; wszystkie linie geodezyjne, przechodzące przez dany punkt i leżące pomiędzy daną linią geodezyjną i asymptotami, przecinają daną linią geodezyjną; wszystkie zaś, leżące zewnątrz tego kąta, nie przecinają jej. Geometrya zatem powierzchni pseudosferycznej jest identyczna z geometryą Łobaczewskiego. Należy dodać, że Beltrami pokazał, w jaki sposób powierzchnię pseudosferyczną można odwzorowywać na płaszczyźnie tak, ażeby wszystkie jej punkty leżały wewnątrz koła, którego okrąg odpowiada punktom powierzchni, leżącym w nieskończoności. Liniom geodezyjnym na pseudosferze odpowiadają cięciwy koła.

Z tego cośmy wyżej powiedzieli, wynika, że pewnik ósmy jest wspólny płaszczyźnie, pseudosferze i kuli; pewnik dwunasty odróżnia powierzchnię kuli od płaszczyzny i pseudosfery, nakoniec pewnik jedenasty jest wyłączną własnością płaszczyzny. Rozumowania powyższe pokazują, dla czego Legendre'owi, opierającemu się na ósmym i dwunastym pewniku, nie udało się dowieść, że suma kątów w trójkącie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, gdyż oba te pewniki służą zarówno dla płaszczyzny jak i dla pseudosfery, na tej ostatniej zaś suma kątów w trójkącie geodezyjnym jest mniejsza od dwóch kątów prostych.

* * *

Wyłożywszy cechy, odróżniające różne powierzchnie nawzajem, zrozumiemy studya, które doprowadziły do rozróżniania wielu różnych przestrzeni.

Riemann pokazał, że podstawą wszelkiej geometryi jest wyrażenie, dające odległość dwóch dowolnych punktów w przestrzeni n-wymiarowej, przedewszystkiem zaś dwóch punktów, nieskończenie siebie bliskich. Wychodząc z tego wyrażenia, dowiódł, że swoboda ruchu ciał bez zmiany kształtów, którą obserwujemy w naszej przestrzeni, wtedy tylko jest możebna, gdy pewna wielkość matematyczna, sprowadzająca się w przypadku rozmaitości dwuwymiarowej, czyli powierzchni, do miary krzywizny, ma wszędzie wartość stałą. Z tego powodu wielkość tę Riemann nazwał *miarą krzywizny przestrzeni n-wymiarowej*. (Musimy tu zwrócić uwagę, że tę wielkość otrzymano drogą analityczną, i że wyprowadzenie jej nie opiera się na żadnem spostrzeganiu zmysłowem).

Otóż, gdy miara krzywizny przestrzeni trójwymiarowej ma wszędzie wartość zera, to takiej przestrzeni odpowiadają pewniki Euklidesa. Przestrzeń tę możemy nazwać płaską dla odróżnienia jej od wszelkich innych przestrzeni trójwymiarowych, w których miara krzywizny jest różną od zera i które z tego powodu nazwiemy przestrzeniami krzywemi. Rachunek daje nam sposób ułożenia konsekwentnej geometryi w takich przestrzeniach.

Przestrzeń trójwymiarowa gdy ma wszędzie stałą wartość dodatnią, otrzymuje nazwę sferycznej. W niej niema linij równoległych i linie najprostsze są zamknięte (podobnie jak koła wielkie na kuli). Przestrzeń taka jest, jak kula, nieograniczona, lecz skończona, suma kątów w trójkącie jest większa od dwóch kątów prostych i zależy od wielkości trójkąta.

Gdy przestrzeń trójwymiarowa ma miarę krzywizny stałą i ujemną, to przyjmuje ona nazwę przestrzeni pseudosferycznej. W niej najprostsze linie idą do nieskończoności, suma kątów w trójkącie jest mniejszą od dwóch kątów prostych i zależną od wielkości powierzchni tego trójkąta.

