PODRĘCZNIKI TECHNICZNE.

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI.

ROZDZIAŁ GEOMETRYI ELEMENTARNEJ.

PRZEZ

Zygmunta Straszewicza.

WYDAWNICTWO STANISŁAWA ROTWANDA.

SKŁAD GŁÓWNY

W SZKOLE TECHNICZNEJ H. WAWELBERGA i S. ROTWANDA,

Mokotowska № 6.

WARSZAWA. 1908.

Drukarnia Rubieszowskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

PRZEDMOWA.

Dwa lata temu na konferencyi wykładających w Szkole Technicznej Wawelberga i Rotwanda uznano za pożądane włączyć do wykładu geometryi elementarnej (na kursie przygotowawczym) naukę o środku ciężkości. Uchwała ta miała na celu: 1) zapoznać słuchaczów jaknajwcześniej z pojęciem środka ciężkości, pojęciem ważnem zarówno w zagadnieniach teoretycznych, jak i w zastosowaniach praktycznych; 2) umożliwić zastosowanie twierdzeń Guldina do wyznaczania powierzchni i objętości brył obrotu, t. j. zastąpić sposoby długie i żmudne, podawane w podręcznikach, metodą ogólną prostą i piękną. Uważaliśmy, że skutkiem tego proponowana zmiana ułatwi naukę słuchaczom, nie pociągając za sobą powiększenia kursu geometryi.

Sądzę, że motywy powyższe przemawiają za wprowadzeniem tej drobnej reformy i w innych szkołach technicznych a także ogólnokształcących. Praca niniejsza ma właśnie na celu reformę taką ułatwić. Dążyłem w niej przedewszystkiem do tego, aby uniezależnić teoryę środka ciężkości od pojęć mechanicznych [1]), powtóre usiłowałem rzecz całą wyłożyć w sposób możliwie prosty i przystępny. Poszedłem drogą wskazaną przez Möbiusa, jak to czynią nowożytni autorowie podręczników me-

---

[1]) A. Comte uważał środek ciężkości za pojęcie przedewszystkiem geometryczne (Cours de philosophie positive, o ile pamiętam, t. I) i radził wprowadzić jego teoryę do geometryi elementarnej. W czasach późniejszych w podobnym sensie wypowiedział się Laisant.

chaniki (Clifford, Schell, Föppl i in.). Jest to droga łatwa i krótka, jakkolwiek wymaga wprowadzenia pojęć wektora i sumy geometrycznej, o których dotychczas w szkołach zwykle nie było mowy. Pojęcia te jednak odgrywają dzisiaj w nauce tak ważną rolę, że uczeń powinien nabyć o nich w szkole przynajmniej najelementarniejsze wiadomości.

W § 3-im podałem pewne geometryczne zastosowanie rachunku wektoryalnego, jako wskazówkę, że użyta w tem dziełku metoda posiada znaczenie daleko donioślejsze, niż możnaby sądzić z samej teoryi środka ciężkości. Paragraf ten, jako trudniejszy, można w wykładzie opuścić bez szkody dla celu głównego.

Autor.

Warszawa, w lutym 1908 r.

DOSTRZEŻONE OMYŁKI

Str. 11, wiersz 5 od góry: *zamiast* „odcinek OR" *powinno być* „odcinek PR".
Srt. 15. Na początku wiersza 4 od dołu opuszczono cyfrę V.

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI.

§ 1. Przesunięcie. Niech będą dwa odcinki, np. takie, jak AB i CD na fig. 1. Odcinki te różnią się od siebie:

1) *długością*, a mianowicie odcinek AB jest krótszy od CD;

2) *kierunkiem*— gdyż CD jest skierowany poziomo, a AB pod kątem 45^0 do poziomu (płaszczyznę rysunku uważamy za pionową);

3) *położeniem*, gdyż odcinek AB leży wyżej, a CD—niżej.

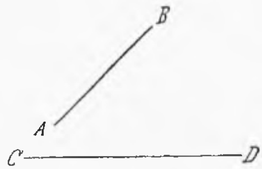

Fig. 1.

Gdy rozwiązujemy jakieś zagadnienie geometryczne przy pomocy rachunku, to zwykle wykonywamy różne działania matematyczne tylko nad długościami. Tak np., gdy piszemy $AB + CD$, to rozumiemy przez to sumę długości naszych odcinków, $CD—AB$ oznacza różnicę długości i t. d. Istnieje jednak pewna metoda rachunkowa, w której przedmiotem działań matematycznych są nietylko długości lecz i kierunki odcinków. Metoda ta, zwana *Rachunkiem wektorów*, zdobyła sobie w czasach nowszych rozległe pole zastosowań szczególniej w mechanice i fizyce. Mamy tu poznać zasadnicze działanie tego rachunku.

Przedewszystkiem potrzeba nadać wyrazowi odcinek znaczenie odmienne od dotychczasowego.

Wyobraźmy sobie punkt ruchomy, który początkowo znajdował się w punkcie A, a następnie został przesunięty do punktu B (fig. 1). Powiemy, że punkt ruchomy doznał *przesunięcia* AB, przyczem literę, oznaczającą pierwotne położenie punktu, kładziemy na pierwszem miejscu, a literę, oznaczającą położenie końcowe,—na drugiem.

Wyraz odcinek ma odtąd oznaczać toż samo, co przesunięcie. Możemy więc mówić bez różnicy odcinek AB albo przesunięcie AB. Punkt A nazwiemy *początkiem* odcinka AB, zaś B—*końcem*.

BA oznacza oczywiście przesunięcie punktu ruchomego od B do A.

Łatwo teraz pojąć, co znaczy suma $AB + BA$. Oznacza ona przesunięcie punktu ruchomego naprzód od A do B, a następnie od B do A. Skutkiem tych dwóch przesunięć punkt ruchomy powraca do położenia pierwotnego, t. j. takie dwa przesunięcia odwrotne znoszą się nawzajem. Konsekwentnie więc będzie napisać

$$AB + BA = 0.$$

Stosując do tego równania zwykłe działania algebraiczne, możemy napisać

$$AB = -BA,$$

a stąd wynika, że zmiana porządku liter znaczy to samo, co zmiana znaku.

Przykłady. 1) Okazać, że $AB + BC = AC$ lub $AB + BC + CA = 0$, jeżeli punkty A, B i C są położone na linii prostej.

2) Jeżeli punkty A, B i C leżą na prostej, i $AB = CB$, to A i C leżą razem.

3) Jeżeli A, B i C leżą na prostej, i $AB = BC$, to $AB + \frac{1}{2} CA = 0$; wyrazić ten ostatni związek słowami.

§ 2. Suma geometryczna. W rachunku wektoryalnym przedmiot działań matematycznych stanowią tylko długości odcinków i ich kierunki, abstrahujemy natomiast od położenia. Dla tego też nie mamy powodu czynić różnicy pomiędzy dwoma odcinkami, których długości są równe, i które są skierowane jednakowo, jak np. AB i CD na fig. 2. Napiszemy więc, że

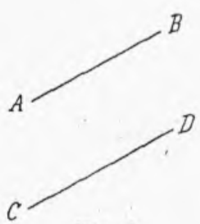

Fig. 2.

$$AB = CD.$$

Znaczy to, że dwa punkty ruchome doznały przesunięć jednakowych co do wielkości i kierunku, jeden — od A do B, a drugi — od C do D. Można również napisać

$$AB = -DC;$$

Będzie to znaczyło, że przesunięcia są równe co do wielkości, lecz nastąpiły w kierunkach odwrotnych.

Niech będą dwa odcinki AB i BC (fig. 3). Wyrażenie $AB + BC$ oznacza oczywiście przesunięcie punktu ruchomego naprzód od A do B, a następnie od B do C. Skutkiem tych dwóch przesunięć punkt ruchomy, który pierwotnie pozostawał w położeniu A, znalazł się w położeniu C. Ten sam wynik można osiągnąć zapomocą przesunięcia AC, napiszemy więc

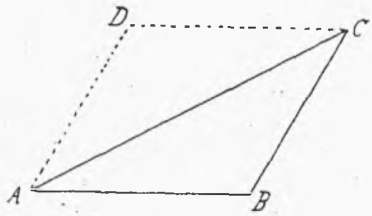

Fig. 3.

(1). . . . . $AB + BC = AC$.

Znaczy to: przesunięcia AB i BC zmieniają tak samo położenie punktu ruchomego, jak przesunięcie AC. Widzimy, że znak $=$ ma tu inne znaczenie niż zwykle.

Przesunięcia (lub odcinki) AB i BC nazywają się *składowemi*, a przesunięcie (lub odcinek) AC — *wypadkowem*. Mówimy też, że odcinek AC jest *sumą geometryczną* odcinków AB i BC.

Zbudujmy odcinek AD równy i równoległy do odcinka BC, a także odcinek DC. Oczywiście

(2) . . . . . . $AD = BC$ i $DC = AB$.

Z fig. 3 widzimy, że odcinek AC jest wypadkowym odcinków AD i DC, a zatem

$$AD + DC = AC.$$

Jeżeli w tem równaniu zastąpimy AD i DC odpowiednio przez BC i AB (do czego mamy prawo na zasadzie 2), to wypadnie

$$BC + AB = AC.$$

Porównanie tego równania z 1) doprowadza do wniosku, że

$$AB + BC = BC + AB;$$

znaczy to, że porządek składników nie wpływa na sumę geometryczną podobnie, jak i na sumę algebraiczną.

Jeżeli w równ. 1) zamiast BC napiszemy AD, to wypadnie, że

(3) . . . . $AB + AD = AC$.

Wynika stąd, że można odcinek AC uważać również za wypadkowy odcinków AB i AD. Odcinek wypadkowy jest tu przekątnią równoległoboku, zbudowanego na odcinkach składowych.

Przywołując na pomoc wyobrażenie przesunięcia, można równ. 3) wytłomaczyć, jak następuje: punkt ruchowy uległ przesunięciu AB, i jednocześnie odcinek ruchomy uległ przesunięciu AD (od położenia AB do położenia DC); wynikiem tych dwóch przesunięć było przesunięcie punktu ruchomego AC.

Każdy odcinek można rozłożyć na odcinki składowe. Tak np. odcinek AC (fig. 3) możemy rozłożyć na odcinki AB i BC, lub na AD i DC, lub na AB i AD.

Rozważania powyższe dotyczyły sumy geometrycznej dwóch odcinków; zobaczymy zaraz, że osiągnięte wyniki są ważne i wtedy, gdy ilość odcinków jest większa.

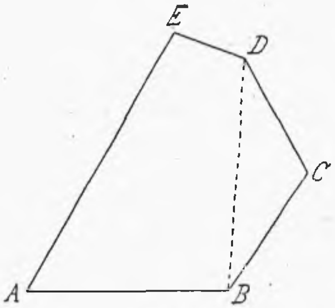

Fig. 4.

Na fig. 4 przesunięcie AE jest oczywiście wypadkowem przesunięć AB, BC, CD i DE, a zatem

(4) $AB + BC + CD + DE = AE$.

