



# SPIS RZECZY.

PRZEDMOWA . . . . .	<i>Str.</i> XIII
Errata . . . . .	XVI

## ROZDZIAŁ I. POJĘCIA WSTĘPNE. . . . . *str.* 1 — 6

1. Szereg punktów. — 2. Zwykle wyznaczanie położenia punktu na prostej. — 3. Wyznaczenie położenia punktu na prostej przy pomocy stosunku jego odległości od dwu stałych na nią punktów. — 4. Należy przyjąć na prostej jeden punkt w nieskończoności. — 5. Liczba oderwana, którą przedstawia stosunek odległości punktu na prostej od dwu na niej punktów stałych, dokładnie określa położenie tego punktu.

6. Proste do siebie równoległe przechodzą przez ten sam punkt w nieskończoności. — 7. Na płaszczyźnie należy przyjąć jedną prostą w nieskończoności.

## ROZDZIAŁ II. SZEREG PUNKTÓW HARMONICZNY I PĘK PROMIENI HARMONICZNY. CZWOROBOK ZUPEŁNY I CZWOROKĄT ZUPEŁNY . . . . . *str.* 7 — 27

8. Podział danego odcinka wewnątrz i zewnątrz w tym samym stosunku. — 9. Jest to t. z. podział harmoniczny odcinka. — 10. Dwie pary punktów harmonicznie z sobą wzajemnie sprzężone. — 11. Symbol szeregu punktów harmonicznego. — 12. Zadanie: dla trzech punktów znaleźć czwarty harmoniczny. — 13. Położenie punktów jednej pary względem punktów drugiej. — 14. Gdy jeden punkt każdej z dwu par punktów, harmonicznie sprzężonych, pozostaje niezmiennym, to, wskutek przesunięcia się jednego z pozostałych punktów, drugi z nich przesuwa się w tymże kierunku. — 15. Przy danym szeregu harmonicznym punktów, średnia harmoniczna dwu odcinków. — 16. Przy danym szeregu harmonicznym punktów, średnia geometryczna dwu odcinków. — 17. Inne rozwiązanie zadania us. 12-go. — 18. Dla danych dwu punktów jednej pary i punktu drugiej można znaleźć jeden tylko punkt szeregu harmonicznego. — 19. Przypadek, kiedy punkt jednej pary jest w środku odcinka między punktami drugiej.

20. Pęk promieni. — 21. Pęk promieni harmoniczny; dwie pary. — 22. Położenie promieni jednej pary względem promieni drugiej. — 23. Poprzeczna przecina promienie pęku harmonicznego w punktach, tworzących szereg harmoniczny. — 24. Poprzeczna równoległa do jednego z promieni pęku harmonicznego. — 25. Zadanie: dla trzech promieni znaleźć czwarty harmoniczny. Dla danych dwu promieni jednej pary i promienia drugiej można znaleźć jeden tylko promień pęku harmonicznego. — 26. Szczególny pęk harmoniczny promieni do siebie równoległych. — 27. Szczególny pęk promieni: dwa ramiona kąta, jego dwusieczna i dwusieczna kąta przyległego. Inne

rozwiązanie zadania us. 25-go. — 28. Własność czterech punktów na kole, przez które przechodzą promienie pęku harmonicznego, mającego swój wierzchołek na tymże kole.

29. Rozwiązanie zadań us. 12-go i 25-go zapomocą linijału. — 30. Znaczenie własności punktów i prostych na figurze, służącej do takiego rozwiązania tych zadań. — 31. Czworobok zupełny i czworokąt zupełny. — 32. Ich własności harmoniczne.

33. Ćwiczenia.

ROZDZIAŁ III. POKREWIEŃSTWO HARMONICZNE. KOŁO HARMONICZNIE POKREWNE Z SAMYM SOBĄ. PRZECIĘCIE STOŻKOWE WOGÓLE, JAKO LINIJA HARMONICZNIE POKREWNA Z KOŁEM . . . . . str. 28 — 42

34. Związek między punktami i między prostymi na płaszczyźnie względem stałej prostej (osi) i stałego punktu (środka), zwany pokrewieństwem harmonicznym. — 35. Własności punktów harm. pokrewnych i prostych harm. pokrewnych. Linija średnia pokrewieństwa harm. — 36. Powstawanie figury harm. pokrewniej z daną.