Stosunki, zachodzące w przestrzeni pseudosferycznej, Beltrami uczynił dostępnymi spostrzeganiu, wykazując, jak można punkty, linie i płaszczyzny przestrzeni pseudosferycznej tak odwzorowywać wewnątrz kuli przestrzeni euklidesowej, aby każda linia geodezyjna przestrzeni pseudosferycznej była w kuli reprezentowana przez prostą linię, każda najprostsza płaszczyzna tej przestrzeni przez zwyczajną płaszczyznę w kuli. Sama powierzchnia kuli będzie przy tem odwzorowywaniu odpowiadać nieskończenie oddalonym punktom przestrzeni pseudosferycznej. Różne części tej przestrzeni będą, w ich odwzorowywaniu kulistem, tem więcej zmniejszone, im bliżej leżą powierzchni kuli, zmniejszenie zaś to będzie większe w kierunku promieni, niż w kierunku, do nich prostopadłym. Prostym liniom w kuli, które się przecinają zewnątrz kuli, odpowiadać będą linie geodezyjne przestrzeni pseudosferycznej, które się nigdzie nie przecinają.

* * *

Podczas gdy Riemann za podstawę swoich badań obrał wyrażenie analityczne dla dwóch punktów nieskończenie bliskich w rozmaitości przestrzennej, Helmholtzowi za punkt wyjścia służyły fakty z obserwacyi o zupełnej swobodzie ruchów w naszej przestrzeni i ztąd wyprowadził on wzory Riemanna.

Fakty, na których się oparł Helmholtz, są następujące: przystawanie ciał w naszej przestrzeni jest niezależne od miejsca, od kierunku i od drogi, po której doprowadziliśmy je do przystawania.

Przystawanie ciał niezależnie od miejsca jest oczywiście identyczne z twierdzeniem, że przy żadnej zmianie miejsca ciał geometrycznych nie zmienia się stosunek ich wymiarów linijnych. Ta stałość może pochodzić z trzech przyczyn:

1-o. Przedewszystkiem stosunki te oczywiście pozostaną stałymi, gdy same wymiary, przy wszelkich zmianach miejsca, nie ulegną zmianie.

2-o. Dwa równe ciała geometryczne i wtedy jeszcze przystaną do siebie, jeśli, przy przeprowadzeniu ich z jednego miejsca do innego, wymiary ich odpowiednio wzrastają lub odpowiednio się zmniejszają i jeśli prócz tego przypuścimy, że i własne nasze ciało, którego różne części, jak nogi i oczy, służą nam za narzędzia miernicze, tym samym ulegną zmianom.

W końcu 3-o wszystkim warunkom przystawania ciał stanie się zadość i wtedy, gdy, przy zmianie miejsca położenia, wymiary wszystkich ciał i naszego własnego ciała ulegną niejednakowym zmianom, gdy np. wymiary głębokości szybko, wymiary zaś szerokości powoli wzrastają, byleby tylko stosunek tych zmian był stały. Helmholtz, w bardzo dowcipny sposób, uzmysłowił podobne zmiany kształtu, przypominając, jak się świat odbija w zwierciadle wypukłem. Posrebrzane kule, wystawione w ogrodach, przedstawiają podobne zjawisko, lubo nieco zmienione z powodu niektórych niedokładności optycznych. Dobrze zrobione zwierciadło wypukłe, z niewielką otwartością, daje obrazy przedmiotów, które pozornie przedstawiają się, jako ciała, znajdujące się za zwierciadłem w oznaczonych położeniach i odległościach. Obrazy oddalonego poziomu i słońca na niebie znajdują się w oznaczonej odległości, a mianowicie w odległości ogniskowej zwierciadła. Pomiędzy tymi obrazami a powierzchnią tylną samego zwierciadła są obrazy wszystkich innych przedmiotów przed zwierciadłem się znajdujących, które-to obrazy tem więcej są zmniejszone i przypłaszczone, im dalej od zwierciadła są przedmioty. Przypłaszczenie, t. j. zmniejszenie wymiarów głębokości, stosunkowo jest znaczniejsze, niż zmniejszenie się wymiarów powierzchni. Przez to każda prosta świata zewnętrznego będzie miała za obraz drugą prostą, każda płaszczyzna — płaszczyznę. Obraz człowieka, który z miarą w ręku odmierza linię, od zwierciadła się oddalającą, będzie stopniowo malał, w miarę tego, jak się oryginał od zwierciadła oddala. Lecz człowiek w obrazie, mierząc długość swą również zmniejszającą się miarą, otrzyma zupełnie tę samą liczbę centymetrów co i człowiek w świecie rzeczywistym. Wogóle, wszystkie pomiary geometryczne linij i kątów, wykonane za pomocą prawidłowo zmieniających się obrazów zwierciadlanych przyrządów rzeczywistych, dałyby dokładnie te same wypadki, co i w świecie rzeczywistym; wszystkie przedmioty, któreby w rzeczywistości przy nałożeniu przystały do siebie, dałyby obrazy, również do siebie przystające. Słowem, trudno pojąć, w jaki sposób ludzie w zwierciadle wykryliby, że ich ciała nie są stałemi. Lecz jeśliby oni mogli spojrzeć na nasz świat, nie wychodząc ze swego, to musieliby nasz świat uważać za obraz zwierciadła wypukłego i powiedzieć o nim to samo, co my mówimy o nich, i jeśliby ludzie tych dwóch światów mogliby ze sobą rozmawiać, to w żaden sposób nie byliby w stanie wykazać, kto z nich ma przed sobą świat rzeczywisty, a kto świat urojony.