W tej sumie można składniki $BC + CD$ zastąpić przez BD, gdyż $BC + CD = BD$; będzie wtedy

(5). . $AB + BD + DE = AE$.

Lecz suma geometryczna dwóch składników nie zależy od ich porządku, jak widzieliśmy poprzednio, a zatem $BD = CD + BC$. Wstawiając to w 5), otrzymamy

$$AB + CD + BC + DE = AE.$$

Z tego równania i 4) wynika, że

$$AB + BC + CD + DE = AB + CD + BC + DE.$$

Znaczy to, że suma geometryczna nie ulega zmianie, gdy przestawimy w niej dwa składniki następujące po sobie. Lecz przestawiając za każdym razem dwa następujące po sobie składniki, możemy otrzymać w danej sumie dowolny porządek wyrazów, a zatem suma geometryczna dowolnej ilości odcinków nie zależy od porządku składników.

Gdy mamy pewną ilość odcinków, jak np. AB, AC, AD i AE na fig. 5, to możemy zapomocą prostego wykreślenia wyznaczyć ich sumę, czyli odcinek wypadkowy. W tym celu budujemy wielobok $ABC_1D_1E_1$, w którym

(6) $BC_1 = AC$, $C_1D_1 = AD$ i $D_1E_1 = AE$.

(Nie należy zapominać, że BC_1, AC i t. d. są to przesunięcia, a więc znak $=$ mówi nam, że przesunięcia te są równe, lub że odcinki są równe i równoległe).

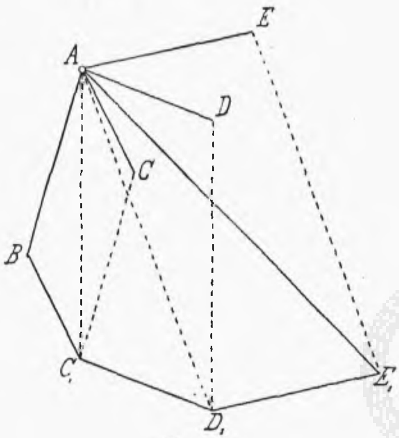

Fig. 5.

Oczywiście $AB + BC_1 + C_1D_1 + D_1E_1 = AE_1$,
albo ze względu na (6)

$$AB + AC + AD + AE = AE_1,$$

a zatem odcinek AE_1 jest wypadkowym odcinków danych.

Można osiągnąć toż samo w sposób inny. Wyznaczamy naprzód sumę dwóch odcinków danych, np. AB i AC, jako przekątnią równoległoboku, zbudowanego na tych ostatnich. Tą sumą jest odcinek AC_1, a więc

$$AB + AC = AC_1 .$$

Tak samo wyznaczymy sumę AD_1 odcinków AC_1 i AD.

$$AC_1 + AD = AD_1$$

Wreszcie wyznaczamy, również przy pomocy równoległoboku, sumę AE_1 odcinków AD_1 i AE.

$$AD_1 + AE = AE_1 .$$

Gdy dodamy te trzy równania stronami, to wypadnie

$$AB + AC + AC_1 + AD + AD_1 + AE = AC_1 + AD_1 + AE_1,$$

lub
$$AB + AC + AD + AE = AE_1.$$

A zatem odcinek AE_1, otrzymany w powyższy sposób, jest sumą odcinków danych.

Z fig. 5 widać jasno, że obydwa podane sposoby sumowania odcinków prowadzą do tego samego wyniku.

Przykłady. 1) Okazać, że suma geometryczna boków wieloboku zamkniętego jest równa zeru.

2) Sprawdzić przy pomocy rysunku, że jeżeli $AB = A_1B_1$ i $BC = B_1C_1$ to $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$ lub $AC = A_1C_1$.

3) Okazać, że punkt przecięcia przekątnich równoległoboku $ABCD$ jest środkiem każdej z nich.

Odp. Dodając stronami równania $AC = AB + AD$ i $DB = DA + AB$, znajdziemy $AC + DB = 2AB$ lub $\frac{AC}{2} + \frac{DB}{2} = AB$; w tem równaniu zawiera się dowód twierdzenia.

4) Niech będzie dane równanie $\lambda AB = \lambda_1 A_1B_1$, gdzie λ i λ_1 są współczynnikami liczbowymi dodatnimi lub ujemnymi. Równanie to znaczy, że przesunięcie AB, powtórzone λ razy, jest równe przesunięciu A_1B_1 powtórzonemu λ_1 razy. Jeżeli wiemy, że λ i λ_1 nie są równe zeru, to z danego równania wyprowadzamy wniosek, że odcinki AB i A_1B_1 są skierowane jednakowo lub odwrotnie. Jeżeli zaś wiemy, że AB i A_1B_1 są skierowane niejednakowo (t. j. że proste AB i A_1B_1 nie są równoległe), to z równania danego wynika, że $\lambda = \lambda_1 = 0$. Te dwa oczywiste twierdzenia są wysoce użyteczne w zastosowaniach geometrycznych rachunku wektorów.

§ 3[1]). Zastosowanie rachunku wektorów do zagadnień rzutowych. Niech będzie odcinek AB i jakikolwiek (byle nie nieskończenie odległy) punkt P. Oczywiście $AB + BP + PA = 0$, albo $AB = -BP - PA$. Lecz $-BP = PB$, a zatem

$$AB = PB - PA.$$

Jeżeli w pewnem zagadnieniu geometrycznem wchodzą prócz AB odcinki CD, EF i t. d., to każdy z nich można wyrazić w sposób podobny, t. j.

$$CD = PD - PC; \quad EF = PF - PE; \text{ i t. d.}$$

---

[1]) § ten nie jest niezbędny do zrozumienia dalszego ciągu.

Dla krótkości można opuszczać literę P, i wówczas będzie

$$AB = B - A; \quad CD = D - C; \quad EF = F - E; \text{ i t. d.}$$

pamiętać jednak należy, że zamiast A powinno być PA, zamiast $B—PB$ i t. d.

Taki skrócony sposób oznaczeń jest szczególnie dogodny w zastosowaniu do zagadnień rzutowych. Zagadnienie takie sprowadza się zwykle do pytania, czy pewne trzy punkty leżą na jednej prostej, lub czy pewne trzy proste przechodzą przez jeden punkt (jest tu mowa tylko o geometryi płaskiej); jeżeli więc mamy do zagadnień tego rodzaju zastosować rachunek, to powinniśmy znać odpowiedniki analityczne tych dwóch zjawisk geometrycznych, t. j. posiadać kryterya, pozwalające stwierdzić, czy pewne trzy punkty leżą na jednej prostej, lub czy pewne trzy proste przechodzą przez jeden punkt. Odpowiedniki takie dla metody rachunkowej, o której mowa, zawierają się w czterech twierdzeniach następujących.

Twierdzenie I. Jeżeli punkty A, B i C leżą na jednej prostej, to można tak wyznaczyć trzy współczynniki liczbowe α, β i γ, różne od zera, że

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \quad \text{i} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Ponieważ odcinki CA i CB leżą na jednej prostej, przeto możemy wyznaczyć takie dwie liczby α i β, aby

$$\alpha\, CA + \beta\, CB = 0 \text{ (por. przykł. 4 § 2),}$$

Lecz $CA = A - C$, i $CB = B - C$, a zatem

$$\alpha(A - C) + \beta(B - C) = 0, \quad \text{albo}$$

$$\alpha A + \beta B - (\alpha + \beta) C = 0.$$

Gdy założymy $-\alpha - \beta = \gamma$, to wypadną związki, które mieliśmy udowodnić. Oczywistą jest rzeczą, że jeden z współczynników α, β i γ może być obrany dowolnie.

Twierdzenie II. Jeżeli

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \quad \text{i} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

przyczem α, β i γ są różne od zera, to punkty A, B i C leżą na jednej prostej.

Z danych związków wynika, że

$$\gamma = -\alpha - \beta \quad \text{i} \quad \alpha A + \beta B - (\alpha + \beta) C = 0.$$

Ostatnie równanie można napisać w postaci

$$\alpha(A - C) + \beta(B - C) = 0, \quad \text{albo}$$
$$\alpha CA + \beta CB = 0.$$

Współczynniki α i β nie są równe zeru, zatem odcinki CA i CB muszą być równoległe (przykł. 4 § 2), a ponieważ posiadają wspólny punkt C, wynika więc stąd, że punkty A, B i C leżą na jednej prostej.

Twierdzenie III. Jeżeli trzy proste A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 przechodzą przez jeden punkt, to można tak wyznaczyć sześć współczynników liczbowych α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 i γ_2, że

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2=\beta_1B_1+\beta_2B_2=\gamma_1C_1+\gamma_2C_2 \quad \text{i} \quad \alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2=\gamma_1+\gamma_2.$$

Niech będzie S wspólnym punktem trzech danych prostych. Ponieważ punkty A_1, A_2 i S leżą na jednej prostej, zatem na zasadzie twierdzenia I można tak wyznaczyć trzy współczynniki α_1, α_2 i σ, że

$$\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \sigma S = 0 \quad \text{i} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \sigma = 0.$$

Tak samo okażemy, że

$$\beta_1B_1 + \beta_2B_2 + \sigma S = 0; \qquad \beta_1 + \beta_2 + \sigma = 0$$
i
$$\gamma_1C_1 + \gamma_2C_2 + \sigma S = 0; \qquad \gamma_1 + \gamma_2 + \sigma = 0.$$

Mieliśmy prawo założyć, że we wszystkich trzech równaniach współczynniki liczbowe odcinka S są jednakowe, gdyż w każdem z tych równań jeden ze współczynników może być obrany dowolnie (twierdz. I). Z sześciu równań ostatnich wynikają bezpośrednio związki, które mieliśmy udowodnić.

Twierdzenie IV. Jeżeli

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2=\beta_1B_1+\beta_2B_2=\gamma_1C_1+\gamma_2C_2 \quad \text{i} \quad \alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2=\gamma_1+\gamma_2,$$

to proste A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 przechodzą przez jeden punkt.

Załóżmy $-\alpha_1 - \beta_1 = \sigma$ i wyznaczmy taki punkt S, aby $\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 = -\sigma S$ (t. j. wyznaczmy odcinek wypadkowy znanych odcinków $-\frac{\alpha_1}{\sigma}PA_1$ i $-\frac{\alpha_2}{\sigma}PA_2$). Wówczas oczywiście

$$\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \sigma S = 0 \quad \text{i} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \sigma = 0.$$

Z tych równań i ze związków danych wynika, że

$$\beta_1B_1 + \beta_2B_2 + \sigma S = 0, \qquad \beta_1 + \beta_2 + \sigma = 0$$
$$\gamma_1C_1 + \gamma_2C_2 + \sigma S = 0, \quad \text{i} \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \sigma = 0.$$

Z sześciu równań ostatnich wyciągamy na zasadzie twierdzenia II wniosek, że punkt S leży na prostych A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2, a więc te trzy proste przechodzą przez jeden punkt.

Zastosowanie twierdzeń powyższych okażemy na przykładzie.

Niech będą trzy proste A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2, przechodzące przez jeden punkt (fig. 6), a zatem (twierdz. III)

$$\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 = \beta_1 B_1 - \beta_2 B_2 = \gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2$$

i $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2$.