37. Gdy punkty końcowe średnicy koła prostopadłej do osi pokrewieństwa są z sobą pokrewne, to punkty końcowe każdej cięciwy, przechodzącej przez środek pokrewieństwa, są z sobą pokrewne. — 38. Uogólnienie tej własności koła. — 39. Przypadek, kiedy koło jest harm. pokrewne z samym sobą. — 40. Gdy środek pokrewieństwa jest w punkcie zewnątrz koła, z samym sobą pokrewnego, to osią jest odpowiadająca temu punktowi cięciwa styczności.

41. Ćwiczenia.

42. Gdy środek pokrewieństwa jest w środku koła, to z tym kołem jest harmonicznie pokrewne miejsce takiego punktu, iż stosunek jego odległości od środka i od linii średniej jest stały. To miejsce geometryczne punktu jest linią krzywą, ciągłą, zamkniętą, siebie samą nie przecinającą. — 43. Nawzajem, linią harm. pokrewną z tym miejscem geometrycznym punktu, przy szczególnym położeniu osi i środka pokrewieństwa, jest koło. — 44. To miejsce geometryczne punktu nazywa się przecięciem stożkowym. Jego ognisko i kierownica. Promień wodzący. — 45. Zadanie: mając ognisko i kierownicę przecięcia stożkowego nakreślić do niego styczną we wskazanym punkcie. — 46. Liczba, którą przedstawia stosunek odległości punktu na przecięciu stożkowym od ogniska i od kierownicy, może być mniejsza od 1, równa 1, lub większa od 1. — 47. Przecięcie stożkowe jest krzywą rzędu 2-go i klasy 2-jej. Obszar zewnętrzny i wewnętrzny przecięcia stożkowego. — 48. Przecięcie stożkowe jest linią symetryczną względem prostopadłej z ogniska na kierownicę. — 49. Przecięcie stożkowe harm. pokrewne z kołem przechodzi przez punkty końcowe średnicy koła, równoległej do kierownicy. — 50. Parametr przecięcia stożkowego. Stosunek odległości punktu na przecięciu stożkowym od ogniska i od kierownicy jest równy stosunkowi parametru do odległości ogniska od kierownicy.

ROZDZIAŁ IV. KSZTAŁT ODDZIELNYCH PRZECIĘĆ STOŻKOWYCH. str. 43 — 64

51. Przypadek, kiedy przecięcie stożkowe jest elipsą. — 52. Elipsa znajduje się po tej samej stronie kierownicy, co ognisko. Wymiary elipsy są skończone. — 53. Wyznaczenie punktów na elipsie. — 54. Punkty na elipsie najdalszy i najbliższy ogniska. — 55. Wierzchołki główne i oś wielka elipsy.

Elipsa jest linią symetryczną względem osi wielkiej. Styczne w wierzchołkach głównych. — 56. Elipsa jest linią symetryczną względem środka osi wielkiej. Środek i średnice elipsy. — 57. Oś mała elipsy. Elipsa jest linią symetryczną względem osi małej. Styczne w punktach końcowych osi małej. — 58. Elipsa zwraca swą stronę wklęsłą ku środkowi. — 59. Elipsa posiada dwa ogniska i dwie odpowiadające im kierownice. — 60. Suma odległości punktu na elipsie od ognisk jest stała i równa długości osi wielkiej. — 61. Odległość ogniska elipsy od środka. Spłaszczenie elipsy. — 62. Koło jako przypadek szczególny elipsy.

63. Ćwiczenia.

64. Przypadek, kiedy przecięcie stożkowe jest parabolą. — 65. Parabola znajduje się po tej samej stronie kierownicy, co ognisko. Asymptota. Parabola posiada asymptotę, prostą w nieskończoności. — 66. Wyznaczenie punktów na paraboli. — 67. Punkt na paraboli najbliższy ogniska i kierunek, w jakim się znajduje punkt w nieskończoności na paraboli. — 68. Wierzchołek główny i oś paraboli. Parabola jest linią symetryczną względem osi. Styczna w wierzchołku głównym. — 69. Odległość wierzchołka głównego paraboli od ogniska równa się połowie parametru. — 70. Środkiem paraboli jest punkt w nieskończoności. Średnice paraboli. — 71. Parabola zwraca swą stronę wklęsłą ku osi.

72. Ćwiczenia.