Powyższe rozumowanie pokazuje, że geometrya tylko nie może dać określenia ciała stałego, gdyż znane określenie, według którego ciałem geometrycznem stałem jest takie, w jakiem odległość punktów pozostaje stałą przy wszelkich zmianach miejsca, odpowiada każdemu z trzech przypadków przystawania wyżej wymienionych, i my nie posiadamy absolutnej miary do mierzenia odległości, wszystkie zaś miary, przez nas używane, w każdem z dwóch ostatnich przypuszczeń co do przystawania, ulegną odpowiednim zmianom, tak, że, za ich pomocą, prawdziwego stanu rzeczy nie odkryjemy. Jeśli więc geometrya chce utrzymać pojęcie ciała stałego, to musi uciec się do pomocy mechaniki, która wszystkie swoje twierdzenia opiera na pierwszem ze wspomnionych wyżej przypuszczeń o przystawaniu ciała, a mianowicie, na niezmienności nietylko stosunków ciał, ale i ich wymiarów. Dość przypomnieć kardynalne prawo mechaniki, że punkt ruchomy, na który nie działają siły, musi się poruszać po linii prostej z prędkością stałą, by się przekonać o prawdzie słów naszych.

Na tem miejscu muszę wspomnieć, jako Helmholtz przy badaniach swoich doszedł do wypadku, że dla otrzymania wzoru Riemann'a należy jeszcze przyjąć, iż ciała stałe, po wykonaniu obrotu około stałej osi, wracają do pierwotnego położenia, gdyż można sobie wyobrazić przestrzeń, w której wymiary ciał wzrastają proporcyonalnie do kąta obrotu.

Opierając się na przypuszczeniach Helmholtz'a i przyjmując, że zasady naszej mechaniki są prawdziwe, mamy prawo twierdzić, że *nasza przestrzeń jest rozmaitością trzech wymiarową o stałej mierze krzywizny.*

* * *

Ponieważ jednak wszystkie poprzednie badania opierają się na faktach, zaczerpniętych z ograniczonych części przestrzeni, więc nie mamy prawa wyżej podanego wniosku rozciągnąć na stosunki, zachodzące w częściach nieskończenie małych przestrzeni. Bardzo bowiem być może, że przystawanie ciał nieskończenie małych ma tylko w przybliżeniu miejsce, a tem samem, że przestrzeń nasza, w częściach nieskończenie małych, niema krzywizny stałej. Riemann zwrócił uwagę na doniosłość tego wyjątku, gdyż wszelkie hipotezy o elementarnej budowie materyi, służące za podstawę teoryom fizycznym i chemicznym, wychodzą z założenia, że przestrzeń ma krzywiznę stałą w częściach nieskończenie małych.

Przekonawszy się, że przestrzeń nasza ma krzywiznę stałą, musimy zadać sobie pytanie, jaka jest wartość tej krzywizny, czy dodatnia, ujemna lub zero. Otoż, ponieważ wszystkie twierdzenia geometryi Euklidesa w zastosowaniu do naszej przestrzeni dają wypadki, które, o ile sądzić możemy, są zupełnie dokładne, więc z wszelkiem prawdopodobieństwem twierdzić możemy, że miara krzywizny naszej przestrzeni jest zerem.

