Z. SUMISZEWSKI

R Ó W N A N I A   R Ó Ż N I C Z K O W E   Z W Y C Z A J N E

Zarys całkowania równań różniczkowych

/Uzupełnione wykłady w Państwowej Wyższej Szkole Budowy Maszyn i Elektrotechniki im. H.Wawelberga i S.Rotwanda w Warszawie/

W a r s z a w a

1 9 3 3 r.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE.

ROZDZIAŁ I. OKREŚLENIA I KLASYFIKACJA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH.

§ 1. Określenie równania różniczkowego. Całka równania. Całka ogólna i całki szczególne. Podział równań różniczkowych. Równania zwyczajne. Równania o pochodnych cząstkowych. Rząd i stopień równania różniczkowego. Liniowe równania różniczkowe. Interpretacja geometryczna.

W rachunku całkowym, mając pochodną funkcji, wyznaczaliśmy funkcję pierwotną tej pochodnej. Obecnie mamy do rozwiązania zadanie bardziej ogólne.

Wyobraźmy sobie, że y jest funkcją argumentu x, a y'; y''; y'''; i t.d. są pochodne tej funkcji 1-go, 2-go i dalszych rzędów. Poza tym wyobraźmy sobie, że funkcja y i jej pochodne są nam nieznane, natomiast jest znana zależność pomiędzy nimi, wyrażona przez równanie, zawierające: x, y, y'; y''; i t.d.

Otóż, jak z dalszych rozważań będzie wynikało, posługując się takim równaniem można wyznaczyć samą funkcję y.

Równanie, zawierające x; y; y'; y''; .....nazywamy równaniem różniczkowym, a wyznaczanie funkcji y z tego równania całkowaniem równania różniczkowego.

Funkcję y nazywamy całką równania różniczkowego. Funkcja ta, wspólnie ze swymi pochodnymi, winna zadość czynić danemu równaniu różniczkowemu, a więc po podstawieniu do równania zamienia go na tożsamość.

Przykład. Sprawdzić, że funkcja:

$$y = (C_1 + C_2x) \cdot e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$$

jest całką równania różniczkowego:

$$y'' - 2.k.y' + k^2.y = e^x$$

Sprawdzenie.

$$y' = C_2.e^{kx} + k/C_1+C_2 x/e^{kx} + \frac{e^x}{/k-1/^2}$$

$$y''= 2kC_2.e^{kx} + k^2 /C_1+C_2x/.e^{kx} + \frac{e^x}{/k-1/^2}$$

Podstawiając znalezione wartości $\underline{y'}$ i $\underline{y''}$ do danego równania różniczkowego, otrzymamy tożsamość.

Całka zadość czyniąca danemu równaniu różniczkowemu nosi nazwę całki ogólnej. Zawiera ona stałą dowolną $\underline{C}$ i ma nieskończenie dużo poszczególnych wartości.

Nadając stałej dowolnej $\underline{C}$ wartości szczególne, otrzymamy rozwiązania szczególne, czyli tak zwane całki szczególne.

Każdą z całek szczególnych, możemy zawsze otrzymać z całki ogólnej, jednak odwrotnie, tylko w niektórych wypadkach otrzymamy całkę ogólną z całki szczególnej.

Uwaga: W interpretacji geometrycznej całka ogólna określa całą rodzinę krzywych, zależną od zmiennego parametru $\underline{C}$, a całki szczególne określają poszczególne krzywe, należące do danej rodziny.

Przykład: Znaleźć krzywą, której podstyczna ma wartość stałą $\underline{a}$.

Rozwiązanie: Z geometrii analitycznej mamy wzór:

$$\text{podstyczna} = y.\frac{dx}{dy}$$

stąd równanie różniczkowe:

$$y\frac{dx}{dy} = a \qquad \text{albo} \qquad a.\frac{dy}{y} = dx$$

Całkujemy obie strony równania:

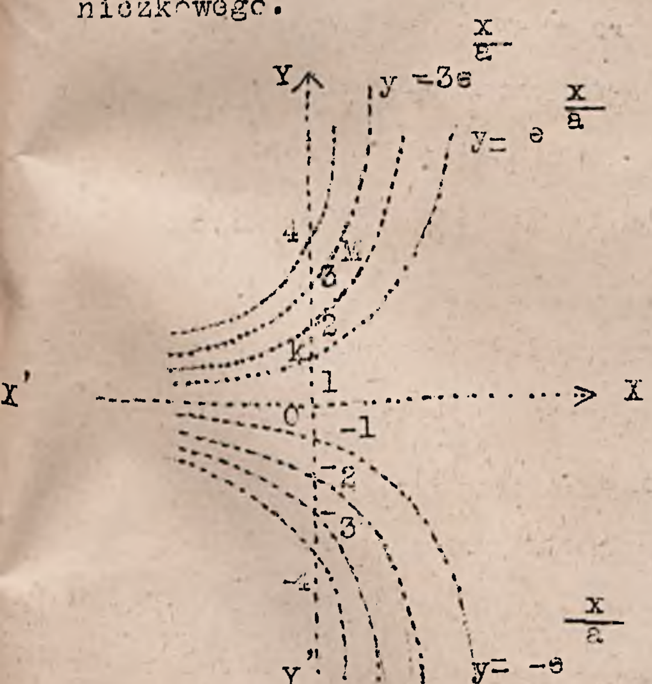
$$a.\int\frac{dy}{y} = \int dx \qquad \text{albo} \qquad a.\ln y = x + C$$

Stałą dowolną C dogodniej jest przedstawić pod postacią logarytmu t.j. zamiast C napisać lnC.

$$a.\ln y = x + \ln C \;; \qquad a.\ln \frac{y}{C} = x.\ln e$$

$$\frac{y}{C} = e^{\frac{x}{a}} \;; \qquad y = C \,.\, e^{\frac{x}{a}}$$

C jest w tym wzorze dowolną stałą liczbą, a więc otrzymana wartość y jest całką ogólną danego równania różniczkowego.



W interpretacji geometrycznej y wyznacza całą rodzinę krzywych, a otrzymany wzór odpowiada każdej z tych krzywych.

Jeżeli z danej rodziny krzywych wybierzemy jakąś poszczególną krzywą, naprzykład przechodzącą przez punkt k /0;1/, albo przez punkt M/0;3/, to otrzymamy C = 1 albo C= 3 i odpowiednie całki szczególne:

$$y = e^{\frac{x}{a}} \quad \text{albo} \quad y = 3.\, e^{\frac{x}{a}} ,$$

którym odpowiadają poszczególne krzywe, należące do tej rodziny.

Oprócz całek ogólnych i szczególnych są jeszcze tak zwane całki osobliwe. Całki osobliwej nie możemy otrzymać z całki ogólnej przez nadanie C wartości szczególnej.

Równania różniczkowe bywają różne. Zajmiemy się obecnie ich podziałem.

Dzielimy równania różniczkowe na dwie zasadnicze grupy.

I. Równania różniczkowe zwyczajne.

II. Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych.

I. Jeżeli szukana funkcja pierwotna y jest funkcją jednego argumentu, równanie różniczkowe, zawierające funkcję, jej pochodne i argument nazywamy zwyczajnym.

Jeżeli szukanych jest kilka funkcji jednego wspólnego argumentu, to dla ich wyznaczenia powinniśmy mieć tych równań tyle, ile mamy szukanych funkcji. Dane równania tworzą układ równań różniczkowych.

II. Jeżeli szukana funkcja pierwotna u jest funkcją kilku argumentów, równanie różniczkowe, zawierające funkcję, argumenty i cząstkowe pochodne tej funkcji, nazywamy równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych.

Poza tym równania różniczkowe mogą być różnych rzędów i różnych stopni.

Rząd równania różniczkowego jest taki, jaki jest najwyższy rząd, zawartej w równaniu pochodnej. A więc naprzykład równanie:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2.\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

jest zwyczajnym równaniem różniczkowym 3-go rzędu; a równanie:

$$x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2 . \frac{\partial u}{\partial x}$$

równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych 2-go rzędu.

Stopień równania różniczkowego jest taki, jaki jest najwyższy stopień, zawartej w nim pochodnej po sprowadzeniu równania do postaci całkowitej i wymiernej.

Równania różniczkowe pierwszego stopnia, względem zmiennej y i jej pochodnych niezależnie od rzędu tych ostatnich nazywamy liniowymi.

Interpretacja geometryczna równań różniczkowych ściśle jest związana z rzędem tych równań. A więc:

I. Całka równania różniczkowego 1-go rzędu /równanie zawiera pochodne tylko 1-go rzędu/ wyznacza krzywe, a samo równanie dotyczy elementów, związanych z kierunkiem i położeniem stycznych do tych krzywych.

II. Całka równania różniczkowego 2-go rzędu wyznacza krzywe, a samo równanie dotyczy krzywizny i elementów, związanych z promieniem krzywizny tych krzywych.

§.2. Ćwiczenia.

Sprawdzić rozwiązania następujących równań różniczkowych:

1.Dane jest równanie różniczkowe: $x \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = -3\frac{d^2y}{dx^2}$

i jego rozwiązanie: $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3$

2.Dane jest równanie różniczkowe: $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' - x \cdot \ln x + 2y = 0$

i jego rozwiązanie: $y = C_1x\cos/\ln x/ + C_2 \cdot x \cdot \sin/\ln x/ + x\ln x$

3.Dane jest równanie różniczkowe: $y = x \cdot y' + x \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$

i jego rozwiązanie: $\arcsin\frac{y}{x} + x = C.$

ROZDZIAŁ II. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE I-GO RZĘDU.

§ 3. Równania różniczkowe zwyczajne 1-go rzędu i 1-go stopnia. Równania, których zmienne są rozdzielne.

Obecnie rozważymy metody, za pomocą których są całkowane równania różniczkowe różnych typów.

Zaczniemy od równania zwyczajnego 1-go rzędu. Jest to równanie:

$$f\,/x,y;\frac{dy}{dx}/ = 0$$

Po dokonaniu uproszczeń równanie to sprowadza się do postaci:

$$M.dx + N.dy = 0,$$

zwanej <u>postacią normalną równania różniczkowego 1-go rzędu i 1-go stopnia.</u> Wyrażenia M i N są funkcjami x i y każde.

Oznaczamy to:

$$M/x;y/\,dx + N/x;y/\,dy = 0$$

Do równań tego typu przede wszystkim zaliczamy <u>równania, których zmienne są rozdzielne.</u>

<u>Wypadek I</u> /najprostszy/. M jest funkcją wyłącznie x, a N wyłącznie y. Oznaczymy: $M = M/x/$ i $N = N/y/$ i całkując otrzymamy:

$$\int M/x/dx + \int N/y/dy = C.$$

<u>Przykład.</u> Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$y\,.dy - /x+1/.dx = 0$$

<u>Rozwiązanie:</u> Całkując otrzymamy:

$$\int y.dy - \int /x + 1/\,dx = C$$

stąd:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{/x + 1/^2}{2} = C\,.$$

zamieniając C na $\frac{C}{2}$ mamy: $y = \sqrt{/x+1/^2 + C}$; $y = \pm\, x+C$.