72. Przypadek, kiedy przecięcie stożkowe jest hiperbolą. — 74. Hiperbola znajduje się po obu stronach kierownicy. Prosta w nieskończoności ma dwa różne punkty wspólne z hiperbolą. — 75. Dwie asymptoty hiperboli. — 76. Wyznaczenie punktów na hiperboli. — 77. Hiperbola znajduje się w otworach dwu kątów wierzchołkiem przeciwnych, utworzonych przez asymptoty. — 78. Dwie gałęzi hiperboli. — 79. Jako cięciwę hiperboli, łączącą punkty na różnych gałęziach hiperboli, przyjmuje się odcinek prostej, przez te punkty przechodzącej, znajdujący się w obszarze zewnętrznym hiperboli. — 80. Punkty na różnych gałęziach hiperboli najbliższe ogniska. — 81. Wierzchołki główne i oś poprzeczna hiperboli. Hiperbola jest linią symetryczną względem osi poprzecznej. Styczne w wierzchołkach głównych. — 82. Hiperbola jest linią symetryczną względem środka osi poprzecznej. Środek i średnice hiperboli. — 83. Asymptoty hiperboli przechodzą przez środek. Asymptoty hiperboli można uważać jako średnice. — 84. Hiperbola zwraca swą stronę wypukłą ku środkowi. — 85. Przypadek szczególny, kiedy asymptoty hiperboli są do siebie prostopadłe: hiperbola równoboczna. — 86. Hiperbola jest linią symetryczną względem prostopadłej w środku do osi poprzecznej. Oś poprzeczna i ta prostopadła są dwusiecznymi kątów między asymptotami. — 87. Hiperbola posiada dwa ogniska i dwie odpowiadające im kierownice. — 88. Różnica odległości punktu na hiperboli od ognisk jest stała i równa długości osi poprzecznej. — 89. Spodki prostopadłych z ognisk hiperboli na asymptoty są taksamo oddalone od środka, jak wierzchołki główne. — 90. Punkty, w których styczne w wierzchołkach głównych do hiperboli spotykają asymptoty, są taksamo oddalone od środka, jak ogniska. — 91. Oś sprzężona hiperboli. — 92. Prosta, łącząca wierzchołek główny hiperboli z punktem końcowym osi sprzężonej, jest równoległa do asymptoty. — 93. Odległość ogniska hiperboli od środka.

94. Ćwiczenia.

ROZDZIAŁ V. BIEGUN I BIEGUNOWA. OGNISKA I KIEROWNICE. STYCZNE, OSI W ELIPSIE I W HIPERBOLI. MIMOŚRÓD. . . str. 65 — 82

95. Biegun prostej i biegunowa punktu względem koła. Cięciwa jest przez jakikolwiek punkt na niej i przez jego biegunową podzielona harmonicznie. — 96. Biegunowa punktu na kole i biegun stycznej do koła. Biegunowa środka i biegun średnicy koła. Biegunowa punktu w nieskończoności i biegun prostej w nieskończoności względem koła. — 97. Biegunowa punktu zewnątrz koła i biegun cięciwy koła. — 98. Biegun prostej i biegunowa punktu względem przecięcia stożkowego. Cięciwa jest przez jakikolwiek punkt na niej i przez jego biegunową podzielona harmonicznie. Przecięcie stożkowe harmonicznie pokrewne z samym sobą. — 99. Punkt na przecięciu stożkowym i styczna w tym punkcie są biegunem i biegunową. Przecięcia stożkowe mają środek. Prosta w nieskończoności i środek, oraz średnica i punkt w nieskończoności są biegunową i biegunem. — 100. Punkt zewnątrz i odpowiadająca mu cięciwa styczności są biegunem i biegunową. Styczne w punktach końcowych średnicy są równoległe. Kierunek, w jakim się znajduje biegun średnicy.