Musimy jednak zwrócić uwagę na to, że gdyby ta miara krzywizny miała wartość dodatnią lub ujemną bardzo małą, to nasze pomiary nie są jeszcze dość dokładne, by za ich pomocą można było wykryć to odstępstwo od miary krzywizny zera. W każdym razie, wątpliwość co do tego punktu da się tylko usunąć na drodze empirycznej, gdy będziemy mierzyli z największą dokładnością sumę kątów w trójkątach dostatecznie wielkich.

Niektórzy matematycy, wychodząc ze znanego faktu, że nasze spostrzeganie przestrzeni można rozszerzyć do nieskończoności, twierdzą, że przestrzeń nie może mieć miary krzywizny dodatniej, gdyż wszystkie rozmaitości z dodatnią miarą krzywizny są skończone. W tem rozumowaniu pomieszano nawzajem dwa pojęcia, zupełnie odmienne, a mianowicie pojęcie nieskończoności z pojęciem nieograniczoności. Dla lepszego wyjaśnienia tej myśli, rozpatrzymy przestrzeń dwuwymiarową. W tym celu wyobraźmy sobie istoty rozumne dwu wymiarów, które zmuszone są żyć na powierzchni kuli bardzo wielkiego promienia, i dajmy na to, że organy i przyrządy są takie, iż tylko bardzo nieznaczna stosunkowo część tej kuli jest dla nich widoczna, jeszcze mniejsza zaś dostępna ich sposobom mierzenia. Nie trudno pojąć, że gdy powierzchnia tej kuli będzie dostatecznie wielką, wtedy istoty te wytworzą sobie geometryę podobną do naszej, jeżeli tylko część kuli, przez nie zajęta, będzie dość małą. Dla nich suma kątów trójkąta równać się będzie dwu kątom prostym, ich linie najkrótsze będą dla nich nieskończone, gdyż jak daleko wzrok ich sięga, widzą nietylko nieograniczoność, lecz jeszcze nieskończoność swej powierzchni. Może więc w takiem samem położeniu znajdujemy się i my w naszej przestrzeni, gdyż nieskończoność tej przestrzeni opieramy na uogólnieniu pewnika o linii prostej, otrzymanego z obserwacyi w częściach skończonych przestrzeni, dla części nieskończenie odległych. Jeżeli jednak tą drogą niemożna w sposób pewny określić, jaka jest miara krzywizny przestrzeni, to z drugiej strony musimy zwrócić uwagę, że twierdzenie Zöllner'a, iż ta miara krzywizny musi być dodatnią, również nie jest uzasadnione. Zöllner bowiem, wychodząc z praw ulatniania się ciał, dowodzi, że obecny porządek świata wtedy tylko jest możebny, gdy przyjmiemy, że nasza przestrzeń jest skończoną. Podstawa jednak, na której się opiera Zöllner, jest zbyt wątła, by na niej można wznieść nowy gmach poglądu na świat, niezgodny z naszym.

Na początku tej pracy powiedzieliśmy, że Riemann starał się zbadać cechy, odróżniające naszą przestrzeń od innych rozmaitości trójwymiarowych. Widzieliśmy, że określenie to jest tylko możebne, gdy poprzestaniemy na częściach skończonych przestrzeni i gdy przyjmiemy za prawdziwe znane nam prawa mechaniki.

Przy takiem ograniczeniu otrzymujemy następujące trzy pewniki, cechujące geometryę euklidesową:

I. Przestrzeń jest rozmaitością trójwymiarową.

II. Przestrzeń jest rozmaitością identyczną, sama w sobie. Do tego pewnika należą następujące postulaty: 1-szy. Istnieją ciała stałe; 2-gi. Ciała stałe mogą się zupełnie swobodnie poruszać. 3-ci. Ciała stałe nie zmieniają swoich wymiarów wskutek obrotu około osi.