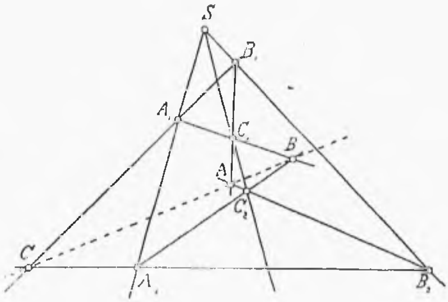

Fig. 6.

Z tych związków wynika, że

1) $\alpha_1 A_1 - \beta_1 B_1 = \alpha_2 A_2 - \beta_2 B_2$

i 2) $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2$.

Załóżmy $\alpha_1 - \beta_1 = \gamma$ i wyznaczmy taki punkt C, aby $\alpha_1 A_1 - \beta_1 B_1 = \gamma C$. Punkt C leży oczywiście na prostej $A_1 B_1$ gdyż

$$\alpha_1 A_1 - \beta_1 B_1 - \gamma C = 0 \quad \text{i} \quad \alpha_1 - \beta_1 - \gamma = 0,$$

a z 1) i 2) wynika, że ten sam punkt leży na prostej A_2B_2, jest więc punktem przecięcia tych prostych. Załóżmy jeszcze $\beta_1 - \gamma_1 = \alpha$ i $\gamma_1 - \alpha_1 = \beta$ i wyznaczmy takie punkty A i B, aby $\beta_1 B_1 - \gamma_1 C_1 = \alpha A$ i $\gamma_1 C_1 - \alpha_1 A_1 = \beta B$; dowiedziemy, jak poprzednio, że A jest punktem przecięcia prostych $B_1 C_1$ i $B_2 C_2$, i B — punktem przecięcia prostych $C_1 A_1$ i $C_2 A_2$. Położenie punktów A, B i C charakteryzują układy równań

$$\begin{aligned} \alpha A &= \beta_1 B_1 - \gamma_1 C_1 & \quad \text{i} \quad & \alpha = \beta_1 - \gamma_1, \\ \beta B &= \gamma_1 C_1 - \alpha_1 A_1, & & \beta = \gamma_1 - \alpha_1, \\ \gamma C &= \alpha_1 A_1 - \beta_1 B_1, & & \gamma = \alpha_1 - \beta_1. \end{aligned}$$

Dodając stronami równania każdego układu, otrzymamy:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \quad \text{i} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

a więc punkty A, B i C leżą na jednej prostej.

Jest to twierdzenie Desargues'a. Dowiedziemy jeszcze twierdzenia odwrotnego.

Zakładamy, że odpowiednie boki trójkątów $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$, przecinają się w punktach C, A i B, leżących na jednej prostej, a więc

$$3)\quad \alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \qquad \text{i} \qquad 4)\quad \alpha + \beta + \gamma = 0 .$$

Warunek, że każda z trójek punktów A_1B_1C, B_1C_1A i C_1A_1B ma leżeć na jednej prostej, da się wyrazić w następujących układach równań:

$$5)\quad \begin{aligned} \alpha_1 A_1 - \beta_1' B_1 &= \gamma C \\ \beta_1 B_1 - \gamma_1' C_1 &= \alpha A \\ \gamma_1 C_1 - \alpha_1' A_1 &= \beta B \end{aligned} \qquad 6)\quad \begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1' &= \gamma \\ \beta_1 - \gamma_1' &= \alpha \\ \gamma_1 - \alpha_1' &= \beta . \end{aligned}$$

Dodając stronami równania każdego układu i uwzględniając 3) i 4), otrzymamy:

$$(\alpha_1 - \alpha_1') A_1 + (\beta_1 - \beta_1') B_1 + (\gamma_1 - \gamma_1') C_1 = 0 ,$$
$$(\alpha_1 - \alpha_1') + (\beta_1 - \beta_1') + (\gamma_1 - \gamma_1') = 0 .$$

Ponieważ punkty A_1, B_1 i C_1 nie leżą na jednej prostej, przeto $\alpha_1 - \alpha_1' = 0$, $\beta_1 - \beta_1' = 0$ i $\gamma_1 - \gamma_1' = 0$ lub $\alpha_1' = \alpha_1$, $\beta_1' = \beta_1$ i $\gamma_1' = \gamma_1$. Skutkiem tego dwa pierwsze równania układów 5) i 6) przybierają postać:

$$7)\quad \begin{aligned} \alpha_1 A_1 - \beta_1 B_1 &= \gamma C , \\ \beta_1 B_1 - \gamma_1 C_1 &= \alpha A \end{aligned} \qquad 8)\quad \begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 &= \gamma \\ \beta_1 - \gamma_1 &= \alpha \end{aligned}$$

Tak samo okażemy, że

$$9)\quad \begin{aligned} \alpha_2 A_2 - \beta_2 B_2 &= \gamma C , \\ \beta_2 B_2 - \gamma_2 C_2 &= \alpha A , \end{aligned} \qquad 10)\quad \begin{aligned} \alpha_2 - \beta_2 &= \gamma , \\ \beta_2 - \gamma_2 &= \alpha . \end{aligned}$$

Z układów 7) i 9) z jednej strony, a 8) i 10) z drugiej — wynikają równania:

$$\begin{aligned} \alpha_1 A_1 - \beta_1 B_1 &= \alpha_2 A_2 - \beta_2 B_2 , \\ \beta_1 B_1 - \gamma_1 C_1 &= \beta_2 B_2 - \gamma_2 C_2 , \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 &= \alpha_2 - \beta_2 , \\ \beta_1 - \gamma_1 &= \beta_2 - \gamma_2 . \end{aligned}$$

albo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 &= \beta_1 B_1 - \beta_2 B_2 , \\ \beta_1 B_1 - \beta_2 B_2 &= \gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2 , \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= \beta_1 - \beta_2 , \\ \beta_1 - \beta_2 &= \gamma_1 - \gamma_2 . \end{aligned}$$

albo wreszcie:

$$\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 = \beta_1 B_1 - \beta_2 B_2 = \gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2 , \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2 .$$

Związki te są dowodem, że proste A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 przechodzą przez jeden punkt.

§ 4. **Środek ciężkości grupy punktów.** Niech będzie n punktów $A_1, A_2, A_3 \ldots . A_n$. Obierzmy jakikolwiek puukt P i wyznaczmy sumę geometryczną odcinków PA_1, PA_2, $PA_3 \ldots PA_n$. Wypadnie, dajmy na to, odcinek PR.

1) $PA_1 + PA_2 + PA_3 + \ldots + PA_n = PR$.

Ten odcinek PR nazwiemy *wypadkową odległością* punktu P od danej grupy punktów, zaś odcinek $PS = \frac{PR}{n}$ *przeciętną odległością* punktu P od punktów danej grupy.

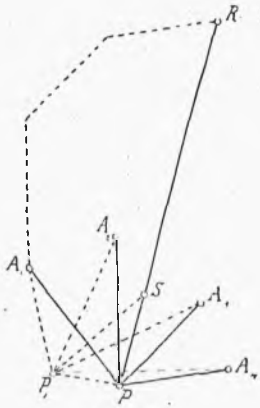

Fig. 7.

Na fig. 7 wykonano wyżej wskazane działania dla grupy, złożonej z czterech punktów.

Obierzmy teraz inny punkt P_1 i wyznaczmy tak samo jego wypadkową i przeciętną odległość od tej samej grupy. Przypuśćmy, że pierwsza $= P_1R_1$, a druga $= P_1S_1$, t. j.

2) $P_1A_1 + P_1A_2 + P_1A_3 + \ldots + P_1A_n = P_1R_1$ i $\frac{P_1R_1}{n} = P_1S_1$.

Jeżeli już mamy punkt S, to odcinek P_1S_1 możemy wyznaczyć w sposób inny. Rozkładamy odcinek P_1A_1 na dwa odcinki składowe P_1P i PA_1, rozkładamy również odcinek P_1A_2 na P_1P i PA_2 i t. d. Będzie więc

$$
\begin{aligned}
P_1A_1 &= P_1P + PA_1, \\
P_1A_2 &= P_1P + PA_2, \\
P_1A_3 &= P_1P + PA_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_1A_n &= P_1P + PA_n.
\end{aligned}
$$

Gdy dodamy te wszystkie równania stronami, to wypadnie

$$
P_1A_1 + P_1A_2 + P_1A_3 + \ldots + P_1A_n = n \,.\, P_1P + PA_1 + PA_2 + \\ + PA_3 + \ldots + PA_n,
$$

a uwzględniając 1) i 2), otrzymamy:

$$P_1R_1 = n \,.\, P_1P + PR,$$

albo $$\frac{P_1R_1}{n} = P_1P + \frac{PR}{n},$$

albo wreszcie $$P_1S_1 = P_1P + PS.$$

Z równania tego widać, że odcinek P_1S_1 jest wypadkowym odcinków P_1P i PS (por. fig. 7), a zatem punkt S_1 leży w punkcie S, i szukaną przeciętną odległością punktu P_1 jest odcinek P_1S.

Widzimy, że punkt S odgrywa szczególną rolę względem danej grupy. Przeciętna odległość jakiegokolwiek punktu P_1 od punktów grupy jest równa odcinkowi, zawartemu pomiędzy tym punktem i punktem S. Ta przeciętna odległość jest równa zeru, jeżeli P_1 leży w S. Punkt S nazywa się *środkiem ciężkości* danej grupy. Jasną jest rzeczą, że przeciętna odległość środka ciężkości od punktów grupy jest równa zeru, a stąd wynika, że i jego wypadkowa odległość jest równa zeru.

Aby wyznaczyć środek ciężkości danej grupy punktów, obieramy jakikolwiek punkt P; punkt ten będziemy nazywali *biegunem*. Wyznaczamy następnie przeciętną odległość PS bieguna od punktów grupy. Koniec S odcinka PS będzie szukanym środkiem ciężkości.

Wybór bieguna nie wpływa na wynik ostateczny, należy jednak w każdym wypadku obierać biegun w taki sposób, aby potrzebne działania dały się dogodnie wykonać.

Przykłady. 1) Wyznaczyć środek ciężkości dwóch danych punktów A i B.

Odp. Za biegun obieramy punkt A. Odległość wypadkowa $= AB$, a przeciętna $= \frac{AB}{2}$, a zatem szukany środek ciężk. leży w środku odcinka AB.

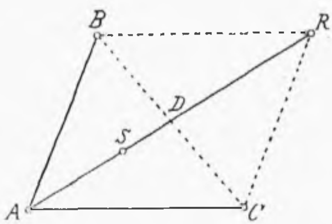

Fig. 8.

2) Wyznaczyć śr. ciężk. trzech danych punktów A, B i C.

Odp. Za biegun obieramy punkt A. Odległość wypadkowa AR=sumie geom. odcinków AB i AC (fig. 8). Wyznaczymy tę sumę przy pomocy równoległoboku. Odległość przeciętna $AS = \frac{AR}{3}$. Łatwo okazać, że środek ciężk. S leży na ośrodkowej AD trójkąta ABC w odległości $^2/_3$ AD od wierzchołka A, lub w punkcie przecięcia trzech ośrodkowych.