101. Ognisko i odpowiadająca mu kierownica są biegunem i biegunową. — 102. Bieguny prostych, przechodzących przez ognisko, i biegunowe punktów, leżących na kierownicy. — 103. Kąt między prostymi, łączącymi ognisko z punktami styczności dwu stycznych. — 104. Punkt przecięcia się stycznych z kierownicą jest biegunem prostej, łączącej punkt styczności z ogniskiem. [Wynikająca stąd własność ogólna przecięcia stożkowego.] Kręślenie stycznej w punkcie wskazanym. — 105. Kąty między prostymi, łączącymi punkt styczności stycznej do elipsy lub do hiperboli z ogniskiem. Kręślenie stycznej w punkcie wskazanym. — 106. Kąty między prostymi, wychodzącymi z punktu styczności stycznej do paraboli, jedną do ogniska, drugą równoległe do osi. Trzy odcinki między ogniskiem a: punktem styczności, punktem przecięcia się osi ze styczną, punktem przecięcia się osi z normalną. Dwa odcinki osi między wierzchołkiem głównym a: punktem przecięcia się stycznej, spodkiem prostopadłej z punktu styczności. Kręślenie stycznej w punkcie wskazanym. Styczne, spotykające się na kierownicy, tworzą kąt prosty. — 107. Spodki prostopadłych z ognisk elipsy lub hiperboli na styczne. Kręślenie stycznej z punktu danego zewnątrz, i stycznej, równoległej do prostej danej. — 108. Spodki prostopadłych z ogniska paraboli na styczne. Kręślenie stycznej z punktu danego zewnątrz, i stycznej, równoległej do prostej danej. — 109. Kąty między dwiema stycznymi do elipsy lub do hiperboli a prostymi, łączącymi punkt ich przecięcia się z ogniskami. — 110. Kąty między stycznymi do paraboli a prostymi, wychodzącymi z punktu ich przecięcia się, jedną do ogniska, drugą równoległe do osi. — 111. Kąt, pod którym z ogniska jest widoczny odcinek stycznej, zawarty między punktami przecięcia się jej z dwiema stycznymi stałymi.

112. Połowa osi małej w elipsie, a sprzężonej w hiperboli jest średnią geometryczną odległości ognisk od stycznej i średnią geometryczną odległości jednego z ognisk od wierzchołków głównych. — 113. Związek między parametrem elipsy i hiperboli a długościami ich osi. — 114. Inne wyrażenie liczby, okręślającej, według us. 44-go i 50-go, oddzielne elipsy i hiperbole. Mimośród elipsy i hiperboli. Mimośród paraboli. — 115. Przecięcia stożkowe podobne. Kąt między asymptotami w hiperbolach podobnych.

116. Ćwiczenia.

ROZDZIAŁ VI. BIEGUNOWE PUNKTÓW NA PROSTÉJ I BIEGUNY PROSTYCH, PRZECHODZĄCYCH PRZEZ TEN SAM PUNKT. CZWOROKĄT WPISANY I CZWOROBOK OPISANY. PUNKTY SPRZEŻONE I PROSTE SPRZEŻZONE. ŚREDNICE SPRZEŻONE ELIPSY I HIPERBOLI. . . . . str. 83 — 103

117. Biegunowa punktu na prostéj przechodzi przez jéj biegun; biegun prostéj, przechodzącej przez pewien punkt leży na jego biegunowéj. — 118. Biegunowa punktu przecięcia się dwu prostych; biegun prostéj, łączącej dwa punkty. Bieguny równoległych do asymptoty hiperboli leżą na téj asymptocie. — 119. Biegun prostéj, obracającej się około punktu; biegunowa punktu, poruszającego się po prostéj. — 120. Prosta, przechodząca przez punkt przecięcia się dwu stycznych, i jéj biegun oddzielają te styczne harmonicznie. — 121. Odcinek stycznój do hiperboli, zawarty między asymptotami.

122. Punkt przekątny czworokąta zupełnego wpisanego jest biegunem prostéj, łączącej pozostałe punkty przekątne; przekątna czworoboku zupełnego opisanego jest biegunową punktu przecięcia się pozostałych przekątnych. — 123. Szczególne własności harmoniczne czworokąta zupełnego wpisanego i czworoboku zupełnego opisanego. — 124. Biegunowe punktów szeregu harmonicznego tworzą pęk harmoniczny; bieguny promieni pęku harmonicznego tworzą szereg harmoniczny. — 125. Własności czterech stycznych do koła, które przecinają inną styczną do tegoż koła w punktach, tworzących szereg harmoniczny.