III. Przestrzeń jest rozmaitością płaską czyli nieskończoną, czyli innemi słowami:

a) Pomiędzy dwoma punktami można tylko poprowadzić jedną linię prostą.

b) Suma kątów w trójkącie równa się dwom kątom prostym.

Pierwsze z twierdzeń, stanowiących treść trzeciego pewnika, odróżnia naszą przestrzeń od przestrzeni sferycznej, drugie zaś od przestrzeni pseudosferycznej.

Widzimy więc, że badania powyższe wykazały prawdziwe znaczenie jedenastego pewnika Euklidesa i zarazem wyjaśniły, dla czego wszelkie usiłowania zredukowania go do pewnika o linii prostej musiały pozostać bezpłodnemi. Jeżeli zatem z jednej strony mają one bardzo ważne znaczenie dla geometryi, to z drugiej strony przyczyniły się w wysokim stopniu do głębszego zrozumienia procesu myśli ludzkiej, bo dały nam możność rozstrzygnięcia sporu o początku i pochodzeniu naszych spostrzeżeń geometrycznych. Pojmujemy, że jeśliby euklidesowe pewniki geometryczne były, w duchu Kanta, koniecznemi formami wszelkiego naszego myślenia, to wszelkie wyobrażenie o przestrzeni, odmiennej od naszej, musiałoby dla nas być niemożebne; tymczasem nietylko jesteśmy w stanie pomyśleć sobie przestrzeń sferyczną i pseudosferyczną, lecz jeszcze wyobrazić, w jakiej formie w tych przestrzeniach przedmioty przedstawią się obserwatorowi, którego zmysły wykształciły się w przestrzeni płaskiej, jak to uczynił Helmholtz. Mamy zatem prawo twierdzić, że pewniki Euklidesa są natury czysto empirycznej. Oprócz tego badania Riemann'a i Helmholtz'a przyczyniły się do uogólnienia geometryi i mechaniki analitycznej, a nawet do uogólnienia pojęcia liczby (liczby Grassmann'a i Pierce'a).

IV.

Liczba wymiarów naszej przestrzeni

Na zakończenie niniejszej pracy musimy jeszcze kilka słów poświęcić kwestyi, dotyczącej wymiarów naszej przestrzeni.

Ponieważ wszystkie nasze środki spostrzeżeń zmysłowych odnoszą się do przestrzeni trójwymiarowej, więc dopóki natura człowieka nie ulegnie rdzennemu przekształceniu, póty nie mamy najmniejszego prawa twierdzić, że istnieje przestrzeń, mająca więcej niż trzy wymiary. Nasze obecne doświadczenia nas do tego nie upoważniają. Może, z rozwojem organów zmysłowych, ludzkość, po upływie nieskończenie długiego czasu, zdoła wyobrażać sobie czwarty, piąty i t. d. wymiary, lecz obecnie wszelkie spekulacye o przestrzeniach wielowymiarowych są utworami rozumu i wyobraźni, którym w rzeczywistości nic nie odpowiada, które jednak, pomimo tego, mają racyę istnienia i mogą przyczynić się do wyjaśnienia wielu kwestyj bytu realnego. Widzieliśmy, jak matematyka, posługując się uogólnioną metodą Descartes'a, bada takie przestrzenie wielowymiarowe, chociaż ich wyobrażać sobie nie możemy.

Jeżeli jednak nie mamy sposobu wyobrażania sobie przestrzeni wielowymiarowej, to możemy pomimo tego wziąć pod rachunek i pojęciowo zrozumieć te związki, które łączą naszą przestrzeń z analogicznemi przestrzeniami czterowymiarowemi. Jak linię prostą możemy uważać, jako granicę okręgu koła o promieniu nieskończenie wielkim, płaszczyznę zaś jako granicę kuli o takim samym promieniu, tak samo możemy i przestrzeń naszą rozpatrywać, jako granicę odpowiedniej figury trójwymiarowej. Otóż geometrya analityczna podaje sposoby formowania równania linii prostej i płaszczyzny, uważanych jako granice okręgu koła i powierzchni kuli. Takie same równanie możemy podać i dla naszej przestrzeni, lecz podobnie jak i okrąg koła, pomimo swej jednowymiarowości, wymaga dla swej konstrukcyi płaszczyzny, powierzchnia kuli—przestrzeni, tak samo i owa figura trójwymiarowa, której granicą jest nasza przestrzeń, wymaga dla swej konstrukcyi przestrzeni czterowymiarowej. Wychodząc z tego punktu widzenia, Drobisch rozwinął analitycznie wiele właściwości przestrzeni czterowymiarowych, analogicznych z właściwościami naszej przestrzeni.