<u>Wypadek II.</u> Do postaci poprzedniej dają się sprowadzić także równania, które, po wyłączeniu za nawiasy czynników dx i dy, przyjmują postać:

$$M_1 \,.\, N_1 \,.\, dx + M_2 \,.\, N_2 \,.\, dy = 0.$$

Gdzie M_1 i M_2 są funkcjami tylko x, a N_1 i N_2 tylko y. Dzielimy wyrazy równania przez iloczyn $M_2 \cdot N_1$ i całkujemy.

$$\int \frac{M_1/x/}{M_2/x/} \cdot dx + \int \frac{N_2/y/}{N_1/y/} \cdot dy = C.$$

Przykład I. Dane jest równanie różniczkowe:

$$/x^2 - a^2/ \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

Wyznaczyć całkę ogólną równania.

Rozwiązanie.

$$/x^2 - a^2/dy - y.dx = 0$$

Rozdzielamy zmienne.

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x^2-a^2} = 0$$

i całkujemy:

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = C.$$

Otrzymamy:

$$\ln y - \frac{1}{2a} \ln/x-a/ + \frac{1}{2a} \ln/x+a/ = \ln C$$

$$2a\ln y - \ln \frac{x-a}{x+a} = 2a\ln C \qquad y^{2a} = C \cdot \frac{x - a}{x + a} \quad C^{2a} = C$$

Przykład II. Dane jest równanie różniczkowe:

$$/1 + e^x/.y. \frac{dy}{dx} - e^x = 0.$$

Wyznaczyć całkę ogólną równania.

Rozwiązanie:

$$/1 + e^x/.y.dy - e^x .dx = 0$$

Rozdzielamy zmienne.

$$y.dy - \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot dx = 0$$

i całkujemy

$$\int y .dy - \int \frac{e^x}{1 + e^x} . dx = C$$

stąd

$$\frac{y^2}{2} - \ln/1 + e^x/ = C.$$

Zamieniając $2C$ na $\ln C$, otrzymamy:

$$y^2 - 2\ln/1 + e^x/ = \ln C \; ; \quad y^2 = \ln C \cdot /1 + e^x/^2.$$

§ 4. Ćwiczenia.

Rozwiązać następujące równania różniczkowe.

1. $x.dy - y.dx = 0.$ 2. $/1 + x^2/.dy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$

3. $x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

4. $xy \cdot dx = /a + x/ \; /b + y/\; dy$

5. $x^2 \cdot dy + /y - a/dx = 0.$ 6. $/1 + x/.y.dx + x/1-y/dy = 0.$

7. $y^2 /1 + x/dx + x^2/1-y/dy = 0.$ 8. $xy/1 + x^2/dy - /1+y^2/dx = 0.$

9. $x^3 y \cdot dx + y\,dx + xy^2 dy - xdy = 0.$

10. $\sqrt{1 - x^2}\, dy - \sqrt{1 + y^2} \cdot dx = 0.$

11. $\mathrm{Sin}\, x \cdot \cos y\; dx - \cos x \cdot \mathrm{Sin}\, y \cdot dy = 0$

12. $\mathrm{Sin}\, x \cdot \sin y\; dy - \cos x \cdot \cos y \cdot dx = 0$

13. $\mathrm{Sec}^2 x \cdot \mathrm{tg}\, y \cdot dx + \mathrm{Sec}^2 y . \mathrm{tg}\, x \cdot dy = 0$

14. Wyznaczyć rodzinę krzywych, posiadających taką własność, że podstyczna dla każdego punktu krzywej jest równa podwojonej odciętej tego punktu.

Wskaz. Podst $= y \cdot \frac{dx}{dy}$

15. Wyznaczyć rodzinę krzywych, posiadających stałą podnormalną a. **Wskaz.** Podnorm. $= y \cdot \frac{dy}{dx}$

16. Wyznaczyć rodzinę krzywych, posiadających taką własność, że odcinek X wyznaczony przez styczną na osi x-ów jest daną funkcją: a/ $X = \frac{a + x}{2}$, b/ $X = \frac{2\,ax}{a + x}$ odciętej punktu styczności i danego a.

Odpowiedzi.

1. $y = Cx$ 2. $\text{arc sin } y - \text{arc tg } x = C$

3. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$ 4. $e^{x-y} = C\ /x + a/^a . y^b$

5. $y = a + c . \sqrt[x]{c}$ 6. $xy = C . e^{y-x}$

7. $x = C . y . e^{\frac{x+y}{x.y}}$ 8. $/1 + x^2/./1 + y^2/ = C.x^2.$

9. $x.e^{\frac{2x^3 + 3y^2}{6}} = C.y$ 10. $\ln/y + \sqrt{1+y^2}/ - \text{arc sin} x = C$

11. $\cos y = C.\cos x$ 12. $\sin x . \cos y = C$

13. $\text{tg } x . \text{tg } y = C$ 14. $\sqrt{x} = Cy$ /parabola/

15. $y^2 = 2ax + C$ /parabola/ 16. 1/ $y = C\ /x - a/^2$ /parabola/
2/ $xy = C\ /x-a/^2$ /hiperbola/

§ 5. Równania różniczkowe jednorodne.

Do równań, których zmienne są rozdzielne, dają się sprowadzić równania różniczkowe jednorodne.

Funkcję $f\ /x;y/ = 0$ nazywamy jednorodną, względem zawartych w niej zmiennych, jeżeli po zamianie x i y na tx i ty otrzymamy $t^k . f/x;y/ = 0$. Wykładnik k nazywamy stopniem jednorodności funkcji.

Przykład I: Funkcja: $f/x; y/ = x^2 + xy - 2y^2$ jest funkcją jednorodną stopnia 2-go. Sprawdzimy to:

$$f/tx; ty/ = /tx/^2 + /tx.ty/ - 2/ty/^2 = t^2. /x^2 + xy - 2y^2/.$$

Przykład II. Funkcja: $f/x; y/ = 5x + \frac{y^2}{x} - 2\sqrt[3]{x^2y}$ jest funkcją jednorodną stopnia 1-go

$$f/tx; ty/ = 5/tx/ + \frac{/ty/^2}{t.x} - 2\sqrt[3]{/tx/^2.ty};\quad f/tx;ty/ = t./5x + \frac{y^2}{x} - 2\sqrt[3]{x^2y}/$$

Przykład III. Funkcja: $f/x;y;u/ = \sqrt{x+y+u}$ jest funkcją jednorodną stopnia ½. $f/tx;ty;tu/ = t^{1/2}.\sqrt{x+y+u}.$

Równaniem różniczkowym jednorodnym nazywamy równanie:

$$M\,/x;y/dx + N\,/x;y/dy = 0$$

gdzie $M\,/x;y/$ i $N\,/x;y/$ są to wielomiany jednorodne jednego stopnia /powiedzmy k/. Wyciągając x^k z $M\,/x;y/$ i $N\,/x;y/$, otrzymamy:

$$x^k \cdot u/\frac{y}{x}/.\,dx + x^k \cdot v\,/\frac{y}{x}/.\,dy = 0.$$

Stąd:

$$u/\frac{y}{x}/\,dx + v\,/\frac{y}{x}/.\,dy = 0.$$

Podstawiamy:

$$\frac{y}{x} = z \qquad dy = xdz + z.dx.$$

A więc:

$$u\,/z/\,.\,dx + v\,/z/.\left[x.dz + z.dx\right] = 0,$$

lub:

$$\frac{dx}{x} + \frac{v\,/z/}{u/z/ + z.\,v\,/z/}\cdot dz = 0$$

Gdzie zmienne są już rozdzielone, a więc całkujemy równanie, jak w §-ie poprzednim.

§ 6. Przykłady.

Przykład I. Rozwiązać równanie jednorodne 1-go stopnia:

$$/x + y/\,.\,dx + x.dy = 0.$$

Rozwiązanie: Z $M/x;y/$ i $N/x;y/$ wyciągamy za nawias x.

$$x\,/1 + \frac{y}{x}/.dx + x.dy = 0 \qquad \text{stąd } /1 + \frac{y}{x}/dx + dy = 0.$$

Podstawiamy:

$$\frac{y}{x} = z \qquad i\ dy = x\,.dz + z.dx$$

$$/1 + z/.dx + x.dz + z.dx = 0\ ;\quad /1 + 2z/.dx + x.dz = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie o rozdzielnych zmiennych x, z

Dzielimy wszystkie wyrazy równania przez: $x/1 + 2z/$.

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + 2z} = 0$$

i całkujemy:

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dz}{1 + 2z} = C \; ; \qquad 2 \ln x + \ln /1 + 2z/ = \ln C$$

$$x^2 ./1 + 2z/ = C \; ; \qquad x./x + 2y/ = C; \; x^2 + 2xy = C.$$

Przykład II. Rozwiązać równanie jednorodne 2-go stopnia:

$$y^2 dx + / x^2 - xy/dy = 0.$$

Rozwiązanie: Po wyciągnięciu z M i N za nawias x^2 otrzymamy:

$$x^2 /\frac{y}{x}/^2 . dx + x^2 /1 - \frac{y}{x} /.dy = 0$$

stąd

$$/\frac{y}{x} /^2.dx + /1 - \frac{y}{x} / dy = 0$$

Podstawiamy: $\frac{y}{x} = z$ i $dy = x.dz + z.dx$

$$z^2 .dx + /1-z/ . /x.dz + z.dx/ = 0; \quad z^2dx + xdz + zdx-xzdz-z^2d\cancel{x}=0$$

$$x/1-z/.dz + z.dx = 0.$$

Dzielimy wszystkie wyrazy równania przez $x.z$: Otrzymamy :

$$\frac{1 - z}{z} .dz + \frac{dx}{x} = 0.$$

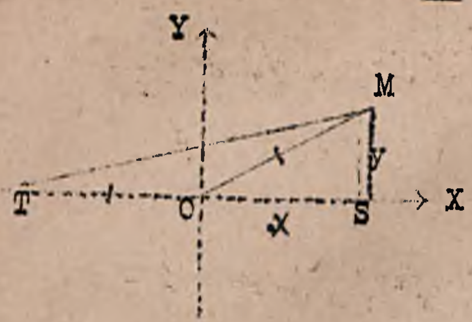
Całkujemy;

$$\int\frac{1 - z}{z} .dz + \int\frac{dx}{x} = C$$

$$\ln z - z + \ln x = C \; ; \qquad \ln x.z - \ln e^z = \ln C$$

$$x.z = C . e^z \qquad y = C . e^{\frac{y}{x}}$$

Przykład III. Wyznaczyć krzywą, której promień wodzący OM jest równy odcinkowi OT osi x-ów, zawartemu między początkiem układu i punktem przecięcia się stycznej MT z osią odciętych.