126. Punkty sprzężone i proste sprzężone względem przecięcia stożkowego. — 127. Trójka punktów sprzężonych i trójka prostych sprzężonych względem przecięcia stożkowego. Trójkąt biegunowy względem przecięcia stożkowego; dwa jego boki przecinają a trzeci nie spotyka przecięcia stożkowego. — 128. Styczne i cięciwy sprzężone ze średnicą. Cięciwy sprzężone ze średnicą są przez nią podzielone na połowy. Wyznaczenie środka przecięcia stożkowego. — 129. Króślenie stycznój, równoległej do prostéj danéj. Ilość stycznych do przecięcia stożkowego, równoległych do prostéj danéj. — 130. Para średnic sprzężonych elipsy lub hiperboli. Każda jest miejscem środków cięciw, równoległych do drugiejj. Króślenie stycznój we wskazanym punkcie. Osi główne przedstawiają parę średnic sprzężonych. — 131. Dwie średnice sprzężone hiperboli i asymptoty przedstawiają pęk harmoniczny. Jedna z dwu średnic sprzężonych hiperboli przecina ją, a druga jéj nie spotyka. Każda asymptota hiperboli przedstawia parę średnic sprzężonych. Asymptoty hip. równobocznej są dwusiecznymi kątów między średnicami sprzężonymi. — 132. Odcinki prostéj między hiperbolą i asymptotami są równe. — 133. Cięciwy dopełniające się elipsy lub hiperboli. — 134. Przekątne równoległoboku, opisanego na elipsie lub hiperboli, mają kierunek średnic sprzężonych. Boki równoległoboku wpisanego są równoległe do średnic sprzężonych, a jego przekątne są średnicami. — 135. Suma kątów, pod jakimi z obu ognisk hiperboli jest widoczny odcinek stycznój między asymptotami stanowi dwa kąty proste. Odległość środka od ogniska jest średnią geometryczną odległości środka od punktów przecięcia się stycznój z asymptotami. Pole trójkąta między styczną a asymptotami jest stałe. — 136. Równoległobok na średnicach sprzężonych hiperboli jest równoważny prostokątowi na osiach głównych; jego połową jest pole równoległoboku, którego przekątne są średnicami sprzężonymi hiperboli. — 137. Pole równoległoboku, którego przekątne są średnicami sprzężo-

nymi elipsy, jest równe połowie pola prostokąta na osiach głównych. Równoległobok na średnicach sprzężonych elipsy jest równoważny prostokątowi na osiach głównych.

138. Ćwiczenia.

ROZDZIAŁ VII. ŚRODKI PODOBIENSTWA DWU KÓŁ I OSI PODOBIENSTWA TRZECH KÓŁ. TWIERDZENIA PASCAL'A I BRIANCHON'A DLA KOŁA I DLA PRZECIĘCIA STOŻKOWEGO. . . . . str. 104 — 115

139. Środki podobieństwa dwu kół, wewnętrzny i zewnętrzny. — 140. Osi podobieństwa trzech kół. Sześć środków podobieństwa każdego dwu z trzech kół leżą po trzy na czterech prostych. — 141. Przypadek, kiedy z trzech kół jedno jest jednocześnie styczne do obu pozostałych. — 142. Twierdzenie Pascal'a dla koła. — 143. Twierdzenie Brianchon'a dla koła.

144. Twierdzenia Pascal'a i Brianchon'a dla przecięcia stożkowego. — 145. Pięć punktów lub pięć stycznych wyznacza przecięcie stożkowe. — 146. Przypadki szczególne.

147. Ćwiczenia. (Wskazówki: do 5-go: wysokości trójkąta, opisanego na paraboli, przecinają się z sobą na kierownicy; do 6-go: hiperbola równoboczna przechodzi przez punkt przecięcia się z sobą wysokości trójkąta, w nią wpisanego.)

ROZDZIAŁ VIII. POWSTAWANIE ORGANICZNE PRZECIĘCIA STOŻKOWEGO. ZASADA DWOISTOŚCI. . . . . str. 116 — 124

148. Wierzchołek pęku harmonicznego promieni, przechodzących przez punkty stałe, opisuje przecięcie stożkowe; podstawa szeregu harmonicznego punktów przecięcia się jej z prostymi stałymi dotyka przecięcia stożkowego.

149. Linija, harmonicznie pokrewna z przecięciem stożkowym, jest przecięciem stożkowym. — 150. Przykład: linije harmonicznie pokrewne z elipsą przy szczególnym położeniu środka i osi pokrewieństwa. Hiperbole sprzężone.

151. Dwie krzywe biegunowo wzajemne względem przecięcia stożkowego. — 152. Biegunowo wzajemna z przecięciem stożkowym względem przecięcia stożkowego jest przecięciem stożkowym. — 153. Przykład: biegunowo wzajemne z kołem względem koła.

154. Zasada dwoistości.

---

DODATEK.

Płaszczyzna przecina stożek kołowy prosty według linii, która jest miejscem geometrycznym takiego punktu, iż stosunek jego odległości od stałego punktu i od stałej prostej jest stały . . . . . str. 125 — 131

---