Wszystkie te badania jednak mają wartość czysto analityczną, prowadzą do wypadków, niemających nic wspólnego ze światem realnym, zupełnie tak samo jak to ma miejsce z niektórymi utworami poezyi i sztuk pięknych. Musimy zatem wyraźnie ostrzegać przed stosowaniem tych badań do wyjaśnienia zjawisk spirytystycznych, gdyż takie postępowanie może się stać bardzo niebezpieczne dla nauki wogóle.

Wiadomo, że spirytyści utrzymują, iż, pod wpływem medyumów, ciała znikają i ukazują się. Niektórzy starali się to wyjaśnić w ten sposób, iż osoby takie mają poczucie czwartego wymiaru.

Dla zrozumienia tej myśli wyobraźmy sobie istotę dwuwymiarową, mającą tylko pojęcie odpowiedniej przestrzeni, np. płaszczyzny, i przedstawmy sobie, że na płaszczyźnie zakreśliliśmy okrąg koła i wewnątrz niego punkt. Istota dwuwymiarowa nie będzie w stanie wyjąć tego punktu z wnętrza koła, gdyż ona może go tylko posuwać po płaszczyźnie, tam zaś wszędzie napotyka zaporę w postaci okręgu koła. My zaś, istoty trójwymiarowe, mamy sposób wyjęcia tego punktu z wnętrza kola w kierunku, prostopadłym do płaszczyzny. Wyobraźmy teraz sobie kulę, ze wszech stron zamkniętą, i wewnątrz niej ciało. My, istoty trójwymiarowe, nie możemy ciała wyjąć z tej kuli, lecz istoty czterowymiarowe, zajmując tę samą pozycyę względem nas, co my względem istot dwuwymiarowych, zdołają ciało to wyjąć w kierunku czwartego wymiaru.

Ponieważ, jak widzieliśmy, poczucie czwartego wymiaru jest możebne tylko wtedy, gdyby cała natura ludzka uległa kardynalnym zmianom, a takich zmian u medyumów nie widzimy, więc wszelkie takie spekulacye, niby matematyczne, należy uważać, jako chorobliwe objawy umysłu ludzkiego, które, poważnie traktowane, mogą stać się w wysokim stopniu szkodliwe nietylko dla nauki, lecz nawet dla całego ustroju społecznego.

V.

Źródła.

Riemann. *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.*

Helmholtz. *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der Geometrischen Axiome.* (Wissenschaftliche Vorträge. Trzeci zeszyt).

Rosanes. *Ueber die neuessten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume.* Wrocław 1871.

Spottiswoode W. *Address to the British Association at Dublin 1878.* (Tłómaczony na język polski przez autora niniejszej pracy).

Beltrami. *Teoria fondamentale degli Spazzi di Curvatura constante.* Annali di mat. Medyolan 1868.

Dr. Benno Erdman. *Die Axiome der Geometrie* Lipsk 1877.

Clifford. *Lecture on the Postulates of Science of Space.* (Macmillan Magazine. Październik. 1872).

Liebmann O. *Zur Analysis der Wirklichkeit* Strasburg 1876.

Dr. Fritz Schultze. *Philosophie der Naturwissenschaften.* Tom II, str. 132 i następne.

S P I S.

Str.

1. Pewniki Euklidesa 5
2. Badania Legendre'a, Łobaczewskiego i in. 11
3. Badania Helmholtz'a i Riemann'a 16
4. Liczba wymiarów naszej przestrzeni 38
5. Źródła 41

NIEBAWEM WYJDĄ:

świetle

Dr. J. Nusbaum: Dziedziczność w ~~sile~~ badań dzisiejszych.

L. Krzywicki: Kurs systematyczny antropologii. I. Rasy fizyczne.

St. Kramsztyk: Eter i jego znaczenie w przyrodzie.