Rozwiązanie: Oznaczymy współrzędne punktu M przez x i y.

Wtedy: $OM=\sqrt{x^2 + y^2}$ i $\frac{MS}{TS} = \frac{dy}{dx}$

$MS = y$; $TS = OT + x = OM + x =$

$= x + \sqrt{x^2 + y^2}$

A więc mamy równanie różniczkowe jednorodne stopnia 1-go.

$$\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dy}{dx} \; ; \; y\,dx - /x + \sqrt{x^2 + y^2}/.dy = 0.$$

Dzielimy wyrazy równania przez y.

$$dx - /\frac{x}{y} + \sqrt{/\frac{x}{y}/^2 + 1}\;.\;dy/ = 0.$$

Podstawiając:

$$\frac{x}{y} = z \qquad \text{i} \quad dx = y.dz + z.dy$$

otrzymamy:

$$y.dz + z.dy - /z + \sqrt{z^2 + 1}/.dy = 0$$

$$y\;.\;dz - \sqrt{z^2 + 1}\;.\;dy = 0 \; ; \quad \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{dy}{y}$$

Całkujemy :

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} + C \; ; \quad \ln y = \ln /z + \sqrt{z^2+1}/ + \ln C$$

$$y = C\;./z + \sqrt{z^2 + 1}/$$

Podstawiając $z = \frac{x}{y}$. Otrzymamy:

$y^2 = C.x + C.\sqrt{x^2+y^2}$; $\quad y^2 - Cx = C.\sqrt{x^2 - y^2}$;

$/y^2 - Cx/^2 = C^2\,/x^2 + y^2/$

$$y^4 - 2Cy^2x + C^2x^2 = C^2x^2 + C^2y^2$$

Odrzucając rozwiązanie $y^2 = 0$, otrzymamy:

$$y^2 = 2Cx + C^2$$

Rodzinę paraboli.

§ 7. Ćwiczenia.

1. $y - x \cdot \frac{dy}{dx} = x + y \cdot \frac{dy}{dx}$ 2. $/y - x/dy + y \cdot dx = 0$

3. $x \cdot dy - y \cdot dx = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx$

4. $/ x^2 + 2xy - y^2 /dx + /y^2 + 2xy - x^2 /dy = 0$

5. $/ x^2 + y^2/dx + xy\, dy = 0$

6. $/2x^3 - 135\, y^3/dx + 81\, xy^2\, dy = 0$

7. $/6 - 11y/ \cdot dx + /15y - 8x/dy = 0$

8. $x \cdot \cos \frac{y}{x}\, dy = /y \cos \frac{y}{x} - x/dx$

9. $/x \cdot \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x} /. y . dx = /y . \sin \frac{y}{x} - x \cos \frac{y}{x}/. x . dy$

10. $/x \cdot \cos \frac{y}{x} - y \cdot \sin \frac{y}{x} / + x \cdot \sin \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

11. $x^3 dy - x^2 \cdot y\, dx + y^3\, dx - xy^2 \cdot dy = 0$

12. $y \cdot dx + /2\sqrt{x \cdot y} - x /. dy = 0.$

Odpowiedzi.

1. $\sqrt{x^2 + y^2} = C \cdot e^{-\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$ 2. $y \cdot e^{\frac{x}{y}} = C$

3. $1 + 2\, Cy - C^2y^2 = 0$ 4. $x^2 + y^2 = C\, /x + y/$

5. $x^4 + 2x^2y^2 = C$ 6. $x^5 = C/x^3 - 27\, y^3 /.$

7. $/3y - 2x/^2 = C/5y - 3x/$ 8. $x \cdot e^{\sin \frac{y}{x}} = C.$

9. $x \cdot y \cdot \cos \frac{y}{x} = C.$ 10. $y = x \cdot \arccos \frac{x}{C}$

11. $y^2 - x^2 = 0$ albo $y = Cx$ 12. $y \cdot e^{\sqrt{\frac{x}{y}}} = C.$

§ 8. RÓWNANIA LINIOWE 1-go RZĘDU.

Równaniem różniczkowym liniowym 1-go rzędu nazywamy równanie, zawierające w stopniu 1-szym zmienną y i pochodną $\frac{dy}{dx}$.

Jest to równanie postaci:

$$\frac{dy}{dx} + P/x/.y = Q/x/$$

gdzie P i Q są funkcjami wyłącznie x.

Stosujemy podstawienie:

$$y = u . v \quad /u \text{ i } v \text{ funk.} x/ \quad \text{stąd}$$

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

i równanie sprowadzamy do postaci:

$$u . \frac{dv}{dx} + v . /\frac{du}{dx} + P/x/.u/ = Q/x/$$

Jedna z funkcji u lub v może być wybrana dowolnie, a więc wyznaczymy u tak, aby w danym równaniu współczynnik przy v zamienić na 0:

$$\frac{du}{dx} + P/x/.u = 0.$$

Całkując to równanie otrzymamy szukaną wartość u:

$$\frac{du}{u} + P/x/ .dx = 0 \qquad \ln u = -\int P/x/ \, dx$$

$$u = e^{-\int P/x/dx}$$

Przy takiej wartości u dane równanie sprowadza się do postaci:

$$u . \frac{dv}{dx} = Q /x/ \quad \text{lub} \quad dv = Q /x/. e^{\int P/x/.dx} .dx$$

u·v

Całkujemy go:

$$v = \int Q/x/.e^{\int P/x/.dx} .dx + C$$

i z podstawienia : $y = u.v$ otrzymamy:

$$y = e^{-\int P/x/dx} \left[\int Q/x/.e^{\int P/x/dx} .dx + C \right].$$

Jest to całka ogólna równania różniczkowego liniowego pierwszego rzędu.

§ 9. P r z y k ł a d y.

Przykład I. Znaleźć całkę ogólną równania:

$$\frac{dy}{dx} + y = x^3$$

Rozwiązanie: podstawiamy $y = u.v$ stąd $\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

i sprowadzamy dane równanie do postaci:

$$u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx} + u.v = x^3 \quad \text{lub} \quad u.\frac{dv}{dx} + v./\frac{du}{dx} + u/ = x^3$$

Przyrównujemy współczynnik przy v do 0.

$$\frac{du}{dx} + u = 0.$$

Równanie to całkujemy i wyznaczamy u:

$$\int \frac{du}{u} = -\int dx \qquad \ln u = -x.\ln e \qquad u = e^{-x}$$

Podstawiając wyznaczoną wartość u do danego równania, mamy:

$$e^{-x}.\frac{dv}{dx} = x^3 \qquad dv = x^3.e^x.dx$$

Ostatnie równanie całkujemy przez części:

$$v = e^x/x^3 - 3x^2 + 6x - 6/ + C$$

A więc ostatecznie:

$$y = u.v \qquad y = e^{-x}.\left[e^x x^3 - 3e^x x^2 + 6e^x.x - 6e^x + C\right]$$

Przykład II. Rozwiązać równanie liniowe:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = /x + 1/^3$$

Rozwiązanie: Podstawiamy: $y = u.v$ stąd $\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

i sprowadzamy dane równanie do postaci:

$$u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{2u.v}{x+1} = /x+1/^3$$

$$u.\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1}\right) = (x+1)^3$$

Przyrównujemy współczynnik przy $\underline{\underline{v}}$ do 0.

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0.$$

Równanie to całkujemy i wyznaczamy $\underline{\underline{u}}$:

$$\frac{du}{u} = \frac{2\,dx}{x+1} \qquad \ln u = 2\ln(x+1) \qquad \underline{\underline{u = (x+1)^2}}$$

Podstawiając, wyznaczoną wartość $\underline{\underline{u}}$ do równania danego, otrzymamy:

$$(x+1)^2.\frac{dv}{dx} = (x+1)^3 \quad \text{lub} \quad dv = (x+1).dx$$

Ostatnie równanie całkujemy i wyznaczamy $\underline{\underline{v}}$:

$$\underline{\underline{v = \frac{(x+1)^2}{2} + C}}$$

A więc ostatecznie:

$$y = u.v \qquad 2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2 .$$

<u>Przykład III.</u> Znaleźć całkę ogólną równania:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

<u>Rozwiązanie:</u> podstawiamy $y = u.v$

stąd $\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$

i sprowadzamy dane równanie do postaci:

$$u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx} - \frac{u.v}{\sin x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{lub}$$

$$u.\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{\sin x}\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Przyrównujemy współczynnik przy $\underline{\underline{v}}$ do $\underline{0}$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{\sin x}.$$

Równanie to całkujemy i wyznaczamy $\underline{\underline{u}}$.

$$\int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{\sin x} \qquad \ln u = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad \underline{\underline{u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}}$$

Podstawiając otrzymaną wartość $\underline{\underline{u}}$ do danego równania mamy:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}.\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} ; \quad dv = dx; \qquad v = x + C$$

$$y = xu + Cu \qquad y = x.\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + C\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,.$$

§ 10. Ćwiczenia.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a$ 2. $\frac{dy}{dx} - \frac{ay}{x} = \frac{x+1}{x}$

3. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = -\frac{a}{2}$ 4. $dy + \frac{y.dx}{x} = e^{x}\,.\,dx$

5. $\frac{dy}{dx} + 2\,xy = x.e^{-x^2}$ 6. $dy + \frac{y.dx}{1+x^2} = \frac{\mathrm{arc\,tg}\,x.dx}{1+x^2}$

7. $dy + \frac{xy\,.\,dx}{1-x^2} = \frac{ax.dx}{1-x^2}$ 8. $dy + \frac{y.dx}{x^2-1} = \frac{dx}{1-x}$

9. $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} = a\,.\,\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $\frac{dy}{dx} - \frac{n\,y}{x+1} = e^{x}\,/1+x/^{n}$ 11. $dy - ay\cdot dx = \cos x\cdot dx$

12. $dy - y\cdot\cos x.dx = \frac{1}{2}\sin 2x.dx.$

Odpowiedzi.