3) Wyznaczyć śr. ciężk. czterech punktów A, B, C i D. *Odp.* Za biegun obieramy dowolny punkt P. Wówczas

$$(1) \ldots\ldots \quad PS = \frac{PA + PB + PC + PD}{4}, \text{ lub}$$

$$PS = \frac{1}{2}\left(\frac{PA + PB}{2} + \frac{PC + PD}{2}\right).$$

Łatwo okazać, że $\frac{PA + PB}{2} = PS_1$, gdzie S_1 jest śr. ciężk. punktów A i B lub środkiem odcinka AB. Taksamo $\frac{PC + PD}{2} = PS_2$, gdzie S_2 jest środkiem odcinka CD. A zatem

$$PS = \frac{PS_1 + PS_2}{2},$$

z czego widać, że S jest środkiem odcinka S_1S_2

4) Okazać, że w dowolnym czworoboku proste, łączące środki przeciwległych boków, oraz prosta, łącząca środki przekątnich, przecinają się w jednym punkcie.

Odp. W przykładzie poprzedzającym dowiedliśmy, że śr. ciężk. S leży na prostej, łączącej środki boków AB i CD. Przedstawmy równ. 1) w postaci

$$PS = \frac{1}{2}\left(\frac{PB + PC}{2} + \frac{PD + PA}{2}\right), \text{ a także}$$

$$PS = \frac{1}{2}\left(\frac{PA + PC}{2} + \frac{PB + PD}{2}\right);$$

okażemy teraz z łatwością, że S leży również na prostej, łączącej środki boków BC i DA, a także na prostej, łączącej środki przekątnich AC i BD.

5) Wyznaczyć środ. ciężk. sześciu punktów A, B, C, D, E i F. *Odp.* Znajdziemy, że

$$PS = \frac{1}{2}\left(\frac{PA + PB + PC}{3} + \frac{PD + PE + PF}{3}\right),$$

z czego wynika, że S jest środkiem odcinka, łączącego środki ciężk. grupy ABC i grupy DEF.

§ 5. Środek ciężkości grupy punktów (dalszy ciąg). Wypada teraz poznać pewne twierdzenia, które w znacznej mierze ułatwiają wyznaczanie środków ciężkości.

Przypuśćmy, że wszystkie punkty grupy A_1, A_2, A_3, ... A_n leżą na jednej prostej. Obierzmy na tejże prostej biegun P. Oczywistem jest, że suma

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + \ldots + PA_n,$$

będzie miała kierunek danej prostej, a zatem środek ciężkości grupy będzie leżał na tejże prostej.

I. Jeżeli wszystkie punkty grupy leżą na linii prostej, to i śr. ciężk. leży na tej prostej.

Niech będą dwie grupy punktów. Przypuśćmy, że grupy te składają się odpowiednio z n_1 i n_2 punktów, a ich środkami ciężkości są odpowiednio punkty S_1 i S_2. Wyznaczymy śr. ciężk. obydwóch grup, razem wziętych.

Obierzmy w tym celu punkt S_1 za biegun. Odległość jego od pierwszej grupy $= 0$, a zatem odległość jego od obydwóch grup jest równa odległości od grupy drugiej, zaś ta ostatnia $= n_2 S_1 S_2$, i

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_1 S = \frac{n_2}{n_1 + n_2} S_1 S_2 \, ,$$

gdzie S oznacza szukany śr. ciężk. Oczywistą jest rzeczą, że S leży na prostej $S_1 S_2$, wewnątrz odcinka $S_1 S_2$.

Dalej mamy, że $SS_2 = S_1 S_2 - S_1 S$, czyli

$$SS_2 = S_1 S_2 - \frac{n_2}{n_1 + n_2} S_1 S_2 \, , \quad \text{albo}$$

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad SS_2 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} S_1 S_2 \, .$$

Gdy podzielimy stronami 1) przez 2), to wypadnie

$$\frac{S_1 S}{SS_2} = \frac{n_2}{n_1} \, .$$

II. Śr. ciężk. dwóch grup leży na odcinku, łączącym środki ciężkości tych grup, i dzieli ten odcinek w stosunku odwrotnym do ilości punktów tych grup.

Niech będzie m grup danych, liczących odpowiednio n_1, n_2, $n_3 \ldots . n_m$ punktów; ich środkami ciężkości są odpowiednio punkty S_1, S_2, $S_3 \ldots S_m$. Mamy wyznaczyć śr. ciężk. wszystkich grup, razem wziętych.

Za biegun obierzmy dowolny punkt P. Jego odległość od pierwszej grupy będzie $n_1 PS_1$, od drugiej — $n_2 PS_2$, od trzeciej — $n_3 PS_3$ i t. d., i

$$(3) \quad PS = \frac{n_1 PS_1 + n_2 PS_2 + n_3 PS_3 + \ldots + n_m PS_m}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m},$$

gdzie S oznacza szukany śr. ciężk.

Oczywiście otrzymalibyśmy to samo, gdyby wszystkie punkty pierwszej grupy leżały w punkcie S_1, wszystkie punkty drugiej—w punkcie S_2 i t. d.

III. Wyznaczając środek ciężk. pewnej ilości grup, możemy uważać, że wszystkie punkty każdej grupy leżą w środku ciężkości tej grupy.

Z I i III bezpośrednio wynika, że jeżeli środki ciężkości wszystkich grup danych leżą na linii prostej, to i śr. ciężk. ogólny leży na tej prostej.

Załóżmy, że we wzorze 3) $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_m = n$, wówczas

$$PS = \frac{n(PS_1 + PS_2 + PS_3 + \ldots + PS_m)}{mn}, \text{ lub}$$

$$PS = \frac{PS_1 + PS_2 + PS_3 + \ldots PS_m}{m}.$$

Stąd widzimy, że S jest środkiem ciężk. grupy, złożonej z punktów $S_1, S_2, S_3 \ldots S_m$.

IV. Jeżeli $S_1, S_2, S_3 \ldots S_m$ *są środkami ciężkości grup, z których każda liczy jednakową ilość punktów, to ogólny śr. ciężk. jest środkiem ciężk. grupy, złożonej z punktów* $S_1, S_2, S_3 \ldots S_m$.

Niech będzie grupa, złożona z punktów $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ i $B_1, B_2, B_3 \ldots B_n$, przyczem punkty $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ są odpowiednio położone symetrycznie do punktów $B_1, B_2, B_3 \ldots B_n$ względem pewnej osi symetryi. Oczywiście śr. ciężk. punktów A_1 i B_1 leży na osi symetryi, a mianowicie w punkcie przecięcia prostej $A_1 B_1$ z tą osią. Również na osi leży śr. ciężk. każdej pary punktów symetrycznych, a stąd wynika, że śr. ciężk. danej grupy leży również na osi symetryi.

V. Jeżeli grupa punktów posiada oś symetryi, to jej śr. ciężk. leży na tej osi.

Jeżeli grupa posiada dwie osi symetryi, to jej śr. ciężk. leży w punkcie przecięcia tych osi.

Przykłady. 1) Okazać, że twierdzenie II wynika z III-go.

2) Punkty A i B leżą w prawo od punktu O odpowiednio w odległościach 4 i 7 cm., a punkt C—w lewo od O w odległości 5 cm. na linii prostej. Wyznaczyć śr. ciężk. punktów A, B i C. *Odp.* Śr. ciężk. leży w prawo od O w odległości 2 cm.

3) Rozwiązać zadania 3 i 5 § poprzedzającego, stosując przytem twierdzenie II § niniejszego

4) Mamy dane sześć punktów A, B, C, D, E i F. Z tych punktów można utworzyć 10 par trójek punktów, np. ABC i DEF, ABD i CEF i t. d. Okazać, że proste, łączące środki ciężkości trójek każdej pary, przechodzą przez jeden punkt.

5) Wyznaczyć śr. ciężk. wierzchołków dowolnego pięciokąta.

6) Przyprostokątne AB i AC prostokątnego trójkąta ABC mają odpowiednio 10 i 15 cm. Wierzchołek B jest środkiem ciężkości punktów B_1, B_2 i B_3, a C—środkiem ciężk. punktów C_1 i C_2. Wyznaczyć śr. ciężk. punktów A, B_1, B_2, B_3, C_1 i C_2. *Odp.* $AS = \frac{AB}{2} + \frac{AC}{3}$, na zasadzie czego można łatwo wyznaczyć S wykreślnie.

7) Okazać, że śr. ciężk. wierzchołków regularnego wieloboku leży w środku koła opisanego.

§ 6. Środek ciężkości odcinka linii. W geometryi zwykle uważamy linię jako ślad, który pozostawia za sobą poruszający się punkt. Oczywistą jest rzeczą, że linia tak uważana nie może posiadać żadnych przerw. Charakteryzujemy tę właściwość linii, mówiąc, że linia jest ciągła.

Dla celów naszych dogodniejsze będzie inne wyobrażenie linii. Będziemy mianowicie uważali linię jako szereg punktów, następujących po sobie, jak paciorki różańca.

Niech będzie jakikolwiek odcinek linii prostej lub krzywej. Wyobraźmy sobie, że na tym odcinku ułożono pewną ilość punktów. Ponieważ punktowi niemożemy przypisywać długości (wogóle wymiarów), przeto owe punkty nigdy nie pokryją całego odcinka, chociażby ich ilość była niewiem jak wielka. Zawsze pozostaną pomiędzy nimi przerwy, i suma tych przerw jest zawsze równa długości odcinka. Tym sposobem, uważając linię, jako szereg punktów[1]), odrzucamy tem samem jej właściwość

[1]) „Szereg punktów" oznacza tu oczywiście pojęcie zasadniczo różne od szeregu punktów w geometryi położenia, gdyż tam odcinkowi nie przypisujemy długości.

zwaną ciągłością, lecz właściwość ta w zagadnieniach, o które nam chodzi, nie odgrywa żadnej roli.

Przyjmiemy dalej, że przerwy pomiędzy punktami, tworzącymi linię, są niezmiernie małe i równe. Wynika stąd, że ilość punktów odcinka jest proporcyonalna do jego długości.

Przyjąwszy powyższą umowę co do pojęcia linii, mamy prawo uważać odcinek linii prostej lub krzywej za grupę punktów. Środek ciężkości tej grupy nazwiemy *środkiem ciężkości odcinka.*

Z twierdzeń I i V § poprzedzającego wynika bezpośrednio, że śr. ciężk. odcinka linii prostej leży w środku geometrycznym tego odcinka.

Przykłady. 1) Wyznaczyć śr. ciężk. odcinków AB i BC (fig. 9).

Odp. Dzielimy dane punkty na dwie grupy; do pierwszej niech należą wszystkie punkty odcinka AB, a do drugiej — punkty odcinka BC. Środki ciężk. tych grup leżą w punktach L i M— środkach geometrycznych odcinków AB i BC. Ogólny śr. ciężk. S na zasadzie twierdz. II § 5 leży na odcinku LM tak, że $\frac{LS}{SM} = \frac{BC}{AB}$. Wykreślnie można punkt S wyznaczyć w sposób następujący. Prowadzimy przez M i L proste MN i LN odpowiednio równoległe do prostych AB i BC. Dwusieczna kąta LNM przejdzie przez S.