1. $y = \frac{ax^2+C}{2x}$ 2. $y = C\,x^{a} + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}$ 3. $y = -ax - C\sqrt{x}$

4. $y = e^{x} - \frac{e^{x}}{x} + \frac{C}{x}$ 5. $y = e^{-x^2}\,/\frac{x^2}{2} + C/$

6. $y = \mathrm{arc\,tg}\,x - 1 + C\,.\,e^{-\mathrm{arc\,tg}x}$ 7. $y = a + C\sqrt{1-x^2}$

8. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,./\arcsin x + C/$ 9. $y = /x + \sqrt{1+x^2}/\cdot/a.\mathrm{arcSin}x +$
$+ C/$

10. $y = /x+1/^{n}\,.\,/C + e^{x}/.$ 11. $y = C.e^{ax} + \frac{\mathrm{Sin}\,x - a\cdot\cos x}{a^2+1}$

12. $y = \mathrm{Sin}\,x - 1 + C\,.\,e^{-\mathrm{Sin}\,x}\,.$

§ 11. Równania Bernoulli'ego.

Równania różniczkowe Bernoulli'ego są to równania postaci:

$$\frac{dy}{dx} + P/x/.y = Q/x/.y^{n}\,,$$

gdzie $\underline{\underline{P}}$ i $\underline{\underline{Q}}$ są funkcjami wyłącznie $\underline{\underline{x}}$.

Równania Bernoulli'ego nie są równaniami liniowymi, dają się jednak przekształcić na równania liniowe przez zastosowanie podstawienia:

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z/x/ \text{ , gdzie } \underline{\underline{z}} \text{ jest funkcją wyłącznie } \underline{\underline{x}}.$$

Różniczkując obie strony otrzymamy:

$$y^{-n} . dy = dz \qquad \underline{\underline{dy = y^{n} . dz}}$$

Z podstawienia mamy :

$$\frac{y}{/1-n/ . y^{n}} = z/x/ \qquad \text{stąd} \qquad \underline{\underline{y = /1-n/ . y^{n} . z/x/}}$$

Podstawiając wartości wyrażeń podkreślonych do danego równania, otrzymamy:

$$\frac{y^{n} . dz}{dx} + P/x/ . /1-n/ . y^{n} . z/x/ = Q/x/ . y^{n}$$

$$\frac{dz}{dx} + /1-n/ . P/x/ . z/x/ = Q/x/$$

równanie liniowe 1-go rzędu.

Ale równania Bernoulli'ego możemy rozwiązywać i bezpośrednio podobnie, jak rozwiązywaliśmy równania liniowe.

<u>Przykład:</u> Dano jest równanie:

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^{3} . y^{3}.$$

<u>Rozwiązanie.</u> Stosujemy podstawienie: $y = u.v$ i $\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$u . \frac{dv}{dx} + v /\frac{du}{dx} + xu/ = x^{3}.u^{3}.v^{3}.$$

Wyznaczymy wartość na $\underline{\underline{u}}$ taką, aby wyrażenie w nawiasie zamieniło się na 0.

$$\frac{du}{dx} + x.u = 0 \qquad \int\frac{du}{u} = -\int x\,dx \qquad \ln u = -\frac{x^{2}}{2} . \ln c$$

$$\underline{\underline{u = e^{\frac{-x^{2}}{2}}}}$$

Przy tej wartości u dane równanie sprowadza się do równania

$$\frac{dv}{dx} = x^3 \cdot u^2 \cdot v^3 \;;\quad \frac{dv}{v^3} = x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot dx \;;\quad -\frac{v^{-2}}{2} = \int x^3 e^{-x^2} dx$$

$$y^2 = u^2 \cdot v^2 \qquad y^2 = \frac{e^{-x^2}}{x^2 \cdot e^{-x^2} + e^{-x^2} + C} \qquad v^{-2} = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2 + 1 + C \cdot e^{x^2}}$$

§ 12. Ć w i c z e n i a.

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 y^4$ 2. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2a\, x^3 y^3$

3. $/1 - x^2/ \frac{dy}{dx} - xy = axy^2$ 4. $/1 + x^2/ \cdot \frac{dy}{dx} - xy + x^2 y^2$

5. $3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - /x + 1/ = ay^3.$

O d p o w i e d z i.

1. $y^3 = -\frac{2}{x^3} + C \cdot x^3$ 2. $\frac{1}{y^2} = ax^2 + \frac{a}{2} + Ca \cdot e^{2x^2}$

3. $\frac{1}{y} = C\sqrt{1 - x^2} - a$ 4. $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \left[C + \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} - \ln\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} \right]$

5. $y^3 = C\, e^{ax} - \frac{x + 1}{a} - \frac{1}{a^2}$

§ 13. Równania różniczkowe zupełne rzędu 1-go.

Równanie różniczkowe zupełne ma postać :

$$\frac{\partial F /x;y/}{\partial x} dx + \frac{\partial F /x;y/}{\partial y} dy = 0 \quad \text{lub} \quad d\, F /x; y/ = 0.$$

Równanie to jest bezpośrednio zróżniczkowaną funkcją:

$$F /x; y/ = C$$

i jego lewa strona jest zupełną różniczką funkcji $F/x ; y/= C.$

Oznaczymy:

$$\frac{\partial F/x;\,y/}{\partial x} = M\,/x;\,y/ \quad \text{i} \quad \frac{\partial F/x;\,y/}{\partial y} = N/x;y/$$

i równanie zapiszemy tak:

$$M/x;y/\,.\,dx + N\,/x;\,y/\,.\,dy = 0$$

Ponieważ $M\,/x;\,y/.dx + N/x;y/dy = 0$ jest zupełną różniczką, więc ma miejsce równość:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

i równość:

$$d\,F\,/x;y/ = M\,/x;\,y/dx + N/x;y/.dy.$$

Całkując to ostatnie równanie względem x, otrzymamy:

$$F/x;y/ = \int M\,.\,dx + U\,/y/.$$

A ponieważ:

$$\frac{\partial F/x;y/}{\partial y} = N$$

Więc:

$$\frac{\partial \int M.dx}{\partial y} + \frac{\partial U/y/}{\partial y} = N \qquad \text{stąd}$$

$$\frac{\partial U/y/}{\partial y} = N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y}$$

$$U/y/ = \int /N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y}/\,.dy + C$$

Ostateczne rozwiązanie danego równania jest takie:

$$F\,/x;\,y/ = \int M\,dx + \int /N - \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y}/\,.dy + C.$$

§ 14. Przykłady.

Przykład I. Rozwiązać równanie różniczkowe zupełne:

$$/3xy^2 - x^2/.dx - /1 + 6y^2 - 3x^2y/.dy = 0.$$

Rozwiązanie. Sprawdzamy równanie: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \underline{\underline{6\,x.y}} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \underline{\underline{6\,xy}}$$

Posługujemy się wzorem : $F/x;y/=\int M dx + \int /N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y} /.dy+C$

Oznaczymy: $\int M dx = \underline{\underline{p}}$ i $\int /N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y} /.dy = \underline{\underline{q}}$

Wtedy: $F/x;y/ = p + q$

Wyznaczymy $\underline{\underline{p}}$:

$$p = \int /3xy^2 - x^2/.dx = 3y^2\int x.dx - \int x^2 dx = \underline{\underline{\frac{3x^2y^2}{2} - \frac{x^3}{3}}}$$

Wyznaczymy $\underline{q}$:

$$q = \int /1 - 6y^2 + 3x^2y - 3x^2y/.dy = -\int /1 + 6y^2/ dy = \underline{\underline{-y-2y^3}}$$

Ostatecznie:

$$F/x;y/ = \frac{3x^2y^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2y^3 - y + C$$

Przykład II. Rozwiązać równanie różniczkowe zupełne:

$$/1 + e^{\frac{x}{y}}/.dx + e^{\frac{x}{y}}/1 - \frac{x}{y}/ dy = 0$$

Rozwiązanie: Sprawdzamy równanie: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.e^{\frac{x}{y}} ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}}.\frac{1}{y}/1 - \frac{x}{y}/ - e^{\frac{x}{y}}.\frac{1}{y} = \underline{\underline{-\frac{x}{y^2}.e^{\frac{x}{y}}}}$$

Posługujemy się wzorem: $F/x;y/ = \int M dx + \int /N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y}/dy+C.$

Oznaczamy: $\int M.dx = \underline{p}$ i $\int /N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y} /. dy = \underline{\underline{q}}$

Wtedy: $F/x;y/ = p + q$

Wyznaczamy $\underline{\underline{p}}$: $p = \int /1 + e^{\frac{x}{y}}/.dx = x + \int e^{\frac{x}{y}} .dx = \underline{\underline{x + y.e^{\frac{x}{y}}}}$

Wyznaczamy q:

$$q = \int / e^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}}.\frac{x}{y} - e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{x}{y}}.\frac{x}{y} /dy = \int 0.dy = 0 + C$$

Ostatecznie:

$$F/x;y/ = x + y.e^{\frac{x}{y}} + C.$$

§ 15. Ćwiczenia.

Rozwiązać równania różniczkowe zupełne:

1. $/x^3 + 3xy^2/dx + /y^3 + 3x^2y/.dy = 0.$

2. $/x^2 - 4xy-2y^2/.dx + /y^2 - 4xy - 2x^2/.dy = 0.$

3. Wyznaczyć funkcję $F\ /x;y/ = C$,której różniczka zupełna jest :

$$dF\ /x;y/ = /2xy^2 - 3y/.dx + /2x^2y - 3x/dy$$

4. $\frac{2x}{y^3}dx + /\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}/.dy = 0.$

5. $/1 + \frac{y^2}{x^2}/dx - 2.\frac{y}{x}.dy = 0$

6. $dF\ /x;y/ = /\sin y - y.\sin x/.dx + /x.\cos y + \cos x/.dy$

7. $dF\ /x;y/ = \sqrt{1 - y^2}.dx + \frac{1 - xy}{\sqrt{1 - y^2}}.dy$

8. $dF\ /x;y/ = /2x + 2y^2/dx + /\cos y + 4xy/.dy.$

9. $2./\frac{ax}{e^y} - b/.dx + /e^y - \frac{ax^2}{e^y}/.dy = 0.$

Odpowiedzi.

1. $F/x;y/ = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + C$

2. $\frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2xy^2 + \frac{y^3}{3} = C$

3. $F/x;y/ = x^2y^2 - 3xy + C$

4. $x^2 - y^2 = Cy^3$

5. $x^2 + y^2 = Cx$

6. $F/x;y/ = y.\cos x + x \sin y + C$

7. $F/x;y/ = x.\sqrt{1-y^2} + \arcsin y + C$

8. $F\ /x;y/ = x^2 + 2xy^2 + \sin y + C$

9. $\frac{ax^2}{e^y} + e^y - 2bx = C.$

§ 16. Uwagi o całkowaniu równania różniczkowego rzędu 1-go w wypadku ogólnym.

Na zakończenie rozdziału o całkowaniu równań różniczkowych rzędu 1-go należy powiedzieć, że równania te w wypadku ogólnym nie mogą być rozwiązywane przy pomocy skończonej liczby całkowań. Przez skończoną liczbę całkowań są rozwiązywane tylko równania różniczkowe w wypadkach szczególnych, a najgłówniejsze z tych wypadków rozważyliśmy w §§-ach poprzednich tego rozdziału. Co się tyczy wypadku ogólnego, rozwiązanie równania może być osiągnięte bądź w postaci nieskończonego szeregu potęgowego, bądź w postaci granicy ciągu kolejnych przybliżeń. Rozwiązania takie mają dużą wartość z punktu widzenia teoretycznego, nie mają jednak zastosowania w zagadnieniach praktycznych. Nazywamy je zwykle "dowodem istnienia rozwiązania".

ROZDZIAŁ III. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE 2-go RZĘDU.

§ 17. Uwagi ogólne.

Jak wiemy równanie różniczkowe 1-go rzędu:

$$f/x;y;y'/ = 0$$

określa zależność pomiędzy zmiennymi x i y i pochodną y' i posiada całkę ogólną:

$$F/x;y;C/ = 0.$$

Całka ta jest równaniem, określającym zależność pomiędzy zmiennymi x i y i stałą dowolną C.

Geometrycznie całka ogólna wyznacza jednoparametrową rodzinę krzywych.

Równanie różniczkowe 2-go rzędu:

$$f/x;y;y';y''/ = 0$$

określa zależność pomiędzy zmiennymi x; y i pochodnymi y' i y'' i posiada całkę ogólną, którą wyznaczamy całkując dwukrotnie bezpośrednio lub pośrednio dane równanie.

Całka ogólna zawiera dwie stałe dowolne C_1 i C_2.

$$F/x;y;\ C_1;C_2/=0$$

Całka ta jest równaniem, określającym zależność pomiędzy zmiennymi x i y i zawiera dwa parametry C_1 i C_2, a więc geometrycznie wyznacza dwuparametrową rodzinę krzywych.

Warunkami początkowymi dla równania różniczkowego 2-go rzędu, nazywamy żądanie, by równanie to dla danych wartości $x = x_0$ i $y = y_0$ przyjęło dla pochodnej z góry obraną wartość $y' = p$

Znaleźć, odpowiadające warunkom początkowym wartości C_1 i C_2 możemy, rozwiązując całkę ogólną $F/x;y;C_1;C_2/=0$. względem y i podstawiając do niej i do jej pochodnej, wyznaczonej względem x dane wartości $x = x_0$; $y = y_0$ i $y' = p$

Otrzymamy układ dwu równań z dwiema niewiadomymi C_1 i C_2.

W interpretacji geometrycznej oznacza to wyodrębnienie z dwuparametrowej rodziny krzywych takiej linii całkowej, która przechodzi przez dany punkt $/x_0;y_0/$ i posiada w tym punkcie styczną o określonym kierunku.

Warunkami brzegowymi nazywamy żądanie, aby z dwuparametrowej rodziny krzywych została wydzielona linia całkowa, przechodząca przez dwa dane punkty.

§ 18. Równania różniczkowe 2-go rzędu, których całkę ogólną wyznaczamy, całkując bezpośrednio dane równanie.

Rozważymy tu wypadek szczególny równań różniczkowych 2-go rzędu, kiedy dane równanie daje się rozwiązać przez bezpośrednie dwukrotne całkowanie tego równania. Jest to równanie postaci:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f/x/$$

Całkując je po raz 1-szy:

$$\frac{dy}{dx} = \int f/x/.dx + C_1$$

i po raz 2-gi, otrzymamy:

$$y = \int\left[f/x/dx \right].dx + C_1 x + C_2.$$

W podobny sposób rozwiązujemy równania rzędu 3-go, 4-go i wyższych postaci:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f/x/.$$

<u>Przykład I-szy.</u> Rozwiązać równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$$

<u>Rozwiązanie:</u> całkując po raz 1-szy:

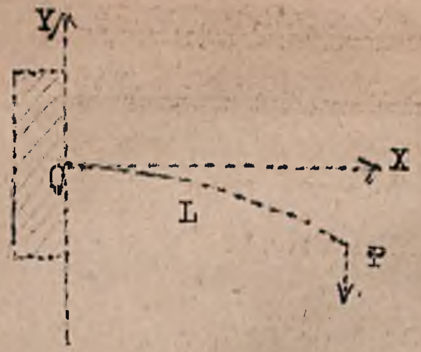
$$\frac{dy}{dx} = \int \sin x.dx + C_1 = -\cos x + C_1$$

i po raz 2-gi, otrzymamy:

$$y = \int\left[-\cos x + C_1\right] dx + C_2$$

$$y = -\sin x + C_1x + C_2$$

<u>Przykład II-gi:</u> Belka o stałym przekroju długości $\underline{L}$ ugina się pod działaniem sił obciążenia zewnętrznego $\underline{P}$. Oś odciętych i oś rzędnych leżą w płaszczyźnie zgięcia. Ciężar własny belki w stosunku do obciążenia zewnętrznego $\underline{P}$ jest tak mały, że go pomijamy.



Jeden koniec belki jest umocowany, a drugi swobodny, obciążony stałą siłą P. Moment zginający M w przekroju odległym o x od punktu umocowania. Mamy wyznaczyć linię zgięcia belki.

W danych warunkach równanie różniczkowe linii zgięcia, przyjęte w teorii sprężystości jest takie:

$$E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = -P./L-x/.$$

Gdzie E i I są to stałe czynniki. E jest modułem sprężystości materjału belki, a I momentem bezwładności przekroju belki.

Rozwiązanie: Całkując równanie po raz 1-szy:

$$E.I.\frac{dy}{dx} = -P\cdot\int /L-x/.dx + C_1$$

$$E.I.\frac{dy}{dx} = -P\cdot Lx + \frac{P\cdot x^2}{2} + C_1 \text{ - - - - } x/$$

i po raz 2-gi, otrzymamy:

$$E\cdot I\cdot y = -P\cdot L\int xdx + \frac{P}{2}\int x^2.dx + C_1\cdot\int dx + C_2$$

$$E.I.y = \frac{P}{6}\cdot x^3 - \frac{PL}{2}x^2 + C_1x + C_2 \text{ - - - - - - - - - } \times\!\!\times$$

Równanie wyznacza dwuparametrową rodzinę krzywych zgięcia. Z rodziny tej wybieramy krzywą, która zadość czyni warunkom początkowym, a więc ma:

$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad$ i $\frac{dy}{dx} = 0$ dla punktu styczności

/$x_0 = 0$; $y_0 = 0$/.

Podstawiając te wartości do równania $x/$ otrzymamy $C_1 = 0$ a podstawiając do równania $\times\!\!\times$ otrzymamy $C_2 = 0$.

Stąd całka szczególna krzywej zgięcia:

$$y = \frac{P}{E.I}\cdot\frac{1}{6}x^3 - \frac{P}{E.I}\cdot\frac{L}{2}\cdot x^2$$

jest parabolą 3-go stopnia.

§ 19. Równania różniczkowe drugiego rzędu, sprowadzane do równań rzędu pierwszego, przez podstawienie nowej zmiennej.

Równania różniczkowe drugiego rzędu postaci:

$$A/\ \frac{d^2y}{dx^2} = f/x;\ \frac{dy}{dx}/;\quad B/\ \frac{d^2y}{dx^2} = f\ /y;\ \frac{dy}{dx}/$$

$$i\ C/\ f/y;\ \frac{dy}{dx};\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

z których 1-sze nie zawiera wyraźnie zmiennej y, 2-gie zmiennej x, a 3-cie jest równaniem jednorodnym względem y i pochodnych $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$ sprowadzają się do równań różniczkowych rzędu pierwszego przez podstawienie nowej zmiennej.

§ 20. Postać A.

Ażeby rozwiązać równanie postaci:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f/x;\ \frac{dy}{dx}/$$

nie zawierającej wyraźnie zmiennej y, wprowadzamy nową zmienną p stosując podstawienie:

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Wtedy: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ i dane równanie sprowadza się do postaci:

$$\frac{dp}{dx} = f\ /x;\ p/,$$

a więc do równania rzędu 1-go. Z tego ostatniego równania wyznaczamy p, a z podstawienia $\frac{dy}{dx} = p$ wyznaczamy y.

Przykład: Rozwiązać równanie:

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2 . e^x$$

Rozwiązanie: Stosujemy podstawienie:

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Dane równanie sprowadzamy do postaci równania liniowego 1-go rzędu:

$$x \cdot \frac{dp}{dx} - p = x^2 \cdot e^x,$$

które, jak wiadomo /§8/, rozwiązuje się przez podstawienie:

$$p = u.v \quad /u \text{ i } v \text{ są funk.} x/ \quad \text{stąd} \quad \frac{dp}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

Podstawiając otrzymamy:

$$x.u.\frac{dv}{dx} + x.v.\frac{du}{dx} - u.v = x^2.e^x$$

$$x.u.\frac{dv}{dx} + v./x.\frac{du}{dx} - u/ = x^2.e^x \quad \ldots\ldots\ldots \; \ast/$$

Jedna z funkcji $\underline{\underline{u}}$ lub $\underline{\underline{v}}$ może być wybrana dowolnie, wyznaczymy $\underline{\underline{u}}$ tak, aby w równaniu $\ast/$ współczynnik przy $\underline{\underline{v}}$ zamienić na $\underline{\underline{0}}$:

$$x.\frac{du}{dx} - u = 0$$

Wtedy:

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \qquad \ln u = \ln x \qquad \underline{\underline{u = x}}$$

Przy takiej wartości $\underline{\underline{u}}$ równanie $\ast/$ sprowadza się do postaci:

$$x^2 \cdot \frac{dv}{dx} = x^2.e^x \qquad dv = e^x.dx \qquad \underline{\underline{v = e^x + C_1}}$$

Podstawiając znalezione wartości $\underline{\underline{u}}$ i $\underline{\underline{v}}$ do wyrażenia, wyznaczającego $\underline{\underline{p}}$, otrzymamy:

$$p = \cancel{u.v} = x.e^x + C_1x$$

Wyznaczamy $\underline{\underline{y}}$ z podstawienia $\frac{dy}{dx} = p$.

$$\frac{dy}{dx} = x.\, e^x + C_1x$$

$$dy = x \,.\, e^x.dx + C_1x\,.dx$$

Po scałkowaniu:

$$y = \int x.e^x \,.\, dx + C_1 \int x.dx + C_2$$

otrzymamy:

$$y = x \,.\, e^x - e^x + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2.$$

§ 21. POSTAĆ B.