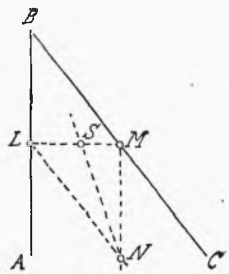

Fig. 9.

2) Wyznaczyć środek ciężk. trzech odcinków figury 10.

Odp. Środki ciężk. danych odcinków leżą odpowiednio w ich środkach geometrycznych A, B i C. Śr. ciężk. obydwóch odcinków b leży w środku D odcinka CB. Pozostaje na odcinku AD tak wyznaczyć punkt S, aby $\frac{AS}{SD} = \frac{2b}{a}$. Wypadnie, że $AS = \frac{b^2}{a+2b}$. Jeżeli $a = b$, to $AS = \frac{a}{3}$.

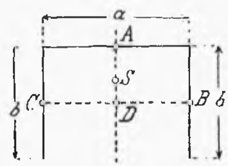

Fig. 10.

3) Wyznaczyć śr. ciężk. trzech odcinków figury 11.

Odp. $AS = 0{,}369\ a$.

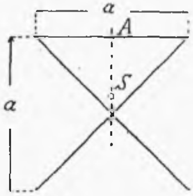

Fig. 11.

4) Okazać, że śr. ciężk. obwodu wieloboku regularnego leży w środku koła opisanego.

5) Wyznaczyć śr. ciężk. obwodu trójkąta ABC (fig. 12).

Odp. Dzielimy dane punkty na dwie grupy. Do pierwszej niech należą punkty odcinków BC i AC, do drugiej—punkty odcinka AB. Śr. ciężk. pierwszej grupy leży na odcinku $A_1 B_1$ (A_1, B_1 i C_1 oznaczają środki boków trójkąta), przypuśćmy w punkcie D, a śr. ciężk. szukany leży na odcinku $C_1 D$. Lecz $\frac{A_1 D}{DB_1} = \frac{CA}{BC}$, a ponieważ $CA = 2A_1 C_1$ i $BC = 2C_1 B_1$, zatem $\frac{A_1 D}{DB_1} = \frac{A_1 C_1}{C_1 B_1}$. Z proporcyi tej wynika, że prosta $C_1 D$ jest dwusieczną kąta $A_1 C_1 B_1$. Łatwo teraz okazać, że szukany śr. ciężk. jest środkiem koła, wpisanego w trójkąt $A_1 B_1 C_1$.

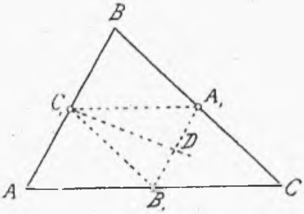

Fig. 12.

6) Na fig. 13 punkty A_1 i B_1 są środkami boków BC i CA, a $A_1 E = B_1 D = \frac{AB}{2}$. Okazać, że proste $A_1 D$ i $B_1 E$ przecinają się w środku ciężk. obwodu trójkąta ABC.

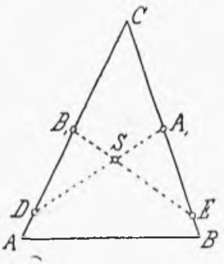

Fig. 13.

§ 7. Środek ciężkości łuku koła. Niech będzie na obwodzie koła, którego promień $= r$, n punktów A_1, A_2, A_3 .... A_{n-1}, A_n (fig. 14), obranych w taki sposób, że łuki $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ .... $A_{n-1} A_n$ są równe. Wyznaczmy śr. ciężk. tej grupy. Posiada ona oś symetryi, a mianowicie prostą OM, przechodzącą przez środek M łuku $A_1 A_n$, na tej więc prostej musi leżeć szukany śr. ciężk.

Za biegun obierzemy środek koła O. Odległość bieguna od danej grupy jest równa sumie geometrycznej

$$OA_1 + OA_2 + OA_3 + \ldots + OA_{n-1} + \\ + OA_n .$$

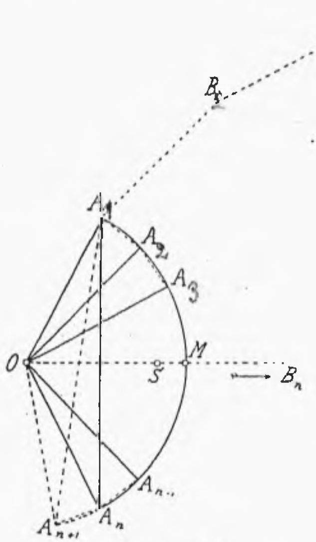

Fig. 14.

Aby wykreślnie wyznaczyć tę sumę, zastosujemy metodę wieloboku. W tym celu przez punkt A_1 prowadzimy odcinek A_1B_2 równy i równoległy do OA_2, przez B_2 prowadzimy odcinek B_2B_3 równy i równoległy do OA_3 i t. d. Ostatnim będzie odcinek $B_{n-1}B_n$ równy i równoległy do OA_n. Odcinek OB_n będzie szukaną sumą, czyli odległością bieguna O od danej grupy punktów. Punkt B_n wypadnie oczywiście na prostej OM, gdyż, jak wiemy, na tej prostej ma leżeć szukany śr. ciężk.

Weźmy na danym okręgu jeszcze jeden punkt A_{n+1} tak, aby łuk A_nA_{n+1} był równy łukowi A_1A_2. Można okazać, że wieloboki $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_nA_{n+1}$ i $OA_1B_2B_3 \ldots B_{n-1}B_n$ są podobne. Istotnie każdy z nich posiada $n+1$ boków, w pierwszym boki A_1A_2, A_2A_3, $\ldots A_nA_{n+1}$ i kąty przez nie utworzone są równe, w drugiem podobnież równe są boki OA_1, A_1B_2, $B_2B_3 \ldots . B_{n-1}B_n$ (każdy z nich jest $= r$) i kąty przez nie utworzone, wreszcie łatwo okazać, że np. kąty $A_1A_2A_3$ i OA_1B_2 są równe. Widzimy mianowicie, że $OA_1B_2 + A_1OA_2 = 180^0$, a także $2A_1A_2O + A_1OA_2 = 180^0$, a zatem $OA_1B_2 = 2A_1A_2O = A_1A_2A_3$.

Z podobieństwa tych wieloboków wynika, że

$$\frac{OB_n}{A_1A_{n+1}} = \frac{OA_1}{A_1A_2} \text{ lub } \frac{OB_n}{A_1A_{n+1}} = \frac{r}{A_1A_2}, \text{ a zatem}$$

$$OB_n = \frac{r \cdot A_1A_{n+1}}{A_1A_2},$$

zaś odległość przeciętna

$$OS = \frac{OB_n}{n} = \frac{r \cdot A_1A_{n+1}}{n \cdot A_1A_2},$$

gdzie S jest szukanym środkiem ciężk.

Przypuśćmy teraz, że do danej grupy należą wszystkie punkty łuku A_1A_n. W tym razie punkt A_{n+1} leży niezmiernie blizko punktu A_n, i możemy przyjąć, że cięciwa A_1A_{n+1} jest równa cięciwie A_1A_n. Oznaczymy długość tej ostatniej literą c. Prócz tego $n \cdot A_1A_2$ jest oczywiście długością łuku A_1A_n; oznaczymy ją literą s. Wypadnie wówczas, że

$$OS = \frac{r \cdot c}{s},$$

gdzie S oznacza teraz środek ciężk. łuku A_1A_n.

Przykłady. 1) Wyznaczyć śr. ciężk. półokręgu. *Odp.* $OS = \frac{2r}{\pi}$.

2) Wyznaczyć śr. ciężk. łuku 60°. *Odp.* $OS = \frac{3r}{\pi}$.

3) Wyznaczyć śr. ciężk. łuku 90°. *Odp.* $OS = \frac{r\sqrt{8}}{\pi}$.

4) Wyznaczyć śr. ciężk. łuku 45°. *Odp.* $OS = \frac{4r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\pi}$.

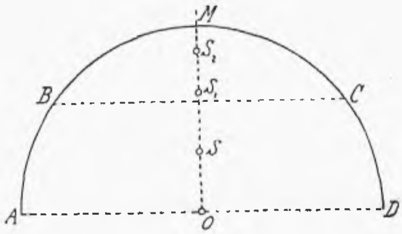

Fig. 15.

5) Wyznaczyć środek ciężk. łuków AB i CD na fig. 15. *Odp.* Niech będą S_1 i S_2 środki ciężk. półokręgu AMD i łuku BMC, S śr. ciężk. szukany, s długość łuku $AB = CD$, wreszcie c długość cięciwy BC. Obrawszy punkt O za biegun, otrzymamy
$\pi r \,.\, OS_1 = (\pi r - 2s)\, OS_2 + 2s \,.\, OS$, prócz tego wiemy, że $OS_1 = \frac{2r}{\pi}$ (przykł. 1), a $OS_2 = \frac{rc}{\pi r - 2s}$. Ze związków tych wypadnie, że $OS = \frac{(2r - c)r}{2s}$.

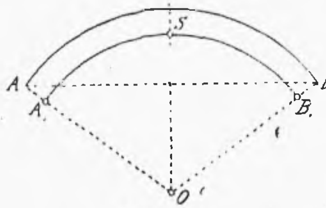

Fig. 16.

6) Niech będzie łuk AB i jego śr. ciężk. S (fig. 16). Z punktu O zataczamy promieniem OS inny łuk A_1B_1, zawarty pomiędzy promieniami OA i OB. Okazać, że długości łuku A_1B_1 i cięciwy AB są równe. *Odp.* Oznaczmy literą α kąt AOB w mierze bezwzględnej; wówczas łuk $AB = s = \alpha r$ i $OS = \frac{rc}{s} = \frac{rc}{\alpha r}$, lub $OS = \frac{c}{\alpha}$ i $c = \alpha \,.\, OS$.

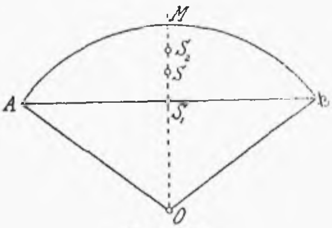

Fig. 17.

7) Wyznaczyć śr. ciężk. obwodu odcinka kątowego AMB (fig. 17); łuk $AMB = s$, cięciwa $AB = c$, promień $= r$. *Odp.* Jeżeli S_1 i S_2 oznaczają środki ciężk. cięciwy AB i łuku AMB, to obrawszy za biegun punkt O, znajdziemy, że $(s + c)\; OS = c \,.\, OS_1 + s \,.\, OS_2$, stąd $OS = \frac{c(\sqrt{4r^2 - c^2} + 2r)}{2(c + s)}$. Jeżeli łuk AMB ma 180°, to $OS = \frac{2r}{2 + \pi}$.

8) Wyznaczyć śr. ciężk. obwodu wycinka kołowego $AMBO$ (fig. 17). *Odp.* $OS = \frac{r(\sqrt{4r^2 - c^2} + 2c)}{2(2r + s)}$. Jeżeli łuk AMB ma 180^0, to $OS = \frac{2r}{2 + \pi}$ (por. przykł. poprzedzający).

9) Wyznaczyć środ. ciężk. trzech półokręgów fig. 18. Promień mniejszego $= r$. *Odp.* Obrawszy za biegun punkt O, znajdziemy łatwo, że $OS = \frac{2r}{\pi}$.

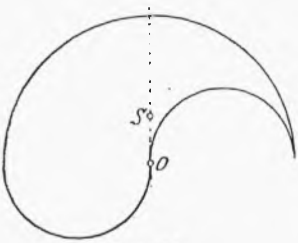

Fig. 18.

§ 8. **Środek ciężkości pola.** W § 6 umówiliśmy się uważać linię za szereg punktów; podobnież umówimy się uważać powierzchnię, a w szczególności płaszczyznę, za układ linii, przebiegających równolegle do siebie w niezmiernie małych i równych odległościach, a ponieważ każda linia składa się z oddzielnych punktów, przeto powierzchnia na mocy tej umowy rozpada się na rój punktów. Gęstość tych punktów w każdej części powierzchni jest jednakowa. Wynika stąd, że ilość punktów, zawartych w polu figury płaskiej, jest proporcyonalna do wielkości pola tej figury.

Przyjąwszy powyższą umowę, możemy uważać pole figury płaskiej za grupę punktów. Środek ciężkości tej grupy nazwiemy środkiem ciężkości pola.

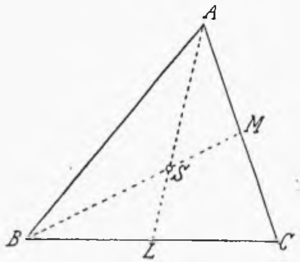

Fig. 19.

Wyznaczymy śr. ciężk. pola trójkąta ABC (fig. 19). Możemy uważać to pole za układ odcinków prostych równoległych do boku BC. Śr. ciężk. każdego odcinka leży w środku tego odcinka, a miejscem geometrycznem środków jest ośrodkowa AL, t. j. prosta, łącząca wierzchołek A ze środkiem L boku BC. Wynika stąd, że śr. ciężk. wszystkich odcinków, albo szukany śr. ciężk. pola trójkąta, leży na tej ośrodkowej (§ 5, twierdz. III i I). Tak samo dowiedziemy, że szukany śr. ciężk. leży na ośrodkowej BM, a zatem leży w punkcie przecięcia S ośrodkowych AL i BM.

Wiadomo, że $AS = \frac{2}{3} AL$ (§ 4 przykł. 2).

Przy pomocy powyższego twierdzenia daje się łatwo wyznaczyć śr. ciężk. pola wycinka kołowego.

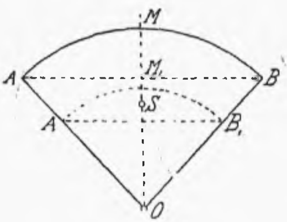

Fig. 20.

Niech będzie wycinek $AMBO$ koła o promieniu r. Podzielmy łuk AMB na niezmiernie małe łuki równe. Każdy z tych łuków możemy uważać za odcinek prostej. Połączywszy punkty podziału ze środkiem koła O, rozbijemy dany wycinek na trójkąty równoboczne. Ośrodkową każdego z nich będzie promień, przechodzący przez środek odpowiedniego łuku, a więc śr. ciężk. leży na tym promieniu w odległości $\frac{2r}{3}$ od środka O. Środki ciężk wszystkich trójkątów utworzą łuk A_1B_1, zatoczony z O promieniem $r_1 = \frac{2r}{3}$. Na zasadzie twierd. IV § 5 środkiem ciężkości danego wycinka będzie środek ciężk. S łuku A_1B_1.

Szukany punkt S leży oczywiście na promieniu OM, przechodzącym przez środek M łuku AB, i

$$OS = \frac{r_1 c_1}{s_1},$$

gdzie $c_1 =$ cięciwie A_1B_1, a s_1 oznacza długość łuku A_1B_1. Lecz $c_1 = \frac{2c}{3}$, i $s_1 = \frac{2s}{3}$, gdzie $c =$ cięciwie AB, a $s =$ łukowi AB, a zatem

$$OS = \frac{2rc}{3s}.$$

Przykłady. 1) Okazać, że śr. ciężk. pola równoległoboku leży w punkcie przecięcia przekątnich.

2) Okazać, że śr. ciężk. pola regularnego wieloboku leży w środku koła opisanego.

3) Wyznaczyć śr. ciężk. pola figury 21

Odp. $x = y = \frac{5a}{12}$.

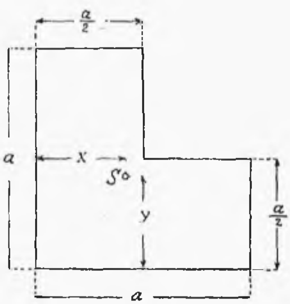

Fig. 21.

4) Wyznaczyć śr. ciężk. pola figury 22. *Odp.* $x = \frac{7a}{18}$.

5) Wyznaczyć śr. ciężk. pola figury 23. *Odp.* $x = \frac{(14 + 3\sqrt{3})a}{26}$.

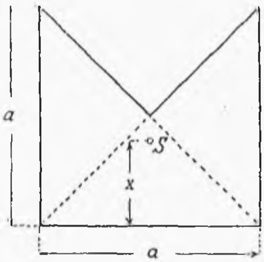

Fig. 22.

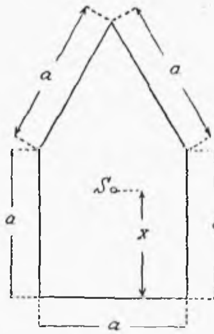

Fig. 23.

6) Wyznaczyć śr. ciężk. pola fig. 24. *Odp.* $x = 4$.

7) Wyznaczyć śr. ciężk. pola dowolnego czworoboku $ABCD$.

Odp. Dzielimy dany czworobok przekątnią BD na trójkąty ABD i BCD. Szukany śr. ciężk. leży na prostej, łączącej środki ciężkości tych trójkątów. Przeprowadziwszy przekątnię AC, znajdziemy tak samo drugą prostą, przechodzącą przez szukany punkt.

8) Wyznaczyć śr. ciężk. pola wycinka kołowego $AMBO$ (fig. 20), gdy kąt $AOB = 60^0$. *Odp.* $OS = \frac{\pi r}{3}$.

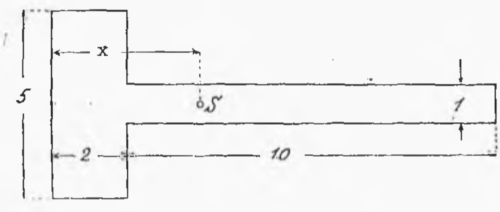

Fig. 24.

9) Tożsamo, gdy kąt $AOB = 90^0$.

Odp. $OS = \frac{r\sqrt{32}}{3\pi}$.

10) Tożsamo, gdy kąt $AOB = 180^0$.

Odp. $OS = \frac{4r}{3\pi}$.

11) Wyznaczyć śr. ciężk. odcinka kołowego $AMBN$ (fig. 25). *Odp.* Weźmy pod uwa-

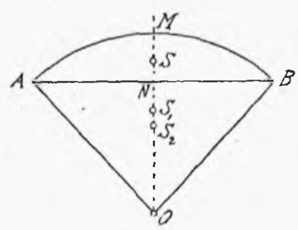

Fig. 25.

gę trzy figury następujące: wycinek $AMBO$, trójkąt ABO i odcinek $AMBN$. Środki ciężkości ich pól oznaczmy odpowiednio literami S_1, S_2 i S. Pola tych figur wynoszą odpowiednio $\frac{sr}{2}$, $\frac{ac}{2}$ i $\frac{sr - ac}{2}$, gdzie $a = ON$. Obrawszy za biegun środek koła O, otrzymamy

$$OS_1 \,.\, \frac{sr}{2} = OS_2 \,.\, \frac{ac}{2} + OS \,.\left(\frac{sr - ac}{2}\right).$$

Lecz $OS_1 = \frac{2rc}{3s}$ i $OS_2 = \frac{2a}{3}$, zatem

$$\frac{2rc}{3s} \,.\, \frac{sr}{2} = \frac{2a}{3} \,.\, \frac{ac}{2} + OS \,.\left(\frac{sr - ac}{2}\right), \text{ skąd}$$

$$OS = \frac{2(r^2 - a^2)\,c}{3(sr - ac)}.$$

Uwzględniając, że $r^2 - a^2 = \frac{c^2}{4}$, znajdziemy

$$OS = \frac{c^3}{6(sr - ac)}.$$

12) Rozwiązać zadanie poprzednie, gdy kąt $AOB = 60^0$. *Odp.* $OS = \frac{r^3}{2\pi - 3\sqrt{3}}$.

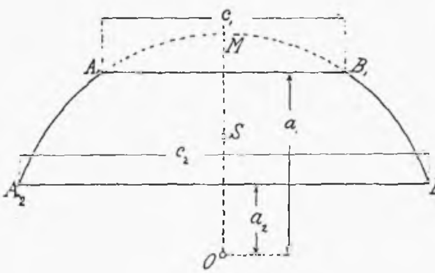

Fig. 26.

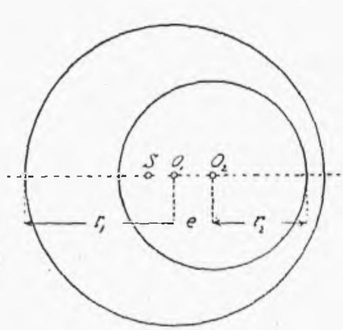

Fig. 27.

13) Wyznaczyć śr. ciężk. strefy kołowej $A_1 B_1 B_2 A_2$ (fig. 26). *Odp.* $OS = \frac{c_2^3 - c_1^3}{6[(s_2 - s_1)r + a_1 c_1 - a_2 c_2)]}$, gdzie s_1 i s_2 oznaczają długości łuków A_1MB_1 i A_2MB_2.

14) Wyznaczyć śr. ciężk. pola, zawartego pomiędzy dwoma okręgami na figurze 27. *Odp.* $O_1S = \frac{er_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$.

15) Wyznaczyć śr. ciężk. pola $A_1M_1B_1B_2M_2A_2$ na fig. 28. *Odp.* $OS = \frac{2c_1(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)}{3s_1(r_1 + r_2)}$, gzie s_1 oznacza długość łuku $A_1M_1B_1$.

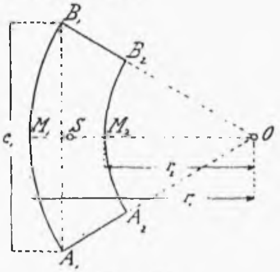

Fig. 28.

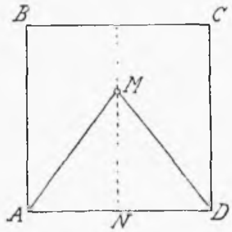

Fig. 29.

16) Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku a (fig. 29); wyznaczyć na ośrodkowej punkt M w taki sposób, aby był on środkiem ciężk. pola figury $ABCDM$.

Odp. $NM = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{2}$.

§ 9. Przeciętna odległość punktów od prostej. Niech będą trzy punkty A, B, C i prosta y (fig. 30). Przeprowadźmy z tych punktów prostopadłe AA_1, BB_1 i CC_1 do prostej y. Punkty przecięcia tych prostopadłych z prostą y, t. j. A_1, B_1 i C_1 nazywamy *rzutami prostokątnymi* lub krócej *rzutami* punktów A, B i C na prostej y.

Również odcinek A_1B_1 nazywamy rzutem odcinka AB. Według § 1 odróżniamy początek odcinka od jego końca. Umówimy się uważać rzut początku odcinka za początek rzutu tego odcinka, a rzut końca za koniec rzutu. W odcinku AB punkt A uważamy za początek, a B — za koniec, skutkiem tego i w rzucie musimy uważać A_1 za początek, a B_1 — za koniec. Tak więc rzutem odcinka AB jest odcinek A_1B_1 (nie zaś B_1A_1), a rzutem odcinka BA jest odcinek B_1A_1.

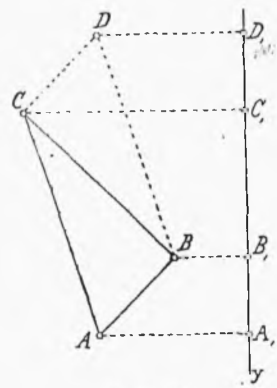

Fig. 30.

Tak samo rzutami odcinków BC i AC są odcinki B_1C_1 i A_1C_1.

Odcinek AC jest wypadkowym odcinków AB i BC, t. j.

$$AC = AB + BC.$$

Również, jak widać z figury, odcinek A_1C_1 jest wypadkowym odcinków A_1B_1 i B_1C_1, t. j.

$$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1.$$

I. Rzut odcinka wypadkowego jest wypadkowym rzutów odcinków składowych.

Mówiliśmy tutaj tylko o dwóch odcinkach składowych, lecz twierdzenie powyższe dotyczy dowolnej ilości odcinków składowych. Tak np. na fig. 30

$$AC = AB + BD + DC$$

i

$$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1D_1 + D_1C_1.$$

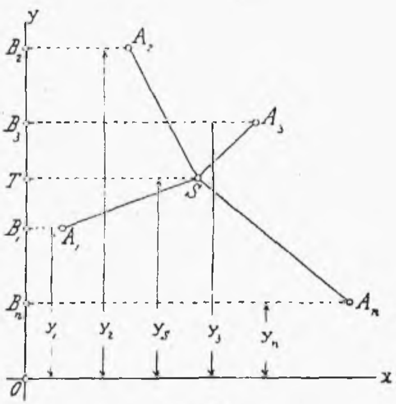

Fig. 31.

Niech będzie grupa, złożona z n punktów, a mianowicie A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$ (fig. 31). Rzutami tych punktów na pewnej prostej y niech będą odpowiednio punkty B_1, B_2, $B_3 \ldots B_n$. Obierzmy jakikolwiek punkt S i wyznaczmy odcinek wypadkowy odcinków

$$SA_1, SA_2, SA_3 \ldots SA_n.$$

Rzut tego odcinka wypadkowego jest na zasadzie twierdzenia poprzedzającego wypadkowym odcinków

$$TB_1, TB_2, TB_3 \ldots . TB_n,$$

gdzie T oznacza rzut punktu S.

Przypuśćmy, że punkt S jest środkiem ciężkości grupy A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$. Wówczas odcinek wypadkowy odcinków SA_1, SA_2, $SA_3 \ldots SA_n$, jak wiemy, $= 0$, a więc i rzut tego odcinka oczywiście musi być $= 0$. Lecz rzut ten jest wypadkowym odcinków TB_1, TB_2, $TB_3 \ldots TB_n$, a zatem

$$TB_1 + TB_2 + TB_3 + \ldots + TB_n = 0.$$

Tak więc odległość punktu T od grupy B_1, B_2, $B_3 \ldots B_n$ jest równa zeru, a stąd wynika, że punkt T jest środkiem ciężkości tej grupy.

II. Rzut środka ciężkości grupy punktów jest środkiem ciężkości rzutów tych punktów.

Obierzmy na prostej y jakikolwiek punkt O. Przeciętna odległość punktu O od punktów grupy $B_1, B_2, B_3 \ldots B_n$, jest równa, jak wiemy, odległości punktu O od środka ciężkości grupy, t. j. od T, czyli

$$\frac{OB_1 + OB_2 + OB_3 + \ldots + OB_n}{n} = OT\,.$$

Przeprowadźmy przez punkt O prostą x, prostopadłą do prostej y, i oznaczmy odległości punktów $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, S, od prostej x odpowiednio literami $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$, y_s. Oczywiście

$$OB_1 = y_1\,,\quad OB_2 = y_2\,,\quad OB_3 = y_3 \ldots\ldots OB_n = y_n\,,\quad OT = y_s,$$

a zatem

$$\frac{y_1 + y_2 + y_2 + \ldots\ldots + y_n}{n} = y_s\,.$$

III. Przeciętna odległość punktów grupy od jakiejkolwiek prostej jest równa odległości środka ciężkości grupy od tejże prostej.

Jeżeli prosta x przechodzi przez środek ciężk. grupy, to wówczas $y_s = 0$, i odległość grupy od tej prostej $= 0$.

§ 10. Pierwsze twierdzenie Guldina. Niech będą w jednej płaszczyźnie odcinek jakiejkolwiek linii A_1A_n i prosta x, nieprzecinająca tego odcinka (fig. 32). Wyobraźmy sobie, że odcinek A_1A_n obraca się około prostej x, jak około osi. Podczas całkowitego obrotu odcinek A_1A_n zatacza pewną powierzchnię, powierzchnię obrotu. Odcinek A_1A_n w położeniu początkowem lub w jednem z następnych nazywa się *południkiem*, a koło, które zatacza jeden z punktów odcinka A_1A_n, — *równoleżnikiem* tej powierzchni. Twierdzenie, które poznaliśmy w § poprzedzającym, pozwala nam w bardzo prosty sposób wyznaczyć powierzchnię obrotu (oznaczymy ją przez P), jeżeli znamy dłu-

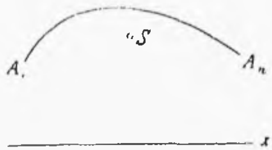

Fig. 32.

gość s odcinka A_1A_n i odległość y_s jego środka ciężk. S od prostej x.

W § 6-tym umówiliśmy się uważać linię za szereg punktów, następujących po sobie w jednakowych odstępach. Niech będzie λ ilość punktów, zawartych w jednym centymetrze linii. Jakkolwiek ta liczba λ jest bardzo wielka, to jednak możemy wykonywać nad nią działania arytmetyczne, jak nad każdą inną. Dwa *cm* jakiejkolwiek linii zawierają 2λ punktów, trzy *cm* — 3λ i t. d. Dany odcinek A_1A_n zawiera oczywiście λs punktów.

Jasną jest rzeczą, że jeden cm^2 powierzchni zawiera λ^2 punktów, a zatem szukana powierzchnia obrotu zawiera $\lambda^2 P$ punktów.

Tę ilość punktów powierzchni można wyznaczyć i w inny sposób. Niech będą $A_1, A_2, A_3 \ldots . A_n$ następujące po sobie bezpośrednio punkty południka A_1A_n. Tych wszystkich punktów jest λs, a zatem $n = \lambda s$. Oznaczmy odpowiednio odległości tych punktów od prostej x przez $y_1, y_2, y_3 \ldots . y_n$. Przez każdy z punktów $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ przechodzi jeden równoleżnik, i te wszystkie równoleżniki właśnie tworzą daną powierzchnię. Ilość punktów powierzchni obrotu jest oczywiście równa sumie ilości punktów równoleżników. Pierwszy równoleżnik zawiera oczywiście $2\pi\lambda y_1$, drugi — $2\pi\lambda y_2$, trzeci — $2\pi\lambda y_3$ i t. d., n—ty — $2\pi\lambda y_n$ punktów, a cała powierzchnia zawiera

$$2\pi\lambda y_1 + 2\pi\lambda y_2 + 2\pi\lambda y_3 + \ldots + 2\pi\lambda y_n = 2\pi\lambda (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)$$

punktów, a zatem

$$\lambda^2 P = 2\pi\lambda (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n) .$$

Lecz według twierdzenia III § poprzedzającego

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n}{n} = y_s$$

lub
$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = ny_s = \lambda s y_s ,$$

a zatem
$$\lambda^2 P = 2\pi\lambda \,.\, \lambda s y_s ,$$

wreszcie
$$P = 2\pi y_s \,.\, s .$$

Powierzchnia obrotu jest równa iloczynowi z obwodu koła, które zatacza środek ciężkości południka, przez długość południka.

Przykłady. 1) Wyznaczyć boczną powierzchnię prostego stożka ściętego. *Odp.* Przypuśćmy, że powierzchnia stożka ściętego powstała skutkiem obrotu odcinka prostego $AB = a$ około prostej x (fig. 33). Szukana powierzchnia $P = 2\pi y_s a$. Lecz $y_s = \frac{R+r}{2}$, a zatem $P = \pi a(R+r)$.

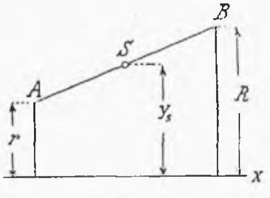

Fig. 33.

2) Wyznaczyć boczną powierzchnię stożka prostego. *Odp.* Zakładając we wzorze $P = \pi a(R+r)$ z przykł. poprzedniego $r = 0$, otrzymamy $P = \pi a R$.

3) Wyznaczyć boczną powierzchnię prostego cylindra. *Odp.* Zakładając we wzorze z przykł. 1 $R = r$, otrzymamy $P = 2\pi a r$.

4) Wyznaczyć powierzchnię, która powstaje skutkiem obrotu połowy obwodu regularnego sześcioboku (fig. 34), którego bok $= a$, około prostej x. *Odp.* Łatwo znajdziemy, że $y_s = \frac{a}{\sqrt{3}}$, a zatem $P = 2\pi a^2 \sqrt{3}$.

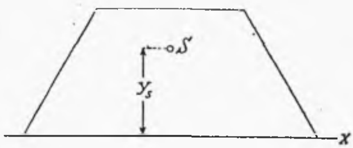

Fig. 34.

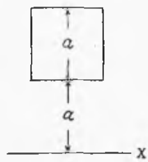

Fig. 35.

5) Wyznaczyć całkowitą powierzchnię pierścienia cylindrycznego który powstaje skutkiem obrotu kwadratu około prostej x (fig. 35). *Odp.* $P = 12\pi a^2$

6) Wyznaczyć powierzchnię bryły, która powstaje skutkiem obrotu regularnego sześcioboku około jednego z boków. *Odp.* $P = 6\pi a^2 \sqrt{3}$, gdzie a oznacza długość boku.