Są to równania postaci: $\frac{d^2y}{dx^2} = f/y; \frac{dy}{dx}$ nie zawierające wyraźnie zmiennej $\underline{x}$. Aby rozwiązać równanie wprowadzamy nową zmienną $\underline{p}$ stosując podstawienie: $\frac{dy}{dx} = p$

Wtedy drugą pochodną $\frac{d^2y}{dx^2}$ możemy przedstawić tak:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

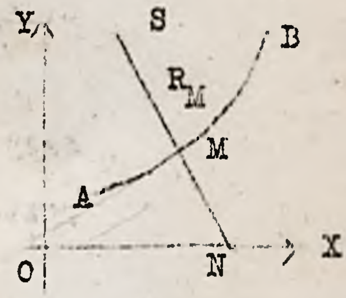
i dane równanie sprowadzamy do postaci:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f\,/y;p/,$$

a więc do równania rzędu 1-go. Z tego ostatniego wyznaczamy $\underline{p}$,a z podstawienia $\frac{dy}{dx} = p$ wyznaczamy $\underline{y}$.

Przykład I. Wyznaczyć równanie krzywej,wklęsłej względem dodatniego kierunku osi $\underline{oy}$,posiadającej taką własność,że w każdym punkcie tej krzywej promień krzywizny jest równy długości normalnej.

Rozwiązanie. Długość promienia krzywizny dla punktu $\underline{M}$ krzywej wyznacza wzór:



$$R_M = \frac{\left[1 + /\frac{dy}{dx}/^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Długość normalnej $\underline{MN}$ dla tego samego punktu M:

$$MN = y \cdot \sqrt{1 + /\frac{dy}{dx}/^2}$$

A więc warunkom zadania odpowiada równanie różniczkowe:

$$y \cdot \sqrt{1 + /\frac{dy}{dx}/^2} = \frac{\left[1 + /\frac{dy}{dx}/^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Stosujemy podstawienie:

$$\frac{dy}{dx} = p \quad i \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

$$y \cdot \sqrt{1 + p^2} = \frac{\left[1 + p^2\right]^{3/2}}{p \cdot \frac{dp}{dy}} \qquad y \cdot \sqrt{1 + p^2} = \frac{/1+p^2/ \cdot \sqrt{1+p^2}}{p \cdot \frac{dp}{dy}}$$

stąd:

$$\int \frac{p\cdot dp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y} + C_1 \qquad \tfrac{1}{2}\ln/1+p^2/ = \ln y + \ln C_1$$

$$\ln\sqrt{1+p^2} = \ln y . C_1 \qquad p = \pm\sqrt{/C_1y/^2-1}$$

Podstawiając $p = \frac{dy}{dx}$ i całkując otrzymamy:

$$\pm\sqrt{/C_1y/^2-1} = \frac{dy}{dx} ; \qquad dx = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{/C_1y/^2-1}} + C_2$$

$$\frac{1}{C_1}\ln\left[C_1y + \sqrt{/C_1y/^2-1}\right] = \pm/x - C_2/.\ln e$$

stąd:

$$C_1y + \sqrt{/C_1y/^2-1} = e^{\pm C_1/x-C_2/} \qquad \text{/\!/}$$

Rozwiązując to równanie względem $\underline{y}$ spostrzegamy, że dwumian sumy lewej strony równania pomnożony przez dwumian różnicy tych samych wyrazów jest równy jedności:

$$\left[C_1y + \sqrt{/C_1y/^2-1}\right]\cdot\left[C_1y - \sqrt{/C_1y/^2-1}\right] = 1$$

Po prawej stronie iloczyn:

$$e^{\pm C_1/x-C_2/}\cdot e^{\mp C_1/x-C_2/} = 1$$

A więc z równania /\!/ wynika równanie:

$$C_1y - \sqrt{/C_1y/^2-1} = e^{\mp C_1/x-C_2/}$$

Dodając te równania stronami, otrzymamy:

$$y = \frac{1}{2C_1}\left[e^{\pm C_1/x-C_2/} + e^{\mp C_1/x-C_2/}\right]$$

lub, co jest to samo:

$$y = \frac{1}{2C_1}\left[e^{C_1/x-C_2/} + e^{-C_1/x-C_2/}\right]$$

Jest to równanie <u>dwuparametrowej rodziny</u> krzywych <u>łańcuchowych</u>.

Z tej rodziny wyodrębniamy krzywą, która spełnia <u>warunki początkowe</u>.

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = a \qquad \frac{dy}{dx} = p = 0 \quad \text{dla punktu } \underline{/0;a/}$$

Otrzymamy:

$$C_1 = \frac{1}{a} \quad \text{i} \quad C_2 = 0$$

stąd całka szczególna:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

<u>Przykład II-gi.</u> Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 y \qquad \text{gdzie } \underline{a \text{ stałe}}.$$

<u>Rozwiązanie:</u> Stosujemy podstawienie

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{i} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

Równanie sprowadzamy do postaci:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = a^2 y \qquad \int \frac{p}{a^2} \cdot dp = \int y\,dy$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\frac{p^2}{\cancel{2}a^2} + C_1 = \frac{y^2}{\cancel{2}} \; ; \quad \frac{p^2}{a^2} = y^2 - C_1^2 \quad \text{zamieniamy } C_1 \text{ przez } C_1^2$$

$$\frac{p}{a} = \pm\sqrt{y^2 - C_1^2} \; ; \quad \frac{p}{aC_1} = \pm\sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}$$

Podstawiając $p = \frac{dy}{dx}$ i całkując otrzymamy:

$$\frac{1}{aC_1} \cdot \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} \; ; \quad \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}} = \pm aC_1 \int dx.$$

Po scałkowaniu:

$$C_1 \ln\left[\frac{y}{C_1} + \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}\right] = \pm\left[aC_1 x + C_2\right] \ln e$$

stąd:

$$\frac{y}{C_1} + \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1} = e^{\pm(ax + C_2)} \quad \ldots\ldots\ldots 1)$$

Spostrzegamy, że iloczyn:

$$\left[\frac{y}{C_1} + \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}\right] \cdot \left[\frac{y}{C_1^2} - \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}\right] = 1$$

więc:

$$\frac{y}{C_1} - \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1} = e^{\mp(ax + C_2)} \quad \ldots\ldots\ldots 2)$$

Dodając równania stronami, otrzymamy:

$$\frac{2y}{C_1} = e^{\pm(ax+C_2)} + e^{\mp(ax+C_2)};$$

$$y = \frac{C_1}{2}\left[e^{\pm(ax+C_2)} + e^{\mp(ax+C_2)}\right]$$

lub, co jest to samo:

$$y = \frac{C_1}{2}\cdot\left[e^{ax+C_2} + e^{-(ax+C_2)}\right]$$

§ 22. P o s t a ć C.

Są to równania postaci:

$$f\left(y;\ \frac{dy}{dx};\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

jednorodne względem y i pochodnych $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$, zawartych w równaniu.

Wprowadzamy nową zmienną u stosując podstawienie:

$$y = e^{\int u\cdot dx}$$

gdzie u jest funkcją x.

Wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = u\cdot e^{\int u\cdot dx} \quad \text{i} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}\cdot e^{\int u\cdot dx} + u^2 e^{\int u\cdot dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int u\cdot dx}\left(\frac{du}{dx} + u^2\right).$$

Każda pochodna y-ka względem x jest wyrażona przez pochodną u względem x rzędu odpowiednio o jeden niższego, a dane równanie rzędu 2-go, sprowadzone do równania rzędu 1-go.

P r z y k ł a d. Rozwiązać równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0 \qquad a\ \text{stałe}$$

Rozwiązanie: Stosujemy podstawienie:

$$y = e^{\int u.dx}$$

gdzie u jest na razie nieznaną funkcją x.

Wtedy:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int u\,dx} \cdot \left/\frac{du}{dx} + u^2\right/$$

Dane równanie sprowadzamy do postaci:

$$e^{\int u.dx} \cdot \left/\frac{du}{dx} + u^2\right/ + a^2 . e^{\int u.dx} = 0$$

czyli:

$$\frac{du}{dx} + u^2 + a^2 = 0$$

Rozdzielając zmienne i całkując, otrzymamy:

$$\frac{du}{a^2 + u^2} + dx = 0 \qquad \int \frac{du}{a^2 + u^2} + \int dx = C_1$$

$$\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + x = C_1 \qquad \frac{u}{a} = \operatorname{tg} /aC_1 - ax/$$

$$\underline{\underline{u = a . \operatorname{tg} /aC_1 - ax/}}$$

Wyznaczamy:

$$y = e^{\int u.dx}$$

$$\int u.dx = a \int \operatorname{tg} /aC_1 - ax/ . dx = \ln \cos /aC_1 - ax/ + \ln C_2$$

$$\underline{\int u.dx = \ln C_2 . \cos /aC_1 - ax/.}$$

$$\ln y = \int \cancel{u.dx . \ln e} = \ln C_2 . \cos /aC_1 - ax/$$

$$\underline{\underline{y = C_2 . \cos /aC_1 - ax/.}}$$

§ 23. Ć w i c z e n i a.

Rozwiązać równania różniczkowe:

<u>1.</u> $d^2y = a /bx - 1/ . dx^2$

<u>2.</u> Znaleźć całkę <u>y</u> równania różniczkowego:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12\,x^3 - 4x$$

i <u>całkę szczególną</u> zadość czyniącą <u>warunkom brzegowym</u>

$$x = 0 \quad y = 0 \quad i \quad x = 1 \quad y = \frac{14}{15}$$

3. $x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + x^2 \cdot e^x$

4. $2x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - mx$

5. $x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 3x + 1$

6. $y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$

7. $y'' - \frac{y'}{x} = 2x^2$ 8. $y'' - \frac{a}{y^3} = 0$

O d p o w i e d z i.

1. $y = \frac{ab}{6} \cdot x^3 - \frac{a}{2} \cdot x^2 + C_1x + C_2$

2. Całka ogólna $y = \frac{3}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + C_1 x + C_2$

Całka szczeg. $y = \frac{3}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + x$

3. $y = x \cdot e^x - e^x + C_1x^2 + C_2$ 4. $y = \frac{2}{3} C_1 \sqrt{x^3} - \frac{m}{2} \cdot x^2 + C_2$

5. $y = \frac{3}{4} x^2 + x + C_1 \ln x + C_2$ 6. $y = -\sin x \cdot \cos x - x + C_1 \sin x + C_2$

7. $y = \frac{x^4}{4} + C_1x^2 + C_2$ 8. $C_1/x + C_2/^2 - C_1y^2 + a = 0.$

§ 24. Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu.

Równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu nazywamy równanie postaci:

$$P_2 /x/ \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + P_1/x/ \cdot \frac{dy}{dx} + P_0 /x/ \cdot y = Q /x/.$$

gdzie: $P_2 /x/$; $P_1 /x/$; $P_0 /x/$ i $Q /x/$ są to wiadome funkcje x ciągłe w przedziale a......b ,natomiast zmienna y i jej pochodne są funkcjami niewiadomymi x . Jeżeli wyraz wolny tego równ. $Q/x/$ nie jest równy zeru, to równ. nazywamy niejednorodnym. Jeżeli wyraz $Q /x/$ jest równy zeru, to jednorodnym.