7) Wyznaczyć całkowitą powierzchnię pierścienia kołowego (fig. 36). *Odp.* Pierścień powstaje skutkiem obrotu koła około prostej. $P = 4\pi^2 a r$.

8) Wyznaczyć powierzchnię, która powstaje skutkiem obrotu półokręgu ABC (fig. 36) około prostej x, równoległej do średnicy AC. *Odp.* Odległość środka ciężk. półokręgu ABC od prostej x (według przykładu 1 § 7) $= a + \frac{2r}{\pi}$, a zatem $P = 2\pi r(a\pi + 2r)$.

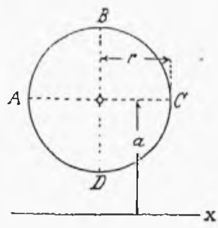

Fig. 36.

9) Wyznaczyć powierzchnię, która powstaje skutkiem obrotu półokręgu ADC (fig. 36) około prostej x, równoległej do średnicy AC. *Odp.* $P = 2\pi r(a\pi - 2r)$.

10) Wyznaczyć powierzchnię kuli. *Odp.* Powierzchnia kuli powstaje skutkiem obrotu półokręgu około średnicy. W tym wypadku $s = \pi r$ a $y_s = \frac{2r}{\pi}$ (przykł. 1 § 7), a zatem $P = 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot \pi r$ lub $P = 4\pi r^2$. Jest to szczególny wypadek powierzchni z przykładu 8.

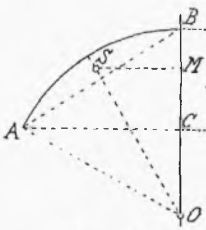

Fig. 37.

11) Wyznaczyć powierzchnię odcinka kulistego. *Odp.* Powierzchnia odcinka powstaje skutkiem obrotu łuku AB około promienia OB (fig. 37). Niech będzie S śr. ciężk. łuku AB, a jego odległość od osi obrotu $SM = y_s$. Szukana powierzchnia $P = 2\pi y_s s$, gdzie s oznacza długość łuku AB. Kąty SOB i BAC są równe, gdyż boki jednego są odpowiednio prostopadłe do boków drugiego. Stąd wynika, że trójkąty prostokątne OSM i ABC są podobne, a zatem $\frac{y_s}{f} = \frac{OS}{c}$. Litera f oznacza tu długość odcinka BC, który nazywa się strzałką odcinka kulistego, $c = AB$, a $OS = \frac{rc}{s}$ (§ 7). Z proporcyi powyższej wypada, że $y_s = \frac{fr}{s}$, a zatem $P = 2\pi fr$.

12) Wyznaczyć powierzchnię odcinka kulistego, gdy kąt $AOB = 60^0$. (fig. 37). *Odp.* $P = \pi r^2$.

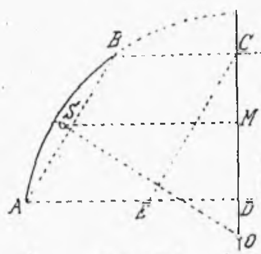

Fig. 38.

13) Wyznaczyć powierzchnię strefy kulistej. *Odp.* Powierzchnia strefy powstaje skutkiem obrotu łuku AB około promienia OC (fig. 38). Załóżmy, że łuk $AB = s$, $SM = y_s$, cięciwa $AB = c$, $CD = h$. Ta ostatnia długość zowie się wysokością strefy. $P = 2\pi y_s s$. Przeprowadźmy przez punkt C równoległą CE do AB. Z figury widać, że kąty OSM i ECD są równe, gdyż boki jednego są odpowiednio prostopadłe do boków drugiego, a zatem trójkąty prostokątne OSM i ECD są podobne Wynika stąd, że $\frac{y_s}{h} = \frac{OS}{c}$; wiemy prócz tego, że $OS = \frac{rc}{s}$, a więc $y_s = \frac{rh}{s}$ i $P = 2\pi rh$. Powierzchnia odcinka jest szczególnym wypadkiem powierzchni strefy, gdy $BC = 0$; wówczas $h = f$.

§ 11. Drugie twierdzenie Guldina. Niech będą w jednej płaszczyźnie jakakolwiek figura zamknięta F (fig. 39) i prosta x, nie przecinająca obwodu tej figury. Wyobraźmy sobie, że figura F obraca się około prostej x, jak około osi. Skutkiem tego obrotu powstaje bryła obrotu. Objętość tej ostatniej V możemy wyznaczyć, jeżeli znamy pole p figury F i odległość y_s środka ciężkości tego pola od prostej x.

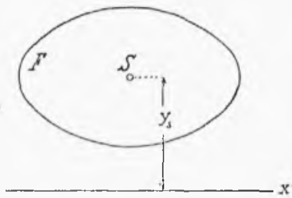

Fig. 39.

Niech będzie λ, jak w § poprzedzającym, ilość punktów, zawarta w jednym *cm* linii, wówczas jeden cm^2 zawiera λ^2 a jeden cm^3 — λ^3 punktów; pole figury F zawiera $\lambda^2 p$, a bryła obrotu $\lambda^3 V$ punktów.

Oznaczmy literami $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ w jakimkolwiek porządku wszystkie punkty pola figury F, a ich odległości od prostej x — literami $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$. Oczywiście $n = \lambda^2 p$. Znajdziemy łatwo, że bryła obrotu zawiera

$$2\pi\lambda y_1 + 2\pi\lambda y_2 + 2\pi\lambda y_3 + \ldots + 2\pi\lambda y_n = 2\pi\lambda(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)$$

punktów, a zatem

$$\lambda^3 V = 2\pi\lambda(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n).$$

Lecz $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = ny_s = \lambda^2 p y_s$, przeto

$$\lambda^3 V = 2\pi\lambda \,.\, \lambda^2 p y_s$$

wreszcie

$$V = 2\pi y_s p\,.$$

Objętość bryły obrotu jest równa iloczynowi z obwodu koła, które zatacza środek ciężkości pola figury tworzącej, przez pole tej figury.

Przykłady. 1) Wyznaczyć objętość pierścienia cylindrycznego, który powstaje skutkiem obrotu prostokąta około prostej x, równoległej do jednego z boków (fig. 40). *Odp.* $V = \pi(r_1^2 - r_2^2)h$. Jeżeli $r_2 = 0$, to powstała bryła jest cylindrem, i wówczas $V = \pi r_1^2 h$.

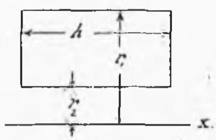

Fig. 40.

2) Wyznaczyć objętość prostego stożka. *Odp.* Stożek powstaje skutkiem obrotu

prostokątnego trójkąta około przyprostokątnej x (fig. 41). Z figury widać, że $y_s = \frac{r}{3}$, a zatem $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

3) Wyznaczyć objętość bryły, która powstaje skutkiem obrotu prostokątnego trójkąta ABC około prostej x, równoległej do przyprostokątnej AC (fig. 42). *Odp.* $V = \frac{\pi(r_1 - r_2)(r_1 + 2r_2)h}{3}$.

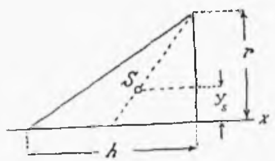

Fig. 41.

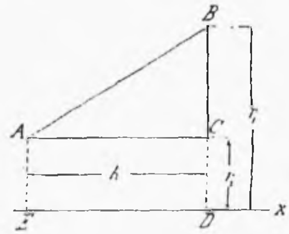

Fig. 42.

4) Wyznaczyć objętość prostego stożka ściętego. *Odp.* Stożek powstaje skutkiem obrotu trapezu prostokątnego $ABDE$ (fig. 42) około boku DE. Objętość jego składa się z dwóch części: objętości bryły, która powstaje skutkiem obrotu trójkąta ABC około prostej DE, i objętości cylindra, utworzonego przez obrót prostokąta $ACDE$ około DE. Dodając te objętości, otrzymamy $V = \frac{\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)h}{3}$.

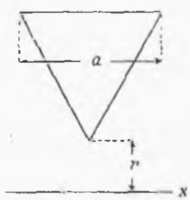

Fig. 43.

4) Trójkąt równoboczny obraca się około prostej x, równoległej do jednego z boków (fig. 43). Wyznaczyć objętość powstałej bryły. *Odp.* $V = \frac{\pi a^2(a + r\sqrt{3})}{2}$.

5) Wyznaczyć objętość pierścienia kołowego (fig. 36). *Odp.* $V = 2\pi^2 r^2 a$.

6) Wyznaczyć objętości V_1 i V_2, które powstają odpowiednio skutkiem obrotu półkol ABC i ADC (fig. 36) około prostej x, równoległej do średnicy AC (por. przykł. 10 § 8). *Odp.* $V_1 = \frac{\pi r^2(3\pi a + 4r)}{3}$, $V_2 = \frac{\pi r^2(3\pi a - 4r)}{3}$.

7) Wyznaczyć objętość kuli. *Odp.* Kula powstaje skutkiem obrotu półkola około średnicy. W tym razie $y_s = \frac{4r}{3\pi}$ (§ 8 przykł. 10), gdzie r oznacza promień kuli. $V = \frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\pi r^3}{3}$.

8) Wyznaczyć objętość wycinka kulistego. *Odp.* Uważamy, że wycinek kulisty powstał skutkiem obrotu wycinka kołowego ABO (fig. 44) około promienia OB. Objętość jego $V=\frac{rs}{2}\cdot 2\pi y_s$, gdzie s oznacza długość łuku AB, a $y_s = SM$. Z podobieństwa trójkątów OSM i ABC wynika, że $\frac{y_s}{f}=\frac{OS}{c}$, a $OS=\frac{2rc}{3s}$ (§ 8). Uwzględniając te związki, znajdziemy, że $y_s=\frac{2rf}{3s}$ i $V=\frac{2\pi r^2 f}{3}$.

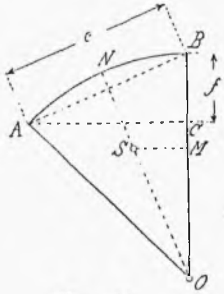

Fig. 44.

9) Wyznaczyć objętość wycinka kulistego, gdy kąt $AOB = 60^0$ (fig. 44). *Odp.* $V=\frac{\pi r^3}{3}$.

10) Wyznaczyć objętość odcinka kulistego. *Odp.* Odcinek powstaje skutkiem obrotu figury $ANBC$ (fig. 44) około promienia OB. Objętość jego V znajdziemy, odjąwszy od objętości wycinka, wyznaczonej w przykładzie poprzedzającym, objętość V_1 stożka, który powstaje skutkiem obrotu trójkąta ACO około promienia OB. $V_1=\frac{\pi AC^2 \cdot OC}{3}$, lecz $AC^2 = f(2r-f)$, a $OC = r - f$, a zatem $V_1=\frac{\pi f(2r-f)(r-f)}{3}$ i $V=\frac{2\pi r^2 f}{3}-$

$$-\frac{\pi f(2r-f)(r-f)}{3}=\frac{\pi f^2(3r-f)}{3}.$$

SPIS RZECZY.