A więc jednorodne równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu jest to równanie postaci:

$$P_2 /x/ \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + P_1 /x/ \cdot \frac{dy}{dx} + P_0 /x/ \cdot y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad /X/$$

Rozważymy wpierw następującą własność równania jednorodnego.

Jeżeli dane są dwie całki szczególne $y_1/x/$ i $y_2/x/$ od siebie liniowo niezależne równania jednorodnego x)

to dowolna liniowa kombinacja tych całek:

$$y/x/ = C_1 \cdot y_1/x/ + C_2 \cdot y_2/x/$$

gdzie C_1 i C_2 są stałe dowolne

jest również całką tego równania.

x) Uwaga. Jeżeli mówimy, że całki y_1 i y_2 są od siebie liniowo niezależne to znaczy, że ich stosunek nie jest stały: czyli że nie możemy dobrać takiej stałej liczby K $/K \neq 0/$, aby miała miejsce równość $y_1 = K \cdot y_2$

Dowodzenie. Jeżeli y_1 i y_2 są całkami równania jednorodnego, to wspólnie ze swymi pochodnymi, po podstawieniu do tego równania, zadość mu czynią:

$$P_2/x/ \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2} + P_1/x/ \cdot \frac{dy_1}{dx} + P_0/x/ \cdot y_1 = 0 \; \ldots\ldots /^{x)}$$

$$P_2/x/ \cdot \frac{d^2 y_2}{dx^2} + P_1/x/ \cdot \frac{dy_2}{dx} + P_0/x/ \cdot y_2 = 0 \; \ldots\ldots /^{x)}$$

Jeżeli y_1 i y_2 zadość czynią równaniu xx), to zadość czynią temu równaniu i iloczyny $C_1 \cdot y_1$ i $C_2 \cdot y_2$, a w takim razie i suma tych iloczynów:

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

Możemy to sprawdzić podstawiając otrzymaną wartość y i jego pochodnych do danego równania xx). Po podstawieniu powinniśmy otrzymać tożsamość.

Sprawdzenie.

Podstawiamy do równania jednorodnego:

$$P_2/x/ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1/x/ \cdot \frac{dy}{dx} + P_0/x/ = 0$$

Wyrażenie:

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

Otrzymamy:

$$P_2 \cdot \left[C_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2} + C_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right] + P_1 \left[C_1 \cdot \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} \right] +$$

$$+ P_0 \cdot \left[C_1 \cdot y_1 + C_2\, y_2 \right] = 0$$

$$C_1 \cdot P_2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + C_1 \cdot P_1 \frac{dy_1}{dx} + C_1 \cdot P_0 y_1 + C_2 \cdot P_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dx^2} +$$

$$+ C_2 P_1 \frac{dy_2}{dx} + C_2 \cdot P_0 y_2 = 0$$

$$C_1 \cdot \left[P_2 \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2} + P_1 \frac{dy_1}{dx} + P_0 \cdot y_1 \right] + C_2 \left[P_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + P_1 \cdot \frac{dy_2}{dx} + \right.$$

$$\left. + P_0 \cdot y_2 \right] = 0.$$

Jak stwierdziliśmy wyżej wyrażenia w nawiasach kwadratowych są równe zeru, a więc:

$$C_1\, 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Całka $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ zawiera dwie stałe dowolne C_1 i C_2.
Geometrycznie wyobraża ona dwuparametrową rodzinę krzywych.

Można dowieść /dowodzenie pomijamy/, że całka ta zawiera wszystkie rozwiązania równania jednorodnego, czyli, że jest jego całką ogólną.

Posługując się całką ogólną $u = C_1 \cdot Y_2 + C_2 \cdot Y_2$ równania jednorodnego, można uzyskać rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego.

Rozważymy tu wypadek szczególny, kiedy jedna z całek szczególnych równania niejednorodnego.

$$P_2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \cdot \frac{dy}{dx} + P_0 \cdot y = Q \qquad \left.\begin{matrix} P_2 \\ P_1 \\ P_0 \\ Q \end{matrix}\right\} \text{są funk. x.}$$

jest nam znana.

Oznaczymy wiadomą całkę szczególną równania niejednorodnego przez Y.

Możemy dowieść, że całką ogólną tego równania jest:

$$y = C_1 . y_1 + C_2 . y_2 + Y = u + Y$$

Wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dY}{dx} \qquad i \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2Y}{dx^2}$$

Podstawiając te wartości do danego równania, otrzymamy:

$$P_2 . \frac{d^2u}{dx^2} + P_1 \frac{du}{dx} + P_o u + \underline{P_2 \frac{d^2Y}{dx^2} + P_1 \frac{dY}{dx} + P_o Y} = Q.$$

Ponieważ wyrażenie podkreślone jest równe Q /zgodnie z założeniem, że Y jest całką danego równania/, więc:

$$P_2 . \frac{d^2u}{dx^2} + P_1 \frac{du}{dx} + P_o . u = 0.$$

Czyli:

$$y = C_1 y_1 + C_2 . y_2 + Y$$

jest rzeczywiście <u>całką ogólną</u> danego <u>równania niejednorodnego</u>.

W wypadku ogólnym wyznaczenie całki ogólnej równania niejednorodnego nasuwa znaczne trudności.

§ 25. Równanie różniczkowe liniowe 2-go rzędu o stałych współczynnikach.

Rozważymy wypadek szczególny równania różniczkowego liniowego 2-go rzędu, ten mianowicie, gdy <u>współczynniki</u> równania a_2 a_1; a <u>są stałe</u>. Jest to równanie postaci:

$$a_2 . \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 . \frac{dy}{dx} + a . y = 0$$

Równanie to możemy rozwiązać, ponieważ możemy znaleźć jego całkę szczególną. Jest nią funkcja wykładnicza:

$$y = e^{r.x}$$ gdzie r jest na razie nieznaną stałą liczbą.

Pochodne tej funkcji są:

$$\frac{dy}{dx} = r \cdot e^{r \cdot x} \quad i \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2 \cdot e^{r \cdot x}$$

Podstawiając wartości y; $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$ do danego równania otrzymamy:

$$a_2 \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot x} + a_1 \cdot r \cdot e^{rx} + a \cdot e^{rx} = 0.$$

Ponieważ $e^{r \cdot x}$ jest różne od zera /dla każdej wartości x/ więc po skróceniu otrzymamy:

$$a_2 \cdot r^2 + a_1 \cdot r + a = 0$$

Równanie to nazywamy równaniem charakterystycznym danego równania różniczkowego.

Dochodzimy do wniosku, że $y = e^{r \cdot x}$ jest rzeczywiście całką szczególną danego równania pod warunkiem jednak, aby liczba r była pierwiastkiem równania charakterystycznego.

Rozwiązując równanie charakterystyczne napotykamy trzy wypadki.

§ 26. Pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i różne.

Pierwiastki równania charakterystycznego r_1 i r_2 są rzeczywiste i różne. $a_1^2 - 4a \cdot a_2 > 0$. Mamy w tym wypadku dwie całki szczególne danego równania:

$$y_1 = e^{r_1 \cdot x} \quad i \quad y_2 = e^{r_2 \cdot x}$$

Całki te są liniowo niezależne, bo ich iloraz:

$$\frac{e^{r_1 \cdot x}}{e^{r_2 \cdot x}} = e^{(r_1 - r_2) \cdot x}$$

jest liczbą zmienną.

Całka ogólna danego równania jest kombinacją liniową dwóch jego całek szczególnych

$$y = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}$$

Przykład I. Znaleźć całkę ogólną równania:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3.\frac{dy}{dx} - 28.y = 0.$$

Podstawiamy:

$$y = e^{r.x} ; \quad \frac{dy}{dx} = r.e^{rx} ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2.e^{rx}$$

$$r^2.e^{rx} - 3r.e^{rx} - 28.e^{rx} = 0.$$

Stąd równanie charakterystyczne:

$$r^2 - 3r - 28 = 0$$

Pierwiastki równania charakterystycznego: $r_1 = -4$; $r_2 = 7$

Całka ogólna danego równania:

$$y = C_1.e^{-4x} + C_2.e^{7x}$$

Przykład II. Znaleźć całkę ogólną równania:

$$y'' - y' - y = 0$$

Wyznaczamy równanie charakterystyczne:

$$r^2 - r - 1 = 0$$

i jego pierwiastki

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Całka ogólna danego równania:

$$y = C_1.e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + C_2.e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

§ 27. Równanie charakterystyczne ma pierwiastek dwukrotny.

Równanie charakterystyczne ma pierwiastek dwukrotny. $a_1^2 - 4a.a_2 = 0$. W tym wypadku $r_1 = r_2$, a więc mamy tylko jedną całkę szczególną danego równania:

$$y_1 = e^{r.x}$$

Łatwo się przekonać, że drugą całką szczególną równania jest:

$$y_2 = x.e^{r.x}$$

Możemy to sprawdzić przez podstawienie:

Całka ogólna danego równania jest kombinacją liniową dwóch jego całek szczególnych

$$\underline{y = C_1.e^{rx} + C_2 . x .e^{rx}}$$

Przykład. Znaleźć całkę ogólną równania:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6.\frac{dy}{dx} + 9 = 0.$$

Wyznaczamy równanie charakterystyczne:

$$r^2 - 6.r + 9 = 0.$$

i jego pierwiastki:

$$r_1 = r_2 = 3$$

Całka ogólna danego równania:

$$\underline{y = C_1 .e^{3x} + C_2.x.e^{3x}}$$

§ 28. Równanie charakterystyczne ma pierwiastki zespolone

Równanie charakterystyczne ma pierwiastki zespolone.

$\underline{a_1^2 - 4a.a_2 < 0}$. Równanie, posiadające pierwiastek zespolony, posiada, jak wiadomo, drugi pierwiastek z nim sprzężony. A więc równanie charakterystyczne ma pierwiastki sprzężone. Oznaczymy je:

$$r_1 = b - c.i \qquad i \qquad r_2 = b + c.i$$

Gdzie b i c są liczbami rzeczywistymi.

Z kursu rachunku różniczkowego wiemy, że:

$$e^{xi} = \cos x + i\cdot \sin x \qquad i \qquad e^{-xi} = \cos x - i \sin x$$

Dwie całki szczególne danego równania są:

$$y_1 = e^{/b-c.i/.x} = e^{bx}.e^{-c.x.i} = e^{b.x}.\left[\cos c.x - i.\sin c.x\right]$$

$$y_2 = e^{/b+c.i/x} = e^{b.x}.e^{c.x.i} = e^{b.x}.\left[\cos cx + i \sin c.x\right]$$

Wprowadzamy stałe dowolne C_1 i C_2.

$$C_1 \cdot y_1 = e^{bx} \cdot C_1 \cdot \left[\cos c.x - i \cdot \sin c.x \right]$$

$$C_2 \cdot y_2 = e^{b.x} \cdot C_2 \cdot \left[\cos c.x + i \sin c.x \right]$$

stąd:

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 y_2 = e^{b.x} \cdot \left[/C_1 + C_2/ . \cos c.x + \right.$$

$$\left. + /C_1 - C_2/ . i . \sin . c.x \right]$$

Ażeby uzyskać całkę ogólną wyrażoną przez liczby rzeczywiste, zamienimy stałe dowolne C_1 i C_2 przez stałe dowolne rzeczywiste: K_1 i K_2. Oznaczając :

$$C_1 = \frac{K_1 - K_2 . i}{2} \qquad C_2 = \frac{K_1 + K_2 . i}{2}$$

Dodając stronami, a później odejmując i po odjęciu mnożąc obie strony przez i otrzymamy:

$$C_1 + C_2 = K_1 \quad ; \quad C_1 - C_2 = - K_2 . i \qquad /C_1 - C_2/ . i = K_2$$

Po podstawieniu całka ogólna przyjmie postać:

$$y = e^{b.x} \cdot \left[K_1 \cdot \cos c.x + K_2 . \sin c.x \right]$$

nie zawierającą liczb urojonych.

Przykład. Znaleźć całkę ogólną równania:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 8 . \frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

Wyznaczamy równanie charakterystyczne:

$$r^2 + 8r + 25 = 0$$

i jego pierwiastki:

$$r_1 = - 4 - 3i \qquad r_2 = - 4 + 3i$$

Całka ogólna danego równania:

$$y = e^{-4x} . \left[K_1 . \cos 3x + K_2 . \sin 3x \right] .$$

Niekiedy całce ogólnej nadajemy inną postać, zamieniając stałe dowolne K_1 i K_2 przez nowe stałe dowolne A i q:

$$K_1 = A.\cos q \quad i \quad K_2 = A.\sin q$$

Otrzymamy całkę ogólną w postaci zawierającej tylko jedną funkcję trygonometryczną:

$$y = A \cdot e^{bx} \cdot \cos /cx - q/.$$

§ 29. Przykład drgań mechanicznych nietłumionych.

Punkt materjalny o masie m porusza się po prostej. Punkt odległy jest o x od swego położenia równowagi, które znajduje się w punkcie O. Na punkt materjalny działa siła ~~xxxxxxxxxxx~~ proporcjonalna do wielkości odchylenia od punktu O i skierowana stale ku temu punktowi.

Mamy wyznaczyć $x/t/$ jako funkcję odchylenia zależną od czasu t.

Rozwiązanie: Zgodnie z prawem Newton'a iloczyn masy m przez przyspieszenie $\frac{d^2x}{dt^2}$ jest równy sile czynnej. A więc równanie różniczkowe ruchu, ma postać:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = - a.x \qquad \text{gdzie} \quad \frac{a > 0 \ \text{współcz. proporcjonal.}}{m > 0 \ \text{masa punktu mater.}}$$

Równanie charakterystyczne danego równania różniczkowego jest:

$$m.r^2 + a = 0, \qquad \text{oznaczając } \frac{a}{m} = c^2 \quad / \frac{a}{m} > 0 /$$

otrzymamy:

$$r^2 + c^2 = 0.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego są urojone:

$$r_1 = - c.i \qquad r_2 = c.i$$

A więc całka ogólna równania różniczkowego:

$$x = K_1 . \cos c.t + K_2 . \sin c.t.$$

Zamieniając stałe dowolne K_1 i K_2 przez nowe stałe dowolne A i q:

$$K_1 = A . \cos q \quad \text{i} \quad K_2 = A_2 . \sin q$$

otrzymamy całkę ogólną w postaci:

$$x = A . \cos /c.t - q/$$

Jak widzimy całka ogólna jest funkcją cosinus'a, a więc funkcją okresową czasu t. Wiemy, że stała dowolna A jest amplitudą cosinusoidy, a q przesunięciem fazy. Ponieważ cosinus zmienia się od -1 do $+1$, więc ze wzoru całki ogólnej wynika, że droga x zmienia się od $-A$ do $+A$, czyli, że ruch punktu materjalnego jest okresowy i drgający. A i C są stałe, a więc drgania odbywają się bez zmiany okresu i amplitudy.

Jest to oczywiście uproszczone ujęcie zjawiska; w rzeczywistości na punkt materjalny działa oprócz siły $-ax$ również siła oporu środowiska. Wypadek ten rozważymy oddzielnie w §-ie następnym.

§ 30. Przykład drgań mechanicznych tłumionych.

Rozważymy teraz wypadek, gdy na punkt materjalny odchylony od swego położenia równowagi O o x jednostek działają dwie siły.

1. Siła usiłująca przesunąć punkt materjalny ku punktowi O. Siła ta, jak wiemy, jest proporcjonalna do wielkości odchylenia x /wyznacza ją iloczyn $-ax$, gdzie $a > o$ współcz.prop./ i
2. Siła oporu środowiska, która jest proporcjonalna do prędkości ruchu punktu $\frac{dx}{dt}$ /wyznacza ją iloczyn $-b . \frac{dx}{dt}$, gdzie $b > o$ współcz.prop./.

Mamy wyznaczyć $x/t/$ jako funkcję odchylenia, zależną od czasu t.

Rozwiązanie. Równanie różniczkowe ruchu w tym wypadku ma postać:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = - b \cdot \frac{dx}{dt} - ax \qquad \text{gdzie} \quad \begin{matrix} m > 0 & \text{masa punktu} \\ b > 0 & \text{dodatn.współ.} \\ a > 0 & \text{prop.} \end{matrix}$$

Równanie charakterystyczne równania różniczkowego jest:

$$m^2 . r^2 + br + a = 0 \qquad \text{Oznaczając} \quad \frac{b}{m} = 2L \quad /L > 0/$$

$$\frac{a}{m} = K \quad /K > 0/$$

Otrzymamy:

$$r^2 + 2.L.r + K = 0.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego są:

$$r_1 = - L - \sqrt{L^2 - K^2} \quad \text{i} \quad r_2 = - L + \sqrt{L^2 - K^2}$$

Możliwe tu są trzy wypadki:

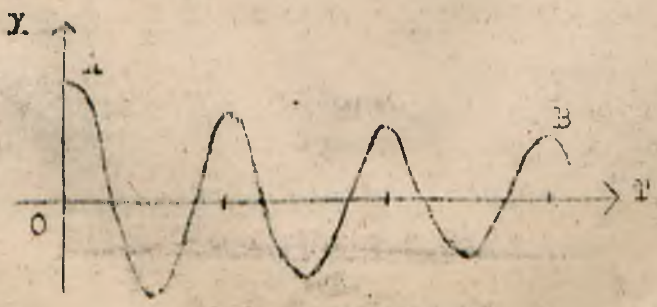
Wypadek I-szy. Opór jest mały i ma miejsce nierówność $L^2 < K^2$. Pierwiastki równania charakterystycznego są zespolone i sprzężone:

$$r_1 = - L - i\sqrt{K^2 - L^2} \quad \text{i} \quad r_2 = - L + i\sqrt{K^2 - L^2}$$

W tym wypadku całka ogólna równania /§28/ ma postać:

$$x = A \cdot e^{-L.t} . \cos \left[\sqrt{K^2 - L^2} . t - q \right]$$

Amplituda drgania $A . e^{-L.t}$ zawiera zmienny czynnik $e^{-L.t}$ malejący w miarę wzrastania czasu t. Natomiast okres wahania pozostaje bez zmiany. Mamy do czynienia z ruchem o zanikających drganiach, wyobrażonym niżej na rysunku przez krzywą AB.



Wypadek II-gi. Opór jest zwiększony o tyle, że ma miejsce równość $L^2 = K^2$. Równanie charakterystyczne ma pierwiastek rzeczywisty dwukrotny:

$$r_1 = r_2 = - L$$

W tym wypadku całka ogólna równania /§27/ ma postać:

$$x = e^{-L.t} . \left[C_1 + C_2 .t \right]$$

Ze wzoru całki ogólnej wynika, że funkcja x jeden raz tylko może osiągnąć wartość zerową, gdy $t \to \infty$. A więc wahań nie będzie i ruch nie będzie drgający.

Wypadek III. Opór jest duży. Ma miejsce nierówność $L^2 > K^2$

Pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i różne:

$$r_1 = -L - \sqrt{L^2 - K^2} \quad \text{i} \quad r_2 = -L + \sqrt{L^2 - K^2}$$

W tym wypadku całka ogólna równania /§26/ ma postać

$$x = C_1 .e^{r_1 .t} + C_2 .e^{r_2 .t}$$

Ze wzorów, wyznaczających pierwiastki widzimy, że obydwa r_1 i r_2 są ujemne. Wobec tego ze wzoru całki ogólnej wynika, że funkcja x jeden raz tylko może osiągnąć wartość zerową, gdy $t \to \infty$. Wahań nie będzie i ruch nie będzie drgający.

§ 31. Ćwiczenia.

Rozwiązać równania różniczkowe jednorodne o współczyn. stałych.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2.\frac{dy}{dx} - 15 = 0$ 2. $3.\frac{d^2y}{dx^2} + 7.\frac{dy}{dx} - 6 = 0$ 3. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$

4. $y'' + 4y' + 1 = 0$ 5. $y'' - 4y' + 20 = 0$ 6. $25y'' + 20y' + 4 = 0$

7. $y'' - 2.y' + 1 = 0$ 8. $y'' + 2\sqrt{5}.y' + 5 = 0$ 9. $y'' + 3y' + 5 = 0$

Odpowiedzi.

1. $y = C_1.e^{-3x} + C_2.e^{5x}$ 2. $y = C_1.e^{-3x} + C_2.e^{2/3 x}$ 3. $y = C_1 + C_2.e^{x}$

4. $y = C_1.e^{(-2-\sqrt{3})x} + C_2.e^{(-2+\sqrt{3})x}$ 5. $y = e^{2x}.\left[K_1.\cos 4x + K_2.\sin 4x\right]$

6. $y = C_1.e^{-\frac{2}{5}x} + C_2.x.e^{-\frac{2}{5}x}$ 7. $y = e^{x}.\left[C_1 + C_2.x\right]$

8. $y = C_1.e^{-\sqrt{5}x} + C_2.x.e^{-\sqrt{5}x}$ 9. $y = e^{-\frac{3}{2}x}.\left[K_1.\cos\frac{\sqrt{11}}{2}.x + K_2.\sin\frac{\sqrt{11}}{2}.x\right]$
